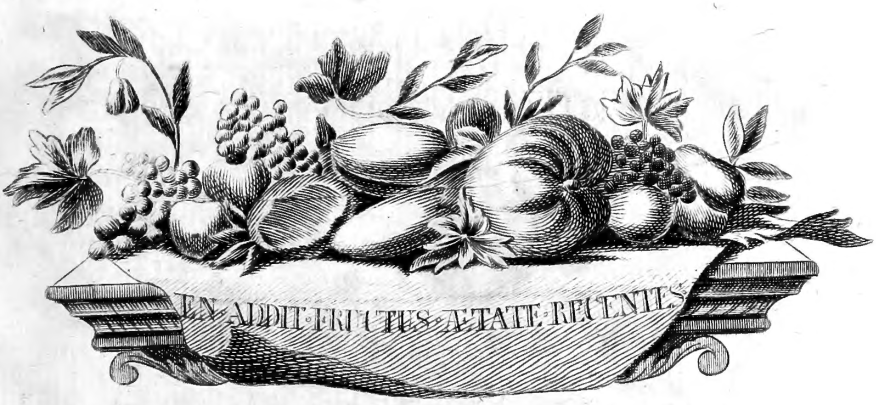
1/2 4 10

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XIII.

pro Anno MDCCLXVIII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXIX.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XIII.

MATHEMATICA.

I.

De curua Hypergeometrica hac aequatione expressa.

$$y = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, x.$$

Auctore L. Eulero pag. 3.

In praesenti dissertatione Illustr. Auctor proprietates singularis cuiusdam curuae explicat, quam nomine hypergeometricae insigniuit eam ob caussam, quod si huius curuae abscissae secundum ordinem numerorum naturalium capiantur, applicatae progressionem hypergeometricam *Wallisii* sequantur. Etiamsi vero minus pateat, quomodo ex aequatione proposita, indoles curuae pro iis casibus definiatur; vbi x per numeros fractos exprimitur, in genere tamen liquet hanc aequationem etiam ad istos casus applicari posse, quoniam ex eadem omnino pateat, si pro $x = p$, sit $y = q$, fore quoque pro $x = p + 1$, $y = q(p + 1)$ atque pro $x = p - 1$, $y = \frac{p}{q}$. Insignes vero curuae commemoratae proprietates, quas hic contemplatus est Illustr. Auctor, quatuor omnino quaestionibus continentur, quarum *prima* in eo verſatur, vt inueſtigetur pro hac curua aequatio continua inter abſciſſam x et applicatam y, quae pro ſingulis valoribus ipſius x locum inuentura ſit, *ſecunda* rationem exponit, qua directio tangentis ad datum quoduis curuae punctum definiatur, *tertia* vero indolem portionis minimae huius curuae, circa id punctum ſitae determinat et denique *quarta* naturam curuae circa punctum eius infimum, vbi applicata eſt minima definit. Pro prima vero quaeſtione reſoluenda, quum aequatio primum propoſita, in alias ex factoribus in infinitum excurrentibus compoſitas, variis modis transformari queat, ex quibus nouis aequationibus iterum alias deriuare licet; praecipuae earum §. 12. recenſentur, vt ex illis quouis caſu, quae maxime ad vſum accommodatae videntur eligi poſſint. Praeter iſtas vero aequationes occurrunt quoque tales, vbi applicata y per aequationem integralem definitur, erit enim poſito $x = p$, nouamque variabilem u introducendo $y = \int du\, (\mathrm{L}\frac{1}{u})^p$, integratione nimirum a termino $u = 0$ vsque ad $u = 1$ peracta, ſimili quoque ratione erit $y = \int e^{-v}\, v^p\, dv$, vbi integratio a valore $v = 0$ vsque ad $v = \infty$ extenditur. Pro inueſtiganda ad datum quoduis curuae punctum eius tangente, imprimis adhibita eſt aequatio V ex §. 12, quippe quae huic negotio maxime viſa eſt idonea, deinceps autem formula generalis pro tangentis determinatione inde deriuata, ad praecipua huius curuae puncta adplicata eſt. Similiter

militer ad binas vltimas quaestiones explicandas, aequatio haec V in vsum vocata est, vnde non solum tractus curuae egregie illustratur, sed etiam radius curuaturae eiusque variatio per formulas maxime concinnas definitur.

Quum vero Illustr. Auctor obseruauerit formulam 1. 2. 3 . . . . x exprimi quoque posse per hanc seriem:

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}(x-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-3)^x + \text{etc.}$$

quae quidem series etiamsi ad curuae hypergeometricae naturam explicandam non admodum sit idonea, Geometrarum tamen attentione quam maxime digna videtur; hinc reliquam huius dissertationis partem, vberiori huius seriei explicationi destinauit, vbi eam statim in generaliorem transmutauit substituendo in exponentibus n loco x et in coefficientibus m loco x, ex quo igitur apparet, si fuerit $n = m$, fore summam huius seriei $= 1. 2. 3 \ldots m$. Quomodo autem pro aliis casibus quibus m et n sunt inaequales, haec summa comparata esse debeat, de eo imprimis fusius heic agitur. Et generatim quidem demonstratur, si fuerit $n < m$, positis ambobus numeris n et m integris, vel saltem $m - n$ numero integro positiuo, fore summam huius seriei $= 0$. Pro hac autem summa definienda, vbi $n > m$ speciales primo euoluuntur casus, quibus $n = m + 1$, $n = m + 2$ vel $n = m + 3$ etc. tum vero idem in genere perficitur pro valore ipsius $n = m + \lambda$,

quae

quae quidem ſummatio egregiam ſeriei allatae transformationem ſuppeditat, quam igitur Illuſt. Auctor alia deinceps via magis directa inueſtigare, operae pretium iudicauit. Atque haec demum inueſtigatio, occaſionem ſubminiſtrauit, eiusmodi ſummationes multo generalius perficiendi, ita vt denotante $\phi : x$ functionem quamcunque ipſius x, etiam ſumma huius ſeriei:

$$s = \phi : x - m\phi : (x-1) + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2}\phi : (x-2) - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\phi : (x-3) + \text{etc.}$$

aſſignari queat.

II.

Quomodo numeri praemagni ſint explorandi, vtrum ſint primi, nec ne?

Auctore L. Eulero pag. 67.

Inter maximi momenti quaeſtiones Arithmeticas, praecipuum omnino locum tenet illa, qua quaeritur de methodo explorandi naturam numerorum, vtrum primi ſint nec ne? Quamuis autem hoc ipſum, vix alia ratione generaliter perfici poſſe videatur, quam operatione vulgari, qua diuiſio per omnes numeros primos, radice quadrata numeri pro-

propoſiti minores eſt tentanda; quum tamen haec operatio pro numeris mediocriter magnis, iam operoſior ſit, quam vt ſuſcipi queat, hinc operae omnino pretium erat, eiusmodi methodum tradere, quae etiamſi pro certo tantum numerorum genere valeat, ad numeros tamen quantumuis magnos ſub eo comprehenſos, explorandos applicari poſſit. Quum itaque Illuſtr. Auctor poſt Fermatium obſervauerit omnes numeros primos in hac forma $4n+1$ contentos non niſi vnico modo, in duos numeros quadratos reſolui poſſe, exinde viciſſim colligit numeros huius formae $4n+1$, qui vnico modo in duo quadrata reſoluuntur fore numeros primos, illis tamen numeris exceptis, qui ipſi ſunt quadrati. Examen igitur hoc ita inſtituendum eſt, vt a numero propoſito, omnes numeri quadrati ipſo minores ſubtrahantur, eaque reſidua notentur, quae etiam numeri ſunt quadrati, vbi ſi fiat, vt vel nullum vel plura talia dentur reſidua, tum tuto colligere licet, numerum eſſe compoſitum; ſin autem vnicum detur, erit numerus propoſitus vel primus vel ipſe quadratus, qui duo caſus facile ab inuicem dignoſcuntur. Liquet autem pro hoc fine obtinendo ſufficere, ſi a numero propoſito tantum quadrata ſemiſſi maiora ſubtrahantur, quo ipſo numerus ſubtractionum ad trientem fere redigitur. Quum vero etiam haec operandi ratio pro numeris praemagnis nimis ſit moleſta, eae ſubtractiones heic excludendae ſunt, quae ad talia reſidua perducant, quae cum quadratorum natura consistere nequeunt, qualia sunt, quae his formis continentur $3m+2$, $5m+2$, $5m+3$ etc. Si igitur numerus propositus $N=4n+1$ simul contineatur in his formis $3m+2$ et $5m+2$ vel $3m+2$ et $5m+3$, inde perspicitur quales esse debeant numeri, quorum quadrata subtrahenda sunt. Scilicet pro 1^{ma} specie, qua $N=4n+1$ per has formas $3m+2$, $5m+2$ exprimitur, continebitur N in hac formula $60n+17$, vnde si $N=xx+yy$, erit x vel y, huius formae $15p\pm(1.4)$, nempe vel $15p\pm1$, vel $15p\pm4$. Pro altera deinceps specie, qua $N=4n+1$, duplici forma $3m+2$ et $5m+3$ exprimi potest, erit quoque idem N huius formae $60.n+53$, vnde ab eo, ista solum quadrata subtrahenda sunt, quorum radices in forma $15p\pm(2.7)$ continentur. Omnes vero numeri formae $4n+1$, quum sub his quatuor speciebus comprehendantur:

$$16.n+1,\ 16.n+5,\ 16.n+9,\ 16.n+13$$

si hae quatuor species, cum binis praecedentibus combinentur, orientur inde octo nouae species, pro quibus formae radicum numerorum subtrahendorum facile exhibentur, atque tum demum totidem nouae species orientur, si formae $32.n+5$, $32.n+13$, $32.n+21$, $32.n+29$ cum binis principalibus combinentur. Quae autem et quales sint pro quouis casu, formae radicum numerorum subtrahendorum ex ipsa Dissertatione addiscendum est, ad quam studio-

ſtudioſe euoluendam Lectores ablegamus, id tantum obſeruantes, quod numeri primi hac ratione explorati 3861317 atque 10091401 tam magni ſint, vt non ſine labore taediosiſſimo, methodo vulgari, eorum indoles inueſtigari poſſit; quamobrem liquet examen heic allatum, eo maioris eſſe habendum, quod ad numeros maximos ſine vlla calculi prolixitate applicari poſſit.

III.

Noua criteria radices aequationum imaginarias dignoſcendi.

Auctore L. Eulero pag. 89.

Quae a *Newtono* aliisque poſt eum Geometris, allata fuerunt criteria, ex quibus cognoſci poſſet, vtrum aequatio aliqua radices habeat imaginarias nec ne? licet in ſe quidem vera et indubia ſint, ad finem tamen propoſitum obtinendum minime ſufficere inueniuntur, quum nimirum quoties radices imaginarias indicent, tales quidem re vera aequationi ineſſe deprehendantur, quando autem nullam radicem imaginariam indicent, ſaepenumero tamen fieri poſſit, vt eiusmodi aequationis vel plures vel adeo omnes radices ſint imaginariae. Hoc autem imprimis euenire ſolet in eiusmodi aequationibus vbi duo ſigna eiusdem naturae ſe continuo inſequuntur, ſic nimirum in aequatione biquadratica: $x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0$, quamuis ad praeſcriptum criteriorum iam dictorum. nulla radix imaginaria reperiretur; tamen certiſſimum eſt, omnes eius radices eſſe imaginarias, quippe quum eadem aequatio reſoluatur in has duas quadraticas $xx + 8x + 18 = 0$ et $xx - 4x + 6 = 0$. In hac igitur diſſertatione Illuſtr. Auctor doctrinam de criteriis radicum imaginariarum accuratius pertractandam ſibi propoſuit, quem in finem, primum methodos explicauit, quibus Auctores vſi ſunt ad haec criteria inuenienda, tum vero oſtendit, quomodo multo pluro eiusmodi criteria erui queant. *Primum* autem *principium* in hac doctrina adhibitum in eo conſiſtit, quod ſi omnes aequationis cuiusdam radices ſint reales, et ex hac alia aequatio formetur, cuius radices aequentur quadratis illarum, tum neceſſario fieri debere, non ſolum, vt omnes aequationis ſic formatae radices ſint reales, ſed etiam poſitiuae, ex quo principio iam magnam huiusmodi criteriorum copiam deriuare licet. Euidens autem eſt, quod hoc principium multo latius extendi queat, adeo vt ex aequatione quauis propoſita, aliae deriuari poſſint, quarum radices ſint vel cubi, vel biquadrata, vel altiores quaeuis poteſtates radicum aequationis propoſitae. *Secundum principium* in eo continetur qnod ſumma quadratorum ex differentiis radicum conſtituat numerum poſitiuum, vnde ſi

ſumma

ſumma omnium radicum dicatur a et ſumma productorum ex binis b, elicitur $aa > \frac{2n}{n-1} b$. Per *tertium principium* haec criteria ea ratione indagantur, quod ex aequatione propoſita duae aliae deriventur, de quibus etiam certi eſſe poſſumus omnes earum radices eſſe reales, ſi modo ſingulae aequationis propoſitae radices fuerint reales. Prima vero harum oritur, ſi ſinguli aequationis propoſitae termini, per ſeriem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, etc. multiplicentur; ſecunda vero ſi iidem termini in hanc progreſſionem arithmeticam 0, 1, 2, 3 etc. ducantur. Ex his duabus aequationibus gradus $n-1$, deinceps tres nouae gradus $n-2$ deducuntur, vnde continuata hac operatione demum ad aequationes ſecundi gradus peruenire licet, quae autem criteria in aequationibus ſic deriuatis locum habent, eadem quoque ad aequationem primum propoſitam applicari poterunt. Quoniam vero nimis operoſum foret, ſi per eiusmodi depreſſionem aequationum a gradu ſuperiori ad inferiorem hoc negotium perficeretur, hinc Illuſtr. Auctor generalem tradidit methodum, qua ex aequatione cuiuscunque gradus, iſtiusmodi aequatio quadratica ſtatim elici poteſt. His itaque criteriis abſolutis, quae ex charactere aequationum quadraticarum deriuantur, ſequuntur ea, quae ſimili ratione ope characteris aequationum cubicarum eruuntur, et quorum Illuſtr. Auctor primus mentionem fecit. Poſtquam igitur characterem completum pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices ſunt reales inueſtigauerit; oſtendit quomodo criteria inde deriuata, ad aequationes cuiuscunque gradus applicari debent, quod fit, iſtiusmodi aequationes ad aequationes tertii gradus ratione iam ante expoſita deprimendo. Vt autem hoc facilius et expeditius inſtitui queat, oſtenditur quomodo in genere ex quauis aequatione, aequationes cubicas elicere poſſimus, quorum characteribus in vſum vocatis, oriuntur criteria pro relatione inter quaternos quosque coefficientes ſucceſſiuos, quorum ope dignoſcere licet, an aequationis propoſitae radices ſint reales nec ne? Simili negotio ex charactere aequationum biquadraticarum radices reales exhibente, criteria erui poſſent pro exprimenda relatione inter quinos quosque coefficientes aequationis propoſitae; ſed quum hae formulae nimis euaderent prolixae, iis inueſtigandis non incumbendum eſſe videtur. Denique ad finem huius diſſertationis Illuſtr. Auctor exponit, quomodo ſingula haec criteria, ex duobus tantum principiis, idque methodo admodum ſingulari nec non concinna, deducantur.

IV.

IV.

Considerationes de Theoria motus Lunae perficienda et imprimis de eius variatione.

Auctore L. Eulero pag. 120.

Postquam summi nostro seculo Geometrae in eo suam exercuerunt industriam, vt Theoriam motuum Lunae omni studio perficerent atque a Celeberr. *Mayero* Tabulae Lunares obseruationibus apprime conformes constructae sunt, facile in eam quis induci posset opinionem, hanc ipsam Theoriam ad summum perfectionis gradum euectam esse; tantum autem abest, vt de eo sibi gratulari queant Analystae, vt potius multae adhuc inaequalitates Lunae supersint, quae neque ex Theoriis ab Auctoribus in medium allatis nec ex Tabulis *Mayerianis* assignari possunt, atque etiamsi hae, quoniam admodum paruae sint, facile in praxi negligi possunt, in Theoria tamen minime praetermittendae videntur, quoniam ea, si perfecta erit, omnium prorsus inaequalitatum rationem reddere debebit. Vt autem Theoria feliciter excolatur, consultum omnino est, non statim a vero motu Lunae initium facere, quoniam explicatio perturbationum, quibus verus motus Lunae tam secundum longitudinem

quam

quam latitudinem afficitur, ipſas Analyſeos vires ſuperare videtur. Caſus igitur primum fingendi ſunt ſimpliciores et quidem ante omnia motus Lunae in latitudinem remouendus videtur, adeo vt iam inueſtigandum ſit, qualis foret motus Lunae, ſi in ipſo Eclipticae plano incederet, tum vero quo adhuc maior facilitas obtineatur, motum Solis tamquam vniformem ſpectare licet, vnde id commodi naniſcimur, vt nullae aliae inaequalitates inueſtigandae ſuperſint, niſi quae ab excentricitate orbitae Lunaris atque ab elongatione Lunae a Sole originem ducunt. Sin vero adhuc maior ſimplicitas deſideretur, ipſa conſideratio excentricitatis orbitae Lunaris negligi poteſt, adeo vt iam quaeſtio ſit, de inueſtigando motu Lunae, ſi in ipſo Eclipticae plano, ſine vlla excentricitate incederet, Sole motum ſuum vniformiter abſoluente. Hoc itaque inſtitutum, quum Illuſtr. Auctor in praeſenti diſſertatione perſequi ſibi propoſuiſſet, primum formulas differentiales exponit, quibus motus Lunae in ecliptica incedentis atque tam verſus Solem quam terram, ſecundum legem attractionis *Newtonianam* impulſae, definitur, ex quibus formulis poſtquam ope diſtantiae mediae Lunae a terra et ratione inter motum medium Solis et Lunae data, conſiderationem maſſarum Solis Lunae et terrae eliminauerit, oſtendit quoque qua ratione hae formulae differentiales ad integrationem perduci poſſunt. Hoc vero abſoluto, explicat quomodo excentricitatem orbitae Luna-

Lunaris in computum ducendo, ad formulas differentiales primi gradus peruenire liceat, quae in calculo Aftronomico cum infigni emolumento adhiberi poffunt. Duplicem vero imprimis talem heic adhibuit reductionem, quarum quidem priorem iam alibi fufius explicauerat, vtramque tamen heic fimul exponere voluit, vt de commodis ex vnaquaque earum redundantibus iudicium ferri poffit. Reductionem autem deinceps generaliorem, quae binas praecedentes in fe complectitur, exhibet. His autem reductionibus adhibitis, variationes tam femiparametri orbitae, quam excentricitatis et lineae apfidum formulis admodum concinnis et ad vfum practicum accommodatis definiuntur, et praecipue quidem fi excentricitas fatis fit notabilis, primam reductionem in vfum vocare licet; fin autem excentricitas fuerit quam minima vel adeo nulla, neutra harum reductionum vti fas eft. Quum vero hic cafus merito pro fimpliciffimo fit habendus, hinc Illuftr. Auctor ad eum euoluendum aequationes differentio-differentiales primum allatas denuo confiderationi fubiecit, indeque approximationes huic inftituto idoneas eruit. Atque inuentis fic binis aequationibus quibus motus Lunae continetur, operae pretium iudicauit, fingulos eorum terminos euolvere; adeo vt hinc pro cafu iam allato, ad datam quamuis longitudinem Solis mediam, tam longitudo Lunae, quam diftantia eius a terra numeris abfolutis exprimi poffit.

V.

Annotatio quarundam cautelarum in inueſtigatione inaequalitatum, quibus corpora coeleſtia in motu perturbantur obſeruandarum.

Auctore L. Eulero pag. 159.

Quod *Newtonus* de corporibus coeleſtibus primus demonſtrauit, ea hac lege moueri, vt ſe mutuo in ratione duplicata inuerſa diſtantiarum attrahant, id adeo ſufficienter per obſeruationes comprobatum eſt, vt nullum ſuperſit dubium, quin haec ſit genuina lex, ſecundum quam omnium corporum coeleſtium motus peragantur. Quemadmodum enim theoria Lunae huic principio ſuperſtructa, cum obſeruationibus optime congruat, adeo vt pro indubio haberi debeat, Lunam tam verſus ſolem, quam terram ſecundum regulam *Newtoni* commemoratam impelli; ſic quoque dubitare non licet, quin anomaliae iſtae, quae in motibus reliquorum planetarum, tam primariorum quam ſecundariorum obſeruantur, ſimilibus cauſſis ſint attribuendae. Et quidem in Saturno et Ioue perturbationes hae manifeſte ſe produnt, in eorum autem Satellitibus perſimiles motuum variationes obſeruantur ac in Luna. In Marte vero, terra, Venere et Mercurio, quamuis

hae

hae anomaliae, non adeo ſint conſpicuae, multum tamen a vero aberraret, qui horum Planetarum motum regulis *Keplerianis* penitus conformem ſtatuere vellet. Id enim ſi locum obtineret, in ipſorum orbitis neque lineae nodorum vllus motus, nec apſidum variatio aliqua obſeruaretur; quod tamen quum ſecus ſit, manifeſto inde colligitur hos planetas non vnice verſus Solem impelli, ſed quoque in ſe mutuo agere, ex qua etiam cauſſa ſine dubio quaedam inaequalitates in ipſo motu eorum oriri debent, etiamſi eaedem vix perceptibiles ſint. Vt igitur omnia corporum coeleſtium phaenomena rite explicari queant, in vſum vocanda eſt reſolutio iſtius problematis, quo quaeritur de motu trium aut plurium corporum, quae ſe mutuo attrahunt in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Hoc autem problema in genere ſpectatum difficilius eſſe videtur, quam vt ſpes aliqua eſſe poſſit, illius reſolutionem completam aliquando inueniri poſſe. Ratio autem huius difficultatis non in Mechanica quaerenda eſt, quippe quum vires corporum acceleratrices, indeque ipſae accelerationes eorum facillime definiri et formulis exprimi poſſint; ſed in ipſa Analyſi continetur, quoniam aequationes differentio-differentiales quibus hae accelerationes exprimuntur, plerumque adeo ſunt complicatae, vt reſolui nequeant. Hinc igitur videtur completam et omnibus numeris perfectam Theoriam motuum coeleſtium exſpectari non poſſe, quousque methodus generalis non pateat, aequationes differentio - differentiales in quibus variabiles vtcunque inter se sunt permixtae resoluendi. Licet vero hoc problema adeo generaliter spectatum tantis implicetur difficultatibus, pro casibus tamen specialibus fieri potest, vt illae difficultates multum diminuantur. Sic cum quaestio est de definiendo motu Lunae, qualis ex terra spectatur, haec commoda quae solutionem faciliorem reddunt, obtinentur, primum vt motum Solis apparentem tamquam cognitum spectare liceat, deinde distantia Lunae prae distantia Solis admodum fit exigua, tum vero excentricitas orbitae et inclinatio eius ad planum eclipticae satis paruae fiunt. Si vero supponeretur Lunam adeo a terra fuisse remotam, vt Martis vel Veneris locum occupet, tum eueniet vt Luna motum planetae primarii sequeretur, eiusque perturbationes simili ratione determinandae essent, ac perturbationes motus Saturni vel alius cuiusdam planetae primarii. In vtroque igitur hoc casu, diuerso plane modo inaequalitates motus Lunae determinandae sunt, quippe quum in priori Luna ellipsin circa terram esset descriptura, in altero vero circa Solem. Qui igitur veram motus Lunae theoriam tradere vult, illi incumbit eam ita exponere, vt pro omni Lunae situ et statu locum obtineat. Haec autem non solum de motu Lunae valent, sed ad reliqua quoque corpora coelestia applicari possunt. Propositis igitur tribus corporibus se mutuo attrahentibus, omnino maximi momenti

est

est disquisitio, qua inuestigatur motus respectiuus duorum horum corporum, qualis spectatori in tertio corpore collocato apparebit, atque huius problematis solutionem Illustr. Auctor in hac dissertatione absoluendam sibi proposuit. Si itaque supponantur tria haec corpora in eodem plano moueri, et se mutuo attrahere secundum regulam attractionis *Newtonianam*, primum generaliter ostendit quibus aequationibus differentio - differentialibus exprimatur motus respectiuus duorum corporum B et C, qualis spectatori in corpore A apparet, deinceps vero exponit quales mutationes, istae aequationes subire debent, si vel vnius vel duorum ex his corporibus A, B, C, massae vt euanescentes spectentur; vnde si quaestio speciatim sit de motu respectiuo Solis et Lunae ex terra spectando, designantibus A terram, B Solem et C Lunam, duo speciales oriuntur casus, alter quo tam B, quam C pro euanescentibus habentur, alter vero quo A et C euanescunt. Qua ratione autem istarum aequationum integralia pro vtroque casu inueniri debeant, in problematibus proxime sequentibus docetur, vbi quidem pro casu posteriori solutionem non ex ipsa consideratione aequationum differentio - differentialium propositarum deriuare licuit, sed ex principio quodam aliunde petito; quamobrem eo magis confidendum est, ad motum Lunae accurate definiendum, multum subsidii inde esse exspectandum, si hanc solutionem directe ex ipsis nempe formulis differentio - differentialibus eruere liceret. Artificium autem heic adhibitum pro ſolutione caſus huius poſterioris inuenienda, multo quoque latius extendi poteſt, ad definiendum ſcilicet motum reſpectiuum duorum corporum B et C, ſi ſupponantur corpora A et C ad B ſecundum quamuis attractionis legem impelli, motibus tamen vt antea in eodem plano peractis. Atque quum ſaepenumero contingat, vt calculi compendia facilius in problematibus generalioribus quam ſpecialioribus inueniantur; hinc Illuſtr. Auctor motum reſpectiuum duorum corporum B et C, qualis ſpectatori in A poſito apparet, ſi omnia haec tria corpora in eodem plano moueantur et ſecundum quamcunque diſtantiarum rationem ſe mutuo attrahant, generali problemate complexus eſt; vbi quum ad ſex aequationes differentio-differentiales perueniſſet, quarum quatuor priores problemati ſoluendo ſufficiunt, duae tamen vltimae non plane vt inutiles reiiciendae ſunt, quippe quod iis in ſubſidium vocatis et cum reliquis debito modo combinatis, non ſolum duae aequationes differentiales primi gradus eruantur; ſed etiam hae ſolum cum vſu adhiberi poſſint, pro illo caſu, quo $A = o$. Quoniam denique conſtet motum Lunae, ſi terrae valde ſit vicina, recte ad terram referri; ſin autem admodum a terra diſtaret, conueniens fore, vt eius motus ad Solem referatur; facile colligi poterit, ſi quaſi intermedium quendam ſtatum teneat, eius motum neque ad Solem nec ad terram eſſe referendum,

dum, ſed ad aliud quoddam punctum medium, quam ob rationem ad finem huius diſſertationis oſtenditur, qua ratione motus alicuius corporis ad certum quoddam punctum relatum, ad aliud punctum vtcunque motum referri poſſit.

VI.

Inueſtigatio accuratior phaenomenorum, quae in motu terrae diurno a viribus coeleſtibus produci poſſunt.

Auctore L. Eulero pag. 202.

Inſigne iſtud phaenomenon praeceſſionis aequinoctiorum, quo puncta aequinoctialia continuo regrediuntur ſeu contra ſeriem ſignorum mouentur, cum veteribus etiam Aſtronomis innotuiſſet; veram tamen huius phaenomeni rationem, in figura telluris noſtrae et actione, qua motus terrae diurnus a viribus Solis et Lunae afficitur quaerendam eſſe, nemo ante *Newtonum* ſuſpicatus fuit. Quemadmodum enim ſi figura telluris noſtrae perfecte ſphaerica eſſet, motus vertiginis ipſi impreſſus eadem velocitate perpetuo continuaretur; ita viciſſim ſi haec figura a ſphaerica recedat, adeo vt diameter aequatoris aliquanto maior ſit axe, ex viribus Solis

et

et Lunae hunc axem afficientibus, orietur momentum ad eum de situ suo deturbandum. Quum itaque Illustr. huius dissertationis Auctor, eam Dynamicae partem maxime abstrusam, quae de motu corporum gyratorio agit, prosperrimo successu pertractauerit; adeo vt in genere motus gyratorii corporum quacunque figura praeditorum et viribus quibuscunque sollicitatorum feliciter determinari possint; hinc in praesenti dissertatione ex illis principiis omnes inaequalitates motus terrae diurni explicare constituit, idque ita vt non solum verus motus telluris gyratorius cognoscatur; sed etiam reliqui quos habere potuisset, si ab initio aliter fuisset impulsa. Hoc itaque in negotio vt primum consideratio figurae et structurae telluris euitari queat, quippe quae plerumque ad calculos taediosissimos perducit, ista insignis proprietas trium corporis axium principalium, quae in centro inertiae normaliter se decussant, in vsum vocanda est, atque tum quidem statim liquet, si tria momenta inertiae respectu horum axium, sint plane inter se aequalia, motum gyratorium a viribus externis nullatenus turbari, id quod quoque locum habet, etiamsi figura corporis gyrantis, quam maxime sit irregularis, modo memoratam illam proprietatem aequalitatis momentorum inertiae respectu axium principalium possideat. Tellus autem nostra quamvis initio fuisset sphaerica, tamen statim ac circa axem gyrari coepisset, ob fluiditatem eius figura muta-

mutationem subiisset, quam ob rem vt heic fluiditatis rationem habere non necesse sit, statim considerare licet tellurem, vt corpus solidum ea figura praeditum, quam vi fluiditatis suae consequeretur, ex quo intelligitur omnes conclusiones hinc deriuandas ob maris mobilitatem aliquam correctionem admittere. Dum itaque consideratur terra vt eiusmodi corpus, cuius vnus axis principalis cum axe proprie sic dicto telluris coincidit, reliqui autem bini huic normales ita sunt comparati, vt momenta inertiae eorum respectu sint aequalia, primum dispiciendum est quaenam varietas motui terrae diurno, a motu qui initio erat impressus inducatur, mentem a viribus Solis et Lunae agentibus penitus abstrahendo; atque tum quidem perspicitur, si hic motus circa axem vel quemlibet diametrum aequatoris imprimatur, eum non solum fore vniformem, sed etiam axem gyrationis constanter eundem situm seruaturum; sin vero hic motus circa aliam lineam per centrum transeuntem imprimatur, tum motus gyratorius quidem manebit vniformis, ipse vero axis circa quodpiam coeli punctum circulum describeret. Accedentibus vero iam viribus Solis et Lunae perturbatricibus, non solum gyrationis celeritas admodum immutatur; sed axis quoque gyrationis motu magis irregulari fertur; vnde operae pretium visum est Illustr. Auctori quaestionem adeo generaliter proponere, vt ad eos etiam casus pateat, quibus terrae ab initio motum circa axem a principa-

 libus

libus diuersum impressum fuisse supponatur. Vt igitur a simplicioribus ad difficiliora procederet, supposita primum aequalitate binorum momentorum inertiae, sequentes imprimis casus considerationi subiecit, *primum* quo vires perturbatrices vt euanescentes spectantur, *secundum* quo astrum perturbans in ipsa ecliptica et motu quidem vniformi incedere supponitur, *tertium* quo hoc astrum in orbita ad eclipticam parum inclinata, sed motu vniformi circumfertur, denique *quartum* quo astro motus inaequabilis secundum leges *Keplerianas* tribuitur, orbita vero eius cum ecliptica coincidit; vbi quidem vltimus casus, ad explicandam perturbationem, quae ab actione Solis oritur, applicari potest, tertius vero cum vltimo coniunctus dabit explicationem perturbationis ab actione Lunae oriundae; commodum autem accidit, vt non opus sit ad horum astrorum inaequalitates respicere quum enim anomaliae ex motu medio resultantes iam admodum sint exiguae, facile intelligitur eas, quae ex orbitae excentricitate oriuntur plane negligi posse. Formulas vero analyticas quibus motus terrae diurni ob vires Solis et Lunae perturbatrices, variatio exprimitur, postquam Illustr. Auctor exposuerit, easdem dein quoque numerice euoluit, ita vt absoluta quantitas huius variationis inde innotescat, vnde applicatione facta, ad datum quoduis tempus obliquitas eclipticae eiusque variatio, non minus quam vera quantitas praecessionis aequinoctiorum et perturbaturbationum motus diurni telluris noſtrae, accurate determinantur.

VII.

Commentatio de vtiliſſima ac commodiſſima directione potentiarum frictionibus Mechanicis adhibendarum.

Auctore Daniele Bernoulli pag. 242.

Quod in hac diſſertatione ab Illuſtr. Auctore pertractatum eſt argumentum, ſolutionem continet quaeſtionis Mechanicae haud parum curioſae: ſub quanam directione, potentiae motrices applicandae ſint corpori alicui protrahendo, vt maximus inde percipiatur effectus? Quamuis ſcilicet primo quidem intuitu videretur, potentiam reſiſtentiae directe opponendam eſſe, re tamen accuratius perpenſa, inuenitur plurimos dari caſus, quibus potentia ſub directione ad reſiſtentiam obliqua cum maximo fructu applicatur. Quoties nimirum potentia ad corpus ſuper plano aſpero protrahendum oblique applicatur, eiusdem potentiae duplex eſt effectus, vnus ad corpus protrahendum, alter vero ad ipſum ſubleuandum, vnde patet ab obliquitate potentiae aliquod diſpendium ſimulque vero lucrum oriri, ex

 quo

quo consequitur istam potentiae directionem optimam censendam esse, vbi lucrum sic oriundum, dispendium ab obliquitate ortum quam maxime superet. Quum vero frictio corporis super plano asperi moti, partim pendeat a pondere quo corpus ad planum apprimitur, partim a natura plani corpori subiecti; si dicatur P pondus corporis protrahendi, intensitas vero frictionis plani subiecti designetur per $\frac{1}{n}$, angulus autem sub quo potentia oneri super plano horizontali promouendo sit applicata per z indicetur; inuenietur potentia ista oblique applicata per hanc formulam expressa: $\frac{P}{n\,\text{cos}.\,z + \text{sin}.\,z}$. Hinc itaque colligitur potentiam hanc fore minimam, dum denominator $n\,\text{cos}.\,z + \text{sin}.\,z$ est maximum, hoc est quando tang. $z = \frac{1}{n}$, in eo autem casu erit potentia haec minima ad potentiam directe applicandam vt $\sqrt{(nn+1)}$ ad n. Sic quum Cel. Auctor obseruauerit viam silicatam siccam, in trahas super ea protrahendas resistentiam exserere, quae sit propemodum $\frac{1}{2}$ ponderis promouendi; ex hac theoria facile concluditur pro isto casu fore angulum $z = 26°, 34'$, quam regulam ab aurigis quoque non male obseruari vidit, multo autem minor obliquitas sufficit, si via niue calcata fuerit obtecta, quoniam tum intensitas frictionis admodum exigua est. Pro rhedis autem curribus et aliis machinis rotalibus, emolumentum ex obliquitate ortum plane insensibile fit, propter intensitatem frictionis adeo diminutam, vt vix $\frac{1}{20}$ ponderis partem superet.

Ex

Ex his igitur regula haec generalis formari poteſt: obliquitatem potentiae tum vtiliter adhiberi, quando intenſitas frictionis ſatis magna eſt, ipſaque reſiſtentia a ſubleuatione ponderis notabiliter diminuatur. Vnde haec theoria quoque certis caſibus ad alias reſiſtentiae ſpecies applicari poteſt, veluti cum de protrahendis corporibus aquae inſidentibus quaeſtio eſt, idque imprimis ſi ob potentiam oblique applicatam non ſolum corporis natantis pars ſubmerſa imminuatur, ſed etiam ob ſitus mutationem inde oriundam, minorem ab aqua reſiſtentiam patiatur.

Si vero iam quaeratur de angulo obliquitatis, ſub quo potentia applicanda eſt, vt corpus ſuper via ad horizontem vniformiter accliui protrahatur, eius quaeſtionis ſolutio ſimili plane ratione perficitur. Si enim angulus accliuitatis dicatur A, inuenietur potentia iſta obliqua $= \frac{n\,ſin.\,A + coſ.\,A}{ſin.\,z + n\,coſ.\,z} . P$, quae itaque erit minima, ſi fuerit tang $z = \frac{1}{n}$, tum vero erit haec potentia ſub angulo quaeſito applicata $= \frac{n\,ſin.\,A + coſ.\,A}{\sqrt{(nn+1)}} . P$, vbi probe notandum eſt, ſi de via decliui ſermo ſit ſin. A negatiue ſumi debere. Angulus autem iſte z eo magis attentione dignus eſt, quod idem ſit, ſub quo corpus proprio pondere in plano inclinato, ſuperata frictione deuolui aut deorſum repere incipit.

PHYSICO - MATHEMATICA.

I.

De aequilibrio et motu corporum flexuris elaſticis iunctorum.

Auctore L. Eulero pag. 259.

Inter eas Mechanicae partes, quae nondum ſatis excultae ſunt, inſignem omnino tenet locum doctrina de motu et aequilibrio corporum flexuris elaſticis inter ſe iunctorum, quam ob rem eo maius pretium ſtatuendum eſt illis, quae Illuſtr. Auctor in hac diſſertatione de iſto argumento commentatus eſt. Conſiderationi nimirum heic ſubiecit talia corpora rigida, quae certis inter ſe iunguntur flexuris, quarum autem flexurarum ea eſt indoles, vt vi inflectenti reſiſtant eoque maiorem reſiſtentiam exſerant, quo magis vis illa inflectens ſtatum corporum naturalem, quem ante inflexionem habebant, mutare annititur, ſublata autem vi inflectente ob elaſticitatem flexurarum corpora in ſitum naturalem reſtituantur. Vt itaque melius pateret quibus principiis determinatio motus eiusmodi corporum innitatur, ſimpliciſſimum primo caſum conſiderauit, quo duo tantum corpora rigida huiusmodi flexura iunguntur; atque quum vtrumque horum

rum circa axem per flexuram transſeuntem moueri poſſit, altero manente fixo, explicationem motus huiusmodi corporum, imprimis conſideratione centri inertiae, momentorum inertiae et vis elaſticae inflexioni reſiſtentis contineri concludit, quam vltimam vim ſinui anguli inflexionis eſſe proportionalem accurate demonſtrat. Simpliciſſimo vero hoc caſu expedito, ad explicationem motus plurium eiusmodi corporum flexuris iunctorum accedit Illuſtr. Auctor, vbi quum perſpexiſſet hoc problema vix in genere tentari poſſe; iſtum tantum caſum ſpecialem examini ſubiecit, quo omnes axes inflexionis in ſingulis iuncturis inter ſe ſunt paralleli, motusque in plano ad iſtos axes perpendiculari abſoluatur, in quo etiam ſingularum partium centra inertiae ſita eſſe ſupponuntur. Antequam vero motus eiusmodi corporum Syſtematis rite explicari queat, primum neceſſum erat exponere, quibus viribus in aequilibrio contineatur, ad hoc autem requiritur, non ſolum vt eae conditiones impleantur, quibus aequilibrium in corporibus rigidis obtinetur; ſed etiam inſuper vt vires ſollicitantes cum vi elaſtica cuiusuis flexurae in aequilibrio conſiſtant. Vt igitur principium hinc deriuandum pro aequilibrio horum corporum determinando facilius applicari queat; oſtendit Illuſtr. Auctor quomodo ex virium quarumcunque momentis reſpectu ternorum axium inter ſe normalium, definiri poſſit earum momentum reſpectu alius cuiuscunque axis obliqui per idem punctum

ctum transeuntis, vnde etiam momentum virium corpus sollicitantium respectu cuiusque flexurae, cuius axis situm tenet obliquum facili negotio deduxit. Regulam quoque dehinc tradidit, qua in vsum vocata, praecepta quae pro aequilibrio horum corporum valent, ad motum etiam eorum definiendum reuocari possunt, huius autem regulae applicationem in plurimis casibus, maximis difficultatibus obnoxiam esse obseruauit, imprimis quando nec axes iuncturarum inter se sunt paralleli, nec motus quasi in eodem plano fieret, considerari potest; quam ob rem consultum ipsi visum est eum tantum casum heic exponere, quo axes commemorati inter se sunt paralleli et motus in eodem plano peragitur. Pro hoc itaque casu docuit, qua ratione inueniendae sint vires ad motus variationem requisitae, dum corpus aliquod motu quocunque variato incedit et quodnam sit harum virium momentum respectu axis ad idem planum in quo motus fit perpendicularis. Egregiam vero huius problematis applicationem exhibuit, dum motum corporis ex tribus partibus, flexuris elasticis inter se iunctis compositi, et super plano aliquo vtcunque proiecti, explicat et per formulas differentiales definit; eiusdem vero quaestionis aliam demum adfert solutionem eo magis attentione dignam, quod licet in eadem non opus sit principium aequilibrii commemoratum in vsum vocare, ipsum tamen negotium per eam multo commodius conficiatur, quam per priorem.

II.

II.

Sectio prima de ſtatu aequilibrii fluidorum.

Auctore L. Eulero pag. 305.

Longum omnino foret, ſi ſingula quae hac tractatione continentur, accurate exponere vellemus; quam ob rem ne limites breuitatis, quas in hiſce recenſionibus obſeruare fas eſt, transgrediamur, praecipua tantum capitum huius operis contenta explicare conſtituimus. In *primo* ſcilicet capite, doctrina de natura et varietate fluidorum pertractatur, naturam autem fluidorum Illuſtr. Auctor in ſingulari iſta proprietate conſtituit, qua preſſio quaelibet iis applicata per totam eorum maſſam ita diffunditur, vt omnes particulae eandem ſentiant preſſionem, quatenus nimirum ipſum fluidum in aequilibrio manet. Eſt autem dicta haec proprietas ita comparata, vt non ſolum omnibus corporibus fluidis competat, reliquis autem quae non ſunt fluida, ineſſe non deprehendatur; ſed etiam ex eadem, omnia tam motus fluidorum quam aequilibrii principia facili negotio deduci poſſunt, vnde in ea proprietate fluidorum naturam quoque recte collocari euidens eſt. Quod ad fluidorum varietatem attinet, illa imprimis in eo conſiſtit, quod quaedam eorum ita ſint comparata, vt quantumuis magna vi premantur, idem tamen volumen ſemper retineant, alia vero eius ſunt indolis, vt quo magis compriman-tur, ad eo minus volumen redigantur, de vltima autem hac fluidorum ſpecie obſeruandum eſt, dari pro iisdem denſitatem tam maximam, quam minimam, quarum illa eſt, ad quam haec fluida redigerentur, ſi infinita vi comprimerentur, haec autem ea, quae reſpondet eorum ſtatui naturali, vbi nulla vi comprimente afficiuntur. Denique ad varietatem fluidorum etiam hoc ſpectat, quod a calore in maius ſpatium expandantur, a frigore vero in minus volumen contrahantur, vnde pro vario caloris gradu, maxima denſitatum variatio oritur. Caput *ſecundum* doctrinam continet de aequilibrio fluidorum, quatenus eadem a grauitate vel aliis ſimilibus viribus non affici ſupponuntur. Dum autem fluidum a vi quacunque externa vrgetur, non ſolum omnes fluidi partes ſed etiam vas in quo continetur in aequilibrio manent; ſcilicet ſi fluidum nullius compreſſionis ſit capax, omnino maximis viribus reſiſtere valet; ſin autem ſe comprimi patiatur, tum eousque vi externae cedet, donec eam denſitatem nactum fuerit, qua vlteriori compreſſioni reſiſtere poteſt, atque ex his quidem perſpicitur quod ſublata omni vi externa in fluidum agente, illud ſemper in aequilibrio contineatur, etiamſi nequidem vaſi cuipiam ſit incluſum. Pro determinanda iam preſſione, quae ex vi quacunque externa fluidum premente oritur, obſeruandum eſt, quod

quod licet illa eodem modo definiatur pro fluidis compreſſionis capacibus, ac pro illis quae nullam admittunt compreſſionem, maximum tamen oriatur diſcrimen, ſi ad effectum, quem in denſitatem horum fluidorum habet attendatur, nam in his denſitas manet inuariabilis, in illis autem eadem dependet non ſolum a preſſione, ſed etiam a calore, qui in vnoquoque huius fluidi loco inuenitur; pro ſtabilienda vero menſura caloris, haec regula obſeruari poteſt: calorem eſſe in directa ratione preſſionis et inuerſa denſitatis. In Capite *tertio* aequilibrium fluidorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum generatim conſideratur et regulae traduntur, quae ſemper locum obtinere debent, vt fluidum huiusmodi viribus acceleratribibus ſollicitatum aequilibrium ſeruare poſſit. Dein vero exponitur quibusnam viribus afficiatur corpus ſolidum, quatenus eiusmodi fluido viribus internis ſollicitato, vel totum vel qua aliquam ſui partem immergitur, obſeruatur autem hoc corpus easdem ſuſtinere preſſiones, quibus afficeretur ea fluidi maſſa, cuius nunc occupat locum, vbi tamen ſimul neceſſe eſt, vt cognita ſit denſitas, quae fluido huic in locum corporis ſubſtituto in ſingulis ſui punctis competeret. Quas demum vires, vas cui fluidum incluſum eſt, ab eius preſſione ſuſtineat, in hoc quoque Capite docetur et quidem oſtenditur vas perinde vrgeri, ac ſi fluidum vna cum ipſo corpus conſtitueret ſolidum ab iisdem viribus ſollicitatum. Sequens Caput

 quar-

quartum theoriam aequilibrii fluidorum a ſola gravitate ſollicitatorum exponit, principia nimirum in priori capite ſtabilita, hic ad caſum vis acceleratricis conſtantis, quae grauitatis nomine venit applicantur, atque tum quidem perſpicitur corpus ſolidum fluido graui immerſum, tanta vi ſurſum vrgeri, quanta eſt fluidi maſſa eius locum occupans, directio autem huius vis per centrum inertiae maſſae huius fluidae tranſibit, totum denique vas, cui fluidum includitur, deorſum premetur pondere totius maſſae fluidae et huius preſſionis directio per centrum inertiae eiusdem maſſae tranſibit, aequilibrium vero pro hoc caſu nullo modo ſubſiſtere poteſt, niſi gradus caloris in eadem altitudine per totam maſſam fuerit idem. Quo accuratius iam ſtatus iſte aequilibrii cognoſcatur, ſeorſim conſideranda ſunt fluida, prouti vel omnis compreſſionis expertia ſunt, vel aliquam admittunt compreſſionem, vtraque autem fluidorum ſpecies maximum iterum admittit diſcrimen, prouti fluidum per totam masſam fuerit homogeneum vel minus. Pro fluidis prioris ſpeciei homogeneis, quae communiter afferuntur regulae Hydroſtaticae valent, nimirum in his fluidis ſuprema ſuperficies ſemper in idem planum horizontale cadit, preſſio autem infra eandem vbique profunditati eſt proportionalis. De fluidis vero prioris ſpeciei heterogeneis tenendum eſt, illa nullo modo in aequilibrio contineri poſſe, niſi in qualibet ſectione horizontali denſitas ſit eadem, adeo-

adeoque haec fluida heterogenea ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe diſpoſita eſſe oportet, hinc quoque caloris gradus in eadem altitudine idem eſſe debet, quod ſi obtineri non poſſit, nec aequilibrium ſubſiſtere poterit, ſed fluida continuo motu agitabuntur. Quantum ad fluida poſterioris ſpeciei attinet, exhibuit quoque Illuſtr. Auctor pro illis conditiones aequilibrii, ex quibus colligitur iſta fluida nunquam in aequilibrio manere, niſi in eadem altitudine omnes eorum particulae, eandem ſentiant preſſionem, vnde atmoſphaera noſtra nunquam in quiete erit, niſi omnes aeris particulae eadem denſitate ad eandem altitudinem praeditae ſint, atque hinc praecipua ventorum cauſſa ſine dubio erit quaerenda in inaequali atmoſphaerae eiusque particularum ſtatu, in ſpecie vero facillime hinc explicari poteſt ratio ventus illius perennis orientalis, qui inter tropicos obſeruatur. Caput demum *quintum* explicationem continet aequilibrii fluidorum quatenus ad centra virium fixa ſollicitantur, vbi conditiones praeſcribuntur, quae pro aequilibrio obtinendo locum inuenire debent, non ſolum ſi haec fluida ad vnicum punctum fixum vrgerentur; ſed etiam ſi ad plura eiusmodi puncta fixa impellerentur, et pro caſu quidem priori oſtenditur ad aequilibrium obtinendum neceſſe eſſe, vt preſſio ad aequales a centro virium diſtantias eadem ſit, quam ob rationem omnia horum fluidorum ſtrata aequilibrata figuram habebunt ſphaericam, pro caſu autem poſteriori ſufficit vt in ſtratis aequilibratis preſſio vbique ſit eadem, ipſa autem figura horum ſtratorum non amplius ſit ſphaerica, ſed plerumque maxime irregularis. Atque huius denique poſterioris caſus conſideratione adhibita iam definiri poteſt ſtatus aequilibrii fluidorum, quae ad centrum aliquod fixum ſollicitata, ſimul a dato quodam axe fixo, viribus diſtantiis ab axe proportionalibus repelluntur, quo ipſo determinatio figurae telluris noſtrae abſoluitur, tum vero et hinc erui poteſt ſtatus aequilibrii fluidorum tellurem noſtram ambientium oceani nimirum et atmoſphaerae, ſi inſimul conſiderentur vires attrahentes, quibus a Sole vel Luna afficiuntur, vnde explicatio eorum phaenomenorum, quae in fluxu et refluxu maris cernuntur, aliorumque his ſimilium, deduci poteſt.

PHYSI-

PHYSICA.

I.

De calore animalium dissertatio physico Experimentalis.

Auctore Iosepho Adamo Braunio.

pag. 419.

Calorem animalium internum Clarissimus Auctor in hac Dissertatione explorauit, quem quidem constantem repperit adeo, vt neque aetas in homine, neque sexus, neque temperamentum, aut aliae circumstantiae vel mutationes eum caloris gradum, cuique animali proprium vel augere vel imminuere possint, dummodo homo vel animal sanum fuerit. Vsus est thermometro Delisliano, quod quidem hominibus in os inseruit vel vrinae recens excretae cum requisitis cautelis immersit. Animalibus autem in abdomen apertum idem indidit, vel in sanguinem eorum ex vena incisa effluentem. Calor hominis sani 96 circiter graduum scalae Delislianae inuentus est, vel $97\frac{1}{5}$ graduum secundum *Fahrenheitianam.* Calor vituli aeque ac porcellae 90 gradibus Delislianis vel 104 *Fah-*

Fahrenh. aequalis eſt. Capellae, agni et ouis calor gradibus 92 *Del.*. $101\frac{1}{2}$ *Fahrenh.* reſpondet. Aues calore ſuperant quadrupeda; ſiquidem plerique eorum vti anſeres, anates, gallinae, columbae 87 Del. $107\frac{3}{5}$ *Fahr.* rubeculae vero 84 Del. $111\frac{1}{5}$. *Fahrenh.* caloris gradibus gaudeant. Animalia frigida vti piſces, ranae, inſecta, quamuis iis vnus alterue caloris gradus plerisque ab Autoribus adſcriptus ſit (vid. *Hall.* Phyſiol. Tom. II. pag. 28. 29. 30.) omni calore, niſi qui atmoſphaerae vel fluidis ambiantibus ineſt, deſtituta inuenta ſunt. Idemque de animalibus valet, quae hyemem dormiendo conſumunt, quo tempore nempe hanc vitam vegetabilem agunt. Poſt haec de maximo, quem homines et animalia ferre poſſint, caloris et frigoris gradu pauca diſſerit Auctor. Denique hypotheſes perſtringit de modo, quo calor in ſanguine animalium producatur, eamque proponit ornatque, quae ſibi prae caeteris placuit.

II.

De oſſibus Sibiriae foſſilibus, craniis praeſertim Rhinocerotum atque Buffalorum obſeruationes,

vt et

Deſcriptio Leporis puſilli.

Auctore

P. S. Pallas pag. 436 et 521.

In priore harum diſſertationum exhibentur deſcriptiones variorum oſſium foſſilium quae in borealibus praeſertim Sibiriae regionibus reperta, Muſeum academicum ornant Primum eorum, rariſſimumque Rhinocerotis cranium eſt, cuius deſcriptionem Cl. Auctor proponit, quamque eo maiori cura exarauit, quod ſtructura oſſium huius animalis adhucdum minus nota ſit; diligentiſſime itaque ſingulas huius cranii partes deſcribit, ſimulque oſtendit nullum in maxillis locum dari, cui dentes primores commode inſererentur, atque hinc, omnes illos hallucinatos fuiſſe, qui Rhinoceroti duos in ſingula maxilla dentes primores adſcripſerunt. Cornua Rhinocerotum, poſt haec, examini ſubiicit, de quibus id tantum heic adnotabimus, quod praeter fibras longitudinales, ex quibus maximam partem composita esse, fossilia eorum specimina docuerunt, per interualla quoque coalescentia quadam, siue transversis inscriptionibus solidioris texturae vndata atque distincta sint, quorum auxilio fortiora, vsuique aptiora reddi credibile est. Hasce Rhinocerotum reliquias, sequuntur crania Buffalorum gigantea, admiratione curiosorum eo magis digna, quod animalia, quorum pars fuere, hodie tanta in rerum natura, nullibi exstent. Ex structura cornuum et conformatione ossium frontis apparet, illa non fuisse Vri vel Bisontis crania, sed ad Buffali genus referri debere, quod vero enormem eorum magnitudinem spectat, eius rationem in climate et laetiori pabulo quaerendam esse, cum Cl. Auctore statuimus. Vltimo loco fossile cornu Gazellae *recticornis*, variique Elephantorum dentes in Museo asseruati describuntur, eorumque delineatione, ossium Sibiriae fossilium enumerationi finis imponitur. De origine horum ossium varii varia tradideruut, nobis vero sufficiat solum modo Cl. Auctoris ea de re sententiam breuibus heic indicasse. Eo illa redit: quod neque diluuio neque alii cuidam inundationi adscribenda sit harum exuuiarum origo, sed quod ideo tanta copia in hisce regionibus reperiantur, quia hae terrae calidiori coelo temporibus omni traditione humana anterioribus fuerint suppositae, ita vt animalia ista ibi et viuere et speciem suam multiplicare potuerint, vbi nunc nil nisi ossa eorum supersunt.

Altera

Altera differtatio Leporis pufilli continet defcriptionem atque hiftoriam, animalculi fingularis omnino ftructurae, quodque Cl. Auctor praeterita hyeme, cum Transuolgenfes campos ingreffus fuerit, prima vice vidit et cum aliis adhucdum ignotis fpeciebus animalium iftarum regionum obferuauit. Externa fua figura, multum equidem a vulgari Lepore recedit, eiusdem tamen cum illo generis effe, duplicati dentes et pedum vellus abunde docent; quod vero fpecificas notas, quod internam ftructuram, quod denique mores huius animalis fpectat, id, quum breuius atque curatius, quam a Cl. Auctore factum eft, tradi nequeat, ex ipfis Commentariis ad quos lectorem ablegamus, melius haurietur.

III.

De formatione inteſtinorum obſeruationes in ouis incubatis inſtitutae.

Pars III.

Phaenomena amnii ſpurii interna; vbi ſimul de formatione Meſenterii, Thoracis, abdominis alarumque et pedum agitur.

Auctore C. F. Wolff pag. 478.

Quae partes embryonis gallinacei in diſſertationibus, praecedenti Commentariorum Tomo inſertis, ſecundum externum habitum conſideratae ſunt, earum phaenomena interna anatomiae microſcopicae beneficio in praeſenti Diſſertatione deteguntur et explicantur. In amnio ſpurio, quod inuolucrum embryonis exterius eſt, rima anterius apparebat, fouea ampliori ſurſum ad regionem cardiacam, deorſum ad regionem pubis minori foueola terminata, quae ipſa ventriculi et inteſtini, quod rima hac non longius eſt in his embryonibus, cauitas eſſe dicebatur, ea ratione, vt membrana inteſtini

ſtini vbi, ex meſenterio continuatur, vtrinque a ſe inuicem ſecederet, ventriculo et inteſtino apertis relictis, extrorſum et circa embryonem reflecteretur, amniumque ſpurium eo modo produceret. Amnium ſpurium igitur diſſectum et apertum eſt, vt, quaenam ſint illae partes interiores, quae rimam foueamque cardiacam et inferiorem foueolam efficerent, ex quibusque amnii ſpurii membrana continuaretur, pateret; res, vti dictum, inuenta eſt. Ventriculus foueam cardiacam efficit, dum eius membranae in parte anteriori non clauduntur, ſed relicto orificio, quod foueam illam refert, in amnium ſpurium continuantur. Rimam ſimili modo inteſtinum medium producit, cuius membranae, anterius non clauſae, vtrinque reflectuntur, in amnium ſpurium lateraliter abeunt. Et foueola inferior denique ab inteſtino recto efficitur, quod ſimili ratione membranis ſuis in parte ſui ſuperiori et anteriori reflexis in amnium ſpurium tranſit. Haec vt breuiori negotio oſtenderet Cl. Auctor, primum embryonem expoſuit ex ouo IV dies incubato, in quo nempe hae partes adeo iam comparatae ſunt, vt facilius cognoſcantur, nec dubium eſſe poſſit, quin ſint inteſtinum et ventriculus, quae pro iis traduntur. Deinde easdem partes in primis ſuis principiis in embryonibus duorum et trium dierum perſecutus eſt. Eas partes in diuerſis his embryonibus anatomice deſcripſit, mutationesque ſucceſſiue accedentes notauit.

Quum in deſcribendis his embryonibus verſaretur, non potuit omittere res quasdam in iis obvias, a themate quidem alienas, ſed tamen haud minus notatu dignas, et quae pariter ac inteſtinorum formatio ad epigeneſin ducunt. Eiusmodi ſunt ortus thoracis et amnii veri; porro abdominis et meſenterii, denique alarum et pedum formatio. Vbi partes thoracis laterales, a coſtis formatae, oriri deberent, ex latere ſpinae dorſalis, ibi immediate oriri vidit in primis embryonibus amnium verum, ſine mora reflexum, quod in fœtu gallinaceo maturo ex termino totius trunci anteriori, nempe ex circulo vmbilicali abdominis oritur, certo hercle teſtimonio nullum adhucdum exſtitiſſe thoracem. Similiter de abdomine vidit anguſtiſſimas laminas, vtrinque iuxta ſpinam dorſi poſitas, in amnium reflexas, quae vix regionem lumbarem de toto abdomine exhibent. Hae, dum ſucceſſiue antrorſum prolongantur, cauitatem paulatim referunt, apertura tamen inſtructam, quae non minor eſt, quam cauitas in ſuo ambitu ipſa. Denique apertura conſtringitur, vt integer ſaccus abdominis inde oriatur ad analogiam tubi cibarii, quem ſimiliter primo tempore apertum eſſe retulimus. Laminae meſenterii, quae inteſtini et amnii ſpurii continuationes ſunt, pariter ac latera inteſtinorum in primo principio ſeparatae exiſtunt, foſſamque efficiunt, in qua facies anterior ſpinae dorſalis comparet. Deinde in vnam membranam coniunguntur, qua coniunctione

futura

ſutura illa oritur, in prioribus diſſertationibus deſcripta, quae fundus rimae et margo poſterior inteſtini eſt. Alarum et pedum primordia tubercula referunt ſimplicia, ex ſuperficie corporis vix eminentia, quae ſenſim denique prolongantur. In horum ſuperficie interiori noua tubercula prodeunt, quae digitorum principia ſunt.

Ex his omnibus tandem colligitur, partes corpo is animalis minime omni tempore exſtitiſſe, et ntegras quidem; ſed partim productas, partim formatas eſſe ex aliis, prius productis.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

Expoſitio vtriusque obſeruationis et Veneris et Eclipſis Solaris factae Petropoli in ſpecula Aſtronomica.

Auctore Chriſt. Mayer pag. 541.

Continet praeſens diſſertatio recenſionem iſtarum obſeruationum, quae occaſione tranſitus Veneris per diſcum Solis et Eclipſis Solis heic Petropoli in Obſeruatorio Aſtronomico inſtitutae ſunt. Quum itaque principale momentum circa obſeruationes Aſtronomicas inſtituendas ſit exacta temporis veri cognitio, Cel. Auctor ante omnia obſeruationes altitudinum Solis correſpondentium a die 18 Maii vsque ad 23 eiusdem menſis attulit, ex quibus innoteſcit motum pedunculi ſui a motu medio ſolis tantum 9″, 53 defeciſſe. His expoſitis, mentionem facit inſtrumentorum, quibus ipſe eiusque Socii, ad obſeruationem Veneris faciendam vſi ſunt. Scilicet Cel. Auctor tubum Achromaticum *Dollondi* 18 ped, Cel. Prof. et Acad. Secret. *Euler* alterum eiusdem generis 7 ped. adhibuhibuerunt, Cl. vero Dnis *Stahl* et *Lexell* Telescopia Catoptrica *Schortii*, 3 ped. 6 dig. et $2\frac{1}{2}$ ped. inseruierunt. Hoc apparatu instructi, iam 23 Maii vesperi, Obseruatores nostri, solem vsque ad ipsius occasum contemplati sunt, sed nullum tamen Veneris ingredientis vestigium viderunt, nisi quod hora 9, 9′, 39″, macula nigra, rotunda Cel. Auctori appareret, quam pro Venere ingressum suum iam celebrante habuit. Hanc autem obseruationem Cel. Auctor ipse quoque pro dubia agnoscit, quippe quum eadem non conciliari queat, cum illis obseruationibus, quae alibi circa ingressum Veneris institutae sunt, nam ex iisdem sequeretur primum contactum Veneris externum ad minimum 3′ tardius euenire debuisse.

Sequenti mane licet limbus Solis admodum vndulabatur, Cel. tamen Auctori eiusque sociis, momenta quibus Venus e Sole egrediens, limbum Solis, tam interne quam externe contingere videbatur, satis exacte determinare licuit. Propter temporis vero breuitatem, quo Venus in Sole conspiciebatur, aliae obseruationes ad Veneris positionem determinandam capi non potuerunt, quam ea qua Cel. Prof. *Mayer* distantiam Veneris a limbo Solis australi, Micrometro Obiectiuo Tubo *Lollondiano* applicato dimensus est. Diametrum autem Veneris eodem Micrometro mensuratam, Cel. Auctor magnit. 57″ inuenit. Quod ad obseruationes circa Eclipsin Solarem factas attinet, monuisse suf-

 ficiat,

ficiat, quod praeter initium et finem feliciter obſeruatum, Celeb. Auctor, Micrometro obiectiuo partes lucidas diſci Solaris dimenſus ſit, Cel. vero Prof. *Euler* immerſiones et emerſiones macularum praecipuarum in Sole eo tempore conſpicuarum obſeruauit, quarum macularum poſitio deinceps ope micrometri obiectiui quoque determinata fuit.

INDEX COMMENTARIORVM.

Mathematica.

Physico-Mathematica.

L. Euler De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis iunctorum pag. 259.

Eiusdem, Sectio prima de statu aequilibrii fluidorum pag. 305.

Physica.

I. A. Braun, De calore animalium dissertatio physica experimentalis pag. 419.

P. S. Pallas, De ossibus Sibiriae fossilibus craniis praesertim rhinocerotum atque buffalorum, obseruationes pag. 436.

C. F. Wolff, De formatione intestinorum obseruationes in ouis incubatis institutae p. 478.

P. S. Pallas, Descriptio leporis pusilli pag. 521.

Astronomica.

Chr. Mayer, Expositio vtriusque obseruationis et Veneris et Eclipsis Solaris factae Petropoli in specula astronomica pag. 541.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE CVRVA HYPERGEOMETRICA HAC AEQVATIONE EXPRESSA

$y = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots x.$

Auctore

L. EVLERO.

I.

Denotante hic littera x abſciſſam et y applicatam, aequatio haec immediate nonniſi pro iis abſciſſis, quae numeris integris exprimuntur, applicatarum quantitatem indicat; hinc enim ſi fuerint

abſciſſae	x . .	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6	etc.
erunt									
applicatae	y . .	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720	etc.

ita, vt dum abſciſſae ſecundum numeros naturales capiuntur, applicatae ſecundum progreſſionem hypergeometricam *Wallisii* progrediantur; quam ob cauſam etiam hanc curuam hypergeometricam appellari conueniet. Etſi autem per hanc aequationem innumerabilia quidem iſtius curuae puncta, ſed inter ſe diſcreta aſſignantur; vniuerſa tamen huius curuae

 indo-

indoles per eam aequationem definiri est censenda, ita vt cuique abscissae certa ac vi istius ipsius aequationis determinata respondeat applicata. Ratio enim istius aequationis omnino postulat, vt si abscissae cuicunque $x = p$ conueniat applicata $y = q$, tum abscissae $x = p + 1$ respondeat applicata $y = q(p + 1)$ abscissae vero $x = p - 1$ haec applicata $y = \frac{q}{p}$. Quam ob rem neutiquam arbitrio nostro relinquitur per infinita illa puncta data curuam quandam parabolici generis ducere, cum omnia plane eius puncta ex ipsa aequatione determinentur.

II.

Praeter has autem applicatas, quae abscissis per numeros integros expressis respondent, imprimis notari merentur, quae inter eas ex aequo interiacent; et omnes per eam, quam abscissae $x = \frac{1}{2}$ respondere et quantitati $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ aequari olim ostendi, determinantur. Cum igitur sit $\sqrt{\pi} = 1,77245385090548$; hae applicatae coniunctim tam pro abscissis positiuis quam negatiuis sequenti modo se habebunt:

pro

pro abſciſſis poſitiuis		pro abſciſſis negatiuis	
x	eſt applicata y	x	eſt applicata y
0	1	0	$+1$
$\frac{1}{2}$	0,8862269	$-\frac{1}{2}$	$+1{,}7724538$
1	1	-1	$\pm\infty$
$1\frac{1}{2}$	1,3293404	$-1\frac{1}{2}$	$-3{,}5449077$
2	2	-2	$\mp\infty$
$2\frac{1}{2}$	3,3233509	$-2\frac{1}{2}$	$+2{,}3632718$
3	6	-3	$\pm\infty$
$3\frac{1}{2}$	11,6317284	$-3\frac{1}{2}$	$-0{,}9453087$
4	24	-4	$\mp\infty$
$4\frac{1}{2}$	52,3427777	$-4\frac{1}{2}$	$+0{,}2700882$
5	120	-5	$\pm\infty$
$5\frac{1}{2}$	287,8852775	$-5\frac{1}{2}$	$-0{,}0600196$
6	720	-6	$\mp\infty$
$6\frac{1}{2}$	1871,2543038	$-6\frac{1}{2}$	$+0{,}0109126$
7	5040	-7	$\pm\infty$.

Hinc delineaui iſtam curuam in fig. 1. expreſſam quae ab abſciſſa negatiua $x=-1$, vbi applicata fit infinita vsque ad $x=3$, vbi fit $y=6$ porrigitur, hinc vero continuo in infinitam aſcendere eſt intelligenda; ſiniſtrorſum vero, vbi pro ſingulis abſciſſarum valoribus integris applicatae abeunt in aſymtotas, vltra $x=-1$ non expreſſi. Tab. I. Fig. 1.

III.

Conſideratio huius curuae plures ſuppeditat quaeſtiones haud parum curioſas, eius naturae accuratius cognoſcendae inſeruientes, quarum euolutio eo maiori attentione digna videtur, quod aequatio pro curua more ſolito explicari nequit. Huiusmodi quaeſtiones primo circa determinationem reliquorum curuae punctorum praeter ea, quae facile aſſignare licet, verſantur. Deinde in ſingulis punctis poſitio tangentis inſignem inueſtigationem requirit, quo facilius tractus totius curuae definiri queat. Tum vero ex inſpectione figurae perſpicuum eſt inter abſciſſas $x=0$ et $x=1$, alicubi applicatam omnium minimam eſſe debere; cuius adeo tam locum quam ipſam quantitatem aſſignari operae erit pretium.

Praeterea vero inter binas abſciſſas negatiuas $-1, -2, -3, -4, -5$ etc. vbi applicatae in infinitum extenduntur, neceſſe eſt dari quoque applicatas minimas, quae quo magis ſiniſtrorſum progrediamur, continuo minores euadunt, donec tandem prorſus euaneſcant. Denique etiam quaeſtio de radio curvaminis in ſingulis curuae punctis attentionem noſtram meretur, isque imprimis curuae locus notatu dignus videtur, vbi curuatura eſt maxima, ſiquidem manifeſtum eſt, in elongatione ab axe curuae ramos continuo propius ad lineam rectam accedere. Has igitur quaeſtiones reſoluere inſtitui.

Quaeſtio prima.

Pro curua hypergeometrica inuenire aequationem continuam inter abſciſſam x *et applicatam* y, *quae aeque locum habeat, ſiue pro* x *capiatur numerus integer, ſiue fractus quicunque.*

4. Cum

4. Cum aequatio propoſita $y = 1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots x$ locum proprie habere nequeat, niſi x ſit numerus integer, eam in aliam formam transfundi oportet, quae ab hac conditione ſit liberata; quod pluribus modis per expreſſiones in infinitum excurrentes fieri poteſt, inter quas primum occurrit iſta:

$$y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x}\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x}\left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{4}{4+x}\left(\frac{5}{4}\right)^x. \text{ etc.}$$

qui factores in infinitum continuari debent. Ratio huius expreſſionis inde eſt manifeſta, quod quo plures capiantur factores, veritas eo propius, ſumtis autem infinitis, accurate obtineatur: ſi enim factorum numerus ſit $= n$, habetur

$$y = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{2+x} \cdot \frac{3}{3+x} \cdot \ldots\ldots \frac{n}{n+x}(n+1)^x$$

cuius numerator ſi ita repraeſentetur:

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots.n$$

denominator vero ita

$$(1+x)(2+x)(3+x)\ldots.n(n+1)(n+2)\ldots.(n+x)$$

deletis factoribus communibus prouenit

$$y = \frac{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots.(n+x)}(n+1)^x.$$

Quare ſi n ſit numerus infinitus, ob denominatoris ſingulos factores $= n+1$ eorumque numerorum $= x$, totus denominator per multiplicatorem $(n+1)^x$ tollitur, proditque aequatio propoſita $y = 1.\ 2.\ 3.\ldots x$.

5. Haec forma aliquanto generalior reddi poteſt; cum enim totum negotium eo redeat, vt multi-

multiplicator $(n+1)^x$ poſtremo denominatori $(n+1)(n+2)(n+3) \ldots \ldots (n+x)$ aequiualeat, caſu quo numerus n eſt infinitus, euidens eſt huic conditioni quoque ſatisfieri, ſi multiplicator ille in genere ſtatuatur $(n+a)^x$ exiſtente a numero quocunque finito; maxime vero hanc formulam ad inſtitutum fore accommodatam, ſi litterae a medius quidam valor inter 1 et x veluti $a = \frac{1+x}{2}$ ſeu $a = \sqrt{x}$ tribuatur. Nunc vero neceſſe eſt hunc multiplicatarem $(n+a)^x$ in tot factores, quot numerus n continet vnitates, reſolui, quod commode hac reſolutione praeſtatur:

$$(n+a)^x = a^x . \left(\frac{a+1}{a}\right)^x . \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^x . \left(\frac{a+3}{a+2}\right)^x \ldots \left(\frac{a+n}{a+n-1}\right)^x .$$

Quocirca pro abſciſſa quacunque x habebimus applicatam:

$$y = a^x . \frac{1}{1+x}\left(\frac{a+1}{a}\right)^x . \frac{2}{2+x}\left(\frac{a+2}{a+1}\right)^x . \frac{3}{3+x}\left(\frac{a+3}{a+2}\right)^x . \text{ etc. in infinitum}$$

quae expreſſio ſemper veritati eſt conſentanea, quicunque numerus pro a accipiatur, promtiſſime autem ad veritatem perducet, ſi ſumatur $a = \frac{1+x}{2}$, vnde fiet:

$$y = \left(\frac{1+x}{2}\right)^x . \frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^x . \frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{3+x}\right)^x . \frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{5+x}\right)^x . \text{ etc.}$$

quae expreſſio ex infinitis factoribus formae $\frac{m}{m+x}\left(\frac{a+m}{a+m-1}\right)^x$ praeter primum a^x conſtat, et quo plures quouis caſu inuicem multiplicantur, eo propius ad ad veritatem accedetur. Hinc autem naſcitur prima expreſſio, ſi ſumatur $a = 1$.

6. Eo magis autem haec expreſſio ad vſum eſt accommodata, quo promtius factores ad vnitatem conuergunt, id quod euenit ſumendo $a = \frac{1+x}{2}$, tum vero calculus eo facilius expedietur, quo minores numeri loco x ſubſtituuntur, ſemper autem ſufficit applicatas pro abſciſſis x vnitate vel adeo nihilo minoribus inueſtigaſſe, quoniam inde facili negotio applicatae per abſciſſis $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ etc. deriuantur. Sit igitur $x = \frac{\alpha}{\beta}$ exiſtente $\alpha < \beta$, eritque

$$y = \left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{3\beta+\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{2\beta}{\alpha+2\beta}\left(\frac{5\beta+\alpha}{3\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \frac{3\beta}{\alpha+3\beta}\left(\frac{7\beta+\alpha}{5\beta+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \text{. etc.}$$

vnde applicatae poteſtas y^β ita prodit expreſſa:

$$y^\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}\right)^\alpha \cdot \frac{\beta^\beta(3\beta+\alpha)^\alpha}{(\beta+\alpha)^\beta(\beta+\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(2\beta)^\beta(5\beta+\alpha)^\alpha}{(2\beta+\alpha)^\beta(3\beta+\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(3\beta)^\beta(7\beta+\alpha)^\alpha}{(3\beta+\alpha)^\beta(5\beta+\alpha)^\alpha} \text{ etc.}$$

Pro abſciſſa autem $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ applicata y hinc colligetur

$$y^\beta = \left(\frac{2\beta}{\beta-\alpha}\right)^\alpha \cdot \frac{\beta^\beta(\beta-\alpha)^\alpha}{(\beta-\alpha)^\beta(3\beta-\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(2\beta)^\beta(3\beta-\alpha)^\alpha}{(2\beta-\alpha)^\beta(5\beta-\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(3\beta)^\beta(5\beta-\alpha)^\alpha}{(3\beta-\alpha)^\beta(7\beta-\alpha)^\alpha} \text{ etc.}$$

Sumamus exempli gratia $x = \frac{1}{2}$ et impetrabimus:

$$y^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 11}{5 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 15}{7 \cdot 7 \cdot 11} \cdot \frac{8 \cdot 8 \cdot 19}{9 \cdot 9 \cdot 15} \text{ etc.}$$

cuius factor in genere cum ſit $\frac{2n \cdot 2n \cdot (4n+3)}{(2n+1)(2n+1)(4n-1)} = \frac{16n^3 + 12nn}{16n^3 + 12nn - 1}$ $= 1 + \frac{1}{(2n+1)^2(4n-1)}$, hinc intelligitur, quam

 promte

promte hi factores ad vnitatem accedunt, erit igitur:

$$y^2 = \frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{3^2.3}\right)\left(1+\frac{1}{5^2.7}\right)\left(1+\frac{1}{7^2.11}\right)\left(1+\frac{1}{9^2.15}\right)\left(1+\frac{1}{11^2.19}\right) \text{ etc.}$$

vbi quidem nouimus esse $y^2 = \frac{\pi}{4}$. Sin autem statuamus $x = -\frac{1}{2}$, cui conuenit $y = \sqrt{\pi}$ erit ex altera expressione

$$\pi = 4 . \frac{2.2.1}{1.1.5} . \frac{4.4.5}{3.3.9} . \frac{6.6.9}{5.5.13} . \frac{8.8.13}{7.7.17} . \text{ etc.}$$

seu $\pi = 4\left(1-\frac{1}{1^2.5}\right)\left(1-\frac{1}{3^2.9}\right)\left(1-\frac{1}{5^2.13}\right)\left(1-\frac{1}{7^2.17}\right)$ etc. inde vero est $\pi = 3\left(1+\frac{1}{3^2.3}\right)\left(1+\frac{1}{5^2.7}\right)\left(1+\frac{1}{7^2.11}\right)\left(1+\frac{1}{9^2.15}\right)$ etc.

ita vt altera crescendo, altera decrescendo ad veritatem appropinquet.

7. Commodius autem calculus instituetur, si expressio nostra in singulis factoribus abrumpatur, tum enim sequentes formulae prodibunt continuo propius ad veritatem accedentes:

$$y = \frac{1}{1+x}\left(\frac{3+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x} . \frac{2}{2+x}\left(\frac{5+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x} . \frac{2}{2+x} . \frac{3}{3+x}\left(\frac{7+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x} . \frac{2}{2+x} . \frac{3}{3+x} . \frac{4}{4+x}\left(\frac{9+x}{2}\right)^x$$

$$y = \frac{1}{1+x} . \frac{2}{2+x} . \frac{3}{3+x} . \frac{4}{4+x} . \frac{5}{5+x}\left(\frac{11+x}{2}\right)^x .$$

Quia

Quia si loco x scribatur $-x$ prodit applicata $=\frac{y}{x}$ erit per similes formulas:

$$y=\left(\frac{2+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\left(\frac{4+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\left(\frac{6+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\left(\frac{8+x}{2}\right)^{x-1}$$

$$y=\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdot\frac{5}{4+x}\left(\frac{10+x}{2}\right)^{x-1}.$$

Quare posito $x=\frac{1}{2}$ pro applicata $y=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ duplex series formularum eo conuergentium resultat:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2.\ 4}{3.\ 5}\sqrt{\frac{11}{4}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2.\ 4.\ 6}{3.\ 5.\ 7}\sqrt{\frac{15}{4}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{2.\ 4.\ 6.\ 8}{3.\ 5.\ 7.\ 9}\sqrt{\frac{19}{4}}$$

etc.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4.\ 6}{3.\ 5}\sqrt{\frac{4}{13}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4.\ 6.\ 8}{3.\ 5.\ 7}\sqrt{\frac{4}{17}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{4.\ 6.\ 8.\ 10}{3.\ 5.\ 7.\ 9}\sqrt{\frac{4}{21}}$$

etc.

8. Huiusmodi autem producta commodissime per logarithmos euoluuntur; ac primo quidem ex forma generali numerum quemcunque a implicante nanciscimur:

$$ly=x\,la+x\,l\frac{a+1}{a}+x\,l\frac{a+2}{a+1}+x\,l\frac{a+3}{a+2}+x\,l\frac{a+4}{a+3}\ \text{etc.}$$
$$-l(1+x)-l\left(1+\frac{x}{2}\right)-l\left(1+\frac{x}{3}\right)-l\left(1+\frac{x}{4}\right)\ \text{etc.}$$

et sumto $a=\frac{1+x}{2}$, vt haec series maxime conuergens reddatur:

$$ly = xl\frac{1+x}{2} + xl\frac{x+3}{x+1} + xl\frac{x+5}{x+3} + xl\frac{x+7}{x+5} + xl\frac{x+9}{x+7} \text{ etc.}$$
$$-l(1+x) - l(1+\tfrac{x}{2}) - l(1+\tfrac{x}{3}) - l(1+\tfrac{x}{4}) \text{ etc.}$$

Sumtis igitur his logarithmis naturalibus, cum ſit in genere:

$$xl\frac{x+2m+1}{x+2m-1} = \frac{2x}{x+2m} + \frac{2x}{3(x+2m)^3} + \frac{2x}{5(x+2m)^5} + \frac{2x}{7(x+2m)^7} + \text{etc.}$$

$$\text{et } l(1+\tfrac{x}{m}) = \frac{2x}{x+2m} + \frac{2x^3}{3(x+2m)^3} + \frac{2x^5}{5(x+4m)^5} + \frac{2x^7}{7(x+2m)^7} + \text{etc.}$$

ſequentem formam infinitis ſeriebus conſtantem adipiſcimur:

$$ly = xl\frac{1+x}{2} + \tfrac{2}{3}x(1-xx)\left(\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \frac{1}{(x+6)^3} + \frac{1}{(x+8)^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{5}x(1-x^4)\left(\frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \frac{1}{(x+6)^5} + \frac{1}{(x+8)^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{7}x(1-x^6)\left(\frac{1}{(x+2)^7} + \frac{1}{(x+4)^7} + \frac{1}{(x+6)^7} + \frac{1}{(x+8)^7} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2}{9}x(1-x^8)\left(\frac{1}{(x+2)^9} + \frac{1}{(x+4)^9} + \frac{1}{(x+6)^9} + \frac{1}{(x+8)^9} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

9. Primae ſeriei ſumamus definitum terminorum numerum qui ſit $= n$, et cum ſuperior pars ad vnicum membrum $xl(a+n)$ redigatur, erit

$$ly = xl(a+n) - l(1+x) - l(1+\tfrac{1}{2}x) - l(1+\tfrac{1}{3}x) \ldots\ldots - l(1+\tfrac{1}{n}x)$$

quae expreſſio eo propius ad veritatem accedit, quo maior capiatur numerus n. Sit igitur n numerus praemagnus ac primo quidem habebimus $l(n+a) = ln + \frac{a}{n} - \frac{aa}{2n^2} + \frac{a^3}{3n^3} -$ etc. vbi loco a ſumi $\frac{1+x}{2}$ conueniet; tum vero poſita breuitatis gratia fractione $0{,}5772156649015325 = \Delta$, nouimus eſſe ſummam progreſſionis harmonicae:

$1 + \frac{1}{2}$

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots\ldots+\tfrac{1}{n}=\Delta+ln+\tfrac{1}{2n}-\tfrac{1}{12nn}+\tfrac{1}{120n^4}-\text{etc.}$$

vnde cum ſit:

$$l(n+a)=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\ldots\ldots+\tfrac{1}{n}-\Delta-\tfrac{1}{2n}+\tfrac{1}{12nn}-\tfrac{1}{120nn^4}$$
$$+\tfrac{a}{n}-\tfrac{aa}{2nn}+\tfrac{a^3}{3n^3}$$

colligimus ſumto $a=\frac{a+x}{2}$

$$ly=-\Delta x+x+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x\quad\ldots\ldots+\tfrac{1}{n}x+\tfrac{xx}{2n}$$
$$-l(1+x)-l(1+\tfrac{1}{2}x)-l(1+\tfrac{1}{3}x)-l(1+\tfrac{1}{n}x)-\tfrac{x-6xx-3x^3}{24nn}.$$

Reuera ergo augendo numerum n in infinitum erit:

$$ly=-\Delta x+x+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{4}x+\text{etc.}$$
$$-l(1+x)-l(1+\tfrac{1}{2}x)-l(1+\tfrac{1}{3}x)-l(1+\tfrac{1}{4}x)-\text{etc.}$$

et ſingulis logarithmis per ſeries euolutis:

$$ly=-\Delta x+\tfrac{1}{2}xx(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.})$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\text{etc.})$$
$$+\tfrac{1}{4}x^4(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.})$$
$$-\tfrac{1}{5}x^5(1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{4^5}+\text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

10. Praeter has autem formulas, quibus cuique abſciſſae x conueniens applicata y aſſignatur, methodus mea progreſſiones indefinite ſummandi ſingularem ſuppeditat expreſſionem ad eundem ſcopum accommodatam.

Cum enim ſit $ly=l1+l2+l3+l4\ldots+lx$ hanc progreſſionem indefinite ſummari oportet; introducendo autem valores numericos:

$A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{90}$, $C = \frac{1}{945}$, $D = \frac{1}{9450}$, $E = \frac{1}{93555}$, $F = \frac{691}{1, 3, 5 \ldots\ldots 15, 315}$ etc. quorum progreſſio ita eſt comparata vt ſit

$$5B = 2AA; \quad 7C = 4AB; \quad 9D = 4AC + 2BB;$$
$$11E = 4AD + 4BC \text{ etc.}$$

oſtendi alibi fore

$$ly = \tfrac{1}{2}l2\pi + (x + \tfrac{1}{2})lx - x + \frac{A}{2x} - \frac{1.2B}{2^3 x^3} + \frac{1.2.3.4C}{2^5 x^5}$$
$$- \frac{1.2.3.4.5.6D}{2^7 x^7} + \text{etc.}$$

quae ſeries prae ſuperioribus hunc praeſtat vſum, vt quo maiores capiantur abſciſſae x eo promtius verum valorem applicatae y exhibeat. Cum igitur ſi abſciſſae x conueniat applicata y, abſciſſae maiori $x+n$ conueniat applicata $y(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+n)$, habebimus ſemper per ſeriem valde convergentem:

$$ly = \tfrac{1}{2}l2\pi - l(x+1) - l(x+2) - l(x+3) \ldots\ldots - l(x+n)$$
$$+ (x + n + \tfrac{1}{2})l(x+n)$$
$$- x - n + \frac{A}{2(x+n)} - \frac{1.2B}{2^3(x+n)^3} + \frac{1.2.3.4C}{2^5(x+n)^5} - \frac{1.2.3.4.5.6D}{2^7(x+n)^7} + \text{etc.}$$

Quodſi ergo e denotet numerum, cuius logarithmus naturalis $= 1$, breuitatis gratia ponatur:

$$\frac{A}{2(x+n)} - \frac{1.2B}{2^3(x+n)^3} + \frac{1.2.3.4C}{2^5(x+n)^5} - \text{etc.} = s$$

concludimus a logarithmus ad numeros regrediendo

$$y = \frac{\sqrt{2\pi(x+n)}}{(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+n)} \left(\frac{x+n}{e}\right)^{x+n} e^s$$

vbi numerus integer n arbitrio noſtro relinquitur, quo

quo maior is autem accipiatur, eo facilius verum valorem ipſius s inuenire licet.

11. Denique etiam applicatam y per formulam integralem exhibere licet, poſita enim abſciſſa $x = p$, nouaque introducta variabili u, prae qua quantitas p vt conſtans tractetur, erit applicata $y = \int du (l \frac{1}{u})^p$ ſiquidem integratio a valore $u = 0$ vsque ad valorem $u = 1$ extendatur. Vel ſi forma exponentiali vti malimus, erit quoque

$$y = \int e^{-v} v^p \, dv$$

integrationem a valore $v = 0$ ad $v = \infty$ extendendo. Ex his quidem formulis, quoties abſciſſa p eſt numerus integer, integratio ſtatim praebet $y = 1 . 2 . 3 \ldots\ldots p$. at ſi p fuerit numerus fractus, hinc ſimul intelligitur ad quodnam genus quantitatum tranſcendentium valor ipſius y referri debeat. Alio autem loco oſtendi, quomodo tum integrale per quadraturas curuarum algebraicarum exprimi queat.

12. En ergo plurimas ſolutiones quaeſtionis noſtrae primae, qua pro qualibet abſciſſa x etiamſi numero non integro exprimatur, valor applicatae y reperiebatur: quarum praecipuas ſimul aſpectui expoſuiſſe iuuabit, vt inde quouis caſu ea, quae maxime ad vſum accommodata videatur, eligi queat:

I. $y = \frac{1}{1+x} \left(\frac{2}{1}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x} \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x} \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \frac{4}{4+x} \left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot$ etc.

II. $y = \left(\frac{1+x}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{1+x} \left(\frac{3+x}{2+x}\right)^x \cdot \frac{2}{2+x} \left(\frac{5+x}{3+x}\right)^x \cdot \frac{3}{3+x} \left(\frac{7+x}{5+x}\right)^x \cdot$ etc.

III. $ly = xl\frac{2}{1} + xl\frac{3}{2} + xl\frac{4}{3} + xl\frac{5}{4} + \text{etc.}$
$$- l(1+x) - l(1+\tfrac{1}{2}x) - l(1+\tfrac{1}{3}x) - l(1+\tfrac{1}{4}x) - \text{etc.}$$

IV. $ly = xl\frac{1+x}{2} + xl\frac{x+3}{x+1} + xl\frac{x+5}{x+3} + xl\frac{x+7}{x+5} + xl\frac{x+9}{x+7} + \text{etc.}$
$$- l(1+x) - l(1+\tfrac{1}{2}x) - l(1+\tfrac{1}{3}x) - l(1+\tfrac{1}{4}x) - \text{etc.}$$

V. $ly = -\Delta x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \text{etc.}$
$$- l(1+x) - l(1+\tfrac{1}{2}x) - l(1+\tfrac{1}{3}x) - l(1+\tfrac{1}{4}x) - \text{etc.}$$

VI. $ly = -\Delta x + \frac{1}{2}xx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right)$
$$+ \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}x^5\left(1 + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{4^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

VII. $ly = \frac{1}{2}l2\pi + (x+\frac{1}{2})lx - x + \frac{A}{2x} - \frac{1\cdot 2\,B}{2^3 x^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,C}{2^5 x^7} - \frac{1\cdot 2\cdots 6\,D}{2^7 x^7} + \text{etc.}$

existente $\Delta = 0,5772156649014225$ et

$$A = \tfrac{1}{6},\ B = \tfrac{1}{90},\ C = \tfrac{1}{945},\ D = \tfrac{1}{9450},\ E = \tfrac{1}{93555}\ \text{etc.}$$

Tum in tribus postremis formis logarithmos naturales accipi oportet.

Quaestio secunda.

In curua hypergeometrica ad quoduis eius punctum directionem tangentis definire.

13. Hic igitur assumimus pro quauis abscissa x valorem applicatae y iam esse inuentum; et cum directio tangentis ratione differentialium $\frac{dy}{dx}$ definiatur, quippe qua fractione tangens anguli, quo curvae

vae tangens in loco propoſito ad axem inclinatur, exprimi ſolet, tantum opus eſt, vt quandam formularum inuentarum differentiemus. In hunc autem finem formula V maxime videtur idonea, ex qua colligimus:

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\Delta + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \text{etc.}$$

quae expreſſio in hanc concinniorem contrahitur:

$$\frac{dy}{y\,dx} = -\Delta + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{2(2+x)} + \frac{x}{3(3+x)} + \frac{x}{4(4+x)} + \text{etc.}$$

vnde ſtatim patet, ſi x ſit numerus integer negatiuus, fieri non ſolum applicatam y, ſed etiam formulam $\frac{dy}{dx}$ infinitam, ita vt in his locis ipſae applicatae, vtpote aſymtotae fiant tangentes. Ponamus autem in genere angulum, quem tangens cum axe conſtituit $= \Phi$ vt ſit $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\Phi$.

14. Primum ergo hinc definiamus tangentes pro abſciſſis x, quae numeris poſitiuis exprimuntur, ſiquidem applicatae y ſponte dantur.

I. Sit ergo $x = 0$, et ob $y = 1$ fit

$$\frac{dy}{dx} = -\Delta = -0,5772156649 = \text{tang.}\,\Phi$$

vnde fit angulus $\Phi = -29°, 59', 39''$, vbi ſignum $-$ indicat, tangentem dextrorſum in axem incidere, cum eoque angulum tantum non 30° conſtituere.

II. Sit $x = 1$ et ob $y = 1$ fit $\frac{dy}{dx} = 1 - \Delta = 0,422784335 = \text{tang.}\,\Phi$, hincque angulus $\Phi = 22°, 55'$.

III. Sit $x=2$ et ob $y=2$ fit $\frac{dy}{dx}=2(1+\frac{1}{2}-\Delta)=1,845568670$ $=\text{tang.}\,\Phi$ hincque angulus $\Phi=61^\circ,33'$.

IV. Sit $x=3$ et ob $y=6$ fit $\frac{dy}{dx}=6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\Delta)=\text{tang.}\,\Phi$ seu tang. $\Phi=7,536706010$ et $\Phi=82^\circ,26'$.

V. Sit $x=4$ et ob $y=24$ fit $\frac{dy}{dx}=24(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\Delta)$ hincque tang. $\Phi=36,146824040$ et $\Phi=88^\circ,25'$.

In genere igitur si abscissa x aequetur numero integro cuicunque n, ob $y=1.2\ldots\ldots n$ erit

$$\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=1.2.3\ldots n(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}-\Delta).$$

15. Definiamus hinc etiam tangentes pro locis intermediis, ac primo quidem ad abscissas positiuas relatis:

I. Sit $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ atque

$$\frac{dy}{ydx}=-\Delta+1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{7}\text{ etc.}$$

seu $\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\text{etc.})=-\Delta+2(1-l2)$

hincque $\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=y(2(1-l2)-\Delta)=0,0364899739.y$

II. Sit $x=\frac{3}{2}$ erit $y=\frac{1.3}{2.2}\sqrt{\pi}$ atque

$$\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(1+\tfrac{1}{3}-l2)\text{ vnde fit}$$

$\frac{dy}{dx}=\text{tang.}\,\Phi=y(2(1+\frac{1}{3}-l2)-\Delta)=0,7031566405.y$

III. Sit $x=\frac{5}{2}$ erit $y=\frac{1.3.5}{2.2.2}\sqrt{\pi}$ et $\frac{dy}{ydx}=-\Delta+2(1+\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{5}-l2)$

hinc tang. $\Phi=y(2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-l2)-\Delta)=1,1031566405.y$

Cum

Cum nunc ſit $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.(2(1-l2)-\Delta)=0,0323383973$ erit pro his caſibus:

$$\begin{array}{llll}
x=\frac{1}{2}; & y=0,8862269 & \text{tang.}\,\Phi= & 0,0323384\\
x=\frac{3}{2}; & y=1,3293404 & \text{tang.}\,\Phi= & 0,9347345\\
x=\frac{5}{2}; & y=3,3233509 & \text{tang.}\,\Phi= & 3,6661767\\
x=\frac{7}{2}; & y=11,6317284 & \text{tang.}\,\Phi= & 16,1549694\\
x=\frac{9}{2}; & y=52,3427777 & \text{tang.}\,\Phi= & 84,3290907
\end{array}$$

etc.

16. Antequam vlterius progrediar, obſeruo ſi fuerit pro abſciſſa quacunque

$$x=p;\quad y=q;\quad \text{tang.}\,\Phi=r$$

tum pro abſciſſa ſequente fore

$$x=p+1;\ y=q(p+1)\ \text{et}\ \text{tang.}\,\Phi=r(p+1)+q$$

pro abſciſſa autem antecedente

$$x=p-1;\ y=\frac{q}{p};\quad \text{et}\ \text{tang.}\,\Phi=\frac{r}{p}-\frac{q}{pp}$$

vnde ſuperiores valores facile retro continuare poterimus:

$$\begin{array}{llll}
x=\frac{1}{2}; & y=0,8862269; & \text{tang.}\,\Phi= & 0,0323384\\
x=-\frac{1}{2}; & y=1,7724538; & \text{tang.}\,\Phi= & -3,4802308\\
x=-\frac{3}{2}; & y=-3,5449077; & \text{tang.}\,\Phi= & -0,1293538\\
x=-\frac{5}{2}; & y=+2,3632718; & \text{tang.}\,\Phi= & +1,6617504\\
x=-\frac{7}{2}; & y=-0,9453087; & \text{tang.}\,\Phi= & -1,0428236\\
x=-\frac{9}{2}; & y=+0,2700882; & \text{tang.}\,\Phi= & +0,3751176\\
x=-\frac{11}{2}; & y=-0,0600196; & \text{tang}\,\Phi= & -0,0966971\\
x=-\frac{13}{2}; & y=+0,0109126; & \text{tang.}\,\Phi= & +0,0195654
\end{array}$$

etc.

17. Eadem aequatio differentialis ei curuae puncto μ inueniendo inseruit, vbi applicata est minima seu tangens axi parallela. Posito igitur $\frac{dy}{dx}=0$, abscissa respondens x ex hac aequatione quaeri debet:

$$\Delta = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{2(2+x)} + \frac{x}{3(3+x)} + \frac{x}{4(4+x)} + \frac{x}{5(5+x)} + \text{etc.}$$

quae euoluitur in hanc:

$$\begin{aligned}\Delta = &+ x\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)\\ &- x^2\left(1+\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\tfrac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)\\ &+ x^3\left(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)\\ &- x^4\left(1+\tfrac{1}{2^5}+\tfrac{1}{3^5}+\tfrac{1}{5^5}+\text{etc.}\right)\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Summis autem harum serierum proximis substitutis erit

$$\begin{aligned}0 = &+0,5772156649 - 1,6449340668\,x\\ &+1,2020569032\,x^2 - 1,0823232337\,x^3\\ &+1,0369277551\,x^4 - 1,0173430620\,x^5\\ &+1,0083492774\,x^6 - 1,0040773562\,x^7\\ &+1,0020083928\,x^8 - 1,0009945751\,x^9\\ &+1,0004941886\,x^{10} - 1,0002460866\,x^{11}\\ &+1,0001227233\,x^{12} - 1,0000612481\,x^{13}\\ &+1,0000305882\,x^{14} - 1,0000152823\,x^{15}\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Sin autem duae primae fractiones retineantur, sequens series multo magis conuergens emergit

$0 =$

$$\begin{aligned}
0 = & +0,5772156649 \quad - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{2(2+x)} \\
& +0,0770569032\,x^2 - 0,3949340668\,x \\
& +0,0056777551\,x^4 - 0,0198232337\,x^3 \\
& +0,0005367774\,x^6 - 0,0017180620\,x^5 \\
& +0,0000552678\,x^8 - 0,0001711062\,x^7 \\
& +0,0000059074\,x^{10} - 0,0000180126\,x^9 \\
& +0,0000006530\,x^{12} - 0,0000019460\,x^{11} \\
& +0,0000000706\,x^{14} - 0,0000002130\,x^{13} \\
& +0,0000000078\,x^{16} - 0,0000000235\,x^{15}.
\end{aligned}$$

Hinc proxime reperitur $x = \frac{1}{2}$, verum haec applicata minima facilius ope sequentis quaestionis definietur.

Quaestio tertia.

Pro dato quouis curuae hypergeometricae puncto, indolem portionis minimae istius curuae circa id punctum sitae inuestigare.

18. Pro absciſſa ergo data $x = p$ inuenta sit applicata $y = q$; et nunc quaeri oportet applicatam, quae abſciſſae parumper ab illa diſcrepanti $p + \omega$ reſpondeat; quae applicata ſtatuatur $= q + \psi$. Cum igitur ſit ſecundum formulam V

$$\begin{aligned}
lq = -\Delta p + p & \quad + \tfrac{1}{2} p \quad + \tfrac{1}{3} p \quad + \tfrac{1}{4} p \quad + \text{etc.} \\
& - l(1+p) - l(1+\tfrac{1}{2}p) - l(1+\tfrac{1}{3}p) - l(1+\tfrac{1}{4}p) - \text{etc.}
\end{aligned}$$

ſi hic loco p ſcribatur $p + \omega$, loco lq prodibit valor ipſius $l(q + \psi)$, quo ipſo quaeſtio reſoluetur. At ſi ponamus $lq = \mathrm{P}$, ſcribendo $p + \omega$ loco p notum eſt prodire

$$l(q+\psi) = \mathrm{P} + \frac{\omega\, d\mathrm{P}}{1\, dp} + \frac{\omega^2\, dd\mathrm{P}}{1 \cdot 2\, dp^2} + \frac{\omega^3\, d^3\mathrm{P}}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dp^3} + \frac{\omega^4\, d^4\mathrm{P}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dp^4} + \text{etc.}$$

Eſt vero vt vidimus:

$$\frac{dP}{dp} = -\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \frac{p}{4(4+p)} + \text{etc.}$$

hincque porro:

$$\frac{ddP}{1.dp^2} = \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^3P}{1.2\,dp^3} = -\frac{1}{(1+p)^3} - \frac{1}{(2+p)^3} - \frac{1}{(3+p)^3} - \frac{1}{(4+p)^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{d^4P}{1.2.3\,dp^4} = \frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \frac{1}{(4+p)^4} + \text{etc.}$$

etc.

vnde ob $P = lq$ colligimus:

$$\begin{aligned} l\left(1+\frac{\psi}{q}\right) = -\Delta\omega + \omega\left(\frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right) \\ + \tfrac{1}{2}\omega^2\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \text{etc.}\right) \\ - \tfrac{1}{3}\omega^3\left(\frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(2+p)^3} + \frac{1}{(3+p)^3} + \text{etc.}\right) \\ + \tfrac{1}{4}\omega^4\left(\frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \text{etc.}\right) \\ - \tfrac{1}{5}\omega^5\left(\frac{1}{(1+p)^5} + \frac{1}{(2+p)^5} + \frac{1}{(3+p)^5} + \text{etc.}\right) \end{aligned}$$

etc.

19. Hic iam coordinatae p et q vt conſtantes ſpectari poſſunt, quoniam litterae ω et ψ nouas coordinatas a dato curuae puncto ſumtas atque illis parallelas referunt; ex quarum relatione hic definita indoles curuae circa id punctum verſantis facile inveſtigatur. Quare cum iam innumerabilia curuae puncta aſſignauerimus, hinc tractus ſingularum curvae portionum inter bina illorum punctorum interiacentium vero proxime definiri poterit. Primo ſcilicet

ſcilicet ex illa aequatione differentiata colligitur vt ante inclinatio tangentis ad axem Φ, fitque

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \text{tang.}\,\Phi = q\left(-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right).$$

Deinde ſi pro aequatione differentiali breuitatis gratia ponamus $d\psi = A\,d\omega + B\,\omega\,d\omega + C\,\omega^2 d\omega + \text{etc.}$ erit radius curuaturae in dato curuae puncto $= \frac{(1+AA)^{\frac{3}{2}}}{B} = B\frac{1}{cof.\,\Phi^3}$ ob $A = \text{tang.}\,\Phi$. Eſt vero

$$B = \text{tang.}\,\Phi\left(-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \text{etc.}\right)$$
$$+ q\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.}\right)$$

vnde ſi radius curuaturae ponatur $= r$ erit

$$\frac{1}{r} = \frac{fin.\,\Phi^2 cof.\,\Phi}{q} + q\left(\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \text{etc.}\right)$$

20. Quo autem inueſtigationem directionis et curuaturae ad curuae puncta a puncto principali coordinatis p et q definito extendere queamus, ponamus breuitatis cauſa

$$-\Delta + \frac{p}{1+p} + \frac{p}{2(2+p)} + \frac{p}{3(3+p)} + \frac{p}{4(4+p)} + \text{etc} = P$$
$$\frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(2+p)^2} + \frac{1}{(3+p)^2} + \frac{1}{(4+p)^2} + \text{etc.} = Q$$
$$\frac{1}{(1+p)^3} + \frac{1}{(2+p)^3} + \frac{1}{(3+p)^3} + \frac{1}{(4+p)^3} + \text{etc.} = R$$
$$\frac{1}{(1+p)^4} + \frac{1}{(2+p)^4} + \frac{1}{(3+p)^4} + \frac{1}{(4+p)^4} + \text{etc.} = S$$
etc.

vt ſit $l\left(1 + \frac{\psi}{q}\right) = P\omega + \frac{1}{2}Q\omega^2 - \frac{1}{3}R\,\omega^3 + \frac{1}{4}S\omega^4 - \frac{1}{5}T\omega^5 + \text{etc.}$

Iam

Iam hinc differentiando elicimus:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = (q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})$$

atque vlterius differentiando

$$\frac{dd\psi}{d\omega^2} = (q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})^2$$
$$+(q+\psi)(Q-2R\omega+3S\omega^2-4T\omega^3+\text{etc.})$$

$$\frac{d^3\psi}{d\omega^3} = 3(q+\psi)(Q-2R\omega+3S\omega^2-4T\omega^3+\text{etc.})(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-\text{etc.})$$
$$+(q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.})^3$$
$$-(q+\psi)(2R-6S\omega+12T\omega^2-\text{etc.}).$$

His expeditis pro curuae puncto, quod conuenit abſciſſae $x=p+\omega$ et applicatae $y=q+\psi$ directio tangentis ita ſe habebit vt ſit

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{d\psi}{d\omega} = (q+\psi)(P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.}).$$

Tum vero poſito radio curuaturae $=r$, nouimus fore

$$r = \left(1+\frac{d\psi^2}{d\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{dd\psi}{d\omega^2} = 1 : \frac{dd\psi}{d\omega^2}\,\text{coſ.}\,\Phi^3$$

ſeu $\frac{1}{r} = \frac{dd\psi}{d\omega^2}\,\text{coſ.}\,\Phi^3$, vnde pro variabilitate curuaturae elicimus:

$$-\frac{dr}{rr\,d\omega} = \frac{d^3\psi}{d\omega^3}\,\text{coſ.}\,\Phi^3 - \frac{3\,dd\psi}{d\omega^2}\cdot\frac{d\Phi}{d\omega}\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2.$$

Eſt vero $\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2} = \frac{dd\psi}{d\omega}$ vnde conficitur:

$$-\frac{dr}{rr\,d\omega} = \frac{d^3\psi}{d\omega^3}\,\text{coſ.}\,\Phi^3 - 3\left(\frac{dd\psi}{d\omega^2}\right)^2\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^4.$$

Quae-

Quaestio quarta.

Naturam curuae hypergeometricae circa punctum eius infimum μ, vbi applicata est minima, inuestigare.

21. Quoniam hoc punctum parum distat a loco, cui respondet abscissa $=\frac{1}{2}$ et applicata $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ statuamus $p=\frac{1}{2}$ vt sit $q=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, hincque primo quaeramus valores litterarum P, Q, R, S etc. qui prodibunt

$$P=-\Delta+\frac{1}{3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\text{etc.}=2(1-l2)-\Delta=0,036489973978 57$$

$$Q=\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{7^2}+\frac{4}{9^2}+\text{etc.} \qquad =0,934802200544 68$$

$$R=\frac{8}{3^3}+\frac{8}{5^3}+\frac{8}{7^3}+\frac{8}{9^3}+\text{etc.} \qquad =0,414398322117 16$$

$$S=\frac{16}{3^4}+\frac{16}{5^4}+\frac{16}{7^4}+\frac{16}{9^4}+\text{etc.} \qquad =0,234848505667 07$$

$$T=\frac{32}{3^5}+\frac{32}{5^5}+\frac{32}{7^5}+\frac{32}{9^5}+\text{etc.} \qquad =0,144760408312 76$$

$$V=\frac{64}{3^6}+\frac{64}{5^6}+\frac{64}{7^6}+\frac{64}{9^6}+\text{etc.} \qquad =0,092612905020 29$$

$$W=\frac{128}{3^7}+\frac{128}{5^7}+\frac{128}{7^7}+\frac{128}{9^7}+\text{etc.} \qquad =0,060358228098 43$$

Deinde vero est $q=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=0,886226925452 74$.

22. Hinc iam ante omnia definiamus locum μ, vbi applicata est omnium minima, quem cum leues approximationes ostendant respondere abscissae $x=0,4616$, posito $p+\omega=\frac{1}{2}+\omega=0,4616$, colligitur proxime $\omega=-0,0383$, qui iam valor ex aequatione $\frac{d\psi}{d\omega}=0$ seu

$$P+Q\omega-R\omega^2+S\omega^3-T\omega^4+\text{etc.}=0$$

accuratius inuestigari debet. Cum igitur sit prope $\omega = -\frac{1}{26}$ statuatur $\omega = -\frac{1}{26} - z$, et facta substitutione necesse est fiat . . . $0,03648997397857 =$

$$
\begin{array}{l}
+0,03595393079018 + 0,934802200z \\
+0,00061301526940 + 0,031876794z + 0,414398zz \\
+0,00001336188585 + 0,001042227z + 0,027097zz \\
+0,00000031677900 + 0,000032945z + 0,001285zz \\
+0,00000000779479 + 0,000001013z + 0,000053zz \\
+0,00000000019538 + 0,000000030z + 0,000002zz \\
+0,00000000000496 \\
\qquad\qquad 13 \\
\hline
0,03658063271970 + 0,967755211z + 0,442835zz \\
0,03648997397857 \\
\hline
0 = 0,00009065874113 + 0,967755211z + 0,442835zz
\end{array}
$$

vnde reperitur $z = -0,0009368323$ hineque $\omega = -0,0383678552 3$.

Quocirca minima applicata $m\mu$ respondet, abscissae $Om = 0,46163214477$. Pro applicata vero $m\mu = q + \psi$ euolui oportet aequationem

$$l(1 + \tfrac{\psi}{q}) = P\omega + \tfrac{1}{2}Q\omega^2 - \tfrac{1}{3}R\omega^3 + \tfrac{1}{4}S\omega^4 - \tfrac{1}{5}T\omega^5 + \text{etc.}$$

ex qua colligitur $l(1 + \frac{\psi}{q}) = -0,000704053$ porroque $1 + \frac{\psi}{q} = 1 - 0,000703805$, ita vt fiat applicata minima $m\mu = q + \psi = 0,8856031945$.

23. Definiamus iam in genere ex aequatione logarithmica valorem ipsius ψ ac calculo subducto obtinebimus:

$\frac{\psi}{q} =$

$$\frac{\psi}{q} = +0,0364899740\,\omega + 0,468066860\,\omega^2$$
$$- 0,121069221\,\omega^3 + 0,16321479\,\omega^4$$
$$- 0,09360753\,\omega^5 \quad \text{etc.}$$

qui termini si quidem ω valde paruum accipiatur sufficiunt. Ponamus autem breuitatis gratia

$$\frac{\psi}{q} = \mathfrak{P}\omega + \mathfrak{Q}\omega^2 - \mathfrak{R}\omega^3 + \mathfrak{S}\omega^4 - \mathfrak{T}\omega^5 \text{ vt fit}$$
$$\mathfrak{P} = 0,0364899740; \quad \mathfrak{Q} = 0,468066860$$
$$\mathfrak{R} = 0,121069221 \quad ; \quad \mathfrak{S} = 0,16321479$$
$$\mathfrak{T} = 0,09360753$$

atque hinc habebimus:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = q(\mathfrak{P} + 2\mathfrak{Q}\omega - 3\mathfrak{R}\omega^2 + 4\mathfrak{S}\omega^3 - 5\mathfrak{T}\omega^4)$$
$$\frac{dd\psi}{d\omega^2} = q(2\mathfrak{Q} - 6\mathfrak{R}\omega + 12\mathfrak{S}\omega^2 - 20\mathfrak{T}\omega^3).$$

Quodsi iam hinc radium curuaturae in loco infimo μ vbi est $\omega = -0,0383678523$ indagare velimus, quoniam ibi est $\frac{d\psi}{d\omega} = 0$, erit is $= \frac{d\omega^2}{dd\psi}$. Ponatur in hoc loco radius curuaturae $= r$ et cum sit

$$\frac{1}{r} = 2q(\mathfrak{Q} - 3\mathfrak{R}\omega + 6\mathfrak{S}\omega^2 - 10\mathfrak{T}\omega^3) = 0,9669949$$

prodit pro puncto μ radius curuaturae $r = 1,'66893$.

24. Determinationes has puncti curuae infimi μ ideo omni studio inuestigaui, quod non sine ratione suspicari licebat quemadmodum hoc punctum singulari praerogatiua est praeditum, ita numeros eius indolem exhibentes elegantiam quandam in se esse complexuros, ac nisi satis simpliciter siue ratio-

naliter siue irrationaliter exprimantur, ad simplicius saltem genus quoddam transcendentium quantitatum relatum iri. Praeter expectationem autem vsu venit, vt tale criterium elegantiae neque in abscissa $Om = 0,4616321447$ neque in applicata $m\mu = 0,8856031945$ neque in radio curuaturae ibidem $= 1,166893$ appareat; nulla enim affinitas neque cum numeris rationalibus neque irrationalibus duntaxat simplicioribus, neque cum quadratura circuli, nec logarithmis vel exponentialibus deprehenditur. Cum etiam si abscissa Om vt logarithmus consideretur, numerus ei conueniens aliquid promittere videri posset, hunc numerum quaesiui et inueni $= 1,5866616$, in quo autem nulla affinitas cum quantitatibus cognitis cernitur.

25. Antequam huic speculationi finem imponam, obseruasse iuuabit formulam $1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots x$ etiam per sequentem seriem indefinite exprimi posse

$$x^x - x(x-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}(x-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3.}(x-3)^x + \text{etc.}$$

quippe quae quoties x est numerus integer positiuus sponte dat illud productum $1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots x$. Hoc vero etiam praestat ista expressio latius patens:

$$a^x - x(a-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.\ 2}(a-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(a-3)^x + \text{etc.}$$

erit enim si loco x successiue substituantur numeri 0, 1, 2, 3 etc. vt sequitur:

$a^0 = 1$

$$a^0 = 1$$
$$a^1 - (a-1)^1 = 1$$
$$a^2 - 2(a-1)^2 + (a-2)^2 = 1.\,1$$
$$a^3 - 3(a-1)^3 + 3(a-2)^3 - (a-3)^3 = 1.\,2.\,3$$
$$a^4 - 4(a-1)^4 + 6(a-2)^4 - 4(a-3)^4 + (a-4)^4 = 1.\,2.\,3\,4$$
$$a^5 - 5(a-1)^5 + 10(a-2)^5 - 10(a-3)^5 + 5(a-4)^5 - (a-5)^5 = 1.\,2.\,3.\,4.\,5.$$
etc.

26. Manifesta haec quidem sunt ex iis, quae de differentiis cuiusque ordinis progressionum algebraicarum sunt demonstrata, verumtamen ex ipsa harum serierum natura veritas haud facile euincitur; vnde sequens demonstratio non superflua videtur. Cum pro exponentibus minoribus x res per se sit perspicua, ratiocinium ita instruo vt concessa pro casu $x = n$ veritate, eam quoque pro casu $x = n + 1$ locum habere sim ostensurus.

Sit ergo

I. $a^n - n(a-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.\,2}(a-2)^n - \text{etc.} = N = 1.\,2.\,3\ldots n$

et quia summa N non ab a pendet erit etiam

II. $(a-1)^n - n(a-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.\,2}(a-3)^n - \text{etc.} = N$

quae ab illa subtracta relinquit

III. $a^n - \frac{(n+1)}{1}(a-1)^n + \frac{(n+1)n}{1.\,2}(a-2)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3}(a-3)^n + \text{etc.} = 0$

haec multiplicetur per a vt prodeat

IV. $a^{n+1} - \frac{(n+1)}{1}a(a-1)^n + \frac{(n+1)n}{1.\,2}a(a-2)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3}a(a-3)^n + \text{etc.} = 0$

huic addatur aequatio II in $n+1$ ducta, nempe:

$$\text{V.}\; +(n+1)1(a-1)^n - \frac{(n+1)n}{1.\;2}2(a-2)^n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\;2.\;3}3(a-3)^n - \text{etc} = (n+1)\text{N}$$

atque aggregatum IV+V dabit

$$\text{VI.}\; a^{n+1} - \frac{(n+1)}{1}(a-1)^{n+1} + \frac{(n+1)n}{1.\;2}(a-2)^{n+1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\;2.\;3}(a-3)^{n+1} + \text{etc.} = (n+1)\text{N}$$

vbi ob $\text{N} = 1.2.3\ldots n$ erit $(n+1)\text{N} = 1.2.3\ldots(n+1)$.

Euictum ergo eſt, quod ſi propoſitio noſtra

$$a^x - x(a-1)^x + \frac{x(x-1)}{1.\;2}(a-2)^x - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\;2.\;3}(a-3)^x + \text{etc.} = 1.\;2.\;3.\ldots x$$

vera fuerit caſu $x=n$, eam quoque veram eſſe caſu $x=n+1$. Quoniam igitur ea manifeſto vera eſt caſu $x=1$, hinc ſequitur eam quoque veram eſſe pro omnibus numeris integris poſitiuis loco x aſſumtis.

27. Quanquam autem haec expreſſio ſatis eſt elegans et omni attentione digna, tamen ad noſtrum inſtitutum, cui curua hypergeometrica eſt propoſita, minus eſt accommodata quoniam pro caſibus quibus x eſt numerus fractus, haec ſeries non ſolum in infinitum excurrit, ſed etiam ſi denominator eſt numerus par, terminos imaginarios complectitur, ita vt eius valorem ne appropinquando quidem colligere liceat. Ita poſito $x=\frac{1}{2}$ prodit haec ſeries infinita:

$$\sqrt{a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-1)} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\sqrt{(a-2)} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}\sqrt{(a-3)} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}.\tfrac{5}{8}\sqrt{(a-4)} - \text{etc.}$$

cuius valorem eſſe $=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, vix quisquam oſtendere poterit. Pari modo ſumendo $x=-\frac{1}{2}$ ex ſuperioribus quidem iam nouimus eſſe

$\sqrt{\pi} =$

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{(a-1)}} + \frac{1.\,3}{2.\,4\sqrt{(a-2)}} + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6\sqrt{(a-3)}} + \text{etc.}$$

Nihilo vero minus vberior huius ſeriei inueſtigatio geometris merito commendatur, imprimis ſi ei amplior extenſio inducatur, atque hac forma repraeſentetur:

$$s = x^n - m(x-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.\,2}(x-2)^n - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}(x-3)^n + \text{etc.}$$

leui enim ſtudio adhibito, mox admodum inſignes proprietates deprehenduntur, quarum euolutio omnem attentionem noſtram mereri videtur. Equidem quae mihi circa eam obſeruare contigit phaenomena prorſus ſingularia hic in medium afferam.

Obſeruationes circa hanc ſeriem.

$$s = x^n - m(x-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.\,2}(x-2)^n - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}(x-3)^n + \text{etc.}$$

I. In praecedentibus igitur iam demonſtraui, ſi fuerit exponens $n = m$, fore huius ſeriei ſummam

$$s = 1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\,m$$

ita vt ea hoc caſu non a numero x pendeat. Hinc autem primo colligo ſi fuerit $n = m - 1$, tum fore $s = 0$. Cum enim ſumto $n = m$ ſit

$$♄\ \ldots\ 1.\,2.\,3\,\ldots\,m = x^m - m(x-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.\,2}(x-2)^m - \text{etc.}$$

erit ſcribendo $x - 1$ loco x et $m - 1$ loco m ſimili modo:

$$♃\ \ldots\ 1.\,2.\,3\ldots(m-1) = (x-1)^{m-1} - (m-1)(x-2)^{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$

Iam

Iam illa aequatio hoc modo referatur:

$$♂ \ldots 1.2.3 \ldots m = x.x^{m-1} - mx(x-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$
$$+ m(x-1)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-1} + \text{etc.}$$

aequatio autem ♃ per m multiplicata dat:

$$☉\ 1.2.3 \ldots m = m(x-1)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$

quae ab illa ♂ subtracta et diuisione per x facta praebet

$$♀\ 0 = x^{m-1} - \frac{m}{1}(x-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m-1} - \text{etc.}$$

quae est ipsa aequatio proposita pro casu $n = m-1$, cuius idcirco valor est $= 0$.

II. Eodem modo ostenditur seriei propositae summam s quoque euanescere casu $n = m-2$. Series enim illa ♀ hoc modo repraesentetur:

$$☿ = 0 = x.x^{m-2} - \frac{m}{1}x(x-1)^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2}x(x-2)^{m-2} - \text{etc.}$$
$$+ m(x-1)^{m-2} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-2} + \text{etc.}$$

et si in eadem serie ♀ scribatur $x-1$ loco x et $m-1$ loco m, tota vero series per m multiplicetur, fit

$$☽ \ldots\ 0 = m(x-1)^{m-2} - \frac{m(m-1)}{1}(x-2)^{m-2} + \text{etc.}$$

Hac ab illa subtracta residuum per x diuidatur, prodibitque:

$$0 = x^{m-2} - \frac{m}{1}(x-1)^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m-2} - \text{etc.}$$

Sicque

Sicque seriei propositae summa s etiam euanescit casu $n=m-2$, parique modo ostendi potest eam quoque euanescere casibus $n=m-3$, $n=m-4$, et in genere $n=m-i$, existente i numero quocunque integro positiuo. Teneatur ergo seriei propositae summam esse $s=1.2.3\ldots m$ casu $n=m$, casibus autem quibus exponens n minor est numero m summam in nihilum abire, siquidem numeri m et n sint integri, seu saltem $n-m$ numerus integer positiuus.

III. Quo igitur indolem reliquorum casuum perscrutemur singulos terminos nostrae seriei euoluamus et secundum potestates ipsius x disponamus, quo pacto consequemur:

$$\begin{aligned} s = & x^n\left(1-m+\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{etc.}\right)\\ & + n x^{n-1}\left(m-\tfrac{2m(m-1)}{1.2}+\tfrac{3m(m-1)(m-2)}{1.2.3}-\text{etc.}\right)\\ & - \tfrac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}\left(m-\tfrac{4m(m-1)}{1.2}+\tfrac{9m(m-1)(m-2)}{1.2.3}-\text{etc.}\right)\\ & + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3}\left(m-\tfrac{8m(m-1)}{1.2}+\tfrac{27m(m-1)(m-2)}{1.2.3}-\text{etc.}\right)\\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quarum singularum serierum summas sequenti modo inueniemus; prima aliquanto generalius exhibeatur, et cum eius summa sit cognita:

$$1-mu+\frac{m(m-1)}{1.2}u^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}u^3+\text{etc.}=(1-u)^m$$

continuo eam differentiemus, et perpetuo loco du restituamus u, fietque signis mutatis:

$$mu - \frac{2m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \frac{3m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^3 - \text{etc.} = mu(1-u)^{m-1}$$

$$mu - \frac{2^2 m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \text{etc.} = mu(1-u)^{m-1} - m(m-1)u^2(1-u)^{m-2}$$

$$\begin{aligned} mu - \frac{2^3 m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \text{etc.} = {} & mu(1-u)^{m-1} - 3m(m-1)u^2(1-u)^{m-2} \\ & + m(m-1)(m-2)u^3(1-u)^{m-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mu - \frac{2^4 m(m-1)}{1\cdot 2}u^2 + \text{etc.} = {} & mu(1-u)^{m-1} - 7m(m-1)uu(1-u)^{m-2} + 6m(m-1) \\ & (m-2)u^3(1-u)^{m-3} \\ & - m(m-1)(m-2)(m-3)u^4(1-u)^{m-4} \end{aligned}$$

etc.

Hic ergo iam ſcribi oportet $u = 1$, quo facto omnes termini in quouis ordine euaneſcunt praeter eos, vbi exponens ipſius $1-u$ fit $=0$.

IV. Tribuantur nunc ſucceſſiue ipſi m valores $1, 2, 3, 4, 5$ etc. et loco coefficientis in genere $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)}$ ſcribatur breuitatis gratia $\left(\frac{n-i}{i+1}\right)$, quo facto nanciſcimur valores ſequentes:

$$\begin{array}{l|l}
\text{ſi} & \text{erit} \\
m=1 & \frac{s}{1} = \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2} + \left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3} - \left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} + \left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} - \text{etc.} \\
m=2 & \frac{s}{1\cdot 2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2} - 3\left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3} + 7\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} - 15\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} + 31\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} - \text{etc.} \\
m=3 & \frac{s}{1\cdot 2\cdot 3} = \left(\frac{n-2}{3}\right)x^{n-3} - 6\left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} + 25\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} - 90\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} + 301\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} + \text{etc.} \\
m=4 & \frac{s}{1\cdot 2\ldots 4} = \left(\frac{n-3}{4}\right)x^{n-4} - 10\left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} + 65\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} - 350\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} + 1701\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8} + \text{etc.} \\
m=5 & \frac{s}{1\cdot 2\ldots 5} = \left(\frac{n-4}{5}\right)x^{n-5} - 15\left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} + 140\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} - 1050\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8} + 6951\left(\frac{n-8}{9}\right)x^{n-9} + \text{etc.} \\
m=6 & \frac{s}{1\cdot 2\ldots 6} = \left(\frac{n-5}{6}\right)x^{n-6} - 21\left(\frac{n-6}{7}\right)x^{n-7} + 266\left(\frac{n-7}{8}\right)x^{n-8} - 2646\left(\frac{n-8}{9}\right)x^{n-9} + 22827\left(\frac{n-9}{10}\right)x^{n-10} + \text{etc.}
\end{array}$$

vbi

vbi formatio coefficientium numericorum ex antecedentibus eſt manifeſta, eſt nempe pro poſtrema ſexta ſerie:

$$21 = 6.1 + 15;\ 266 = 6.21 + 140;\ 2646 = 6.266 + 1050 \text{ etc.}$$

Atque hinc ſtatim perſpicitur, ſi fuerit $n < m$ valorem ipſius s euaneſcere, in poſtrema enim ſerie ſi $n < 6$ ideoque vel 5 vel 4 vel 3 etc. erit $(\frac{n-5}{6}) = 0$, $(\frac{n-6}{7}) = 0$ etc.

Tum vero etiam ſi ſit $n = m$, euidens eſt fore $\frac{s}{1.2\ldots m} = 1$, eſt enim in infima ſerie:

$$(\frac{6-5}{6}) = 1,\ (\frac{6-6}{7}) = 0,\ (\frac{6-7}{8}) = 0,\ (\frac{6-8}{9}) = 0 \text{ etc.}$$

Euolutio caſuum $n = m + 1$.

V. Hinc primo caſus euoluamus, quibus eſt $n = m + 1$, et forma poſtrema praebet

ſi	has ſummas
$m = 1, n = 2$	$\frac{s}{1} = 2x - 1$
$m = 2, n = 3$	$\frac{s}{1.2} = 3x - 3$
$m = 3, n = 4$	$\frac{s}{1.2.3} = 4x - 6$
$m = 4, n = 5$	$\frac{s}{1.2.3.4} = 5x - 10$
$m = 5, n = 6$	$\frac{s}{1.2\ldots 5} = 6x - 15$
	etc

vbi priores coefficientes ipſius x ipſi n, numeri abſoluti autem trigonalibus ipſius n aequentur, habebimus in genere

si sit	hanc aequationem
$n=m+1$	$\frac{s}{1.2\ldots m}=(m+1)x-\frac{m(m+1)}{1.2}=(m+1)(x-\frac{m}{2})$

ita vt sit

$$x^{m+1}-m(x-1)^{m+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}(x-2)^{m+1}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x-3)^{m+1}+\text{etc.}$$
$$=1.2.3\ldots\ldots(m+1)(x-\tfrac{m}{2}).$$

Euolutio casuum $n=m+2$.

VI. Pro his ergo casibus habebimus

si fuerit	has aequationes	
$m=1, n=3$	$\frac{s}{1}=3x^2-3.1x+1.1$	$=3(xx-x+\frac{2}{6})$
$m=2, n=4$	$\frac{s}{1.2}=6x^2-4.3x+1.7$	$=6(xx-2x+\frac{7}{6})$
$m=3, n=5$	$\frac{s}{1.2.3}=10x^2-5.6x+1.25$	$=10(xx-3x+\frac{15}{6})$
$m=4, n=6$	$\frac{s}{1.2.3.4}=15x^2-6.10x+1.65$	$=15(xx-4x+\frac{26}{6})$
$m=5, n=7$	$\frac{s}{1.2\ldots5}=21x^2-7.15x+1.140$	$=21(xx-5x+\frac{40}{6})$
$m=6, n=8$	$\frac{s}{1.2\ldots6}=28x^2-8.21x+1.266$	$=28(xx-6x+\frac{57}{6})$

etc.

quae formae ita repraesentari possunt

si fuerit	erit
$m=1;\ n=3$	$\frac{s}{1}=\frac{2.3}{1.2}(xx-x+\frac{1.4}{12})$
$m=2;\ n=4$	$\frac{s}{1.2}=\frac{3.4}{1.2}(xx-2x+\frac{2.7}{12})$
$m=3;\ n=5$	$\frac{s}{1.2.3}=\frac{4.5}{1.2}(xx-3x+\frac{3.10}{12})$
$m=4;\ n=6$	$\frac{s}{1.2.3.4}=\frac{5.6}{1.2}(xx-4x+\frac{4.13}{12})$
$m=5;\ n=7$	$\frac{s}{1.2.3.4.5}=\frac{6.7}{1.2}(xx-5x+\frac{5.16}{12})$
$m=6;\ n=8$	$\frac{s}{1.2\ldots6}=\frac{7.8}{1.2}(xx-6x+\frac{6.19}{12})$

vnde

vnde manifesto sequitur, si in genere sit $n = m + 2$

fore $\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot m} = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \left(xx - mx + \frac{m(3m+1)}{12}\right)$

seu $\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot m} = \frac{m+1}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \left(\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m}{12}\right)$.

Ergo hinc obtinetur ista summatio

$$x^{m+2} - m(x-1)^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(x-2)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-3)^{m+2} + \text{etc.}$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (m+2)\left(\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{m}{2}\right)^2 + \tfrac{m}{24}\right).$$

Euolutio casuum $n = m + 3$.

VII. Pro his casibus habebimus

si fuerit	has aequationes
$m = 1; n = 4$	$\frac{s}{1} = 4x^3 - 6 \cdot 1x^2 + 4 \cdot 1x - 1 \cdot 1$
$m = 2; n = 5$	$\frac{s}{1 \cdot 2} = 10x^3 - 10 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 7x - 1 \cdot 15$
$m = 3; n = 6$	$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20x^3 - 15 \cdot 6x^2 + 6 \cdot 25x - 1 \cdot 90$
$m = 4; n = 7$	$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 4} = 35x^3 - 21 \cdot 10x^2 + 7 \cdot 65x - 1 \cdot 350$
$m = 5; n = 8$	$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot 5} = 56x^3 - 28 \cdot 15x^2 + 8 \cdot 140x - 1 \cdot 1050$

quae hoc modo repraesententur:

$$\frac{s}{1} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 4}{4}x - \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{2 \cdot 7}{4}x - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3 \cdot 10}{4}x - \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{12}{2}x^2 + \frac{4 \cdot 13}{4}x - \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{8}\right)$$
$$\frac{s}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{5 \cdot 16}{4}x - \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{8}\right)$$

etc.

vnde in genere concluditur pro casu $n = m+3$

$$\frac{s}{1.2\ldots m} = \frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\left(x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + \frac{m(3m+1)}{4}x - \frac{mm(m+1)}{8}\right)$$

$$= \frac{m+1}{1}.\frac{m+2}{2}.\frac{m+3}{3}\left(\left(x-\frac{m}{2}\right)^3 + \frac{m}{4}\left(x-\frac{m}{2}\right)\right)$$

ita vt iam consequamur:

$$x^{m+3} - m(x-1)^{m+3} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}(x-2)^{m+3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(x-3)^{m+3}\text{etc.}$$

$$= 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots(m+3)\left(\tfrac{1}{6}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^3 + \tfrac{m}{24}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)\right).$$

Praeparatio ad casus sequentes.

VIII. Cum §. 4. formulas tantum ad casum $m=6$ produxerimus, conemur pro iis formam generalem eruere. In hunc finem statuamus $n=m+\lambda$, et ad abbreuiandum loco talis expressionis $\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-i+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ i}$ scribamus $\left(\frac{k}{i}\right)$ ita vt k denotet primum factorem numeratoris, i vero vltimum denominatoris. Ponamus igitur esse pro casu

$m-1$ $\quad \frac{s}{1.2\ldots(m-1)} = \left(\frac{m+\lambda}{m-1}\right)x^{\lambda+1} - A\left(\frac{m+\lambda}{m}\right)x^{\lambda} + B\left(\frac{m+\lambda}{m+1}\right)x^{\lambda-1} - C\left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right)x^{\lambda-2}\text{etc.}$

m $\quad \frac{s}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m} = \left(\frac{m+\lambda}{m}\right)x^{\lambda} - A'\left(\frac{m+\lambda}{m+1}\right)x^{\lambda-1} + B'\left(\frac{m+\lambda}{m+2}\right)x^{\lambda-2} - C'\left(\frac{m+\lambda}{m+3}\right)x^{\lambda-3}\text{etc.}$

ita vt A', B', C', D' etc. sint ii coefficientes, quos inuestigari oportet. Ex lege autem istarum formularum vidimus esse; $A' = m.1 + A$; $B' = mA' + B$; $C' = mB' + C$; $D' = mC' + D$ etc. vbi euidens est esse $A = \frac{m(m-1)}{1.\ 2}$ et $A' = \frac{(m+1)m}{1.\ 2}$ seu nostro signando modo $A = \left(\frac{m}{2}\right)$ et $A' = \left(\frac{m+1}{2}\right)$. Iam pro sequentibus operationibus obseruo esse:

$$\left(\frac{m+\mu+1}{\nu}\right) - \left(\frac{m+\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{m+\mu}{\nu-1}\right)$$

quod

quod facile inde patet, quod sit euoluendo:

$$\left(\frac{m+\mu+1}{\nu}\right)=\frac{(m+\mu+1)(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots\ldots(m+\mu+2-\nu)}{1\cdot\;2\cdot\;3\;\cdot\;\cdot\;\nu}$$

$$\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right)=\frac{(m+\mu)(m+\mu-1)\ldots\ldots(m+\mu+2-\nu)(m+\mu+1-\nu)}{1\cdot\;2\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(\nu-1)\;\nu}$$

vnde perspicitur esse $\left(\frac{m+1}{2}\right)-\left(\frac{m}{2}\right)=\left(\frac{m}{1}\right)=m.$

IX. Iam vt fiat

$$B'-B=mA'=\left(\frac{m+1}{2}\right)m=3\left(\frac{m+1}{3}\right)+\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

statuamus $B=\alpha\left(\frac{m+1}{4}\right)+\beta\left(\frac{m+1}{3}\right)$

hincque $B'=\alpha\left(\frac{m+2}{4}\right)+\beta\left(\frac{m+2}{3}\right)$

prodibitque

$$B'-B=\alpha\left(\frac{m+1}{3}\right)+\beta\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

vnde fit $\alpha=3$ et $\beta=1$ ita vt sit

$$B'=3\left(\frac{m+2}{4}\right)+\left(\frac{m+2}{3}\right).$$

Pro sequentibus operationibus autem notetur esse in genere:

$$\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right)m=(\nu+1)\left(\frac{m+\mu}{\nu+1}\right)+(\nu-\mu)\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right)$$

quippe quae forma prodit, si valor ipsius $\left(\frac{m+\mu}{\nu}\right)$ supra euolutus multiplicetur per

$$m=m+\mu-\nu+\nu-\mu=(\nu+1).\;\frac{m+\mu-\nu}{\nu+1}+(\nu-\mu).$$

X. His obseruatis cum esse debeat $C'-C=mB'$, ob

$$\left(\frac{m+2}{4}\right)m=5\left(\frac{m+2}{5}\right)+2\left(\frac{m+2}{4}\right)$$

et

et $\left(\frac{m+2}{3}\right) = 4\left(\frac{m+2}{4}\right) + 1\left(\frac{m+2}{3}\right)$ erit

$$mB^{\mathrm{I}} = 15\left(\frac{m+2}{5}\right) + 10\left(\frac{m+2}{4}\right) + 1\left(\frac{m+2}{3}\right)$$

ſtatuatur ergo

$$C = 15\left(\frac{m+2}{6}\right) + 10\left(\frac{m+2}{5}\right) + 1\left(\frac{m+2}{4}\right)$$

hinc $C^{\mathrm{I}} = 15\left(\frac{m+3}{6}\right) + 10\left(\frac{m+3}{5}\right) + 1\left(\frac{m+3}{4}\right)$.

XI. Simili modo cum eſſe debeat $D^{\mathrm{I}} - D = mC^{\mathrm{I}}$ quia eſt

$$m\left(\frac{m+3}{6}\right) = 7\left(\frac{m+3}{7}\right) + 3\left(\frac{m+3}{6}\right)$$

$$m\left(\frac{m+3}{5}\right) = 6\left(\frac{m+3}{6}\right) + 2\left(\frac{m+3}{5}\right)$$

$$m\left(\frac{m+3}{4}\right) = 5\left(\frac{m+3}{5}\right) + 1\left(\frac{m+3}{4}\right)$$

erit

$$mC^{\mathrm{I}} = 105\left(\frac{m+3}{7}\right) + 105\left(\frac{m+3}{6}\right) + 25\left(\frac{m+3}{5}\right) + \left(\frac{m+3}{4}\right)$$

vnde colligimus

$$D^{\mathrm{I}} = 105\left(\frac{m+4}{8}\right) + 105\left(\frac{m+4}{7}\right) + 25\left(\frac{m+4}{6}\right) + 1\left(\frac{m+4}{5}\right)$$

XII. Porro ob $E^{\mathrm{I}} - E = mD^{\mathrm{I}}$ quia eſt

$$m\left(\frac{m+4}{8}\right) = 9\left(\frac{m+4}{9}\right) + 4\left(\frac{m+4}{8}\right)$$

$$m\left(\frac{m+4}{7}\right) = 8\left(\frac{m+4}{8}\right) + 3\left(\frac{m+4}{7}\right)$$

$$m\left(\frac{m+4}{6}\right) = 7\left(\frac{m+4}{7}\right) + 2\left(\frac{m+4}{6}\right)$$

$$m\left(\frac{m+4}{5}\right) = 6\left(\frac{m+4}{6}\right) + 1\left(\frac{m+4}{5}\right)$$

colli-

colligimus

$$mD^{\mathrm{I}} = 945\binom{m+4}{9} + 1260\binom{m+4}{8} + 490\binom{m+4}{7} + 56\binom{m+4}{6} + 1\binom{m+4}{5}$$

hincque

$$E^{\mathrm{I}} = 945\binom{m+5}{10} + 1260\binom{m+5}{9} + 490\binom{m+5}{8} + 56\binom{m+5}{7} + 1\binom{m+5}{6}$$

et vlterius progrediendo

$$F^{\mathrm{I}} = 10395\binom{m+6}{12} + 17325\binom{m+6}{11} + 9450\binom{m+6}{10} + 1918\binom{m+6}{9} + 119\binom{m+6}{8} + \binom{m+6}{7}.$$

Euolutio casus $n = m + \lambda$.

XIII. Pro serie ergo nostra casu quo $n = m + \lambda$

$$s = x^{m+\lambda} - \frac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}(x-2)^{m+\lambda} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(x-3)^{m+\lambda} + \text{etc.}$$

si aequationem generalem supra §. VIII. exhibitam diuidamus per $\binom{m+\lambda}{m} = \frac{(m+\lambda)}{1.}\frac{(m+\lambda-1)}{2.}\frac{(m+\lambda-2)}{3}\cdots\cdots\frac{(\lambda+1)}{m}$ perueniemus ad hanc expressionem

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots\cdot(\lambda+m)} = x^{\lambda} - \frac{\lambda}{m+1}A^{\mathrm{I}}x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{(m+1)(m+2)}B^{\mathrm{I}}x^{\lambda-2} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}C^{\mathrm{I}}x^{\lambda-3} + \text{etc.}$$

vbi loco litterarum A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I} etc. sequentes valores substitui oportet:

$$A^{\mathrm{I}} = \binom{m+1}{2} = \frac{(m+1)m}{1.\ 2}$$

$$B^{\mathrm{I}} = 3\binom{m+2}{4} + \binom{m+2}{3}$$

$$C^{\mathrm{I}} = 15\binom{m+3}{6} + 10\binom{m+3}{5} + \binom{m+3}{4}$$

$$D^{\mathrm{I}} = 105\binom{m+4}{8} + 105\binom{m+4}{7} + 25\binom{m+4}{6} + \binom{m+4}{5}$$

$$E^{\mathrm{I}} = 945\binom{m+5}{10} + 1260\binom{m+5}{9} + 490\binom{m+5}{8} + 56\binom{m+5}{7} + \binom{m+5}{6}$$

$$F^{\mathrm{I}} = 10395\binom{m+6}{12} + 17325\binom{m+6}{11} + 9450\binom{m+6}{10} + 1918\binom{m+6}{9} + 119\binom{m+6}{8} + \binom{m+6}{7}$$

 vbi

vbi est
$$\begin{array}{rl} 10395 = 11.945; & 17325 = 10.1260 + 5.945 \\ & 9450 = 9.490 + 4.1260 \\ & 1918 = 8.56 + 3.490 \\ & 119 = 7.1 + 2.56 \\ & 1 = 6.0 + 1.1 \end{array}$$

hinc si pro valore sequente ponatur:

$$G^{\mathrm{I}} = \alpha\left(\tfrac{m+7}{14}\right) + \beta\left(\tfrac{m+7}{13}\right) + \gamma\left(\tfrac{m+7}{12}\right) + \delta\left(\tfrac{m+7}{11}\right) + \varepsilon\left(\tfrac{m+7}{10}\right) + \zeta\left(\tfrac{m+7}{9}\right) + \eta\left(\tfrac{m+7}{8}\right)$$

hi coefficientes ita determinabuntur:

$$\begin{array}{l|l} \alpha = 13.10395 & \varepsilon = 9.119 + 3.1918 \\ \beta = 12.17325 + 6.10395 & \zeta = 8.1 + 2.119 \\ \gamma = 11.9450 + 5.17325 & \eta = 7.0 + 1.1 \\ \delta = 10.1918 + 4.9450 & \end{array}$$

XIV. Iidem autem valores commodius ita exprimentur:

$$A^{\mathrm{I}} = \left(\tfrac{m+1}{2}\right).1$$

$$B^{\mathrm{I}} = \left(\tfrac{m+2}{3}\right)\left(1 + 3.\tfrac{m-1}{4}\right)$$

$$C^{\mathrm{I}} = \left(\tfrac{m+3}{4}\right)\left(1 + 10.\tfrac{m-1}{5} + 15.\tfrac{m-1}{5}.\tfrac{m-2}{6}\right)$$

$$D^{\mathrm{I}} = \left(\tfrac{m+4}{5}\right)\left(1 + 25.\tfrac{m-1}{6} + 105.\tfrac{m-1}{6}.\tfrac{m-2}{7} + 105.\tfrac{m-1}{6}.\tfrac{m-2}{7}.\tfrac{m-3}{8}\right)$$

$$E^{\mathrm{I}} = \left(\tfrac{m+5}{6}\right)\left(1 + 56.\tfrac{m-1}{7} + 490.\tfrac{m-1}{7}.\tfrac{m-2}{8} + 1260.\tfrac{m-1}{7}.\tfrac{m-2}{8}.\tfrac{m-3}{9} + 945.\tfrac{m-1}{7}.\tfrac{m-2}{8}.\tfrac{m-3}{9}.\tfrac{m-4}{10}\right)$$

$$F^{\mathrm{I}} = \left(\tfrac{m+6}{7}\right)\left(1 + 119.\tfrac{m-1}{8} + 1918.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9} + 9450.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9}.\tfrac{m-3}{10} + 17325.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9}.\tfrac{m-3}{10}.\tfrac{m-4}{11} + 10395.\tfrac{m-1}{8}.\tfrac{m-2}{9}.\tfrac{m-3}{10}.\tfrac{m-4}{11}.\tfrac{m-5}{12}\right)$$

cuius

cuius progreſſionis lex quo facilius perſpiciatur, ponamus in genere

$$M^{\text{I}} = \left(\frac{m+\mu-1}{\mu}\right)\left(1+\alpha.\frac{m-1}{\mu+1}+\beta.\frac{m-1}{\mu+1}.\frac{m-2}{\mu+2}+\gamma.\frac{m-1}{\mu+1}.\frac{m-2}{\mu+2}.\frac{m-3}{\mu+3}+\text{etc.}\right.$$

et ſequentem

$$N^{\text{I}} = \left(\frac{m+\mu}{\mu+1}\right)\left(1+\alpha^{\text{I}}.\frac{m-1}{\mu+2}+\beta^{\text{I}}.\frac{m-1}{\mu+2}.\frac{m-2}{\mu+3}+\gamma^{\text{I}}.\frac{m-1}{\mu+2}.\frac{m-2}{\mu+3}.\frac{m-3}{\mu+4}+\text{etc.}\right.$$

atque hi coefficientes hoc modo per praecedentes determinantur

$$\begin{aligned}
\alpha^{\text{I}} &= 2\alpha+\mu+1; \\
\beta^{\text{I}} &= 3\beta+(\mu+2)\alpha \\
\gamma^{\text{I}} &= 4\gamma+(\mu+3)\beta \\
\delta^{\text{I}} &= 5\delta+(\mu+4)\gamma \\
\varepsilon^{\text{I}} &= 6\varepsilon+(\mu+5)\delta
\end{aligned}$$

vnde has formulas facile quousque libuerit continuare licet.

XV. Subſtituamus iam hos valores, ac pro ſumma s ſeriei propoſitae quando $n = m+\lambda$ obtinebimus ſequentem expreſſionem:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+m)} =$$

$$x^{\lambda} - \frac{\lambda m}{1.\,2}x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{1.\,2.\,3}x^{\lambda-2}\left(1+\frac{3(m-1)}{4}\right)$$

$$-\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m}{1.\,2.\,3.\,4}x^{\lambda-3}\left(1+10.\frac{m-1}{5}+15.\frac{m-1}{5}.\frac{m-2}{6}\right)$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)m}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}x^{\lambda-4}\left(1+25.\frac{m-1}{6}+105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7}+105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7}.\frac{m-3}{8}\right)$$

$$-\frac{\lambda\ldots\ldots(\lambda-4)m}{1.\ldots\ldots 5.\,6}x^{\lambda-5}\left(1+56.\frac{m-1}{7}+490.\frac{m-1}{7}.\frac{m-2}{8}+1260.\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-3}{9}\right.$$

$$\left.+945\,\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-4}{10}\right)$$

$$+\frac{\lambda\ldots\ldots(\lambda-5)m}{1\ldots\ldots 6.\,7}x^{\lambda-6}\left(1+119.\frac{m-1}{8}+1918.\frac{m-1}{8}.\frac{m-2}{9}+9450.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-3}{10}\right.$$

$$\left.+17325.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-4}{11}+10395.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-5}{12}\right)$$

etc.

 ſubtra-

ſubtrahatur hinc primo poteſtas

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda = x^\lambda - \frac{\lambda m}{2}x^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)m^2}{1.\ 2.\ 4}x^{\lambda-2} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m^3}{1.\ 2.\ 3.\ 8}x^{\lambda-3}$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-3)m^4}{1 \ldots\ldots 4.\ 16}x^{\lambda-4} - \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)m^5}{1.\ \ldots\ldots 5.\ 32}x^{\lambda-5}$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m^6}{1 \ldots\ldots 6.\ 64}x^{\lambda-6} - \text{etc.}$$

Commode autem hic euenit vt ſit

$$\frac{15}{5.\ 6} = \frac{4}{8};\quad \frac{105}{6.\ 7.\ 8} = \frac{5}{16};\quad \frac{945}{7.\ 8.\ 9.\ 10} = \frac{6}{32};\quad \frac{10395}{8.\ 9.\ 10.\ 11.\ 12} = \frac{7}{64}$$

cuius quidem rei ratio per ſe eſt perſpicua; quamobrem expreſſio ſuperior euoluta ſequentem induit formam

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{1.\ 2.\ 3}x^{\lambda-2}.\tfrac{1}{4} - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)m}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{\lambda-3}.\tfrac{m}{2} + \frac{\lambda \ldots (\lambda-3)m}{1 \ldots\ldots 4.\ 5}x^{\lambda-4}(\tfrac{5}{8}m^2 + \tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24})$$
$$- \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)m}{1 \ldots\ldots 5.\ 6}x^{\lambda-5}(\tfrac{5}{8}m^3 + \tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m)$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots\ldots 6.\ 7}x^{\lambda-6}(\tfrac{35}{64}m^4 + \tfrac{35}{64}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36}).\ \text{etc.}$$

XVI. In hac expreſſione denuo poteſtas ipſius $x - \frac{m}{2}$ ſcilicet $\frac{\lambda(\lambda-1)m}{2.\ 3.\ 4}(x-\frac{m}{2})^{\lambda-2}$ contineri deprehenditur qua inde ſeparata expreſſio noſtra erit:

$$(x-\tfrac{m}{2})^\lambda + \frac{\lambda(\lambda-1)m}{2.\ 3.\ 4}(x-\tfrac{m}{2})^{\lambda-2} + \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-3)m}{1 \ldots\ldots 4.\ 5}x^{\lambda-4}(\tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24})$$
$$- \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)m}{1 \ldots\ldots 5.\ 6}x^{\lambda-5}(\tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m)$$
$$+ \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots\ldots 6.\ 7}x^{\lambda-6}(\tfrac{35}{64}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36})\ \text{etc.}$$

in qua adhuc continetur $\frac{\lambda \ldots (\lambda-3)m}{1 \ldots\ldots 4.\ 5}(\frac{5}{48}m - \frac{1}{24})(x-\frac{m}{2})^{\lambda-4}$ ac praeterea ſupereſt

$$\frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)m}{1 \ldots\ldots 6.\ 7}x^{\lambda-6}(\tfrac{35}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{36})$$

vnde

vnde ſine dubio inſuper haec poteſtas accedit:

$$+\frac{\lambda\ldots\ldots(\lambda-5)m}{1\ldots\ldots 6.\,7}\cdot\frac{35m^2-42m+16}{576}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-6}.$$

Quocirca aequatio noſtra ita erit comparata:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}=\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\,2}\cdot\frac{m}{12}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-2}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-3)}{1.\,2\ldots\ldots 4}\cdot\frac{m(5m-2)}{240}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-4}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots\ldots(\lambda-5)}{1.\,2\ldots\ldots 6}\cdot\frac{m(35m^2-42m+16)}{4032}\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-6}\text{ etc.}$$

XVII. En ergo ſeriei noſtrae propoſitae generalis:

$$s=x^{m+\lambda}-\tfrac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda}+\frac{m(m-1)}{1.\,2}(x-2)^{m+\lambda}$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}(x-3)^{m+\lambda}+\text{etc.}$$

eximiam transformationem, quae cum per plures ambages ſit eruta, ac pluribus operationibus admodum intricatis innixa, tantopere abſtruſa videtur, vt eius inueſtigatio directa ingentia ſubſidia in Analyſin ſit allatura. Quo autem facilius hanc transformationem perſcrutari liceat eam hoc modo repraeſentabo, vt ſit

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+m)}=\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\,2}\,P\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-2}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{1.\,2\ldots 4}\,Q\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-4}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-5)}{1.\,2\ldots 6}\,R\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-6}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-7)}{1.\,2\ldots 8}\,S\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-8}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-9)}{1.\,2\ldots 10}\,T\left(x-\tfrac{m}{2}\right)^{\lambda-10}$$
$$\text{etc.}$$

 pro

pro qua expressione hactenus quidem inueni

$$P = \frac{m}{3 \cdot 4}$$

$$Q = \frac{m(5m - 2)}{5 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$R = \frac{m(35mm - 42m + 16)}{6 \cdot 7 \cdot 96}$$

$$S = \frac{m(175m^3 - 420m^2 + 404m - 144)}{34560}$$

sed methodus desideratur harum litterarum valores expedite inueniendi.

XVIII. Imprimis autem hic notasse iuuabit, seriem nostram in aliam esse transmutatam, quae secundum potestates formulae $x - \frac{m}{2}$ ita progrediatur, vt earum exponentes sint λ, $\lambda - 2$, $\lambda - 4$ etc. binario continuo decrescentes; tum vero litteras P, Q, R, etc. a solo numero m pendere, ita vt neque exponens λ neque quantitas x in eas ingrediatur; praeterea vero coefficientes praefixos solum numerum λ implicare, ac legem progressionis ex euolutione binomii ortae seruare. Hac forma probe obseruata manifestum est valores litterarum P, Q, R, S etc. seorsim ex ipsa serie proposita vel ex eius transformata §. XV. cuius lex progressionis itidem est cognita elici posse, siquidem ponatur $x = \frac{m}{2}$ si enim tum capiatur $\lambda = 2$ fit $P = \frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ posito autem $\lambda = 4$ fit $Q = \frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ at posito $\lambda = 6$ fit $R = \frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$

etc.

XIX.

XIX. Quodſi ergo hic loco $\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)}$ ſeries ſupra §. XV. inuenta ſubſtituatur, atque in hunc finem breuitatis gratia ponatur:

$$\mathfrak{A} = 1$$

$$\mathfrak{B} = 1 + 3.\frac{m-1}{4}$$

$$\mathfrak{C} = 1 + 10.\frac{m-1}{5} + 15.\frac{m-1}{5}.\frac{m-2}{6}$$

$$\mathfrak{D} = 1 + 25.\frac{m-1}{6} + 105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7} + 105.\frac{m-1}{6}.\frac{m-2}{7}.\frac{m-3}{8}$$

$$\mathfrak{E} = 1 + 56.\frac{m-1}{7} + 490.\frac{m-1}{7}.\frac{m-2}{8} + 1260.\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-3}{9} + 945.\frac{m-1}{7}\ldots\frac{m-4}{10}$$

$$\mathfrak{F} = 1 + 119.\frac{m-1}{8} + 1918.\frac{m-1}{8}.\frac{m-2}{9} + 9450\,\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-3}{10} + 17325.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-4}{11} + 10395.\frac{m-1}{8}\ldots\frac{m-5}{12}$$

etc.

adipiſcimur ſequentes valores

$$P = \frac{m^2}{2^2} - 2\mathfrak{A}\frac{m}{2}.\frac{m}{2} + \mathfrak{B}\frac{m}{3}$$

$$Q = \frac{m^4}{2^4} - 4\mathfrak{A}.\frac{m}{2}.\frac{m^3}{2^3} + 6\mathfrak{B}.\frac{m}{3}.\frac{m^2}{2^2} - 4\mathfrak{C}.\frac{m}{4}.\frac{m}{2} + \mathfrak{D}\frac{m}{5}$$

$$R = \frac{m^6}{2^6} - 6\mathfrak{A}.\frac{m}{2}.\frac{m^5}{2^5} + 15\mathfrak{B}.\frac{m}{3}.\frac{m^4}{2^4} - 20\mathfrak{C}.\frac{m}{4}.\frac{m^3}{2^3} + 15\mathfrak{D}.\frac{m}{5}.\frac{m^2}{2^2} - 6\mathfrak{E}\frac{m}{6}.\frac{m}{2} + \mathfrak{F}.\frac{m}{7}$$

quem in finem valores illos litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. euolui conueniet, vnde prodit

$$\mathfrak{A} = 1$$

$$\mathfrak{B} = \frac{3}{4}m + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(m + \frac{1}{3})$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}(mm + m)$$

$\mathfrak{D} =$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{5}{16}m^3 + \tfrac{5}{8}m^2 + \tfrac{5}{48}m - \tfrac{1}{24} = \tfrac{5}{16}(m^3 + 2m^2 + \tfrac{1}{3}m - \tfrac{2}{15})$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{3}{16}m^4 + \tfrac{5}{8}m^3 + \tfrac{5}{16}m^2 - \tfrac{1}{8}m = \tfrac{6}{32}(m^4 + \tfrac{10}{3}m^3 + \tfrac{5}{3}m^2 - \tfrac{2}{3}m)$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{7}{64}m^5 + \tfrac{35}{64}m^4 + \tfrac{35}{64}m^3 - \tfrac{91}{576}m^2 - \tfrac{7}{96}m + \tfrac{1}{3}$$

seu . . . $\mathfrak{F} = \tfrac{7}{64}(m^5 + 5m^4 + 5m^3 - \tfrac{13}{9}m^2 - \tfrac{2}{3}m + \tfrac{16}{63})$

hic autem praeterquam in primis terminis nullus ordo perſpicitur

XX. Quod vero ſeries transformata ſecundum poteſtates quantitatis $x = \frac{m}{2}$ progrediatur, id quidem per ſolam inductionem agnouimus, verumtamen hoc neceſſario euenire ita oſtendi poteſt. Quoniam progreſſio propoſita ſimili modo deſinit, quo incipit, ita vt vltimi bini termini futuri ſint $\pm m(x - m + 1)^{m+\lambda} \mp (x - m)^{m+\lambda}$, vbi ſigna ſuperiora valent ſi m ſit numerus impar, inferiora vero ſi par; ſumamus m eſſe numerum parem, (eadem enim concluſio producitur ſi fuerit impar) et ponamus $x - \frac{m}{2} = y$, eritque

$$2s = +(y + \tfrac{1}{2}m)^{m+\lambda} - \tfrac{m}{1}(y + \tfrac{1}{2}m - 1)^{m+\lambda} + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}(y + \tfrac{1}{2}m - 2)^{m+\lambda}$$
$$+ (y - \tfrac{1}{2}m)^{m+\lambda} - \tfrac{m}{1}(y - \tfrac{1}{2}m + 1)^{m+\lambda} + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}(y - \tfrac{1}{2}m + 2)^{m+\lambda}$$

et facta euolutione ſecundum poteſtates ipſius $y = x - \frac{m}{2}$ reperitur:

$$s = y^{m+\lambda}\left(1 - \tfrac{m}{1} + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \left(\tfrac{m+\lambda}{2}\right) y^{m+\lambda-2}\left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^2 - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2} - 1\right)^2 + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}\left(\tfrac{m}{2} - 2\right)^2 - \text{etc.}\right)$$
$$+ \left(\tfrac{m+\lambda}{4}\right) y^{m+\lambda-4}\left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^4 - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2} - 1\right)^4 + \tfrac{m(m-1)}{1.\,2}\left(\tfrac{m}{2} - 2\right)^4 - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Hae

Hae ſeries autem omnes euaneſcunt, donec perueniatur ad eam in qua exponentes ſunt m, eiusque ſummam nouimus eſſe $= 1.\ 2.\ 3 \ldots m$, omiſſis ergo prioribus, quarum ſumma ad nihilum reducitur, obtinebimus:

$$s = \left(\tfrac{m+\lambda}{m}\right) y^{\lambda} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^m - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^m + \tfrac{m(m-1)}{1.\ 2}\left(\tfrac{m}{2}-2\right)^m - \text{etc.}\right)$$
$$+ \left(\tfrac{m+\lambda}{m+2}\right) y^{\lambda-2} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+2} - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+2} + \tfrac{m(m-1)}{1.\ 2}\left(\tfrac{m}{2}-2\right)^{m+2} - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

ſicque manifeſtum eſt, quod demonſtrare ſuſcepi, ſcilicet hanc ſeriem ſecundum poteſtates $y^{\lambda}, y^{\lambda-2}, y^{\lambda-4}$ etc. deſcendere.

XXI. Tribuamus huic ſeriei ſimilem formam ei quam §. XVII. habuimus, fietque

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)} = \frac{y^{\lambda}}{1.\ 2 \ldots m} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^m - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^m + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1.\ 2\ y^{\lambda-2}}{1.\ 2 \ldots (m+2)} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+2} - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ y^{\lambda-4}}{1.\ 2 \ldots (m+4)} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-3)}{1.\ 2 \ldots 4} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+4} - \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

vnde valores litterarum P, Q, R etc. nouo modo ita determinare licet

$$P = \frac{1}{3.\ 4 \ldots (m+2)} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+2} - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+2} + \text{etc.}\right)$$
$$Q = \frac{1}{5.\ 6 \ldots (m+4)} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+4} - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+4} + \text{etc.}\right)$$
$$R = \frac{1}{7.\ 8 \ldots (m+6)} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+6} - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+6} + \text{etc.}\right)$$
$$S = \frac{1}{9.\ 10 \ldots (m+8)} \left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+8} - \tfrac{m}{1}\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+8} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

 Hic

Hic quidem ſimilium ſerierum ſummatione opus eſt quoniam vero iſtae ſeries ſolum numerum m inuoluunt, noſtra inueſtigatio ad caſum ſimpliciorem perducta eſt cenſenda. Ceterum nunc demum certo agnoſcimus has litteras tantum a numero m pendere.

XXII. Quodſi autem hic litterae m ſucceſſiue tribuamus valores definitos 1. 2. 3. 4. 5. 6 etc. totidem inde valores pro litteris P, Q, R, S etc. conſequemur, quibus cognitis, facile earum formas generales colligere licebit.

Ita pro littera P inuenienda reperiemus

$$\begin{array}{llllll} \text{ſi } m = 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & \text{etc.} \\ 3\,2^2 P = 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & \text{etc.} \\ \text{diff.} & 1, & 1, & 1, & 1, & \end{array}$$

ita vt hinc ſit $3 \cdot 2^2 P = m$ et $P = \frac{m}{2^2 \cdot 3}$ vt ante. Porro pro littera Q

$$\begin{array}{llllllll} \text{ſi } m = 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 2^4 \cdot 3 \cdot 5\, Q = 0, & 3, & 16, & 39, & 72, & 115, & 168 \\ \text{Diff. I.} & 3, & 13, & 23, & 33, & 43, & 53 \\ \text{Diff. II.} & & 10, & 10, & 10, & 10, & 10 \end{array}$$

erit ergo $2^4 \cdot 3 \cdot 5\, Q = 3m + 10 \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = m(5m-2)$, hincque $Q = \frac{m(5m-2)}{2^4 \cdot 3 \cdot 5}$.

Eodem

Eodem modo pro littera R

si	$m = 0,$	$1,$	$2,$	3	$4,$	5	6	
$2^6.3.7\,R = 0,$		$3,$	$48,$	$205,$	$544,$	$1135,$	2048	
Diff. I.		$3,$	$45,$	$157,$	$339,$	$591,$	913	
Diff. II.		$42,$	$112,$	$182,$	$252,$	322		
Diff. III.		$70,$	$70,$	70				

vnde concluditur $2^6.3.7\,R = 3m + 21m(m-1)$
$+ \frac{35}{3}m(m-1)(m-2)$

atque $R = \frac{m(35m^2 - 42m + 16)}{2^6.3^2.7}$

quos eosdem valores iam supra sumus nacti, hinc igitur eandem operationem ad litteras sequentes accommodemus.

XXIII. Pro littera igitur S habebimus:

si fuerit $m = 0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,$	6	
$2^8.5.9\,S = 0,$	$5,$	$256,$	$2013,$	$7936,$	$22085,$	49920	
Diff. I.	$5,$	$251,$	$1757,$	$5923,$	$14149,$	27835	
Diff. II.	$246,$	$1506,$	$4166,$	$8226,$	13686		
III.	$1260,$	$2660,$	$4060,$	5460			
IV.	$1400,$	$1400,$	1400				

vnde fit $2^8.5.9\,S = 5m + 123m(m-1) + 210m(m-1)(m-2)$
$+ \frac{175}{3}m(m-1)(m-2)(m-3)$

et $S = \frac{m(175m^3 - 420m^2 + 404m - 144)}{2^8.3.5.9}.$

Nunc porro pro littera T habebimus:

 si fuefi fuerit $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$2^{10}.3.11\,T = 0,\ 3,\ 512,\ 7665,\ 46080,\ 174255,\ 499968$

Diff. I. $3,\ 509,\ 7153,\ 38415,\ 128175,\ 325713$

II. $506,\ 6644,\ 31262,\ 89760,\ 197538$

III. $6138,\ 24618,\ 58498,\ 107778$

IV. $18480,\ 33880,\ 49280$

V. $15400,\ 15400$

vnde fit
$$2^{10}.3.11\,T = 3m + 253m(m-1) + 1023m(m-1)(m-2) + 770m(m-1)(m-2)(m-3) + \tfrac{385}{3}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

et $T = \frac{m(385m^4 - 1540m^3 + 2684m^2 - 2288m + 768)}{2^{10}.\,9.\,11}$.

XXIV. Hos nunc valores ita repraefentemus, quo facilius lex progreffionis explorari poffit:

$$P = \frac{1\,m}{12}$$

$$Q = \frac{1.\,3\,m}{12^2}\left(m - \tfrac{2}{5}\right)$$

$$R = \frac{1.\,3.\,5\,m}{12^3}\left(m^2 - \tfrac{6}{5}m + \tfrac{16}{35}\right)$$

$$S = \frac{1.\,3.\,5.\,7\,m}{12^4}\left(m^3 - \tfrac{12}{5}m^2 + \tfrac{404}{175}m - \tfrac{144}{175}\right)$$

$$T = \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9\,m}{12^5}\left(m^4 - \tfrac{20}{5}m^3 + \tfrac{244}{35}m^2 - \tfrac{208}{35}m + \tfrac{768}{385}\right)$$

atque hic in primis et fecundis terminis lex progreffionis ita eft manifefta, vt iidem pro omnibus fequentibus litteris tuto affignari poffint, in reliquis autem terminis nullam plane legem etiamnum obferuare licet

XXV.

XXV. Pro valore ergo litterae V inueniendo ſtatuamus

$$V = \frac{1.3.5.7.9.11\,m}{12^5}\left(m^5 - \tfrac{30}{5}m^4 + \alpha m^3 - \beta m^2 + \gamma m - \delta\right).$$

Ex forma autem generali

$$V = \frac{1}{13.14\ldots(m+12)}\left(\left(\tfrac{m}{2}\right)^{m+12} - m\left(\tfrac{m}{2}-1\right)^{m+12} + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\tfrac{m}{2}-2\right)^{m+12} - \text{etc.}\right.$$

colligimus

ſi ſit fore

$$m=1;\ V = \frac{1}{2^{12}.13} = \frac{5.7.11}{2^{12}.3^3}(-5+\alpha-\beta+\gamma-\delta)$$

$$m=2;\ V = \frac{1}{7.13} = \frac{5.7.11}{2^{11}.3^3}(-64+8\alpha-4\beta+2\gamma-\delta)$$

$$m=3;\ V = \frac{597871}{2^{12}.5.7.13} = \frac{5.7.11}{2^{12}.3^2}(-243+27\alpha-9\beta+3\gamma-\delta)$$

$$m=4;\ V = \frac{5461}{2^2.5.13} = \frac{5.7.11}{2^{10}.3^3}(-512+64\alpha-16\beta+4\gamma-\delta)$$

$$m=5;\ V = \frac{5838647}{2^{12}.7.13} = \frac{25.7.11}{2^{12}.3^3}(-625+125\alpha-25\beta+5\gamma-\delta)$$

$$m=6;\ V = \frac{6\,047}{2^2.3.13} = \frac{5.7.11}{2^{11}.3^2}(-0+216\alpha-36\beta+6\gamma-\delta).$$

Hinc ergo ſequentes formemus aequationes :

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = \frac{27}{5.7.11.13} + 5$$

$$8\alpha - 4\beta + 2\gamma - \delta = \frac{27.2048}{5.7^2.11.13} + 64$$

$$27\alpha - 9\beta + 3\gamma - \delta = \frac{9.597871}{5^2.7^2.11.13} + 243$$

$$64\alpha - 16\beta + 4\gamma - \delta = \frac{27.256.5461}{5^2.7^2.11.13} + 512$$

$$125\alpha - 25\beta + 5\gamma - \delta = \frac{27.5838647}{5^2.7^2.11.13} + 625$$

$$216\alpha - 36\beta + 6\gamma - \delta = \frac{3.512.63047}{5.7^2.11.13} + 0.$$

Differentiae nunc primae ita ſe habebunt

$$7\alpha - 3\beta + \gamma = \frac{27 \cdot 157}{5 \cdot 7^2 \cdot 11} + 59$$

$$19\alpha - 5\beta + \gamma = \frac{9 \cdot 43627}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 179$$

$$37\alpha - 7\beta + \gamma = \frac{9 \cdot 276629}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 269$$

$$61\alpha - 9\beta + \gamma = \frac{27 \cdot 341587}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + 113$$

$$91\alpha - 11\beta + \gamma = \frac{3 \cdot 8373269}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} - 625$$

ſecundae vero per 2 diuiſae dant

$$6\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 268}{5^2 \cdot 7} + 60$$

$$9\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 1513}{5^2 \cdot 7} + 45$$

$$12\alpha - \beta = \frac{9 \cdot 4858}{5^2 \cdot 7} - 78$$

$$15\alpha - \beta = \frac{3 \cdot 34409}{5^2 \cdot 7} - 369.$$

Tertiae tandem differentiae per 3 diuiſae praebent

$$\alpha = \frac{3 \cdot 249}{5 \cdot 7} - 5 = \frac{3 \cdot 669}{5 \cdot 7} - 41 = \frac{3967}{5 \cdot 7} - 97$$

quae tres aequationes praebent eundem valorem

$$\alpha = \frac{572}{5 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 13}{5 \cdot 7}.$$

ex quo valore iam reliqui definiuntur ſequenti modo

$$\beta = \frac{6 \cdot 572}{5 \cdot 7} - \frac{9 \cdot 268}{5^2 \cdot 7} - 60 = \frac{12 \cdot 1229}{5^2 \cdot 7} - 60 = \frac{4248}{175} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 59}{175}$$

$$\gamma = 3\beta - 7\alpha + \frac{27 \cdot 157}{5 \cdot 7^2 \cdot 11} + 59 = \frac{255968}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11}$$

$$\delta = \alpha - \beta + \gamma - \frac{27}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} - 5 = \frac{1061376}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}.$$

XXVI.

XXVI. Conſpectui ergo ſimul exponamus litterarum P, Q, R, etc. valores hactenus inuentos

$$P = \frac{1\,m}{12}$$

$$Q = \frac{1 \cdot 3\,m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)$$

$$R = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\,m}{12^3}\left(m^2 - \frac{6}{5}m + \frac{16}{35}\right)$$

$$S = \frac{1 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7\,m}{12^4}\left(m^3 - \frac{12}{5}m^2 + \frac{404}{175}m - \frac{144}{175}\right)$$

$$T = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9\,m}{12^5}\left(m^4 - \frac{20}{5}m^3 + \frac{244}{35}m^2 - \frac{208}{35}m + \frac{768}{385}\right)$$

$$V = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11\,m}{12^6}\left(m^5 - \frac{30}{5}m^4 + \frac{572}{35}m^3 - \frac{4248}{175}m^2 + \frac{255968}{13475}m - \frac{1061376}{175175}\right)$$

Ex prioribus terminis concludo poteſtates hic occurrere, quibus ſeorſim poſitis ordo facilius perſpici poſſe videtur:

$$P = \frac{1\,m}{12}$$

$$Q = \frac{1 \cdot 3\,m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)^1$$

$$R = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\,m}{12^3}\left(\left(m - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{17}{175}\right)$$

$$S = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,m}{12^4}\left(\left(m - \frac{4}{5}\right)^3 + \frac{4 \cdot 17}{175}m - \frac{16 \cdot 17}{5 \cdot 175}\right)$$

$$T = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9\,m}{12^5}\left(\left(m - \frac{5}{5}\right)^4 + \frac{2 \cdot 17}{35}m^2 - \frac{4 \cdot 17}{35}m + \frac{383}{385}\right)$$

$$V = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11\,m}{12^6}\left(\left(m - \frac{6}{5}\right)^5 + \frac{4 \cdot 17}{35}m^3 - \frac{72 \cdot 17}{175}m^2 + \frac{581296}{5^3 \cdot 7^2 \cdot 11}m - \frac{78185560}{5^5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}\right.$$

quin etiam proxime ſequentes termini hoc modo contrahi poſſint vt prodeat

$$P = \frac{1\,m}{12} \cdot 1$$

$$Q = \frac{1 \cdot 3\,m}{12^2}\left(m - \frac{2}{5}\right)$$

$$R = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\,m}{12^3}\left(\left(m - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{17}{175}\right)$$

S =

$$S = \frac{1.3.5.7\,m}{12^4}\left(\left(m-\tfrac{4}{5}\right)^3 + \frac{4.17}{175}\left(m-\tfrac{4}{5}\right)\right)$$

$$T = \frac{1.3.5.7.9\,m}{12^5}\left(\left(m-\tfrac{5}{5}\right)^4 + \frac{10.17}{175}\left(m-\tfrac{5}{5}\right)^2 + \tfrac{9}{385}\right)$$

$$V = \frac{1.3.5.7.9.11\,m}{12^6}\left(\left(m-\tfrac{6}{5}\right)^5 + \frac{20.17}{175}\left(m-\tfrac{6}{5}\right)^3 + \frac{15808}{5^3.7^2.11}\,m - \frac{4672128}{5^5.7^2.11.13}\right).$$

Niſi vltimum valorem euoluiſſemus, videretur omnes has expreſſiones ad huiusmodi poteſtates reduci, quod autem nunc ſecus euenire agnoſcimus. Quocirca ex alio fonte in legem harum litterarum inquiri oportebit.

XXVIII. Singulos igitur terminos harum formarum potius euolutos repraeſentemus:

$$P = \frac{m}{4.3}$$

$$Q = \frac{mm}{16.3} - \frac{m}{8.3.5}$$

$$R = \frac{5m^3}{64.9} - \frac{mm}{32.3} + \frac{m}{4.9.7}$$

$$S = \frac{5.7\,m^4}{256.27} - \frac{7\,m^3}{64.9} + \frac{101\,m^2}{64.27.5} - \frac{m}{16.3.5}$$

$$T = \frac{5.7\,m^5}{1024.9} - \frac{5.7\,m^4}{256.9} + \frac{61\,m^3}{256.9} - \frac{13\,m^2}{64.9} + \frac{m}{4.3.11}$$

$$V = \frac{5.7.11\,m^6}{4096.27} - \frac{5.7.11\,m^5}{2048.9} + \frac{1573\,m^4}{1024.27} - \frac{649\,m^3}{512.3.5} + \frac{7990\,m^2}{128.27.5.7} - \frac{691\,m}{8.9.5.7.13}$$

vbi quidem inter terminos primos et ſecundos iam ordinem obſeruauimus poſtremi autem omni ordine deſtituti videbantur, quoad valore etiam litterae V euoluto numerus 691 criterium nobis ſuppeditauerit, in his poſtremis terminis numeros *Bernoullianos* implicari.

Deſi-

Deſignemus ergo numeros *Bernoullianos* litteris α, β, γ, δ etc. vt ſit

$$\alpha = \tfrac{1}{2};\ \beta = \tfrac{1}{6};\ \gamma = \tfrac{1}{6};\ \delta = \tfrac{3}{10};\ \varepsilon = \tfrac{5}{6};\ \zeta = \tfrac{691}{210}\ \text{etc.}$$

et inter eos notemus hanc legem progreſſionis:

$$\alpha = \tfrac{1}{2^1}$$

$$\beta = \frac{5.4\alpha}{2^2.1.2.3} - \tfrac{2}{2^3}$$

$$\gamma = \frac{7.6\beta}{2^2.1.2.3} - \frac{7.6.5.4\alpha}{2^4.1.2\ldots5} + \tfrac{3}{2^5}$$

$$\delta = \frac{9.8\gamma}{2^2.1.2.3} - \frac{9.8.7.6\beta}{2^4.1.2\ldots5} + \frac{9\ldots4\alpha}{2^6.1\ldots7} - \tfrac{4}{2^7}$$

$$\varepsilon = \frac{11.10\delta}{2^2.1.2.3} - \frac{11\ldots8\gamma}{2^4.1\ldots5} + \frac{11\ldots6\beta}{2^6.1\ldots7} - \frac{11\ldots4\alpha}{2^8.1\ldots9} - \tfrac{5}{2^9}$$

$$\zeta = \frac{13.12\varepsilon}{2^2.1.2.3} - \frac{13\ldots10\delta}{2^4.1\ldots5} + \frac{13\ldots8\gamma}{2^6.1\ldots7} - \frac{13\ldots6\beta}{2^8.1\ldots9} + \frac{13\ldots4\alpha}{2^{10}.1\ldots11} - \tfrac{6}{2^{11}}.$$

etc.

Ac poſtremi litterarum P, Q, R, S etc. termini ita concinne referri poterunt

$$\frac{\alpha m}{2.3};\ \frac{\beta m}{4.5};\ \frac{\gamma m}{6.7};\ \frac{\delta m}{8.9};\ \frac{\varepsilon m}{10.11};\ \frac{\zeta m}{12.13}.$$

XXIX. Quo autem nunc etiam inueſtigemus quomodo ipſae litterae P, Q, R, S etc. progrediantur, a qualibet eiusmodi multiplum praecedentis auferamus, vt primi termini tollantur, et quia has litteras praecedit littera $O = 1$, habebimus:

$$P - \tfrac{m}{12}O = 0$$

$$Q - \frac{3m}{12}P = -\frac{\beta m}{4.5}$$

$$R - \frac{5m}{12}Q = -\frac{mm}{16.9} + \frac{\gamma m}{6.7} = -\tfrac{m}{12}P + \frac{\gamma m}{6.7}$$

$$S - \frac{7m}{12}R = -\frac{7m^3}{128.9} + \frac{3m^2}{16.5} - \frac{\delta m}{8.9}$$

$$T - \frac{9\,m}{12} S = -\frac{7\,m^4}{128.\,9} + \frac{17\,m^3}{64.\,3.\,5} - \frac{7\,m^2}{8.\,9.\,5} + \frac{\varepsilon\,m}{10.\,11}$$

$$V - \frac{11\,m}{12} T = -\frac{5.7.11\,m^5}{2048.\,27} + \frac{451\,m^4}{512.\,27} - \frac{121\,m^3}{2048.27.5} + \frac{7159\,m^2}{128.\,27.\,5.7} - \frac{\zeta\,m}{12.\,13}.$$

Quodſi iam has formas penitius perpendamus, ac breuitatis gratia ponamus:

$$\frac{\alpha\,m}{2.\,3} = \alpha^{I};\ \frac{\beta\,m}{4.\,5} = \beta^{I};\ \frac{\gamma\,m}{6.\,7} = \gamma^{I};\ \frac{\delta\,m}{8.\,9} = \delta^{I};\ \text{etc.}$$

ſequentem legem ſatis ſimplicem in noſtris litteris P, Q, R etc. deprehendemus:

$$P - \alpha^{I} = 0$$

$$Q - \tfrac{3}{1}\alpha^{I} P + \frac{3.\,2.\,1}{1.\,2.\,3}\beta^{I} = 0$$

$$R - \tfrac{5}{1}\alpha^{I} Q + \frac{5.\,4.\,3}{1.\,2.\,3}\beta^{I} P - \frac{5.\,4.\,3.\,2.\,1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\gamma^{I} = 0$$

$$S - \tfrac{7}{1}\alpha^{I} R + \frac{7.\,6.\,5}{1.\,2.\,3}\beta^{I} Q - \frac{7.6 \ldots 3}{1.2 \ldots 5}\gamma^{I} P + \frac{7.6 \ldots 1}{1.2 \ldots 7}\delta^{I} = 0$$

$$T - \tfrac{9}{1}\alpha^{I} S + \frac{9 \ldots 7}{1 \ldots 3}\beta^{I} R - \frac{9 \ldots 5}{1 \ldots 5}\gamma^{I} Q + \frac{9 \ldots 3}{1 \ldots 7}\delta^{I} P - \frac{9 \ldots 1}{1 \ldots 9}\varepsilon^{I} = 0$$

$$V - \tfrac{11}{1}\alpha^{I} T + \frac{11 \ldots 9}{1 \ldots 3}\beta^{I} S - \frac{11 \ldots 7}{1 \ldots 5}\gamma^{I} R + \frac{11 \ldots 5}{1 \ldots 7}\delta^{I} Q - \frac{11 \ldots 3}{1 \ldots 9}\varepsilon^{I} P + \frac{11 \ldots 1}{1 \ldots 11}\zeta^{I} = 0$$

etc.

hae autem nouae litterae α^{I}, β^{I}, γ^{I}, δ^{I} etc. ex praecedentibus hanc ſequentur legem:

$$\alpha^{I} - \frac{m}{2^2.\,3} = 0$$

$$\beta^{I} - \frac{3.\,2}{2^2.1.\,2.3}\alpha^{I} + \frac{m}{2^4.\,5} = 0$$

$$\gamma^{I} - \frac{5.\,4}{2^2.1.2.3}\beta^{I} + \frac{5.\,4.\,3.\,2}{2^4.\,1 \ldots 5}\alpha^{I} - \frac{m}{2^6.7} = 0$$

$$\delta^{I} - \frac{7.\,6}{2^2.1 \ldots 3}\gamma^{I} + \frac{7 \ldots 4}{2^4.1 \ldots 5}\beta^{I} - \frac{7 \ldots 2}{2^6.\,1 \ldots 7}\alpha^{I} + \frac{m}{2^8.\,9} = 0$$

$$\varepsilon^{I} - \frac{9.\,8}{2^2.1 \ldots 3}\delta^{I} + \frac{9 \ldots 6}{2^4.1 \ldots 5}\gamma^{I} - \frac{9 \ldots 4}{2^6.\,1 \ldots 7}\beta^{I} + \frac{9 \ldots 2}{2^8.\,1 \ldots 9}\alpha^{I} - \frac{m}{2^{10}.11} = 0$$

etc.

Quo-

Quocirca nunc quidem quaeſtionem circa ſeriem illam ſingularem, quam hactenus ſum contemplatus, perfecte ſolutam dediſſe ſum cenſendus, vnde ſolutionem hic ſuccincte ſum propoſiturus.

Problema.

Propoſita hac progreſſione indefinita:

$$s = x^{m+\lambda} - \frac{m}{1}(x-1)^{m+\lambda} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(x-2)^{m+\lambda} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}(x-3)^{m+\lambda} + \text{etc.}$$

eius ſummam aſſignare, ſiquidem λ fuerit numerus quicunque integer poſitiuus.

Solutio.

Denotent litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. numeros *Bernoullianos*, ita vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2};\ \mathfrak{B} = \tfrac{1}{6};\ \mathfrak{C} = \tfrac{1}{6};\ \mathfrak{D} = \tfrac{3}{10};\ \mathfrak{E} = \tfrac{5}{6};$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{691}{210};\ \mathfrak{G} = \tfrac{35}{2};\ \mathfrak{H} = \tfrac{3617}{30};\ \mathfrak{I} = \tfrac{43867}{42};$$

$$\mathfrak{K} = \frac{1222277}{110};\ \mathfrak{L} = \frac{854513}{6}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1181820455}{546};\ \mathfrak{N} = \frac{76977927}{2}$$

$$\mathfrak{O} = \frac{2374946 1029}{30};\ \mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{462}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{84802531453387}{170};\ \mathfrak{R} = \frac{90219075042845}{6}$$

etc.

Quos

Quos numeros ita progredi obſeruaui vt ſit

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{4}{2} \cdot \frac{\mathfrak{A}^2}{3}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{6}{2} \cdot \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{3}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{8}{2} \cdot \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{3} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\mathfrak{B}^2}{5}$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{10}{2} \cdot \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D}}{3} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{5}$$

$$\mathfrak{F} = \tfrac{12}{2} \cdot \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{3} + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{5} + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{7}$$

$$\mathfrak{G} = \tfrac{14}{2} \cdot \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{F}}{3} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{5} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{2\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{7}$$

etc.

Hinc iam quaerantur numeri P, Q, R, S etc. vt ſit

$$P = \frac{1\,\mathfrak{A}\,m}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$Q = \frac{3\,\mathfrak{A}\,m}{1 \cdot 2 \cdot 3} P - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1\,\mathfrak{B}\,m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$R = \frac{5\,\mathfrak{A}\,m}{1 \cdot 2 \cdot 3} Q - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \mathfrak{B}\,m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} P + \frac{5 \cdot 4 \cdots 1\,\mathfrak{C}\,m}{1 \cdot 2 \cdots 7}$$

$$S = \frac{7\,\mathfrak{A}\,m}{1 \cdot 2 \cdot 3} R - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5\,\mathfrak{B}\,m}{1 \cdot 2 \cdots 5} Q + \frac{7 \cdots 3\,\mathfrak{C}\,m}{1 \cdot 2 \cdots 7} P - \frac{7 \cdots 1\,\mathfrak{D}\,m}{1 \cdot 2 \cdots 9}$$

vbi lex progreſſionis etiam eſt perſpicua.

Hac ſerie inuenta ſumma quaeſita s ita exprimetur:

$$\frac{s}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+m)} = (x - \tfrac{m}{2})^{\lambda} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} P (x - \tfrac{m}{2})^{\lambda-2}$$
$$+ \frac{\lambda \cdots (\lambda-3)}{1 \cdots 4} Q (x - \tfrac{m}{2})^{\lambda-4}$$
$$+ \frac{\lambda \cdots (\lambda-5)}{1 \cdots 6} R (x - \tfrac{m}{2})^{\lambda-6}$$
$$+ \frac{\lambda \cdots (\lambda-7)}{1 \cdots 8} S (x - \tfrac{m}{2})^{\lambda-8}$$

etc.

vbi

vbi notetur ſi forte numerus m non ſit integer valorem producti $(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+m)$ per artificia alibi expoſita definiri poſſe.

Corollarium 1.

Si loco numerorum *Bernoullianorum* numeros iis cognatos, quibus ad poteſtatum reciprocarum ſummas ſum vſus, introducere velimus, hosque numeros litteris A, B, C, D etc. deſignemus, vt ſit $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{90}$, $C=\frac{1}{945}$, $D=\frac{1}{9450}$; $E=\frac{1}{93555}$ quoniam hi numeri a prioribus ita pendent vt ſit

$$\mathfrak{A}=\frac{1\cdot2\cdot3}{2^1}A;\ \mathfrak{B}=\frac{1\cdot\ldots\cdot5}{2^3}B;\ \mathfrak{C}=\frac{1\cdot\ldots\cdot7}{2^5}C;\ \text{etc.}$$

inter ſe autem ita connectuntur vt ſit:

$$5B=2A^2;\ 7C=4AB;\ 9D=4AC+2BB;$$
$$11E=4AD+4BC;\ 13F=4AE+4BD+2CC\ \text{etc.}$$

Tum ex his numeris litterae P, Q, R, S etc. ita determinabuntur:

$$P=\frac{1Am}{2}$$
$$Q=\frac{3Am}{2}P-\frac{3\cdot2\cdot1\,Bm}{2^3}$$
$$R=\frac{5Am}{2}Q-\frac{5\cdot4\cdot3\,Bm}{2^3}P+\frac{5\cdot4\cdots1\,Cm}{2^5}$$
$$S=\frac{7Am}{2}R-\frac{7\cdot6\cdot5\,Bm}{2^3}Q+\frac{7\cdot6\cdots3\,Dm}{2^5}P-\frac{7\cdot6\cdots1\,Em}{2^7}$$

etc.

Corollarium 2.

Si pro variis valoribus numeri λ summam progressionis proposito hoc signandi modo $\int(\lambda)$ indicemus, ac iam loco λ successiue scribamus numeros 0, 1, 2, 3, 4 etc. pro his casibus summae $\int(0)$, $\int(1)$, $\int(2)$, $\int(3)$ etc. sequenti modo exprimentur ponendo breuitatis gratia $x-\frac{m}{2}=y$:

$$\frac{\int(0)}{1.2\ldots m}=1$$

$$\frac{\int(1)}{2.3\ldots(m+1)}=y$$

$$\frac{\int(2)}{3.4\ldots(m+2)}=y^2+P$$

$$\frac{\int(3)}{4.5\ldots(m+3)}=y^3+3Py$$

$$\frac{\int(4)}{5.6\ldots(m+4)}=y^4+6Py^2+Q$$

$$\frac{\int(5)}{6.7\ldots(m+5)}=y^5+10Py^3+5Qy$$

$$\frac{\int(6)}{7.8\ldots(m+6)}=y^6+15Py^4+15Qy^2+R$$

etc.

Corollarium 3.

Hinc ergo istae summae sequenti modo singulae ex antecedentibus definiri possunt

$$\int(1)=\frac{m+1}{1}y\int(0)$$

$$\int(2)=\frac{m+2}{2}y\int(1)+\frac{(m+2)(m+1)}{2.2}mA\int(0)$$

$$\int(3)=\frac{m+3}{3}y\int(2)+\frac{(m+3)(m+2)}{2.3}mA\int(1)$$

$\int(4)$

$$\int(4)=\frac{m+4}{4}y\int(3)+\frac{(m+4)(m+3)}{2.\ 4}mA\int(2)-\frac{(m+4)\ldots\ldots(m+1)}{2^3.\ 4}mB\int(0)$$
$$\int(5)=\frac{m+5}{5}y\int(4)+\frac{(m+5)(m+4)}{2.\ 5}mA\int(3)-\frac{(m+5)\ldots\ldots(m+2)}{2^3.\ 5}mB\int(1)$$
$$\int(6)=\frac{m+6}{6}y\int(5)+\frac{(m+6)(m+5)}{2.\ 6}mA\int(4)-\frac{(m+6)\ldots(m+3)}{2^3.\ 6}mB\int(2)+\frac{(m+6)\ldots(m+1)}{2^5.\ 6}mC\int(0)$$
$$\int(7)=\frac{m+7}{7}y\int(6)+\frac{(m+7)(m+6)}{2.\ 7}mA\int(5)-\frac{(m+7)\ldots(m+4)}{2^3.\ 7}mB\int(3)+\frac{(m+7)\ldots(m+2)}{2^5.\ 7}mC\int(1)$$
$$\int(8)=\frac{m+8}{8}y\int(7)+\frac{(m+8)(m+7)}{2.\ 8}mA\int(6)-\frac{(m+8)\ldots(m+5)}{2^3.\ 8}mB\int(4)+\frac{(m+8)\ldots(m+2)}{2^5.\ 8}mC\int(2)$$
$$-\frac{(m+8)\ldots(m+1)}{2^7.\ 8}mD\int(0)$$

quae lex progreſſionis inſpicienti mox fit manifeſta.

Concluſio.

Nunc haud multo difficilius erit hoc negotium longe generalius expedire, ita vt, ſi $\Phi:x$ denotet functionem quamcunque ipſius x ſummam huius ſeriei

$$s=\Phi:x-m\Phi.(x-1)+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}\Phi:(x-2)-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\Phi:(x-3)$$

aſſignare queamus. Perſpicuum enim eſt hanc formam, differentiam ordinis m exhibere iſtius progreſſionis

$$\Phi:x;\ \Phi:(x-1);\ \Phi:(x-2);\ \Phi:(x-3)\ \text{etc.}$$

Ex iis enim quae in Inſtitutionibus Calculi Differentialis pag. 343. in medium attuli, ſi ponamus $\Phi:x=y$, colligitur differentias ſingulorum ordinum eſſe:

Δy

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} - \frac{ddy}{2dx^2} + \frac{d^3y}{2.3.dx^3} - \frac{d^4y}{2.3.4dx^4} + \frac{d^5y}{2\ldots5dx^5} - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3d^3y}{3dx^3} + \frac{7d^4y}{3.4dx^4} - \frac{15d^5y}{3.4.5dx^5} + \frac{31d^6y}{3\ldots6dx^6} - \text{etc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{6d^4y}{4dx^4} + \frac{25d^5y}{4.5.dx^5} - \frac{90d^6y}{4.5.6dx^6} + \frac{301d^7y}{4\ldots7dx^7} - \text{etc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{d^4y}{dx^4} - \frac{10d^5y}{5dx^5} + \frac{65d^6y}{5.6dx^6} - \frac{350d^7y}{5.6.7dx^7} + \frac{1701d^8y}{5\ldots6dx^8} - \text{etc.}$$

etc.

qui coefficientes cum ſint illi ipſi, quos ſupra §. IV habuimus, eodem modo intelligemus differentiam ordinis m ſeu $\Delta^m y$, hoc eſt ipſam ſummam ſeriei propoſitae fore

$$s = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{A^1 d^{m+1} y}{(m+1)dx^{m+1}} + \frac{B^1 d^{m+2} y}{(m+1)(m+2)dx^{m+2}} - \frac{C^1 d^{m+3} y}{(m+1)\ldots(m+3)dx^{m+3}} + \text{etc.}$$

quos coefficientes A^1, B^1, C^1 etc. ſupra §. 13. determinaui. Quocirca erit

$$\frac{A^1}{m+1} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{B^1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m}{1.2.3} + \frac{3m(m-1)}{1.2.3.4}$$

$$\frac{C^1}{(m+1)\ldots(m+3)} = \frac{m}{1.2.3.4} + \frac{10m(m-1)}{1.2\ldots\ldots5} + \frac{15m(m-1)(m-2)}{1.2\ldots\ldots6}$$

$$\frac{D^1}{(m+1)\ldots(m+4)} = \frac{m}{1.2\ldots5} + \frac{25m(m-1)}{1.2\ldots\ldots6} + \frac{105m(m-1)(m-2)}{1.2\ldots\ldots7} + \frac{105m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2\ldots\ldots8}$$

etc.

Quodſi iam nunc ponamus $\Phi:(x-\frac{m}{2}) = v$, ita vt v oriatur ex y, ſi loco x ſcribatur $x-\frac{m}{2}$, erit vtique

$$\frac{d^m v}{dx^m} = \frac{d^m y}{dx^m} - \frac{m d^{m+1} y}{2dx^{m+1}} + \frac{m^2 d^{m+2} y}{2.4dx^{m+2}} - \text{etc.}$$

quae

quae aequatio ſi inde ſubtrahatur, calculus idem prorſus erit inſtituendus, quem ſupra expediuimus. Vnde introducendo easdem litteras P, Q, R, S etc. quas ſupra definiuimus, obtinebimus ſequentem ſummae s valorem:

$$s = \frac{d^m v}{d x^m} + \frac{P d^{m+2} v}{1.2\, d x^{m+2}} + \frac{Q d^{m+4} v}{1.2.4\, d x^{m+4}}$$
$$+ \frac{R d^{m+6} v}{1.2\ldots 6\, d x^{m+6}} + \frac{S d^{m+8} v}{1.2\ldots 8\, d x^{m+8}} + \text{etc.}$$

atque hinc ſi ſumatur $y = \Phi : x = x^{m+\lambda}$ et $v = (x - \frac{m}{2})^{m+\lambda}$ manifeſto eadem ſummatio ſequitur quam ante eruimus, ſicque totum negotium redit ad litteras P, Q, R, S etc. quarum indolem ex numeris *Bernoullianis* ſupra deriuaui.

Hinc ſtatim liquet, quod ante minus apparebat, ſi in functione y vel v numerus dimenſionum minor fuerit quam exponens m, quem quidem numerum integrum poſitiuum eſſe oportet, tum omnia differentialia ordinis m et ſuperiorum in nihilum abire, foreque ſummam $s = 0$.

Deinde hinc etiam planior patet via ad valores litterarum P, Q, R, S etc. inueniendos. Cum enim poſito

$$s = \frac{d^m y}{d x^m} - \frac{\alpha d^{m+1} y}{d x^{m+1}} + \frac{\beta d^{m+2} y}{d x^{m+2}} - \frac{\gamma d^{m+3} y}{d x^{m+3}} + \text{etc.}$$

 ſit

ſit $\alpha = \frac{m}{1.2}$

$$\beta = \frac{m}{1.2.3} + \frac{3m(m-1)}{1.2.3.4}$$

$$\gamma = \frac{m}{1\ldots 4} + \frac{10m(m-1)}{1\ldots 5} + \frac{15m\ldots(m-2)}{1\ldots 6}$$

$$\delta = \frac{m}{1\ldots 5} + \frac{25m(m-1)}{1\ldots 6} + \frac{105m\ldots(m-2)}{1\ldots 7} + \frac{105m\ldots(m-3)}{1\ldots 8}$$

etc.

functio autem y ex functione $v = \phi : (x - \frac{m}{2})$ naſcatur ſi in hac loco x ſcribatur $x + \frac{m}{2}$ erit in genere

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n v}{dx^n} + \frac{m}{2} \cdot \frac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} + \frac{m^2}{2.4} \cdot \frac{d^{n+2} v}{dx^{n+2}} + \frac{m^3}{2.4.6} \cdot \frac{d^{n+3} v}{dx^{n+3}} + \text{etc.}$$

vnde ſi loco differentialium ipſius y, haec differentialia ipſius v ſubſtituantur, fiet

$$s = \frac{d^n v}{dx^n} + \left(\frac{m}{2} - \alpha\right)\frac{d^{n+1} v}{dx^{n+1}} + \left(\frac{m^2}{2.4} - \frac{m}{2}\alpha + \beta\right)\frac{d^{n+2} v}{dx^{n+2}}$$

$$+ \left(\frac{m^3}{2.4.6} - \frac{m^2}{2.4}\alpha + \frac{m}{2}\beta - \gamma\right)\frac{d^{n+3} v}{dx^{n+3}} + \text{etc.}$$

ſicque habebimus:

$$\frac{m}{2} - \alpha = 0$$

$$\frac{m^2}{2.4} - \frac{m}{2}\alpha + \beta = \frac{P}{1.2}$$

$$\frac{m^3}{2.4.6} - \frac{m^2}{2.4}\alpha + \frac{m}{2}\beta - \gamma = 0$$

$$\frac{m^4}{2.4.6.8} - \frac{m^3}{2.4.6}\alpha + \frac{m^2}{2.4}\beta - \frac{m}{2}\gamma + \delta = \frac{Q}{1.2.3.4}$$

$$\frac{m^5}{2.4.6.8.10} - \frac{m^4}{2.4.6.8}\alpha + \frac{m^3}{2.4.6}\beta - \frac{m^2}{2.4}\gamma + \frac{m}{2}\delta - \varepsilon = 0$$

etc.

facile enim perſpicitur has expreſſiones alternatim euaneſcere debere.

QVO-

QVOMODO NVMERI PRAEMAGNI SINT EXPLORANDI, VTRVM SINT PRIMI, NEC NE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Ante omnia monendum eſt, me hic non eiusmodi methodum polliceri, cuius ope omnes omnino numeri, cuiuscunque ſint generis, examinari queant, vtrum ſint primi nec ne? Huiusmodi enim methodum vix aliam dari poſſe exiſtimo, niſi quae ad regulam redeat vulgarem, qua diuiſio per omnes numeros primos radice quadrata numeri propoſiti minores eſt tentanda, quae operatio ſane, ſi numeri ſaltem mediocriter magni proponantur, nimis eſt moleſta, quam vt ſuſcipi queat. Quae igitur hic in medium afferre conſtitui, ad certum tantum numerorum genus ſunt reſtringenda, pro quo ſcilicet hoc examen, vtrum ſint primi nec ne? citra laborem tam operoſum inſtitui queat. Cum enim numerorum primorum natura adhuc maxime ſit abſcondita, quicquid in hoc negotio praeſtare licuerit, etiamſi alias arctiſſimis limitibus ſit circumſcriptum, vſu neutiquam deſtitui eſt cenſendum.

2. Numeros ergo tantum in hac forma $4n+1$ contentos ſum contemplaturus, de quibus equidem poſt Fermatium demonſtraui, ſi huiusmodi numerus fuerit primus, tum eum ſemper eſſe ſummam duorum quadratorum, idque vnico modo. Vnde propoſito numero quocunque huius formae $4n+1$, examen vtrum ſit primus nec ne? hoc modo inſtituetur. Ab eo ſucceſſiue omnes numeri quadrati ipſo minores auferantur, eaque notentur reſidua, quae pariter ſint numeri quadrati; atque ſi vnico modo numerus propoſitus $4n+1$ in forma $aa+bb$ contineri deprehendatur, id certum erit criterium numerum propoſitum eſſe primum. Sin autem vel prorſus non in ea forma contineatur, vel plus vno modo, tum certe non erit primus; priori quidem caſu quo numerus $4n+1$ non eſt ſumma duorum quadratorum plus concludere non licet, quam eum non eſſe primum neque inde eius diuiſores innoteſcunt, ſin autem plus vno modo fuerit duorum quadratorum ſumma veluti $4n+1=aa+bb=cc+dd$, tum hinc quaerantur eiusmodi bini numeri p et q vt ſit $\frac{p}{q}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$ vel $\frac{p}{q}=\frac{a\pm d}{b\pm c}$, ac numeri $4n+1$ et $pp+qq$ certo habebunt diuiſorem communem, qui ergo facile aſſignatur.

3. Propoſito itaque huiusmodi numero $4n+1$ operationem ita inſtitui conuenit, vt ab eo continuo numeri quadrati ſubtrahantur, eaque reſidua tantum notentur, quae etiam ſint numeri quadrati; vbi

vbi quidem ſtatim apparet, hanc ſubtractionem non vltra quadrata ſemiſſi minora continuari opus eſſe. Si enim fuerit $4n+1=aa+bb$, horum quadratorum alterum certe erit minus ſemiſſe $\frac{4n+1}{2}$. Vel cum horum binorum quadratorum alterum neceſſario ſit par, alterum impar, ſufficiet vel paria tantum, vel imparia quadrata ipſo numero propoſito minora ſubtrahi, quo pacto multitudo quadratorum ſubtrahendorum haud mediocriter imminuitur. Cum autem numerus omnium quadratorum ipſo numero propoſito minorum ſit $=\sqrt{(4n+1)}$, eorum autem quae eius ſemiſſe ſunt minora $=\sqrt{\frac{4n+1}{2}}$; erit quadratorum ſemiſſe maiorum numerus $=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\sqrt{(4n+1)}$ $=\frac{5}{17}\sqrt{(4n+1)}$ proxime; quae quoniam etiam ſubtrahi ſufficit, hoc modo numerus ſubtractionum ad trientem fere redigitur.

4. Maxime ergo expedire videtur hanc operationem ita inſtitui, vt a quadrato maximo infra numerum propoſitum $4n+1$ initium capiatur, indeque quadrata continuo minora ſubtrahantur, donec ad quadrata ſemiſſi minora perueniatur. Veluti ſi numerus propoſitus ſit 101, ſufficiet inde haec tria quadrata 100, 81, 64 ſubtraxiſſe, quia ſequens 49 iam foret ſemiſſi $50\frac{1}{2}$ minus, hoc modo cum inter tria reſidua 1, 20, 37 vnicum occurrat quadratum 1, hoc certum eſt ſignum, numerum 101 eſſe primum. Verumtamen ſi numerus propoſitus $4n+1$ fuerit praemagnus, etiam hae operationes

nimis multiplicantur; ex quo in id potiſſimum erit incumbendum, vt harum ſubtractionum numerus imminuatur, quod fiet ſi eae excludantur, quae ad talia reſidua perducunt, quae a quadratorum natura abhorreant, cuiusmodi ſunt reſidua in his formis contenta: $3m+2$; $5m+2$; $5m+3$; $8m+5$ etc. formae enim $8m+3$ et $8m+7$ ob indolem numeri propoſiti $4n+1$ nunquam occurrunt.

5. Dantur autem certae numerorum formae $4n+1$ ſpecies vnde plurima quadrata inde ſubtrahenda excludantur. Veluti ſi ſit $4n+1=3m+2$, ac ponatur hic numerus $=xx+yy$, vterque numerus x et y in forma $3p\pm 1$ contineatur neceſſe eſt, ita vt numeri formae $3p$ excludantur, ſimili modo ſi ſit $4n+1=5m+2$, vtrumque numerum x et y in forma $5p\pm 1$ contineri oportet, et ſi $4n+1=5m+3$ in forma $5p\pm 2$. Denique ſi $8m+5=xx+yy$ numerorum quidem x et y alter eſt impar alter par, hic vero adeo impariter par ſeu formae $4p+2$. Quod ſi ergo ſimul fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+2$$

numeros x et y ſimul in his duabus formis $3p\pm 1$ et $5p\pm 1$ contineri oportet, vnde eorum forma concluditur:

$$x \text{ vel } y = 15p \pm (1, 4).$$

At ſi fuerit

$$xx+yy=3m+2=5m+3$$

forma

forma numerorum x et y eſt et $3p \pm 1$, et $5p \pm 2$, quae duplex forma in hanc vnam contrahitur

$$x \text{ vel } y = 15p \pm (2, 7).$$

6. Quoniam hoc modo duae tertiae partes omnium numerorum, quos tentari oporteret, excluduntur, hi caſus imprimis ſunt apti, quibus examen ſatis expedite inſtituere licebit. Quare numerorum $N = 4n + 1$ eas ſpecies potiſſimum contemplemur, quae vel in his duabus formis $3m + 2$ et $5m + 2$, vel in his $3m + 2$ et $5m + 3$ contineantur. Numeri autem prioris ſpeciei ad hanc formam $15m + 2$ reducuntur, qui cum inſuper in forma $4n + 1$ contineri debeant, haec ſpecies ſequenti formula exprimetur:

Species prima: $N = 60n + 17$

qui numerus alio modo ſumma duorum quadratorum eſſe nequit, niſi vtriusque quadrati radix ſit numerus formae $15p \pm (1, 4)$, ſcilicet vel $15p \pm 1$ vel $15p \pm 4$, vnde numeri tentandi ex his quatuor progreſſionibus ſunt capiendi:

1, 16, 31, 46, 61, 76, 91, 106, 121, 136 etc.
4, 19, 34, 49, 64, 79, 94, 109, 124, 139 etc.
11, 26, 41, 56, 71, 86, 101, 116, 131, 146 etc.
14, 29, 44, 59, 74, 89, 104, 119, 134, 149 etc.

et reliquos omnes in hoc negotio praetermittere licet.

7. Si-

7. Simili modo alteram ſpeciem euoluamus, quae duplici forma $3m+2$ et $5m+3$ continetur, et propterea ad hanc vnam $15m+8$ reuocatur. Hinc autem tantum illi numeri ſunt vſui, qui ſimul ſunt formae $4n+1$, ex quo haec ſpecies ſequenti formula exprimetur:

Species ſecunda $N = 60n + 53$.

Huius ergo formae ſi fuerit numerus explorandus, vtrum ſit primus nec ne? ab eo alia quadrata ſubtrahi non eſt opus, niſi quorum radices in hac forma $15p \pm (2, 7)$ contineantur; quas ergo ex ſequentibus quaternis progreſſionibus arithmeticis ſumi oportet:

2, 17, 32, 47, 62, 77, 92, 107, 122, 137, 152 etc.
7, 22, 37, 52, 67, 82, 97, 112, 127, 142, 157 etc.
8, 23, 38, 53, 68, 83, 98, 113, 128, 143, 158 etc.
13, 28, 43, 58, 73, 88, 103, 118, 133, 148. 163 etc.

hoc ergo modo multitudo quadratorum ſubtrahendorum fere ad trientem reducitur.

8. Neque vero his omnibus quadratis tentamen inſtitui opus eſt, prout enim numerus propoſitus N inſuper fuerit comparatus, inde praeterea multa excluduntur. Cum enim omnes numeri formae $N = 4n + 1$ in has quatuor reſoluantur:

$$16n+1,\ 16n+5,\ 16n+9,\ 16n+13$$

ſi

si statuatur $N = xx + yy$, et x denotet numerum parem, y vero imparem, pro his speciebus numeri x et y sequenti modo comparati reperiuntur:

si sit	erit	et
$N = 16n + 1$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 1$
$N = 16n + 9$	$x = 4m$	$y = 8p \pm 3$
$N = 16n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 8p \pm 3$.

9. Combinemus has quaternas species cum binis praecedentibus, et obtinebimus sequentes octo species, pro quibus formas tam radicis paris x quam imparis y exhibeamus:

si fuerit N	erit $x =$	et $y =$
$240n + 17$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 137$	$60m \pm (4, 16)$	$120p \pm (11, 19, 29, 59)$
$240n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$120p \pm (1, 31, 41, 49)$
$240n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 113$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (7, 17, 23, 47)$
$240n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$
$240n + 233$	$60m \pm (8, 28)$	$120p \pm (13, 37, 43, 53)$

10. Dantur autem in his numeris species, quibus adhuc plures numeri tentandi excluduntur, quae ita se habent

si sit	erit	et
$N = 32n + 5$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 1$
$N = 32n + 13$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 3$
$N = 32n + 21$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 7$
$N = 32n + 29$	$x = 4m \pm 2$	$y = 16p \pm 5$

quae cum binis principalibus combinatae praebent

si sit N	erit $x =$	et $y =$
$480n + 77$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (19, 29, 61, 109)$
$480n + 197$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (1, 31, 49, 79)$
$480n + 317$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (11, 59, 91, 101)$
$480n + 437$	$60m \pm (14, 26)$	$240p \pm (41, 71, 89, 119)$
$480n + 53$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (7, 23, 73, 103)$
$480n + 173$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (13, 67, 77, 83)$
$480n + 293$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (17, 47, 97, 113)$
$480n + 413$	$60m \pm (2, 22)$	$240p \pm (37, 43, 53, 107)$

Hic ergo ex valoribus ipsius y, quos praecedentes species admittunt, denuo semissis excluditur.

11. Quoniam hic valores radicis imparis y multo magis imminuuntur, quam radicis paris x, calculus multo euadet facilior et breuior, si a numero proposito N siquidem in vna postremarum specierum contineatur successiue omnia quadrata imparia ipso minora subtrahantur, residuaque examinentur an sint quadrata nec ne? harum operationum numerus satis erit modicus, etiamsi numerus propositus fuerit praemagnus et quoniam radices per differentiam 240 increscunt, insignia compendia in calculo vsurpari poterunt. Scilicet si quaecunque quatuor minimarum radicum dicatur $= a$, quia a nume-

numero proposito N, si modo in aliqua octo postremarum specierum contineatur, vel quod eodem redit si fuerit vel huius formae $120n+77$ vel huius $120n+53$, successiue subtrahi debent quadrata aa, $(240+a)^2$, $(480+a)^2$ etc. notetur differentias esse primas $57600+480a$; $3.57600+480a$ etc. secundas vero esse constantes $=115200$, quo pacto totum negotium ad meras additiones et subtractiones reducitur; et quia quaelibet radix simplex a tam positiue quam negatiue accipi potest, vtraque pari calculo expedietur.

Problema.

12. Proposito numero quantumuis magno N, qui vel in hac forma $120n+77$ vel in hac $120n+53$ contineatur, explorare vtrum is sit primus nec ne?

Solutio.

Statuatur $N=aa+zz$, et pro octonis formis ipsius N littera a quatuor habebit valores sequentes

si fit	erunt quaterni valores ipsius a
$N=480n+77$	19, 29, 61, 109
$N=480n+197$	1, 31, 49, 79
$N=480n+317$	11, 59, 91, 101
$N=480n+437$	41, 71, 89, 119
$N=480n+53$	7, 23, 73, 103
$N=480n+173$	13, 67, 77, 83
$N=480n+293$	17, 47, 97, 113
$N=480n+413$	37, 43, 53, 107.

 Pro

Pro quolibet ergo numero N habebimus quatuor valores ipsius a, quorum singuli dabunt binas numerorum series descendentes

$$N-aa;\ N-(240+a)^2;\ N-(480+a)^2;\ N-(720+a)^2 \text{ etc.}$$
$$N-aa;\ N-(240-a)^2;\ N-(480-a)^2;\ N-(720-a)^2 \text{ etc.}$$

quarum illius differentia prima est $57600+480a$ huius vero $57600-480a$, vtriusque vero differentia secunda constans $=115200$. Ambae hae progressiones continuentur donec ad terminos negatiuos perueniatur, ex iisque ii notentur, qui sunt numeri quadrati. Quodsi tum eueniat, vt vnicus occurrat numerus quadratus, hoc erit signum indubium, propositum numerum N esse primum; sin autem vel nullus numerus quadratus occurrat, vel plures vno, certo hinc erit concludendum, numerum propositum N non esse primum, sed ex factoribus componi.

Coroll. 1.

13. Quodsi ergo numerus propositus N in altera harum formarum $120n+77$ et $120n+53$ contineatur, tum satis expedite examen institui poterit, vtrum is numerus sit primus nec ne? cum quadrata, quae successiue subtrahi oportet scilicet $(240\lambda \pm a)^2$ mox ipsum numerum N sint superatura.

Coroll. 2.

14. Si enim numerus propositus N vnum millionem non superet, quadrata subtrahendo infra

(1200

$(1200+a)^2$ ſubſiſtent, eorumque ergo numerus pro quolibet numero a non ad 9 vsque aſcendet; et quoniam quaterni huiusmodi numeri a habentur, paucioribus quam 36 operationibus totum negotium conficietur.

Coroll. 3.

15. Si numerus N adeo decuplo fuerit maior, operationum numerus ad triplum tantum increſcet, et quoniam pro quouis numero a quadrata ſubtrahenda eiusmodi progreſſionem conſtituunt, quarum differentiae ſecundae ſunt conſtantes, hinc ingentia calculi compendia naſcuntur.

Scholion.

16. Etſi haec methodus ad nonnullas tantum numerorum ſpecies patet, quippe quae in altera harum formarum $120n+77$ et $120n+53$ ſint contentae, ea tamen neutiquam attentione indigna videtur. Cum enim eiusmodi methodum, quae ſe prorſus ad omnes numeros extendat, ne ſperare quidem liceat, quae ſcilicet a vulgari regula, qua diuiſionem per omnes numeros primos radice quadrata numeri propoſiti minores tentari oportet, diſcrepet, eaque ſit multo expeditior; omnia compendia quae quidem in hoc negotio inuenire licet, neutiquam ſunt contemnenda, etiamſi ea ad pauciſſimas numerorum ſpecies extendantur, dummodo numeros quantumuis magnos in ſe complectantur.

Cum enim problema iam olim propositum, quo numerus primus dato numero maior desideratur, adhuc vires ingenii humani superare videatur, non parum praestitisse censendus est, qui numeros valde magnos, qui certo sint primi, in medium afferre valuerit. Vsum igitur methodi hic expositae aliquot exemplis declarabo.

Exemplum I.

17. Explorare vtrum hic numerus 481037 sit primus nec ne?

Cum hic numerus sit $= 1002 . 480 + 77$ in prima forma continetur, vbi quatuor valores ipsius a sunt 19, 29, 61, 109, calculus ergo sequenti modo instituatur:

$a = + 19$		$a = + 29$	
481037	57600	481037	57600
361	9120	841	13920
− 480676	480676 −	− 480196	480196 −
66720	48480	71520	43680
1152	1152	1152	1152
− 413956	432196 −	− 408676	436516 −
181920	163680	186720	158880
1152	1152	− 221956	277636 −
− 232036	268516 −		274080
			3556 −

$a =$

$a = \pm 61$	
481037	57600
3721	29280
−477316	477316−
86880	28320
−390436	448996−
202080	143520
□ 188356	305476−
	258720
	46756−

$a = \pm 109$	
481037	57600
11881	52320
−469156	469156−
109920	5280
−359236	463876−
225120	120480
−134116	343396 □
	235680
	107716−

In his residuis duo occurrunt quadrata signo □ notata dum reliqua non quadrata lineola − notaui; ex quo concludo numerum propositum non esse primum. Cum autem sit duplici modo duorum quadratorum summa scilicet

$$481037 = 434^2 + 541^2 = 586^2 + 371^2$$

eius diuisores, quos quoque summas esse duorum quadratorum necesse est, assignare licebit, sit enim $pp + qq$ diuisor, erit $\frac{p}{q} = \frac{434 \pm 586}{541 \pm 371}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{586 \pm 541}{434 \pm 371}$, hinc $\frac{p}{q} = \frac{6}{1}$ vel $\frac{p}{q} = \frac{85}{76}$ ergo diuisores sunt 37 et 13001.

Exemplum 2.

18. Explorare vtrum hic numerus 829853 sit primus nec ne?

Cum hic numerus sit $= 1728 . 480 + 413$, ad vltimam speciem pertinet, vbi valores ipsius a sunt 37, 43, 53, 107 calculus ergo sequenti modo instituatur.

$a =$

$a = \pm 37$

829853	57600
1369	17760
—828484	828484—
75360	39840
1152	1152
—753124	788644—
190560	155040
1152	1152
—562564	633604—
305760	270240
—256804	363364—

$a = \pm 43$

829853	57600
1849	20640
—828004	828004—
78240	36960
1152	1152
—749764	791044—
193440	152160
1152	1152
—556324	638884—
308640	267360
—247684	371524—

$a = \pm 53$

829853	57600
2809	25440
—827044	827044—
83040	32160
1152	1152
—744004	794884—
198240	147360
1152	1152
—545764	647524—
313440	262560
	1152
□..232324	384964—
	377760
	7204—

$a = \pm 107$

829853	57600
11449	51360
—818404	818404—
108960	6240
1152	1152
—709444	812164—
224160	121440
1152	1152
—485284	690724—
339360	236640
	1152
□..145924	454084—
	351840
	102244—

Quo-

Quoniam hic duo occurrunt quadrata, vnde fit

$$829853 = 482^2 + 773^2 = 382^2 + 827^2$$

hic numerus non eſt primus ſed factores habet 257 et 3229.

Exemplum 3.

19. Explorare, vtrum hic numerus 2400317 ſit primus nec ne? Ex huius numeri forma $= 5000 . 480 + 317$ intelligitur, eum ad ſpeciem tertiam pertinere, pro qua valores ipſius a ſunt 11, 59, 91, 101, vnde calculus ita ſe habebit:

$a = +11$		$a = +59$	
2400317	57600	2400317	57600
121	5280	3481	28320
−2400196	2400196−	−2396836	2396836−
62880	52320	85920	29280
1152	1152	1152	1152
−2337316	2347876−	−2310916	2367556−
178080	167520	201120	144480
1152	1152	1152	1152
−2159236	2180356−	−2109796	2223076
293280	282720	316320	259680
1152	1152	1152	1152
□..1865956	1897636−	−1793476	1963396−
408480	397920	431520	374880
1152	1152	1152	1152
−1457476	1499716−	−1361956	1588516−
523680	513120	546720	490080
1152	1152	1152	1152
−933796	986596−	−815236	1098436−
638880	628320	661920	605280
−294916	358276−	−153316	493156−

 $a =$

$a = \pm 91$		$a = \pm 101$	
2400317	57600	2400317	57600
8281	43680	10201	48480
−2392036	2392036 −	−2390116	2390116 ..□
101280	13920	106080	9120
1152	1152	1152	1152
−2290756	2378116 −	−2284036	2380996 −
216480	129120	221280	124320
1152	1152	1152	1152
−2074276	2248996 −	−2062756	2256676 −
331680	244320	336480	239520
1152	1152	1152	1152
−1742596	2004676 −	−1726276	2017156 −
446880	359520	451680	354720
1152	1152	1152	1152
−1295716	1645156 −	−1274596	1662436 −
562080	474720	566880	469920
1152	1152	1152	1152
−733636	1170436 −	−707716	1192516 −
677280	589920	682080	585120
− 56356	580516 −	−25636	607396 −

Ex duobus quadratis, quae hic occurrunt, numerus propositus concluditur habere factores 53.45289.

Exemplum 4.

20. Explorare vtrum hic numerus 3861317 sit primus nec ne?

Cum hic numerus sit $= 8044.480 + 197$ ad secundam speciem pertinet et calculus ita se habebit:

$a =$

$a = + 1$		$a = + 31$	
3861317	57600	3861317	57600
1	480	961	14880
— 3861316	3861316 —	— 3860356	3860356 —
58080	57120	72480	42720
1152	1152	1152	1152
— 3803236	3804196 —	— 3787876	3817636 —
173280	172320	187680	157920
1152	1152	1152	1152
— 3629956	3631876 —	— 3600196	3659716 —
288480	287520	302880	273120
1152	1152	1152	1152
— 3341476	3344356 —	— 3297316	3386596 —
403680	402720	418080	388320
1152	1152	1152	1152
□.. 2937796	2941636 —	— 2879236	2998276 —
518880	517920	533280	503520
1152	1152	1152	1152
— 2418916	2423716 —	— 2345956	2494756 —
634080	633120	648480	618720
1152	1152	1152	1152
— 1784836	1790596 —	— 1697476	1876036 —
749280	748320	763680	733920
1152	1152	1152	1152
— 1035556	1042276 —	— 933796	1142116 —
864480	863520	878880	849120
— 171076	178756 —	— 54916	292996 —

$a =$

$a = \pm 49$		$a = \pm 79$	
3861317	57600	3861317	57600
2401	23520	6241	37920
−3858916	3858916−	−3855076	3855076−
81120	34080	95520	19680
1152	1152	1152	1152
−3777796	3824836−	−3759556	3835396−
196320	149280	210720	134880
1152	1152	1152	1152
−3581476	3675556−	−3548836	3700516−
311520	264480	325920	250080
1152	1152	1152	1152
−3269956	3411076−	−3222916	3450436−
426720	379680	441120	365280
1152	1152	1152	1152
−2843236	3031396−	−2781796	3085156−
541920	494880	556320	480480
1152	1152	1152	1152
−2301316	2536516−	−2225476	2604676−
657120	610080	671520	595680
1152	1152	1152	1152
−1644196	1926436−	−1553956	2008996−
772320	725280	786720	710880
	1152		1152
−871876	1201156−	−767236	1298116−
	840480		826080
	−360676		472036−

Quo-

Quoniam igitur in his residuis vnicum quadratum reperitur, numerus propositus certe est primus; aequatur autem summae horum duorum quadratorum $1714^2 + 961^2$.

Scholion.

21. Cum igitur iam certi simus numerum 3861317 esse primum, hic fortasse maximus est numerus primus quem nouimus; ac si quis hunc numerum secundum regulam vulgarem explorare voluerit, diuisionem per omnes numeros primos vsque ad 1965 tentare deberet, qui labor certe non solum maxime foret prolixus, sed etiam summopere taediosus; cum tamen hoc modo totum negotium breui temporis spatio facillime expediri possit. Simili modo tentaui numerum $3862997 = 8047 \cdot 480 + 437$, ad quartam speciem referendum, quem pariter primum esse deprehendi. Nisi autem numerus propositus in octo memoratis speciebus contineatur, etiamsi sit formae $4n+1$, examen laborem magis operosum postulat; quamuis negotium ita dirigi queat, vt non pluribus subtractionibus sit opus. Verum cum vniuersa haec inuestigatio plerisque omni vsu destituta videatur, hoc argumentum susius non prosequar sed Theoremata tantum, quibus haec methodus innititur, breuiter subiungo.

Th. 1. Si fit $xx+yy=9n+1$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 1$

Th. 2. Si fit $xx+yy=9n+4$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 2$

Th. 3. Si fit $xx+yy=9n+7$ erit
vel $x=3p$ vel $x=9p\pm 4$

Th. 4. Si fit $xx+yy=3n+2$ erit $x=3p\pm 1$

Th. 5. Si fit $xx+yy=5n+2$ erit $x=5p\pm 1$

Th. 6. Si fit $xx+yy=5n+3$ erit $x=5p\pm 2$

Th. 7. Si fit $xx+yy=25n+1$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 1$

Th. 8. Si fit $xx+yy=25n+4$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 2$

Th. 9. Si fit $xx+yy=25n+6$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 9$

Th. 10. Si fit $xx+yy=25n+9$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 3$

Th. 11. Si fit $xx+yy=25n+11$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 6$

Th. 12. Si fit $xx+yy=25n+14$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm 8$

Th.

Th. 13. Si fit $xx+yy=25n+16$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm4$

Th. 14. Si fit $xx+yy=25n+19$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm12$

Th. 15. Si fit $xx+yy=25n+21$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm11$

Th. 16. Si fit $xx+yy=25n+24$ erit
vel $x=5p$ vel $x=25p\pm7$.

Conclufio.

Ex his theorematibus fequitur fi fumma duorum quadratorum habuerit hanc formam $xx+yy=14400n+11401$ tum quadrati imparis xx radicem fore

vel I. $x=480m\pm(75,195)$
vel II. $x=1440m\pm(85,355,445,715)$
vel III. $x=2400m\pm(99,501,651,1149)$
vel IV. $x=7200m\pm\begin{Bmatrix}149, & 949, & 1301, & 1949\\ 2101, & 2749, & 3101, & 3299\end{Bmatrix}$

Ex hoc numerorum ordine fumto $n=700$, exploraui hunc numerum 10091401, cuius refolutionem in duo quadrata vnico modo fuccedere deprehendi fcilicet ſcilicet $1251^2 + 2920^2$, quod certum eſt indicium hunc numerum eſſe primum. Habemus ergo numerum decem millionibus maiorem 10091401, quem certo nouimus eſſe primum; ſi quis autem alia quacunque methodo vti voluerit, nunquam profecto tantum numerum primum exhibebit.

NOVA

NOVA CRITERIA RADICES AEQVATIONVM IMAGINARIAS DIGNOSCENDI.

Auctore

L. EVLERO.

Summus *Newtonus* et post eum plures alii Geometrae in eo elaborarunt, vt criteria seu signa inuenirent, quorum ope aequationum cuiuscunque gradus radices reales et imaginariae dignosci possent, simili modo quo radices positiuae et negatiuae dignosci solent. Verum cuncta illa criteria seu signa hoc defectu laborant vt quoties radices imaginarias indicant, inde certe quidem concludi possit, tales radices in aequatione reuera inesse; sed quando nullas radices imaginarias indicant neutiquam inde concludere licet, omnes radices esse reales, cum saepius euenire queat vt hoc non obstante omnes adeo aequationis radices sint imaginariae.

Hic defectus imprimis cernitur in aequationibus huius formae

$$+x^n+ax^{n-1}-bx^{n-2}-cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}-\text{etc.}=0$$

vbi continuo bina signa eiusdem naturae se mutuo insequuntur, tum enim omnia illa criteria quae hactenus sunt prolata, nullas plane radices imaginarias ostendunt, cum tamen fieri possit vt plures atque adeo omnes sint imaginariae.

Ad hoc dilucidandum in genere aequatio quarti ordinis huius formae $+x^4+ax^3-bxx-cx+d=0$ exhiberi potest cuius omnes radices sint imaginariae; concipiatur ea enim conflata ex duobus huiusmodi factoribus $xx+px+q$ et $xx-rx+s$ in quibus sit $pp<4q$ et $rr<4s$ vt omnes radices fiant imaginariae.

Tum igitur fieri opportet $a=p-r$; $b=pr-q-s$; $c=qr-ps$ et $d=qs$; ideoque $p>r$: $pr>q+s$: et $qr>ps$.

Statuamus ergo $p=\alpha r$ et $q=\beta s$ et conditiones adimplendae erunt sequentes

I. $\alpha>1$; II. $\beta>\alpha$; III. $rr<4s$; IV. $rr<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$;
V. $rr>\frac{\beta+1}{\alpha}s$:

Cum igitur ex quinta sit $\frac{\beta+1}{\alpha}s<rr$
erit multo magis $\frac{\beta+1}{\alpha}s<4s$ et $<\frac{4\beta}{\alpha\alpha}s$
vnde fit $\beta+1<4\alpha$ seu $\beta<4\alpha-1$ et
$\beta+1<\frac{4\beta}{\alpha}$ seu $\beta>\frac{\alpha}{4-\alpha}$.

Cum quibus nouis conditionibus iungatur secunda $\beta>\alpha$ et adipiscimur cum

$4\alpha-1>\alpha$ tum $4\alpha-1>\frac{\alpha}{4-\alpha}$

inde fit $\alpha>\frac{1}{3}$ quod per se supponitur quia $\alpha>1$; hinc vero $4\alpha>\alpha^2+1$; per qua conditione implenplenda necesse est vt α intra hos limites $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ accipiatur vel potius intra limites $2+\sqrt{3}$ et 1 tum vero facile erit pro β idoneos valores inuenire; constitutis autem valoribus pro α et β aeque facile erit pro s et rr idoneos valores assumere.

Sumto enim exempli gratia $\alpha = 2$ debet esse $\beta > 2$ et > 1 et < 7 vnde intra limites 2 et 7 debet contineri; sit igitur $\beta = 3$ et habebimus has conditiones

$$rr > 2s \text{ et } < 4s \text{ et } < 3s$$

vnde rr intra limites $2s$ et $3s$ debet contineri; sumto ergo $s = 6$ capi poterit $r = 4$ hincque fit $p = 8$ et $q = 18$; quocirca ex binis factoribus $xx + 8x + 18$ et $xx - 4x + 6$ nascetur haec aequatio quarti ordinis

$$x^4 + 4x^3 - 8xx - 24x + 108 = 0$$

cuius omnes radices certo sunt imaginariae, etiamsi criteria supra memorata hoc neutiquam innuant.

Hoc autem semper certum est, si cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, tum illa criteria perpetuo locum habere; propterea quod in illis certae proprietates continentur, quae huiusmodi aequationibus conueniunt, quae autem negotium non exhauriunt, sed quandoque etiam in eiusmodi aequationibus locum habent quae radices imaginarias inuoluunt.

Neque etiam adhuc aliud principium conſtat vnde talia criteria praeſertim pro aequationibus altiorum graduum peti poſſent; interim tamen numerum talium criteriorum pro lubitu augere licet, quo hoc commodi nanciſcimur vt dum quaedam nullas radices imaginarias indicant alia aduerſentur, quorum ſuffragium ſemper veritati conſentaneum eſt cenſendum.

Quod quo clarius appareat, methodos quibus memorati autores in hunc finem ſunt vſi breuiter hic exponam, tum vero oſtendam quomodo iisdem veſtigiis inſiſtendo plura alia imo infinita ſimilia criteria inueſtigari queant.

Primum principium inde petitur quod ſi cuiuspiam aequationis omnes radices fuerint reales, indeque alia aequatio formetur, cuius ſingulae radices ſint quadratis illarum aequales, tum huius nouae aequationis omnes radices non ſolum futurae ſint reales ſed adeo poſitiuae, ita vt in ea ſigna $+$ et $-$ ſe mutuo alternatim inſequi debeant.

Sumamus ergo huius aequationis:

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + d x^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

omnes radices eſſe reales, indeque quaeramus nouam aequationem, cuius quaelibet radix z aequalis ſit quadrato xx, ſeu $z = xx$; hunc in finem illius aequationis alternos terminos ad alteram partem transferamus vt ſit

$$x^n + bx^{n-2} + dx^{n-4} + \text{etc.} = -ax^{n-1} - cx^{n-3} - ex^{n-5} - \text{etc.}$$

capian-

capianturque vtrinque quadrata, quae iterum ad eandem partem disposita dabunt hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{lllll} x^{2n} + 2b.x^{2n-2} & + 2d.x^{2n-4} & + 2f.x^{2n-6} & + 2h.x^{2n-8} & \\ - aa & + bb & + 2bd & + 2bf & \\ & - 2ac & - 2ae & + dd & \text{etc.} \\ & & - cc & - 2ag & \\ & & & - 2ce & \end{array}\right\} = 0$$

In qua omnes exponentes ipsius x sunt numeri pares.

Scribamus ergo vbique z loco xx et habebimus nouam illam aequationem quaesitam, quae erit

$$\begin{array}{lllll} z^n + 2b.z^{n-1} & + 2d.z^{n-2} & + 2f.\ z^{n-3} & + 2h.\ z^{n-4} & \text{etc.} = 0 \\ - aa & + bb & + 2bd & + 2bf & \\ & - 2ac & - 2ae & + dd & \\ & & - cc & - 2ag & \\ & & & - 2ce. & \end{array}$$

In qua cum coefficientes primi, tertii, quinti, etc. termini sint positiui, secundi vero quarti, sexti etc. negatiui, obtinebimus sequentes conditiones pro coefficientibus a, b, c, d etc. aequationis propositae

$$\begin{array}{lll} 2b - aa < 0 & & aa > 2b \\ 2d + bb - 2ac > 0 & \text{seu} & bb > 2ac - 2d \\ 2f + 2bd - 2ae - cc < 0 & & cc > 2bd - 2ae + 2f \\ 2h + 2bf + dd - 2ag - 2ce > 0 \ \text{etc.} & & dd > 2ce - 2bf + 2ag - 2h \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

 quarum

quarum formularum ordo facile perſpicitur.

En ergo iam inſignes proprietates, quae omnibus aequationibus, quarum radices ſunt reales, neceſſario conueniunt, ita vt aequationis propoſitae omnes radices reales eſſe nequeant, niſi ſimul hae conditiones inter eius coefficientes locum habeant. Neutiquam autem viciſſim inde ſequitur, ſi hae conditiones locum habeant, etiam omnes aequationis radices fore reales: quod exemplo aequationis biquadraticae ante allegatae $x^4+px^3-qx^2-rx+s=0$ fit manifeſtum, cum enim facta applicatione ſit $a=p$; $b=-q$; $c=-r$ et $d=s$; conditiones inuentae ſponte implentur quoniam vtique eſt $pp>-2q$; $qq>-2pr-2s$; $rr>-2qs$ hoc autem non obſtante nouimus, omnes huius aequationis radices eſſe poſſe imaginarias.

Scholion.

Quemadmodum hic ex data aequatione aliam elicuimus, cuius ſingulae radices ſint quadrata ſingularum radicum illius, ita etiam inde aliae aequationes inueniri poſſunt, quarum radices ſint vel cubi, vel biquadrata vel aliae poteſtates altiores radicum aequationis propoſitae.

Poni ſcilicet oportet vel $z=x^3$, vel $z=x^4$, vel $z=x^5$ etc. et negotium huc redit vt quantitas x eliminetur: pro qua operatione regulae paſſim ſunt traditae.

Verum

Verum calculus plerumque tam fit intricatus et moleſtus, vt nemo facile hunc laborem ſit ſuſcepturus.

Quare haud abs re fore arbitror peculiarem methodum oſtendiſſe, qua haec eliminatio facile effici queat.

Hunc in finem aequatio ordine inuerſo exhibeatur vt ſit

$$a + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{etc.} = 0$$

et pro caſu iam euoluto, quo eſſe debet $z = xx$, facta ſubſtitutione, quatenus licet, habebimus

$$a + bx + cz + dxz + ezz + fxzz + gz^3 + \text{etc.} = 0$$

vbi breuitatis gratia ſtatuamus

$$a + cz + ezz + gz^3 + \text{etc.} = P \text{ et } b + dz + fzz + \text{etc.} = Q$$

vt ſit $P + Qx = 0$, quae aequatio per x multiplicata loco xx, ſcribendo z, dabit aliam eiusdem formae

$$Px + Qz = 0$$

vnde iam facile x eliminatur; prodit enim

$$PP - QQz = 0$$

quae formula operationem ſupra vſurpatam complectitur.

Ponamus autem requiri vt ſit $z = x^3$, factaque ſubſtitutione quatenus licet, habebitur

$$a + bx + cxx + dz + exz + fxxz + gzz + \text{etc.} = 0$$

quae

quae cum tribus partibus constet, statuamus breuitatis gratia $a+dz+gzz+$ etc. $=P$
$b+ez+hzz+$ etc. $=Q$
$c+fz+izz+$ etc. $=R$

vt sit $P+Qx+Rxx=0$ haec per x multiplicata dat nouam eiusdem formae

$$Rz+Px+Qxx=0;$$ haec denuo per x

multiplicata dabit

$$Qz+Rzx+Pxx=0.$$

Iam vt ex his tribus aequationibus tam x quam xx eliminetur prima per L secunda per M et tertia per N multiplicetur, fiatque

$$LQ+MP+NRz=0$$ et insuper

$$LR+MQ+NP=0$$

eritque tum $LP+MRz+NQz=0$.

Ex duabus prioribus autem elicitur

$$L=\frac{-MP-NRz}{Q}=\frac{-MQ-NP}{R}$$

ideoque $MPR+NRRz=MQQ+NPQ$

vnde fit $\frac{M}{N}=\frac{PQ-RRz}{PR-QQ}$.

Statuatur ergo $M=PQ-RRz$

et $N=PR-QQ$ ac fiet $L=QRz-PP$

quocirca aequatio quaesita erit

$$3PQRz-P^3-Q^3z-R^3zz=0.$$

Hinc

Hinc iam ſatis perſpicuum eſt, quomodo eadem methodus etiam ad altiores poteſtates ſit accommodanda.

Secundum principium: ponamus aequationis propoſitae

$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} +$ etc. $= 0$ radices eſſe $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-$ etc. quarum numerus eſt n vt ſit $a = \alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc.

et $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta +$ etc.

Et quia omnes radices ſunt reales erit ſequens forma $(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^2 +$ etc. certe numerus poſitiuus, facta autem euolutione, prodit $(n-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc.$) - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma - 2\beta\delta - 2\gamma\delta -$ etc. eſt vero vti conſtat $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ etc. $= aa - 2b$ vnde haec forma $(n-1)(aa-2b) - 2b = (n-1)aa - 2nb$ quae quantitas cum certe ſit poſitiua erit $aa > \frac{2n}{n-1} b$.

Quae iam inſignem continet proprietatem huiusmodi aequationum quarum omnes radices ſunt reales: etſi ea enim tantum ad tres terminos initiales ſe extendit, tamen mox patebit, quemadmodum ea ad ternos terminos quosuis ſucceſſiuos applicari queat.

Tertium principium. Si aequationis cuiuscunque gradus:

$$x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + c x^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

 omnes

omnes radices fuerint reales, semper duae aequationes vno gradu inferiores inde formari possunt quarum radices itidem omnes sunt reales; altera ita se habet

$$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + (n-3)cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

quae ex proposita nascitur si singuli eius termini per progressionem arithmeticam n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, etc. multiplicentur; quia enim hoc modo vltimus terminus per 0 multiplicatur, tota aequatio diuisionem per x admittet, sicque vno gradu deprimetur: altera vero aequatio est

$$ax^{n-1} + 2bx^{n-2} + 3cx^{n-3} + 4dx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

quae ex proposita nascitur, si singuli eius termini per progressionem arithmeticam 0, 1, 2, 3, 4 etc. multiplicentur.

Cuius demonstratio ex consideratione linearum curuarum est petenda: si enim x denotet abscissam et applicata statuatur $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \text{etc.}$ euidens est applicatam fieri nullam quoties abscissa x radici aequationis propositae aequalis capitur.

Cum igitur nostra aequatio n habeat radices reales, in totidem locis applicata y euanescet, ibique curua axem intersecabit. Inter binas igitur intersectiones certo dabitur applicata maxima, vbi erit $\frac{dy}{dx} = 0$, vnde tales applicatae maximae erunt numero

mero $n-1$ ad minimum; quodsi ergo valor formulae $\frac{dy}{dx}$ quaeratur qui erit

$$nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}$$

hic $n-1$ casibus euanescere poterit, siue haec aequatio $nx^{n-1}+(n-1)ax^{n-2}+(n-2)bx^{n-3}+\text{etc.}=0$ certe habebit $n-1$ radices, hoc est, omnes suas radices reales, quae est demonstratio prioris formae.

Pro altera statuamus $x=\frac{1}{y}$ et aequatio hinc resultans $1+ay+byy+cy^3+\text{etc.}=0$ itidem omnes habebit radices reales, quippe quae sunt reciprocae radicum illius; quocirca aequatio per differentiationem hinc simili modo formata

$$a+2by+3cyy+4dy^3+\text{etc.}=0$$

etiam omnes radices habebit reales; restituamus nunc pro y valorem $\frac{1}{x}$, ac manifestum erit etiam huius aequationis

$$ax^{n-1}+2bx^{n-2}+3cx^{n-3}+4dx^{n-4}+\text{etc.}=0$$

omnes radices futuras esse reales.

Quemadmodum hinc duae aequationes vno gradu inferiores sunt erutae, ita porro ex his tres nouae duobus gradibus inferiores deriuantur, quae sunt

$$n(n-1)x^{n-2}+(n-1)(n-2)ax^{n-3}+(n-2)(n-3)bx^{n-4}+\text{etc.}=0$$
$$1.(n-1)ax^{n-2}+2.(n-2)bx^{n-3}+3.(n-3)cx^{n-4}+\text{etc.}=0$$
$$1.2.bx^{n-2}+2.3.cx^{n-3}+3.4.dx^{n-4}+\text{etc.}=0.$$

Simili modo ex his elicientur quatuor aequationes tribus gradibus inferiores, scilicet

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}+(n-2)(n-3)(n-4)bx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.(n-1)(n-2)ax^{n-3}+2.(n-2)(n-3)bx^{n-4}+3.(n-3)(n-4)cx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.(n-2)bx^{n-3}+2.3.(n-3)cx^{n-4}+3.4.(n-4)dx^{n-5}+\text{etc.}=0$$

$$1.2.3.cx^{n-3}+2.3.4.dx^{n-4}+3.4.5ex^{n-5}+\text{etc.}=0$$

sicque continuo vlterius progredi licet quoniam igitur omnes istae aequationes radices habent reales, quae criteria pro his aequationibus deriuatis habentur, eadem quoque in ipsa aequatione proposita locum habere debent.

Applicatio ad criteria primi principii.

Faciamus ergo applicationem ad criteria, ex primo principio eruta: et prima aequatio deriuata dabit:

$$(n-1)^2a^2 > 2n(n-2)b$$

$$(n-2)^2b^2 > 2(n-1)(n-3)ac-2n(n-4)d$$

$$(n-3)^2c^2 > 2(n-2)(n-4)bd-2(n-1)(n-5)ae+2n(n-6)f$$

etc. etc.

ex

ex ſecunda autem aequatione deriuata naſcuntur haec criteria

$4bb > 2.6ac$

$9cc > 2.8bd - 2.5ae$

$16dd > 2.3.5ce - 2.2.6bf + 2.7ag$

$25ee > 2.4.6df - 2.3.7cg + 2.2.8bh - 2.8ai$

etc. etc.

Si tantum primum criterium $aa > 2b$ ad vltimas aequationes cuiusque ordinis applicetur, ſequentia criteria emergent

$aa > 2b$ $\qquad$ $aa > 2b$

$4bb > 2.3.ac$ $\qquad$ ſiue $\qquad$ $bb > \frac{3}{2}ac$

$4.9.cc > 2.1.2.3.4bd$ $\qquad$ $cc > \frac{4}{3}bc$

$4.9.16\,dd > 2.1.2.3^2.4.5ce$ $\qquad$ $dd > \frac{5}{4}ce$

etc.

Applicatio ad criterium ſecundi principii

$$aa > \frac{2n}{n-1}b.$$

Cum ſecundum hoc principium pro aequatione quacunque $px^m + qx^{m-1} + rx^{m-2} + \text{etc.} = 0$ habeatur $qq > \frac{2m}{m-1}pr$ binae aequationes vno gradu inferiores dabunt

$(n-1)^2 aa > \frac{2(n-1)}{n-2}.n.(n-2)b$ ſeu $aa > \frac{2nb}{n-1}$

deinde $4bb > \frac{2.(n-1)}{n-2}.3ac$ ſeu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}.ac.$

Tres aequationes duobus gradibus inferiores autem dabunt

I. $(n-1)^2(n-2)^2 aa > \frac{2.n-2}{n-3}.n.(n-1)(n-2)(n-3)b$

seu $aa > \frac{2n}{n-1} b$

II. $4(n-2)^2 bb > \frac{2.n-2}{n-3}.3.(n-1)(n-3)ac$

seu $bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2} ac$

III. $4.9.cc > \frac{2.n-2}{n-3}.1.2.3.4.bd$ seu

$cc > \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3} bd.$

Cum igitur ex quolibet ordine vltima aequatio sola praebeat nouum criterium; omnia criteria hinc nata ita se habebunt

$aa > \frac{2}{1}.\frac{n}{n-1} b$

$bb > \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2} ac$

$cc > \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3} bd$

$dd > \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4} ce$

etc.

Hinc euoluamus ista criteria pro aequationibus singulorum graduum.

I°. Pro $xx+ax+b=0$ erit criterium

$aa > 4b$

quod ita est perfectum, vt si sit $aa > 4b$, radices certe sint reales.

II°.

II°. Pro $x^3+axx+bx+c=0$

erunt criteria

$aa > 3b$; $bb > 3ac$.

III°. Pro $x^4+ax^3+bxx+cx+d=0$

erunt criteria

$aa > \frac{8}{3}b$; $bb > \frac{9}{4}ac$; $cc > \frac{8}{3}bd$

IV°. Pro $x^5+ax^4+bx^3+cxx+dx+e=0$

erunt criteria

$aa > \frac{5}{2}b$; $bb > 2ac$; $cc > 2bd$; $dd > \frac{5}{2}ce$.

V°. Pro $x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dxx+ex+f=0$

erunt criteria

$aa > \frac{12}{5}b$; $bb > \frac{15}{8}ac$; $cc > \frac{16}{9}bd$; $dd > \frac{15}{8}ce$; $ee > \frac{12}{5}df$.

Scholion.

Omnia haec criteria a *Newtono* in Arithmetica vniuerſali ſunt prolata et deduci poſſunt ex criterio aequationum quadratarum, quod ſi aequatio $pxx+qx+r=0$ ambas radices habeat reales neceſſario ſit $qq > 4pr$.

Cum enim cuiuscunque ordinis propoſita fuerit aequatio, ope tertii principii ex ea tandem plures aequationes quadraticae formae $pxx+qx+r=0$ erui queant quae omnes radices habent reales, ſiquidem propoſitae aequationis omnes radices fuerit reales:

les: hoc principium ad aequationes cuiuscunque gradus extendi poterit.

Ita ex aequatione cubica $x^3 + axx + bx + c$ nascuntur hae duae quadraticae

$$3xx + 2ax + b = 0 \quad \text{et} \quad axx + 2bx + 3c = 0$$

vnde concluditur vt ante

$$aa > 3b \quad \text{et} \quad bb > 3ac.$$

Simili modo aequatio quarti ordinis

$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$ praebet has tres quadraticas

$$4.3.\ xx + 3.2.ax + 2.1.b = 0$$
$$1.3.axx + 2.2.bx + 3.1.c = 0$$
$$1.2.bxx + 2.3\ cx + 3.4.d = 0$$

et aequatio quinti gradus

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$ praebet has quatuor quadraticas

$$5.4.3.\ xx + 4.3.2.ax + 3.2.1.b = 0$$
$$1.4.3\ axx + 2.3.2.bx + 3.2.1.c = 0$$
$$1.2.3.bxx + 2.3.2.\ cx + 3.4.1.d = 0$$
$$1.2.3.cxx + 2.3.4.dx + 3.4.5.e = 0$$

quae supra allata criteria suppeditant.

Quoniam autem operosum foret has formas vlterius continuare rem generatim expediamus et ex aequa-

aequatione cuiuscunque gradus ſtatim aequationem quadraticam quamcunque eliciamus.

Aequationem generalem ita exhibeamus

$$\begin{array}{llllllll}
x^n + & ax^{n-1} + & bx^{n-2} + \ldots & + px^{\lambda+2} + & qx^{\lambda+1} + & rx^{\lambda} + & \ldots + & v = 0 \\
\hline
0 & 1 & 2 \,.\,.\,.\,.\,.\, & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & n-\lambda & & \\
 & 0 & 1 \,.\,.\,.\,.\,.\, & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & & \\
 & & 0 \,.\,.\,.\,.\,.\, & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & & \\
\cline{4-8}
 & & & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda \,.\,.\,.\,. & & 0 \\
 & & & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1 \,.\,. & & 0 \\
 & & & \lambda & \lambda-1 & \lambda-2 \,.\,. & & 0 \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & & 3 & 2 & 1 & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+1.2.3\ldots n-\lambda-2.3.4.5\ldots\lambda+2.pxx \\
+2.3.4\ldots n-\lambda-1.2.3.4\ldots\lambda+1.qx \\
+3.4.5\ldots n-\lambda\,.\,.\;1.2.3\ldots\lambda r
\end{array}\right\} = 0$$

Vnde patet pro ternis coefficientibus p, q et r hanc obtineri aequationem quadraticam

quae primo diuiſa per $1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots n-\lambda-2$ dabit

$$3.4.5\ldots\ldots\lambda+2.pxx+\frac{n-\lambda-1}{1}.\ 2.\ 3.4\ldots\ldots\lambda+1.qx$$
$$+\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\quad 2.}\ .\ 1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\lambda r = 0$$

quae denuo per $1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\lambda$ diuiſa dabit

$$\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\quad 2}pxx+\frac{n-\lambda-1}{1}.\ \frac{\lambda+1}{1}qx+\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1.\quad 2}r = 0$$

 vnde

vnde pro radicibus realibus hoc habetur criterium

$$\frac{(n-\lambda-1)^2}{1}\frac{(\lambda+1)^2}{1}\,qq > 4\cdot\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1\cdot 2}\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1\cdot 2}\,pr$$

quod reducitur ad hoc

$$qq > \frac{\lambda+2}{\lambda+1}\cdot\frac{n-\lambda}{n-\lambda-1}\,p\,r.$$

Quemadmodum haec criteria ex caractere aequationum quadraticarum ſunt deriuata, ita ſi caractere aequationum cubicarum, quarum omnes radices ſunt reales, ſimili modo vti velimus, alia noua criteria impetrabimus, ſicque certius circa radices imaginarias aequationum iudicium inſtituere licebit.

Problema.

Caracterem completum inueſtigare pro aequationibus cubicis, quarum omnes radices ſunt reales.

Solutio.

Quoniam conſtat aequationis cubicae omnes radices eſſe reales, quoties regula *Cardani* ad formulas imaginarias perducit; ponamus aequationem cubicam $x^3+axx+bx+c=0$ ex hac forma naſci $(x+\frac{1}{3}a) = \sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ ſumtis igitur vtrinque cubis prodit

$$x^3+axx+\tfrac{1}{3}aax+\tfrac{1}{27}a^3=p+q+3(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})\times\sqrt[3]{pq}$$

vel $=p+q+(3x+a)\sqrt[3]{pq}$ ſeu

x^3+axx

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + axx + \tfrac{1}{3}aax + \tfrac{1}{27}a^3 \\ \qquad -3x\sqrt[3]{pq} - p \\ \qquad\qquad - q \\ \qquad\qquad -a\sqrt[3]{pq} \end{array}\right\} = 0$$

quae forma cum aequatione propofita comparata praebet $b = \tfrac{1}{3}aa - 3\sqrt[3]{pq}$ et

$c = \tfrac{1}{27}a^3 - p - q - a\sqrt[3]{pq}$; cum ergo fit

$\sqrt[3]{pq} = \tfrac{1}{9}aa - \tfrac{1}{3}b = \frac{aa-3b}{9}$ hincque

$pq = \frac{(aa-3b)^3}{729}$ et $p + q = \tfrac{1}{27}a^3 - \frac{a(aa-3b)}{9} - c = \tfrac{1}{27}a(9b - 2aa) - c$

colligimus $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$

$$= \tfrac{1}{729}aa(9b-2aa)^2 - \tfrac{2}{27}ac(9b-2aa) + cc$$
$$- \tfrac{4}{729}(aa-3b)^3$$

quae quantitas fi fuerit negatiua, formula $p-q$ ideoque ambae litterae p et q obtinebunt valores imaginarios; quod cum fit fignum radicum realium ftatuamus

$$\left(\tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - c\right)^2 - \tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 = -\omega$$

hincque

$$\tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - c = \pm\sqrt{\left(\tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}$$

et $c = \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) \mp \sqrt{\left(\tfrac{4}{729}(aa-3b)^3 - \omega\right)}$.

Vnde pro c deducuntur hi limites

$$c < \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) + \tfrac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$
$$c > \tfrac{1}{27}a(9b-2aa) - \tfrac{2}{27}(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vel quoniam inde habetur $bb-3ac=\frac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)\pm 3a\sqrt{(\frac{4}{729}(aa-3b)^3-\omega)}$

pro $bb-3ac$ hi oriuntur limites

$$bb-3ac<\tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)+\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}$$
$$bb-3ac>\tfrac{1}{9}(aa-3b)(2aa-3b)-\tfrac{2}{9}a(aa-3b)\sqrt{(aa-3b)}.$$

Vnde deducimus

$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\frac{2aa-3b+2a\sqrt{(aa-3b)}}{9}\quad\text{seu}$$
$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}<\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2\quad\text{et}$$
$$\frac{bb-3ac}{aa-3b}>\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2.$$

Quoties ergo formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ valor intra hos limites $\left(\frac{a+\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ et $\left(\frac{a-\sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$ continetur certi ſumus omnes radices noſtrae aequationis cubicae eſſe reales. In quo adeo conſiſtit caracter completus quem quaerimus.

Corollarium 1.

Quia limites inuenti locum habere nequeunt niſi $aa-3b$ ſit quantitas poſitiua, hinc ſtatim perſpicuum eſt radices reales eſſe non poſſe niſi ſit $aa>3b$: quod criterium iam in ſupra allatis continetur.

Corollarium 2.

Deinde cum ambo limites ſint quadrata ideoque quantitates poſitiuae, valor formulae $\frac{bb-3ac}{aa-3b}$ debet

debet esse positiuus; quare cum sit $aa > 3b$ necesse est vt fiat quoque $bb > 3ac$; quod est alterum criterium supra iam allatum.

Corollarium 3.

Videmus ergo non solum ambo criteria ante inuenta in hoc caractere contineri, sed hunc caracterem praeterea aliam conditionem complecti, quae nisi impleatur, radices non futurae sint reales, etiamsi fuerit $aa > 3b$ et $bb > 3ac$.

Mirum igitur videri poterit quod vnicus caracter plura criteria in se complectatur.

Scholion 1.

Si in aequatione cubica sumamus esse $c = 0$ vt ea abeat in quadraticam, manifestum est ad realitatem radicum requiri vt sit $aa > 4b$, atque adeo in hoc contineri caracterem completum. Interim tamen si in nostro caractere inuento statuamus $c = 0$, non tam facile patet inde sequi $aa > 4b$; prodit enim $\frac{bb}{aa-3b} \gtrless \left(\frac{a \mp \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$

operae igitur erit pretium inuestigare, quomodo iste caracter ad simplicem formam $aa > 4b$ reducatur.

Reuertamur igitur ad conditionem primo inuentam, quae posito $c = 0$ abit in hanc formam $aa(9b-2aa)^2 - 4(aa-3b)^3 < 0$

quae contrahitur in hanc $-27bb(aa-4b) \lessgtr 0$ seu $bb(aa-4b) \gtrless 0$ vnde manifesto sequitur $aa \gtrless 4b$. Ceterum tamen memoratu dignum hic vsu venit quod conditio

$$\frac{bb}{aa-3b} \lessgtr \left(\frac{a \pm \sqrt{(aa-3b)}}{3}\right)^2$$

prorsus conueniat cum ista $aa \gtrless 4b$, ita vt neutra plus inuoluat quam altera, sicque haec conuenientia tanquam insigne Theorema spectari possit.

Hoc quidem ostendi potest, quantitatem $\frac{bb}{aa-3b}$ alterutri limiti ipsi fore aequalem si fuerit vel $aa = 4b$ vel $aa = \infty$; intra quos casus extremos vtique cadit $aa \gtrless 4b$.

Scholion 2.

Iste caracter completus alio modo prorsus singulari inuestigari potest, vnde autem non patet eum esse completum, nisi de eo iam certiores essemus facti. Sequenti autem modo ratiocinium institui potest.

Si aequatio $x^3 + axx + bx + c$ omnes radices habet reales, tum posito $x = y + p$ aequatio resultans $y^3 + (a + 3p)yy + (b + 2ap + 3pp)y + c + bp + app + p^3 = 0$ etiam habebit radices omnes reales; criteria autem iam cognita dant

I. $(a+3p)^2 \gtrless 3(b+2ap+3pp)$ hoc est $aa \gtrless 3b$

II. $(b+2ap+3pp)^2 \gtrless 3(a+3p)(c+bp+app+p^3)$ hoc est

$$bb + (ab-9c)p + (aa-3b)pp \gtrless 3ac$$

quae

quae conditio impletur tam si $p=0$ quo fit $bb>3ac$ quam si $p=\infty$ quia $aa>3b$.

Tribuatur igitur ipsi p eiusmodi valor quo formula illa fit minima, atque etiam nunc illa erit $>3ac$. Verum formula $A+Bp+Cpp$ fit minima sumto $p=\frac{-B}{2C}$ eiusque valor minimus erit $A-\frac{BB}{4C}$; facta ergo applicatione habebimus

$$bb-\frac{(ab-9c)^2}{4(aa-3b)}>3ac.$$

Quia $aa>3b$ multiplicetur per $4(aa-3b)$ et obtinebimus facta euolutione

$$3bb(aa-4b)>81cc+6ac(2aa-9b)$$

quod criterium completum supra inuentum continet.

Conclusio.

Pro Applicatione ergo ad aequationes altiorum graduum si methodo ante exposita inde deriuentur aequationes cubicae huius formae

$$px^3+qxx+rx+s=0.$$

Criterium radicum realium in hoc consistit vt sit

$$\frac{rr-3qs}{qq-3pr}\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\left(\frac{q\pm\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$$

qua scribendi ratione indicatur quantitatem $\frac{rr-3qs}{qq-3pr}$ intra hos limites $\left(\frac{q+\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ et $\left(\frac{q-\sqrt{(qq-3pr)}}{3p}\right)^2$ contineri debere.

Appli-

Applicatio

ad aequationem quarti ordinis

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$

Hinc methodo ſupra oſtenſa deriuantur hae duae aequationes cubicae

$$4x^3+3ax^2+2bx+c=0$$
$$ax^3+2bx^2+3cx+4d=0.$$

Vnde, ſi omnes radices ſunt reales, inueniuntur duo ſequentia noua criteria

$$\frac{4bb-9ac}{9aa-24b} \lessgtr \left(\frac{3a\pm\sqrt{(9aa-24b)}}{12}\right)^2 \text{ et}$$

$$\frac{9cc-24bd}{4bb-9ac} \lessgtr \left(\frac{2b\pm\sqrt{(4bb-9ac)}}{3a}\right)^2$$

Simili modo applicatio fieri poſſet ad aequationes quinti gradus, vnde tria criteria obtinerentur, et ita porro ad aequationes altiorum graduum.

Verum res adeo in genere praeſtari poteſt, ita vt propoſita aequatione cuiuscunque ordinis, inter quaternos eius coefficientes ſucceſſiuos tale criterium inueniri poſſit: eodem ſcilicet modo calculum inſtitui opportet, quo ſupra pro criteriis prioris ordinis ſumus vſi (vid. Scholion ante Probl.)

x^n+

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}\dots+px^{\lambda+3}+qx^{\lambda+2}+rx^{\lambda+1}+sx^{\lambda}\dots+px^2+qx+v=0$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
0, & 1, & 2 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1 & n-\lambda\dots & n-2 & n-1 & n \\
 & 0 & 1 & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2 & n-\lambda-1\dots & n-3 & n-2 & n-1 \\
 & & 0 & n-\lambda-5 & n-\lambda-4 & n-\lambda-3 & n-\lambda-2\dots & n-4 & n-3 & n-2 \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
 & & & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda\dots & 2 & 1 & 0 \\
 & & & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1\dots & 1 & 0 & \\
 & & & \lambda+1 & \lambda & \lambda-1 & \lambda-2\dots & 0 & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & 4 & 3 & 2 & 1 & & &
\end{array}$$

Hinc ergo per continuas differentiationes ad hanc aequationem cubicam peruenitur

$$\left.\begin{array}{l}
1.2.3\dots(n-\lambda-3).4.5.6\dots(\lambda+3)px^3+2.3.4\dots(n-\lambda-2).3.4.5\dots(\lambda+2)qx^2 \\
+3.4.5\dots(n-\lambda-1).2.3.4\dots(\lambda+1)rx+4.5.6\dots(n-\lambda).\,1.2.3\dots\lambda\; s
\end{array}\right\}=0$$

quae diuisa per $1.2.3\dots(n-\lambda-3).\,1.2.3\dots\lambda$ reducitur ad hanc formam

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.\;2.\;3}px^3+\frac{(n-\lambda-2)}{1}.\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.\;2}qxx \\
+\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)}{1.\;2}.\frac{(\lambda+1)}{1}rx+\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)}{1.\;2.\;3}s
\end{array}\right\}=0$$

seu

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)px^3+3.(\lambda+1)(\lambda+2)(n-\lambda-2)qxx \\
+3(\lambda+1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)rs+(n-\lambda-2)(n-\lambda-1)(n-\lambda)s
\end{array}\right\}=0$$

Quare ex aequatione generali quacunque

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+dx^{n-4}+ex^{n-5}+fx^{n-6}+gx^{n-7}+hx^{n-8}\text{etc.}=0$$

 elicien-

elicientur sequentes aequationes cubicae

I. Si $\lambda = n-3$ erit

$$n(n-1)(n-2)x^3 + 1.3(n-1)(n-2)axx + 1.2.3.(n-2)bx + 1.2.3c = 0$$

seu $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ 2}axx + \frac{(n-2)}{1}bx + c = 0.$

II. Si $\lambda = n-4$ erit

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3}ax^3 + 2.\frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2}bxx + 3.\frac{(n-3)}{1}cx + 4d = 0$$

III. Si $\lambda = n-5$ erit

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3}bx^3 + 3.\frac{(n-3)(n-4)}{1.\ 2}cxx + 6.\frac{n-4}{1}dx + 10e = 0$$

IV. Si $\lambda = n-6$ erit

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3}cx^3 + 4.\frac{(n-4)(n-5)}{1.\ 2}dxx + 10.\frac{n-5}{1}ex + 20f = 0$$

etc.

Quod si ergo aequatio proposita omnes radices habet reales, singulae hae aequationes cubicae etiam suas radices habebunt reales: Vnde sequentia oriuntur criteria

$$\frac{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac}{aa - \frac{2n}{n-1}b} \lessgtr \frac{1.(n-1)^2}{4.n^2}\left(a \pm \surd\left(aa - \frac{2n}{n-1}b\right)\right)^2$$

$$\frac{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd}{bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac} \lessgtr \frac{4.(n-2)^2}{9.(n-1)^2 aa}\left(b \pm \surd\left(bb - \frac{3}{2}.\frac{n-1}{n-2}ac\right)\right)^2$$

$$\frac{dd - \frac{5}{4}.\frac{n-3}{n-4}ce}{cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd} \lessgtr \frac{9.(n-3)^2}{16.(n-2)^2 bb}\left(c \pm \surd\left(cc - \frac{4}{3}.\frac{n-2}{n-3}bd\right)\right)^2$$

$$\frac{ee - \frac{6}{5}\cdot\frac{n-4}{n-5}df}{dd - \frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce} \lessgtr \frac{16.(n-4)^2}{25.(n-3)^2 cc}\left(d \pm \sqrt{\left(dd - \frac{5}{4}\cdot\frac{n-3}{n-4}ce\right)}\right)^2$$

etc. etc.

vnde lex progreſſionis clare perſpicitur.

Obſeruatio.

Quae hactenus attulimus praeter primum criterium ad duo genera reducuntur, quae proprietates aequationum quarum omnes radices ſunt reales in ſe complectuntur; primum genus eiusmodi relationes ſuppeditat, quae inter ternos quosque coefficientes ſucceſſiuos locum habent, et quae iam pridem ſunt cognitae. Alterum genus vero eiusmodi praebet relationes, quae inter quaternos quosque coefficientes ſucceſſiuos neceſſario ſubſiſtere debent, ſi quidem omnes radices fuerint reales. Circa vtrumque genus obſeruaſſe iuuabit, nullam accuratiorem relationem vel inter ternos vel quaternos coefficientes ſucceſſiuos exhiberi poſſe.

Quoties vel vnica harum relationum in quapiam aequatione locum non inuenit, certo concludere licet non omnes radices eſſe reales: vtrum autem duae tantum vel plures futurae ſint imaginariae, hinc non definitur. Ex defectu quidem vnici criterii concludi oportet ad minimum duas radices fore imaginarias, neque tamen hinc ſequitur duorum defectum quatuor radices imaginarias indicare.

Si enim aequatio propoſita fuerit tertii gradus, duo caracteres primi generis ad eam applicari poſſunt, qui etſi ambo deficiant, aequatio tamen non plures quam duas radices imaginarias habere poteſt.

Quemadmodum hos caracteres ex indole aequationum quadraticarum et cubicarum, quarum radices ſunt reales, deriuauimus, ita ſi commode aequationum biquadraticarum caracterem completum pro caſu quo omnes radices ſunt reales exprimere liceret, ſimili modo criteria tertii generis inde deducere poſſemus quibus relationes inter quinos quosque coefficientes ſucceſſiuos continerentur; verum cum formulae nimis prodirent prolixae, ad hunc vſum prorſus ineptae videntur.

Concluſio.

Cum hic plura principia in ſubſidium ſint vocata, coronidis loco oſtendam, quomodo omnia haec criteria ex duobus tantum principiis methodo ſatis ſingulari deduci queant.

Propoſita ſcilicet aequatione cuiuscunque gradus

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + d x^{m-4} \text{ etc.} = 0$$

cuius omnes radices ſint reales, pro priori principio aſſumo, ſemper eſſe $aa > 2b$, quod per ſe eſt manifeſtum, cum formula $aa - 2b$ exprimat ſummam quadratorum ſingularum radicum, alterum principium

pium in hoc consistit, quod huius aequationis vno gradu inferioris

$$a x^{m-1} + 2 b x^{m-2} + 3 c x^{m-3} + 4 d x^{m-4} + \text{etc.} = 0$$

etiam omnes radices futurae sint reales; quod supra est demonstratum.

His iam duobus principiis constitutis ratiocinium ita prosequor.

I. Pro criteriis primi generis, statuo $x = y + p$ denotante p quantitatem realem, vt aequatio hinc resultans etiamnunc omnes suas radices habeat reales, quae erit

$$\left.\begin{array}{llll} y^m + mpy^{m-1} & + \frac{m(m-1)}{2} ppy^{m-2} & + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} p^3 y^{m-3} & + \text{etc.} \\ \quad + a & + (m-1)ap & + \frac{(m-1)(m-2)}{2} app & + \text{etc.} \\ & + b & + (m-2)bp & + \text{etc} \\ & & + c & + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

per prius igitur principium necesse est vt hic sit

$$(mp + a)^2 > m(m-1)pp + 2(m-1)ap + 2b$$

seu facta euolutione $mpp + 2ap + aa > 2b$ quod cum de omnibus valoribus ipsius p valere debeat, necesse est vt etiam de eo valeat, quo ea formula fit minima, quod euenit si sumatur $p = \frac{-a}{m}$, tum autem habebitur $aa > \frac{2m}{m-1} b$; quod est primum criterium primi generis; ex quo reliqua per aequationes quas secundum principium praebet successiue deriuantur

Aequationes	Criteria
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.} = 0$	$aa > \frac{2m}{m-1} b$
$ax^{m-1} + 2bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + \text{etc.} = 0$	$bb > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac$
$bx^{m-2} + 3cx^{m-3} + 6dx^{m-4} + \text{etc.} = 0$	$cc > \frac{4.(m-2)}{3.(m-3)} bd$
$cx^{m-3} + 4dx^{m-4} + 10ex^{m-5} + \text{etc.} = 0$	$dd > \frac{5.(m-3)}{4.(m-4)} ce$
etc.	etc.

II. Pro criteriis secundi generis. Retenta substitutione $x = y + p$ aequationis inde resultantis, reiecto primo termino consideremus tres sequentes ad eosque criterium modo inuentum $bb > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)} ac$ applicemus, quod hanc aequationem praebebit

$$\left(\frac{m(m-1)}{2}pp + (m-1)ap + b\right)^2 > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)}(mp+a)\left\{\begin{array}{l}\frac{m(m-1)(m-2)}{6}p^3 \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{2}app \\ + (m-2)bp + c\end{array}\right\}$$

vnde facta euolutione peruenietur ad sequentem conditionem

$$\left(aa - \frac{2.m}{m-1}b\right)pp + \frac{2}{m-1}\left(ab - \frac{3m}{m-2}c\right)p + \frac{4}{(m-1)^2}bb > \frac{6}{(m-1)(m-2)}ac$$

statuatur nunc $p = \frac{-(ab - \frac{3m}{m-2}c)}{(m-1)(aa - \frac{2m}{m-1}b)}$ vt valor primi membri fiat minimus, obtinebimusque hanc conditionem, multiplicando per $\frac{(m-1)^2}{4}$

$$bb - \frac{(ab - \frac{3m}{m-2}c)^2}{4(aa - \frac{2m}{m-1}b)} > \frac{3.(m-1)}{2.(m-2)}ac.$$

Quia iam $aa > \frac{2m}{m-1}b$, conditionem hanc per $4(aa - \frac{2m}{m-1}b)$ multiplicare licebit; tunc autem facta euolu-

euolutione obtinebimus hoc criterium ſecundi generis

$$bb\left(3aa-\frac{8m}{m-1}b\right)>\frac{9mm}{(m-2)^2}cc+\frac{6ac}{m-2}((m-1)aa-3mb)$$

ex quo deinceps eruitur vt ſupra inuenimus

$$\frac{bb-\frac{3}{2}\cdot\frac{(m-1)}{m-2}ac}{aa-\frac{2m}{m-1}b} \lessgtr \frac{1.(m-1)^2}{4.m^2}\left(a\pm\sqrt{\left(aa-\frac{2m}{m-1}b\right)}\right)^2.$$

Quae formula ad aequationes differentiales applicata dabit reliqua criteria huius ſecundi generis.

Hinc concludere licet, ſi quis ſimili modo progredi, et ſecundum criterium huius generis ad aequationem transformatam, poſito $x=y+p$, accommodare vellet, inde nouum criterium tertii ordinis deduci poſſe, quod contineret relationem inter quinos coefficientes ſucceſſiuos: Verum tum in formula reſultante littera p ad quartam dimenſionem eſſet aſcenſurum, vnde eius valor eam formulam minimam reddens non applius commode definiri poſſet; quamobrem hanc inueſtigationem vlterius non proſequor, eo contentus, quod criteria ſecundi generis, quae adhuc noua videntur, exhibuerim.

CON-

CONSIDERATIONES

DE THEORIA MOTVS LVNAE PERFICIENDA ET IMPRIMIS DE EIVS VARIATIONE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Etsi Theoria motuum Lunae a praestantissimis Geometris summo studio est inuestigata, atque adeo a Celeb. Professore Göttingensi *Mayero* Tabulae Lunares obseruationibus apprime satisfacientes sunt in medium allatae, plurimum tamen adhuc abest, quo minus ipsa Theoria penitus exculta existimari possit. Quanquam enim forma istarum Tabularum ex Theoria est deriuata, quae etiam plures inaequalitates in motu Lunae accurate suppeditauit nonnullae tamen maximi momenti occurrunt, quarum quantitas ex solis obseruationibus est definita cum earum determinatio per solam Theoriam nimis incerta relinqueretur. Quin etiam nullum est dubium quin verus Lunae motus multo pluribus inaequalitatibus, quam quae in his Tabulis assignantur, perturbetur quae etsi in vsu practico ob paruitatem facile praetermitti possunt, tamen in Theoria minime contemnendae videntur neque Theoria ante satis exculta

culta censeri poterit, quam omnes prorsus motus inaequalitates, ne minimis quidem exceptis, accurate assignare valuerimus.

II. Ad Theoriam autem motuum Lunae feliciter inuestigandam, non statim ab eius motu vero exordiendum videtur, quemadmodum ab iis, qui hoc opus susceperunt, est factum, verus enim motus, quatenus non solum secundum longitudinem, sed etiam secundum latitudinem continuo perturbatur, tot tantisque difficultatibus implicatur, et penitus obruitur, vt singulis expediendis neque nostrae neque Analyseos vires sufficiant. Quam ob causam in hoc tam difficili negotio methodum ab Astronomis praecipue felicissimo cum successu vsitatam adhiberi conueniet, vt ante quam veros Lunae motus inuestigemus, casus nobis fingamus simpliciores, multo paucioribus difficultatibus obnoxios, quos si expedire licuerit, tum demum studia nostra continuo propius ad veritatem applicare licebit.

III. Primo igitur motus Lunae in latitudinem prorsus remouendus videtur, ita vt non huius, sed alius cuiusdam Lunae, quae in ipso eclipticae plano moueatur, motus sit inuestigandus; quandoquidem hoc modo calculus a grauissimis illis difficultatibus, quibus motus nodorum et inclinatio ad eclipticam premitur, liberatur. Deinde ne ipse solis motus quatenus non est vniformis molestiam facessat, hoc quoque obstaculum in principio tollatur, et motus ſolis quaſi eſſet vniformis ſpectetur. Hac ratione aliae inaequalitates inueſtigandae non ſupererunt, niſi quae partim ab excentricitate orbitae lunaris, partim ab elongatione Lunae a Sole pendent. Ac ſi ſimplicitas adhuc maior deſideretur, etiam excentricitas abiiciatur, et eiusmodi Lunae motus indagetur, quae ſine vlla excentricitate in plano eclipticae moueretur ſole curſum ſuum vniformiter abſoluente. Hunc tantum caſum adeo ſimplicem qui accurate et ad computum accommodate euoluere potuerit, is certe iam plurimum in Theoria praeſtitiſſe eſſet cenſendus.

Tab. I. Fig. 2. IV. Remota ergo inclinatione orbitae Lunaris, centrum terrae vt quieſcens ſpectetur in T, et tabula referente planum eclipticae, ſit tempore quodam t elapſo centrum Lunae in L et Solis in S. Aſſumta iam recta fixa TA ad principium ſcilicet arietis ducta vocentur diſtantiae: $TL = v$, $TS = u$ et $LS = z$, et anguli $ATL = \Phi$, $ATS = \theta$, ſitque breuitatis gratia $STL = \Phi - \theta = \eta$, erit $z = \sqrt{(uu - 2vu \operatorname{cof.} \eta + vv)}$ vbi quidem diſtantia v eſt valde parua prae u. Porro demiſſo ab L in rectam TA perpendiculo LV ſit $TV = x$ et $VL = y$, eritque $x = v \operatorname{cof.} \Phi$ et $y = v \operatorname{fin.} \Phi$. Hinc $x \operatorname{cof.} \Phi + y \operatorname{fin.} \Phi = v$ et $x \operatorname{fin.} \Phi - y \operatorname{cof.} \Phi = 0$: Ergo differentiando $dx \operatorname{cof.} \Phi + dy \operatorname{fin.} \Phi - d\Phi (x \operatorname{fin.} \Phi - y \operatorname{cof.} \Phi) = dv$ ſeu $dx \operatorname{cof.} \Phi + dy \operatorname{fin.} \Phi = dv$ et $dx \operatorname{fin.} \Phi - dy \operatorname{cof.} \Phi + d\Phi (x \operatorname{cof.} \Phi + y \operatorname{fin.} \Phi) = 0$ ſeu $dx \operatorname{fin.} \Phi - dy \operatorname{cof.} \Phi = -v d\Phi$. Porro denuo differentiando;

ddx

$ddx\,\text{cof.}\Phi + ddy\,\text{fin.}\Phi - d\Phi(dx\,\text{fin.}\Phi - dy\,\text{cof}\,\Phi) = ddv$ feu

$$ddx\,\text{cof.}\Phi + ddy\,\text{fin.}\Phi = ddv - vd\Phi^2$$

$ddx\,\text{fin.}\Phi - ddy\,\text{cof.}\Phi + d\Phi(dx\,\text{cof.}\Phi + dy\,\text{fin.}\Phi) = -dvd\Phi - vdd\Phi$ feu

$$ddy\,\text{cof.}\Phi - ddx\,\text{fin.}\Phi = 2dvd\Phi + vdd\Phi.$$

V. Iam maffae Solis, terrae ac Lunae defignentur litteris S, T et L, ita vt fint vires acceleratrices, quibus Luna vrgetur ad terram fecundum $LT = \frac{T}{vv}$, et ad folem fecundum $LS = \frac{S}{zz}$, quae ducta recta sLt ipfi TS parallela refoluitur in has binas vires:

1°. Secundum $LT = \frac{Sv}{z^3}$ et 2°. fecundum $Ls = \frac{Su}{z^3}$.

Quia deinde terra ad folem vrgetur vi fecundum $TS = \frac{S}{uu}$, et ad Lunam vi fecundum $TL = \frac{L}{vv}$ hae vires contrarie in Lunam translatae dant vim fecundum $Lt = \frac{S}{uu}$, et fecund. $LT = \frac{L}{vv}$ ita vt iam Luna his viribus vrgeri cenfenda fit;

1°. Sec. $LT = \frac{T+L}{vv} + \frac{Sv}{z^3}$; 2°. fec. $Lt = \frac{S}{uu} - \frac{Su}{z^3}$

quae porro fecundum directiones coordinatarum TV et VL, feu ducta LR ipfi TA parallela fecundum LR et VL, refolutae dant

fecundum LR vim $= \frac{T+L}{vv}\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{Sv}{z^3}\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{S}{uu}\,\text{cof.}\,\theta - \frac{Su}{z^3}\,\text{cof.}\,\theta$

fecundum LV vim $= \frac{T+L}{vv}\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{Sv}{z^3}\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{S}{uu}\,\text{fin.}\,\theta - \frac{Su}{z^3}\,\text{fin.}\,\theta.$

VI. His viribus inuentis ſumendo temporis elemento dt conſtante, principia motus praebent has aequationes

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{(T+L)\cos.\Phi}{vv} - \frac{Sv\cos.\Phi}{z^3} - \frac{S\cos.\theta}{uu} + \frac{Su\cos.\theta}{z^3}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{(T+L)\sin.\Phi}{vv} - \frac{Sv\sin.\Phi}{z^3} - \frac{S\sin.\theta}{uu} + \frac{Su\sin.\theta}{z^3}$$

vnde ob $ddy\cos.\Phi - ddx\sin.\Phi = 2dvd\Phi + vdd\Phi$

et $ddx\cos.\Phi + ddy\sin.\Phi = ddv - vd\Phi^2$

nanciſcimur has binas aequationes principales:

$$1^\circ.\ \frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{dt^2} = \frac{S\sin.\eta}{uu} - \frac{Su\sin.\eta}{z^3}$$

$$2^\circ.\ \frac{ddv - vd\Phi^2}{dt^2} = -\frac{(T+L)}{vv} - \frac{Sv}{z^3} - \frac{S\cos.\eta}{uu} + \frac{Su\cos.\eta}{z^3}.$$

Vt iam pro dt^2 valorem determinatum introducamus, conſideremus motum Solis, qui cum ad terram ſollicitari cenſendus ſit vi $\frac{S+T}{uu}$, habebitur ſimili modo:

$$\frac{2dud\theta + udd\theta}{dt^2} = 0 \text{ et } \frac{ddu - ud\theta^2}{dt^2} = -\frac{(S+T)}{uu}$$

ſumamus iam Solis diſtantiam a terra mediam $= a$, et motum medium tempori t conuenientem $= \zeta$, erit ex poſteriori aequatione $\frac{ad\zeta^2}{dt^2} = \frac{S+T}{aa}$, vnde colligimus $\frac{1}{dt^2} = \frac{T+S}{a^3 d\zeta^2}$

ſicque loco elementi dt introducimus elementum cognitum pariter conſtans $d\zeta$, et has formulas adipiſcimur:

$$1^\circ.\ 2dvd\Phi + vdd\Phi = \frac{Sa^3 d\zeta^2 \sin.\eta}{S+T}\left(\frac{1}{uu} - \frac{u}{z^3}\right)$$

$$2^\circ.\ ddv - vd\Phi^2 = -\frac{(T+L)a^3 d\zeta^2}{(T+S)vv} - \frac{Sa^3 d\zeta^2}{S+T}\left(\frac{v}{z^3} + \frac{\cos.\eta}{uu} - \frac{u\cos.\eta}{z^3}\right)$$

vbi

vbi notandum eſt loco $\frac{S}{S+T}$ vnitatem ſcribi licere cum maſſa T prae S euaneſcat.

VII. Vt litteras maiuſculas S, T, L ex calculo exterminemus, contemplemur etiam motum Lunae medium, qui quidem eſſet futurus, ſi vires perturbantes a Sole oriundae abeſſent; hoc caſu ſtatuatur diſtantia Lunae media a terra $=c$, et ratio eius motus medii ad motum medium Solis $=n:1$; cum igitur ſit $v=c$ et $d\Phi=nd\zeta$, poſterior aequatio praebet $-cnnd\zeta^2=-\frac{(T+L)a^3d\zeta^2}{(T+S)cc}$ vnde fit $\frac{T+L}{T+S}=\frac{nnc^3}{a^3}$; ex quo noſtrae aequationes principales ſequentes induent formas:

$$1^\circ.\ 2dvd\Phi+vdd\Phi=a^3d\zeta^2\,\text{ſin.}\eta\left(\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}\right)$$

$$2^\circ.\ ddv-vd\Phi^2=-\frac{nnc^3}{vv}d\zeta^2-\frac{a^3v}{z^3}d\zeta^2-a^3d\zeta^2\,\text{coſ.}\eta\left(\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}\right).$$

Totum ergo negotium huc redit, vt iſtae aequationes commode tractentur, ac ſi fieri queat ad integrationem perducantur: vbi quidem notaſſe iuuabit, membra poſteriora quantitates u et z inuoluentia prae reliquis eſſe valde parua, indeque rationem approximandi eſſe petendam.

VIII. Ponamus autem breuitatis gratia:

$$\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}=-M \text{ et } \frac{v}{z^3}+\text{coſ.}\eta\left(\frac{1}{uu}-\frac{u}{z^3}\right)=N$$

vt aequationes noſtrae fiant

$$1^\circ.\ 2dvd\Phi+vdd\Phi=-a^3Md\zeta^2\,\text{ſin.}\eta \text{ et}$$

$$2^\circ.\ ddv-vd\Phi^2=-\frac{nnc^3}{vv}d\zeta^2-a^3Nd\zeta^2$$

vbi ob v prae u valde paruum et $z = \sqrt{(uu - 2uv\cos.\eta + vv)}$ erit per approximationem

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{u^3} + \frac{3v}{u^4}\cos.\eta - \frac{3vv}{2u^5}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5v^3}{2u^6}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3) + \frac{15v^4}{8u^7}(1 - 14\cos.\eta^2 + 21\cos.\eta^4)\text{etc.}$$

ideoque litterarum M et N valores prodibunt

$$M = \frac{3v}{u^5}\cos.\eta - \frac{3vv}{2u^4}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5v^3}{2u^5}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3) + \frac{15v^4}{8u^6}(1 - 14\cos.\eta^2 + 21\cos.\eta^4)$$

$$N = \frac{v}{u^3}(1 - 3\cos.\eta^2) + \frac{3vv}{2u^4}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) - \frac{v^3}{2u^5}(3 - 30\cos.\eta^2 + 35\cos.\eta^4) - \frac{5v^4}{8u^6}(15\cos.\eta - 70\cos.\eta^3 + 63\cos.\eta^5)$$

vbi singula membra sequentia prae antecedentibus sunt vehementer exigua.

IX. Prima aequationum nostrarum ad integrabilitatem perducitur multiplicando eam per v tum vero etiam per $2v^3 d\Phi$, posteriori modo prodit $v^4 d\Phi^2 = -2a^3 d\zeta^2 \int M v^3 d\Phi \sin.\eta$.

Deinde prior multiplicetur per $2vd\Phi$ et posterior per $2dv$ ac summa dabit:

$$2dvddv + 2vdvd\Phi^2 + 2vvd\Phi dd\Phi = -2a^3 Mvd\zeta^2 d\Phi \sin.\eta - \frac{2nnc^3 dv}{vv} d\zeta^2 - 2a^3 N d\zeta^2 dv$$

vnde per integrationem eruitur:

$$dv^2 + vvd\Phi^2 = \frac{2nnc^3 d\zeta^2}{v} - 2a^3 d\zeta^2 \int Mvd\Phi \sin.\eta - 2a^3 d\zeta^2 \int N dv.$$

Statuamus breuitatis gratia:

$$a^3 \int M v^3 d\Phi \sin.\eta = -c^4 P \quad \text{et} \quad a^3 \int M v d\Phi \sin.\eta + a^3 \int N dv = -ccQ$$

vt

vt obtineamus has formas:

$$1^\circ.\ v^4 d\Phi^2 = +2c^4 P d\zeta^2 \text{ et } 2^\circ.\ dv^2 + vv d\Phi^2 = \frac{2nnc^3 d\zeta^2}{v} + 2ccQ d\zeta^2$$

quae facto $v = cx$ fiunt

$$1^\circ.\ x^4 d\Phi^2 = +2P d\zeta^2 \text{ et } 2^\circ.\ dx^2 + xx d\Phi^2 = \frac{2nn\, d\zeta^2}{x} + 2Q d\zeta^2$$

eritque:

$$dP = \frac{-a^3}{c} M x^4 d\Phi \sin.\eta \text{ et } dQ = \frac{-a^3}{c}(M x d\Phi \sin.\eta + N dx)$$

existente

$$M = \frac{3cx}{u^3}\cos.\eta - \frac{3ccxx}{2u^4}(1 - 5\cos.\eta^2) - \frac{5c^3x^3}{2u^5}(3\cos.\eta - 7\cos.\eta^3)$$

$$N = \frac{cx}{u^3}(1 - 3\cos.\eta^2) + \frac{3ccxx}{2u^4}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) - \frac{c^3x^3}{2u^5}(3 - 30\cos.\eta^2 + 35\cos.\eta^4).$$

X. Ex priore aequatione iam est $d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2P}}{xx}$, qui valor in altera substitutus dat:

$$dx^2 + \frac{2P d\zeta^2}{xx} = \frac{2nn\, d\zeta^2}{x} + 2Q d\zeta^2$$

vnde elicitur:

$$dx = d\zeta\sqrt{\left(2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx}\right)} \text{ vel etiam}$$

$$\frac{dx\sqrt{2P}}{xx} = d\Phi\sqrt{\left(2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx}\right)}$$

hincque discimus quantitatem $2Q + \frac{2nn}{x} - \frac{2P}{xx}$ nunquam fieri posse negatiuam; euanescere autem potest, quod fit dum Luna vel in apogeo versatur vel in perigeo, quandoquidem vtroque casu fit $dx = 0$. Ceterum si vires perturbantes abessent pro motu medio,

medio, quo $x=1$ et $d\Phi=nd\zeta$ foret $n=\sqrt{2P}$, seu $P=\frac{1}{2}nn$ et $nn=2nn+2Q$ seu $Q=-\frac{1}{2}nn$, qui ergo valores his litteris proxime conueniunt.

XI. Nisi excentricitas orbitae euanescat vel sit quam minima, eius introductio in calculum satis commode ad formulas differentiales primi gradus manuducit, quae ad computum astronomicum maxime videntur accommodatae. Duplici imprimis modo haec reductio institui potest, vnde deinceps alias latius patentes eiusmodi resolutiones deriuare licet. Alterum quidem modum iam alibi fusius sum persecutus, sed dignitas materiae omnino requirere videtur, vt vtrumque hic dilucide exponam, simulque cognationem ostendam, quo facilius intelligi possit, quanta emolumenta inde expectare liceat.

Reductio prior formularum inuentarum ope excentricitatis facta.

XII. Ordiamur a formula posteriori, quae per $\sqrt{2}$ diuisa est:

$$\frac{dx}{xx}\sqrt{P}=d\Phi\sqrt{(Q+\frac{nn}{x}-\frac{P}{xx})}$$

ac statuamus $\frac{1}{x}=\frac{1-q\,cos.\,\omega}{p}$, seu $x=\frac{p}{1-q\,cos.\,\omega}$, vbi sequentia sunt obseruanda:

1°. Quantitas p in c ducta ob $v=cx$ exprimit semiparametrum orbitae, quatenus ea cum ellipsi comparatur; foretque p quantitas constans, si vires per-

perturbantes abessent, nunc autem erit quantitas variabilis.

2°. Quantitas q in eadem comparatione denotat excentricitatem, quae ob vires perturbantes pariter vt variabilis est spectanda.

3°. Angulus ω designat anomaliam veram ab apogeo computatam, et ob $v = cx$, erit distantia apogei $= \frac{cp}{1-q}$ et distantia perigei $= \frac{cp}{1+q}$, vnde semiaxis transuersus orbitae $= \frac{cp}{1-qq}$.

4°. Loco vnius variabilis x introduximus tres nouas p, q et ω, inter quas autem iam vnam determinationem stabiliuimus qua dx euanescere debet si $\sin.\omega = 0$; alteram determinationem consideratio formulae irrationalis suppeditabit.

XIII. In formula $Q + \frac{nn}{x} - \frac{P}{xx}$ loco $\frac{1}{x}$ substituamus valorem assumtum $\frac{1 - q\cos.\omega}{p}$, et prodibit

$$Q + \frac{nn}{p} - \frac{P}{pp} - \frac{nnq}{p}\cos.\omega + \frac{2Pq}{pp}\cos.\omega - \frac{Pqq}{pp}\cos.\omega^2$$

cuius radix quadrata quia factorem habere debet $\sin.\omega$ oportet vt sit 1°. $P = \frac{1}{2}nnp$, et 2°. $Q + \frac{nn}{p} - \frac{P}{pp} = \frac{Pqq}{pp}$ sicque prodeat $Q + \frac{nn}{x} - \frac{P}{xx} = \frac{Pqq}{pp}\sin.\omega^2$. Quo facto erit $\frac{dx}{xx}\sqrt{P} = -\frac{qd\Phi\sin.\omega}{p}\sqrt{P}$, seu $\frac{dx}{xx} = -\frac{qd\Phi}{p}\sin.\omega$. Cum autem sit $\frac{dx}{xx} = \frac{dp}{pp} + \cos.\omega\, d.\frac{q}{p} - \frac{q}{p}d\omega\sin.\omega$, habebimus $\frac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\sin.\omega = -\frac{dp}{pp} - \cos.\omega.\, d.\frac{q}{p}$. Ex factis autem binis hypothesibus erit primo $p = \frac{2P}{nn}$ et ob $nn = \frac{2P}{p}$ altera dat $Q + \frac{P(1-qq)}{pp} = 0$,

 seu

seu $Q + \frac{nn}{2p}(1-qq) = 0$ hincque $\frac{1-qq}{p} = -\frac{2Q}{nn}$. Denique prima aequatio $d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2P}}{xx}$ dat $\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{n(1-q\cos.\omega)^2}{p\sqrt{p}}$, seu $d\zeta = \frac{p\,d\Phi\sqrt{p}}{n(1-q\cos.\omega)^2}$.

XIV. Quia nunc P et Q sunt quantitates, quarum differentialia saltem vt cognita spectantur, variationes momentaneae elementorum motus sequenti modo se habebunt.

1°. Pro quantitate p erit $dp = \frac{2\,dP}{nn}$, ideoque

$$dp = \frac{-2a^3}{nnc} M x^3 d\Phi \,\text{sin.}\, \eta \text{ vbi } x = \frac{p}{1-\cos.\omega}.$$

2°. Pro semiaxe orbitae $\frac{cp}{1-qq}$ habemus $d.\frac{1-qq}{p} = -\frac{2dQ}{nn}$ ideoque $d.\frac{1-qq}{p} = \frac{2a^3}{nnc}(Mxd\Phi \,\text{sin.}\,\eta + N dx)$

quia vero est $dx = \frac{-qxxd\Phi}{p}\,\text{sin.}\,\omega$ erit

$$d.\frac{1-qq}{p} = \frac{2a^3}{nnc} x\,d\Phi\left(M \,\text{sin.}\,\eta - \frac{Nq\,\text{sin.}\,\omega}{1-q\cos.\omega}\right).$$

3°. Inuento differentiali quantitatis $\frac{1-qq}{p}$, quam tantisper vocabo R, erit $qq = 1-pR$ et $\frac{qq}{pp} = \frac{1}{pp} - \frac{R}{p}$, vnde fit

$$d\,\frac{qq}{pp} = \frac{2q}{p}d.\frac{q}{p} = -\frac{2\,dp}{p^3} + \frac{R\,dp}{pp} - \frac{1}{p}.d.R = -\frac{(1+qq)dp}{p^3} - \frac{1}{p}dR$$

vbi si loco dp et dR valores inuenti substituantur, reperitur

$$\frac{2q}{p}d.\frac{q}{p} = \frac{2a^3qxd\Phi}{nncp}\left(\frac{M(2\cos.\omega + q\,\text{sin.}\,\omega^2)\,\text{sin.}\,\eta}{(1-q\cos.\omega)^2} + \frac{N\,\text{sin.}\,\omega}{1-q\cos.\omega}\right) \text{ ideoque}$$

$$d.\frac{q}{p} = \frac{a^3xd\Phi}{nnc}\left(\frac{M(2\cos.\omega + q\,\text{sin.}\,\omega^2)\,\text{sin.}\,\eta}{(1-q\cos.\omega)^2} + \frac{N\,\text{sin.}\,\omega}{1-q\cos.\omega}\right)$$

vnde

vnde concluditur:

$$\tfrac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\sin.\omega = \tfrac{2a^3}{nnc}\, x\, d\Phi . \tfrac{M \sin.\eta}{(1-q\cos.\omega)^2} - \cos.\omega\, d.\tfrac{q}{p} \quad \text{seu}$$

$$\tfrac{q}{p}(d\Phi - d\omega)\sin.\omega = \tfrac{a^3 x\, d\Phi}{nnc}\left(\tfrac{M(2\sin.\omega^2 - q\sin.\omega^2\cos.\omega)\sin.\eta}{(1-q\cos.\omega)^2} - \tfrac{N\sin.\omega\cos.\omega}{1-q\cos.\omega}\right)$$

sicque habebimus:

$$d\Phi - d\omega = \tfrac{a^3 xx\, d\Phi}{nncq}\left(\tfrac{M(2-q\cos.\omega)\sin.\eta\sin.\omega}{1-q\cos.\omega} - N\cos.\omega\right)$$

vnde motus lineae absidum definitur.

4°. His variationibus definitis erit tandem

$$x = \tfrac{p}{1-q\cos.\omega} \quad \text{et} \quad d\zeta = \tfrac{p\, d\Phi \sqrt{p}}{n(1-q\cos.\omega)^2}$$

qua posteriori formula ratio inter $d\Phi$ et $d\zeta$, illinc vero ratio inter $d\Phi$ et $d\omega$ exprimitur.

Reductio altera formularum inuentarum ad differentialia primi gradus.

XV. Aequationi posteriori haec inducatur forma:

$$\tfrac{dx}{x}\sqrt{P} = -d\Phi\sqrt{(Qxx + nnx - P)}$$

priore existente $xx\,d\Phi = d\zeta\sqrt{2P}$, et excentricitas ita introducatur vt ponatur $x = p + q\cos.\omega$, sicque distantia maxima sit $= p+q$ et minima $= p-q$, vbi autem quantitates p et q sunt variabiles. Cum nunc sit:

$\frac{dx}{x} = \frac{dp + dq\cos.\omega - q\,d\omega\sin.\omega}{p + q\cos.\omega}$, quae expressio euanescere debet si $\sin\omega = 0$, valor ipsius x in altera parte substitutus dabit

$$Qxx+nnx-P=Qpp+2Qpq\,\text{cos.}\,\omega+Qqq\,\text{cos}\,\omega^2$$
$$+nnp+nnq\,\text{cos.}\,\omega$$
$$-P.$$

Hic ergo ponatur $2Qp+nn=0$ et $Qqq=-Qpp-nnp+P$ vt fiat $\sqrt{(Qxx+nnx-P)}=\text{sin.}\,\omega\sqrt{(Qpp+nnp-P)}=+q\,\text{sin.}\,\omega\sqrt{-Q}$. At ob $nnp=-2Qpp$, habemus $Qqq=Qpp+P$, seu

$Q=\frac{-P}{pp-qq}=\frac{-nn}{2p}$, vnde fit $\frac{nn(pp-qq)}{p}=2P$, et $\frac{nn}{p}=-2Q$. Quare altera aequatio hanc induit formam:

$$\frac{dx}{x}\sqrt{P}=-qd\Phi\,\text{sin.}\,\omega\sqrt{-Q},\ \text{seu}\ \frac{dx}{x}\sqrt{(pp-qq)}=-qd\Phi\,\text{sin.}\,\omega$$

vnde colligimus:

$$dp+dq\,\text{cos.}\,\omega-q\,d\omega\,\text{sin.}\,\omega=\frac{-q(p+q\,\text{cos.}\,\omega)\,d\Phi\,\text{sin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}.$$

Hinc singularum quantitatum variationes momentaneas ex differentialibus cognitis dP et dQ assignare poterimus.

1°. Aequatio $\frac{nn}{p}=-2Q$ dat $\frac{nndp}{pp}=2dQ$, ideoque $dp=\frac{2ppdQ}{nn}$.

2°. Ex aequatione $\frac{nn(pp-qq)}{p}=2P$ seu $p-\frac{qq}{p}=\frac{2P}{nn}$, sequitur $dp+\frac{qqdp}{pp}-\frac{2qdq}{p}=\frac{2dP}{nn}$, seu $qdq=\frac{dp(pp+qq)}{2p}-\frac{pdP}{nn}$ vnde fit $qdq=\frac{p(pp+qq)dQ-pdP}{nn}$.

3°. Hi valores in vltima aequatione substituti dabunt:

$$\frac{2ppdQ}{nn}+\frac{p(pp+qq)dQ\,\text{cos.}\,\omega}{nnq}-\frac{pdP\,\text{cos.}\,\omega}{nnq}-qd\omega\,\text{sin.}\,\omega=\frac{-q(p+q\,\text{cos.}\,\omega)d\Phi\,\text{sin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}$$

vnde

vnde fit:

$$qq\,d\omega\,\text{fin.}\omega = \frac{p\,dQ}{nn}(2pq + (pp+qq)\text{cof.}\,\omega) - \frac{p\,dP}{nn}\text{cof.}\,\omega$$
$$+ \frac{qq(p+q\,\text{cof.}\omega)\,d\Phi\,\text{fin.}\omega}{\surd(pp-qq)}.$$

4°. Cum autem fit $dx = -\frac{qxd\Phi\,\text{fin.}\omega}{\surd(pp-qq)}$ erit $dP = \frac{-a^3}{c}Mx^3d\Phi\,\text{fin.}\eta$ et $dQ = \frac{-a^3}{c}d\Phi(Mx\,\text{fin.}\eta - \frac{Nqx\,\text{fin.}\omega}{\surd(pp-qq)})$, qui valores in formulis inuentis fubftituti praebent:

$$dp = \frac{-2a^3ppxd\Phi}{nnc}(M\,\text{fin.}\eta - \frac{Nq\,\text{fin.}\omega}{\surd(pp-qq)})$$
$$dq = \frac{a^3pxd\Phi}{nnc}(M\,\text{fin.}\eta(2p\,\text{cof.}\omega - q\,\text{fin.}\omega^2) + \frac{N(pp+qq)\,\text{fin.}\omega}{\surd(pp-qq)})$$
$$d\omega = \frac{x\,d\Phi}{\surd(pp-qq)} - \frac{a^3pxd\Phi}{nncq}(M\,\text{fin.}\eta(2p+q\,\text{cof.}\omega)\,\text{fin.}\omega$$
$$- \frac{N(2pq+(pp+qq)\text{cof.}\omega)}{\surd(pp-qq)}).$$

Denique ob $2P = \frac{nn(pp-qq)}{p}$ eft $d\zeta = \frac{xxd\Phi\surd p}{n\surd(pp-qq)}$ exiftente $x = p + q\,\text{cof.}\,\omega$.

Reductio generalior binas praecedentes in fe complectens.

XVI. Statuamus $x = \frac{p+q\,\text{cof.}\omega}{1-r\,\text{cof.}\omega}$, vbi angulus ω ita fe habeat vt cafu fin. $\omega = 0$ euanefcat dx; feu vt diftantia fiat maxima cafu $\omega = 0$, minima vero cafu $\omega = 180°$.

Erit ergo $\frac{dx}{x} = \frac{dp + dq\,\text{cof.}\omega - q\,d\omega\,\text{fin.}\omega}{p+q\,\text{cof.}\omega} + \frac{dr\,\text{cof.}\omega - rd\omega\,\text{fin.}\omega}{1-r\,\text{cof.}\omega}$ feu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp + dq\,\text{cof.}\omega}{p+q\,\text{cof.}\omega} + \frac{dr\,\text{cof.}\omega}{1-r\,\text{cof.}\omega} - \frac{(pr+q)\,d\omega\,\text{fin.}\omega}{(p+q\,\text{cof.}\omega)(1-r\,\text{cof.}\omega)}.$$

Nunc fiat fubftitutio in expreffione $Qxx + nnx - P$ quae abibit in hanc formam:

$$\left\{\begin{array}{llll} +Qpp & +2Qpq\,\text{cos}.\omega & +Qqq\,\text{cos}.\omega^2 \\ +nnP & +nnq\,\text{cos}.\omega & -nnqr\,\text{cos}.\omega^2 \\ & -nnpr\,\text{cos}.\omega & -Prr\,\text{cos}.\omega^2 \\ -P & +2Pr\,\text{cos}.\omega & \end{array}\right\} : (1-r\,\text{cos}.\omega)^2$$

Hic primo statuatur $nn(pr-q) = 2Pr + 2Qpq$, deinde sit $Qpp + nnp - P = -Qqq + nnqr + Prr$; vt fiat

$$\sqrt{(Qxx + nnx - P)} = \frac{\sqrt{(Qpp + nnp - P)}}{1 - r\,\text{cos}.\omega}\,\text{sin}.\,\omega \text{ ideoque}$$

$$\frac{dx}{x}\sqrt{P} = \frac{-d\Phi\sqrt{(Qpp + nnp - P)}}{1 - r\,\text{cos}.\omega}\,\text{sin}.\,\omega,$$

vnde sequentes determinationes deducentur.

XVII. Quaeramus primo rationem inter P et Q quae ob $nn = \frac{2Pr + 2Qpq}{pr - q}$ ex aequatione

$$Qpp + nnp - P = -Qqq + nnqr + Prr$$

ita reperitur:

$$Q(p^3r - pqqr + ppq - q^3) = P(-pr + pr^3 - q + qrr)$$

quae per $pr + q$ diuisa dat

$$Q(pp - qq) = -P(1 - rr) \text{ seu } Q = \frac{-P(1 - rr)}{pp - qq}.$$

Hinc prior determinatio $nn(pr - q) = 2Pr + 2Qpq$ praebet

$$nn(pr - q) = 2Pr - \frac{2Ppq(1 - rr)}{pp - qq} = \frac{2P(ppr - qqr - pq + pqrr)}{pp - qq}$$

et per $pr - q$ diuidendo $nn = \frac{2P(p + qr)}{pp - qq}$, ita vt sit

$$\frac{pp - qq}{p + qr} = \frac{2P}{nn} \quad \text{et} \quad \frac{1 - rr}{p + qr} = \frac{-2Q}{nn}.$$

Deinde

Deinde loco nn iterum ſcribendo $\frac{2Pr+2Qpq}{pr-q}$ fit

$$Qpp+nnp-P=\frac{(pr+q)(P+Qpp)}{pr-q}=\frac{P(pr+q)^2}{pp-qq}$$

vnde concludimus:

$$\frac{dx}{x}=\frac{-(pr+q)d\Phi\,\text{ſin.}\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\omega)\surd(pp-qq)}.$$

At ob $x=\frac{p+q\,\text{coſ.}\omega}{1-r\,\text{coſ.}\omega}$, forma differentialis $\frac{dx}{x}$ ita exhiberi poteſt vt ſit

$$\frac{dx}{x}=\frac{dp+dq\,\text{coſ.}\omega}{x(1-r\,\text{coſ.}\omega)}+\frac{dr\,\text{coſ.}\omega}{1-r\,\text{coſ.}\omega}-\frac{(pr+q)d\omega\,\text{ſin.}\omega}{x(1-r\,\text{coſ.}\omega)^2}=\frac{-(pr+q)d\Phi\,\text{ſin.}\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\omega)\surd(pp-qq)}.$$

Quocirca erit

$$\frac{(pr+q)d\omega\,\text{ſin.}\omega}{1-r\,\text{coſ.}\omega}=\frac{(pr+q)x\,d\Phi\,\text{ſin.}\omega}{\surd(pp-qq)}+dp+dq\,\text{coſ.}\omega+x\,dr\,\text{coſ.}\omega.$$

XVIII. Quodſi iam formulas ſuperiores ad P et Q reductas differentiemus, ad ſequentes expreſſiones perueniemus:

$$+dp(pp+2pqr+qq)-dq(2pq+ppr+qqr)-qdr(pp-qq)=\frac{2(p+qr)^2dP}{nn}$$

$$dp(1-rr)+rdq(1-rr)+qdr(1+rr)+2prdr=\frac{2(p+qr)^2dQ}{nn}$$

vnde cum differentialia dP et dQ dentur, bina tantum trium elementorum dp, dq et dr definiuntur, tertio quaſi arbitrio noſtro relicto. Verum ob $dx=\frac{-(pr+q)x\,d\Phi\,\text{ſin.}\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\omega)\surd(pp-qq)}$

erit: $dP=\frac{-a^3x\,d\Phi}{c}.\,Mxx\,\text{ſin.}\eta$ et

$$dQ=\frac{-a^3x\,d\Phi}{c}\left(M\,\text{ſin.}\eta-\frac{N(pr+q)\,\text{ſin.}\omega}{(1-r\,\text{coſ.}\omega)\surd(pp-qq)}\right).$$

Vel

Vel etiam angulum ω pro lubitu aſſumere licet, ac tum binis illis aequationibus hanc tertiam iungendo $dp + dq \,\mathrm{cof.}\,\omega + x\,dr \,\mathrm{cof.}\,\omega = \frac{(pr+q)\,d\omega\,\mathrm{fin.}\,\omega}{1 - r\,\mathrm{cof.}\,\omega} - \frac{(pr+q)\,x\,d\Phi\,\mathrm{fin.}\,\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}$ omnia tria elementa dp, dq et dr definiri poterunt. Denique ob $2\,P = \frac{nn(pp-qq)}{p+qr}$ erit $d\zeta = \frac{xx\,d\Phi\sqrt{(p+qr)}}{n\sqrt{(pp-qq)}}$.

XIX. Mirum videbitur, quod in hac reductione angulus ω arbitrio noſtro relinquatur, cum certe poſitio et motus lineae abſidum minime a noſtra voluntate pendeant. Verum hic perpendi oportet, eatenus tantum diſtantiam $v = cx$ fieri maximam vel minimam facto $\mathrm{fin.}\,\omega = 0$, quatenus idem angulus ω non in reliquas quantitates ita ingreditur, vt in valore pro $\frac{dx}{x}$ inuento factor $\mathrm{fin.}\,\omega$ iterum tollatur. Quodſi exempli cauſa reperiretur $\sqrt{(pp-qq)} = s\,\mathrm{fin.}\,\omega$, minime amplius concludere liceret poſito $\mathrm{fin.}\,\omega = 0$, formulam $\frac{dx}{x\,d\Phi}$ eſſe euanituram. Quocirca angulus ω neutiquam inter quantitates aſſumtas admitti poteſt, niſi forte conſtet a cuiusmodi angulo poſitio lineae abſidum pendeat.

XX. Antequam hunc caſum deſeram, binas illas aequationes differentiales pro elementis dp, dq et dr inuentas diligentius examinaſſe iuuabit. Ac ſi inde primo elementum dp elidatur reperitur:

$$\frac{dq(1-rr)(pr+q)}{p+qr} + dr(pr+q) = \frac{-(1-rr)\,dP + (pp+qq+2pqr)\,dQ}{nn}$$

ſin autem inde elementum dq exterminetur, prodit

$$\frac{dp(1-rr)(pr+q)}{p+qr} + \frac{dr(pr+q)^2}{p+qr} = \frac{r(1-rr)\,dP + (2pq+ppr+qqr)\,dQ}{nn}$$

Eiecto

Eiecto autem elemento dr obtinetur

$$dp(pr+q)-\frac{dq(pr+q)^2}{p+qr}=\frac{(2pr+q+qrr)dP+q(pp-qq)dQ}{nn}.$$

Quod si iam harum binas quasque in locum illarum substituamus, calculus haud parum fiet simplicior hae vero videntur commodissimae:

$$dp-\frac{dq(pr+q)}{p+qr}=\frac{(2pr+q+qrr)dP+q(pp-qq)dQ}{nn(pr+q)}$$

$$dr+\frac{dq(1-rr)}{p+qr}=-\frac{(1-rr)dP+(pp+qq+2pqr)dQ}{nn(pr+q)}.$$

Vnde assumto q reliqua elementa facile determinantur sin autem angulus ω vt cognitus spectetur, hinc valores pro dp et dr in postrema aequatione differentiali supra data (XVIII.) substituti determinationem elementi dq suppeditabunt. Peruenitur autem ad hanc aequationem:

$$\frac{dq(pr+q)\sin.\omega^2}{p+qr}=(pr+q)\sin.\omega\left(d\omega-\frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\surd(pp-qq)}\right)$$
$$-\frac{dP}{nn(pr+q)}\big(2pr+q+qrr-(p+qr)(1+rr)\cos.\omega$$
$$-q(1-rr)\cos.\omega^2\big)$$
$$-\frac{dQ}{nn(pr+q)}\big(q(pp-qq)+(p+qr)(pp+qq)\cos.\omega$$
$$+q(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2\big).$$

XXI. Substituendo denique hic pro dP et dQ valores supra indicatos (XVIII.)

$$\frac{dq\sin.\omega}{p+qr}=d\omega-\frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\surd(pp-qq)}$$
$$+\frac{a^3Mxd\Phi\sin.\eta\sin.\omega}{nnc(pr+q)(1-r\cos.\omega)^2}\big(2pp-qq+pqr+(p+qr)(3q-pr)\cos.\omega$$
$$-q(pr-q+2qrr)\cos.\omega^2\big)$$
$$-\frac{a^3Nxd\Phi}{nnc(pr+q)(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{q(pp-qq)+(p+qr)(pp+qq)\cos.\omega+q(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2}{\surd(pp-qq)}\right)$$

 si qui-ſi quidem nunc totam aequationem per $(pr+q)\sin\omega$ diuidere licuit; commode enim vſu venit, vt membrum elemento $M \sin.\eta$ affectum factorem $1-\cos.\omega^2 = \sin.\omega^2$ ſortiretur.

Quodſi iam hic ponatur $q=0$, reductio reſultat prior ſcribendo q loco r, ſin autem ponatur $r=0$, reductio habetur poſterior, vnde intelligitur quanto latius pateat haec reductio generalior ambas praecedentes in ſe complectens. Loco dP et dQ etiam in praecedentibus formulis ſubſtituantur valores ac reperietur:

$$dp = \frac{dq(pr+q)}{p+qr} - \frac{a^3 M x\, d\Phi \sin.\eta}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}\left(2pp-qq+pqr+2q(p+qr)\cos.\omega + q(pr+q)\cos.\omega^2\right)$$

$$+ \frac{a^3 N x\, d\Phi \sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)} \cdot q\sqrt{(pp-qq)}$$

$$dr = \frac{-dq(1-rr)}{p+qr} - \frac{a^3 M x\, d\Phi \sin.\eta}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}\left(pr+q-2(p+qr)\cos.\omega + (pr-q+2qrr)\cos.\omega^2\right)$$

$$+ \frac{a^3 N x\, d\Phi \sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{pp+qq+2pqr}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$

et loco dq valorem ſuperiorem ſubſtituendo:

$$\frac{dp\sin.\omega}{p+qr} = \frac{pr+q}{p+qr}\left(d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right.$$

$$- \frac{a^3 M x\, d\Phi \sin.\eta \sin.\omega \cos.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}(pr-q+2qr\cos.\omega) - \frac{a^3 N x\, d\Phi \cos.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)}\left(\frac{pp+qq+2pq\cos.\omega}{\sqrt{(pp-qq)}}\right.$$

$$\frac{dr(pr+q)\sin.\omega}{p+qr} = -\frac{(pr+q)(1-rr)}{p+qr}\left(d\omega - \frac{d\Phi(p+q\cos.\omega)}{\sqrt{(pp-qq)}}\right)$$

$$- \frac{a^3 M x\, d\Phi \sin.\eta \sin.\omega}{nnc(1-r\cos.\omega)^2}\left(2p+qr-prr+(q-3pr-3qrr+pr^3)\cos.\omega + r(pr-q+2qrr)\cos.\omega^2\right)$$

$+$

$$+\frac{a^3 N x d \mathfrak{C}}{nac(1-r\cos.\omega)\sqrt{(pp-qq)}}(ppr+2pq+qqr+(1-rr)(pp+qq)\cos.\omega$$
$$-r(pp+qq+2pqr)\cos.\omega^2).$$

XXII. *Si* excentricitas orbitae satis fuerit notabilis, commodissime reductione prima vtemur, quia ibi aberrationes a motu regulari in ellipsi facto definiuntur. Sin autem excentricitas fuerit quam minima vel adeo nulla, neque primam reductionem neque secundam in vsum vocare licebit, quandoquidem anomaliae ω tum ne locus quidem relinquitur; ac spectata quantitate q saltem vt minima, quia ea denominatorem formulae pro $d\Phi - d\omega$ inventae afficit, motus lineae absidum nimis fit vagus et incertus. Neque etiam adhuc perspicio, quomodo postrema reductio sumendo $\omega = \eta$ in hac investigatione vtilitatem afferre posset, tam propter multitudinem, quam complicationem formularum, quas resolui oporteret. Nihilo tamen minus casus quo excentricitas plane euanesceret sine dubio pro simplicissimo esset habendus; ex quo in eius resolutione merito omne studium collocandum videtur quo his difficultatibus superatis deinceps veri motus lunaris inuestigatio feliciori successu suscipi, neque tantum ad vsum practicum satis conuenienter, sed etiam multo accuratius absolui queat. Neque autem ad hunc casum euoluendum alia via aptior videtur, quam vt ad ipsas aequationes differentio-differentiales reuertamur indeque approximationes idoneas petamus.

Inuestigatio motus si Luna in ecliptica sine vlla excentricitate sol autem vniformiter moueretur.

XXIII. Ponamus in ipsis aequationibus differentio differentialibus $v = cx$, et habebimus.

$$1^\circ.\ 2dxd\Phi + xdd\Phi + \frac{a^3}{c} M d\zeta^2 \,\text{sin.}\,\eta = 0$$

$$2^\circ.\ ddx - xd\Phi^2 + \frac{nn}{xx} d\zeta^2 + \frac{a^3}{c} N d\zeta^2 = 0$$

et quia motus solis assumitur vniformis erit $u = a$ et $\theta = \zeta$ ideoque $\Phi = \zeta + \eta$, hinc

$$\frac{a^3}{c} M = 3x\,\text{cos.}\,\eta - \frac{3cxx}{2a}(1 - 5\,\text{cos.}\,\eta^2) - \frac{5ccx^3}{2aa}(3\,\text{cos.}\,\eta - 7\,\text{cos.}\,\eta^3)$$

$$\frac{a^3}{c} N = x(1 - 3\,\text{cos.}\,\eta^2) + \frac{3cxx}{2a}(3\,\text{cos.}\,\eta - 5\,\text{cos.}\,\eta^3) - \frac{ccx^3}{2aa}(3 - 30\,\text{cos.}\,\eta^2 + 35\,\text{cos.}\,\eta^4)$$

vnde binae nostrae aequationes erunt

$$1^\circ. \left\{ \begin{array}{l} \frac{2dxd\Phi}{d\zeta^2} + \frac{xdd\Phi}{d\zeta^2} \\ + 3x\,\text{sin.}\,\eta\,\text{cos.}\,\eta - \frac{3c}{2a}xx\,\text{sin.}\,\eta(1 - 5\,\text{cos.}\,\eta^2) - \frac{5cc}{2aa}x^3\,\text{sin.}\,\eta(3\,\text{cos.}\,\eta - 7\,\text{cos.}\,\eta^3) \end{array} \right\} = 0$$

$$2^\circ. \left\{ \begin{array}{l} \frac{ddx}{d\zeta^2} - \frac{xd\Phi^2}{d\zeta^2} + \frac{nn}{xx} \\ + x(1 - 3\,\text{cos.}\,\eta^2) + \frac{3cxx}{2a}(3\,\text{cos.}\,\eta - 5\,\text{cos.}\,\eta^3) - \frac{cc}{2aa}x^3(3 - 30\,\text{cos.}\,\eta^2 + 35\,\text{cos.}\,\eta^4) \end{array} \right\} = 0$$

vbi cum $\frac{c}{a}$ sit quantitas quam minima, has aequationes in partes sectas concipere licet, quae sequentibus multo sint maiores, ad quem ordinem etiam approximationem accommodari conuenit.

XXIV. Si omnis perturbatio abesset, foret ob excentricitatem euanescentem, vti vidimus, $x = 1$ et $\frac{d\Phi}{d\zeta} = n$ hincque $\frac{d\eta}{d\zeta} = n - 1$. Nunc perturbatione accedente statuamus:

$$x = 1 + P + Q + R \text{ et } \frac{d\Phi}{d\zeta} = n + p + q + r$$

hincque $\frac{d\eta}{d\zeta} = n - 1 + p + q + r$, vbi P, Q, R et p, q, r series maxime decrescentes referant, cum seriebus superioribus ex perturbatione natis comparandas ac has ipsas quantitates tanquam functiones anguli η spectemus, siquidem nouimus omnes inaequalitates ab hoc solo angulo pendere. Erit ergo $dx = dP + dQ + dR$ et per $\frac{d\eta}{d\zeta} = (n-1) + p + q + r$ multiplicando:

$$\frac{dx}{d\zeta} = \left\{\begin{array}{r}(n-1)dP + (n-1)dQ + (n-1)dR \\ + p\,dP \;+\; p\,dQ \\ + q\,dP\end{array}\right\} : d\eta$$

quae forma differentiata sumto iam elemento $d\eta$ constante dabit

$$\frac{ddx}{d\zeta} = \left\{\begin{array}{r}(n-1)ddP + (n-1)ddQ + (n-1)ddR \\ + p\,ddP \;+\; p\,ddQ \\ + dP\,dp + dp\,dQ \\ + q\,ddP \\ + dq\,dP\end{array}\right\} : d\eta$$

multiplicetur denuo per $\frac{d\eta}{d\zeta}$, prodibitque

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} = \left\{\begin{array}{r} (n-1)^2 ddP + (n-1)^2 ddQ + (n-1)^2 ddR \\ + 2(n-1)pddP + 2(n-1)pddQ \\ + (n-1)dpdP + (n-1)dpdQ \\ + 2(n-1)qddP \\ + (n-1)dqdP \\ + ppddP \\ + pdpdP \end{array}\right\} : d\eta^2$$

simili modo cum sit

$\frac{dd\Phi}{d\zeta} = dp + dq + dr$ per $\frac{d\eta}{d\zeta}$ multiplicando erit

$$\frac{dd\Phi}{d\zeta^2} = \left\{\begin{array}{r} (n-1)dp + (n-1)dq + (n-1)dr \\ + pdp \quad + pdq \\ + qdp \end{array}\right\} : d\eta$$

et $\frac{d\Phi^2}{d\zeta^2} = \begin{array}{r} nn + 2np + 2nq + 2nr \\ + pp + 2pq \end{array}$ ac tandem

$$\frac{1}{xx} = \begin{array}{l} 1 - 2P - 2Q - 2R \\ \quad + 3PP + 6PQ \\ \quad - 4P^3. \end{array}$$

XXV. Hos igitur valores in aequationes nostras introductos secundum ordines stabilitos distribuamus, vbi quidem elementum $d\eta$, quippe quod sponte intelligitur, omittamus.

* Aequatio Prima

II.	III.	IV.
$+2n(n-1)dP$	$+2n(n-1)dQ$	$+2n(n-1)dR$
$+(n-1)dp$	$+2npdP$	$+2npdQ$
$+3\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\eta$	$+2(n-1)pdP$	$+2nqdP$
	$+(n-1)dq$	$+2(n-1)pdQ$
	$+pdp$	$+2ppdP$
	$+(n-1)Pdp$	$+2(n-1)qdP$
	$+3P\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\eta$	$+(n-1)dr$
	$-\frac{3c}{2a}\,\text{fin.}\,\eta(1-5\,\text{cof.}\,\eta^2)$	$+pdq$
		$+qdp$
		$+(n-1)Pdq$
		$+Ppdp$
		$+(n-1)Qdp$
		$+3Q\,\text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\eta$
		$-\frac{3c}{a}P\,\text{fin.}\,\eta(1-5\,\text{cof.}\,\eta^2)$
		$-\frac{5cc}{2aa}\,\text{fin.}\,\eta(3\,\text{cof.}\,\eta-7\,\text{cof.}\,\eta^3)$

Hic fcilicet ordo primus deeft, quia fublata perturbatione primae aequationis omnia membra fponte euanefcunt.

Pro

* Huius aequationis nonnifi integrale particulare hic quaeritur, quod fcilicet hypothefi affumtae, qua excentricitas euanefcit, conueniat, et manifefto huiusmodi habet formam $P = A + B\,\text{cof.}\,\eta^2$. Integrale autem completum foret

$$P = A + B\,\text{cof.}\,\eta^2 + M\,\text{fin.}\,\tfrac{n}{n-1}\,\eta + N\,\text{cof.}\,\tfrac{n}{n-1}\,\eta$$

vbi M et N funt conftantes arbitrariae, quibus conditio excentricitatis continetur. Id quod peculiarem euolutionem meretur.

Pro ſequentibus autem ordinibus terminos ad quemuis pertinentes ſeorſim nihilo aequari oportet.

XXVI. Aequatio altera ſequenti modo in membra diſtribuitur.

Aequatio ſecunda.

I.	II.	III.	IV.
$-nn$	$(n-1)^2 ddP$	$+(n-1)^2 ddQ$	$+(n-1)^2 ddR$
$+nn$	$-2np$	$+2(n-1)pddP$	$+2(n-1)pddQ$
	$-3nnP$	$+(n-1)dpdP$	$+2(n-1)qddP$
	$+(1-3\cos.\eta^2)$	$-2nq$	$+(n-1)dpdQ$
		$-pp$	$+(n-1)dqdP$
		$-2nPp$	$+ppddP$
		$-3nnQ$	$+pdpdP$
		$+3nnPP$	$-2nr$
		$+P(1-3\cos.\eta^2)$	$-2pq$
		$+\frac{3c}{2a}(3\cos.\eta-5\cos.\eta^3)$	$-2nPq$
			$-Ppp$
			$-2nQq$
			$-3nnR$
			$+6nnPQ$
			$-4nnP^3$
			$+Q(1-3\cos.\eta^2)$
			$+\frac{3c}{a}P(3\cos.\eta-5\cos.\eta^3)$
			$-\frac{cc}{2aa}(3-30\cos.\eta^2+35\cos.\eta^4)$

vbi membrum primum ſponte ſe tollit.

XXVII. Secundus ordo ex vtraque aequatione quantitatibus ſecundo loco aſſumtis definiendis inſer-

vit,

vit, quae ſunt P et p, ideoque ex his duabus aequationibus determinandae.

$$1^\circ.\ 2n(n-1)dP + (n-1)dp + 3d\eta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta = 0$$

$$2^\circ.\ (n-1)^2 ddP - 2np\,d\eta^2 - 3nnP\,d\eta^2 + d\eta^2(1 - 3\,\text{coſ.}\,\eta^2) = 0.$$

Prior autem integrata dat $2n(n-1)P + (n-1)p = \Delta + \frac{3}{2}\text{coſ.}\,\eta^2$ ſeu $p = -2nP + \frac{\Delta}{n-1} + \frac{3\,\text{coſ.}\,\eta^2}{2(n-1)}$, qui valor in altera ſubſtitutus praebet:

$$(n-1)^2 ddP + nnP\,d\eta^2 - \frac{2n}{n-1}\Delta\,d\eta^2 - \frac{3n\,d\eta^2\,\text{coſ.}\,\eta^2}{n-1} + d\eta^2(1 - 3\,\text{coſ.}\,\eta^2) = 0$$

$$\text{ſeu } (n-1)^2 ddP + nnP\,d\eta^2 - \frac{2n}{n-1}\Delta\,d\eta^2 - \frac{3(2n-1)}{n-1}d\eta^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 + d\eta^2 = 0.$$

Statuamus, quandoquidem forma integralis ſponte patet $P = A + B\,\text{coſ.}\,\eta^2$, ſi eſſet $nn = 4(n-1)^2$ poni deberet $P = A + B\,\text{coſ.}\,\eta^2 + C\eta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta$, erit $\frac{dP}{d\eta} = -2B\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta$ et $\frac{ddP}{d\eta^2} = -2B\,\text{coſ.}\,\eta^2 + 2B\,\text{ſin.}\,\eta^2 = 2B - 4B\,\text{coſ.}\,\eta^2$ et facta ſubſtitutione oritur:

$$\left.\begin{array}{l} +2(n-1)^2 B + nnA - \frac{2n}{n-1}\Delta + 1 \\ -4(n-1)^2 B\,\text{coſ.}\,\eta^2 + nnB\,\text{coſ.}\,\eta^2 - \frac{3(2n-1)}{n-1}\text{coſ.}\,\eta^2 \end{array}\right\} = 0$$

hincque $B = \frac{-3(2n-1)}{(n-1)(n-2)(3n-2)}$ et $\frac{2n}{n-1}\Delta = 1 + nnA + 2(n-1)^2 B$

$$\begin{aligned} \text{et } p = & -2nA - 2nB\,\text{coſ.}\,\eta^2 \\ & + \frac{\Delta}{2n} \quad + \frac{3}{2(n-1)}\text{coſ}\,\eta^2. \\ & + \tfrac{1}{2}nA \\ & + \frac{(n-1)^2}{n}B. \end{aligned}$$

Quare ſi ponamus:

$$P = A + B\,\text{coſ.}\,\eta^2 \quad \text{et } p = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,\eta^2$$

 quan-

quantitas A arbitrio nostro relinquitur. eritque

$$B = \frac{-3(2n-1)}{(n-1)(n-2)(3n-2)} \text{ atque}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2n} - \tfrac{3}{2}nA + \frac{(n-1)^2}{n}B \text{ et } \mathfrak{B} = \frac{3}{2(n-1)} - 2nB.$$

Quantitas A ideo manet indefinita, vt vel distantia media vel motus medius ad veritatem definiri possit, ob perturbationem enim, si c conueniat cum distantia media n non amplius cum ratione $\frac{d\Phi}{d\zeta}$ congruit et vic ssim.

XXVIII. Ad quantitates tertii ordinis Q et q determinandas, has habemus aequationes:

$$2n(n-1)dQ + (n-1)dq + 2(2n-1)pdP + pdp + (n-1)Pdp$$
$$+ 3P\sin.\eta\cos.\eta - \tfrac{3c}{2a}\sin.\eta(1-5\cos.\eta^2) = 0$$

$$(n-1)^2 ddQ - 2nq - 3nnQ + 2(n-1)pddP + (n-1)dpdP - pp - 2nPp$$
$$+ 3nnPP + P(1-3\cos.\eta^2) + \tfrac{3c}{2a}(3\cos.\eta - 5\cos.\eta^3) = 0.$$

Cum autem sit $P = A + B\cos.\eta^2$ et $p = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\eta^2$ erit $dP = -2B\sin.\eta\cos.\eta$ et $dp = -2\mathfrak{B}\sin.\eta\cos.\eta$

hi valores in prima aequatione substituti dant

$$\frac{2n(n-1)dQ + (n-1)dq}{d\eta} \begin{array}{l} -4(2n-1)\mathfrak{A}B \\ -2\mathfrak{A}\mathfrak{B} \\ -2(n-1)\mathfrak{B}A \\ +\;\;3A \end{array} \sin.\eta\cos.\eta \begin{array}{l} -4(2n-1)\mathfrak{B}B \\ -2\mathfrak{B}\mathfrak{B} \\ -2(n-1)\mathfrak{B}B \\ +\;\;3B \end{array} \sin.\eta\cos.\eta^3 - \tfrac{3c}{2a}\sin\eta(1-5\cos.\eta^2) = 0$$

vnde

vnde per integrationem elicitur

$$2n(n-1)Q+(n-1)q+\left(2(2n-1)\mathfrak{A}B+\mathfrak{A}B+(n-1)\mathfrak{B}A-\tfrac{3}{2}A\right)\cos.\eta^2 + \tfrac{3c}{2a}\cos.\eta - \tfrac{5c}{2a}\cos.\eta^3 = \Delta + \left((2n-1)\mathfrak{B}B+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\tfrac{1}{2}(n-1)\mathfrak{B}B-\tfrac{3}{4}B\right)\cos.\eta^4$$

fit breuitatis gratia

$$2(2n-1)\mathfrak{A}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}+(n-1)\mathfrak{B}A-\tfrac{3}{2}A=\alpha$$
$$\tfrac{1}{2}(5n-3)\mathfrak{B}B+\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B}-\tfrac{3}{4}B=\beta$$

erit $q=-2nQ+\frac{\Delta}{n-1}-\frac{\alpha}{n-1}\cos.\eta^2-\frac{\beta}{n-1}\cos.\eta^4-\frac{3c}{2a(n-1)}\cos.\eta + \frac{5c}{2a(n-1)}\cos.\eta^3.$

Tum pro altera aequatione ob $ddP=2B-4B\cos.\eta^2$ est

$$\begin{array}{l|llll|l}
2(n-1)p\,ddP & 4(n-1)\mathfrak{A}B & -8(n-1)\mathfrak{A}B\cos.\eta^2 & & -8(n-1)\mathfrak{B}B\cos.\eta^4 & \\
+(n-1)dp\,dP & & +4(n-1)\mathfrak{B}B & & & \\
 & & +4(n-1)\mathfrak{B}B & & -4(n-1)\mathfrak{B}B & \\
-pp & -\mathfrak{A}\mathfrak{A} & -2\mathfrak{A}\mathfrak{B} & & -\mathfrak{B}\mathfrak{B} & \\
-2nPp & -2n\mathfrak{A}A & -2n\mathfrak{A}B & & -2nB\mathfrak{B} & \\
+3nnPP & & -2n\mathfrak{B}A & & & \\
 & +3nnAA & +6nnAB & & +3nnBB & \\
+P(1-3\cos.\eta^2) & +A & -3A & & -3B & \\
 & & +B & & & +\frac{9c}{2a}\cos.\eta-\frac{15c}{2a}\cos.\eta^3 \\
\hline
+\frac{(n-1)^2ddQ}{d\eta^2} & -\frac{2n\Delta}{n-1} & +\frac{2n\alpha}{n-1} & & +\frac{2n\beta}{n-1} & +\frac{3nc}{a(n-1)}\cos.\eta-\frac{5nc}{a(n-1)}\cos.\eta^3 \\
+nnQ & & & & &
\end{array}$$

XXIX. Pro resolutione huius aequationis poni oportere manifestum est:

$$Q=C+D\cos.\eta^2+E\cos.\eta^4+F\cos.\eta+G\cos.\eta^3$$

eritque
$$\frac{ddQ}{d\eta^2}=\begin{array}{llll}2D-4D\cos.\eta^2 & -16E\cos.\eta^4 & -F\cos.\eta & -9G\cos.\eta^3\\ +12E & & +6G & \end{array}$$

 Hinc

Hinc istae nascuntur aequationes:

$$0 = nnC + 2(n-1)^2 D + 4(n-1)\mathfrak{A}B - \mathfrak{A}\mathfrak{A} - 2n\mathfrak{A}A + 3nnAA + A - \frac{2n\Delta}{n-1}$$

$$0 = 12(n-1)^2 E - (n-2)(3n-2)D - 2(5n-4)\mathfrak{A}B + 8(n-1)\mathfrak{B}B - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2n\mathfrak{B}A + 6nnAB - 3A + B + \frac{2n\alpha}{n-1}$$

$$0 = -(3n-4)(5n-4)E - 12(n-1)\mathfrak{B}B - \mathfrak{B}\mathfrak{B} - 2n\mathfrak{B}B + 3nnBB - 3B + \frac{2n\mathfrak{E}}{n-1}$$

$$0 = 6(n-1)^2 G + (2n-1)F + \frac{3(5n-3)c}{2(n-1)\alpha}$$

$$0 = -(2n-3)(4n-3)G - \frac{5(5n-3)c}{2(n-1)\alpha}$$

vnde ordine retrogrado litterae G, F, E et D determinantur: tum vero ex prima valor ipsius Δ quaeratur, vt C maneat quantitas indefinita, ac tum etiam valor litterae q innotescet per quantitates iam definitas A, B, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, ex quibus α et $\mathfrak{E}$ resultant. Si enim ponatur $q = \mathfrak{C} + \mathfrak{D}\cos.\eta^2 + \mathfrak{E}\cos.\eta^4 + \mathfrak{F}\cos.\eta + \mathfrak{G}\cos.\eta^3$ erit

$$\mathfrak{C} = -2nC + \frac{\Delta}{n-1}$$

$$\mathfrak{D} = -2nD - \frac{\alpha}{n-1}$$

$$\mathfrak{E} = -2nE - \frac{\mathfrak{E}}{n-1}$$

$$\mathfrak{F} = -2nF - \frac{3c}{2(n-1)\alpha}$$

$$\mathfrak{G} = -2nG + \frac{5c}{2(n-1)\alpha}$$

XXX. Simili modo perturbationes sequentium ordinum ex aequationibus supra datis colligi posse per

per ſe eſt manifeſtum. Calculus quidem haud parum ſit moleſtus ac taedioſus, verum ſufficit methodum eum euoluendi hic dilucide expoſuiſſe, ita vt nulla difficultas ſit metuenda praeter calculi prolixitatem. Interim ſequentia membra ita fiunt parva, vt pro vſu aſtronomico facile reiici queant. Inventis autem his omnibus litteris binae aequationes quibus iam motus lunae continetur ita ſe habent

$$x = 1 + A + C + (B + D)\cos.\eta^2 + E\cos.\eta^4 + F\cos.\eta + G\cos.\eta^3$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = n + \mathfrak{A} + \mathfrak{C} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{D})\cos.\eta^2 + \mathfrak{E}\cos.\eta^4 + \mathfrak{F}\cos.\eta + \mathfrak{G}\cos.\eta^3$$

exiſtente $d\Phi = d\eta + d\zeta$, et $\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{d\Phi}{d\zeta} - 1$; vbi manifeſtum eſt conſtantem A nihilo aequalem poni poſſe, dummodo C in calculo retineatur, vt ratio media $d\Phi : d\zeta$ ob ſequentes terminos aliquantillum a vero valore n depulſa corrigi et ad veritatem reduci poſſit modo infra exponendo.

Operae autem pretium erit hos ſingulos terminos euoluere ſumendo pro n valorem per obſervationes definitum, quia eaedem inaequalitates; etiamſi ad caſum hunc maxime particularem pertinentes, tamen in vero quoque lunae motu locum inueniunt.

XXXI. Sumamus ergo $A = 0$, et cum motum lunae medium cum ſolis motu comparando ſit $n = 13,25586$, calculus pro determinatione harum inaequalitatum ita ſe habebit:

$n = 13,25586$
$n-1 = 12,25586$
$2n-1 = 25,51172$
$3n-2 = 37,76758$
$n-2 = 11,25586$

$B = -0,0146899$
$\frac{3}{2(n-1)} = +0,1223904$
$2nB = -0,3894546$
$\mathfrak{B} = +0,5118450$
$\frac{1}{2n} = +0,0377191$
$\frac{(n-1)^2}{n}B = -0,1664559$
$\mathfrak{A} = -0,1287368$

$l(2n-1) = 1,4067394$
$l3 = 0,4771213$
$l3(2n-1) = 1,8838607$
$l(n-1) = 1,0883440$
$l(n-2) = 1,0513787$
$l(3n-2) = 1,5771191$
$3,7168418$
$l-B = 8,1670189$
$l\frac{3}{2} = 0,1760913$
$l(n-1) = 1,0883440$
$l\frac{1}{2(n-1)} = 9,0877473$
$l2 = 0,3010300$
$ln = 1,1224079$
$l2n = 1,4234379$
$l-2nB = 9,5904568$
$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$l\frac{(n-1)^2}{n} = 1,0542801$
$l-\frac{(n-1)^2}{n}B = 9,2212990$

XXXII. Nunc pro litteris α et β calculus ita se habebit:

$2(n-1)\mathfrak{A}B = +0,096492$
$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -0,065893$
$\alpha = +0,030599$
$\frac{1}{2}(5n-3) = 31,63965$
$\frac{1}{2}(5n-3)\mathfrak{B}B = -0,237897$
$\frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{B} = +0,130993$
$-0,106904$

$l\mathfrak{A} = -9,1097027$
$lB = -8,1670189$
$l2 = 0,3010300$
$l(2n-1) = 1,4067394$
$+8,9844910$
$l\mathfrak{A} = -9,1097027$
$l\mathfrak{B} = +9,7091385$
$-8,8188412$
$-\frac{3}{4}B$

$-\frac{3}{4}B = +0,011018$	$l\frac{1}{2}(5n-3) = 1,5002316$
$\mathfrak{E} = -0,095886$	$l\mathfrak{B} = +9,7091385$
	$lB = -8,1670189$
	$-9,3763890$
	$l\mathfrak{B}\mathfrak{B} = 9,4182770$
	$l2 = 0,3010300$
	$9,1172470$

Hinc primo quaeratur littera E.

$-12(n-1)\mathfrak{B}B = +1,105820$	$l\mathfrak{B}B = -7,8761574$
$-2n\mathfrak{B}B = +0,199340$	$l(n-1) = 1,0883440$
$+1,305160$	$l12 = 1,0791812$
$-\mathfrak{B}\mathfrak{B} = -0,261986$	$-0,0436826$
$+1,043174$	$l2n = 1,4234379$
$+3nnBB = +0,113756$	$-9,2995953$
$-3B = +0,044069$	$lBB = 6,3340378$
$+1,200999$	$lnn = 2,2448158$
$+\frac{2n\mathfrak{E}}{n-1} = -0,207419$	$l3 = 0,4771213$
$(3n-4)(5n-4)E = +0,993580$	$+9,0559749$
ergo $E = +0,00044603$	$l\mathfrak{E} = -8,9817552$
	$l2n = 1,4234379$
	$-0,4051931$
	$l(n-1) = 1,0883440$
	$-9,3168491$
	$l0,99358 = 9,9972028$
	$l(3n-4) = 1,5534895$
	$l(5n-4) = 1,7943437$
	$3,3478332$
	$lE = +6,6493696$

XXXIII.

XXXIII. Porro pro littera D.

	$lE = +6,6493696$
$12(n-1)^2E = +0,803968$	$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$-2(5n-4)\mathfrak{A}B = -0,235557$	$l\,12 = 1,0791812$
$+0,568411$	$+9,9052388$
$+8(n-1)\mathfrak{B}B = -0,737223$	$l\,2\mathfrak{A}B = +7,5777516$
$-0,168812$	$l(5n-4) = 1,7943437$
$-2\mathfrak{A}\mathfrak{B} = +0,131786$	$+9,3720953$
$-0,037026$	$l\alpha = +8,4857072$
$B = -0,014690$	$l\frac{2n}{n-1} = 0,3350939$
$-0,051716$	$+8,8208011$
$+\frac{2n\alpha}{n-1} = +0,066192$	$l\,0,014476 = 8,1606486$
$(n-2)(3n-2)D = +0,014476$	$l(n-2)(3n-2) = 2,6284978$
Ergo $D = +0,000034052$	$lD = 5,5321508$
$2(n-1)^2D = +0,010230$	$l(n-1)^2 = 2,1766880$
$+4(n-1)\mathfrak{A}B = +0,192984$	$l\,2 = 0,3010300$
$+0,203214$	$8,0098688$
$-\mathfrak{A}\mathfrak{A} = -0,016573$	$l\mathfrak{A}\mathfrak{A} = +8,2194054$
$+0,186641$	$l\ldots = 9,2710070$
$nnC - \frac{2n\Delta}{n-1} = +0,186641$	$l\,2n = 1,4234379$
$\frac{\Delta}{n-1} = 0,007040 + \frac{1}{2}nC$	$7,8475691$
Ergo $\mathfrak{C} = 0,007040 - \frac{3}{2}nC$	$lD = 5,5321508$
$-2nD = -0,0009028$	$l\,2nD = +6,9555887$
$-\frac{\alpha}{n-1} = -0,0024970$	$l\alpha = +8,4857072$
Ergo $\mathfrak{D} = -0,0033998$	$l(n-1) = 1,0883440$
$-2nE = -0,0118250$	$+7,3973632$
$-\frac{\epsilon}{n-1} = +0,0078237$	$lE = +6,6493696$
	$l\,2n = 1,4234379$
	$+8,0728075$

Ergo

Ergo $\mathfrak{E} = -0{,}0040013$

$(2n-3)(4n-3)G = -12{,}90796\,\frac{c}{a}$

$G = -0{,}010975.\,\frac{c}{a}$

$+6(n-1)^2 G = -9{,}89097.\,\frac{c}{a}$

$\frac{3(5n-3)c}{2(n-1)a} = +7{,}74478.\,\frac{c}{a}$

$(2n-1)F = +2{,}14619.\,\frac{c}{a}$

Ergo $F = +0{,}084126.\,\frac{c}{a}$

$-2nF = -2{,}23032.\,\frac{c}{a}$

$-\frac{3c}{2(n-1)a} = -0{,}122390.\,\frac{c}{a}$

$\mathfrak{F} = -2{,}35271.\,\frac{c}{a}$

$-2nG = +0{,}29096.\,\frac{c}{a}$

$+\frac{5c}{2(n-1)a} = +0{,}20399.\,\frac{c}{a}$

$\mathfrak{G} = +0{,}49495.\,\frac{c}{a}$

$l\mathfrak{E} = -8{,}9817552$
$l(n-1) = 1{,}0883440$
$-7{,}8934112$
$l\frac{5n-3}{2} = 1{,}5002316$
$l(n-1) = 1{,}0883440$
$l\frac{5n-3}{2(n-1)} = 0{,}4118876$
$l5 = 0{,}6989700$
$1{,}1108576$

$1{,}1108576 = l12{,}90796$
$1{,}3712844 = l(2n-3)$
$1{,}6991735 = l(4n-3)$
$3{,}0704579$
$-8{,}0403997 = lG$
$2{,}1766880 = l(n-1)^2$
$0{,}7781513 = l6$
$-0{,}9952390$

$l\frac{5n-3}{2(n-1)} = 0{,}4118876$
$l3 = 0{,}4771213$
$0{,}8890089$

$l2{,}14619 = 0{,}3316683$
$l(2n-1) = 1{,}4067394$
$lF = +8{,}9249289$
$lG = -8{,}0403997$
$l2n = 1{,}4234379$
$l2nF = +0{,}3483668$
$l2nG = -9{,}4638376.$

XXXIV. Ex his igitur valoribus colligimus:

$$x = 1 + C - 0{,}014656 \operatorname{cos}. \eta^2 + 0{,}000446 \operatorname{cos}. \eta^4$$
$$+ 0{,}084126. \tfrac{c}{a} \operatorname{cos}. \eta - 0{,}010975. \tfrac{c}{a} \operatorname{cos}. \eta^3$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = 13{,}134163 - \tfrac{3}{2} nC + 0{,}508445 \operatorname{cos}. \eta^2 - 0{,}004001 \operatorname{cos}. \eta^4$$
$$- 2{,}3527 \tfrac{c}{a}. \operatorname{cos}. \eta + 0{,}4949. \tfrac{c}{a} \operatorname{cos}. \eta^3$$

vbi constans C ita definiri debet, vt motus medius ex posteriori forma erutus praecise conueniat cum motu medio ex obseruationibus deducto. In hunc autem finem potestates $\operatorname{cos}. \eta^2$ et $\operatorname{cos}. \eta^4$ ad cosinus angulorum simplicium reduci debent, quia inde partes constantes emergunt cum principali coniungendae. Scilicet ob $\operatorname{cos}. \eta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cos}. 2\eta$ et $\operatorname{cos}. \eta^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \operatorname{cos}. 2\eta + \frac{1}{8} \operatorname{cos}. 4\eta$, fit pars constans:

$13{,}386885 - \frac{3}{2} nC$ ipsi $n = 13{,}25586$ aequanda, vnde fit $\frac{3}{2} nC = 0{,}131025$, ideoque $C = 0{,}0065895$.

Euolutis autem potestatibus $\operatorname{cos}. \eta$ reperitur

$$x = 0{,}999428 - 0{,}007105 \operatorname{cos}. 2\eta + 0{,}000056 \operatorname{cos}. 4\eta$$
$$+ 0{,}07589 \tfrac{c}{a} \operatorname{cos}. \eta - 0{,}00274 \tfrac{c}{a} \operatorname{cos}. 3\eta$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = 13{,}25586 + 0{,}252222 \operatorname{cos}. 2\eta - 0{,}000500 \operatorname{cos}. 4\eta$$
$$- 1{,}9815 \tfrac{c}{a} \operatorname{cos}. \eta + 0{,}1237 \tfrac{c}{a} \operatorname{cos}. 3\eta.$$

XXXV. Quo hinc facilius ipsum angulum Φ definire queamus, ponamus breuitatis gratia $\frac{d\Phi}{d\zeta} = n + r$ erit

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = \frac{n+r}{n-1+r} = \frac{n}{n-1} - \frac{r}{(n-1)^2} + \frac{rr}{(n-1)^3}$$

fit

fit $r = \alpha \cos. 2\eta + \beta \cos. 4\eta + \gamma \cos. \eta + \delta \cos. \eta^3$ erit

$rr = \frac{1}{2}\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha \cos. 4\eta$ omiffis reliquis terminis, qui ad ordines fequentes deuoluerentur, et ob paruitatem facile negliguntur. Integratione ergo inftituta prodit

$$\Phi = \Delta + \frac{n}{n-1}\eta - \frac{\alpha \sin. 2\eta}{2(n-1)^2} - \frac{\beta \sin. 4\eta}{4(n-1)^2} - \frac{\gamma \sin. \eta}{(n-1)^2} - \frac{\delta \sin. 3\eta}{3(n-1)^2}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha}{2(n-1)^3}\eta \qquad + \frac{\alpha\alpha \sin. 4\eta}{8(n-1)^3}$$

vbi eft:

$\alpha = +0,252222$; $\beta = -0,000500$; $\gamma = -1,9815 . \frac{c}{a}$;
$\delta = +0,1237 . \frac{c}{a}$

atque iam ante quidem C ita definiri debuiffet, vt et hic particula $\frac{\alpha\alpha}{2(n-1)^3}\eta$ tolleretur, prodiretque fecundum motum medium $\Phi = \Delta + \frac{n}{n-1}\eta = \Delta + 1,081593\eta$. Singulis igitur terminis euolutis et in minuta fecunda conuerfis habebitur:

$$\Phi = \Delta + 1.081593\eta - 173'',177 \sin. 2\eta + 1'',063 \sin. 4\eta$$
$$+ 2721'' . \frac{c}{a} \sin. \eta - 57'' . \frac{c}{a} \sin. 3\eta.$$

XXXVI. Sed cum η ex motu medio non innotefcat, relatio primo inter ζ et η eft ftabilienda, quae ob $\Phi = \zeta + \eta$ elicitur:

$$\zeta = \Delta + \frac{1}{n-1}\eta - \frac{\alpha \sin. 2\eta}{2(n-1)^2} - \frac{\beta \sin. 4\eta}{4(n-1)^2} - \frac{\gamma \sin. \eta}{(n-1)^2} - \frac{\delta \sin. 3\eta}{3(n-1)^2}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha \sin. 4\eta}{8(n-1)^3}$$

hincque colligitur:

$$\eta = \text{Const.} + 12{,}25586\zeta + 2122'',43\,\text{fin.}\,2\eta - 13'',023\,\text{fin.}\,4\eta - 33348''\tfrac{c}{a}\,\text{fin.}\,\eta + 694''.\tfrac{c}{a}\,\text{fin.}\,3\eta$$

vnde haud difficulter ad datam solis longitudinem mediam angulus η colligitur, tum vero erit $\Phi = \eta + \zeta$. Denique distantia lunae a terra habebitur:

$$v = c\left\{\begin{array}{l}0{,}999428 - 0{,}007105\,\text{cof.}\,2\eta + 0{,}000056\,\text{cof.}\,4\eta \\ + 0{,}07589\tfrac{c}{a}\,\text{cof.}\,\eta - 0{,}00274.\tfrac{c}{a}\,\text{cof.}\,3\eta\end{array}\right\}$$

At ex massis Solis, lunae, et terrae quantitas c ita definitur vt sit $\frac{nnc^3}{a^3} = \frac{T+L}{T+S} = \frac{T}{S}$, vnde patet ob actionem solis distantiam lunae mediam aliquantillum imminui.

XXXVII. In vero lunae motu eaedem istae inaequalitates quoque occurrunt, vnde haud inutile erat eas omni cura determinasse; ab Astronomis autem nomine variationis lunae designantur, quia omnes in vna tabula comprehendi possunt, argumentum distantiae solis a luna prae se ferente. Patet autem eius partem posteriorem a parallaxi solis pendere, seu a fractione $\frac{c}{a}$, dum prior absolute datur. Quare si quantitas huius inaequalitatis pro variis angulis per obseruationes innotesceret, inde vicissim parallaxis solis concludi posset. Cum igitur Tabulae *Mayerianae* cum coelo ita exacte conueniant, riant; vt inaequalitates tanquam ex obſeruationibus concluſae ſpectari queant, comparatio noſtrae formulae inuentae cum his Tabulis parallaxin ſolis nobis exhibere poterit. Conſideremus ſolum caſum, quo angulus $\eta = 90°$, quia tum pars variationis abſoluta euaneſcit, eritque per formulam noſtram variatio $= -34042''.\frac{c}{a}$ tabulae autem *Mayerianae* habent $-1', 57'' = -117''$ vnde ſequitur $\frac{a}{c} = \frac{34042}{117} = 291$, cui rationi cum ratio parallaxium ſit aequalis, parallaxis autem lunae media ſit $57', 15'' = 3435''$, erit parallaxis ſolis $= \frac{3435}{291} = 11\frac{4}{5}''$. Haec fortaſſe methodus parallaxin ſolis definiendi reliquis excepto veneris tranſitu, longe anteferenda videtur, ſi quidem tabulae *Mayerianae* nunquam vltra minutum a coelo diſſident; quia enim haec variationis portio ad $117''$ aſſurgit, leuis mutatio in parallaxi ſolis aſſumta ſenſibilem aberrationem a veritate produceret vt ſcilicet parallaxis ſolis prodiret $= 8\frac{1}{2}''$ tabulae *Mayerianae* loco $-117''$ habere deberent $-84''$, ex hac autem ſolis parallaxi foret $\frac{a}{c} = 400$. Conſiderari poteſt quoque maxima variatio angulo $\eta = 135°$ fere reſpondens, quae ex noſtra forma eſt $= -2122'' - 23050''.\frac{c}{a}$; at ex Tabulis *Mayerianis* $= -41', 41'' = -2501''$, vnde ſequitur $\frac{a}{c} = \frac{23050}{379}$, ſed haec concluſio minus eſt certa, ob effectum a parallaxi ſolis ortum multo minorem. Contra vero maxima variatio hinc potius oriri videtur $= -2202''$ ſeu $36', 42''$. Verum hic probe animaduerti oportet, ex excentricitate partem quoque ipſi ſin. 2η proportionalem naſci, quae in his tabulis cum vera variatione eſt coniuncta. Haecque eſt cauſa, cur parallaxin ſolis ex variatione vbi ſin. $2\eta = 0$ et ſin. $4\eta = 0$ feliciter determinare licuerit minime vero ex variatione maxima.

ANNO-

ANNOTATIO QVARVNDAM CAVTELARVM IN INVESTIGATIONE INAEQVALITATVM QVIBVS CORPORA COELESTIA IN MOTV PERTVRBANTVR OBSERVANDARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Omnis perfectio, quae adhuc in Theoria Astronomiae desideratur, in resolutione huius quaestionis continetur, vt trium pluriumue corporum, quae se mutuo in ratione duplicata inuersa distantiarum attrahant, motus definiatur. Cum enim ex motibus Lunae, quos iam satis exacte per Theoriam assignare licuit, vires illae, quibus corpora coelestia in se mutuo agunt, penitus sint confirmatae, nullum superest dubium, quin leues illae anomaliae, quae in motu planetarum tam primariorum quam secundariorum obseruantur, eidem causae sint attribuendae. In Saturno et Ioue ista motus perturbatio adeo nimis est manifesta, quam vt in dubium vocari possit; atque etiam in reliquis planetis, etsi eorum motus regulis *Kepleri* multo magis est

eſt conformis, tamen nonnullae a Tabulis Aſtronomicis aberrationes obſeruantur, quae nulli alii cauſae niſi eorum actioni mutuae adſcribi poſſunt. Satellitum autem cum Iouis tum Saturni motum ſimilibus perturbationibus ac lunam eſſe obnoxium, obſeruationes ſatis manifeſto declarant.

2. Quanquam autem in Marte, Terra, Venere et Mercurio tales perturbationes minus ſunt conſpicuae, vt aberrationes a calculo aſtronomico ſolis elementis minus recte conſtitutis tribuendae videantur, tamen eorum motum non penitus Regulis *Keplerianis* eſſe conſentaneum euidentiſſime oſtendi poteſt. Si enim hi Planetae, vti iſtae Regulae a ſummo *Newtono* ſunt expoſitae, vnice ad ſolem ſecundum rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum pellerentur, non ſolum quisque motum ſuum in eodem plano ellipſim deſcribendo perficeret, ſed etiam haec ellipſis omnino foret immutabilis, ſuumque axem perpetuo in eodem ſitu eſſet conſeruatura. Cum igitur tam lineae nodorum, quam abſidum cunctorum planetarum etiam reſpectu ſtellarum fixarum non quieſcant, manifeſtum hinc conſequimur criterium, hos planetas non vnice ſolem verſus impelli, ſed iſta phaenomena aliis cauſis deberi, quarum effectus etiamſi potiſſimum in motu lineae abſidum et nodorum cernatur, tamen dubium eſt nullum, quin inde etiam vel minimae inaequalitates in ipſo earum motu proficiſcantur.

3. Quan-

3. Quantumuis autem Tabulae planetarum inferiorum ac praecipue terrae ad consensum obseruationum accommodatae videantur, tamen saepenumero minutae quaedam aberrationes animaduertuntur, quae tabulas cuiusdam erroris arguunt, in quibus inuestigandis nunc quidem fere omnis Astronomorum industria consumitur, postquam crassiora huius scientiae momenta satis felici cum successu sunt expedita. Verum nullo modo sperare licet, istas leues aberrationes per solas obseruationes vnquam ita in ordinem redigi posse, vt praedici queant, in quo omnis Astronomiae vis versatur; minimi etiam errores, qui in obseruationibus plane euitari nequeunt, tale institutum omnino irritum reddunt, dum semper in dubio relinquunt, quanta pars re vera motum planetarum afficiat. Quemadmodum etiam ad eam accuratam motus Lunae cognitionem qua nunc quidem fruimur, solis obseruationibus innixi nunquam certe peruenturi fuissemus, nisi Theoria in subsidium fuisset vocata.

4. Etsi igitur summum studium, quod Astronomi ad artem obseruandi perficiendam impendunt, imprimis est necessarium, tamen maxima incrementa huius scientiae potissimum a Theoria sunt exspectanda, qua nisi praxis adiuuetur, parum inde commodi ad veram cognitionem motuum coelestium redundare potest. Vniuersa autem Theoria ad problema initio memoratum reducitur, vt motus plurium corporum, quae se mutuo attrahant in ratione

reciproca duplicata diſtantiarum, accurate determinetur. Solutionem vero huius problematis non ſolum eſſe difficillimam, ſed etiam ſi in genere tractetur, vires ingenii humani fere ſuperare, omnes qui in eo vires ſuas exercuerunt, ſatis ſuperque ſunt experti.

5. Si duo tantum eſſent corpora, quae ſe mutuo attrahant, quaeſtio nulli amplius difficultati eſſet obnoxia, cum vtrumque circa commune centrum grauitatis perfectam ellipſin eſſet deſcripturum. Verum ſtatim ac tria conſiderantur corpora, problema tam fit difficile, vt omnia artificia quae quidem adhuc ſunt detecta, ad id perfecte ſoluendum minime ſufficiant. Haud igitur vtilitate cariturum arbitror, ſi has difficultates, earumque cauſas accuratius examinauero; quandoquidem illarum enodatio ne ſperari quidem poterit, niſi ante diligentiſſime fuerint perpenſae. Quin etiam haec ipſa contemplatio nouos aperiet fontes, ex quibus ſolutio petenda videtur, qui etſi initio parum adiumenti praebere videantur, tamen vberior meditatio fortaſſe nos continuo propius ad intentum ſcopum perducere valebit.

6. Quaeſtio ergo, quae omnem Aſtronomiae vim in ſe complectitur, ad Mechanicam ſeu motus ſcientiam refertur, cuius principia iam ita ſolide ſunt conſtituta, vt eorum applicatio ad caſum propoſitum nulla laboret difficultate; vnde cauſam tenebra-

nebrarum, in quibus adhuc circa accuratam motuum coeleſtium cognitionem verſamur, minime ignorantiae noſtrae in motus ſcientia tribuere licet. Peruenimus autem non difficulter, quotcunqne etiam fuerint corpora ſe mutuo attrahentia, ad aequationes differentio - differentiales, quae in ſe omnia motus phaenomena complectuntur, et ad quarum reſolutionem totum negotium reducitur. Non igitur difficultas in Mechanica motusque determinatione eſt ſita, ſed omnis in Analyſi continetur, cuius imperfectioni vnice eſt imputandum, quidquid adhuc in Theoria Aſtronomiae deſideratur.

7. Forma harum aequationum differentio - differentialium iam ſatis eſt nota, ex iis ſcriptis, quae cum de Luna, tum de perturbatione motus ſaturni prodierunt, vnde patet motum vniuscuiusque corporis niſi fiat in eodem plano, neceſſario ternis huiusmodi aequationibus includi: in quibus omnes quantitates variabiles, quae ad ſingula corpora pertinent, maxime ſint inter ſe permixtae; ita vt nullius corporis ſeorſim ſumti motus definiri queat, quin ſimul inaequalitates motus omnium reliquorum corporum inuoluantur. Ex quo ſumma difficultas, qua huiusmodi motuum determinatio impeditur, per ſe eſt perſpicua, neque vllum remedium extare videtur, niſi vt methodus generalis aperiatur aequationes differentio - differentiales quotcunque, in quibus variabiles vtcunque inter ſe fuerint permixtae, reſoluendi; talis autem methodus nimis ma-

gna ſcientiae Analyticae incrementa requirit, quam vt ea vnquam ſperare liceat.

8. Tanta ſcilicet impedimenta occurrerent, ſi problema de motu trium pluriumue corporum ſe mutuo attrahentium in genere et perfecte eſſet ſolvendum; pro dato autem caſu plerumque ſe offerunt eiusmodi commoda, quibus illa impedimenta multo redduntur leuiora. Veluti ſi quaeſtio ſit de tribus corporibus, Sole, terra ac Luna, huiusque motus, qualis ex terra ſpectatur, definiri debeat, qua quidem quaeſtione tota Lunae Theoria continetur; primum commode euenit, vt motus ſolis apparens tanquam cognitus ſpectari poſſit, propterea quod perturbationem in motu terrae ab attractione Lunae oriundam pro nihilo reputare licet. Deinde etiam ſolutio non mediocriter inde ſubleuatur, quod diſtantia Lunae prae ſolis diſtantia ſit perquam exigua, ſimulque vis Lunae abſoluta multo ſit minor vi terrae. Tum vero etiam excentricitas orbitae Lunaris non nimis magna, atque inclinatio eius ad planum eclipticae ſatis parua plurimum confert ad difficultates ſuperandas, his autem commodis Tabulae Lunares, quae quidem reliquis praeſtant, acceptae ſunt referendae.

9. His autem ſubſidiis nullus amplius locus relinqueretur, ſi vel Lunae a terra diſtantia eſſet multo maior, vel eius maſſa ſeu vis attractiua abſoluta multo fortior exiſteret, vel ſi orbita eius multo

multo maiorem haberet excentricitatem, vel denique ſi cum plano eclipticae multo maiorem angulum conſtitueret: quarum conditionum ſi vel vna vel plures in Luna deprehenderentur, eius motus hac ratione nullatenus definiri poſſet, neque eius inaequalitates per ſimplices angulos, vti in tabulis lunaribus fieri ſolet, repraeſentare liceret. Si talis Luna terrae contigiſſet, vix patet, quomodo eius motus ſaltem ita prope cognoſci potuiſſet, vt errores non fuerint vehementer enormes: hoc quippe caſu Luna quaſi medium quendam ſtatum inter ſatellitem terrae et planetam primarium eſſet ſortita, ſpectari deberet.

10. Cum igitur conſueta methodus Lunae motum repraeſentandi, tabulisque complectendi omni vſu deſtitueretur, ſi ſtatus Lunae tantillam mutationem accepiſſet; ſatis hoc eſt indicii, ſolitam motus Lunae repraeſentationem naturae non eſſe conformem. Praeterquam enim quod motum Lunae tantum vero proxime definit, et accurata determinatio innumerabiles huiusmodi inaequalitates requireret, quarum praetermiſſio quidem in ſtatu, quo Luna reuera verſatur, errorem vix notabilem gignit; ſi alius ſtatus Lunae obtigiſſet, non ſolum inaequalitatum harum, quae adhuc eſſent notabiles, numerus in immenſum augeri, ſed etiam id incommodi facile accedere poſſet, vt iſtae infinitae inaequalitates ne ſeriem quidem conuergentem conſtituerent, verum continuo fierent maiores; ex quo iſtius mo-

di repraesentatio motus Lunae omni plane vsu esset caritura.

11. Quo magis autem distantia Lunae a terra augeretur, eo grauiora etiam obstacula motus determinationi aduersarentur; neque tamen ideo aucta distantia continuo multiplicarentur. Nam simulac Luna eousque a terra fuisset remota, vt locum Veneris vel Martis esset occupatura, ista obstacula iterum sed quasi contrario quodam modo euanescerent, dum Luna motum planetae primarii esset secutura, cuius perturbationes, si quae a vi terrae efficerentur, alia plane methodo inuestigari deberent. Haec scilicet inuestigatio similis foret illi, qua perturbationes motus saturni, aliusue planetae primarii, quae ab attractione alius planetae primarii oriuntur indagari solent; quae etsi per similes formulas expeditur, tamen multo dissimili modo instituitur; ibi enim Luna primum circa terram secundum regulas *Kepleri* moueri, assumitur, atque aberrationes ab his regulis quaeruntur; hic vero motus Lunae, quasi circa solem secundum easdem regulas fieret, spectari, et aberrationes ab hoc motu regulari assignari deberent.

12. Quantumuis igitur motus Lunae determinatu sit difficilis, si quidem determinatio ad omnes distantias, in quibus Luna a terra collocari potuisset, patere debeat, tamen dantur quasi duo casus extremi, quibus motus facillime definiri posset,

ſet, quos propterea probe expendi conueniet. Prior ſcilicet caſus, quo determinatio motus Lunae nulla difficultate laboraret, foret, ſi Luna terrae eſſet proxima tum enim ſecundum regulas *Kepleri* circa terram perfectam ellipſin eſſet deſcriptura, cuius alterum focum centrum terrae conſtanter occuparet. Poſterior vero caſus locum haberet, ſi Luna a terra tam longe eſſet remota, vt quaſi in regione Martis vel Veneris verſaretur; tum enim iterum motu regulari eſſet inceſſura et circa ſolem ellipſin deſcriptura, cuius alter focus in centro ſolis exiſteret. Vtroque autem caſu facile foret eius motum non ſolum per calculum definire, ſed etiam ad tabulas reuocare.

13. Hinc igitur colligimus veram motus Lunae, ſi neque terrae ſit proxima, neque ab ea nimis remota, determinationem ita comparatam eſſe debere, vt ambobus memoratis caſibus in determinationes illas ſimplices abeat. Atque hic inſignis defectus in methodo, qua motus Lunae ad certas regulas reuocari ſolet, ſtatim deprehenditur, quippe quae tantum ad alterum caſum extremum, refertur. Ita ſcilicet tantum motum Lunae definit, vt ſi diſtantia Lunae a terra euaneſceret, motus quidem regularis et regulis *Keplerianis* conformis eſſet proditurus; verum ſi Luna in immenſum a terra remoueretur, non ſolum non ad regularitatem illam, qua tum Luna eſſet progreſſura, appropinquaret, ſed potius ab ea in infinitum eſſet digreſſura. Nullum

lum igitur eſt dubium, quin huiusmodi methodus, quae ad vtrumque caſum extremum aeque inclinet, naturae rei multo magis foret conſentanea, atque negotium multo felicius eſſet expeditura.

14. His conſiderationibus etiam problema generale de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium non mediocriter adiuuari videtur. Sint enim propoſita tria corpora A, B, C, quae ſe inuicem in ratione reciproca duplicata attrahant, et quaeratur, vti in Aſtronomia quaeſtio inſtitui ſolet, motus reſpectiuus, quo corpora duo B et C, ſpectatori in A poſito moveri videbuntur; litterae autem A, B, C denotent maſſas horum corporum ſeu eorum vires attractrices abſolutas. Quodſi iam vnum horum corporum euaneſceret, haberetur caſus duorum corporum tantum, quorum motus ſine vlla difficultate definiri poſſet; vnde obtinemus illos caſus extremos, ad quas ſolutionem generalem aeque dirigi oportet. Iſtas igitur extremitates diligentius examinari operae erit pretium, verum ne difficultates nimium obruantur, motum omnium trium corporum in eodem plano fieri aſſumam, quoniam ſi difficultates pro hac hypotheſi eſſent ſuperatae, reliquae ex planorum diuerſitate oriundae haud difficulter vincerentur.

Problema I.

15. Si tria corpora A, B, C ſe mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, atque

que in eodem plano moueantur, definire motum corporum B et C qualis ſpectatori in corpore A poſito apparebit.

Solutio.

Quoniam corpus A tanquam in quiete perſiſtens conſiderari debet, ex quo motus binorum reliquorum ſpectetur, ducatur in plano motus per A linea recta ♈ A ♎ ad puncta aequinoctialia ſeu alia puncta in coelo fixa, directa; ac tempore quocunque ab epocha quadam elapſo t reperiantur bina reliqua corpora in B et C ad quae ex A ducantur rectae AB et AC. Vocentur ergo hae diſtantiae $AB = x$; $AC = y$; itemque anguli $♈ AB = p$; $♈ AC = q$, qui longitudinem vtriusque corporis referunt; tum ponatur horum angulorum differentia $BAC = q - p = s$, eritque iuncta recta $BC = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. s)} = v$. Iam cum horum corporum maſſae ſint A, B, C, eaque ſe mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, ſequentes habebimus vires acceleratrices: Tab. II. Fig. 1.

I. Corpus B ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{A}{xx} \\ BC \text{ vi} = \frac{C}{vv} \end{cases}$

II. Corpus C ſollicitatur ſecundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{A}{yy} \\ CB \text{ vi} = \frac{B}{vv} \end{cases}$

Corpus autem A ſollicitatur a corporibus B et C viribus acceleratricibus ſecundum $AB = \frac{B}{xx}$ ſecundum

$AC = \frac{C}{yy}$. Quare cum corpus A debeat in quiete retineri, hae vires secundum directiones contrarias in corpora B et C sunt transferendae. Praeter vires ergo superiores, si ducamus BM et CN parallelas ipsis CA et BA, insuper has habebimus:

I. Corpus B sollicitatur secundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{B}{xx} \\ BM \text{ vi} = \frac{C}{yy} \end{cases}$

II. Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{C}{yy} \\ CN \text{ vi} = \frac{B}{xx} \end{cases}$

Vires ergo quibus haec corpora coniunctim sollicitantur, sunt:

Corpus B sollicitatur secundum $\begin{cases} BA \text{ vi} = \frac{A+B}{xx} \\ BC \text{ vi} = \frac{C}{vv} \\ BM \text{ vi} = \frac{C}{yy} \end{cases}$

Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = \frac{A+C}{yy} \\ CB \text{ vi} = \frac{B}{vv} \\ CN \text{ vi} = \frac{B}{xx}. \end{cases}$

Quaestio ergo huc redit, quomodo motus corporum ab his viribus sollicitatorum futurus sit comparatus. Hunc in finem ductis ad rectam ♈ ♎ perpendiculis BP et CQ, illas vires resoluere licet, secundum directiones fixas, quarum alterae Bb et Cc sint ipsi ♈ ♎ parallelae, alterae vero BP et CQ ad eam normales; ad quod nosse oportet singularum rectarum inclinationes ad axem ♈ ♎. Ac primo quidem rectae BA et CN

eo

eo inclinantur angulo: $\Upsilon A B = \Upsilon N C = p$; rectae vero CA et BM angulo $\Upsilon A C = \Upsilon M B = q$; verum recta BC ad axem inclinatur angulo CBb, cuius sinus est $= \frac{BP - CQ}{v}$ et cosinus $= \frac{AP - AQ}{v}$. Cum iam sit $BP = x \sin. p$; $AP = x \cos p$; $CQ = y \sin. q$ et $AQ = y \cos. q$ fiet

$$\sin. CBb = \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v} \quad \text{et} \quad \cos. CBb = \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}.$$

Hinc ergo corpus B sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

Secundum Bb	secundum BP
$\frac{A+B}{xx} \cos. p$	$\frac{A+B}{xx} \sin. p$
$+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}$	$+ \frac{C}{vv} \cdot \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v}$
$+ \frac{C}{yy} \cos. q$	$+ \frac{C}{yy} \sin. q.$

Porro autem corpus C sollicitabitur sequentibus viribus acceleratricibus:

Secundum Cc	secundum CQ
$\frac{A+C}{yy} \cos q$	$\frac{A+C}{yy} \sin. q$
$- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x \cos. p - y \cos. q}{v}$	$- \frac{B}{vv} \cdot \frac{x \sin. p - y \sin. q}{v}$
$+ \frac{B}{xx} \cos. p$	$+ \frac{B}{xx} \sin. p.$

Ponamus breuitatis gratia has vires:

$$\frac{A+B}{xx} \cos. p + \frac{C(x \cos. p - y \cos. q)}{v^3} + \frac{C}{yy} \cos q = P$$

$$\frac{A+B}{xx} \sin. p + \frac{C(x \sin. p - y \sin. q)}{v^3} + \frac{C}{yy} \sin. q = Q$$

$$\frac{A+C}{yy} \cos. q - \frac{B(x \cos. p - y \cos. q)}{v^3} + \frac{B}{xx} \cos. p = R$$

$$\frac{A+C}{yy} \sin. q - \frac{B(x \sin. p - y \sin. q)}{v^3} + \frac{B}{xx} \sin. p = S$$

eritque ex principiis Mechanicis ſumto elemento temporis dt conſtante:

$$\frac{2}{dt^2}dd.\,x\operatorname{cof.}p + P = 0;\quad \frac{2}{dt^2}dd.\,x\operatorname{fin.}p + Q = 0$$
$$\frac{2}{dt^2}dd.\,y\operatorname{cof.}q + R = 0;\quad \frac{2}{dt^2}dd.\,y\operatorname{fin.}q + S = 0$$

Hinc autem per idoneam combinationem elicitur:

$$P\operatorname{cof.}p + Q\operatorname{fin.}p + \frac{2}{dt^2}(ddx - xdp^2) = 0$$
$$Q\operatorname{cof.}p - P\operatorname{fin.}p + \frac{2}{dt^2}(2\,dx\,dp + x\,ddp) = 0$$
$$R\operatorname{cof.}q + S\operatorname{fin.}q + \frac{2}{dt^2}(ddy - ydq^2) = 0$$
$$S\operatorname{cof}q - R\operatorname{fin.}q + \frac{2}{dt^2}(2\,dy\,dq + y\,ddq) = 0.$$

At ex ſuperioribus formulis fit:

$$P\operatorname{cof.}p + Q\operatorname{fin.}p = \frac{A+B}{xx} + \frac{C(x - y\operatorname{cof.}s)}{v^3} + \frac{C\operatorname{cof.}s}{yy}$$
$$Q\operatorname{cof.}p - P\operatorname{fin.}p = \frac{-Cy\operatorname{fin.}s}{v^3} + \frac{C\operatorname{fin.}s}{yy}$$
$$R\operatorname{cof.}q + S\operatorname{fin.}q = \frac{A+C}{yy} - \frac{B(x\operatorname{cof.}s - y)}{v^3} + \frac{B\operatorname{cof.}s}{xx}$$
$$S\operatorname{cof.}q - R\operatorname{fin.}q = \frac{+Bx\operatorname{fin.}s}{v^3} - \frac{B\operatorname{fin.}s}{xx}$$

vnde pro motu amborum corporum determinando ſequentes quatuor aequationes prodibunt:

$$\text{I.}\quad ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A+B}{xx} + \frac{C(x - y\operatorname{cof.}s)}{v^3} + \frac{C\operatorname{cof.}s}{yy}\right) = 0$$
$$\text{II.}\quad 2\,dx\,dp + x\,ddp + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{C\operatorname{fin.}s}{yy} - \frac{Cy\operatorname{fin.}s}{v^3}\right) = 0$$
$$\text{III.}\quad ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A+C}{yy} + \frac{B(y - x\operatorname{cof.}s)}{v^3} + \frac{B\operatorname{cof.}s}{xx}\right) = 0$$
$$\text{IV.}\quad 2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\operatorname{fin.}s}{v^3} - \frac{B\operatorname{fin.}s}{xx}\right) = 0.$$

Coroll.

Coroll. 1.

16. Circa has aequationes in genere id tantum annotandum duco quod si prima multiplicetur per $y \sin. s$; secunda per $\frac{(A+C)x}{C} - y \cos. s$ tertia per $-x \sin. s$ et quarta per $\frac{(A+B)y}{B} - x \cos. s$, summa productorum futura sit:

$$(yddx - xddy)\sin. s + xy(dq^2 - dp^2)\sin. s + \frac{A+C}{C}(xxddp + 2xdxdp) + \frac{A+B}{B}(yyddq + 2ydydq) - 2ydxdp \cos. s - xyddp \cos. s - 2xdydq \cos. s - xyddq \cos. s = 0$$

cuius integrale est:

$$\frac{A+C}{C}xxdp + \frac{A+B}{B}yydq + (ydx - xdy)\sin. s - xy(dp + dq)\cos. s = \alpha dt.$$

Coroll. 2.

17. Si haec ad motum Lunae transferre velimus, in A terra constituatur et B pro sole, C vero pro Luna habeatur. Cum autem magnitudo massae Lunae non in computum veniat, siquidem ad perturbationem motus terrae inde oriundam hic non respicimus, facto $C = 0$, has habebimus aequationes:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{A+B}{xx} = 0 \\ \text{II.} & 2dxdp + xddp = 0 \end{array}\right\} \text{pro motu solis}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{III.} & ddy - ydq^2 + \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{A}{yy} + \frac{B(y - x\cos. s)}{v^3} + \frac{B\cos. s}{xx}\right) = 0 \\ \text{IV.} & 2dydq + yddq + \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin. s}{v^3} - \frac{B\sin. s}{xx}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{pro motu Lunae.}$$

 Coroll.

Coroll. 3.

18. Motus ergo solis ex terra apparens erit regularis seu regulis *Keplerianis* conformis. Pro Luna autem alter casus extremus locum habebit, si distantiae x et v sint quasi infinities maiores quam y, seu Luna circa terram in minima distantia reuolveretur, quo casu etiam eius motus regulis *Keplerianis* foret conformis, hisque aequationibus contineretur:

$$\text{III.} \quad ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{A}{yy} = 0$$

$$\text{IV.} \quad 2\,dy\,dq + y\,ddq = 0$$

qui casus etiam ex generalibus formulis nascitur, si massa solis B vt euanescens spectetur.

Coroll. 4.

19. Alter autem casus extremus obtinebitur, quo Luna veluti planeta primarius circa solem reuolueretur, si massa terrae A pro nihilo habeatur; hoc igitur casu motus Lunae ex terra spectatus his aequationibus exprimeretur.

$$\text{III.} \quad ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y - x\cos s)}{v^3} + \frac{B\cos s}{xx}\right) = 0$$

$$\text{IV.} \quad 2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin s}{v^3} - \frac{B\sin s}{xx}\right) = 0.$$

Coroll. 5.

20. Etsi autem hoc casu motus Lunae sit regularis, tamen resolutio istarum aequationum minus patet;

patet; propterea quod motum ex terra visum definiunt, sicque inaequalitatem secundam, vti ab Astronomis vocatur, simul inuoluunt. Quamobrem harum aequationum resolutio a posteriori est cognita; quae ergo si fuerit expedita, non parum ad resolutionem aequationum generalium collatura esse videtur.

Coroll. 6.

21. Hoc igitur certum est, resolutionem formularum generalium seu saltem earum, quae §. 17. pro motu Lunae sunt exhibitae, ita comparatam esse debere, vt tam formularum §. 18. quam formularum §. 19. integrationem in se complectatur. Illarum scilicet integratio oriri debet ex generali, si ponatur $B = 0$, harum vero si $A = 0$, quare vtrumque casum seorsim euoluamus.

Problema 2.

22. Propositae sint sequentes binae aequationes differentio-differentiales:

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2 . \frac{A}{yy} = 0 \quad \text{et} \quad 2\,dy\,dq + y\,ddq = 0$$

quarum integralia inueniri oporteat.

Solutio.

Posterior aequatio per y multiplicata ob dt constans statim praebet hoc integrale $yy\,dq = \alpha\,dt$.

Deinde

Deinde prima per $2dy$ posterior vero per $2ydq$ multiplicata summam dant:

$$2dyddy + 2ydydq^2 + 2yydqddq + dt^2 . \frac{A dy}{yy} = 0$$

cuius integrale est:

$$dy^2 + yydq^2 = \mathfrak{C}dt^2 + \frac{A dt^2}{y}.$$

Cum igitur sit $dq = \frac{\alpha dt}{yy}$ erit

$$dy^2 + \frac{\alpha\alpha dt^2}{yy} = \mathfrak{C}dt^2 + \frac{A dt^2}{y}$$

ideoque $ydy = -dt\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}$ vnde fit

$$dt = \frac{-ydy}{\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}} \quad \text{et} \quad dq = \frac{-\alpha dy}{y\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}}.$$

Quo autem constantes arbitrarias α et $\mathfrak{C}$ commodius definiamus pro y introducamus angulum θ, vt sit $y = \frac{c}{1 - n\cos.\theta}$ et $dy = \frac{-ncd\theta \sin.\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ et $\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha$ $= \frac{\mathfrak{C}cc + Ac - nAc\cos.\theta - \alpha\alpha + 2n\alpha^2\cos.\theta - nn\alpha\alpha\cos.\theta^2}{(1 - n\cos.\theta)^2}$

statuatur $\alpha^2 = \frac{1}{2}Ac$ et $\mathfrak{C}cc + Ac - \alpha\alpha = nn\alpha\alpha$, seu

$$\mathfrak{C}cc + \tfrac{1}{2}Ac = \tfrac{1}{2}nnAc \text{ ideoque } \mathfrak{C} = -\frac{A}{2c}(1 - nn)$$

eritque $\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha = \frac{\frac{1}{2}nnAc\sin.\theta^2}{(1 - n\cos.\theta)^2}$ et $\sqrt{(\mathfrak{C}yy + Ay - \alpha\alpha)}$

$$= \frac{n\sin.\theta}{1 - n\cos.\theta}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ac}.$$

Quibus valoribus substitutis habebimus:

$$dt = \frac{ccd\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{Ac}} \quad \text{et} \quad dq = d\theta$$

ideoque per nouam variabilem θ reliquas ita definimus vt sit:

$$q = f + \theta;\; y = \frac{c}{1 - n\cos.\theta} \text{ et } dt = \frac{d\theta}{(1 - n\cos.\theta)^2}\sqrt{\frac{2}{A}c^3}.$$

Coroll.

Coroll. 1.

23. Eodem modo etiam superiores aequationes motum solis continentes construentur:

$$ddx-xdp^2+\tfrac{1}{2}dt^2.\frac{A+B}{xx}=0 \quad \text{et} \quad 2dxdp+xddp=0$$

si enim breuitatis gratia ponamus $A+B=E$ erit

$$p=e+\eta;\; x=\frac{a}{1-m\,cos.\eta};\; dt=\frac{d\eta}{(1-m\,cos.\eta)^2}\sqrt{\tfrac{2}{E}a^3}.$$

Cum autem vtrinque elementum temporis dt sit idem, erit

$$\frac{d\theta}{(1-n\,cos.\theta)^2}\sqrt{\tfrac{2}{A}c^3}=\frac{d\eta}{(1-m\,cos.\eta)^2}\sqrt{\tfrac{2}{E}a^3}.$$

Coroll. 2.

24. Si nolimus nouam variabilem introducere, quoniam inuenimus, $\alpha\alpha=\frac{1}{2}Ac$ et $\mathfrak{C}=-\frac{A}{2c}(1-nn)$, erit $\sqrt{(\mathfrak{C}yy+Ay-\alpha\alpha)}=\sqrt{\frac{A}{2c}(-cc+2cy-yy+nnyy)}$ $=\sqrt{\frac{A}{2c}((1+n)y-c)(c-(1-n)y)}$, sicque habebimus

$$dt=\frac{-ydy\sqrt{2c}}{\sqrt{A((1+n)y-c)(c-(1-n)y)}} \quad \text{et} \quad dq=\frac{-cdy}{y\sqrt{((1+n)y-c)(c-(1-n)y)}}$$

quae formulae ita ad ellipsin sunt accommodatae, vt $\frac{c}{1-n}$ denotet distantiam apogei, et $\frac{c}{1+n}$ distantiam perigei, vnde distantia media est $\frac{c}{1-nn}$, excentricitas $=n$, et c semiparameter.

Coroll. 3.

25. Simili modo pro motu solis, nullam nouam variabilem introducendo habebimus has formulas:

$$dt=\frac{-xdx\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp=\frac{-adx}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}$$

 vbi

vbi ſignum $-$ praefixi, vt motus ab apogeo computetur.

Coroll. 4.

26. Sin autem nouam variabilem vtpote angulum θ introducere velimus, id etiam infinitis aliis modis fieri poteſt. Veluti ſi ponamus $y = \frac{c(1+\nu\cos.\theta)}{1-n\cos.\theta}$, reperiemus:

$$dt = \frac{d\theta(1+\nu\cos.\theta)}{(1-n\cos.\theta)^2}\sqrt{\tfrac{2}{A}(1+n\nu)c^3} \text{ et } dq = \frac{d\theta}{1+\nu\cos.\theta}\sqrt{(1-\nu\nu)}$$

vbi diſtantia apogei eſt $= \frac{c(1+\nu)}{1-n}$; diſtantia perigei $= \frac{c(1-\nu)}{1+n}$ diſtantia media $= \frac{c(1+n\nu)}{1-nn}$, et excentricitas $= \frac{n+\nu}{1+n\nu}$, tum vero ſemiaxis coniugatus $= c\sqrt{\frac{1-\nu\nu}{1-nn}}$, et ſemiparameter $= \frac{c(1-\nu\nu)}{1+n\nu}$.

Problema 3.

27. Si propoſitae ſint ſequentes aequationes differentio-differentiales:

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{B(y-x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$$

exiſtente $s = q - p$ et

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2.\frac{E}{xx} = 0 \text{ et } 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

earum integralia inuenire.

Solutio.

Solutio.

Pro relatione quantitatum x et p ad tempus t iam inuenimus:

$$dt = \frac{-x\,dx\sqrt{2a}}{\sqrt{E}((1+m)x-a)(a-(1-m)x)} \text{ et } dp = \frac{-a\,dx}{x\sqrt{((1+m)\,x-a)(a-(1-m)x)}}$$

qui valores in ipsis propositis aequationibus sunt adhibendi. Quod autem ad has ipsas aequationes attinet, recordandum est iis designari eiusmodi motum corporis C, qui ad punctum B relatus futurus esset regularis. Ducta ergo Bb axi ♈ ♎ parallela si ponamus angulum $CBb = u$, ob $BC = v = \sqrt{}(xx + yy - 2xy\,\text{cos}.s)$ habebimus pro hoc motu istas aequationes:

$$dt = \frac{-v\,dv\sqrt{2b}}{\sqrt{B}((1+i)v-b)(b-(1-i)v)} \text{ et } du = \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}.$$

At est $\text{fin}.u = \frac{x\,\text{fin}.p - y\,\text{fin}.q}{v}$ et $\text{cof}.u = \frac{x\,\text{cof}.p - y\,\text{cof}.q}{v}$.

Atque hinc elicitur:

$$du = \frac{xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\,\text{fin}.s - xy(dp + dq)\,\text{cof}.s}{vv}$$

vnde nanciscimur:

$$xx\,dp + yy\,dq + (y\,dx - x\,dy)\,\text{fin}.s - xy(dp + dq)\,\text{cof}.s = \frac{-b\,v\,dv}{\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = dt\sqrt{\tfrac{1}{2}}Bb.$$

Cum igitur primo x et p deinde etiam v detur per t, ista aequatio $xx - 2xy\,\text{cof}.s + yy = vv$, cum hac coniuncta determinabit duas reliquas quantitates incognitas y et q. Verum definito v per t, ex eo primum quaeratur angulus $u = CBb$, quo inuento ob $x\,\text{fin}.p - y\,\text{fin}.q = v\,\text{fin}.u$ et $x\,\text{cof}.p - y\,\text{cof}.q = v\,\text{cof}.u$

 erit

erit $\tang. q = \frac{x \sin. p - v \sin. u}{x \cos. p - v \cos. u}$; et $y = \sqrt{(xx + vv - 2xv \cos.(p-u))}$. Verum inuenimus esse $u = \int \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$, et angulus q etiam facilius ex hac forma, $\tang.(q-p) = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v\cos.(p-u)}$ erui potest, eritque idcirco

$$\tang. s = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v\cos.(p-u)} \text{ seu } \sin. s = \frac{v \sin.(p-u)}{y}.$$

Coroll. 1.

28. Pro aequationibus ergo differentio-differentialibus propositis hanc nacti sumus resolutionem. Primo ad datum tempus t quaerantur valores x et p per has formulas:

$$dt = \frac{-x\,dx\sqrt{2a}}{\sqrt{E((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}} \text{ et } dp = \frac{-a\,dx}{x\sqrt{((1+m)x-a)(a-(1-m)x)}}.$$

Deinde ad idem tempus colligatur valor ipsius v per hanc formulam

$$dt = \frac{-v\,dv\sqrt{2b}}{\sqrt{B((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}}$$

quo inuento definiatur porro angulus u vt sit:

$$du = \frac{-b\,dv}{v\sqrt{((1+i)v-b)(b-(1-i)v)}} = \frac{dt}{vv}\sqrt{\tfrac{1}{2}Bb}$$

vnde tandem habebitur $y = \sqrt{(xx + vv - 2xv \cos.(p-u))}$ et

$$\tang. q = \frac{x \sin. p - v \sin. u}{x \cos. p - v \cos. u} \text{ seu } \tang.(q-p) = \tang. s = \frac{v \sin.(p-u)}{x - v\cos.(p-u)}.$$

Coroll. 2.

29. Si igitur proponantur resoluendae hae aequationes latius patentes

ddy

$$ddy - y\,dq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{A}{yy} + \frac{B(y - x\cos.s)}{v^3} + \frac{B\cos.s}{xx}\right) = 0$$

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Bx\sin.s}{v^3} - \frac{B\sin.s}{xx}\right) = 0$$

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2.\frac{B}{xx} = 0 \text{ et } 2\,dx\,dp + x\,ddp = 0$$

existente $vv = xx + yy - 2xy\cos.s$ et $s = q - p$; solutionem iam inuenimus pro binis casibus extremis altero quo $B = 0$ (in probl. 2.) altero quo $A = 0$ (in probl. 3.).

Coroll. 3.

30. Ponamus pro casu $B = 0$ prodiisse $y = P$ et $q = Q$ pro casu autem $A = 0$ prodiisse $y = R$ et $q = S$, ac manifestum est solutionem formularum latius patentium, quae sit $y = T$ et $q = V$ ita esse debere comparatam, vt posito $B = 0$ fiat $T = P$ et $V = Q$, posito autem $A = 0$ fiat $T = R$ et $V = S$, vnde iam quodammodo solutionis generalis indolem colligere licet.

Coroll. 4.

31. Solutio autem casus posterioris, quo $A = 0$, etsi rei natura considerata, motuque ad corpus B relato, sit facilis, tamen si aequationes nostras differentio - differentiales spectemus, difficillime constat, quemadmodum solutio inuenta ex iis immediate elicui potuerit. Posito enim $A = 0$, solutio vix minus recondita videri debet, quam si non esset $A = 0$.

Coroll. 5.

32. Pro motu ergo Lunae accurate determinando, atque adeo in genere problemate de motu trium corporum se mutuo attrahentium resoluendo maximum adiumentum inde merito est expectandum, vt casus ille quo $A = 0$, ex sola contemplatione formularum differentio-differentialium euoluatur. Hoc saltem est certum, nisi hunc casum expedire valeamus, multo magis de solutione generali esse desperandum.

Coroll. 6.

33. Cum igitur pro hoc casu solutio, quam a posteriori concinnauimus constet, methodus tantum Analytica idonea et quasi sponte se offerens desideratur, cuius ope eadem illa solutio a priori ipsas aequationes differentio-differentiales tractando erui queat. Nullum enim est dubium, quin eadem methodus pro solutione generali minime successu sit caritura.

Coroll. 7.

34. Quoniam a posteriori iam valores finitos pro quantitatibus y et q elicuimus, haud abs re erit earum differentialia quoque contemplari; quorum euolutio cum laborem non parum taediosum requirat, ea hic apponam:

$$dq = \frac{vdu(v - x\,\mathrm{cos.}(p-u)) - (vdx - xdv)\,\mathrm{sin.}(p-u) + xdp(x - v\,\mathrm{cos.}(p-u))}{yy}$$

$$ds = \frac{vdu(v - x\,\mathrm{cos.}(p-u)) - (vdx - xdv)\,\mathrm{sin.}(p-u) - vdp(v - x\,\mathrm{cos.}(p-u))}{yy}$$

$$dy = \frac{dx(x - v\,\mathrm{cos.}(p-u)) + dv(v - x\,\mathrm{cos.}(p-u)) + xv(dp - du)\,\mathrm{sin.}(p-u)}{y}$$

vnde componitur:

$$dy^2 + yydq^2 = dx^2 + xxdp^2 + dv^2 + vvdu^2 - 2dxdv\,\mathrm{cos.}(p-u) - 2xvdpdu\,\mathrm{cos.}(p-u) + 2xdvdp\,\mathrm{sin.}(p-u) - 2vdxdu\,\mathrm{sin.}(p-u).$$

Denique si ex aequatione, qua v per t determinatur, constantes b et i per integrationem ingressae iterum per differentiationem tollantur, prodibit: $d^3v + \frac{3\,dv\,ddv}{v} + \frac{B\,dt^2\,dv}{2\,v^3} = 0$, quae propterea aequationibus propositis satisfacere est censenda.

Scholion.

35. Hae formulae autem, quarum ope ista resolutio aequationum casu $A = 0$, obtineri posset, nimis sunt complicatae, earumque inuentio ipsa nimis recondita, quam vt Analystae occurrere possent. Quo autem inuestigatio directa est difficilior, eo magis in eam inquirendum videtur, quoniam inde procul dubio insignia subsidia ad problema generale expediendum merito expectare licet. Cum autem hoc artificium, quo solutio casus $A = 0$, tam facilis euasit, multo latius pateat, atque ad omnes leges attractionis extendatur, ex contemplatione huius maioris amplitudinis facilius fortasse id, quod quaerimus,

mus, elici poterit; vnde idem Problema latiſſimo ſenſu acceptum ſimili modo reſolui conueniet.

Problema 4.

36. Si corpora A et C ad corpus B attrahantur in ratione quacunque diſtantiarum ab eo, eaque in eodem plano vtcunque moueantur, definire motum reſpectiuum, quo ambo corpora B et C ſpectatori in A poſito circumferri videbuntur.

Solutio.

Quia omnia ad ſpectatorem in A poſitum ſunt referenda, ponantur, vt ante, diſtantiae $AB = x$; $AC = y$; $BC = v$; et anguli $\Upsilon AB = p$; $\Upsilon AC = q$ et $BAC = q - p = s$; vt ſit $v = \sqrt{(xx + yy - 2xy \operatorname{cof.} s)}$. Tum ſit vis acceleratrix qua corpus A ad B trahitur $= X$, et ea qua corpus C ad B attrahitur $= V$; eritque pro puncto A quaſi fixo ſpectato, vis acceleratrix

qua B ſollicitatur ſecundum $BA = X$

qua C ſollicitatur ſecundum $CB = V$

qua C ſollicitatur ſecundum $CN = X$.

Hinc ratiocinium ſimili modo quo ſupra inſtituendo obtinebimus ſequentes quatuor aequationes:

I. $ddx - xdp^2 + \frac{1}{2}dt^2 . X = 0$. II. $2dxdp + xddp = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \frac{1}{2}dt^2 . (\frac{y - x \operatorname{cof.} s}{v} . V + X \operatorname{cof.} s) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \frac{1}{2}dt^2 . (\frac{x \operatorname{fin.} s}{v} . V - X \operatorname{fin.} s) = 0$.

Bina-

Binarum autem priorum ſolutio eſt in promtu, ſecunda enim praebet $xx\,dp = \alpha\,dt$, ideoque $dp = \frac{\alpha\,dt}{xx}$; qui valor in prima ſubditus dat: $ddx - \frac{\alpha\alpha\,dt^2}{x^3} + \frac{1}{2}X\,dt^2 = 0$, qui per $2\,dx$ multiplicatus pro integrali habet:

$$dx^2 + \frac{\alpha\alpha\,dt^2}{xx} + dt^2 \int X\,dx = \beta\,dt^2$$

vnde fit

$$dt = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(\beta xx - \alpha\alpha - xx\int X\,dx)}} \text{ et } dp = \frac{-\alpha\,dx}{x\sqrt{(\beta xx - \alpha\alpha - xx\int X\,dx)}}.$$

Quanquam autem nullus patet modus, quo binae poſteriores aequationes reſolui queant, tamen conſideratio, quod motus corporis C ex B ſpectatus ſit determinabilis, earum ſolutionem largitur, ſi enim ponamus angulum $CBb = u$, ita vt ſit:

$$\text{ſin.}\,u = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - y\,\text{ſin.}\,q}{v}; \quad \text{coſ.}\,u = \frac{x\,\text{coſ.}\,p - y\,\text{coſ.}\,q}{v}$$

et $\text{tang.}\,q = \frac{x\,\text{ſin.}\,p - v\,\text{ſin.}\,u}{x\,\text{coſ.}\,p - v\,\text{coſ.}\,u}$; $y = \sqrt{(xx + vv - 2xv\,\text{coſ.}(p-u))}$

hincque $\text{tang.}\,s = \frac{v\,\text{ſin.}\,(p-u)}{x - v\,\text{coſ.}\,(p-u)} = \text{tang.}\,(q-p)$

inter v, V et u ſimiles habebuntur aequationes, atque inter x, X et p, ſicque binae poſteriores aequationes aequiualebunt iſtis:

$$ddv - v\,du^2 + \tfrac{1}{2}dt^2.\,V = 0 \text{ et } 2\,dv\,du + v\,ddu = 0$$

vnde ſequentes valores integrales eliciuntur:

$$dt = \frac{-v\,dv}{\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V\,dv)}}; \quad du = \frac{-\gamma\,dv}{v\sqrt{(\delta vv - \gamma\gamma - vv\int V\,dv)}}$$

quae ſimul aequationibus III et VI. ſuperioribus ſatisfacere ſunt cenſendae.

Coroll. 1.

37. Si ex aequatione inter v et t conſtantes δ et γ per differentiationem tollantur, obtinebitur aequatio differentialis tertii gradus:

$$vd^3v + 3dvddv + \tfrac{1}{2}dt^2(3\,V\,dv + v\,dV) = 0$$

quae aequatio facile quoque deducitur ex formulis:

$$ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}V\,dt^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2dvdu + vddu = 0$$

nam prior dat $du^2 = \frac{ddv}{v} + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{V}{v}$, ideoque differentiando:

$2duddu = \frac{d^3v}{v} - \frac{dvddv}{vv} + \frac{1}{2}dt^2 . \frac{vdV - Vdv}{vv}$, qui valores in altera per $2du$ multiplicata $4dvdu^2 + 2vduddu = 0$ ſubſtituti praebent aequationem inuentam.

Coroll. 2.

38. Haec quidem ſunt facilia, ſed cardo rei in hoc verſatur, vt certa aſſignetur methodus, cuius ope inuentae formulae differentiales primi gradus, immediate ex quatuor aequationibus primo inventis erui queant. Atque in hoc negotio eximia Analyſeos promotio conſiſtere videtur.

Scholion.

39. Cum autem nulla adhuc pateat via hoc praeſtandi, ipſa huius defectus commemoratio vtilitate non caritura videtur, qua ſagacitas Analyſtarum incitetur. Quin etiam haud alienum erit problema

blema de tribus corporibus se mutuo attrahentibus, in sensu latissimo euoluere, vt attractio legem distantiarum quamcunque sequatur, saepe numero enim calculi compendia et artificia in problematibus generalioribus facilius inueniuntur, quam in specialioribus, quoniam ipsa limitatio non raro impedit, quominus ratio artificiorum, quae adhiberi queant, perspiciatur.

Problema 5.

40. Si tria corpora A, B, C se mutuo attrahant in ratione quacunque distantiarum, eorumque motus in eodem fiat plano, determinare motum respectiuum, quo corpora B et C spectatori in A posito circumferri videbuntur.

Solutio.

Quia hic corporum actio mutua spectari debet, eorum massae in computum sunt ducendae. Sint igitur vires acceleratrices, quibus corpus A vrgetur ad $B = BX$, et ad $C = CY$, quae in reliqua corpora translatae suppeditabunt cum iis, quibus ea actu sollicitantur sequentes vires acceleratrices:

$$\text{Corpus B sollicitatur secundum} \begin{cases} BA \text{ vi} = (A+B)X \\ BC \text{ vi} = CV \\ BM \text{ vi} = CY \end{cases}$$

Corpus C sollicitatur secundum $\begin{cases} CA \text{ vi} = (A+C)Y \\ CB \text{ vi} = BV \\ CN \text{ vi} = BX \end{cases}$

vbi X, Y et V sunt eae distantiarum $AB = x$; $AC = y$ et $BC = v$ functiones, quibus vires attractiuae praeter massas sunt proportionales. Hinc igitur pro motu corporum sequentes aequationes colligentur.

$$\text{I. } ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2((A+B)X + \tfrac{C(x-y\operatorname{cos}.s)}{v}V + CY\operatorname{cos}.s) = 0$$

$$\text{II. } 2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2(CY\operatorname{sin}.s - \tfrac{Cy\operatorname{sin}.s}{v}V) = 0$$

$$\text{III. } ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2((A+C)Y + B\tfrac{(y-x\operatorname{cos}.s)}{v}V + BX\operatorname{cos}.s) = 0$$

$$\text{IV. } 2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2(\tfrac{Bx\operatorname{sin}.s}{v}V - BX\operatorname{sin}.s) = 0$$

vbi est

$$vv = xx + yy - 2xy\operatorname{cos}.s \text{ et } s = q - p.$$

Verum praeter has aequationes aliae exhiberi possunt motum pariter in se continentes, quae oriuntur, si motus corporum A et C relatiuus, quales spectatori in B posito cerneretur, simili modo euoluatur. Posito autem angulo $CBb = u$ vt sit

$$\operatorname{sin}.u = \frac{x\operatorname{sin}.p - y\operatorname{sin}.q}{v} \text{ et } \operatorname{cos}.u = \frac{x\operatorname{cos}.p - y\operatorname{cos}.q}{v}$$

obtinebuntur hae aequationes:

$$ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}dt^2((B+C)V + \tfrac{A(v-x\operatorname{cos}.(p-u))}{y}Y + AX\operatorname{cos}.(p-u)) = 0$$

$$2dvdu + vddu + \tfrac{1}{2}dt^2(AX\operatorname{sin}.(p-u) - \tfrac{Ax\operatorname{sin}.(p-u)}{y}Y) = 0$$

ddx

$$ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+B)X + \frac{C(x - v\,\text{cof.}(p-u))}{y}Y + CV\,\text{cof.}(p-u)\right) = 0$$

$$2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{Cv\,\text{fin.}(p-u)}{y}Y - CV\,\text{fin.}(p-u)\right) = 0$$

quae duae poftremae cum fuperiorum I et II conueniunt ob

$$y\,\text{fin.}\,s = v\,\text{fin.}(p-u) \text{ et } y\,\text{cof.}\,s = x - v\,\text{cof.}(p-u).$$

Quanquam ergo motus corporum per quatuor aequationes tantum determinatur, iis tamen duae hic inuentae commode adiunguntur, quippe quae non parum ad folutionem idoneam inueniendam conferre poffe videntur; ficque habebimus fex fequentes aequationes, quarum autem quaeque quaternae problemati foluendo fufficiunt.

I. $ddx - xdp^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+B)X + \frac{x - y\,\text{cof.}\,s}{v}CV + CY\,\text{cof.}\,s\right) = 0$

II. $2dxdp + xddp + \tfrac{1}{2}dt^2\left((CY\,\text{fin.}\,s - \frac{y}{v}.\,CV\,\text{fin.}\,s\right) = 0$

III. $ddy - ydq^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((A+C)Y + \frac{y - x\,\text{cof.}\,s}{v}BV + BX\,\text{cof.}\,s\right) = 0$

IV. $2dydq + yddq + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{x}{v}.\,BV\,\text{fin.}\,s - BX\,\text{fin.}\,s\right) = 0$

V. $ddv - vdu^2 + \tfrac{1}{2}dt^2\left((B+C)V + \frac{x - y\,\text{cof.}\,s}{v}AX + \frac{y - x\,\text{cof.}\,s}{v}AY\right) = 0$

VI. $2dvdu + vddu + \tfrac{1}{2}dt^2\left(\frac{y}{v}AX\,\text{fin.}\,s - \frac{x}{v}AY\,\text{fin.}\,s\right) = 0.$

Coroll. 1.

41. Praeterquam quod eft $s = q - p$, circa has quantitates notari meretur effe $vv = xx + yy - 2xy\,\text{cof.}\,s$, tum vero $v\,\text{fin.}\,u = x\,\text{fin.}\,p - y\,\text{fin.}\,q$ et $v\,\text{cof.}\,u = x\,\text{cof.}\,p - y\,\text{cof.}\,q$; vbi anguli p, q et u inclinationes rectarum AB, AC et BC ad rectam fixam ♈ ♎ denotant.

 Porro

Porro autem eſt $x : y : v = \text{ſin.}(q-u) : \text{ſin.}(p-u) : \text{ſin.}\, s$ ſiue

$$\frac{x}{\text{ſin.}(q-u)} = \frac{y}{\text{ſin.}(p-u)} = \frac{v}{\text{ſin.}\, s} \quad \text{et}$$

$$x = y\,\text{coſ.}\, s + v\,\text{coſ.}(p-u); \quad v = x\,\text{coſ.}(p-u) - y\,\text{coſ.}(q-u); \quad \text{et}$$
$$y = x\,\text{coſ.}\, s - v\,\text{coſ.}(q-u).$$

Coroll. 2.

42. His aequationibus diuerſis modis combinandis aliae non incongruae formari poſſunt; imprimis autem duae ſunt notandae combinationes, quae ad aequationes integrabiles deducunt. Prima oritur

$$\text{II.}\ \tfrac{x}{C} + \text{IV.}\ \tfrac{y}{B} + \text{VI.}\ \tfrac{v}{A} \quad \text{vnde fit}$$

$$\frac{2xdxdp + xxddp}{C} + \frac{2ydydq + yyddq}{B} + \frac{2vdvdu + vvddu}{A} = 0$$

quae integrata dat:

$$\frac{xxdp}{C} + \frac{yydq}{B} + \frac{vvdu}{A} = \alpha\, dt.$$

Coroll. 3.

43. In altera omnes ſex coniunguntur hoc modo:

$$\text{I.}\ \tfrac{2dx}{C} + \text{II.}\ \tfrac{2xdp}{C} + \text{III.}\ \tfrac{2dy}{B} + \text{IV.}\ \tfrac{2ydq}{B} + \text{V.}\ \tfrac{2dv}{A} + \text{VI.}\ \tfrac{2vdu}{A}$$

vnde emergit:

$$\frac{2dxddx + 2xdxdp^2 + 2xxdpddp}{C} + \frac{2dyddy + 2ydydq^2 + 2yydqddq}{B}$$
$$+ \frac{2dvddv + 2vdvdu^2 + 2vvduddu}{A} +$$

+

$$dt^2\left\{\begin{array}{l}+\frac{(A+B)}{C}Xdx+\frac{x-y\cos.s}{v}Vdx+Ydx\cos s+Yxdp\sin s-\frac{xy}{v}Vdp\sin.s\\+\frac{(A+C)}{B}Ydy+\frac{y-x\cos.s}{v}Vdy+Xdy\cos.s-Xydq\sin s+\frac{xy}{v}Vdq\sin.s\\+\frac{(B+C)}{A}Vdv+\frac{x-y\cos.s}{v}Xdv+\frac{y-x\cos.s}{v}Ydv+Xydu\sin.s-Yxdu\sin.s\end{array}\right\}=0$$

Coroll. 4.

44. Iam vero eſt $\frac{x-y\cos.s}{v}dx+\frac{y-x\cos.s}{v}dy+\frac{xyds\sin.s}{v}=dv$ et

$$\frac{x-y\cos.s}{v}dv+dy\cos.s-y(dq-du)\sin.s=dx$$

$$\frac{y-x\cos.s}{v}dv+dx\cos.s+x(dp-du)\sin.s=dy$$

vnde integrando elicitur:

$$\frac{dx^2+xxdp^2}{C}+\frac{dy^2+yydq^2}{B}+\frac{dv^2+vvdu^2}{A}$$

$$+(A+B+C)dt^2\left(\frac{\int Xdx}{C}+\frac{\int Ydy}{B}+\frac{\int Vdv}{A}\right)=0$$

quae aequatio principium conſeruationis virium viuarum in ſe complectitur.

Coroll. 5.

45. Patet hinc quantae ſint vtilitatis binae aequationes poſtremae V et VI, etiamſi in reliquis iam contineantur. Si enim ſit $A=0$, aequationes quatuor priores nullam idoneam determinationem ſuppeditant; ex illis autem facillime ad datum quodvis tempus tam diſtantia v quam angulus u aſſignantur. Atque hinc merito concludere videor, in inveſtigatione perturbationis motus planetarum ab his poſtremis aequationibus non exiguum fructum iure ſpera-

ſperari poſſe, qui iis neglectis vix ac ne vix quidem obtineri queat.

Scholion.

46. Quoniam igitur vidimus, motum lunae, ſi terrae eſſet valde vicina nullo labore definiri poſſe, dum is ad terram referatur, ſin autem luna multo magis a terra diſtaret, vt planetis principalibus eſſet accenſenda, tum eius motum ad ſolem referri conuenire; hinc concludendum videtur pro caſu, quo lunae motus vtriusque naturae eſt particeps, quemadmodum re vera vſu venit, tum eum forte facillime definitum iri ſi neque ad ſolem neque ad terram, ſed ad aliud quodpiam punctum medium certa ratione motum referatur. Hunc in finem ſequens problema adiicio, in quo generatim motum corporis ad datum punctum relatum ad aliud punctum vtcunque motum referre docebo.

Problema 6.

Tab. II. Fig. 2. 47. Motum corporis C ad punctum A relatum, ad aliud punctum O, quod reſpectu puncti A vtcunque moueatur, ita referre, vt is qualis ſpectatori in O conſtituto ſit appariturus, definiatur.

Solutio.

Poſita diſtantia $AC = y$ et angulo $\Upsilon AC = q$, binae habentur aequationes differentio-differentiales, quibus

quibus ad quoduis tempus t valores y et q definiuntur, hasque aequationes ita comparatas esse vidimus:

$$2\,dy\,dq + y\,ddq + M dt^2 = 0 \quad \text{et} \quad ddy - y dq^2 + N dt^2 = 0$$

quas obseruo ex his formis esse natas:

$$dd.\,y \operatorname{cos}.q + dt^2 (N \operatorname{cos}.q - M \operatorname{sin}.q) = 0$$

$$dd.\,y \operatorname{sin}.q + dt^2 (N \operatorname{sin}.q + M \operatorname{cos}.q) = 0.$$

Iam pro motu puncti O statuamus distantiam $AO = m$ et angulum $\Upsilon AO = n$; pro dato scilicet tempore t, atque vt motum corporis C ad hoc punctum referamus, vocemus distantiam $OC = z$ et angulum $\Upsilon OC = w$. Cum igitur sit $y \operatorname{cos}.q = m \operatorname{cos}.n + z \operatorname{cos}.w$ et $y \operatorname{sin}.q = m \operatorname{sin}.n + z \operatorname{sin}.w$, his valoribus ibi substitutis habebimus: has duas aequationes.

$$\text{I}^\circ.\ +(ddm - mdn^2)\operatorname{cos}.n - (2dmdn + mddn)\operatorname{sin}.n + dt^2(N\operatorname{cos}.q - M\operatorname{sin}.q) = 0$$
$$+(ddz - zdw^2)\operatorname{cos}.w - (2dzdw + zddw)\operatorname{sin}.w$$

$$\text{II}^\circ.\ +(ddm - mdn^2)\operatorname{sin}.n + (2dmdn + mddn)\operatorname{cos}.n + dt^2(N\operatorname{sin}.q + M\operatorname{cos}.q) = 0$$
$$+(ddz - zdw^2)\operatorname{sin}.w + (2dzdw + zddw)\operatorname{cos}.w$$

vnde combinatio I. $\operatorname{cos}.w +$ II. $\operatorname{sin}.w$ praebet

$$ddz - zdw^2 + (ddm - mdn^2)\operatorname{cos}.(w-n) + (2dmdn + mddn)\operatorname{sin}.(w-n)$$
$$+ dt^2(N\operatorname{cos}.(w-q) + M\operatorname{sin}.(w-q)) = 0$$

haec vero combinatio II. $\operatorname{cos}.w -$ I. $\operatorname{sin}.w$ dat:

$$2dzdw + zddw - (ddm - mdn^2)\operatorname{sin}(w-n) + (2dmdn + mddn)\operatorname{cos}.(w-n)$$
$$+ dt^2(M\operatorname{cos}.(w-q) - N\operatorname{sin}.(w-q)) = 0$$

 sicque

ſicque pro corporis C motu quaeſito reſpectu puncti O ad quoduis tempus t his binis aequationibus tam diſtantia $OC = z$ quam angulus $\Upsilon OC = w$ definitur. Tum vero quia nunc elementa $AC = y$ et $\Upsilon AC = q$ ex calculo elidi debent, in triangulo ACO notandum, eſſe angulos:

$$AOV = w - n;\ OAC = q - n;\ \text{et}\ ACO = w - q;$$

hincque $yy = mm + zz + 2mz \operatorname{cof.}(w-n)$ atque

$$\operatorname{tang.}(w-q) = \frac{m \operatorname{fin.}(w-n)}{z + m \operatorname{cof.}(w-n)}$$

vnde colligitur:

$$\operatorname{fin.}(w-q) = \frac{m \operatorname{fin.}(w-n)}{y} \quad \text{et} \quad \operatorname{cof.}(w-q) = \frac{z + m \operatorname{cof.}(w-n)}{y}$$

ſimili modo ob $\operatorname{tang.}(q-n) = \frac{z \operatorname{fin.}(w-n)}{m + z \operatorname{cof.}(w-n)}$ erit

$$\operatorname{fin.}(q-n) = \frac{z \operatorname{fin.}(w-n)}{y} \quad \text{et} \quad \operatorname{cof.}(q-n) = \frac{m + z \operatorname{cof.}(w-n)}{y}.$$

Coroll. 1.

48. Cum ergo ante ad quoduis tempus t definiri debuerint quantitates y et q, nunc motus cognitio perducta eſt ad determinationem quantitatum z et w, vbi quantitates m et n arbitrio noſtro relinquuntur.

Coroll. 2.

49. Totum igitur negotium eo reuocatur, quemadmodum quantitates m et n pro quouis tempore t aſſumi oporteat, vt inueſtigatio quantitatum z et w facillima reddatur. His enim inuentis quantitates

titates y et q, motum corporis C ex A viſum declarantes, inde facile colliguntur.

Scholion.

50. Operae igitur pretium erit hanc methodum ad motum lunae accommodare, vt pateat, an quicquam lucri inde expectari queat? Facile autem intelligitur punctum O in ipſa recta AB centra ſolis et terrae iungente aſſumi conuenire, quia alioquin nimis magna linearum et angulorum multitudo calculum non mediocriter perturbaret. Poſitis ergo vt ſupra trium corporum maſſis A, B, C, diſtantiis $AB = x$, $AC = y$, $BC = v$, quarum functiones X, Y et V rationem virium in his diſtantiis exertarum exprimant, et angulis $\Upsilon AB = p$ $\Upsilon AC = q$, $BAC = q - p = s$, vt ſit $v = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos. s)}$ in ſequente problemate in motum corporis C, quemadmodum ſpectatori in O poſito ſit appariturus, inquiram; vbi quidem vocata diſtantia $AO = m$, angulus $ACO = n$ ipſi $\Upsilon AB = p$ aequalis eſt ſtatuendus.

Problema 7.

51. Dum terna corpora A, B, C ſe mutuo in ratione quacunque diſtantiarum attrahunt, motum corporis C reſpectu puncti O perpetuo in recta AB vtcunque aſſumto, definire.

Solutio.

Primum ergo tam diſtantiam $AC = y$ quam angulum $\Upsilon AC = q$ ex calculo eliminari oportet; per noua elementa $OC = z$ et $\Upsilon OC = w$ ob punctum O introducta; vbi quidem vidimus ob $n = p$, et $q - n = q - p = s$ eſſe:

$$yy = mm + zz + 2mz \cos.(w-p) \text{ et}$$

$$\sin.(w-q) = \frac{m \sin.(w-p)}{y}, \quad \cos.(w-q) = \frac{z + m\cos.(w-p)}{y}$$

$$\sin. s = \frac{z \sin.(w-p)}{y}, \quad \cos. s = \frac{m + z\cos.(w-p)}{y}.$$

Porro cum ſit $OC = z$, $OB = x - m$ et $BOC = w - p$, erit $BC = v = \sqrt{((x-m)^2 + zz - 2(x-m)z\cos.(w-p))}$ tum vero $\frac{x - y\cos.s}{v} = \frac{x - m - z\cos.(w-p)}{v}$ et

$$y - x\cos. s = \frac{yy - mx - xz\cos.(w-p)}{y} = \frac{zz - m(x-m) - z(x-2m)\cos.(w-p)}{y}.$$

His ſubſtitutis primo pro elementis x et p has habebimus aequationes:

$$ddx - x\,dp^2 + \tfrac{1}{2}(A+B)X\,dt^2 + \tfrac{1}{2}C\,dt^2\left(\frac{x - m - z\cos.(w-p)}{v}V + \frac{m + z\cos.(w-p)}{y}Y\right) = 0$$

$$2\,dx\,dp + x\,ddp + \tfrac{1}{2}C\,dt^2\left(\frac{z\sin.(w-p)}{y}Y - \frac{z\sin.(w-p)}{v}V\right) = 0.$$

Deinde cum in problemate praecedente poſuerimus:

$$ddy - y\,dq^2 + N\,dt^2 = 0 \text{ et } 2\,dy\,dq + y\,ddq + M\,dt^2 = 0$$

erit comparatione facta:

$$N = \tfrac{1}{2}(A+C)Y + \tfrac{1}{2}B\left(\frac{zz - m(x-m) - z(x-2m)\cos.(w-p)}{yv}V + \frac{m + z\cos.(w-p)}{y}X\right)$$

$$M = \tfrac{1}{2}B\left(\frac{xz\sin.(w-p)}{yv}V - \frac{z\sin.(w-p)}{y}X\right)$$

ſupereſt

ſupereſt ergo vt colligamus hinc iſtos valores: Primo

$$\mathrm{N}\,\mathrm{cof.}(w-q)+\mathrm{M}\,\mathrm{ſin.}(w-p)=\frac{\mathrm{N}(z+m\,\mathrm{cof.}(w-p))+\mathrm{M}m\,\mathrm{ſin.}(w-p)}{y}$$
$$=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{C})(z+m\,\mathrm{cof.}(w-p))}{2y}\mathrm{Y}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}(z-(x-m)\,\mathrm{cof.}(w-p)\,.\,\frac{\mathrm{V}}{v}$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,\mathrm{cof.}(w-p)\,.\,\mathrm{X}$$

deinde

$$\mathrm{M}\,\mathrm{cof.}(w-q)-\mathrm{N}\,\mathrm{ſin.}(w-p)=\frac{\mathrm{M}(z+m\,\mathrm{cof.}(w-p))-\mathrm{N}m\,\mathrm{ſin.}(w-p)}{y}$$
$$=-\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{C})m\,\mathrm{ſin.}(w-p)}{2y}\mathrm{Y}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}(x-m)\,\mathrm{ſin.}(w-p)\,.\,\frac{\mathrm{V}}{v}-\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,\mathrm{ſin.}(w-p)\,.\,\mathrm{X}.$$

Quocirca pro motu corporis C, quatenus ad punctum O refertur et variabilibus z et w definitur, has adipiſcimur aequationes:

$$ddz-zdw^2+(ddm-mdp^2)\,\mathrm{cof.}(w-p)+(2dmdp+mddp)\,\mathrm{ſin.}(w-p)$$
$$+\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C})\,dt^2\,(z+m\,\mathrm{cof.}(w-p))\,.\,\frac{\mathrm{Y}}{y}+$$
$$\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,dt^2(z-(x-m)\,\mathrm{cof.}(w-p))\,.\,\frac{\mathrm{V}}{v}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,dt^2\,\mathrm{cof.}(w-p)\,.\,\mathrm{X}=0$$

$$2dzdw+zddw-(ddm-mdp^2)\,\mathrm{ſin.}(w-p)+(2dmdp$$
$$+mddp)\,\mathrm{cof.}(w-p)$$
$$-\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{C})\,dt^2.m\,\mathrm{ſin.}(w-p)\,.\,\frac{\mathrm{Y}}{y}+\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,dt^2.\,(x-m)\,\mathrm{ſin.}(w-p)\,.\,\frac{\mathrm{V}}{v}$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\,dt^2\,\mathrm{ſin.}(w-p)\,.\,\mathrm{X}=0.$$

Coroll. 1.

52. Si diſtantia $\mathrm{AO}=m$ perpetuo datam teneat rationem ad diſtantiam $\mathrm{AB}=x$ vt ſit $m=\alpha x$, erit:

$$yy=\alpha\alpha xx+zz+2\alpha xz\,\mathrm{cof.}(w-p) \text{ et}$$
$$vv=(1-\alpha)^2xx+zz-2(1-\alpha)xz\,\mathrm{cof.}(w-p)$$

 vnde

vnde patet existente $\alpha = 0$, fore $y = z$, sin autem sit $\alpha = 1$, esse $v = z$, quemadmodum quidem per se est manifestum.

Coroll. 2.

53. Sumto autem $m = \alpha x$ erit $ddm - mdp^2 = \alpha(ddx - xdp^2)$ ideoque

$$ddm - mdp^2 = -\tfrac{1}{2}\alpha(A+B)Xdt^2 - \tfrac{1}{2}\alpha C(\alpha x + z\cos.(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha C((1-\alpha)x - z\cos.(w-p))\tfrac{V}{v}dt^2$$

et $2dmdp + mddp = -\tfrac{1}{2}\alpha Cz\sin.(w-p).\tfrac{Y}{y}dt^2 + \tfrac{1}{2}\alpha Cz\sin.(w-p).\tfrac{V}{v}dt^2$

qui valores in superioribus aequationibus substituti praebent

$$ddz - zdw^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\cos.(w-p).Xdt^2 + \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)(z + \alpha x\cos.(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2$$
$$+\tfrac{1}{2}(B + \alpha C)(z - (1-\alpha)x\cos.(w-p))\tfrac{V}{v}dt^2 = 0$$

$$2dzdw + zddw - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)B - \alpha A)\sin.(w-p).Xdt^2 - \tfrac{1}{2}((1-\alpha)C + A)\alpha x\sin.(w-p))\tfrac{Y}{y}dt^2$$
$$+\tfrac{1}{2}(B + \alpha C)(1-\alpha)x\sin.(w-p)\tfrac{V}{v}dt^2 = 0.$$

Coroll. 3.

54. Nunc ergo esset videndum, vtrum numero α eiusmodi valor tribui posset, vt harum aequationum resolutio facilior euaderet, quam casibus $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, vnde vulgo motus lunae inuestigari solet.

Scho-

Scholion 1.

55. Quanquam de commodis quae hinc forte ſperare licet, nihil adhuc pronunciare licet, tamen ex his formulis caſus maxime memorabilis deduci poteſt, quem iam alia occaſione euolui. Certum ſcilicet eſt lunae initio eiusmodi ſitum et motum intra terram A et ſolem B tribui potuiſſe, vt perpetuo in eadem directione a terra ad ſolem porrecta fuiſſet permanſura, ideoque ſoli iugiter coniuncta apparitura. Ad hunc caſum inueſtigandum, capiamus punctum O in ipſo illo lunae loco, ita vt ſit $z = 0$, ideoque $y = \alpha x$ et $v = (1-\alpha)x$ atque ambae noſtrae aequationes inuentae in hanc vnam coaleſcunt

$$((1-\alpha)B-\alpha A)X+\alpha((1-\alpha)C+A)x.\frac{Y}{y}-(1-\alpha)(B+\alpha C)x.\frac{V}{v}=0.$$

Vnde ſi ponamus $X = x^\lambda$, $Y = y^\lambda$ et $V = v^\lambda$, vt fiat $\frac{xY}{y} = xy^{\lambda-1} = \alpha^{\lambda-1}x^\lambda$ et $\frac{xV}{v} = (1-\alpha)^{\lambda-1}x^\lambda$, haec aequatio in iſtam abit formam:

$$((1-\alpha)B-\alpha A+\alpha^\lambda((1-\alpha)C+A)-(1-\alpha)^\lambda(B+\alpha C)=0$$

ſeu $A(\alpha^\lambda-\alpha)-B((1-\alpha)^\lambda-(1-\alpha))+C(\alpha^\lambda(1-\alpha)-\alpha(1-\alpha)^\lambda)=0$

vel $\alpha A(\alpha^{\lambda-1}-1)-(1-\alpha)B((1-\alpha)^{\lambda-1}-1)+\alpha(1-\alpha)C(\alpha^{\lambda-1}$
$-(1-\alpha)^{\lambda-1})=0$

vnde ex data maſſarum A, B, C ratione valor fractionis α elici, ſicque loca illa lunae, quibus ſoli perpetuo maneret coniuncta definiri poſſunt; vbi quidem perſpicuum eſt ſi eſſet $\lambda = 1$, hoc vbique vſu venire poſſe.

Scholion 2.

56. Haec ſpeculatio accuratiorem euolutionem meretur, et quia attractio rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum ſequitur, poſito $\lambda = -2$, habebimus:

$$\frac{A(1-\alpha^3)}{\alpha\alpha} - \frac{B(1-(1-\alpha)^3)}{(1-\alpha)^2} + \frac{C((1-\alpha)^3-\alpha^3)}{\alpha^2(1-\alpha)^2} = 0 \text{ ſeu}$$

$$A(1-\alpha)^2(1-\alpha^3) - B\alpha\alpha(3\alpha-3\alpha\alpha+\alpha^3) + C(1-3\alpha+3\alpha\alpha-2\alpha^3) = 0$$

quae ſecundum poteſtates ipſius α diſpoſita praebet

$$(A+B)\alpha^5 - (2A+3B)\alpha^4 + (A+3B+2C)\alpha^3 - (A+3C)\alpha^2 + (2A+3C)\alpha - A - C = 0$$

vbi ſi ſtatuamus $\alpha = \frac{1-u}{2}$ fit

$$\begin{array}{l} (A+B)u^5 - (A-B)u^4 - 2(A+B)u^3 + 10(A-B)uu + 17(A+B)u + 7(A-B) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 8C \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 24C \end{array}$$

ita vt valor fractionis α a reſolutione huius aequationis quinti gradus pendeat. Quodſi bina corpora A et B inter ſe eſſent aequalia foret

$$\begin{array}{l} Au^5 - 2Au^3 + 17Au = 0 \text{ hincque vel } u = 0 \text{ et } \alpha = \frac{1}{2} \\ \qquad\quad + 4C \quad + 12C \end{array}$$

vel $uu = \frac{A+2C+\sqrt{(4CC-16AC-16AA)}}{A}$

vnde reliqui pro u valores fiunt imaginarii. Sin autem B repraeſentet ſolem, vt ſit quaſi $B = \infty$, quia tum α fit minimum proxime erit $(A+3B+2C)\alpha^3 - A - C = 0$ ſeu $\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}}$ et accuratius

$$\alpha = \frac{\sqrt[3]{(A+C)}}{\sqrt[3]{(A+3B+2C)}} - \frac{3(A+2C)B - C(5A+6C)}{3(A+3B+3C)\sqrt[3]{(A+C)(A+3B+2C)}}.$$

Scholion

Scholion 3.

57. Iuuabit forsitan ipsi α hunc valorem in genere tribuisse, ita vt posito $X = \frac{1}{xx}$, $Y = \frac{1}{yy}$ et $V = \frac{1}{vv}$ fit $(1-\alpha)B - \alpha A = \frac{B + \alpha C}{(1-\alpha)^2} - \frac{A - (1-\alpha)C}{\alpha\alpha}$; siquidem eum in lunae motum inquirere velimus, qui ad casum istum memorabilem proxime accederet, ita vt distantia z prae αx maneret minima. Quia enim tum proxime fit $\frac{1}{y^3} = \frac{1}{\alpha^3 x^3} - \frac{3 z \cos.(w-p)}{\alpha^4 x^4}$ et $\frac{1}{v^3} = \frac{1}{(1-\alpha)^3 x^3} + \frac{3 z \cos.(w-p)}{(1-\alpha)^4 x^4}$, binae aequationes motum exprimentes ad has formas reducuntur:

$$ddz - z\,dw^2 + \frac{z(1 - 3\cos.(w-p)^2)}{2x^3}\,dt^2\left(\frac{B+\alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A+(1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

$$2dz\,dw + z\,ddw + \frac{3z\sin.(w-p)\cos.(w-p)}{2x^3}\,dt^2\left(\frac{B+\alpha C}{(1-\alpha)^3} + \frac{A+(1-\alpha)C}{\alpha^3}\right) = 0$$

quae si motus solis pro vniformi et distantia x pro constanti habeatur, ita repraesentari poterunt:

$$ddz - z\,dw^2 + \gamma z\,dp^2(1 - 3\cos.(w-p)^2) = 0$$

$$2\,dz\,dw + z\,ddw + 3\gamma z\,dp^2 \sin.(w-p)\cos.(w-p) = 0$$

quae aequationes, cum z vnam dimensionem non excedat pro simplicioribus sunt habendae.

INVESTIGATIO ACCVRATIOR PHAENOMENORVM QVAE IN MOTV TERRAE DIVRNO A VIRIBVS COELESTIBVS PRODVCI POSSVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Motum terrae diurnum a viribus Solis et Lunae ita affici vt inde aequinoxiorum praecessio et axis terrestris nutatio exoriatur *Neutonus* iam erat suspicatus, Acutiss. vero *Alembertus* dilucide demonstrauit. Quod specimen sagacitatis humanae eo pluris est aestimandum, quod illo tempore subsidia dynamica, quibus haec inuestigatio innititur, neutiquam adhuc satis erant euoluta, ex quo summas et grauissimas calculi difficultates superari erat necesse. Principium autem harum perturbationum in eo est situm, quod telluris corpus a figura sphaerica recedit, ac diameter aequatoris aliquantum superat axis quantitatem; quodsi enim eius figura perfecte esset sphaerica, motus vertiginis ipsi semel impressus perpetuo eadem celeritate continuaretur, axisque eandem directionem conseruaret; neque vires externae vllam immutationem in hoc motu efficere valerent. Statim autem ac terrae figura a sphaerica discrepat,

ex

ex viribus Solis ac Lunae naſcitur momentum ad axem de ſitu ſuo deturbandum tendens, quatenus quidem hae vires oblique in axem agunt. Quocirca in hac inueſtigatione, poſtquam vera terrae figura eſſet conſtituta, ex lege attractionis vires Solis et Lunae ſingula terrae elementa ſollicitantes definiri, indeque momenta poſitionem axis afficientia colligi oportuit; tum vero ſumma adhuc difficultas in effectu determinando reſidebat, quem illa virium momenta in ſitum axis exerere debeant, quod ſine profundiſſima cum Dynamicae tum Analyſeos ſcientia nullo modo praeſtari poterat.

Cum autem non ita pridem haec dynamicae pars maxime abſtruſa, quae in motu corporum gyratorio circa axem mobilem definiendo eſt occupata, a me ſit ſatis proſpero ſucceſſu ita pertractata, vt in genere corporum quacunque figura praeditorum motus dum a viribus quibuscunque ſollicitantur, ad formulas analyticas ſatis ſimplices reduci queat; haud incongruum fore arbitror, ſi ope huius methodi omnes inaequalitates, quibus motus terrae diurnus perturbatur, ita accuratius determinauero, vt non ſolum verus motus, quo terra cietur, inde innoteſcat, ſed etiam inde aliorum motuum, qui in terram cadere potuiſſent, ſiquidem initio aliter fuiſſet impulſa, indolem perſpicere liceat. Quae igitur de hoc argumento ſum meditatus, ſequentibus propoſitionibus ſum complexurus.

I. Quacunque figura terra ſit praedita ad praeſens inſtitutum non opus eſt veram compoſitionis rationem, qua ſingulae partes inter ſe ſunt diſtributae et ordinatae, noſſe; verum ſufficit vt ex principiis, quae circa motum corporum rigidorum in genere ſtabiliui, terni axes principales ſe mutuo in centro grauitatis ſeu potius inertiae normaliter decusſantes notentur, momentaque inertiae reſpectu ſingulorum explorata habeantur. Hinc poſita terrae maſſa tota $= M$, ſi ex centro inertiae I educti ſint axes principales IA, IB, IC, eorum reſpectu momenta inertiae his formulis Maa, Mbb, Mcc deſignabo. His enim tribus momentis inertiae vniuerſa internae ſtructurae ratio, quatenus quidem inde motus determinatio pendet, continetur, ita vt iam taedioſiſſimis illis calculis, quos alias figura et ſtructura terrae exigere ſolet, ſuperſedere queamus.

II. Quodſi haec tria momenta inertiae inter ſe eſſent aequalia, omnes plane axes per centrum terrae ducti pari gauderent proprietate, omnesque aeque pro principalibus haberi poſſent, ita vt terra, circa quemcunque axem initio gyrari coepiſſet, hunc motum perpetuo ſine vlla axis et celeritatis alteratione eſſet proſecutura, neque etiam a viribus peregrinis vlla perturbatio eſſet pertimeſcenda. Perinde ſcilicet terra ſe eſſet habitura, ac ſi eius figura perfecte eſſet ſphaerica, omnisque materia aequabiliter circa centrum diſtributa; vbi imprimis eſt notandum

tandum hanc inſignem proprietatem etiam in figuras maxime irregulares competere poſſe, dummodo terna illa momenta inertiae fuerint inter ſe aequalia, hoc autem in figuris maxime irregularibus euenire poſſe minime dubitare licet.

III. Eatenus ergo tantum motus terrae diurnus perturbationes pati poteſt, quatenus terna eius momenta inertiae principalia inter ſe non ſunt aequalia. Verum etiamſi terra initio fuiſſet ſphaerica ſtatim atque circa certum axem gyrari coepiſſet, ob fluiditatem circa aequatorem intumeſcere debuiſſet, vnde reſpectu axis gyrationis momentum inertiae incrementum accepiſſet. In hoc autem negotio fluiditatis rationem minime habere licet, cum principia dynamica neutiquam adhuc ad hunc ſcopum ſint euoluta; ob quem defectum vtique cogimur terram tanquam corpus ſolidum ſpectare, cuius figura nullis viribus ſollicitantibus cedere queat. Quamobrem quae de eius motu diurno ſum traditurus, ita ſunt accipienda, vt ob maris mobilitatem, qua actioni virium quodammodo obſequitur, aliquam correctionem admittere intelligantur.

IV. Terram igitur tanquam eiusmodi corpus ſolidum conſidero, cuius trium axium principalium vnus puta IA cum eius axe proprie ſic dicto, qui ab altero polo ad alterum per centrum porrigitur conueniat, et cuius reſpectu momentum inertiae ſit $= Maa$. Bini ergo reliqui axes principales in

 ipſum

ipſum aequatorem cadent, et quoniam omnium meridianorum par eſſe ratio videtur, momenta inertiae eorum reſpectu tanquam inter ſe aequalia ſpectari poterunt, ita vt ſit $cc = bb$. Hoc autem admiſſo omnes diametri aequatoris axium principalium proprietate aeque erunt praediti ita vt terra circa vnumquemque eorum libere gyrari poſſet. Vnde cum puncta B et C in aequatore pro lubitu accipi queant, dum 90° a ſe inuicem diſtent, alterum B in eo meridiano, qui pro primo habetur, aſſumere licebit; ita in ſuperficie terrae arcus AB primum meridianorum deſignabit.

V. Quoniam motus terrae diurnus potiſſimum ab eo motu qui terrae initio fuerit impreſſus, pendet, quanta varietas inde proficiſci potuerit, ante omnia perpendi conueniet, ac primo quidem mentem ab actione Solis et Lunae abſtrahendo. Iam ſatis perſpicuum eſt ſi terrae in rerum principio motus gyratorius vel circa axem vel quempiam diametrum aequatoris fuiſſet impreſſus, hunc motum ita perpetuo vniformiter duraturum fuiſſe, vt axis gyrationis conſtanter idem coeli punctum reſpexiſſet. Sin autem terra circa aliam quamcunque lineam per centrum tranſeuntem gyrari coepiſſet, tum motus quidem gyratorius vniformis manſiſſet, ſed ipſe axis gyratorius interea circa quodpiam coeli punctum per circulum quendam minorem vniformiter fuiſſet circumlatus, quemadmodum alibi de huius-

huiusmodi corporibus, quae momentorum inertiae principalium bina habent inter ſe aequalia, fuſius demonſtraui et hic nouo modo ſum demonſtraturus.

VI. Statim autem ac vires perturbatrices ſiue Solis ſiue Lunae accedunt, vtrumque motus genus ita afficitur, vt vel gyrationis celeritas immutetur, vel axis, circa quem terra gyratur motu magis irregulari feratur. Ad hanc perturbationem inueſtigandam quaeſtionem latiori ſenſu acceptam tractari conuenit, vt ſolutio etiam ad eos caſus pateat, quibus forte terrae ab initio motus circa axem a principalibus diuerſum fuerit impreſſus. Cum enim a viribus ſollicitantibus axis gyrationis de ſitu ſuo deturbetur, omnino neceſſe eſt, vt etiamſi hae vires abeſſent gyratio circa axem mobilem definiri queat. Tum vero etiam ad ſcientiae incrementum non parum conducere videtur, ſi etiam indolem eorum motuum, qui in terram cadere poſſent, etiamſi re vera in ea non inſint aſſignare valeamus. Quocirca formulas generales ita ſum inſtructurus, vt etiam ad caſum quo bina momenta inertiae principalia non forent aequalia accommodari queant.

VII. Cum ob vires perturbatrices omnia phaenomena ad coelum immotum referri oporteat, ſit circulus ♈ ☊ ♎ ecliptica, et E eius polus; et quo inueſtigatio aeque ad lunam ac ſolem pateat, ſit O ☊ R orbita aſtri perturbantis eclipticam ſecans in nodo aſcendente ☊, et nunc quidem hoc aſtrum hae- Tab. II. Fig. 3.

haereat in S, per quod punctum ducto latitudinis circulo ESQ erit ♈Q longitudo et QS latitudo astri, tum vero ♈☊ longitudo nodi. Ponamus ergo haec elementa ♈☊ $= \omega$, ang. ♈☊O $= \varepsilon$, arcus ♈☊Q $= q$ et ES $= p$

atque ex trigonometria constat fore $\cot. p = \tan g. \varepsilon \sin. (q - \omega)$. Haec proprie ad lunam sunt accommodata, pro sole autem inclinatio seu angulus ♈☊O $= \varepsilon$ euanescens est sumendus, et ob latitudinem nullam arcus ES $= p$ constanter manet 90°.

VIII. Pro actionis autem, quam astrum S in terram exerit, quantitate, sit v eius distantia a centro terrae at e ea distantia in qua astri vis attractrix ipsi grauitati naturali est aequalis ita vt eius vis centrum terrae sollicitans sit ad grauitatem vt $\frac{ee}{vv}$ ad 1. Porro autem sit g altitudo, ex qua grauia in terrae superficie libere delabuntur tempore vnius minuti secundi, quibus positis quantitas actionis astri in terram hac formula $\frac{2gee}{v^3}$ continetur, quam breuitatis gratia littera $V = \frac{2gee}{v^3}$ denotabo. Vbi obseruandum est si corpus ab astro attractum ad distantiam $= v$ in circulo reuolueretur, id singulis minutis secundis angulum esse percursurum, qui sit $= \sqrt{\frac{2gee}{v^3}} = \sqrt{V}$. Ex quo si astrum sit sol $\sqrt{V}$ denotat motum terrae medium vni minuto secundo conuenientem; sin autem astrum fuerit luna, ac massa lunae aequalis statuatur massae telluris, fore $\sqrt{V}$ motum medium lunae vni minuto secun-

do

do conuenientem. Quoties autem maſſa lunae minor fuerit maſſa terrae, motum illum medium in ratione ſubduplicata diminui oportet; vnde ex cognito motu medio valor litterae V facile definitur.

IX. His praemiſſis teneat iam elapſo tempore t in minutis ſecundis exprimendo terra ſitum in figura repraeſentatum, vt axis eius ſeu polus boreus ſit in A, primus meridianus AB, et BC quadrans aequatoris, vbi B et C ſpectantur tanquam bini reliqui axes principales terrae. Ponantur ergo arcus et anguli ſtatum terrae definientes:

1°. Diſtantia poli A a polo eclipticae E ſeu $EA = l$

2°. Longitudo poli A ſeu angulus $\Upsilon EA = \psi$

3°. Situs primi meridiani ſeu angulus $EAB = \phi$.

Hincque colligantur ſequentes arcus:

$$SA = \zeta,\ SB = \eta \quad \text{et}\ SC = \theta$$

qui per trigonometriam ſphaericam ita definiuntur vt ſit:

$$\operatorname{cof.}\zeta = \operatorname{fin.}p(\operatorname{fin.}l \operatorname{cof.}(q-\psi) + \operatorname{tang.}\varepsilon \operatorname{cof.}l \operatorname{fin.}(q-\omega))$$

$$\operatorname{cof.}\eta = \operatorname{fin.}p(-\operatorname{fin.}\phi \operatorname{fin.}(q-\psi) - \operatorname{cof.}l \operatorname{cof.}\phi \operatorname{cof.}(q-\psi) + \operatorname{tang.}\varepsilon \operatorname{fin.}l \operatorname{cof.}\phi \operatorname{fin.}(q-\omega))$$

$$\operatorname{cof.}\theta = \operatorname{fin.}p(-\operatorname{cof.}\phi \operatorname{fin.}(q-\psi) + \operatorname{cof.}l \operatorname{fin.}\phi \operatorname{cof.}(q-\psi) - \operatorname{tang.}\varepsilon \operatorname{fin}l \operatorname{fin.}\phi \operatorname{fin.}(q-\omega))$$

vbi notetur fore $\operatorname{cof.}\zeta^2 + \operatorname{cof.}\eta^2 + \operatorname{cof.}\theta^2 = 1$.

X. Nunc cum respectu ternorum axium principalium A, B, C momenta inertiae terrae sint Maa, Mbb, Mcc quaerantur primo tres quantitates x, y, z ex his aequationibus:

$$dx + \frac{cc-bb}{aa}dt(yz - 3V\cos.\eta\cos.\theta) = 0$$

$$dy + \frac{aa-cc}{bb}dt(xz - 3V\cos.\zeta\cos.\theta) = 0$$

$$dz + \frac{bb-aa}{cc}dt(xy - 3V\cos.\zeta\cos.\eta) = 0$$

tum vero reliqua elementa situm terrae determinantia ex his aequationibus colligi oportet:

$$dl = -dt(y\sin.\Phi + z\cos.\Phi)$$

$$d\Phi = xdt - \frac{dt(y\cos.\Phi - z\sin.\Phi)}{\mathrm{tang}.\, l}$$

$$d\psi = \frac{dt(y\cos.\Phi - z\sin.\Phi)}{\sin.\, l}$$

quarum aequationum ratio ex iis, quae de motu corporum gyratorio circa axem mobilem alibi tradidi, haud difficulter deducitur.

XI. Quoniam vero momenta inertiae pro axibus B et C aequalia statuimus vt sit $cc = bb$, primo quidem ob $dx = 0$ habebimus $x = f$ quantitati nempe constanti; tum vero ponendo breuitatis gratia $\frac{aa-bb}{bb} = \alpha$ seu $\frac{aa}{bb} = 1 + \alpha$, quinque sequentes aequationes resolui oportet:

$$dy + \alpha dt(fz - 3V\cos.\zeta\cos.\theta) = 0$$

$$dz - \alpha dt(fy - 3V\cos.\zeta\cos.\eta) = 0$$

$$dl = -dt(y\sin.\Phi + z\cos.\Phi)$$

$$d\Phi = f\,dt - \frac{dt(y\,\text{cof.}\,\Phi - z\,\text{fin.}\,\Phi)}{\text{tang.}\,l}$$

$$d\psi = \frac{dt(y\,\text{cof.}\,\Phi - z\,\text{fin.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,l}$$

ex quibus binis pofterioribus eliminatis y et z colligitur:

$$d\Phi + d\psi\,\text{cof.}\,l = f\,dt$$

ita vt formula $d\Phi + d\psi\,\text{cof.}\,l$ fit temporis elemento proportionalis.

XII. Quo nunc has aequationes diftinctius euoluam, a fimplicioribus ad difficiliora ita ordine afcendam, vt primo vires perturbatrices tanquam euanefcentes fpectans motum terrae diurnum, quomodo tum fe effet habiturus, definiam, deinde aftrum perturbans in ipfa ecliptica motu vniformi circa terram reuolui affumam, vt eandem perpetuo fervet diftantiam v, et V fit quantitas conftans. Deinde aftrum etiam vniformiter ad diftantiam conftantem fed in orbita ad eclipticam parumper inclinata circumferri ponam. Denique vero aftro motum inaequabilem fecundum leges *Keplerianas* tribuam, orbitam vero eius in ipfam eclipticam incidentem confiderabo; qui bini pofteriores effectus coniuncti ad motum lunae verum accommodari poffunt.

I. Euolutio cafus, quo vires perturbatrices euanefcunt.

XIII. Pofito ergo pro hoc cafu $V = 0$, binae priores aequationes fiunt:

$$dy + \alpha f z dt = 0 \quad \text{et} \quad dz - \alpha f y dt = 0$$

vnde colligitur $ydy + zdz = 0$, et $yy + zz = bb$, ad quam aequationem cum reliquis commodissime construendam, notari conuenit, in coelo dari punctum fixum L, circa quod polus A vniformiter gyretur, dum interea terra circa hunc polum etiam vniformiter reuoluitur. Hoc ergo punctum L in calculum introducentes ponamus:

$$\Upsilon EL = \gamma,\ EL = m,\ LA = n, \text{ existente } EA = l$$

tum vero etiam angulos in triangulo sphaerico EAL

$$ELA = \lambda,\ EAL = \mu \text{ et } AEL = \nu$$

vt sint elementa γ, m et n constantia, angulus vero $ELA = \lambda$ tempori proportionalis. Vocetur porro etiam angulus $LAB = \sigma$, eritque

$$\Upsilon EA = \psi = \gamma - \nu \text{ et } EAB = \Phi = \sigma - \mu.$$

XIV. His positis ex trigonometricis habetur:

$$\text{cos.}\, l = \text{cos.}\, m \,\text{cos.}\, n + \text{sin.}\, m \,\text{sin.}\, n \,\text{cos.}\, \lambda$$

vnde ob m et n constantes differentiatio praebet:

$$dl \,\text{sin.}\, l = d\lambda \,\text{sin.}\, m \,\text{sin.}\, n \,\text{sin.}\, \lambda$$

et quia $\frac{\text{sin.}\,\lambda}{\text{sin.}\, l} = \frac{\text{sin.}\,\mu}{\text{sin.}\, m} = \frac{\text{sin.}\,\nu}{\text{sin.}\, n}$ erit

$$dl = d\lambda \,\text{sin.}\, n \,\text{sin.}\, \mu = d\lambda \,\text{sin.}\, m \,\text{sin.}\, \nu.$$

Deinde cum sit simili modo:

$$\text{cos.}\, m = \text{cos.}\, l \,\text{cos.}\, n + \text{sin.}\, l \,\text{sin.}\, n \,\text{cos.}\, \mu \quad \text{et}$$

$$\text{cos.}\, n = \text{cos.}\, l \,\text{cos.}\, m + \text{sin.}\, l \,\text{sin.}\, m \,\text{cos.}\, \nu$$

erit

erit quoque differentiando:

$$0 = -dl\,\text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,n + dl\,\text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,\mu - d\mu\,\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,\mu$$

$$0 = -dl\,\text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,m + dl\,\text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu - d\nu\,\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,\nu$$

vnde colligitur:

$$d\mu = \frac{dl(\text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,\mu - \text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,n)}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,\mu} = \frac{d\lambda}{\text{fin.}\,l}(\text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,\mu - \text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,n)$$

$$d\nu = \frac{dl(\text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu - \text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,m)}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,\nu} = \frac{d\lambda}{\text{fin.}\,l}(\text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu - \text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,m).$$

XV. Ex trigonometria iam recordemur esse:

$$\text{cof.}\,\mu = \frac{\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,m - \text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,n\,\text{cof.}\,\lambda}{\text{fin.}\,l}; \quad \text{cof.}\,\nu = \frac{\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,n - \text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,m\,\text{cof.}\,\lambda}{\text{fin.}\,l}$$

fimilique modo etiam

$$\text{cof.}\,\mu = \frac{\text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,m - \text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu}{\text{fin.}\,n}; \quad \text{cof.}\,\nu = \frac{\text{fin.}\,l\,\text{cof.}\,n - \text{cof.}\,l\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,\mu}{\text{fin.}\,m}$$

vnde concinnius posteriora differentialia ita definiuntur:

$$d\mu = \frac{-d\lambda\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu}{\text{fin.}\,l} \quad \text{et} \quad d\nu = \frac{-d\lambda\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,\mu}{\text{fin.}\,l}$$

ficque pro elementis prius adhibitis habebimus:

$$d\psi = \frac{d\lambda\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,\mu}{\text{fin.}\,l} \quad \text{et} \quad d\Phi = d\sigma + \frac{d\lambda\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu}{\text{fin.}\,l}$$

vbi loco cof. μ et cof. ν priores valores fcribi conueniet, vt omnia ad elementa m, n et λ reuocentur:

XVI. Nunc igitur ftatuamus:

$$y = h\,\text{cof.}\,\sigma \quad \text{et} \quad z = -h\,\text{fin.}\,\sigma$$

qui valores in prioribus aequationibus fubftituti dant:

$$-hd\sigma\,\text{fin.}\,\sigma - \alpha fhdt\,\text{fin.}\,\sigma = 0 \quad \text{feu} \quad d\sigma = -\alpha f dt.$$

 Tum

Tum vero ob

$$y\,\text{fin.}\,\Phi + z\,\text{cof.}\,\Phi = b\,\text{fin.}(\Phi - \sigma) = -b\,\text{fin.}\,\mu \quad \text{et}$$

$$y\,\text{cof.}\,\Phi - z\,\text{fin.}\,\Phi = b\,\text{cof.}(\Phi - \sigma) = b\,\text{cof.}\,\mu$$

ternae posteriores aequationes has induent formas:

$$dl = d\lambda\,\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,\mu = b\,dt\,\text{fin.}\,\mu, \text{ feu } d\lambda = \frac{b\,dt}{\text{fin.}\,n}$$

$$d\Phi = -\alpha f dt + \frac{d\lambda\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu}{\text{fin.}\,l} = f dt - \frac{b\,dt\,\text{cof.}\,\mu}{\text{tang.}\,l}$$

$$d\psi = \frac{b\,dt\,\text{cof.}\,\mu}{\text{fin.}\,l} = \frac{b\,dt\,(\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,m - \text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,n\,\text{cof.}\,\lambda)}{\text{fin.}\,l^2}.$$

Antepenultima autem ob $d\lambda = \frac{b\,dt}{\text{fin.}\,n}$ per dt diuifa dat

$$(1+\alpha)f = \frac{b\,\text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,n} + \frac{b\,\text{cof.}\,l\,\text{cof.}\,\mu}{\text{fin.}\,l} = \frac{b(\text{cof.}\,l\,\text{cof.}\,\mu\,\text{fin.}\,n + \text{fin.}\,m\,\text{cof.}\,\nu)}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,n}.$$

Verum cum fit $\text{cof.}\,\mu = \frac{\text{cof.}\,m - \text{cof.}\,l\,\text{cof.}\,n}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,n}$ et $\text{cof.}\,\nu = \frac{\text{cof.}\,n - \text{cof.}\,l\,\text{cof.}\,m}{\text{fin.}\,l\,\text{fin.}\,m}$ obtinetur:

$$(1+\alpha)f = \frac{b(\text{cof.}\,n - \text{cof.}\,l^2\,\text{cof.}\,n)}{\text{fin.}\,l^2\,\text{fin.}\,n} = \frac{b\,\text{cof.}\,n}{\text{fin.}\,n}$$

ita vt etiam quantitas $b = (1+\alpha)f\,\text{tang.}\,n$ determinetur, fitque adeo conftans, vt rei natura poftulat.

XVII. Ex dato ergo coeli puncto L, ad quod motus terrae eft referendus, ab eoque axis diftantia $LA = n$, motus terrae ita fe habebit, vt primo axis A circa illud punctum L vniformiter reuoluatur celeritate angulari $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{b}{\text{fin.}\,n} = \frac{(1+\alpha)f}{\text{cof.}\,n}$, quippe qua fingulis minutis fecundis angulus $= \frac{(1+\alpha)f}{\text{cof.}\,n}$ abfoluitur ita vt hoc motu angulus ELA continuo increfcat. Tum vero interea ipfa terra circa axem A gyrabitur

tur celeritate angulari $\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha f$, qua angulus LAB continuo imminuetur; vbi notandum, quantitatem f a motu terrae primum impresso perinde atque arcum n pendere, litteram α vero rationem compositionis terrae inuoluere. In motu autem quem terra reuera est initio adepta, arcus LA $= n$ euanescit, sicque sine viribus perturbantibus, ipse arcus LA cum polo A fixus maneret, totusque motus ex angulo LAB $= \Phi$ ita definiretur, vt ob $b = 0$ esset celeritas angularis $\frac{d\Phi}{dt} = f$, vnde patet quantitatem f exprimere celeritatem angularem motus terrae diurni.

XVIII. Si terra eiusmodi motum vertiginis accepisset vt arcus LA $= n$ valorem haberet notabilem, polus A maiori celeritate circa coeli punctum L reuolueretur, siquidem constans f eundem retineret valorem, ipsa vero terra lentissime interea circa axem A in plagam contrariam conuerteretur, ob fractionem α minimam, ita vt hoc motu neglecto terra circa axem per coeli punctum L transeuntem reuolui videretur, spatio saltem temporis non nimis magno tempore autem labente quia sensim alia terrae puncta coeli punctum L subeunt, terra alium axem gyrationis recipere videbitur, ex quo etiam aequator et locorum latitudines mutationem patientur, sicque tam coeli quam terrae phaenomena ingentibus perturbationibus forent obnoxia, etiamsi nullae vires perturbatrices externae accederent.

XIX.

XIX. Hoc casu si pro quouis tempore t situm terrae respectu eclipticae definire velimus; primum ad hoc tempus angulum $\lambda = \frac{(1+\alpha)f}{\cos. n} t + \text{Const.}$ colligi oportet, pro quo facile tabula conderetur. Tum vero hoc angulo inuento statim habebitur axis A a polo eclipticae E distantia $EA = l$ ope formulae $\cos. l = \cos. m \cos. n + \sin. m \sin. n \cos. \lambda$ vbi m et n sunt certi anguli dati. Porro pro situ arcus EA quaeratur angulus ν vt sit $\text{cotang.}\, \nu = \frac{\sin. m \cos. n - \cos. m \sin. n \cos. \lambda}{\sin. n \sin. \lambda}$, eritque angulus $\Upsilon EA = \psi = \gamma - \nu$, denotante γ angulum quendam constantem. Denique pro situ primi meridiani AB seu angulo $LAB = \phi = \sigma - \mu$, primo angulus σ tempori proportionalis ex formula $\sigma = \text{Const.} - \alpha f t$ facile colligitur, tum vero angulus μ ex hac formula capiatur:

$$\text{cotang.}\, \mu = \frac{\sin. n \cos. m - \cos. n \sin. m \cos. \lambda}{\sin. m \sin. \lambda}$$

sicque status terrae ad tempus propositum erit determinatus omnem autem hunc calculum commode tabulis complecti liceret. Hoc casu expedito ad vires perturbantes progredior, quae tractatio praeparationem postulat, reliquis casibus quos suscepi praemittendam.

Praeparatio ad effectus virium perturbantium euoluendos.

XX. Quoniam hic effectus est minimus, ex casu praecedente facile intelligitur, quomodo hanc tracta-

tractationem aptissime suscipi conueniat. Vniuersus scilicet motus quoque ad coeli quoddam punctum L referatur, quod autem non amplius tanquam fixum spectetur, sed ita pro variabili habeatur, vt tam angulus $\Upsilon EL = \gamma$ quam arcus $EL = m$ et $LA = n$ a viribus perturbantibus parumper immutari censeantur, neque etiam anguli $ELA = \lambda$ et $LAB = \sigma$ incrementa tempori exacte proportionalia capere sunt censenda; quamobrem quoque quantitas b tanquam variabilis erit tractanda. Ponamus deinde vt supra; $EA = l$, angulos $EAL = \mu$, $AEL = \nu$ tum vero angulos $\Upsilon EA = \psi$ et $EAB = \Phi$ vt sit $\psi = \gamma - \nu$ et $\Phi = \sigma - \mu$.

XXI. Statuamus ergo etiam nunc quoque

$$y = b \operatorname{cos.} \sigma \quad \text{et} \quad z = -b \operatorname{sin.} \sigma$$

et quia quantitatem b quoque vt variabilem spectamus, binae priores aequationes differentiales fient:

$$db \operatorname{cos.}\sigma - bd\sigma \operatorname{sin.}\sigma - \alpha fbdt \operatorname{sin.}\sigma - 3\alpha V dt \operatorname{cos.}\zeta \operatorname{cos.}\theta = 0$$
$$-db \operatorname{sin.}\sigma - bd\sigma \operatorname{cos.}\sigma - \alpha fbdt \operatorname{cos.}\sigma + 3\alpha V dt \operatorname{cos.}\zeta \operatorname{cos.}\eta = 0$$

vnde per combinationem elicimus:

$$-bd\sigma - \alpha fbdt - 3\alpha V dt \operatorname{cos.}\zeta(\operatorname{sin}\sigma \operatorname{cos.}\theta - \operatorname{cos.}\sigma \operatorname{cos.}\eta) = 0$$
$$db - 3\alpha V dt \operatorname{cos.}\zeta (\operatorname{cos.}\sigma \operatorname{cos.}\theta + \operatorname{sin.}\sigma \operatorname{cos.}\eta) = 0.$$

Ponamus breuitatis gratia

$$\operatorname{cos.}\sigma \operatorname{cos.}\eta - \operatorname{sin.}\sigma \operatorname{cos.}\theta = P \quad \text{et} \quad \operatorname{cos.}\sigma \operatorname{cos.}\theta + \operatorname{sin.}\sigma \operatorname{cos.}\eta = Q$$

vt habeamus has aequationes:

$$d\sigma = -\alpha f dt + \frac{3\alpha VP dt \operatorname{cos.}\zeta}{b} \quad \text{et} \quad db = 3\alpha VQ dt \operatorname{cos.}\zeta.$$

Verum ex formulis ſupra §. IX. ob $\Phi = \sigma - \mu$ ſeu $\sigma - \Phi = \mu$ colligimus:

$$P = \text{ſin.}\,p(\text{ſin.}\,\mu\,\text{ſin.}(q-\psi) - \text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{coſ.}(q-\psi) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{ſin.}(q-\omega))$$

$$Q = \text{ſin.}\,p(-\text{coſ.}\,\mu\,\text{ſin.}(q-\psi) - \text{coſ.}\,l\,\text{ſin.}\,\mu\,\text{coſ.}(q-\psi) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,\mu\,\text{ſin.}(q-\omega))$$

exiſtente $\text{coſ.}\,\zeta = \text{ſin.}\,p(\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}(q-\psi) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l\,\text{ſin.}(q-\omega))$.

Reliquae vero aequationes erunt:

$$d\,l = h\,d\,t\,\text{ſin.}\,\mu$$

$$d\Phi = d\sigma - d\mu = f\,dt - \frac{h\,d\,t\,\text{coſ.}\,\mu}{\text{tang.}\,l}$$

$$d\psi = d\gamma - d\nu = \frac{h\,d\,t\,\text{coſ.}\,\mu}{\text{ſin.}\,l}.$$

XXII. Haec iam differentialia dl, $d\mu$ et $d\nu$ ad differentialia $d\lambda$, dm et dn reduci oportet; ac primo quidem cum ſit $\text{coſ.}\,l = \text{coſ.}\,m\,\text{coſ.}\,n + \text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,n.\,\text{coſ.}\,\lambda$ erit differentiando:

$$dl\,\text{ſin.}\,l = dm\,\text{ſin.}\,m\,\text{coſ.}\,n + dn\,\text{coſ.}\,m\,\text{ſin.}\,n + d\lambda\,\text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,n\,\text{ſin.}\,\lambda - dm\,\text{coſ.}\,m\,\text{ſin.}\,n\,\text{coſ.}\,\lambda - dn\,\text{ſin.}\,m\,\text{coſ.}\,n\,\text{coſ.}\,\lambda$$

quae forma ob

$$\text{ſin.}\,n\,\text{coſ.}\,m - \text{ſin.}\,m\,\text{coſ.}\,n\,\text{coſ.}\,\lambda = \text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,\mu \quad \text{et} \quad \text{ſin.}\,m\,\text{coſ.}\,n - \text{ſin.}\,n\,\text{coſ.}\,m\,\text{coſ.}\,\lambda = \text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,\nu$$

tranſit in hanc ſimpliciorem:

$$dl\,\text{ſin.}\,l = dm\,\text{ſin}\,l\,\text{coſ.}\,\nu + dn\,\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,\mu + d\lambda\,\text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,n\,\text{ſin.}\,\lambda$$

ſeu

ſeu cum ſit $\frac{\sin.\lambda}{\sin.l} = \frac{\sin.\mu}{\sin.m} = \frac{\sin.\nu}{\sin.n}$ in hanc

$$dl = dm\cos.\nu + dn\cos.\mu + d\lambda\sin.n\sin.\mu.$$

XXIII. Deinde vero ſimili modo elicitur:

$$dm = dl\cos.\nu + dn\cos.\lambda + d\mu\sin.n\sin.\lambda$$

vbi ſi loco dl valor modo inuentus ſubſtituatur, prodit

$$dm = dm\cos.\nu^2 + dn\cos.\mu\cos.\nu + d\lambda\sin.n\sin.\mu\cos.\nu + d\mu\sin.n\sin.\lambda + dn\cos.\lambda$$

ſeu ob $\cos.\lambda + \cos.\mu\cos.\nu = \cos.l\sin.\mu\sin.\nu$

$$dm\sin.\nu^2 = dn\cos.l\sin.\mu\sin.\nu + d\lambda\sin.n\sin.\mu\cos.\nu + d\mu\sin.n\sin.\lambda.$$

Eſt vero $\sin.n\sin.\mu = \sin.m\sin.\nu$ et $\sin.n\sin.\lambda = \sin.l\sin.\nu$, vnde per $\sin.\nu$ diuidendo habetur:

$$dm\sin.\nu = dn\cos.l\sin.\mu + d\lambda\sin.m\cos.\nu + d\mu\sin.l$$

ita vt ſit $d\mu = \frac{dm\sin.\nu}{\sin.l} - \frac{dn\cos.l\sin.\mu}{\sin.l} - \frac{d\lambda\sin.m\cos.\nu}{\sin.l}$.

Verum quia elementum dl tam commode exprimitur, vt ſit $dl = hdt\sin.\mu$ praeſtabit hunc valorem ſtatim introduci vnde prodit

$$d\mu = \frac{-hdt\sin.\mu\cos.\nu + dm - dn\cos.\lambda}{\sin.n\sin.\lambda}$$ ſimilique modo

$$d\nu = \frac{-hdt\sin.\mu\cos.\mu + dn - dm\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda}.$$

XXIV. Ex prima ergo aequatione adipiſcimur:

$$hdt\sin.\mu = dm\cos.\nu + dn\cos.\mu + d\lambda\sin.n\sin.\mu$$

vnde fit $d\lambda = \frac{hdt}{\sin.n} - \frac{dm\cos.\nu - dn\cos.\mu}{\sin.n\sin.\mu}$

at tertia aequatio praebet

$$d\gamma = \frac{h\,dt\,\text{cos}.\,\mu}{\text{sin}.\,l} - \frac{h\,dt\,\text{sin}.\,\mu\,\text{cos}.\,\mu}{\text{sin}.\,m\,\text{sin}.\,\lambda} + \frac{dn - dm\,\text{cos}.\,\lambda}{\text{sin}.\,m\,\text{sin}.\,\lambda}$$

seu $d\gamma = \frac{dn - dm\,\text{cos}.\,\lambda}{\text{sin}.\,m\,\text{sin}.\,\lambda}$

secunda vero aequatio ad $d\Phi$ spectans dat

$$d\sigma = f\,dt - \frac{h\,dt\,\text{cos}.\,\mu\,\text{cos}.\,l}{\text{sin}.\,l} - \frac{h\,dt\,\text{sin}.\,\mu\,\text{cos}.\,\nu}{\text{sin}.\,n\,\text{sin}.\,\lambda} + \frac{dm - dn\,\text{cos}.\,\lambda}{\text{sin}.\,n\,\text{sin}.\,\lambda}$$

vbi notandum terminos elemento $h\,dt$ affectos, cum sint

$$-\frac{h\,dt\,(\text{sin}.\,\mu\,\text{cos}.\,\nu + \text{sin}.\,\nu\,\text{cos}.\,\mu\,\text{cos}.\,l)}{\text{sin}.\,l\,\text{sin}.\,\nu}$$

ob $\text{cot}.\,n = \frac{\text{sin}.\,\mu\,\text{cos}.\,\nu + \text{sin}.\,\nu\,\text{cos}.\,\mu\,\text{cos}.\,l}{\text{sin}.\,l\,\text{sin}.\,\nu}$ abire in $-\frac{h\,dt\,\text{cos}.\,n}{\text{sin}.\,n}$

ita vt sit

$$d\sigma = f\,dt - \frac{h\,dt\,\text{cos}.\,n}{\text{sin}.\,n} + \frac{dm - dn\,\text{cos}.\,\lambda}{\text{sin}.\,n\,\text{sin}.\,\lambda} = -\alpha f\,dt + \frac{3\alpha\,\text{V}\,\text{P}\,dt\,\text{cos}.\,\zeta}{b}$$

hincque $(1+\alpha)f\,dt - \frac{h\,dt\,\text{cos}.\,n}{\text{sin}.\,n} + \frac{dm - dn\,\text{cos}.\,\lambda}{\text{sin}.\,n\,\text{sin}.\,\lambda} = \frac{3\alpha\,\text{V}\,\text{P}\,dt\,\text{cos}.\,\zeta}{b}$.

XXV. Nunc igitur sumamus $h = (1+\alpha)f\,\text{tang}.\,n$ vt viribus euanescentibus, arcus m et n prodeant constantes, et postrema aequatio dabit

$$dm - dn\,\text{cos}.\,\lambda = \frac{3\alpha\,\text{V}\,\text{P}\,dt\,\text{cos}.\,n\,\text{sin}.\,\lambda\,\text{cos}.\,\zeta}{(1+\alpha)f}$$

arcus vero n ex hac integratione est definiendus

$$\text{tang}.\,n = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int \text{V}\,\text{Q}\,dt\,\text{cos}.\,\zeta$$

seu $dn = \frac{3\alpha\,\text{V}\,\text{Q}\,dt\,\text{cos}.\,\zeta\,\text{cos}.\,n^2}{(1+\alpha)f}$

vnde fit $dm = \frac{3\alpha\,\text{V}\,dt\,\text{cos}.\,n\,\text{cos}.\,\zeta}{(1+\alpha)f}(\text{P}\,\text{sin}.\,\lambda + \text{Q}\,\text{cos}.\,n\,\text{cos}.\,\lambda)$

hinc-

hincque porro

$$dm\cos.\nu + dn\cos.\mu = \frac{3\alpha V dt \cos.n\cos.\zeta}{(1+\alpha)f}\sin.\lambda(P\cos.\nu + Q\cos.m\cos.n\sin.\nu).$$

Inuentis autem variationibus dm et dn, erit

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)fdt}{\cos.n} - \frac{dm\cos.\nu - dn\cos.\mu}{\sin.n\sin.\mu} \text{ seu}$$

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)fdt}{\cos.n} - \frac{dm(\sin.m\cos.n - \sin.n\cos.m\cos.\lambda)}{\sin.m\sin.n\sin.\lambda} - \frac{dn(\sin.n\cos.m - \sin.m\cos.n\cos.\lambda)}{\sin.m\sin.n\sin.\lambda}$$

et anguli ♈ E L variatio simul innotescit, quae est

$$d\gamma = \frac{dn - dm\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda} = \frac{3\alpha V dt\cos.n\cos.\zeta}{(1+\alpha)f\sin.m}(Q\cos.n\sin.\lambda - P\cos.\lambda)$$

substitutis autem pro dm et dn valoribus reperitur

$$d\lambda = \frac{(1+\alpha)fdt}{\cos.n} - \frac{3\alpha V dt\cos.n\cos.\zeta}{(1+\alpha)f\sin.m\sin.n}(P(\sin.m\cos.n - \sin.n\cos.m\cos.\lambda) + Q(\sin.n\cos.m\cos.n\sin.\lambda).$$

Denique pro angulo EAB $=\phi$ habebimus:

$$d\phi = fdt - \frac{(1+\alpha)fdt\sin.n\cos.\mu\cos.l}{\cos.n\sin.l} \text{ et } d\psi = \frac{(1+\alpha)fdt\sin.n\cos.\mu}{\sin.l\cos.n}$$

ita vt sit $d\phi + d\psi\cos.l = fdt$, in quibus integrationibus arcus m et n tanquam constantes spectare licet, simul vero erit proxime $d\lambda = \frac{(1+\alpha)f}{\cos.n}dt$, siquidem perturbatio fuerit minima.

XXVI. Quo haec nunc propius ad praesens institutum accommodemus, obseruandum est in motu vertiginis terrae arcum n quam minimum esse statuendum, ita vt ob $d\phi = fdt$ iam f denotet angulum vno minuto secundo confectum, et angulus ψ in integrationibus pro constanti haberi poterit.

 Dein-

Deinde ob $\cot.\mu = \frac{n\cos.m - \sin.m\cos.\lambda}{\sin.m\sin.\lambda}$, colligitur fore angulum $\mu = 180° - \lambda - \frac{n\sin.\lambda}{\mathrm{tang}.m}$, ita vt ſit.

$$\sin.\mu = \sin.\lambda + \frac{n\sin.\lambda\cos.\lambda}{\mathrm{tang}.m}; \quad \sin.(\lambda+\mu) = \frac{n\sin.\lambda}{\mathrm{tang}.m}$$

$$\cos.\mu = -\cos.\lambda + \frac{n\sin.\lambda^2}{\mathrm{tang}.m}; \quad \cos.(\lambda+\mu) = 1$$

neglectis terminis vbi n ad altiores poteſtates exſurgit.

Porro ob $\cos.l = \cos.m + n\sin.m\cos.\lambda$ erit $l = m - n\cos.\lambda$ hincque

$$n = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int VQdt\cos.\zeta; \; m = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\int Vdt\cos.\zeta(P\sin.\lambda + Q\cos.\lambda)$$

$$d\lambda = (1+\alpha)fdt - \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\cdot\frac{Vdt\cos.\zeta(P\sin.m - n\cos.m(P\cos.\lambda - Q\sin.\lambda))}{n\sin.m}$$

$$= (1+\alpha)fdt - \frac{3\alpha VPdt\cos.\zeta}{(1+\alpha)nf} - \frac{3\alpha Vdt\cos.\zeta\cos.m(Q\sin.\lambda - P\cos.\lambda)}{(1+\alpha)f\sin.m}$$

$$d\gamma = \frac{3\alpha}{(1+\alpha)f}\cdot\frac{Vdt\cos.\zeta(Q\sin.\lambda - P\cos.\lambda)}{\sin.m}$$

$$d\phi = fdt + \frac{n(1+\alpha)fdt\cos.m\cos.\lambda}{\sin.m}$$

$$d\psi = \frac{-n(1+\alpha)fdt\cos.\lambda}{\sin.m}.$$

XXVII. Cum ſit proxime $\mu = 180° - \lambda$, et $l = m$ in quantitatibus P et Q his valoribus vti licet, ex quo erit:

$$P = \sin.p(\sin.\lambda\sin.(q-\psi) + \cos.m\cos.\lambda\cos.(q-\psi) - \mathrm{tang}.\varepsilon\sin.m\cos.\lambda\sin(q-\omega))$$

$$Q = \sin.p(\cos.\lambda\sin.(q-\psi) - \cos.m\sin.\lambda\cos.(q-\psi) + \mathrm{tang}.\varepsilon\sin.m\sin.\lambda\sin.(q-\omega))$$

exiſtente $\cos.\zeta = \sin.p(\sin.m\cos.(q-\psi) + \mathrm{tang}.\varepsilon\cos.m\sin.(q-\omega))$

vnde

vnde colligitur:

$$P \sin.\lambda + Q \cos.\lambda = \sin.p \sin.(q-\psi)$$

$$Q \sin.\lambda - P \cos.\lambda = \sin.p\,(-\cos.m \cos.(q-\psi) + \operatorname{tang}.\varepsilon \sin.m \sin.(q-\omega)).$$

Hinc totum calculum ſatis expedite abſoluere licebit; valor tantum anguli λ moram faceſſere videtur, ob terminum $\frac{-3\alpha V P d t \cos.\zeta}{(1+\alpha) f n}$, quantitatem minimam n in denominatore inuoluentem; quae ſi euaneſceret, hic terminus adeo in infinitum excreſceret. Quod cum in motu terrae eueniat, manifeſtum eſt hanc appropinquandi rationem noſtro caſu locum habere non poſſe ex quo aliam methodum ingredi conueniet, quam nunc accuratius ſum expoſiturus.

Alia methodus formulas inuentas euolvendi, ad motum vertiginis terrae magis accommodata.

XXVIII. Reſumamus noſtras formulas pro motu vertiginis ſupra expoſitas:

1°. $\frac{dy}{dt} + \alpha f z - 3\alpha V \cos.\zeta \cos.\theta = 0$

2°. $\frac{dz}{dt} - \alpha f y + 3\alpha V \cos.\zeta \cos.\eta = 0$

3°. $dl = -dt(y \sin.\Phi + z \cos.\Phi)$

4°. $d\Phi = f dt - \frac{dt}{\operatorname{tang}.l}(y \cos.\Phi - z \sin.\Phi)$

5°. $d\psi = \frac{dt}{\sin.l}(y \cos.\Phi - z \sin.\Phi)$

vbi

vbi primum obſeruo, ſi vires perturbatrices littera $V = \frac{2gee}{v^3}$ contentae euaneſcerent, binis prioribus aequationibus ſatisfacere has formulas $y = h\,\text{coſ.}\,\alpha f t$ et $z = h\,\text{ſin.}\,\alpha f t$ praeſenti autem caſu quantitatem h euaneſcentem accipi debere. Quare cum ob quantitatem V particulae quaedam ad hos valores y et z accedant, has ipſas particulas inueſtigari conuenit, quibus deinceps reiectis illis membris litteram h inuoluentibus; erit vtendum.

XXIX. Hunc in finem autem opus eſt ante omnia formulas $\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta$ et $\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$ euolui, vnde facta reductione reperitur:

$$\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\eta = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,p^2 \left\{ \begin{array}{r} -\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,2(q-\psi) - \text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l\,\text{coſ.}\,\Phi \\ \text{coſ.}\,2(q-\psi) \\ +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(2q-\psi-\omega) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{ſin.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.} \\ (\psi-\omega) + \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(2q-\psi-\omega) \\ -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(2q-\psi-\omega) - \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l^2\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.} \\ (\psi-\omega) - \text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\psi-\omega) \end{array} \right\}$$

omiſſis terminis quadratum $\text{tang.}\,\varepsilon^2$ implicantibus vtpote minimis; quam ob cauſam pro $\text{ſin.}\,p^2 = \frac{1}{1 + \text{tang.}\,\varepsilon^2\,\text{ſin.}\,(q-\omega)^2}$ etiam vnitatem ſcribere licet. Hinc etiam angulo Φ in ſinus et coſinus ſimplices inuoluto, adipiſcimur:

$$\begin{array}{rlll} 4\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\eta = & -\text{ſin.}\,2l\,\text{coſ.}\,\Phi & -\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,(\Phi-2q+2\psi) & +\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,(\Phi+2q-2\psi) \\ & & -\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l & -\text{ſin.}\,l\,\text{coſ.}\,l \\ & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}\,(\Phi+2q-\psi-\omega) & & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}\,(\Phi-2q+\psi+\omega) \\ & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l & & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l \\ & +\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}\,(\Phi-\psi+\omega) & & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,2l\,\text{ſin.}\,(\Phi+\psi-\omega) \\ & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l & & -\text{tang.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,l \end{array}$$

vbi

vbi notandum eſt ψ eſſe longitudinem puncti ſolſtitialis aeſtiui a termino fixo ♈ puta prima ſtella arietis. Quodſi ergo longitudo primae ſtellae arietis a puncto aequinoctiali verno computata ponatur $= x$, erit $\psi + x = 90^\circ$ et $\psi = 90^\circ - x$, indeque $q - \psi = q + x - 90^\circ$, vbi $q + x$ denotabit aſtri longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam quae ex tabulis habetur. Hinc ergo per meros coſinus erit

$$\begin{aligned} 4\cos.\zeta\cos.\eta = & -\sin 2l\cos.\Phi + \sin.l(1+\cos.l)\cos.(\Phi - 2q - 2x) \\ & - \sin.l(1-\cos.l)\cos.(\Phi + 2q + 2x) \\ & - \mathrm{tang}.\varepsilon(\cos.l - \cos.2l)\cos.(\Phi + 2q + x - \omega) + \mathrm{tang}.\varepsilon \\ & (\cos.l + \cos.2l)\cos.(\Phi - 2q + \omega - x) \\ & + \mathrm{tang}.\varepsilon(\cos.l - \cos.2l)\cos.(\Phi + \omega + x) - \mathrm{tang}.\varepsilon \\ & (\cos.l + \cos.2l)\cos.(\Phi - \omega - x) \end{aligned}$$

vbi $\omega + x$ denotat longitudinem nodi aſcendentis ☊ a puncto aequinoctiali verno computatam.

XXX. Quodſi ergo pro vſu tabularum q denotet ipſam aſtri perturbantis longitudinem a puncto aequinoctiali verno computatam, ſimilique modo ω longitudinem nodi aſcendentis, erit

$$\begin{aligned} 4\cos.\zeta\cos.\eta = & -\sin.2l\cos.\Phi + \sin.l(1+\cos.l)\cos.(\Phi - 2q) - \sin.l \\ & (1-\cos.l)\cos.(\Phi + 2q) \\ & + \mathrm{tang}.\varepsilon(\cos.l - \cos.2l)\cos.(\Phi + \omega) - \mathrm{tang}.\varepsilon(\cos.l \\ & + \cos.2l)\cos.(\Phi - \omega) \\ & - \mathrm{tang}.\varepsilon(\cos.l - \cos.2l)\cos.(\Phi + 2q - \omega) + \mathrm{tang}.\varepsilon(\cos.l \\ & + \cos.2l)\cos.(\Phi - 2q + \omega) \end{aligned}$$

 vbi

vbi ſi loco Φ ſcribatur $\Phi + 90°$ oritur valor alterius formulae $4\cos.\zeta\cos.\theta$, quam ergo ſeorſim euolui non eſt opus. Deinde obſeruo ſi aſtrum non in circulo aequabiliter circa terram circumferatur, vt longitudinis q incrementa non ſint tempori proportionalia, tamen ex cognita inaequalitate motus, hos coſinus, in coſinus aliorum angulorum tempori proportionalium euolui poſſe, quod etiam de ipſa forma $V = \frac{2gee}{v^3}$ eſt intelligendum, quae cum illa coniuncta pariter ad coſinus angulorum tempori proportionalium reuocabitur, quoniam ipſe angulus Φ celeritatem angularem motus diurni terrae deſignans, in his integrationibus vt tempori proportionalis ſpectari poteſt. Quocirca certum eſt has formulas ita ſemper expreſſum iri vt ſit

$$3\alpha V\cos.\zeta\cos.\eta = A\cos.\Phi + B\cos.(\Phi - \beta t) + C\cos.(\Phi - \gamma t) + D\cos.(\Phi - \delta t) + \mathfrak{B}\cos.(\Phi + \beta t) + \mathfrak{C}\cos.(\Phi + \gamma t) + \mathfrak{D}\cos.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

$$3\alpha V\cos.\zeta\cos.\theta = -A\sin.\Phi - B\sin(\Phi - \beta t) - C\sin.(\Phi - \gamma t) - D\sin.(\Phi - \delta t) - \mathfrak{B}\sin(\Phi + \beta t) - \mathfrak{C}\sin(\Phi + \gamma t) - \mathfrak{D}\sin.(\Phi + \delta t) \text{ etc.}$$

vbi pro quolibet aſtro anguli βt, γt, δt etc. quotcunque fuerint, cum coefficientibus facile exhibentur.

XXXI. Statuamus iam $d\Phi = m\,dt$ et $\alpha f = n$, ſitque pro quantitatibus y et z non omiſſis partibus ante commemoratis:

$y = b$

$$\left.\begin{array}{l} y = b\,\text{cos.}\,nt + \text{O}\,\text{cos.}\,\Phi + \text{P}\,\text{cos.}(\Phi-\beta t) + \text{Q}\,\text{cos.}(\Phi-\gamma t) + \text{R}\,\text{cos.}(\Phi-\delta t) \\ \qquad + \mathfrak{P}\,\text{cos.}(\Phi+\beta t) + \mathfrak{Q}\,\text{cos.}(\Phi+\gamma t) + \mathfrak{R}\,\text{cos.}(\Phi+\delta t) \end{array}\right\}\text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = b\,\text{sin.}\,nt - \text{O}\,\text{sin.}\,\Phi - \text{P}\,\text{sin.}(\Phi-\beta t) - \text{Q}\,\text{sin.}(\Phi-\gamma t) - \text{R}\,\text{sin.}(\Phi-\delta t) \\ \qquad - \mathfrak{P}\,\text{sin.}(\Phi+\beta t) - \mathfrak{Q}\,\text{sin.}(\Phi+\gamma t) - \mathfrak{R}\,\text{sin.}(\Phi+\delta t) \end{array}\right\}\text{etc.}$$

ac facta substitutione in prioribus aequationibus fiet

$$\left.\begin{array}{lllll} -nb\,\text{sin.}\,nt & -m\text{O}\,\text{sin.}\,\Phi & -(m-\beta)\text{P}\,\text{sin.}(\Phi-\beta t) & -(m+\beta)\mathfrak{P}\,\text{sin.}(\Phi+\beta t) & \text{etc.} \\ +nb & -n\text{O} & -\;n\,\text{P} & -\;n\,\mathfrak{P} & \\ & +\text{A} & +\;\text{B} & +\;\mathfrak{B} & \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{lllll} nb\,\text{cos.}\,nt & -m\text{O}\,\text{cos.}\,\Phi & -(m-\beta)\text{P}\,\text{cos.}(\Phi-\beta t) & -(m+\beta)\mathfrak{P}\,\text{cos.}(\Phi+\beta t) & \text{etc.} \\ -nb & -n\text{O} & -\;n\,\text{P} & -\;n\,\mathfrak{P} & \\ & +\text{A} & +\;\text{B} & +\;\mathfrak{B} & \end{array}\right\} = 0$$

quae cum congruant, consequimur has determinationes:

$$\text{O} = \frac{\text{A}}{m+n};\quad \text{P} = \frac{\text{B}}{n+m-\beta};\quad \text{Q} = \frac{\text{C}}{n+m-\gamma};\quad \text{R} = \frac{\text{D}}{n+m-\delta}\ \text{etc.}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{B}}{n+m+\beta};\quad \mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{C}}{n+m+\gamma};\quad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{n+m+\delta}\ \text{etc.}$$

sicque quotcunque fuerint termini haec integralia facile formantur.

XXXII. His autem valoribus pro y et z inventis colligimus sequentes formas:

$$y\,\text{sin.}\,\Phi + z\,\text{cos.}\,\Phi = b\,\text{sin.}(\Phi+nt) + (\text{P}-\mathfrak{P})\,\text{sin}\,\beta t + (\text{Q}-\mathfrak{Q})\,\text{sin.}\,\gamma t + (\text{R}-\mathfrak{R})\,\text{sin}\,\delta t\ \text{etc.}$$

$$y\,\text{cos.}\,\Phi - z\,\text{sin.}\,\Phi = b\,\text{cos.}(\Phi+nt) + \text{O} + (\text{P}+\mathfrak{P})\,\text{cos.}\,\beta t + (\text{Q}+\mathfrak{Q})\,\text{cos.}\,\gamma t + (\text{R}+\mathfrak{R})\,\text{cos.}\,\delta t\ \text{etc.}$$

 ex

ex quibus primo veram poli aequatoris a polo eclipticae distantiam $EA = l$ elicimus; cum enim sit:

$$dl = -b\,dt\,\text{sin.}(\Phi + nt) - (P - \mathfrak{P})dt\,\text{sin.}\,\beta t - (Q - \mathfrak{Q})dt\,\text{sin.}\,\gamma t - \text{etc.}$$

si haec distantia media ponatur $= \mathfrak{l}$, erit integrando

$$l = \mathfrak{l} + \frac{b}{m+n}\,\text{cos.}(\Phi + nt) + \frac{P - \mathfrak{P}}{\beta}\,\text{cos.}\,\beta t + \frac{Q - \mathfrak{Q}}{\gamma}\,\text{cos.}\,\gamma t + \frac{R - \mathfrak{R}}{\delta}\,\text{cos.}\,\delta t \text{ etc.}$$

Deinde pro angulo $EAB = \Phi$, quo motus gyratorii celeritas definitur, accuratius cognoscendo habemus:

$$\frac{d\Phi}{dt} = f - \frac{b\,\text{cos.}(\Phi + nt)}{\text{tang.}\,l} - \frac{O}{\text{tang.}\,l} - \frac{(P + \mathfrak{P})}{\text{tang.}\,l}\,\text{cos.}\,\beta t - \text{etc.}$$

vnde per integrationem elicimus:

$$\Phi = ft - \frac{b\,\text{sin.}(\Phi + nt)}{(m+n)\,\text{tang.}\,l} - \frac{Ot}{\text{tang.}\,l} - \frac{(P + \mathfrak{P})\,\text{sin.}\,\beta t}{\beta\,\text{tang.}\,l} - \frac{(Q + \mathfrak{Q})\,\text{sin.}\,\gamma t}{\gamma\,\text{tang.}\,l} - \text{etc.}$$

Denique pro vera longitudine primae stellae arietis $x = 90° - \psi$, colligimus:

$$x = C - \frac{b\,\text{sin.}(\Phi + nt)}{(m+n)\,\text{sin.}\,l} - \frac{Ot}{\text{sin.}\,l} - \frac{(P + \mathfrak{P})\,\text{sin.}\,\beta t}{\beta\,\text{sin.}\,l} - \frac{(Q + \mathfrak{Q})\,\text{sin.}\,\gamma t}{\gamma\,\text{sin.}\,l} - \frac{(R + \mathfrak{R})\,\text{sin.}\,\delta t}{\delta\,\text{sin.}\,l} \text{ etc.}$$

qua aequatione praecessio aequinoctiorum cum omnibus inaequalitatibus determinatur.

XXXIII. Hic denotat m celeritatem motus diurni, vbi loco vnius minuti secundi aliud quodvis tempus datum accipere licet, dummodo reliquae celeritates ad idem tempus referantur. Sumto ergo tempore vnius diei, erit $m = 360°$ cui etiam littera f aequalis est censenda, tum vero erit $n = \alpha m$

vbi

vbi notandum, esse $\alpha = \frac{aa-bb}{bb}$ fractionem minimam ita vt n prae m quasi euanescat. Reliquae celeritates angulares nunc etiam ad tempus vnius diei referendae ex motu et vi astri perturbantis peti debent, cuius locum cum vel Sol vel Luna occupare possit, pro vtroque seorsim has anomalias in motu et axe terrae scrutari conueniet. Vnde mox patebit non opus esse ad horum astrorum inaequalitatem motus respicere cum anomaliae ex eorum motu medio resultantes iam adeo sint exiguae, vt quae insuper ex orbitae excentricitate nascerentur, tuto negligi queant.

De perturbatione motus diurni a vi solis producta.

XXXIV. Pro sole ergo inclinatio ε euanescit, ac posito solis motu diurno $= \mu$ est vt supra vidimus $V = \mu\mu$ et celeritas solis $\frac{dq}{dt} = \mu$; existente q longitudine solis media. Cum ergo sit

$$4 \operatorname{cos}.\zeta \operatorname{cos}.\eta = -\operatorname{sin}.2l \operatorname{cos}.\Phi + \operatorname{sin}.l(1+\operatorname{cos}.l)\operatorname{cos}.(\Phi-2q) \\ - \operatorname{sin} l(1-\operatorname{cos}.l)\operatorname{cos}.(\Phi+2q)$$

erit $\mathfrak{E}t = 2q$, et $\mathfrak{E} = 2\mu$ tum vero

$$A = -\tfrac{3}{4}\alpha\mu\mu \operatorname{sin}.2l,\ B = \tfrac{3}{4}\alpha\mu\mu \operatorname{sin}.l(1+\operatorname{cos}.l),\ \mathfrak{B} = -\tfrac{3}{4}\alpha\mu\mu \\ \operatorname{sin}.l(1-\operatorname{cos}.l)$$

hincque

$$O = \frac{-3\alpha\mu\mu \operatorname{sin}.2l}{4(1+\alpha)m};\ P = \frac{3\alpha\mu\mu \operatorname{sin}.l(1+\operatorname{cos}.l)}{4((1+\alpha)m-2\mu)};\ \mathfrak{P} = \frac{-3\alpha\mu\mu \operatorname{sin}.l(1-\operatorname{cos}.l)}{4((1+\alpha)m+2\mu)}$$

 et

et ſequentes litterae Q, 𝔔 etc. euaneſcent:

XXXV. Quare primo pro diſtantia polorum aequatoris et eclipticae EA $= l$, poſita hac diſtantia media $= \mathrm{I}$, erit

$$l = \mathrm{I} + \frac{b}{(1+\alpha)m}\,\mathrm{cof.}(\Phi + \alpha m t) + \frac{P - \mathfrak{P}}{2\mu}\,\mathrm{cof.}\,2q.$$

Deinde pro angulo EAB $= \Phi$ colligimus

$$\Phi = \left(f + \frac{3\alpha\mu\mu\,\mathrm{cof.}\,l^2}{2(1+\alpha)m}\right)t - \frac{(P+\mathfrak{P})\,\mathrm{fin.}\,2q}{2\mu\,\mathrm{tang.}\,l} - \frac{b\,\mathrm{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha)m\,\mathrm{tang.}\,l}$$

vbi iam tempus t in diebus eſt exprimendum; eritque $f = m - \frac{3\alpha\mu\mu\,\mathrm{cof.}\,l^2}{2(1+\alpha)m}$; ſeu potius denotante f motum terrae diurnum primo impreſſum is ob vim ſolis cenſendus eſt acceleratus particula $\frac{3\alpha\mu\mu\,\mathrm{cof.}\,l^2}{2(1+\alpha)m}$. Denique pro longitudine primae ſtellae arietis obtinemus:

$$x = C - \frac{b\,\mathrm{fin.}(\Phi + \alpha m t)}{(1+\alpha)\,m\,\mathrm{fin.}\,l} + \frac{3\alpha\mu\mu\,\mathrm{cof.}\,l}{2(1+\alpha)m}\,t - \frac{(P+\mathfrak{P})\,\mathrm{fin.}\,2q}{2\mu\,\mathrm{fin.}\,l}$$

vnde patet primam ſtellam arietis quotidie per ſpatiolum $\frac{3\alpha\mu\mu\,\mathrm{cof.}\,l}{2(1+\alpha)m}$ promoueri.

De perturbatione motus diurni a vi lunae producta.

XXXVI. Hic conſtat pro ε angulum circiter 5° capi oportere; quodſi iam q denotet longitudinem lunae mediam, ν eius motum diurnum; ω longitudinem nodi aſcendentis et o eius motum diurnum retrogradum et $\frac{dq}{dt} = \nu$ et $\frac{d\omega}{dt} = -o$. Tum vero ſi maſſa lunae aequalis eſſet terrae foret

$V = \nu\nu$;

$V = \nu\nu$; si ergo statuatur massa terrae ad massam lunae vt 1 ad λ, vt posita terrae massa $= M$ futura sit massa lunae $= \lambda M$ erit $V = \lambda\nu\nu$. Consideremus iam formam:

$$4\cos.\zeta\cos.\eta = -\sin.2l\cos.\Phi + \sin.l(1+\cos.l)\cos.(\Phi-2q) - \operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l + \cos.2l)\cos.(\Phi-\omega)$$
$$-\sin.l(1-\cos.l)\cos.(\Phi+2q) + \operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l - \cos.2l)\cos.(\Phi+\omega)$$
$$+\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l)\cos.(\Phi-2q+\omega)$$
$$-\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)\cos.(\Phi+2q-\omega)$$

atque hinc consequimur hos valores:

$$A = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.2l;\quad \left.\begin{array}{l} B = \tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1+\cos.l) \\ \mathfrak{B} = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1-\cos.l) \end{array}\right\} \beta = 2\nu$$

sicque

$D = -C$

$$\left.\begin{array}{l} C = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l) \\ \mathfrak{C} = +\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l) \end{array}\right\} \gamma = -\theta$$

et

$\mathfrak{D} = -\mathfrak{C}$

$$\left.\begin{array}{l} D = +\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l) \\ \mathfrak{D} = -\tfrac{3}{4}\alpha\lambda\nu\nu\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l) \end{array}\right\} \delta = 2\nu+\theta$$

XXXVII. Ex his porro sequentes valores elicientur:

$$O = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\sin.2l}{4(1+\alpha)m};\quad P = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1+\cos.l)}{4((1+\alpha)m-2\nu)}$$
$$\mathfrak{P} = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\sin.l(1-\cos.l)}{4((1+\alpha)m+2\nu)}$$
$$Q = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l+\cos.2l)}{4((1+\alpha)m+\theta)}$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\operatorname{tang}.\varepsilon(\cos.l-\cos.2l)}{4((1+\alpha)m-\theta)}$$

R =

$$\mathrm{R} = \frac{+3\alpha\lambda\nu\nu\,tang.\,\varepsilon(cos.\,l + cos.\,2l)}{4((1+\alpha)m - 2\nu - o)}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{-3\alpha\lambda\nu\nu\,tang.\,\varepsilon(cos.\,l - cos.\,2l)}{4((1+\alpha)m + 2\nu + o)}$$

vnde pro obliquitate eclipticae oritur

$$l = \mathrm{l} \ldots + \frac{\mathrm{P}-\mathfrak{P}}{2\nu} cos.\,2q - \frac{\mathrm{Q}+\mathfrak{Q}}{o} cos.\,\omega + \frac{\mathrm{R}-\mathfrak{R}}{2\nu+o} cos.\,(2q-\omega)$$

pro celeritate rotationis seu angulo $EAB = \Phi$ vero

$$\Phi = \ldots \frac{3\alpha\lambda\nu\nu\,cos.\,l^2}{2(1+\alpha)m}\,t - \frac{(\mathrm{P}+\mathfrak{P})\,sin.\,2q}{2\nu\,tang.\,l} + \frac{(\mathrm{Q}+\mathfrak{Q})\,sin.\,\omega}{o\,tang.\,l} - \frac{(\mathrm{R}+\mathfrak{R})\,sin.\,(2q+\omega)}{(2\nu+o)\,tang.\,l}$$

et pro longitudine 1 ✱ ♈

$$x = \ldots + \frac{3\alpha\lambda\nu\nu\,cos.\,l}{2(1+\alpha)m}\,t - \frac{(\mathrm{P}+\mathfrak{P})\,sin.\,2q}{2\nu\,sin.\,l} + \frac{(\mathrm{Q}+\mathfrak{Q})\,sin.\,\omega}{o\,sin.\,l} - \frac{(\mathrm{R}+\mathfrak{R})\,sin.\,(2q+\omega)}{(2\nu+o)\,sin.\,l}$$

sicque a vi lunae motus diurnus primum impressus terrae augetur particula $\frac{3\alpha\lambda\nu\nu\,cos.\,l^2}{2(1+x)m}$.

Euolutio numerica harum formularum.

XXXVIII. Primo cum l denotet distantiam polorum aequatoris et eclipticae, erit nunc quidem eius valor medius $= 23°, 29'$, quo in his formulis vti poterimus. Deinde ex tabulis astronomicis colligimus:

motum solis diurnum medium $\mu = 3548''$
motum lunae diurnum medium $\nu = 47435$
motum nodorum diurnum medium $o = 190\frac{1}{2}$
inclinationem orbitae lunae mediam $\varepsilon = 5°$

et

et pro motu diurno medio ipsius terrae circa axem sumamus $(1+\alpha)m = 360° = 1296000''$ quandoquidem in terminis minimis valores proxime veros adhibuisse sufficit. Hinc pro formulis ex vi solis natis erit:

$O = -7'',2849\,\alpha\,\text{sin.}\,2\,l$; $\frac{P}{2\mu} = +0,001032\,\alpha\,\text{sin.}\,l(1+\text{cos.}\,l)$

0,8624235 7,0137954

$\frac{\mathfrak{P}}{2\mu} = -0,001021\,\alpha\,\text{sin.}\,l(1-\text{cos.}\,l)$

7,0090374.

Pro formulis autem ex vi lunae natis:

$O = -1302'',13\,\alpha\lambda\,\text{sin.}\,l$; $\frac{P}{2\nu} = +0,014809\,\alpha\lambda\,\text{sin.}\,l(1+\text{cos.}\,l)$

3.1146541 8,1705403

$\frac{\mathfrak{P}}{2\nu} = -0,012777\,\alpha\lambda\,\text{sin.}\,l(1-\text{cos.}\,l)$

8,1064437

$\frac{Q}{o} = -0,59792\,\alpha\lambda(\text{cos.}\,l + \text{cos.}\,2\,l)$

9,7766439

$\frac{\mathfrak{Q}}{o} = +0,59811\,\alpha\lambda(\text{cos.}\,l - \text{cos.}\,2\,l)$

9,7767779

$\frac{R}{2\nu+o} = +0,00129\,\alpha\lambda(\text{cos.}\,l + \text{cos.}\,2\,l)$

7,1116918

$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+o} = -0,00112\,\alpha\lambda(\text{cos.}\,l - \text{cos.}\,2\,l)$

7,0478673.

XXXIX. Si porro loco l valorem $23°,29'$ substituamus hi valores ita se habebunt

pro vi solis	pro vi lunae
$O = -5'',3249\alpha$	$O = -951'',80\alpha\lambda$
$0,7263152$	$2,9785458$
$\frac{P}{2\mu} = +0,0007886\alpha$	$\frac{P}{2\nu} = +0,011313\alpha\lambda$
$\frac{\mathfrak{P}}{2\mu} = -0,0000337\alpha$	$\frac{\mathfrak{P}}{2\nu} = -0,000422\alpha\lambda$
$\frac{P-\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,0008223\alpha$	$\frac{P-\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,011735\alpha\lambda$
$\frac{P+\mathfrak{P}}{2\mu} = +0,0007549\alpha$	$\frac{P+\mathfrak{P}}{2\nu} = +0,010891\alpha\lambda$

$$\frac{Q}{o} = -0,95643\alpha\lambda$$
$$\frac{\mathfrak{Q}}{o} = +0,14043\alpha\lambda$$
$$\frac{Q-\mathfrak{Q}}{o} = -1,09686\alpha\lambda$$
$$\frac{Q+\mathfrak{Q}}{o} = -0,81600\alpha\lambda$$
$$\frac{R}{2\nu+o} = +0,00207\alpha\lambda$$
$$\frac{\mathfrak{R}}{2\nu+o} = -0,00026\alpha\lambda$$
$$\frac{R-\mathfrak{R}}{2\nu+o} = +0,00233\alpha\lambda$$
$$\frac{R+\mathfrak{R}}{2\nu+o} = +0,00181\alpha\lambda.$$

XL. Quodsi iam longitudinem solis littera p designemus, vt a longitudine lunae q distinguatur, ternae nostrae formulae pro motu terrae diurno inventae ita se habebunt tempore t in diebus expresso:

$$z = I + k\cos.(\Phi + \alpha mt) + 0,0008223\alpha\cos.2p + 1,09686\alpha\lambda\cos.\omega$$
$$+ 0,011735\alpha\lambda\cos.2q + 0,00233\alpha\lambda\cos.(2q-\omega)$$

$x = C$

$$x = C - \frac{k\sin.(\Phi+\alpha m t)}{\sin. l} + \frac{5'',3249\,\alpha t}{\sin. l} - \frac{0,0007549\,\alpha}{\sin. l}\sin. 2p$$
$$+ \frac{951'',80\,\alpha\lambda t}{\sin. l} - \frac{0,010891\,\alpha\lambda}{\sin. l}\sin. 2q$$
$$- \frac{0,81600\,\alpha\lambda}{\sin. l}\sin.\omega$$
$$- \frac{0,00181\,\alpha\lambda}{\sin. l}\sin.(2q+\omega)$$

$$\Phi = ft - \frac{k\sin.(\Phi+\alpha m t)}{\operatorname{tang.} l} + \frac{5'',3249\,\alpha t}{\operatorname{tang.} l} - \frac{0,0007549\,\alpha}{\operatorname{tang.} l}\sin. 2p$$
$$+ \frac{951'',80\,\alpha\lambda t}{\operatorname{tang.} l} - \frac{0,010891\,\alpha\lambda}{\operatorname{tang.} l}\sin. 2q$$
$$- \frac{0,81600\,\alpha\lambda}{\operatorname{tang.} l}\sin.\omega$$
$$- \frac{0,00181\,\alpha\lambda}{\operatorname{tang.} l}\sin.(2q+\omega).$$

XLI. Quodſi hic coefficientes ſinuum et coſinuum in minuta ſecunda conuertamus reperiemus:

$$l = 1 + k\cos.(\Phi+\alpha m t) + 170\,\alpha\cos. 2p \quad + 226230\,\alpha\lambda\cos.\omega$$
$$+ 2421\,\alpha\lambda\cos. 2q + \quad 480\,\alpha\lambda\cos.(2q+\omega)$$

$$x = C - \frac{k\sin.(\Phi+\alpha m t)}{\sin. l} + 13'',363\,\alpha t - 391''\,\alpha\sin. 2p$$
$$+ 2388'',5\,\alpha\lambda t - 5637\,\alpha\lambda\sin. 2q$$
$$- 422383\,\alpha\lambda\sin.\omega$$
$$- \quad 937\,\alpha\lambda\sin.(2q+\omega)$$

$$\Phi = ft - \frac{k\sin.(\Phi+\alpha m t)}{\operatorname{tang.} l} + \quad 12'',256\,\alpha t - \quad 358''\,\alpha\sin. 2p$$
$$+ 2190,7\,\alpha\lambda t \quad - \quad 5170\,\alpha\lambda\sin. 2q$$
$$- 387400\,\alpha\lambda\sin.\omega$$
$$- \quad 859\,\alpha\lambda\sin.(2q+\omega)$$

vbi loco $\frac{b}{(1+\alpha)m}$ ſcripſi k. In ſtatu autem, quo terra verſatur haec conſtans k euaneſcit, quod niſi eueniret, motus quidam oſcillatorius ipſi diurno foret admixtus, cuius oſcillationes abſoluerentur tot diebus, quoties fractio α in vnitate continetur.

De obliquitate eclipticae eiusque variatione.

XLII. Poſito I pro obliquitate eclipticae media, ea erit maxima, ſi longitudines ſolis $= p$ et Lunae $= q$ vel ſint o vel 6 ſignorum, ſimulque nodus aſcendens in ipſum punctum aequinoctiale vernum incidat, vt ſit $\omega = 0$; tum enim erit maxima eclipticae obliquitas $= I + 170\alpha + 229131\alpha\lambda$ min. ſec. Minima autem reperietur, ſi nodus deſcendens incidit in principium arietis vt ſit $\omega = 180°$, ſimul vero Sol et Luna in punctis ſolſtitialibus verſentur; tum autem erit minima obliquitas $= I - 170\alpha - 228171\alpha\lambda$ min. ſec. ſicque tota variatio, quatenus a viribus Solis et Lunae efficitur erit $340\alpha + 457302\alpha\lambda$ min. ſec. quae ex obſeruationibus aeſtimatur quaſi $18''$.

XLIII. Quo autem hinc veros valores quantitatum α et λ definire queamus perpendamus promotionem mediam primae ſtellae arietis, quae interteruallo vnius diei fit per ſpatiolum $13\frac{1}{3}\alpha+2388\frac{1}{2}\alpha\lambda$ min. ſec. hincque interuallo vnius anni per $4870\alpha+872400\alpha\lambda$ min. ſec. quod ex obſeruationibus aeſtimatur $50\frac{1}{3}''$. Prior autem valor $18''$ ob paruitatem non tam certus videtur, vt nulla correctione egeat. Factis ergo aliquot hypotheſibus pro nutatione numeri λ indeque fractionis α valor ita prodit

ſi nutatio	$18''$	$18''\frac{1}{3}$	$18''^{2}$	$19''$
erit	$\lambda=\frac{1}{104}$;	$\frac{1}{97}$;	$\frac{1}{91}$;	$\frac{1}{85}$
et	$\alpha=\frac{1}{263}$;	$\frac{1}{275}$;	$\frac{1}{288}$;	$\frac{1}{300}$

vnde patet vt phaenomenis ſatisfiat, maſſam lunae vix maiori terrae parti quam $\frac{1}{85}$ aequari poſſe. Neque ergo ſententia *Neutoni* ſubſiſtere poteſt, qui lunae maſſam parti quadrageſimae terrae aequalem aeſtimauit; et ſententia Cel. *Dan. Bernoulli* multo propius ad veritatem accedere eſt cenſenda, qua lunae tantum pars terrae ſeptuageſima tribuitur. Ac ſi nutationem axis terrae non vltra $19''$ per obſeruationes ſtatuere licet, maſſa lunae adhuc eſt minor, neque partem octogeſimam quintam terrae ſuperare poteſt.

XLIV. Ponamus ergo $\alpha=\frac{1}{300}$ et $\lambda=\frac{1}{85}$, hincque $\alpha\lambda=\frac{1}{85500}$ et variationes in obliquitate eclipticae ita a longitudine ſolis p, longitudine lunae q et longitudine nodi aſcendentis ω pendebunt, vt ſit

$$l=l+0,57\operatorname{coſ.}2p+0,095\operatorname{coſ.}2q+8,87\operatorname{coſ.}\omega+0,019\operatorname{coſ.}(2q+\omega)$$

 coeffi-

coefficientibus in minutis ſecundis expreſſis. Cum igitur ſecunda et quarta aequatio ne decimam quidem minuti ſecundi partem conficiant, iis omiſſis erit

$$l = l + 0,57 \operatorname{coſ.} 2p + 8,87 \operatorname{coſ.} \omega$$

quarum aequationum prior coſinui duplae longitudinis ſolis eſt proportionalis vixque ſemiminutum ſecundum ſuperat poſterior vero coſinui longitudinis nodi aſcendentis eſt proportionalis, et fere ad 9″ aſcendere poteſt, quod egregie cum obſeruationibus conſentire videtur.

De praeceſſione aequinoctiorum ſeu longitudine primae ſtellae arietis.

XLV. Hic primo conſideranda eſt huius ſtellae longitudo media, quae ad quoduis tempus ex praeceſſione annua facile determinatur. Sit ergo $\mathfrak{x}$ longitudo media ad datum quoduis tempus, ac pro eius longitudine vera inuenienda, poſitis ad hoc tempus longitudine ſolis $= p$, lunae $= q$ et nodi aſcendentis $= \omega$ erit eius longitudo vera:

$$x = \mathfrak{x} - 1,30 \operatorname{ſin} 2p - 0,22 \operatorname{ſin.} 2q - 16,56 \operatorname{ſin.} \omega$$

omiſſa poſtrema aequatione, vtpote partem trigeſimam minuti ſecundi non ſuperante. Hinc patet ſi nodus aſcendens fuerit in ♈ 0°, longitudinem mediam imminui $16\frac{1}{2}$ min. ſec., ſin autem ſit in ♎ 0°, tantundem augeri, tum vero ſi ſol verſetur in ♉ 15°, vel ♏ 15°, eam minui $1\frac{1}{3}$ ſec. tantumdem vero

vero augeri, si versetur in ♌ 15° vel ♒ 15°; correctio a loco lunae pendens negligi potest. Ex quo perspicitur longitudinem veram stellarum fixarum a media vsque ad 18″ discrepare posse.

De inaequalitate in ipso motu diurno terrae a viribus solis ac lunae producta.

XLVI. Haec inaequalitas ab angulo Φ pendet, quem videmus non exacte tempori esse proportionalem; cum sit reuera:

$$\Phi = 360° t - 1,20 \sin. 2p - 0,20 \sin. 2q - 15,20 \sin. \omega - 0,03 \sin. (2q + \omega).$$

Est autem Φ angulus EAB, quo primus meridianus terrae AB a circulo coelesti AE, qui est colurus solstitiorum ab occidente in orientem recedit, quod etiam de quouis alio meridiano terrestri, et coluro aequinoctiorum est intelligendum. Ita si secundum motum aequabilem colurus aequinoctiorum, seu punctum aequinoctiale vernum iam per nostrum meridianum, occasum versus angulo f processisset eius vera elongatio a nostro meridiano esset $\Phi = f - 1,20 \sin. 2p - 0,20 \sin. 2q - 15,20 \sin. \omega$ omissa vltima inaequalitate vt insensibili.

XLVII. Quoniam culminatio puncti aequinoctialis verni in ephemeridibus quotidie assignari solet,

let, nunc quidem cognoſcimus illis temporis momentis punctum aequinoctiale vernum ſi ſumma harum aequationum ſit negatiua ad meridianum nondum appuliſſe, ſed ab eo etiamnunc eſſe remotum tot minutis ſecundis, quot aequationes illae praebent. Sin autem tota aequatio fiat poſitiua, indicio id eſt punctum aequinoctionale vernum iam per meridianum tranſiiſſe, totidemque minutis ſecundis ab eo occidentem verſus eſſe remotum. Illo igitur caſu ſerius culminabit temporis interuallo, quo per motum diurnum aequatio illa conficitur, hoc vero caſu, iam ante tantum temporis interuallum culminauit.

XLVIII. Manifeſtum autem eſt hanc motus diurni inaequalitatem tantum in punctis aequinoctialibus et ſolſtitialibus cerni, cum ea proxime ſit aequalis inaequalitati in praeceſſione aequinoctiorum; ita vt in ſtellis fixis nulla huiusmodi inaequalitas locum ſit habitura, ſed interualla temporum, quibus eadem ſtella fixa ad meridianum appellit, tuto pro aequalibus haberi queant. Reſpectu ergo ſtellarum fixarum motus vertiginis terrae perfecte eſt aequabilis, neque vllam perturbationem a viribus ſolis et lunae patitur, ſicque illa motus irregularitas vnice ab inaequabili aequinoctiorum praeceſſione proficiſci eſt cenſenda, neque ergo variatio illa in longitudine ſtellarum fixarum effecta vllam variationem in earum culminatione gignit; ex quo neceſſe

necesse est, vt punctorum aequinoctialium culminatio totam illam irregularitatem persentiscat.

XLIX. Hi effectus a viribus solis ac lunae in motu terrae diurno producti probe sunt distinguendi ab iis, quos a viribus planetarum in terram agentibus nasci olim demonstraui, qui etiamsi quoque puncta aequinoctialia et obliquitatem eclipticae afficiant, tamen ex fonte prorsus diuerso promanant, dum iis ipsum planum eclipticae immutatur, aequatore manente inuariato. Atque ex his binis causis coniunctis omnes irregularitates, quibus stellae fixae obnoxiae videntur, explicari oportet; quae phaenomena nunc quidem ab Astronomis eo maiori cura sunt obseruanda, cum ad ea perpetuo omnes illae minimae aberrationes in coelo, ad quas maxime sunt attenti, referri debeant.

COMMENTATIO
DE VTILISSIMA AC COMMODISSIMA DIRECTIONE POTENTIARVM FRICTIONIBVS MECHANICIS ADHIBENDARVM.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

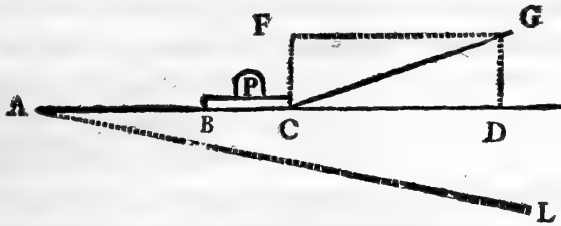
§. 1.

Quoties onera ſuper plano aſpero mouenda occurrunt, fieri id nequit, etiamſi planum perfecte fuerit horizontale, quin onera, pro ratione ponderis, reſiſtentiam manifeſtent, quae Mechanicis frictio vocatur: huiuscemodi reſiſtentiam ſuperare debent traharii iumentaue cum traham prouehunt: alius eſt indolis frictio in curribus, rhedis aliisue machinamentis rotalibus, quae multo minori opera protrahuntur: Cum vero baiuli in ripa incedentes nauem poſt ſe trahunt, hi quidem reſiſtentiam a naue experiuntur aut patiuntur, at haec reſiſtentia nihil commune habet cum frictione. Nullo interim habito diſcrimine, diſputatum fuit, ſub quanam directione potentiae motrices eſſent applicandae vt maximus inde fructus perciperetur; valde paradoxa videtur quaeſtio, an motrix potentia non ſit ſemper directe opponenda reſiſtentiae, ſunt qui de de hoc dubitant axiomate; veram autem dubitandi, vel potius negandi, rationem plane intactam, si bene memini, reliquerunt: duobus dicam verbis quod res est; quoties resistentia inuariata manet dum agit potentia mouens, saluum manebit axioma; quandocunque autem resistentia ab actione potentiae variatur, idem fallere poterit axioma. Interim nemo dubitabit quin potentia mouens in ipso plano verticali per directionem motus transeunte locanda sit; quaeritur saltem an directio potentiae ad directionem motus inclinanda sit in praefato plano nec ne.

§. 2. Cum nuperrime hanc praefatam controversiam iterum a viro, cuius merita magni facio, viderem agitatam, eandemque ad normam, quam dixi, perpenderem, non poteram non protinus perspicere, mensuram superandae frictionis pendere ab ipsa directione potentiae onus protrahentis; etenim quando potentia trahens superiora versus dirigitur, tunc ipsum corpus simul protrahitur atque subleuatur; posterior autem actio frictionem diminuit: sic igitur aliquod oritur ab obliquitate potentiae dispendium simulque aliquod lucrum; scilicet potentia protrahens absoluta non tota vtiliter impenditur, sed viciffim ipsa diminuitur resistentia. Iam itaque veram habemus dubitandi causam, num potentia directe num oblique oneri protrahendo sit applicanda; si obliquitas potentiae plus noceat quam diminutio resistentiae prodest, conducet onus directe protrahere; ſin minus, praeferenda erit directio potentiae aliquomodo obliqua: haec cum ita ſint, tenuis calculus litem diiudicabit; nec iniucundum fuit intelligere praeſtare potentias obliquas adhibere quam directas, obliquitatem autem ſuos habere limites, quos vltra citraque nullum lucrum adhuc ſperari poſſit, ipſum vero lucrum alicubi eſſe maximum. Haec vt tanto planiora fiant paucula quaedam de frictionibus praemonebo.

§. 3. Corpora ſuper plano quieſcentia non aliter dici poſſunt frictionem habere quam *virtualiter* ſtatim vero ac mouentur ſubito totam ſuam frictionem manifeſtant ſiue lentiori ſiue velociori motu ferantur, nec enim quicquam velocitates ad frictionem ſiue augendam ſiue diminuendam conferre experimentis innotuit. Idem corpus ſimiliter poſitum alii atque alii plano ſuper incumbens aliam atque aliam frictionem motus opponit, ita quoque idem planum diuerſis corporibus ſuppoſitum diuerſas frictiones producit, etiamſi corpora nec figura, nec ſitu, nec pondere ſint diuerſa. Si porro eidem ſuperficiei planum contingenti modo maius modo minus imponatur pondus erit quantitas frictionis ſemper ponderi poportionalis, perinde quoque eſt ſiue partes ſuperficiei vniformiter ſiue inaequaliter ad planum apprimantur, modo ſumma appreſſionum eadem maneat; ſingula autem corporis puncta motu inter ſe parallelo moueri hic ſubintelligendum eſt: hinc

hinc ſequitur frictionem diminui a potentia quae appreſſionem corporis contra planum ſuppoſitum diminuit et eſſe diminutionem frictionis diminutioni appreſſionis proportionalem. Sequitur etiam frictionem ſimilis ſuperficiei, cui idem pondus inſiſtit, eandem eſſe, ſiue maior ſiue minor ſit ſuperficies planum contingens. His praemonitis rem ipſam aggredior primo autem agam de frictione oneris ſuper plano horizontali promouendi atque inquiram, ſub quanam directione potentia oneri ſit applicanda, vt minima potentia ad motum requiratur.



§. 4. Sit iam planum horizontale AE, cui incumbit ſuper baſi BC pondus P: Putetur puncto C potentia applicata, quae pondus P trahat in directione CE; talem potentiam deinceps vocabo, *directam*, quae eſt aequalis integrae frictioni, ponderi P ſuper baſi BC, debitae, quae cum ſit ipſi ponderi proportionalis indicabo potentiam *directam* per $\frac{P}{n}$; pendet autem numerus n a natura ſuperficierum quibus baſis corporis et planum ſuppoſitum ſe contingunt ita vt communiter intra 2 et 4 conſiſtat.

His ita definitis ponatur nunc, potentiam aliam applicari ſub directione CG ſitque angulus inclinationis $GCD = z$ ipſaque potentia corpus protrahens $= \pi$; erit iam potentia obliqua π ita determinanda vt cum potentia directa $\frac{P}{n}$ comparari poſſit: hunc in finem repraeſentabimus potentiam π linea CG eamque reſoluemus in verticalem CF atque horizontalem CD, quarum prior, ad protractionem plane inutilis, tota impenditur in ſublevandum onus atque diminuendam appreſſionem eius contra planum ſuppoſitum, dum poſterior, appreſſionem nihil mutans, tota impenditur in protractionem. Eſt autem potentia $CF = \pi \,\text{ſin.}\, z$; hinc appreſſio corporis ad planum $= P - \pi \,\text{ſin.}\, z$ atque adeo frictio $= \frac{P - \pi \,\text{ſin.}\, z}{n}$, quae frictio facienda eſt aequalis potentiae $CD = \pi \,\text{coſ.}\, z$, vnde $\frac{P - \pi \,\text{ſin.}\, z}{n} = \pi \,\text{coſ.}\, z$ ſive $\pi = \frac{P}{n \,\text{coſ.}\, z + \text{ſin.}\, z}$.

§. 5. Ex praemiſſa formula, potentiam CG exprimente, facile intelligitur, ſi primo angulus z nullus ſit poſteaque paulatim increſcat, fore vt iſta potentia ſenſim decreſcat ad certum vsque gradum deindeque iterum augeſcat: igitur directio erit, qua potentia minima requiritur ad onus promouendum; haec autem directio determinabitur, ſi denominator $n \,\text{coſ.}\, z + \text{ſin.}\, z$ quantum fieri poteſt, maximus accipiatur adeoque differentiale ipſius ponatur $= 0$: ſic erit $- n\, dz \,\text{ſin.}\, z + dz \,\text{coſ.}\, z = 0$ vel $\frac{\text{ſin.}\, z}{\text{coſ.}\, z} = \frac{1}{n}$ ſiue $\text{tang.}\, z = \frac{1}{n}$.

Hinc

Hinc etiam ſin. $z = \frac{1}{\sqrt{nn+1}}$ atque coſ. $z = \frac{n}{\sqrt{nn+1}}$ et π, cum eſt minima, $= \frac{P}{\sqrt{nn+1}}$, vnde ſequitur eſſe potentiam directam ad potentiam minimam vt $\sqrt{nn+1}$ ad n.

Intelligimus iam non parum ſubleuari iumenta aut baiulos in protrahendis trahis, cum potentiam praefata lege ſurſum dirigunt; tanto maius autem fore emolumentum, quanto maior ſit frictio ſiue quanto minor aſſumatur litera n. Haec ſolo intuitu paruulae ſubiunctae tabellae apparebunt, vbi pondus ipſum protrahendum indicatur per 1000, intenſitas autem frictionis decreſcit ab $\frac{1}{2}$ vsque $\frac{1}{10}$.

Intenſitas frictionis ſiue $\frac{1}{n}$	Potentia directa ſiue $\frac{P}{n}$	Inclinatio Potentiae ſiue angulus z	Potentia protrahens ſiue π
0, 5	500	26°. 34′	447
0, 4	400	21. 48	371
0, 3	300	16. 42	288
0, 2	200	11. 19	196
0, 1	100	5. 43	$99\frac{1}{2}$

§. 6. Quum trahae ſuper via ſilicata ſicca trahuntur, puto eſſe frictionem propemodum aequalem dimidio ponderi ſiue $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$; igitur theoria noſtra docet, funes ad angulum 26 graduum, 34 min. eſſe dirigendos, hancque regulam aurigas noſtros non male obſeruare vidi: ſic diuturnus rerum

rum vſus apud plebem non raro quidem praeuenit docilem eruditorum ſolertiam, verum inuenta aut obſeruata ſolus nunquam perficit.

At ſi via niue calcata fuerit obtecta, multo fiet minor frictionis intenſitas multoque minus funes ductarii, quibus equi trahae alligantur, erunt inclinandi nec, meo quidem iudicio, vltra duodecim gradus: imo ſi vel omnia recte inſtituantur, parum iuuabit lucellum, vtpote quod cum ipſa frictione decreſcit et quidem propemodum in ratione frictionum quadrata.

§. 7. Quod ſi nunc hancce noſtram theoriam ad machinamenta rotalia, veluti rhedas, currus etc. applicemus, facile intelligimus, nihil aut parum admodum emolumenti ab obliquitate potentiarum ſperari poſſe, praeſertim ſi axes bene fuerint axungia obliniti: ita enim frictiones ſuper axe, non vltra trientem appreſſionum aſſurgent et ab actione rotarum inſigniter porro diminuuntur; ita vt, rebus omnibus bene perpenſis, integram reſiſtentiam non vltra vigeſimam totius ponderis partem communiter aſſurgere credam: ſic foret $\frac{1}{n} = \frac{1}{20} = 0,05$ ipſaque obliquitas debita tres gradus non attingeret nec potentia ipſa vltra vnam octingenteſimam potentiae directae partem diminueretur, cuiusmodi lucellum nemo curabit: tota res paucis expedietur verbis; *vtiliter adhibetur obliquitas potentiae quando reſiſten-*

ſiſtentia directa notabilem ponderis promouendi partem efficit ipſaque reſiſtentia a diminutione vel ſubleuatione ponderis notabiliter diminuitur, haec regula valebit quaecunque ſit reſiſtentiae ſpecies aut quomodocunque oriatur; modo itaque detur relatio inter imminutum pondus oneris horizontaliter promouendi eiusque reſiſtentiam directam imminutam, determinari poterit obliquitas ſub qua potentia vtiliſſime adhibetur. Sic igitur theoria ad alias quoque reſiſtentiae ſpecies adhiberi poterit, veluti ad protrahenda corpora aquis inſidentia.

In his corporibus potentia ſurſum inclinata duplicem habebit effectum; primus erit vt corporis natantis pars ſubmerſa imminuatur atque ſic minorem reſiſtentiam ab aquis patiatur, alter vt poſitio naturalis corporis immutetur, a qua ſitus immutatione reſiſtentia aquarum modo diminui modo augeri poteſt pro configuratione corporis; hic inuariata ſupponitur motus velocitas. Si foret corpus cylindricum aquis innatans in eoque conſtanter ſupponatur axis verticalis, pro tali corpore data velocitate protrahendo eaedem valerent regulae quas dedimus pro frictione corporis ſuper plano horizontali moti ſuperanda. At ſi de nauibus ab hominibus vel equis, in ripa progredientibus, protrahendis quaeſtio ſit, deuoluemur ad caſus, quibus potentia directa fere nulla eſt, ſi cum pondere totius nauis comparetur, ſic vt potentia naui ſit tantum non horizontaliter applicanda atque plane negligi debeat parum lucelli quod ab obliquitate ſperari poſſit. Male igitur ſcriptores nullaque ratione innixi huiuscemodi reſiſtentias cum frictionibus immediatis perinde habuerunt, ac ſi vbique potentiae ſub eodem obliquitatis angulo eſſent applicandae.

§. 8. Quae dixi de directione potentiae in frictiones ſuper plano horizontali ſuperandas adhibendae, egregie confirmantur, ſi tota res hoc alio modo concipiatur, fingatur nempe catena extenſa et vbique in planum ſuppoſitum horizontale vniformiter grauitans: tum vero extremitati eius anteriori potentia applicetur, qua catena oblique ſurſum et antrorſum in directione ipſius catenae protrahatur: ſit rurſus potentia iſta $=\pi$, angulus obliquitatis eius $=z$, pondus catenae $=P$, longitudo eius $=l$, potentia directa in totam catenam protrahendam requiſita $\frac{P}{n}$. Nunc autem patet fore vt pars catenae eleuetur atque ab omni frictione liberetur, dum pars reliqua etiamnum humo incumbens frictionem ſuam retinet; igitur ſi potentia obliqua π reſoluatur in verticalem et horizontalem, tunc verticalis tota impendetur in eleuationem partis eleuatae, horizontalis vero in protractionem partis humo incumbentis; ſit pars catenae eleuatae $=x$, pars altera humo incumbens $=l-x$, fiet pondus partis eleuatae $=\frac{x}{l}P$ alteriusque partis $=\frac{l-x}{l}P$, erit autem huius poſterioris partis frictio $=\frac{l-x}{nl}P$; hinc ſequi-

ſequitur fore potentiam verticalem, qua pars catenae eleuatur $=\frac{x}{l}P$ et potentiam horizontalem, qua catena protrahitur $=\frac{l-x}{nl}P$; igitur erit potentia abſoluta $\pi=P\sqrt{\left(\frac{xx}{ll}+\frac{ll-2lx+xx}{nnll}\right)}$, quae cum debet eſſe minima, facienda erit longitudo $x=\frac{l}{nn+1}$, ergo potentia verticalis extremitati catenae applicata ſiue $\frac{x}{l}P$ iam erit $=\frac{P}{nn+1}$ atque potentia horizontalis protrahendae catenae dicata ſiue $\frac{(l-x)P}{nl}=\frac{P}{n}-\frac{P}{n^3+n}=\frac{nP}{nn+1}$; hinc potentia abſoluta ſiue $\pi=P\sqrt{\left(\frac{1}{(nn+1)^2}+\frac{n^2}{(nn+1)^2}\right)}=P\sqrt{\left(\frac{1}{nn+1}\right)}$; atque haec quantitas prorſus eadem eſt cum ea, quam §. 5. alia methodo inuenimus. Eſt porro potentia horizontalis ſiue $\frac{nP}{nn+1}$ ad potentiam verticalem ſiue $\frac{P}{nn+1}$ ſicuti ſinus totus ad tangentem anguli quaeſiti z, vnde tang. $z=\frac{1}{n}$, quod idem pariter §. 5. inuenimus.

§. 9. Huiuscemodi quaeſtiunculae aliae haud paucae, quae omnes inter ſe conſentiunt, afferri poſſent; ſuperaddam vnicam; ſit ſcala ex duobus vectibus parallelis et aequilongis conſtans eique onus ſuper impoſitum; alterum ſcalae extremum humo ſuperincumbat horizontali, alterum a iumento vel baiulo geſtetur ſitque ſic ſcala onuſta protrahenda; quaeritur vbinam centrum grauitatis iſtius ſyſtematis locandum ſit vt minima potentia abſoluta requiratur. Solutio huius quaeſtionis plane eadem eſt, quae quaeſtionis praecedentis, ſi eaedem accipiantur denominationes, quarum analogismum quisque me

 non

non explicante, perſpiciet, modo nunc per x intelligatur diſtantia inter centrum grauitatis et extremitatem ſcalae poſteriorem atque per $l-x$ diſtantia inter centrum grauitatis atque extremitatem anteriorem ſic vt inuertatur ordo, cuius ratio per ſe patet. Hoc modo fiet iterum $x = \frac{l}{nn+1}$; potentia verticalis extremitati anteriori ſcalae applicata $= \frac{P}{nn+1}$ atque potentia horizontalis protrahendae ſcalae onuſtae dicata $= \frac{nP}{nn+1}$; potentia abſoluta $\pi = \frac{P}{\sqrt{nn+1}}$; quae omnia vtut diuerſimode ad mechanicam practicam accommodata, egregie, inter ſe conſpirant, ita vt quaecunque fuerit frictionis intenſitas indicata per $\frac{1}{n}$, eadem vbique oriatur potentia abſoluta, cum eſt minima, quae §. 5. definita fuit.

Fuerit v. gr. $n = 2$, erit catena ita oblique trahenda vt quinta eius pars de humo eleuetur et reliquae quatuor quintae partes eidem porro incumbant. In ſcala autem ita erit pondus ſuper imponendum vt centrum grauitatis totius ſyſtematis quinta parte totius longitudinis ab extremitate poſteriori diſtet, ab altera extremitate quatuor quintis partibus.

Si maior fuerit valor litterae n, id eſt, ſi minor ponatur frictionis intenſitas, minor etiam catenae portio eleuanda magisque centrum grauitatis ſcalae onerandae erit ad extremitatem poſteriorem appropinquandum.

§. 10.

§. 10. Videamus nunc quoque, quomodo res instituenda sit in via vniformiter accliui: Hunc in finem accipiatur, in figura paragrapho quarta apposita, linea AL pro horizontali, sic vt AE denotet viam accliuem sitque angulus accliuitatis siue angulus $EAL = A$; lineae autem FC et GD non vt verticales sed vt perpendiculares ad lineam AE considerentur. Nunc, praeter frictionem, corpus suo pondere insuper resistit et liquet fore potentiam directam, ad protrahendum corpus requisitam $= P \sin. A + \frac{P \cos. A}{n}$. Quod si vero potentia π obliqua sursum trahat sub directione CG rursusque angulus GCD dicatur z erit nunc potentia

$$\pi = \frac{n \sin. A + \cos. A}{\sin. z + n \cos. z} P.$$

Quoniam in hac expressione numerator constans est, denominator autem variabilis idem qui in fine paragraphi quartae, sequitur potentiam π sub eadem conditione minimam fieri, erit igitur rursus, sicuti in paragrapho quinta $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \frac{1}{n}$ siue tang $z = \frac{1}{n}$.

ipsaque potentia minima, post substitutionem praefati valoris z congruasque adhibitas expressiones fiet $= \frac{n \sin. A + \cos. A}{\sqrt{(nn+1)}} P$. Indicat haec expressio, esse rursus potentiam directam ad potentiam minimam vt $\sqrt{(nn+1)}$ ad n, quod idem §. 5. inuenimus.

§. 11. Notabilis mihi videtur praefata anguli z, minimae potentiae respondentis, constantia pro quacunque accliuitate aut etiam decliuitate viae vel plani ſuppoſiti; conſtanter enim tangens iſtius anguli eſt $= \frac{1}{n}$, ſed et alia inſuper eſt eiusdem anguli proprietas, quae, quamuis notiſſima ſit, hic praeprimis notari meretur. Nempe omne planum, cui corpus ſuper imponitur, ad certum et definitum angulum inclinari poteſt, ante quam ipſum corpus proprio ſuo pondere frictionem ſuperet ac ſuper plano deuoluatur ſiue deorſum repat; hicque ipſe angulus eſt, qui in theoria noſtra vbique et conſtanter indicatur. Etenim, poſito iterum hoc angulo $= z$, pondere $= P$ et frictione horizontali $= \frac{P}{n}$, erit potentia, corpus deorſum trahens $= P$ ſin. z et frictio $= \frac{P}{n}$ coſ. z, vnde rurſus tang. $z = \frac{1}{n}$.

Huiuscemodi proprietates haud obſcure indicant, ineſſe aliquid in argumento noſtro quod ſit ipſi rei naturae accommodum atque eſſentialiter inſitum.

Caeterum patet, ſi via ſit decliuis, fore tunc terminum ſin. A, negatiue ſumendum atque, ſi decliuitas tanta ſit vt corpus ſua ſponte deſcendere incipiat, fore $\pi = 0$, imo potentia iſta erit negatiue accipienda, ſi tang. A ſimul maior ſit quam $\frac{1}{n}$, At huius loci non eſt his disquiſitionibus abſtractis, quae nunquam ad praxin applicari poſſunt, immorari.

§. 12.

§. 12. Diminutiones potentiarum, quas pertractauimus, sunt plane diuersae indolis, a diminutionibus potentiarum quae ab vsu vectis alteriusue machinae simplicis mutuantur. In his enim via, sub *ipsa directione potentiae*, perficienda tantum crescit quantum ipsa potentia decrescit et propterea labor absolutus idem censeri potest, nisi quatenus specialis siue hominum siue animalium laborantium constitutio aliqualem rei diuersitatem iniiciet. In nostro autem argumento tantum abest, vt pro diminuta potentia maior via *in directione potentiae* perficienda sit, quin ipsa quoque via haec simul diminuatur atque adeo nouum superueniat lucrum: est enim motus absolutio ad motum secundum *directionem potentiae*, cui soli potentia applicatur, vt sinus totus ad cosinum obliquitatis et in hac quoque ratione laborem, in protrahendo onere insumtum, iterum diminui aliqua cum ratione affirmare licet, si modo intra certos limites subsistamus. Optandum autem foret vt pro quouis labore, cuiuscunque sit generis, vera defatigationis mensura innotesceret tum de hominibus tum de diuersis animalibus; haec notitia a baiulis, cursoribus peditibus aliisque operariis tum etiam ab aurigis equitibus, stabulariis caeterisque huius ordinis hominibus melius quam ab aliis acquiretur: velim autem vt vbique de penso diurno sermo sit vt sic singula comparari possint cum eo quod iumenta baiuliue perficiunt, cum operam suam totam vnice in protrahentrahendum onus locant; isti enim labori quotidie ferendo quid valeant sic satis notum est.

Haec dum explorata habeantur, tutissime hac regula vtemur, laborem quemcunque aestimandum esse ex potentia adhibita et ex motu ad directionem potentiae relato, modo simul defatigationis, quae soli incessui libero debetur, ratio habeatur.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE AEQVILIBRIO ET MOTV CORPORVM FLEXVRIS ELASTICIS IVNCTORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Corpora hic rigida confidero, quorum autem duo pluraue ita inter fe fint coniuncta, vt feparationi quidem refiftant, verumtamen in fingulis iuncturis inflexionem feu motum gyratorium circa quempiam axem admittant. Iuncturas autem ita comparatas affumo, vt ifta inflexio non libere fuccedat, fed vi inflectenti eo magis reluctetur, quo maior inflexio produci debeat. Datur fcilicet in huiusmodi corporibus ftatus naturalis, in quo fine actione cuiusquam vis externae fe quafi fponte conferuent; quo magis autem de hoc ftatu per inflexionem deturbari debeant, vt eo maiori vi fit opus ad eiusmodi effectum producendum. Denique vero his flexuris eiusmodi vim infitam tribuo, vt poftquam corpora de fitu naturali fuerint depulfa, ceffante vi inflectente, ea fponte fe in ftatum natura-

 lem

lem reſtituant, in quo quippe natura elaſticitatis conſiſtit.

2. Ad hanc igitur indolem ſunt referenda omnis generis corpora elaſtica, veluti laminae elaſticae, quae incuruatae vi pollent ſeſe in ſtatum naturalem reſtituendi. Hoc tantum intercedit diſcrimen, quod in huiusmodi corporibus nullum detur punctum, circa quod inflexio fieri nequeat ita vt ea tanquam ex infinitis elementis, ope flexurarum elaſticarum coniuncta ſpectari oporteat. Hic autem quo latius inueſtigationes noſtrae pateant, corpora ex finito partium numero conflata contemplabor, quae partes ſingulae nullius figurae mutationis ſint capaces, ſed in ipſis tantum iuncturis circa ſe inuicem elaſticitatis reſiſtentia ſuperata inflecti patiantur.

3. Quo autem clarius omnia principia, ex quibus huiusmodi corporum determinatio motus eſt petenda, perſpiciatur, inueſtigationes a caſu ſimpliciſſimo, quo duo tantum corpora huiusmodi flexura elaſtica ſunt coniuncta exordiri conueniet, ſic enim omnibus circumſtantiis probe perpenſis multo tutius ac felicius ad maiorem corporum hoc modo inter ſe iunctorum numerum progredi licebit. Ante omnia igitur hic in ipſa iunctura axis ille conſiderandus occurrit circa quem vtrumque corpus moueri poteſt ita vt altero fixo alterum circa iſtum axem de ſitu naturali detorqueri queat, quatenus vis inflectens elaſticitati ſuperandae par eſt. Deinde vero vtrumque

que corpus ſeorſim eſt ſpectandum, quae cum ſint rigida, mechanica cognitio ad motum definiendum requiſita cum centro inertiae tum vero momentis inertiae continetur.

4. Sit igitur recta Mm axis flexurae, qua ambo corpora ſunt coniuncta et dum ea in ſtatu naturali verſantur, ſit alterius corporis centrum inertiae in A, alterius vero in B, quae quidem in figura ita exhibentur quaſi cum axe Mm eſſent in eodem plano, verum vtique fieri poſſet vt plana MAm et MBm certum quendam angulum inter ſe conſtituerent, quemadmodum etiam rectae normales Aa et Bb ab vtroque centro inertiae ad axem ductae vel in vnum vel diuerſa puncta incidere poſſunt, quae circumſtantia ſi ad motum ſpectemus, probe eſt obſeruanda. Hinc ergo in quouis ſtatu violento inclinatio planorum MAm et MBm, cum naturali ſiue ſit nulla ſiue aliqua, comparari debet quoniam a differentia quantitas vis elaſticae, quae tum ad reſtitutionem exeritur, pendet. Tab. III. Fig. 1.

5. Ad vim elaſticam autem mente ſaltem concipiendam, ſtatuatur axis flexurae plano tabulae in L normalis, et ſit ALb ſtatus naturalis, ita vt tum ambo centra inertiae in planis quae rectis LA et Lb normaliter inſiſtunt, reperiantur. Nunc autem conſideretur ſtatus quicunque violentus ALB, quo alterius corporis centrum inertiae in planum rectae LB normaliter inſiſtens ſit detruſum, ac ſta- Fig. 2.

 tus

tus deturbatio ex angulo BLb erit aestimanda, cum tendat ad hunc angulum extinguendum; atque in calculo vis elastica sinui huius anguli proportionalis statui solet, cuius ratio ita exhiberi potest. Vi elasticae reuera insitae substituatur mente filum elasticum Bb, vi praeditum se in ratione longitudinis Bb contrahendi; ponatur $LB = Lb = k$ angulus $BLb = \omega$, vt sit $Bb = 2b \sin. \frac{1}{2}\omega$, ideoque ipsa vis $= E \sin. \frac{1}{2}\omega$ quae cum punctum B in directione Bb sollicitet, erit eius momentum ratione axis $L = E \sin. \frac{1}{2}\omega . LB \sin. LBb = Eb \sin. \frac{1}{2}\omega \cos. \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2} E b \sin. \omega$; vnde patet momentum vis elasticae, quod hic est spectandum, non sine ratione sinui anguli inflexionis BLb proportionale statui.

6. Si extremitates A et B filo AB constringantur, euidens est hoc modo corpora in statu violento retineri posse, vbi imprimis tensionem fili ad hoc requisitam notari conuenit. Sit igitur T ista fili tensio restitutionem in statum naturalem coercens, cuius momentum ad inflexionem augendam cum sit $= T.LB.\sin. ABL = T.AL.\sin. BAL$, ob $AB : \sin. ALB = AL : \sin. ABL$, erit id $= \frac{T.LA.LB}{AB} \sin. ALB$, momento elasticitatis, quod sit $= E \sin. \omega$ aequale ponendum vnde positis $LA = a$, $LB = b$, angulo naturali $ALb = \lambda$ vt sit $ALB = \lambda - \omega$, et $AB = \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos. (\lambda - \omega))}$ erit tensio $T = \frac{E \sin. \omega . \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos. (\lambda - \omega))}}{ab \sin. (\lambda - \omega)}$. Quodsi ergo in statu naturali partes LA et Lb in directum iaceant, vt sit $\lambda = 180°$ fit $T = \frac{E . AB}{ab}$.

7. Hic

7. Hic casus per se quidem perspicuus eo magis est memorabilis quod ingens paradoxon inuoluere videtur. Si enim duae virgae rigidae AL, LB in L ita elatere sint iunctae, vt sponte in directum sint extensae, eaeque constrictione fili AB in statu inflexo ALB detineantur, mirum videbitur, quomodo tensio fili quantitati $\frac{E.AB}{LA.LB}$ hoc est ipsi fili longitudini AB proportionalis esse queat, quandoquidem hoc modo ad inflexionem minorem maior fili tensio, ad maiorem autem minor requiritur. Scilicet minuta fili tensione, virgae subito in statum naturalem resilient cum tamen tensio minor maiorem inflexionem sustinere posset. Contra autem aucta fili tensione, inflexio adeo augebitur, cum tamen maior inflexio minorem tensionem exigat. Tab. III. Fig. 3.

8. Quo hoc paradoxon dilucidemus, virgam AL vt fixam spectemus, vt altera BL cum a certa vi secundum BA quae sit $=D$, tum ab elatere Bb sollicitata circa punctum seu axem L fixum moueatur. Cum igitur positis $LA=a$ $LB=b$, $BLb=\omega$, vt sit $AB=\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}$, fit vis BA momentum $=\frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}}$, elateris autem momentum contrarium $=Eb\sin.\omega$, si virgae BL momentum inertiae respectu axis L statuamus $=Bcc$, erit ex motus principiis $\frac{Bccdd\omega}{2gdt^2}$ $=\frac{Dab\sin.\omega}{\sqrt{(aa+bb+2ab\cos.\omega)}}-Eb\sin.\omega$, denotante g altitudinem lapsus vno minuto secundo, siquidem tempus

pus t in minutis secundis exprimere velimus. Multiplicemus per $d\omega$ et integrando obtinebimus

$$\frac{Bcc\,d\omega^2}{4g\,dt^2} = C + Eb\,\text{cos.}\,\omega - D\surd(aa + bb + 2ab\,\text{cos.}\,\omega)$$

sumamus motum a quiete incepisse, cum erat $\omega = \alpha$, vt constans C rite determinetur, ac fiet

$$\frac{Bcc\,d\omega^2}{4g\,dt^2} = Eb(\text{cos.}\,\omega - \text{cos.}\,\alpha) + D\surd(aa + bb + 2ab\,\text{cos.}\,\alpha) - D\surd(aa + bb + 2ab\,\text{cos.}\,\omega).$$

9. Nunc igitur ostendendum est, si fuerit vis $D = \frac{E\surd(aa + bb + 2ab\,\text{cos.}\,\alpha)}{a}$ tum virgam LB in statu initiali, vbi erat angulus $BLb = \alpha$ perpetuo quiescere, sin autem vis $BA = D$ fuerit hac quantitate maior, tum virgam LB angulo BLb continuo crescente versus LA rotari, contrarium vero euenire, si vis illa D fuerit minor, hocque casu virgam LB ad situm Lb accessuram esse. Primum quidem inde patet quod non solum ipsa quantitas, cui quadratum celeritatis angularis $\frac{d\omega^2}{dt^2}$ aequatur, casu quo $\omega = \alpha$ euanescit sed etiam eius differentiale, ideoque et acceleratio, ita vt virga LB tum perpetuo in situ initiali sit permansura. Pro reliquis casibus sit breuitatis gratia $\surd(aa + bb + 2ab\,\text{cos.}\,\alpha) = f$ et $\surd(aa + bb + 2ab\,\text{cos.}\,\omega) = z$, eritque $\frac{Bcc\,d\omega^2}{4g\,dt^2} = \frac{E(zz - ff)}{2a} - D(z - f) = (z - f)\left(\frac{E(z + f)}{2a} - D\right)$. Ponatur iam $D = \frac{nEf}{a}$, vt sit n modo maius modo minus vnitate fietque $\frac{Bac^2\,d\omega^2}{2Eg\,dt^2} = (z - f)(z + f - 2nf)$; et celeritas angularis erit $\frac{d\omega}{dt} = \surd\frac{2Eg}{Bacc}(z - f)(z + f - 2nf)$.

10. Quod-

10. Quodſi iam ſit $n > 1$, ita vt vis BA elaterem ſuperet, primo quidem angulus ω augebitur, et diſtantia $AB = z$ diminuetur, vnde pro motu ſecuturo erit $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(f-z)((2n-1)f-z)}$, ex quo euidens eſt ob $2n-1 > 1$, dum angulus BLb creſcit, et z minuitur celeritatem non ſolum nusquam ceſſare, ſed continuo augeri, donec virga LB prorſus in directionem LA reducatur. Sin autem ſit $n < 1$, ſtatim diſtantia $AB = z$ increſcit, vt fiat $z > f$, et $\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}(z-f)(z-(2n-1)f)}$, vbi ob $2n-1 < 1$, euidens eſt creſcente z etiam celeritatem angularem continuo augeri, donec virga in ſitum naturalem Lb reſtituatur, fiatque $z = a+b$. Tum vero hac celeritate, motus angularis in plagam contrariam vertetur, ſiquidem iunctura id permittat qui motus priori omnino erit ſimilis.

11. Tempus autem ipſum huius motus nonniſi per quadraturas ſatis perplexas definiri poteſt, quae difficultas adeo vix minuitur, etiamſi elaſticitas prorſus euaneſcat, et virga LB circa axem L libere ſtatuatur mobilis, a vi conſtante D iugiter ſecundum directionem BA ſollicitata. Poſito enim $E = 0$, habebitur $\frac{Bccd\omega^2}{4Dgdt^2} = f-z$, vnde colligitur

$$dt\sqrt{\frac{4Dg}{Bcc}} = \frac{-2zdz}{\sqrt{(f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

exiſtente $ff = aa+bb+2ab\cos.\alpha$, ideoque $f < a+b$, quae formula integranda certe maxime eſt complicata, quod in tali caſu tam facile ad praxin reuocando,

cando, mirum videtur. Neque elaſticitate admiſſa calculus multo fit intricatior cum poſito $D = \frac{nEf}{a}$ tum habeatur:

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2zdz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(a+b+z)(a+b-z)(a+z-b)(b+z-a)}}$$

quae quidem aequatio ſi $b=a$ ſeu $LB=LA$ in hanc ſimpliciorem formam abit

$$dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{-2dz}{\sqrt{(f-z)((2n-1)f-z)(2a+z)(2a-z)}}.$$

12. Vnicus caſus occurrit, qui faciliorem integrationem admittit; cum ſcilicet ſit $f<2a$ ob $ff=2aa(1+\operatorname{cof.}\alpha)$; numerus n ita accipiatur vt fiat $(2n-1)f=2a$, ſeu $2n-1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\operatorname{cof.}\alpha)}}=\frac{1}{\operatorname{cof.}\frac{1}{2}\alpha}$ et cum ſit $dt\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}}=\frac{-2dz}{(2a-z)\sqrt{(f-z)(2a+z)}}$ integrale reperitur:

$$t\sqrt{\frac{2Eg}{Bacc}} = \frac{1}{\sqrt{a(2a-f)}}\left(\text{Ang. cof. } \frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)}\right)$$

quae formula euaneſcit ſumto $z=f$ pro motus initio. In minutis ſecundis ergo habetur:

$$t = \frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Eg(2a-f)}}\text{ Ang. cof. }\frac{4aa-6af+(6a-f)z}{(2a+f)(2a-z)} = \frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(2n-1)Egf}}$$
$$\text{Ang. cof. }\frac{(n-2)(2n-1)f+(3n-2)z}{n((2n-1)f-z)}$$

vnde ſequitur tempus quo virga LB in ſitum LA compellitur fore $=\frac{\sqrt{Bcc}}{2\sqrt{(n-1)Egf}}$ Ang. cof. $\frac{n-2}{n}$ minutis ſecundis. Ita ſi initio motus fuiſſet $\alpha=90°$, ideoque $2n-1=\sqrt{2}$ ſeu $n=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ erit hoc tempus totum $=\frac{\sqrt{Bcc}}{\sqrt{2Egf(\sqrt{2}-1)}}$ Ang. cof. $\frac{\sqrt{2}-3}{1+\sqrt{2}}$, qui angulus proxi-

proxime continet $131°, 3\frac{5}{8}'$ et in partibus radii 2, 287436.

13. Si virgam LA, quam hic vt fixam spectauimus, etiam mobilem faciamus, vt ambae simul super plano tabulae, ad quod quippe axis inflexionis sumitur perpendicularis, moueantur, nullum est dubium quin problema multo sit difficilius, et profundiorem Mechanicae cognitionem postulet. Multo porro difficilius fiet problema, si hae binae virgae in vacuo vtcunque proiiciantur, vt axis inflexionis non amplius situm sibi parallelum conseruet, eaeque insuper extrinsecus a viribus quibuscunque sollicitentur. Quodsi praeterea corpus ex pluribus constet partibus, flexura elastica inter se coniunctis, neque adeo axes inflexionis in singulis flexuris fuerint inter se paralleli: nescio an quis solutionem saltem tentare auderet. Equidem hic tantummodo eiusmodi plurium partium compagem sum consideraturus, vbi omnes axes inflexionis in singulis iuncturis inter se sint paralleli, atque motus ita sit comparatus, vt in eodem plano absoluatur, ad quod illi axes sint perpendiculares, et in quo simul singularum partium centra inertiae sint sita, etiamsi methodus, qua sum vsurus, multo latius pateat.

14. Principium autem primarium, cui omnium huiusmodi motuum determinatio innititur, ex Statica seu ea scientia, quae circa aequilibrium virium est occupata, peti oportet. Nisi enim constet, a

 quibus

quibus viribus corpus quodpiam, cuiuscunque indolis fuerit, in aequilibrio contineatur, determinatio motus, ab aliis quibuscunque viribus variati frustra suscipitur. Euolutio autem accuratior huius principii eo magis est necessaria, quod ipsa motus determinatio, vtcunque is fuerit intricatus, semper leui adhibita consideratione ad statum aequilibrii reuocari potest, dum vires ad motus effectionem requisitae viribus quibus corpus actu impellitur aequiualere, ideoque contrarie applicatae cum his in aequilibrio consistere debent, quod adeo etiam in motu fluidorum locum habet. Quocirca inuestigationes a statu aequilibrii incipiam.

Problema 1.

15. *Si corpus ex quotcunque partibus compositum, quae flexuris elasticis inter se sint coniunctae, a viribus quibuscunque fuerit sollicitatum, definire conditiones, quibus hae vires se mutuo in aequilibrio coerceant.*

Solutio.

Primum omnium obseruandum est cunctas vires perinde in aequilibrio esse debere, ac si corpus prorsus esset rigidum; si enim singulae flexurae subito rigescerent, inde virium aequilibrium neutiquam turbaretur; quocirca primo quidem in eas conditiones est inquirendum, sub quibus vires corpus

pus ſollicitantes ſe inuicem deſtruerent, ſi totum corpus tanquam rigidum ſpectetur. Hunc in finem ſingulae vires corpus ſollicitantes ita euoluantur, vt quaelibet puncto corporis Z applicata ſecundum ternas directiones fixas Zp, Zq, et Zr, quae ternis axibus inter ſe normalibus IA, IB et IC ſint parallelae reſoluantur. Sit igitur vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$, et ponantur ternae coordinatae ſitum puncti Z definientes et iisdem axibus parallelae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ac primo quidem conſtat, ſummas omnium harum ternarum virium ſeorſim nihilo aequales eſſe debere, vnde hae tres conditiones colliguntur, vt ſit: Tab. III. Fig. 4.

$$1^\circ.\ \int p = 0;\quad 2^\circ.\ \int q = 0;\quad 3^\circ.\ \int r = 0$$

quibus obtinetur, vt corporis centrum inertiae in aequilibrio conſeruetur.

Verum hae tres conditiones nondum ſufficiunt, etiamſi corpus totum foret rigidum, oportet enim inſuper, vt corpori circa nullum plane axem motus imprimatur; ex quo momenta omnium harum virium reſpectu axis cuiuscunque ſe mutuo deſtruant, neceſſe eſt. At trium virium p, q, r momentum reſpectu axis IA in plagam BC eſt $= ry - qz$; reſpectu vero axis IB in plagam CA eſt $= pz - rx$; et reſpectu axis IC, in plagam AB eſt $= qx - py$, vnde tres ſequentes conditiones prioribus ſunt adiiciendae:

$$4^\circ.\ \int(ry - qz) = 0;\ 5^\circ.\ \int(pz - rx) = 0;\ 6^\circ.\ \int(qx - py) = 0.$$

 Fa-

Facile autem patet, dummodo hae ſex conditiones locum habeant, momenta virium reſpectu omnium plane axium, vtcunque accipiantur, pariter in nihilum abire.

Nunc ſex iſtae conditiones ſufficerent, ſi totum corpus eſſet perfecte rigidum, ſin autem conſtet ex partibus inuicem flexuris iunctis, neceſſe inſuper eſt, vt vires ſollicitantes cum vi elaſtica cuiusque flexurae, in aequilibrio conſiſtant. Sit igitur in N eiusmodi flexura, cuius axis inflexionis ſit recta tu vtcunque ad ternos axes inclinata, et ex ratione iuncturae et quantitate inflexionis dabitur elaſticitatis momentum, quo reſtitutio in ſtatum naturalem circa axem tu intenditur. Sit Eu hoc elaſticitatis momentum, atque ad aequilibrium requiritur vt virium ſollicitantium momenta reſpectu eiusdem axis tu ſumta, ſint vtrinque momento elaſticitatis Eu aequalia. Cum ſcilicet omnia virium momenta reſpectu axis tu ſumta ſe mutuo deſtruant, totum corpus per flexuram tNu in duas partes diſtributum eſt conſiderandum, quarum altera cis alteram trans flexuram porrigitur; atque momenta virium alteri parti applicatarum reſpectu axis tu quorum ſumma ſit Vs, momento elaſticitatis Eu ita aequalia ſunt ponenda, vt reſtitutioni in ſtatum naturalem reluctentur; tum autem ſponte ſumma momentorum ex altera parte ſumtorum, quorum ſumma eſt $=-$Vs, etiam momento elaſticitatis Eu erit

erit aequalis pariterque restitutioni aducrsabitur. Hinc quaelibet flexura peculiarem suppeditat aequationem, quae omnes cum sex ante exhibitis, conditiones aequilibrii quaesitas complectuntur.

Coroll. 1.

16. Si partium iunctura ita est comparata, vt inflexioni prorsus non resistat, qui est casus corporum perfecte flexibilium, tum pro singulis flexuris vis elastica E*u* euanescit, et ex vtraque parte virium momenta respectu axis inflexionis nihilo aequalia sunt ponenda.

Coroll. 2.

17. Quo haec clariora reddantur, sint duae virgae aequales AC et BC in C ita iunctae, vt inflexae vi quacunque se in directum extendere conentur: quibus in A et B applicatae sint vires aequales A*a*, B*b* parallelae et ad vtramque virgam aeque inclinatae, in C vero applicata sit vis duplo maior C*c* illis item parallela, quae tres vires proinde erunt in aequilibrio si ambae virgae vt vnum corpus rigidum spectentur. Vt autem ob flexuram in C aequilibrium non turbetur, primum virga BC vt fixa spectetur, et vis A*a* momentum exeret ad inflexionem virgae CA augendam, quod ergo vi elasticae flexurae aequale esse debet. Simili modo si virga AC fixa concipiatur, ex vi B*b* nasce- Tab. III. Fig. 5.

nascetur momentum priori aequale et contrarium quod tamen pariter inflexionem augere conabitur, ideoque vi elasticae flexurae aequabitur. Ex quo patet quomodo virium vtrinque agentium momenta se mutuo destruant seorsim vero cum vi elastica flexurae in aequilibrio consistant.

Coroll. 3.

18. Vbicunque ergo datur flexura, ibi corpus necessario in duas partes dirimitur, quarum altera si fixa concipiatur alteri motus circa axem flexurae imprimi queat. Quae partium distinctio pro qualibet flexura quo facilius percipiatur, reliquae flexurae omnes tanquam rigescerent, sunt considerandae. Pro his autem binis partibus virium sollicitantium momenta probe a se inuicem distingui oportet.

Scholion.

19. Ex hoc principio manifesto fluunt, quae iam olim de aequilibrio corporum tam flexibilium quam elasticorum sum commentatus; dum a viribus quibuscunque sollicitantur. Ibi autem omnes flexuras tanquam in eodem plano existentes assumseram, cui simul omnes axes inflexionis essent perpendiculares. Nunc igitur idem principium ad complexum amplissimum extuli, vt ad omnia flexurae genera latissime pateret, quo quidem scientia aequilibrii maxime promota videtur. Verumtamen ipsa

huius

huius principii applicatio saepenumero ingentes adhuc difficultates inuoluit, dum virium sollicitantium momenta respectu axis cuiuscunque oblique siti non sine summa molestia definiuntur, et secundum praecepta vulgaria ad calculum reuocantur. Difficultas scilicet tum potissimum offenditur, quando axis flexurae *tu* ratione axium IA, IB et IC, secundum quos singulae vires sollicitantes resoluuntur, situm tenet vtcunque obliquum; tum enim nonnisi calculo perquam prolixo et taedioso, eius, respectu virium Zp, Zq et Zr momenta colliguntur, cum tamen negotium satis facile succederet, si axis *tu* vni principalium IA, IB et IC foret parallelus, similique modo institui posset, quo earundem virium momenta respectu ipsorum axium IA, IB, IC in solutione sunt computata. Egregium igitur subsidium scientiae aequilibrii allatum est censendum sequente propositione, qua ostensurus sum, quomodo ex virium quarumcunque momentis respectu ternorum axium inter se normalium inuentis, facile definiri possit earundem virium momentum respectu alius cuiusque axis obliqui per idem punctum ducti:

Problema 2.

20. *Si dentur virium quarumcunque momenta respectu ternorum axium* IA, IB, IC *inter se normalium in puncto* I, *inuenire earundem virium momentum respectu axis cuiuscunque obliqui* IO *per idem punctum* I *traiecti.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Tota haec inueſtigatio commodiſſime ad trigonometriam ſphaericam reduci videtur. Centro ergo I radio $=r$ ſphaera deſcripta intelligatur, cuius ſuperficies ab illis ternis axibus traiiciatur in punctis A, B, C, ita vt arcus AB, BC, CA ſint quadrantes, in puncto O autem tranſeat axis obliquus IO, ad quod ducantur arcus circulorum maximorum AO, BO, CO. His poſitis ſint virium ſollicitantium momenta reſpectu

axis $IA = Lr$; in plagam BC

axis $IB = Mr$; in plagam CA

axis $IC = Nr$; in plagam AB.

Iam quaecunque ſint iſtae vires, earum loco hic eiusmodi vires determinatae ſubſtituantur, quae eadem momenta gignant, iisque propterea ſint aequivalentes. Quare in puncto B applicata concipiatur vis $BL = L$, cuius directio arcum BC in B tangat, quae cum ſit normalis in radium BI axi IA perpendicularem, momentum dabit reſpectu axis $IA = Lr$ in plagam BC tendens, et quia haec vis cum reliquis axibus IB et IC in eodem plano iacet, eorum reſpectu nulla praebebit momenta. Simili modo in C applicata concipiatur vis $CM = M$ ſecundum tangentem arcus CA cuius momentum reſpectu axis IB erit $= Mr$ in plagam CA tendens, reſpectu reliquorum vero axium nullum producit

ducit momentum. Denique etiam in A concipiatur vis $AN = N$ ſecundum directionem AB, vnde naſcitur momentum reſpectu axis $IC = Nr$ in plagam AB. Cum igitur hae tres vires $BL = L$; $CM = M$ et $AN = N$ ipſa momenta propoſita reſpectu ternorum axium IA, IB et IC exhibeant, eas loco virium, quaecunque fuerint, vnde iſta momenta ſunt nata, ſubſtituere licebit, ita vt nunc tota quaeſtio huc redeat, vt harum trium virium momenta reſpectu axis obliqui IO definiantur. Pro ſitu igitur axis IO ponantur anguli

$$AIO = \lambda,\ BIO = \mu \text{ et } CIO = \nu$$

qui a ſe inuicem ita pendent vt ſit $\text{coſ.}\lambda^2 + \text{coſ.}\mu^2 + \text{coſ.}\nu^2 = 1$ et cum ratio trium virium ſit eadem, vis $BL = L$ ad arcum BO inclinata angulo OBL reſoluatur in duas inter ſe normales et in ſuperficie ſphaerae ſitas, quarum altera in BO cadat, quae erit $= L\,\text{coſ.}OBL$, altera vero huic normalis $= L\,\text{ſin.}OBL$, quarum illa reſpectu axis IO nullum praebet momentum quia eius directio cum hoc axe in eodem plano exiſtit, haec vero cum ſit ad planum IBO ideoque etiam ad rectam BS ex B in IO normaliter ductam perpendicularis dabit reſpectu axis IO momentum $= L.\,\text{ſin.}OBL.\,BS$ in plagam BC. Eſt vero $BS = r\,\text{ſin.}BIO = r\,\text{ſin.}BO$, ſicque iſtud momentum fit $= Lr\,\text{ſin.}BO.\,\text{ſin.}OBL$. Producatur arcus AO in P, vt ſit AP quadrans et in arcum BC normalis; atque in triangulo ſphaerico

 rectan-

rectangulo BOP erit $\sin. OP = \sin. BO. \sin. OBL$ hincque momentum illud $= Lr \sin. OP = Lr \cos. AO = Lr \cos. \lambda$. Simili modo ex vi $CM = M$ respectu axis IO colligetur momentum $= Mr \cos. \mu$, in plagam CA, et ex vi $AN = N$ momentum $= Nr \cos. \nu$ in plagam AB. Quae plagae cum ratione motus circa axem IO generandi conueniant, ex viribus sollicitantibus, quarum momenta Lr, Mr, Nr respectu axium IA, IB, IC sunt cognita, concluditur fore momentum respectu axis obliqui $IO =$

$$Lr \cos. \lambda + Mr \cos. \mu + Nr \cos. \nu$$

in plagam ABC, quod ergo ex momentis datis facili negotio obtinetur.

Coroll. 1.

21. Si axis IO in aliquem principalium veluti IA incidat momentum ipsi Lr fiet aequale, quod inde est manifestum, quia arcus $AO = \lambda$ euanescit, et bini reliqui $BO = \mu$ et $CO = \nu$ euadunt quadrantes.

Coroll. 2.

22. Fieri potest vt momentum respectu axis IO euanescat, idque infinitis modis. Angulo enim $AIO = \lambda$ pro lubitu assumto, reliquos μ et ν ita assumere licet vt fiat $L \cos. \lambda + M \cos. \mu + N \cos. \nu = 0$ manente $\cos. \lambda^2 + \cos. \mu^2 + \cos. \nu^2 = 1$. Cum enim inde sit $\cos. \nu = \frac{-L \cos. \lambda - M \cos. \mu}{N}$ fit $NN \sin. \lambda^2 = (MM + NN) \cos. \mu^2 + 2 LM \cos. \lambda \cos. \mu + LL \cos. \lambda^2$

hinc-

hincque $\operatorname{cof.}\mu = \frac{-LM\operatorname{cof.}\lambda \pm \surd(NN(MM+NN)\operatorname{fin.}\lambda^2 - LLNN\operatorname{cof.}\lambda^2)}{MM+NN}$

vel $\operatorname{cof.}\mu = \frac{-LM\operatorname{cof.}\lambda \pm N\surd((LL+MM+NN)\operatorname{fin.}\lambda^2 - LL)}{MM+NN}$

quod fieri poteſt dum ſit $\operatorname{fin.}\lambda > \frac{L}{\surd(LL+MM+NN)}$, eritque tum $\operatorname{cof.}\nu = \frac{-LN\operatorname{cof.}\lambda \mp M\surd((LL+MM+NN)\operatorname{fin.}\lambda^2 - LL)}{MM+NN}$

et anguli μ et ν prodeunt reales.

Coroll. 3.

23. Caſus deinde imprimis notatu dignus occurrit, quo virium momentum reſpectu axis IO ſit omnium maximum; euenit hoc ſi hic axis ita capiatur vt ſit

$\operatorname{cof.}\lambda = \frac{L}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$; $\operatorname{cof.}\mu = \frac{M}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$; $\operatorname{cof.}\nu = \frac{N}{\surd(L^2+M^2+N^2)}$

tum enim eius reſpectu erit momentum $= r \surd(L^2 + M^2 + N^2)$.

Coroll. 4.

24. Huius ergo problematis ope momentum virium corpus ſollicitantium reſpectu cuiusque flexurae cuius axis ſitum tenet vtcunque obliquum definire, ideoque ſequens problema reſoluere poterimus.

Problema 3.

25. *Si corpus ex partibus quotcunque, quae flexuris elaſticis ſint coniunctae, compoſitum a viribus* Tab. III. Fig. 7.

 quibus-

quibuscunque ſollicitetur, earum momentum reſpectu vniuscuiusque flexurae N, *cuius axis* t N u *ſitum tenet vtcunque obliquum inueſtigare.*

Solutio.

Locus flexurae N ternis coordinatis inter ſe normalibus definiatur quae ſint $IL = l$, $LM = m$, et $MN = n$ et in N tres concipiantur axes Nl, Nm Nn iſtis coordinatis paralleli, ad quos axis flexurae tu ita inclinetur, vt ſint anguli $lNu = \lambda$, $mNu = \mu$, $nNu = \nu$ ideoque $\text{coſ.}\,\lambda^2 + \text{coſ.}\,\mu^2 + \text{coſ.}\,\nu^2 = 1$, reliquae vero flexurae rigeſcere concipiantur. Ita corpus in hac flexura in duas partes diſpeſcitur, quarum vtraque circa axem flexurae, motum recipere poteſt altera manente immota. Virium ergo quae alteri tantum parti ſunt applicatae, momentum reſpectu axis tu indagari oportet. Huius partis ſit Z punctum quodcunque coordinatis $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ definitum, cui vires ſint applicatae quaecunque, quae ad ternas directiones Zp, Zq, Zr reducantur, ſitque vis $Zp = p$, vis $Zq = q$, vis $Zr = r$. Iam primo harum virium momenta colligantur reſpectu axium fictorum Nl, Nm, Nn, ac manifeſtum eſt fore earum momenta

reſpectu axis $Nl = q(n-z) - r(m-y)$ in plagam mn

reſpectu axis $Nm = r(l-x) - p(n-z)$ in plagam nl

reſpectu axis $Nn = p(m-y) - q(l-x)$ in plagam lm.

Quibus

Quibus inuentis ex problemate praecedente earundem virium respectu axis flexurae tu momentum concluditur fore in plagam lmn:

$$q(n-z)\cos.\lambda - r(m-y)\cos.\lambda + r(l-x)\cos.\mu - p(n-z)\cos.\mu + p(m-y)\cos.\nu - q(l-x)\cos.\nu.$$

Omnia ergo haec momenta per totam corporis partem colligendo ob quantitates l, m, n et angulos λ, μ, ν constantes impetramus totum momentum quaesitum:

$$(m\cos.\nu - n\cos.\mu)\int p + (n\cos.\lambda - l\cos.\nu)\int q + (l\cos.\mu - m\cos.\lambda)\int r + \cos.\lambda\int(ry - qz) + \cos.\mu\int(pz - rx) + \cos.\nu\int(qx - py).$$

Coroll. 1.

26. In statu ergo aequilibrii hoc momentum vi elasticae qua flexura in N est praedita, aequale poni oportet, siquidem vis elastica hanc corporis partem, ex qua momentum est collectum in plagam contrariam nml flectere conatur.

Coroll. 2.

27. Cum igitur quaelibet flexura huiusmodi aequationem suppeditet, omnes hae aequationes illis sex, quas supra indicauimus adiunctae statum aequilibrii corporis determinabunt.

Scho-

Scholion.

28. En ergo vera principia, ex quibus status aequilibrii corporum flexuris elasticis praeditorum, dum a viribus quibuscunque sollicitantur, definiri debet. Quae cum latissime pateant, omnia ea quae adhuc de aequilibrio corporum flexibilium et elasticorum sunt inuestigata, in se complectuntur. In his autem inuestigationibus omnium flexurarum axes inter se paralleli sunt assumti, quo calculi euolutio magis plana et facilis redderetur; sin autem isti axes inter se non fuerint paralleli, calculus non solum maiorem molestiam inuoluit, sed etiam summopere difficile est pro omnibus inflexionibus, quae huiusmodi corporibus induci possunt, singularum partium situm ad calculum reuocare, vt principia hic stabilita in vsum vocari queant. Quae difficultas quo clarius perspiciatur, casum satis simplicem euoluam, quo corpus ex tribus tantum constat partibus quarum iuncturae axes habeant inter se normales, et quae statu naturali in directum extendantur.

Problema 4.

Tab. IV. Fig. 8. 29. *Si tres virgae* AB, BC, CD *ita sint iunctae, vt in statu naturali in directum porrigantur, iuncturae autem* B *axis* $b\beta$ *ad planum tabulae sit normalis, iuncturae* C *vero axis* $c\gamma$ *in ipsum planum cadat et ad* BC *sit normalis; inuestigare vires extremitatibus*

tatibus A *et* D *applicandas*, *quae has virgas in statu quocunque inflexo seruare valeant.*

Solutio.

Positis $AB = a$, $BC = b$, et $CD = c$, sint hae virgae per inflexionem redactae in statum ABCD, qui ita repraesentetur, vt virgae AB et BC in plano tabulae iaceant, et BC rectae AG sit parallela, ita vt flexurae B axis Bb ad idem planum sit perpendicularis, flexurae C vero axis Cc in hoc plano ad BC ideoque etiam ad axem AG sit normalis, circa quem tertia virga CD sursum sit flexa, ex cuius termino D in planum demittatur perpendiculum DH, indeque ad AG normalis HG. Sit iam angulus inflexionis in iunctura $B = \zeta$, et elasticitatis momentum $= Ee \sin.\zeta$, inflexionis autem in iunctura $C = \eta$ et elasticitatis momentum $= Ff \sin.\eta$; eritque ob BC ipsi AG parallelam angulus $BAG = \zeta$, hinc $AE = a \cos.\zeta$, et $BE = a \sin.\zeta = CF = HG$, tum vero $EF = BC = b$. Porro habebitur $CH = c \cos.\eta$ et $DH = c \sin.\eta$. Iam vires ad hunc statum conseruandum requisitae sint in A ternae $AP = P$, $AQ = Q$, et $AR = R$ in D vero similiter ternae $Dp = p$, $Dq = q$, et $Dr = r$: vnde si corpus spectetur vt rigidum primo habemus: Tab. IV. Fig. 9.

1°. $P + p = 0$; 2°. $Q + q = 0$; 3°. $R + r = 0$.

Deinde ob $AG = a \cos.\zeta + b + c \cos.\eta$; $GH = a \sin.\zeta$, et $DH = c \sin.\eta$ erit quoque ex problemate primo:

4°$ar\,\text{ſin.}\zeta - cq\,\text{ſin.}\eta = 0$; 5°. $cp\,\text{ſin.}\eta - (a\,\text{coſ.}\zeta + b + c\,\text{coſ.}\eta)r = 0$

6°. $(a\,\text{coſ.}\zeta + b + c\,\text{coſ.}\eta)q - ap\,\text{ſin.}\zeta = 0$

quia pro viribus in A coordinatae x, y, z euaneſcunt, vnde hae vires ita debent eſſe comparatae vt ſit

$$p = (a\,\text{coſ.}\zeta + b + c\,\text{coſ.}\eta)s;\quad q = as\,\text{ſin.}\zeta \text{ et } r = cs\,\text{ſin.}\eta$$

et $P = -p$; $Q = -q$; et $R = -r$.

Nunc flexura in B conſideretur, et pars BA a viribus ſibi applicatis de ſtatu naturali detorquetur momento $= P.\,BE - Q.\,AE$, quod elaſticitati $Ee\,\text{ſin.}\zeta$ aequale poſitum dat

$$-ap\,\text{ſin.}\zeta + aq\,\text{coſ.}\zeta = Ee\,\text{ſin.}\zeta$$

ſeu $-(ab + ac\,\text{coſ.}\eta)s = Ee$; hincque $s = \frac{-Ee}{a(b + c\,\text{coſ.}\eta)}$.

Denique pro flexura C conſideretur pars CD, cuius vires praebent momentum de ſtatu naturali detorquens $= r.\,CH - p.\,DH$ momento elaſticitatis $Ff.\,\text{ſin.}\eta$ aequandum, vnde prodit

$$-c(a\,\text{coſ.}\zeta + b)s = Ff \text{ ſeu } s = \frac{-Ff}{c(a\,\text{coſ.}\zeta + b)}.$$

Ex quo patet inter ambas inflexiones certam relationem intercedere debere, vt a duabus tantum viribus in terminis A et D applicatis aequilibrium ſeruari poſſit: oportet ſcilicet ſit $Eec(a\,\text{coſ.}\zeta + b) = Ffa(b + c\,\text{coſ.}\eta)$; ac tum vires ante aſſignatae huic ſtatui inflexo conſeruando erunt pares.

Coroll.

Coroll. 1.

30. Quia tres vires in A applicatae cum tribus in D applicatis in aequilibrio consistere debent, vna vis illis aequiualens vni his aequiualenti aequalis et contraria esse debet; facile autem intelligitur ambas has vires in rectam AD extremitates iungentem cadere debere.

Coroll. 2.

31. Hoc etiam cum formulis inuentis egregie conuenit, si enim extremitates A et D filo constrictae concipiantur cuius tensio sit $=T$, posita recta $AD=k$, habebimus vires assumtas $P=\frac{a\cos.\zeta+b+c\cos.\eta}{k}T$; $Q=\frac{a\sin.\zeta}{k}T$, et $R=\frac{c\sin.\eta}{k}T$ ideoque $s=\frac{-T}{k}$.

Coroll. 3.

32. Hinc ergo interuallum $AD=k$ cum tensione T in computum ducendo erit primo $a(b+c\cos.\eta)=\frac{Eek}{T}$ et $c(a\cos.\zeta+b)=\frac{Ffk}{T}$: deinde vero est

$$kk=aa+bb+cc+2ab\cos.\zeta+2bc\cos.\eta+2ac\cos.\zeta\cos.\eta.$$

Cum ergo sit $\cos.\zeta=\frac{Ffk}{Tac}-\frac{b}{a}$, et $\cos.\eta=\frac{Eek}{Tac}-\frac{b}{c}$, facta hac substitutione prodit:

$$kk=aa-bb+cc+\frac{2EFefkk}{TTac}$$

vnde tensio ad hanc inflexionem continendam fit

$$T = \frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$$

quae ergo per longitudinem fili AD et elasticitates vtriusque iuncturae determinatur.

Coroll. 4.

33. Ex data ergo longitudine fili seu intervallo $AD = k$ cum vtraque elasticitate non solum tensio T sed etiam inflexio in vtraque iunctura definitur, dummodo eueniat, vt anguli ζ et η prodeant reales; quod fieri nequit nisi eorum cosinus sint vnitate minores.

Scholion.

34. Solutio autem hic data maxima incommoda atque adeo contradictionem inuoluere videtur. Cum enim nullum sit dubium, quin pro qualibet longitudine fili seu interuallo AD certa tensio T requiratur ad virgas in statu inflexo continendas tamen si pro T valor inuentus substituatur, omnino euenire potest, vt alterutrius angulorum ζ et η cosinus prodeat vnitate maior, ideoque inflexio impossibilis. Consideremus tantum casum quo altera elasticitas puta Ee sit infinita, quod eodem redit, ac si iunctura in E rigesceret, nullamque plane inflexionem admitteret. Hic ergo casus vnicam flexuram in F habens conuenire deberet cum eo, qui supra §. 6. est euolutus, et pro cuius qualibet inflexi-

flexione tensio fili T est assignata. Verum si in forma hic inuenta ponatur $Ee = \infty$, tensio T prodit quoque infinita, hincque cos. $\zeta = -\frac{b}{a}$ et cos. $\eta = \infty$, quod manifesto est absurdum, praeterquam quod etiam angulus ζ fieret imaginarius si $b > a$. Hic certe aperta contradictio cernitur quae non solum huic casui, quo altera iunctura rigescit est propria, sed etiam vtraque flexura admissa saepenumero locum habere debet. Nullum tamen hic calculi vitium deprehenditur, ex quo maximi erit momenti in causam huius discrepantiae a veritate diligentius inquirere.

Solutio difficultatis.

35. Analysin autem vniuersam accuratius contemplanti mox patebit solutionem inuentam non esse completam; sed in calculo quasdam solutiones, quae certis casibus solae locum habere possunt, per diuisionem aequationum esse sublatas. Scilicet cum sit $kk = aa + bb + cc + 2ab$ cos. $\zeta + 2bc$ cos. $\eta + 2ac$ cos. ζ cos. η ob $s = \frac{T}{k}$, binae reliquae aequationes reuera ita prodierunt expressae:

$$Ta(b + c\,\text{cos.}\,\eta)\,\text{sin.}\,\zeta = Eek\,\text{sin.}\,\zeta \text{ et } Tc(a\,\text{cos.}\,\zeta + b)\,\text{sin.}\,\eta = Ffk\,\text{sin.}\,\eta$$

ita vt illa etiam praebeat sin. $\zeta = 0$ haec vero sin. $\eta = 0$, quae quidem ambae solutiones simul consistere nequeunt, nisi sit $k = a + b + c$ hoc est in statu naturali. Verum quoties distantia $AD = k$

 minor

minor eſt quam $a+b+c$, toties euenire poteſt, vt ſit vel $\zeta=0$ vel $\eta=0$, hoc eſt vt altera flexura nullam vim patiatur. Quodſi nimirum ſit $\zeta=0$, et virgae AB et BC maneant in directum extenſae; altera aequatio praebet $Tc(a+b)=Ffk$, ideoque fit tenſio $T=\frac{Ffk}{c(a+b)}$; angulus autem η ex prima aequatione $kk=(a+b)^2+cc+2c(a+b)\,\text{coſ.}\,\eta$ definitur. Simili modo ſi $\eta=0$, quo caſu in F nulla inflexio oritur, fiet $T=\frac{Eek}{a(b+c)}$ et $kk=(b+c)^2+aa+2a(b+c)\,\text{coſ.}\,\zeta$, vnde angulus ζ cognoſcitur. Sicque ſemper pro quolibet interuallo $AD=k$ duae ſolutiones locum habent, quarum altera inflexione in E caret, altera in F, atque nunc demum intelligere licet, cur aequilibrium plane non detur, quod duplici inflexione gaudeat. Duplex nempe inflexio locum habere nequit, niſi ſub conditionibus in ſolutione contentis, quae huc redeunt, vt cum ſit $\text{coſ.}\,\zeta<1$ et $\text{coſ.}\,\eta<1$, fiat $Eek<Ta(b+c)$ et $Ffk<Tc(a+b)$; Quia vero tum eſt vti inuenimus $T=\frac{k\sqrt{2EFef}}{\sqrt{ac(kk+bb-aa-cc)}}$, hae conditiones dant $\frac{Ee}{Ff}<\frac{2a(b+c)^2}{c(kk+bb-aa-cc)}$ et $\frac{Ee}{Ff}>\frac{a(kk+bb-aa-cc)}{2c(a+b)^2}$, quorum quidem limitum ille manifeſto maior eſt hoc, cum ex comparatione inſtituta ſequatur

$$4ac(a+b)^2(b+c)^2>ac(kk+bb-aa-cc)^2 \text{ ſeu}$$

$$2(a+b)(b+c)>kk+bb-aa-cc \text{ hincque}$$

$$(a+b+c)^2>kk \text{ vti rei natura poſtulat.}$$

Niſi

Nisi ergo pro sumto interuallo $AD = k$ ratio elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ intra illos limites continetur, tensione fili AD duplex inflexio produci nequit, vt aequilibrium oriatur.

Coroll. 1.

36. Hae ergo conditiones, ratione elasticitatum $\frac{Ee}{Ff}$ vt data spectata, huc redeunt vt sit

$$1°.\ kk < aa + cc - bb + \frac{2a(b+c)^2}{c} \cdot \frac{Ff}{Ee} \text{ et}$$

$$2°.\ kk < aa + cc - bb + \frac{2c(a+b)^2}{a} \cdot \frac{Ee}{Ff}$$

quarum quantitatum minor si adhuc maior fuerit quam $(a+b+c)^2$, pro quouis interuallo $AD = k$, duplex inflexio in aequilibrium ingredi potest, sin autem ea minor sit quam $(a+b+c)^2$, tantum in maiore fili contractione tale aequilibrium obtineri potest.

Coroll. 2.

37. Quodsi tres virgae sint longitudine aequales, seu $b = c = a$ conditiones illae dant

$$1°.\ kk < aa\left(1 + \frac{8Ff}{Ee}\right);\ 2°.\ kk < aa\left(1 + \frac{8Ee}{Ff}\right).$$

Quare si ambae elasticitates sint pares, vtraque dat $k < 3a$ et pro omni fili contractione tale aequilibrium dabitur, vnde fit tensio $T = \frac{Eek\sqrt{2}}{a\sqrt{(kk-aa)}}$ ob $Ff = Ee$, et inflexiones $\operatorname{cos}.\zeta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$ et $\operatorname{cos}.\eta = \frac{\sqrt{(kk-aa)}}{a\sqrt{2}} - 1$, vt sit $\eta = \zeta$ seu $\operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}\zeta = \operatorname{cos}.\tfrac{1}{2}\eta = \sqrt[4]{\frac{kk-aa}{8aa}}$, et $T = \frac{-Eek}{aa(1+\operatorname{cos}.\zeta)}$.

Coroll.

Coroll. 3.

38. Quodsi autem eodem casu $b = c = a$, ambae elasticitates sint inaequales puta $Ee = 2Ff$, seu $\frac{Ee}{Ff} = 2$, debet esse

$$1^\circ.\ kk < aa(1+4) \text{ et } 2^\circ.\ kk < aa(1+16)$$

vnde tale aequilibrium non datur nisi sit $k < a\surd 5$. Tum autem erit tensio $T = \frac{2Ffk}{a\surd(kk-aa)}$ et inflexio vtraque

$$\operatorname{cos}.\zeta = \frac{\surd(kk-aa)}{2a} - 1 \text{ et } \operatorname{cos}.\eta = \frac{\surd(kk-aa)}{a} - 1.$$

Vnde si $k = a\surd 5$, inflexio in F etiamnunc est nulla et $\zeta = 90^\circ$ ac $T = \frac{Ff\surd 5}{a}$ filo autem magis adstricto vt fiat $k = 2a$, tum prodit

$$\operatorname{cos}.\zeta = \frac{\surd 3}{2} - 1 \text{ et } \operatorname{cos}.\eta = \surd 3 - 1, \text{ atque } T = \frac{4Ff}{a\surd 3}.$$

Coroll. 4.

39. Consideremus etiam casum, quo virgae sunt inaequales sitque $a = c$ et $b = 2a$, eritque

$$1^\circ.\ kk < aa\left(-2 + \frac{18.Ff}{Ee}\right) \text{ et } kk < aa\left(-2 + \frac{18.Ee}{Ff}\right).$$

Quare si fuerit vel $\frac{Ff}{Ee} < \frac{1}{9}$ vel $\frac{Ee}{Ff} < \frac{1}{9}$ nullo plane modo huiusmodi aequilibrium obtineri potest.

Scholion 1.

40. Euolutio huius casus vsu non carebit, cum inde pateat saepenumero pluribus modis aequilibrium existere posse. Quod cum eueniat in corpo-

corporibus gemina flexura praeditis, id multo magis contingere poterit, vbi adhuc plures flexurae admittuntur, quarum axes inter se non sunt paralleli; haecque circumstantia in doctrina aequilibrii sine dubio maximi est momenti. Etsi autem haec praecepta tantum ad aequilibrium pertinere videntur, tamen etiam ad motum definiendum adhiberi possunt, dummodo iis sequens principium ex natura motus petitum adiungatur.

Ex quotcunque partibus corpus fuerit compositum, vnicuique parti generalissime tribuatur motus quicunque, et inuestigentur vires ad eius variationem producendam requisitae: tum istae vires in contrarium vertantur, haeque cum viribus, quibus corpus actu sollicitatur, in aequilibrio consistere debent, ex quo praecepta pro aequilibrio definiendo tradita certum aequationum numerum suppeditabunt. Deinde vero motus vnicuique parti tributos ita temperari oportet, vt non solum singulae partes maneant contiguae, sed etiam axes iuncturarum debitum situm conseruent. Quae conditiones cum illis aequationibus coniunctae verum motum determinabunt.

Scholion 2.

41. Tametsi autem hac regula totum negotium conficitur, tamen in eius applicatione saepe insignes adhuc difficultates obstant, quo minus calculus expediri queat quod potissimum euenit, quando nec axes iuncturarum inter se sunt paralleli,

 nec

nec motus, quasi in eodem plano fieret, considerari potest. Tum enim cuique parti motum quemcunque tribuendo, praeter motum progressiuum centri grauitatis in calculum induci debet motus gyratorius circa axem quemcunque per id centrum ductum, eumque adeo variabilem; cuiusmodi autem vires ad huiusmodi motum requirantur, nonnisi pluribus formulis non parum complicatis declarari potest. Deinde etiam in tali motu generalissime considerato non facile definitur, quomodo situs axium vtriusque iuncturae, quibus haec pars cum contiguis cohaeret, varietur, quod certe non sine taedioso calculo fieri potest. Ne igitur his tantis difficultatibus hic impediar, quas forte aliquando superare licebit, inuestigationes meas ad eum tantum casum adstringam, quo omnium iuncturarum axes inter se sunt paralleli, totusque motus ad idem planum reuocari patitur, quippe a quo casu semper est exordiendum, antequam difficiliores aggredi conueniat.

Problema 5.

42. *Si corpus quodcunque in eodem plano moueatur motu quomodocunque variato, inuenire vires ad motus variationem requisitas, earumque momentum respectu aliuscuiusque axis ad idem planum perpendicularis.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 10. Exhibeat tabula id planum, in quo motus fieri concipitur sitque M massa corporis, cuius centrum

trum inertiae iam verſetur in M puncto coordinatis orthogonalibus $IQ=x$ et $QM=y$ determinato; tum vero ſit Mmm momentum inertiae corporis reſpectu axis per ipſum centrum M tranſeuntis et ad planum normalis. Per punctum M ducatur recta EF ad iuncturas, quibus forte hoc corpus cum aliis cohaeret; etiamſi enim fieri poſſet, vt conſtitutis his iuncturis in E et F, recta EF non ſit tranſitura per corporis centrum inertiae, tamen ab hac irregularitate mentem abſtrahamus, quippe cuius ratio facillime in calculum induceretur. Ductis porro per M rectis Mm, $M\mu$ coordinatis x et y parallelis, vocetur angulus $FMm=\mu$. Cum iam quantitates x, y, et μ labente tempore, quod indicetur littera t varientur, quatenus haec variatio non eſt vniformis viribus opus eſt ad hanc motus mutationem in corpore efficiendam. Ac primo quidem pro motu centri inertiae requiruntur vires altera in directione $Mm=\frac{M\,ddx}{dt^2}$, altera in directione $M\mu=\frac{M\,ddy}{dt^2}$, ſumto temporis elemento dt conſtante; hic quidem eius quadratum dt^2 ſine coefficiente induco, quia notaſſe ſufficit, ſi tempora in minutis ſecundis exprimere velimus, loco dt^2 ſcribi oportere $2g\,dt^2$ denotante g altitudinem, ex qua graue vno minuto ſecundo delabitur, ſiquidem maſſae et vires ſollicitantes ad pondera reuocentur. Porro autem pro motu gyratorio corporis circa M requiritur virium momentum $=\frac{Mmm\,dd\mu}{dt^2}$, in plagam Xx, Yy tendens, quo angulus $FM\mu$ magis

 ape-

aperiatur. Huius ergo momenti loco, si vtrinque capiantur interualla aequalia $MX = MY = m$, iis normaliter substitui possunt vires aequales et contrariae $Xx = Yy = \frac{Mmdd\mu}{2dt^2}$, quippe quae solum motum gyratorium afficiunt, dum in se spectatae se mutuo destruunt.

His viribus inuentis, quae ad motus variationem requiruntur videamus quantum momentum praebeant respectu puncti cuiusque V seu potius axis ad planum motus normalis ibi constituti, qui cum sit axi gyrationis in M considerato parallelus, a viribus Xx et Yy in eum exeretur par momentum $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2}$ in eandem plagam $T\theta$ tendens. Tum vero si pro hoc puncto V statuamus coordinatas $IT = T$ et $TV = V$; a vi $Mm = \frac{Mddx}{dt^2}$ orietur in eandem plagam $T\theta$ momentum $= \frac{Mddx}{dt^2}(V-y)$, a vi autem $M\mu = \frac{Mddy}{dt^2}$ momentum in plagam contrariam $Tt = \frac{Mddy}{dt^2}(T-x)$. Hinc ergo vniuersum momentum respectu axis V in plagam $T\theta$ erit $= \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx}{dt^2}(V-y) - \frac{Mddy}{dt^2}(T-x) = \frac{M}{dt^2}(mmdd\mu + xddy - yddx + Vddx - Tddy)$.

Coroll. I.

43. Notari hic in genere meretur, quod virium momentum respectu axis M inuentum idem maneat pro omnibus aliis axibus illi parallelis; quod eatenus tantum locum habet, quatenus vires illae

Xx

Xx et Yy ſunt aequales, et in contrarium directae. Quemadmodum enim earum momentum reſpectu axis M eſt $= Xx . MX + Yy . MY = Xx . XY$, ita etiam reſpectu axis F momentum in eandem plagam eſt $Xx . FX - Yy . FY = Xx . XY$, quod idem de omnibus aliis valet.

Coroll. 2.

44. Hactenus nulla ratio eſt habita punctorum E et F, vbi hoc corpus forte cum aliis ope flexurae eſt coniunctum; ita hic EF eſt recta quaecunque per M ducta, vt angulus $FMm = \mu$ in computum duci queat, quo quippe ratio motus gyratorii definitur.

Coroll. 3.

45. Quodſi ergo iuncturae E et F cum centro inertiae M non in directum iaceant, alterum tantum angulum FMm in computum expoſitum introduxiſſe ſufficit, quandoquidem alter EMl ab eo, angulo quodam conſtante differt, ita vt ſi ille fuerit $FMm = \mu$, hic futurus ſit $EMl = \mu +$ Conſt. et vtriusque differentiale quod in hunc calculum ingreditur, ſit idem.

Problema 6.

46. Si corpus ex tribus partibus AB, BC, CD in B et C flexura elaſtica iunctis compoſitum Tab. IV. Fig. 11.

 ſuper

ſuper plano vtcunque proiectum moueatur, eius motum definire.

Solutio.

Vtriusque flexurae in B et C axis ſit ad planum tabulae perpendicularis vt ratio motus exigit; ſumta in plano directrice IR, in eam tum ex iuncturis B et C, tum ex vniuscuiusque partis centro inertiae L, M, N demittantur perpendicula, ac ponantur coordinatae:

$IP = x$; $PL = y$; $IQ = x'$; $QM = y'$; $IR = x''$; $RN = y''$

ſit porro maſſa partis $AB = L$, partis $BC = M$, partis $CD = N$ et momenta inertiae cuiusque partis reſpectu ſui centri inertiae pro parte $AB = Lll$, parte $BC = Mmm$, parte $CD = Nnn$.

Vocentur etiam anguli $BLl = \lambda$, $CMm = \mu$, $DNn = \nu$ vbi quidem aſſumo rectam BC per ipſum centrum inertiae M partis BC tranſire, et ponantur intervalla:

$$AL = a,\ LB = \alpha,\ BM = b,\ MC = \beta,\ CN = c,\ ND = \gamma$$

eritque:

$$x' = x + \alpha \operatorname{cof.} \lambda + b \operatorname{cof.} \mu;\quad x'' = x' + \beta \operatorname{cof.} \mu + c \operatorname{cof.} \nu$$

$$y' = y + \alpha \operatorname{fin.} \lambda + b \operatorname{fin.} \mu;\quad y'' = y' + \beta \operatorname{fin.} \mu + c \operatorname{fin.} \nu.$$

His poſitis cuiusque partis motus progreſſiuus poſtulat vires vt vidimus ſequentes:

$$Ll = \frac{Lddx}{dt^2};\ Mm = \frac{Mddx'}{dt^2};\ Nn = \frac{Nddx''}{dt^2}$$

$$L\lambda = \frac{Lddy}{dt^2};\ M\mu = \frac{Mddy'}{dt^2};\ N\nu = \frac{Nddy''}{dt^2}.$$

Quoniam igitur corpus a nullis viribus extrinſecus ſollicitari aſſumitur, primo nanciſcimur has duas aequationes

1°. $Lddx + Mddx' + Nddx'' = 0$; ſeu $Lx + Mx' + Nx'' = At + \mathfrak{A}$

2°. $Lddy + Mddy' + Nddy'' = 0$; ſeu $Ly + My' + Ny'' = Bt + \mathfrak{B}$.

Porro neceſſe eſt vt virium requiſitarum omnium momenta reſpectu axis cuiusque, ideoque etiam pro axe I euaneſcant vbi $T = 0$ et $V = 0$; vnde ſequitur haec tertia aequatio:

3°. $Llldd\lambda + Mmmdd\mu + Nnndd\nu + L(xddy - yddx) + M(x'ddy' - y'ddx') + N(x''ddy'' - y''ddx'') = 0$.

Praeterea ad flexuram vtramque eſt reſpiciendum; cum igitur in B ſit inflexio facta per angulum $= \mu - \lambda$ in C vero per angulum $\nu - \mu$, ſiquidem in ſtatu naturali puncta A, B, C, D in directum iaceant, ponatur momentum elaſticitatis in $B = Ee$ ſin. $(\mu - \lambda)$ et in $C = Ff$ ſin. $(\nu - \mu)$.

Hinc pro flexura B ex altera totius corporis parte AB naſcitur virium requiſitarum momentum, ob $T = x + a\cos.\lambda$ et $V = y + a\sin.\lambda$ ita expreſſum

$\frac{Llldd\lambda}{dt^2}$

$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}.\alpha \sin.\lambda - \frac{Lddy}{dt^2}.\alpha \cos.\lambda$, in plagam tQ tendens quod negatiue sumtum cum vi elastica iuncturae quae in eandem plagam tendit in aequilibrio esse debet, ex quo obtinetur haec aequatio:

$$4^\circ.\ \frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{L\alpha(ddx \sin.\lambda - ddy \cos.\lambda)}{dt^2} = Ee \sin.(\mu - \lambda).$$

Pro iunctura in C vero considerandis viribus ex partibus AB et BC ortis nascitur momentum in plagam cR tendens:

$$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(Cc - y) - \frac{Lddy}{dt^2} Pc$$
$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2}.Cm - \frac{Mddy'}{dt^2} Qc$$

vnde colligitur haec aequatio:

$$5^\circ.\ \frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \frac{Lddx}{dt^2}(\alpha \sin.\lambda + (b+\beta)\sin.\mu) - \frac{Lddy}{dt^2}(\alpha \cos.\lambda + (b+\beta)\cos.\mu)$$
$$+ \frac{Mmmdd\mu}{dt^2} + \frac{Mddx'}{dt^2}\beta \sin.\mu - \frac{Mddy'}{dt^2}.\beta \cos.\mu = Ff \sin.(\nu - \mu).$$

Ex his ergo quinque aequationibus ad quoduis tempus t definiri oportet has quinque quantitates x, y, λ, μ, ν, cum reliquae coordinatae x', y', x'', y'' ex his iam determinentur.

Coroll. 1.

42. Tertia aequatio per se integrabilis praebet hoc integrale:

$$Llld\lambda + Mmmd\mu + Nnnd\nu + L(xdy - ydx) + M(x'dy' - y'dx')$$
$$+ N(x''dy'' - y''dx'') = Cdt$$

prima autem et secunda geminam integrationem admiserunt vbi notandum est, si totius corporis centrum

trum inertiae quiescat, constantes A, B, et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ euanescere.

Coroll. 2.

48. Si aequatio quinta a tertia auferatur, remanebit:

$$\begin{aligned}&Nnnddv+Lddy(x+\alpha\operatorname{cof.}\lambda+(b+\mathfrak{C})\operatorname{cof.}\mu)+Mddy'(x'+\mathfrak{C}\operatorname{cof.}\mu)\\&\quad-Lddx(y+\alpha\operatorname{fin.}\lambda+(b+\mathfrak{C})\operatorname{fin.}\mu)-Mddx'(y'+\mathfrak{C}\operatorname{fin.}\mu)\\&\quad+Nx''ddy''-Ny''ddx''\\&\qquad=-Ffdt^2\operatorname{fin.}(\nu-\mu)\end{aligned}$$

vbi si loco x, y, x'', y'' valores supra dati substituantur prodit

$$\begin{aligned}&Nnnddv+(Lddy+Mddy'+Nddy'')(x+\mathfrak{C}\operatorname{cof.}\mu)+Ncddy'\operatorname{cof.}\nu\\&\quad-(Lddx+Mddx'+Nddx'')(y+\mathfrak{C}\operatorname{fin.}\mu)-Ncddx'\operatorname{fin.}\nu\\&\qquad=-Ffdt^2\operatorname{fin.}(\nu-\mu)\end{aligned}$$

quae ob aequat. n. 1 et 2 contrahitur in hanc

$$Nnnddv-Nc(ddx''\operatorname{fin.}\nu-ddy''\operatorname{cof.}\nu)=-Ffdt^2\operatorname{fin.}(\nu-\mu)$$

quae eadem prodiisset statim, si elasticitatem flexurae in C cum momento virium ad alteram partem CD pertinentium comparauissem.

Coroll. 3.

49. Subtrahamus quartam aequationem a quinta, et fiet:

$$\begin{aligned}&Mmmdd\mu+Lddx(b+\mathfrak{C})\operatorname{fin.}\mu+Mddx'.\mathfrak{C}\operatorname{fin.}\mu\\&\quad-Lddy(b+\mathfrak{C})\operatorname{cof.}\mu-Mddy'.\mathfrak{C}\operatorname{cof.}\mu\\&\quad=+Ffdt^2\operatorname{fin.}(\nu-\mu)-Eedt^2\operatorname{fin.}(\mu-\lambda)\end{aligned}$$

ſubſtituantur hic iſti valores:

$$Mddx' = -Lddx - Nddx'' \text{ et } Mddy' = -Lddy - Nddy''$$

ac reſultabit

$$Mmmdd\mu + Lb(ddx \,\text{ſin.}\,\mu - ddy \,\text{coſ.}\,\mu) = +Ffdt^2 \,\text{ſin.}(\nu-\mu)$$
$$-N\mathfrak{b}(ddx'' \,\text{ſin.}\,\mu - ddy'' \,\text{coſ.}\,\mu) - Eedt^2 \,\text{ſin.}(\mu-\lambda).$$

Coroll. 4.

50. Praeter aequationes ergo iam integratas, vel potius loco aequationum n°. 3. 4 et 5 has euolui conueniet:

$$Llldd\lambda + L\alpha(ddx \,\text{ſin.}\,\lambda - ddy \,\text{coſ.}\,\lambda) = Eedt^2 \,\text{ſin.}(\mu-\lambda)$$

$$Mmmdd\mu + Lb(ddx \,\text{ſin.}\,\mu - ddy \,\text{coſ.}\,\mu) \atop -N\mathfrak{b}(ddx'' \,\text{ſin.}\,\mu - ddy'' \,\text{coſ.}\,\mu) = {+Ffdt^2 \,\text{ſin.}(\nu-\mu) \atop -Eedt^2 \,\text{ſin.}(\mu-\lambda)}$$

$$Nnndd\nu - Nc(ddx'' \,\text{ſin.}\,\nu - ddy'' \,\text{coſ.}\,\nu) = -Ffdt^2 \,\text{ſin.}(\nu-\mu)$$

ex quarum contemplatione inſignem analogiam colligere licet.

Scholion.

51. Quodſi ſcilicet ponamus:

$$\frac{Lddx}{dt^2} = p;\ \frac{Lddy}{dt^2} = q;\ \frac{Nddx''}{dt^2} = -p';\ \frac{Nddy''}{dt^2} = -q' \text{ hincque}$$
$$\frac{Mddx'}{dt^2} = p' - p \text{ et } \frac{Mddy'}{dt^2} = q' - q$$

tres poſtremae aequationes has induunt formas:

$$\frac{Llldd\lambda}{dt^2} + \alpha(p \,\text{ſin.}\,\lambda - q \,\text{coſ.}\,\lambda) = Ee \,\text{ſin.}(\mu-\lambda)$$

$$\frac{Mmm\,dd\mu}{dt^2} + b(p\,\text{fin.}\,\mu - q\,\text{cof.}\,\mu) = + Ff\,\text{fin.}(\nu-\mu)$$
$$+ \beta(p'\,\text{fin.}\,\mu - q'\,\text{cof.}\,\mu) \; - Ee\,\text{fin.}(\mu-\lambda)$$
$$\frac{Nnn\,dd\nu}{dt^2} + c(p'\,\text{fin.}\,\nu - q'\,\text{cof.}\,\nu) = - Ff\,\text{fin.}(\nu-\mu).$$

Ac fi in prioribus aequationibus hos valores affumtos fubftituamus, fequentes obtinebimus determinationes:

$$p = \frac{-L(M+N)\alpha\,dd.\,cof.\,\lambda - L((M+N)b + N\beta)\,dd.\,cof.\,\mu - LNc\,dd.\,cof.\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$
$$q = \frac{-L(M+N)\alpha\,dd.\,fin.\,\lambda - L((M+N)b + N\beta)\,dd.\,fin.\,\mu - LNc\,dd.\,fin.\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$
$$p' = \frac{-LN\alpha\,dd.\,cof.\,\lambda - N(Lb + (L+M)\beta)\,dd.\,cof.\,\mu - N(L+M)c\,dd.\,cof.\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$
$$q' = \frac{-LN\alpha\,dd.\,fin.\,\lambda - N(Lb + (L+M)\beta)\,dd.\,fin.\,\mu - N(L+M)c\,dd.\,fin.\,\nu}{(L+M+N)\,dt^2}$$

qui valores fi ibi fubftituantur, ternae tantum erunt variabiles λ, μ, ν quas ad datum tempus t definiri oportet, ad quod tres illae aequationes fufficiunt. Attendenti autem facile patebit quantitates p et q vires defignare quibus partes AB et BC in iunctura B praeter elafticitatem cohaerent, feu quae eas a fe inuicem diuellere conantur.

Alia Solutio eiusdem Problematis.

52. Statim igitur vires, quibus partes in fe mutuo agunt praeter iuncturae cuiusque elafticitatem, in calculum introducere licet, vnde hoc commodi affequimur, vt motum cuiusque partis feorfim definire queamus neque amplius opus fit, prin-

 cipium

cipium aequilibrii in ſubſidium vocari. Factis ergo iisdem denominationibus, quibus ante ſumus vſi, perpendendum eſt, binas partes contiguas ob nexum certis viribus in ſe mutuo agere, quibus efficitur ne a ſe inuicem diuellantur. In iunctura igitur B ſumamus partem AB ob nexum cum parte ſequente BC ſollicitari binis viribus $Bb' = p$ et $B\beta = q$ ſecundum directionem coordinatarum, atque ab iisdem viribus pars BC in plagas contrarias afficietur. Simili modo iunctura C exerat in partem BC vires $Cc' = p'$ et $C\gamma = q'$, quae ergo contrario modo agent in partem CD.

53. Iam ſingularum partium motum ſeorſim euoluamus, et cum pars prima AB ſollicitetur viribus $Bb' = p$ et $B\beta = q$ praeter vim elaſticitatis in iunctura B, quae motum progreſſiuum non afficit. Quare pro motu progreſſiuo huius partis habebimus:

$$\frac{L\,ddx}{dt^2} = p \quad \text{et} \quad \frac{L\,ddy}{dt^2} = q$$

vbi notandum eſt, ſi haec pars AB inſuper extrinſecus a viribus quibuscunque ſollicitaretur, earum rationem etiam in motus huius determinationem introduci oportere. Quod vero ad motum gyratorium huius partis AB circa ſuum centrum inertiae L attinet, quo angulum $BLl = \lambda$ augeri ſumimus, euidens eſt virium p et q momentum ad hunc motum accelerandum eſſe $= \alpha q \operatorname{cof.} \lambda - \alpha p \operatorname{fin.} \lambda$. Elaſticitatis autem in B momentum $Ee \operatorname{fin.} (\mu - \lambda)$ ſolum motum

motum gyratorium afficit, huiusque quidem partis accelerando; dum eo ſequentis BC motus gyratorius retardabitur, ex quo pro acceleratione motus gyratorii partis AB obtinemus $\frac{Llldd\lambda}{dt^2} = \alpha(q\,\text{cof.}\,\lambda - p\,\text{fin.}\,\lambda) + Ee\,\text{fin.}(\mu - \lambda)$.

54. Secunda iam pars BC ſollicitatur in B a viribus $Bb' = -p$, $B\mathfrak{E} = -q$, in C vero a viribus $Cc' = p'$, $C\gamma = q'$ vnde pro motus progreſſiui acceleratione colligimus:

$$\frac{Mddx'}{dt^2} = p' - p \quad \text{et} \quad \frac{Mddy''}{dt^2} = q' - q.$$

Ex iisdem vero viribus naſcitur momentum pro motu gyratorio circa centrum inertiae M accelerando $= \mathfrak{E}q'\,\text{cof.}\,\mu - \mathfrak{E}p'\,\text{fin.}\,\mu + bq\,\text{cof.}\,\mu - bp\,\text{fin.}\,\mu$; praeterea vero etiam a momento elaſticitatis in C, quod eſt $Ff\,\text{fin.}(\nu - \mu)$ acceleratur, a praecedente autem in B retardatur, vnde colligitur haec aequatio

$$\frac{Mmmdd\mu}{dt^2} = (\mathfrak{E}q' + bq)\,\text{cof.}\,\mu - (\mathfrak{E}p' + bp)\,\text{fin.}\,\mu + Ff\,\text{fin.}(\nu - \mu) - Ee\,\text{fin.}(\mu - \lambda).$$

55. Tertia pars, quia eſt vltima, tantum in C ſollicitatur a viribus $Cc' = -p'$ et $C\gamma = -q'$, tum vero etiam a momento elaſticitatis in $C = Ff\,\text{fin.}(\nu - \mu)$, quo motus tantum gyratorius retardatur. Pro motu ergo progreſſiuo habebimus:

$$\frac{Nddx''}{dt^2} = -p' \quad \text{et} \quad \frac{Nddy''}{dt^2} = -q'$$

at quia ex his viribus nafcitur momentum ad motum gyratorium circa N accelerandum $= cq' \cos. \nu - cp' \sin. \nu$ ifta elicitur aequatio

$$\frac{Nnnddv}{dt^2} = c(q' \cos. \nu - p' \sin. \nu) - Ff \sin. (\nu - \mu).$$

56. Hae formulae egregie conueniunt cum ante inuentis, ex quo haec methodus foluendi eo maiore attentione videtur digna, quod non folum negotium multo commodius conficit, fed etiam ita eft comparata, vt nifi ante eius confenfum cum praecedente perfpexiffemus, vix audacter affeuerare effemus aufi, ab elafticitate iuncturarum motum centri inertiae fingularum partium prorfus non affici. Aequationibus autem ex his quafi nouis principiis erutis adiungi conuenit hafce

$$x' - x = \alpha \cos. \lambda + b \cos. \mu; \quad x'' - x' = \mathfrak{b} \cos. \mu + c \cos. \nu$$
$$y' - y = \alpha \sin. \lambda + b \sin. \mu; \quad y'' - y' = \mathfrak{b} \sin. \mu + c \sin. \nu.$$

Hincque fimul perfpicitur, fi plures tribus partes inter fe per flexuras elafticas effent coniunctae, atque adeo etiam fingulae inter mouendum a viribus quibuscunque follicitarentur, quomodo motus determinatio ad formulas analyticas perduci debeat.

Euolutio analytica formularum inuentarum.

57. Cum sit ex hoc lemmate:

$$\sin.\Phi\, dd.\cos.\omega - \cos.\Phi\, dd.\sin.\omega = -dd\omega\cos.(\omega-\Phi) + d\omega^2\sin.(\omega-\Phi)$$

si ad contrahendas formulas supra §. 51. inuentas ponamus:

$$\frac{L(M+N)}{L+M+N} = P;\quad \frac{LN}{L+M+N} = Q \text{ et } \frac{N(L+M)}{L+M+N} = R$$

aequationes illae motum continentes has induunt formas:

$$\text{I.}\quad Llldd\lambda + P\alpha add\lambda + (Pb+Q\beta)\alpha dd\mu\cos.(\mu-\lambda) - (Pb+Q\beta)\alpha d\mu^2\sin.(\mu-\lambda) + Q\alpha cddv\cos.(v-\lambda) - Q\alpha cdv^2\sin.(v-\lambda) = Eedt^2\sin.(\mu-\lambda)$$

$$\text{II.}\quad Mmmdd\mu + (Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)dd\mu + (Pb+Q\beta)\alpha dd\lambda\cos.(\mu-\lambda) + (Pb+Q\beta)\alpha d\lambda^2\sin.(\mu-\lambda) + (Qb+R\beta)cddv\cos.(v-\mu) - (Qb+R\beta)cdv^2\sin.(v-\mu) = Ffdt^2\sin.(v-\mu) - Eedt^2\sin.(\mu-\lambda)$$

$$\text{III.}\quad Nnnddv + Rccddv + Q\alpha cdd\lambda\cos.(v-\lambda) + Q\alpha cd\lambda^2\sin.(v-\lambda) + (Qb+R\beta)cdd\mu\cos.(v-\mu) + (Qb+R\beta)cd\mu^2\sin.(v-\mu) = -Ffdt^2\sin.(v-\mu)$$

quae

quae primum additae integrationem admittunt:

$$(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda+(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu+(Nnn+Rcc)d\nu$$
$$+(Pb+Q\beta)\alpha(d\lambda+d\mu)\cos.(\mu-\lambda)+Q\alpha c(d\lambda+d\nu)\cos.(\nu-\lambda)$$
$$+(Qb+R\beta)c(d\mu+d\nu)\cos.(\nu-\mu)=Cdt.$$

Tum si prima per $d\lambda$ secunda per $d\mu$ et tertia per $d\nu$ multiplicetur summa itidem fit integrabilis datque:

$$\tfrac{1}{2}(Lll+P\alpha\alpha)d\lambda^2+\tfrac{1}{2}(Mmm+Pbb+2Qb\beta+R\beta\beta)d\mu^2+\tfrac{1}{2}(Nnn+Rcc)d\nu^2$$
$$+(Pb+Q\beta)\alpha d\lambda d\mu\cos.(\mu-\lambda)+Q\alpha cd\lambda d\nu\cos.(\nu-\lambda)+(Qb+R\beta)cd\mu d\nu\cos.(\nu-\mu)$$
$$=Eedt^2\cos.(\mu-\lambda)+Ffdt^2\cos.(\nu-\mu)+Ddt^2.$$

SECTIO

SECTIO PRIMA DE STATV AEQVILIBRII FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

CAPVT I.

DE NATVRA ET VARIETATE FLVIDORVM.

Phaenomenon I.

1.

Si fluidum a vi quacunque pressum in aequilibrio versetur, tum pressio per totam fluidi massam ita aequaliter diffunditur, vt omnes eius particulae parem vim sustineant.

Illuſtratio.

Sermo hic eſt de fluido in aequilibrio exiſtente quod propterea omni motu deſtituitur, non obſtante vi, qua id premi aſſumimus: vel ſi primo actionis initio, motus quidam in fluido fuerit exortus, eo demum ceſſante hic ſtatus fluidi conſideratur, ita vt fluidum iam et preſſionem ſuſtineat, et in aequilibrio verſetur. Quod quo clarius percipiatur, ſit fluidum vaſi A B C D E F incluſum, in quo ope emboli *p* O tubo A B *b* inſertae data vi prematur, cuius directio in O ad ſuperficiem fluidi perpendicularis eſt intelligenda. Nunc igitur quando affirmamus hanc preſſionem per totam fluidi maſſam diffundi, id primo, reſpectu parietum vaſis ita eſt interpretandum, vt ſi vſpiam eſſet foramen embolo O aequale et operculo C D claudendum, id parem vim eſſet ſuſtentaturum, ideoque aequali vi apprimendum, ne a fluido depellatur, cuius quippe vis operculum vrgens *n q* ipſi vi prementi *p* O eſt aequalis. Si aliud ſimile operculum *c d* maius minusue concipiatur quam baſis emboli O vis id ſecundum directionem *m r* vrgens in eadem ratione maior erit minorue quam vis emboli. Vbique ergo vaſis parietes intus a fluido pelluntur talibus viribus, quae ſi ſpatiola, in quae agunt, baſi emboli O ſint aequalia, ſingulae ipſi vi embolum trudenti erunt aequales: deinde vero obſeruandum eſt ſingulas has vires in ſuperficiem, quam vrgent, eſſe perpendiculares, quod quidem ex notione preſſionis

Tab. V. Fig. 1.

per

per ſe eſt manifeſtum. Denique haec preſſio non ſolum in latera vaſis intus agit, ſed etiam per vniuerſam fluidi maſſam aeque viget, in medio namque fluidi ſi concipiamus molem quamcunque fgh haec a fluido ambiente vndequaque pari vi comprimetur, eamque idcirco ſuſtinere debet, ne in ſpatium anguſtius compellatur, vbi quidem pariter liquet, has vires perpetuo in ſpatia, quibus applicantur eſſe normales. Hic autem perinde ſe res habet, ſiue moles fgh ſit corpus peregrinum, ſiue ipſius fluidi vas implentis pars.

Coroll. 1.

2. Si ergo emboli baſis O dicatur $= ff$ et vis embolum vrgens $= p$, tum ſumto in vaſis lateribus ſpatiolo $CD = ff$ id extrorſum pelletur vi $nq = p$, ſin autem aliud ſumatur ſpatiolum $cd = gg$, id ſuſtinebit vim $nr = \frac{gg}{ff} p$ cum ſit haec vis ad illam p vti gg ad ff.

Coroll. 2.

3. Cum virium menſura commodiſſime a ponderibus petatur, ſi loco vis p ſubſtituamus pondus columnae, baſin $= ff$ et altitudinem $= a$ habentis, quae quidem ex nota materia conſtare eſt concipienda, tum ſoliditas aff praebebit menſuram vis p hincque pro alio quocunque ſpatiolo gg vis id vrgens erit $= agg$.

Coroll. 3.

4. Hic ergo modus vim prementem p exhibendi hoc insigne praestat commodum, vt sola illius columnae altitudo a sufficiat omnibus pressionibus, per totam fluidi massam cognoscendis: quodlibet enim spatiolum vim sustinet aequalem ponderi columnae, cuius basis ipsi isti spatiolo aequatur altitudo vero perpetuo est $= a$.

Scholion 1.

5. Hic manifesto assumsimus fluidum a nulla alia vi sollicitari praeter eam qua embolus vrgetur: a grauitate igitur aliisque similibus viribus, quae immediate in singulas fluidi particulas agere solent, hic mentem omnino abstrahi oportet. Fluidum ergo vasi inclusum grauitatis expers concipi debet, et sub hac tantum conditione phaenomenum est accipiendum: si enim fluidum grauitate esset praeditum, partes inferiores praeter pressionem emboli etiam a pondere superiorum deprimerentur, indeque eueniret, vt vasis latera circa fundum maiori vi premerentur, quam in summitate. Quemadmodum autem a grauitate aliisque similibus viribus pressionum aequalitas hic stabilita perturbetur, deinceps tam pro statu aequilibrii quam motus inuestigabimus, hoc loco tantum notasse iuuabit maximum discrimen inter vires externas seu extrinsecus in fluidum agentes, cuiusmodi est haec vis embolo applicata

cata, et inter vires grauitati ſimiles, quae quaſi intus ſingulas fluidi particulas ſollicitant eſſe conſtituendum.

Scholion 2.

6. Mirum omnino videri debet, quod ab vnica vi, eaque quantumuis parua quaſi innumerabiles nouae vires quantumuis magnae generari queant. Statim enim ac fluidum in ſpatiolo O ab embolo premitur, tota ſimul vaſis cauitas interna, quantumuis ea fuerit ampla in ſingulis elementis a paribus viribus vrgetur, ſi ſcilicet elementa baſi emboli O aequalia capiantur, ex quo amplitudinem vaſis augendo haec multiplicatio in infinitum expandi poteſt. Deinde etiam eaedem vires ſubſiſtere poſſunt, etiamſi vis embolum premens in infinitum diminuatur, dummodo emboli baſis in eadem ratione imminuatur: quem enim effectum producit vis p in ſpatiolum ff agens, eundem plane effectum producit vis $\frac{1}{1000}p$ ſpatiolo $\frac{1}{1000}ff$ applicata. Quod etſi ſummopere eſt mirandum, tamen neutiquam vt abſurdum legibusque naturae contrarium ſpectari debet, neque enim ſtaticae praecepta ideo in dubium vocari ſolent, quod vires minimae ope machinarum in immenſum augeri poſſe oſtenduntur. Cum legibus autem naturae hoc paradoxon ita conciliare licet, vt dicamus ab his viribus etiam in immenſum multiplicatis nullam actionem produci: quandoquidem fluidum in aequilibrio ſtatuitur. Sub-

lato autem aequilibrio ſimul atque motus exoritur, ab his tot tantisque viribus non maior effectus producitur, quam qui ſit illi vi principali embolum ſollicitanti conſentaneus.

Scholion 3.

7. Quoniam vidimus a ſola vi embolum O premente tot vires quaſi per vniuerſam fluidi masſam excitari, eaque duplicata etiam has fieri duplo maiores hinc tuto concludi poſſe videtur, ſi eidem vaſi duo huiusmodi emboli accommodentur, quorum vterque vi eadem prematur, etiam omnes preſſiones in fluido duplicari debere, haec certe concluſio ei canoni inniti videtur, quod cauſa geminata etiam effectus duplicetur. Nihilo tamen minus haec argumentatio prorſus eſt fallax: neque duo illi emboli quicquam amplius praeſtabunt quam vnicus, quod etiam tenendum eſt, ſi multo plures eodem modo adhiberentur, quod ingens paradoxon facile diluetur, ſi circumſtantias phaenomeni probe perpendamus. Cum enim vis np in baſin nff non maiorem producit preſſionem, quam vis p in baſin ff agens, euidens eſt a duabus pluribusue aequalibus viribus, quarum ſingulae embolos aeque amplos trudant, eandem plane in fluido preſſionem oriri debere atque ab vnica: hocque ergo caſu falſum eſt a cauſa duplicata effectum duplicatum produci. Hoc autem clarius inde intelligitur, quod operculum C D foramen embolo O aequale tegens tanta vi appri-

apprimi debeat, quanta vi embolum agit, ſi igitur loco operculi ſimilis embolus adhibeatur, ei quoque aequalis vis applicari debet, eum tantum in finem, vt aequilibrium conſeruetur: neque ergo inde noua preſſio in fluido generari poterit: ſin autem hic alter embolus maiori minoriue vi impellatur, aequilibrium plane tollitur atque effectus inde oriundi determinatio non ad hunc locum pertinet.

Concluſio.

8. Ex hoc phaenomeno colligimus naturam fluidorum aptiſſime in ea proprietate collocari, quod quaelibet preſſio iis applicata per totam eorum maſſam ita diffundatur vt omnes eorum partes eandem ſentiant preſſionem, quatenus ſcilicet fluidum in aequilibrio perſiſtit.

Explicatio.

9. Natura fluidi in eiusmodi proprietate conſtitui debet, quae non ſolum omnibus fluidis ſit communis; ſed etiam vt omnis materia in quam eadem proprietas competit, recte pro fluido habeatur. Aequabilis autem cuiusque preſſionis diffuſio per omnes fluidi partes vtique eiusmodi eſt proprietas, quae non ſolum in omnibus fluidis agnoſcitur, ſed etiam omnes materiae ſtatim ac proprietate hac fuerint praeditae, merito ad genus fluidorum referuntur; tum vero etiam nulla materia hac proprietate deſti-

deſtituta pro fluida haberi poteſt. Neceſſario autem haec proprietas omnia fluidorum attributa inuoluit, quae vulgo tam in particularum ſumma paruitate, quam cohaeſionis defectu conſtitui ſolent, vt facillime ſibi mutuo cedere et inter ſe agitari queant, niſi enim particulae eſſent minimae et diſſolutae, perſpicuum eſt noſtram proprietatem nullo modo locum habere poſſe. Praecipuum autem momentum in hoc conſiſtit, quod ex hac proprietate omnia tam aequilibrii, quam motus fluidorum principia planiſſime deriuari poſſunt, ita vt quaecunque materia hac proprietate fuerit praedita, ea neceſſario tam in aequilibrio, quam motu leges iſtis principiis innixas ſequi debeat. Cum igitur huic ſoli proprietati vniuerſa aequilibrii motusque fluidorum doctrina feliciſſimo ſucceſſu ſuperſtruatur, dubium plane eſt nullum quin vera fluidorum natura et eſſentia in ea proprietate conſtitui debeat.

Scholion I.

10. Primum autem ſtatim hac proprietate corpora fluida maxime diſtinguuntur a corporibus ſolidis: quacunque enim vi corpus ſolidum tabulae apprimitur, eandem praeciſe vim tabula ſuſtinet idque in eadem directione, neque inde in corpore
Tab. V. Fig. I. vlla vis latera verſus naſcitur. Scilicet ſi in vaſe ante conſiderato A B C D E F, corpus ſolidum contineretur, vel ſi fluidum in eo contentum per congelationem in ſolidum transmutaretur, tum id ab embo-

embolo O pressum fundum tantum oppositum E *d* pari vi vrgeret, multo minus adeo sursum circa A et B vas impelleret, quemadmodum a fluido fieri obseruauimus. Tum vero etiam haec proprietas fluidum distinguit ab aceruo minimorum corpusculorum solidorum: veluti si idem vas arena esset repletum tum quidem a pressione emboli O non solum fundum, sed etiam latera vasis quampiam vim sentirent, vt foramine pertuso arena erumperet, verum tamen hae vires neutiquam inter se forent aequales, vti fit in fluido, sed fundum embolo oppositum semper maiorem vim sustineret quam latera. Quin etiam vis in latera exerta maxime foret inaequalis, dum a dispositione singulorum granulorum, prouti alia ab aliis impelluntur pendet, quemadmodum ex principiis staticis colligere licet: vix autem arena superne circa A et B, si ibi foramen fieret, esset eruptura.

Scholion 2.

11. Hinc igitur sequi videtur materiam fluidam neutiquam pro congerie plurimorum corpusculorum solidorum minimorum qualem aceruus arenae exhibet haberi posse: quoniam talis congeries nequaquam ea proprietate, in qua fluidorum naturam constituimus, foret praedita: neque etiam perfecta lubricitas his particulis solidis adiecta negotium conficere potest. Si fortasse ipsis insuper motus intestinus tribueretur, qualis a calore oriri concipitur,

etiamsi in sensus non incurrat, phaenomeno proposito satisfieret, cum per experimenta subtilissimus marmoris puluis in vase igni expositus naturam fluidi mentiatur: interim tamen merito adhuc dubitamus, an in tali materia pressiones quaquauersus aequaliter diffundantur? Hinc igitur in physica, quaestio, vtrum vltimae fluidorum particulae pro solidis haberi queant nec ne? minime adhuc confecta est censenda, neque minus dubium etiamnum videtur an vltimae solidorum particulae recte pro solidis habeantur? quoniam enim plurima corpora solida ope caloris fluida reddi possunt; si soliditas minimarum particularum fluiditati aduersaretur, ea etiam in huiusmodi solidis, admitti non posset.

Haud magis etiam liquet, quid de materiis semi-fluidis sit sentiendum, cuiusmodi sunt mel, exangia, aliaque olea crassiora, in quibus non tam particulae solidae implexae, quam nimia cohaesio fluiditati obsistere videtur. Ita etiam cera, quae in frigore est corpus satis durum, calori exposita mox butyri consistentiam adipiscitur, tum instar mellis fit corpus semi fluidum, aucto vero calore tandem ita perfecte fit fluidum, vt minimos corporum poros penetrare valeat, veluti ex iniectionibus anatomicis constat: hoc ergo casu omnes gradus a maxima duritie ad perfectam fluiditatem distinguere licet, qui ita continuo nexu inter se cohaerent, vt difficile sit limites assignare, vbi soliditas desinit et fluidi-

fluiditas incipit. Dum autem aqua congelascens in glaciem conuertitur, haec transmutatio quasi puncto temporis efficitur.

Scholion 2.

12. Non hic locus est super eiusmodi quaestionibus disputandi, neque etiam earum enodatio ad praesens institutum vllam vtilitatem esset allatura. Hic nimirum sufficit ostendisse dari eiusmodi materias, quibus fluidorum definitio hic data conveniat: verum etiamsi tales materiae, quae pro perfecte fluidis haberi queant, in mundo non existerent, nihilo tamen minus scientia cuius fundamenta hic stabilire constitui subsisteret, summumque adeo vsum esset habitura: perinde ac quae a mechanicis de corporibus vel perfecte duris, vel perfecte elasticis traduntur, summa vtilitate non destituuntur, etiamsi existentia huiusmodi corporum in dubium sit relinquenda. In leges itaque tam aequilibrii quam motus eiusmodi corporum sum inquisiturus, in quae definitio fluiditatis hic data competat, parum sollicitus, vtrum in mundo talia corpora existant nec ne? Interim tamen nullum est dubium, quin aquae natura tam prope ad hanc definitionem accedat, vt nulla aberratio ab hac theoria sit metuenda, quod pariter de aliis materiis aeque liquidis est tenendum. Aer autem multo magis hac fluiditatis proprietate est praeditus; atque in aethere ne minimus quidem perfectae fluiditatis defectus admittendus videtur:

haec autem diuersa fluida ob alias rationes maxime a se inuicem discrepant, quod discrimen pariter ex phaenomenis accuratius inuestigari conuenit.

Phaenomenon 2.

13. Alia fluida ita comparata deprehenduntur, vt quantumuis magna vi premantur, idem semper volumen retineant: alia vero huius sunt indolis, vt quo maiori vi premantur, in eo minus spatium redigantur, antequam ad aequilibrium perueniant: in vtroque autem genere proprietas fluiditatis ante memorata aeque locum habet.

Illustratio.

Prior indoles, qua fluidum perpetuo idem volumen conseruat quantacunque vi prematur, in aqua aliisque similibus fluidis obseruatur: posterior vero aëri potissimum est propria, qui aucta vi premente continuo in spatium angustius comprimi se patitur. Quodsi nimirum A B C D E F aquam contineat, eaque ope emboli A O B prematur, quantumuis siue magna vi siue parua embolus adigatur, aqua semper idem volumen in vase occupabit, neque embolus etiamsi in infinitum aucta vi premente quicquam vlterius in tubo protrudi potest; verum vas ipsum potius diffringetur. Ponamus autem iam aqua effusa, in vase nihil praeter aërem contineri, eumque iam a data vi embolum vrgente

Tab. V. Fig. 2.

in

in ſtatum aequilibrii eſſe redactum, vt nunc in vaſe ſpatium vsque ad *o* vbi emboli baſis cernitur, occupet; in hocque ſtatu per totam maſſam eadem illa preſſio reperiatur, qua embolus vrgetur, vti natura fluiditatis poſtulat. Hoc poſito ſi vis in embolum agens augeatur, is ſimul profundius in vas adigetur, donec in aequilibrium peruenerit et quo magis vis illa intendatur, in eo minus ſpatium aër comprimetur. Contra vero minuta vi premente, ea non amplius aërem in hoc ſtatu retinere valebit, ſed retropelletur aëre ſe in maius ſpatium expandente, donec in eum ſtatum perueniat, vbi haec minor vis aequilibrium fuiſſet productura. Hocque diſcrimen inter aquam et aërem maxime notari meretur.

Coroll. 1.

14. Aqua igitur perpetuo eandem conſeruat denſitatem ſiue a maiore vi comprimatur ſiue a minore, ſiue etiam prorſus a nulla: vnde de aqua praedicari poteſt, quod cuiuis preſſioni eadem denſitas reſpondeat.

Coroll. 2.

15. Aëris autem ratio longe aliter eſt comparata, cum vis maior eum in minus ſpatium adigendo, ipſi tanto maiorem denſitatem inducat. Ad quamuis ergo vim prementem certus denſitatis gradus eſt affectus, et viciſſim quaeuis denſitas certam vim comprimentem ſupponit.

Coroll. 3.

16. Si igitur vis premens certae cuidam basi innixa ponatur $=p$ et densitas fluidi $=q$, cum scilicet in aequilibrium fuerit redactum: tum pro aqua q est quantitas constans neutiquam a vi p pendens: pro aëre vero q est certa quaedam functio ipsius p, ita vt data altera, altera simul determinetur.

Scholion 1.

17. Non obstante hac insigni differentia, tam aër quam aqua ad genus corporum fluidorum aeque refertur, propterea quod natura fluiditatis supra stabilita vtrique conuenit, in modo autem tractandi hinc maximum discrimen nascitur, siquidem in motus inuestigatione potissimum ratio densitatis a qua inertia pendit est habenda. Aqua igitur eiusmodi est fluidum, cuius densitas perpetuo manet inuariata, quomodocunque a viribus vrgeatur, quippe a quibus in minus spatium coarctari omnino nequit, ita vt ab actione virium eius densitas nullam mutationem patiatur, ex quo aqua fluidum vocari solet nullius compressionis capax. Aëri autem contra densitas, quae suae naturae sit propria, tribui nequit, quoniam prout a maioribus vel minoribus viribus vrgetur, maxime diuersos densitatis gradus recipere potest. Hinc aër dicitur fluidum compressionis capax, et quoniam cessante vi comprimente sponte se iterum relaxat, et in maius spatium expan-

pandens densitatem imminuit, vis elastica ei tribuitur. Omnino enim quanta vi opus est ad aërem in datum densitatis gradum redigendum, tanta praecise vi pollet se iterum expandendi, quemadmodum aequalitas inter actionem et reactionem postulat. Ex quo patet hanc vim elasticam aëris perpetuo vi comprimenti esse aequalem, neque differre a viribus inde per totam massam diffusis, quibus tam parietes vasis, cui aër est inclusus, quam omnes partes inter se vrgentur. Quamobrem elasticitas aëri tributa ab illa vi pressionis per primum phaenomenon stabilita non est distinguenda, quae cum etiam aquae sit communis, aliud discrimen hic non est admittendum, nisi quod aqua constanti praedita sit densitate, aër autem variabili, quae in omni statu a vi premente determinetur.

Scholion 2.

18. Experimentis autem euinci solet, densitatem aëris proxime esse vi comprimenti proportionalem, facile autem intelligitur hanc proportionalitatem non vltra certos limites locum habere posse. Si enim densitas semper esset vi comprimenti exacte proportionalis, inde sequeretur euanescente hac vi etiam densitatem euanescere debere, ita vt minima aëris portio a nulla vi compressa, se in spatium infinitum esset expansura, quod merito absurdum videtur. Contra autem non minus absurdum foret, vi comprimente in infinitum aucta, etiam densitatem

tem fieri infinite magnam, ſicque aëris maſſam quantumuis magnam in ſpatium euaneſcens compelli poſſe. Quae ambo incommoda vt euitentur ſtatuendum eſt pro aëre tam dari denſitatem minimam eamque finitam, quam ceſſante vi comprimente recipiat: quam etiam maximam pariter finitam, ad quam non niſi vi infinita redigi poſſit. Repraeſentet ſcilicet recta A B minimam denſitatem, A C vero maximam denſitatem aëris, quarum illi vis comprimens nulla, huic vero infinita reſpondeat, atque manifeſtum eſt, ſi denſitas quaecunque media A P aëri inducatur a vi comprimente per applicatam P M repraeſentata, quatenus ſcilicet datae baſi innititur, tum puncta M, reperiri in eiusmodi linea curua B M V, quae in B axem A C tangat, neque vltra verſus A porrigatur, tum vero ab axe continuo recedat, et rectam C D in C axi normalem habeat pro aſymtota neque etiam vltra eam continuetur. Huiusmodi lineae curuae innumerabiles excogitari poſſunt, veluti ſi poſita denſitate minima $AB = b$ et maxima $AC = c$ vocetur denſitas quaecunque $AP = x$ et preſſio ei conueniens $PM = y$ iſta aequatio $yy = nn\frac{(x-b)^3}{c-x}$ ſeu $y = n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{c-x}}$ his conditionibus ſatisfacit, ſi enim $x = b$ fit $y = 0$ ſi $x = c$ fit $y = \infty$ et vltra hos terminos valor ipſius y prodit imaginarius.

Tab. V. Fig. 3.

Scho-

Scholion 3.

19. Iſta formula analytica rem nobis aperit maximi momenti, cum ea non ſolum aëris indolem nobis illuſtret, ſed etiam ſimul aquae naturam, quamtumuis ea diuerſa videatur in ſe complectatur. Si enim minimam denſitatem $AB = b$ et maximam $AC = c$ inter ſe aequales fieri ponamus, habebimus hanc aequationem $y = n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{b-x}}$ quae neceſſario inuoluit conditionem $x = b$ ita vt denſitas tum perpetuo maneat eadem, quaecunque fuerit preſſio y. Ita aqua et aër hoc tantum a ſe inuicem diſcrepare ſunt cenſendi, quod in aëre maxima et minima denſitas, cuius eſt capax, plurimum a ſe inuicem diſtent, in aqua autem inter ſe conueniant. Quare ſi aliae concipiantur materiae aëri ſimiles, quarum denſitates maximae et minimae continuo propius ad ſe inuicem accedant, ita vt interuallum BC continuo minus ſit accipiendum, hoc modo continuo propius ad naturam aquae accedetur, quippe quae hinc reuera reſultabit interuallo BC penitus euaneſcente. Plurimum autem intererit hanc circumſtantiam probe obſeruaſſe qua tam aëris quam aquae natura eidem formulae analyticae ſubiiciuntur, ita vt haec duo fluida non vniuerſa natura ſed tantum gradu a ſe inuicem diſcrepare ſit iudicandum. Quae ergo in genere de fluido quocunque cuius denſitas maxima et minima quocunque interuallo diſcrepant, tradentur, ea aeque ad aërem atque ad aquam accommodari poterunt.

Conclusio.

26. Praecipua ergo fluidorum varietas in eo discrimine est constituenda, quod inter densitatem minimam et maximam cuius quodque fluidum capax est, intercedit; tum vero etiam in ea lege, qua a quauis pressione fluido certa densitas inducitur.

Explicatio.

21. Quae hic de densitate afferuntur, de fluidis tantum homogeneis sunt intelligenda, quae per totum spatium, quod implere concipiuntur, eadem densitate sint praedita; si enim fluidum ex diuersis materiis constaret, de cuiusque partis densitate iudicium seorsim esset ferendum. Dum autem materia homogenea consideratur, eius densitas ex tota massa per volumen, quod occupat, diuisa aestimari debet, ita vt manente massa eadem, densitas volumini reciproce proportionalis sit censenda. Hinc minima cuiuspiam fluidi densitas ex eo volumine colligi debet, in quod certa eius massa, dum a nullis viribus vrgetur, se expandit, massam scilicet per hoc volumen diuidendo, maxima vero densitas simili modo ex eo volumine, in quod eadem massa a vi infinita coarctatur. Quare aqua eiusmodi fluidum est dicendum, cuius maxima et minima densitas sint inter se aequales, ita vt eius densitas a nullis viribus vllam mutationem patiatur. In aëre autem hae duae densitates maxime discrepant minima enim certe

certe plus quam millies minor eſt cenſenda ea quam ſentimus, dum aër a pondere atmoſphaerae comprimitur, maxima autem denſitas, ad quam viribus non niſi infinitis redigi poſſet, ſi auri denſitati aequalem aeſtimemus, quaſi quindecies millies ſtatum naturalem ſuperaret; ſicque maxima denſitas aëris foret ad minimam vt 15000000 ad 1. ex quo immenſum diſcrimen inter aquam et aërem colligere licet.

Scholion 1.

22. Per ſe manifeſtum eſt, quomodo in tanto interuallo inter binas denſitates extremas, omnibus preſſionibus ab euaneſcente, ad infinitam vsque, cuique ſua definita denſitas conuenire poſſit, cum id ex formula §. 18. exempli loco allata clariſſime perſpiciatur. Verum quomodo eadem formula ad naturam aquae ſit accommodanda, ita vt pro omnibus preſſionibus eadem prodeat denſitas, non tam perſpicue intelligitur, quia poſito $c = b$ formulae $y = n(x-b)\sqrt{\frac{x-b}{b-x}}$ valor vel imaginarius vel nullus eſſe videtur. Ad hoc dubium autem diluendum ſtatuamus differentiam minimam inter denſitatem minimam b et maximam c ſitque exempli gratia $b = 1000000$ et $c = 1000010$; dum pro omnibus denſitatibus vires reſpondentes n ita ſe habebunt, ſcilicet cum denſitati x conueniat preſſio $y = n$

$(x - 1000000) V \frac{x - 1000000}{1000010 - x}$ sequens tabella nodum soluet sumto $n = 100$

densitas x	pressio y
1000000	0
1000001	$33\frac{1}{3}$
1000002	100
1000003	196
1000004	326
1000005	500
1000006	735
1000007	1069
1000008	1600
1000009	2700
1000010	∞

Quia enim hinc patet quomodo pressiones diuersissimae densitates proxime aequales producere possunt, facile intelligitur discrimen in densitate prorsus euanescere posse.

Scholion 2.

23. Non semper vi actuali, qualem supra embolo applicatam sumus contemplati, opus est ad aërem aliaue similia fluida in dato statu pressionis conseruando. Si enim ponamus aërem in vase A B C D E F ope vis embolo O applicatae in statum aequilibrii esse redactum, vt iam vbique quaquaversus eandem vim exerceat, embolum subito vasi agglutinari concipiamus, vt iam perinde sit siue solli-

sollicitetur nec ne? ac remota vi illa manifestum est aërem vasi inclusum in eodem statu perseuerare, atque easdem pressiones in latera vasis exercere, ex quo iam clarissime intelligitur, has pressiones vnice densitati aëris in vase inclusi esse tribuendas, ita vt quatenus aër ad certum densitatis gradum fuerit redactus, eatenus etiam quaquauersus easdem vires exerceat, quibus opus est ad istam densitatem aëri inducendam. Ad aquam quidem idem ratiocinium haud transferri posse videtur, si enim dum aqua in eodem vase ab embolo vim quamcunque sustinet, embolus subito cum vase coalescat, aqua etiam simul nullam amplius pressionem sentire videtur. Verum quia statim ac aquae minimam compressionem concedamus, hoc quoque phaenomenon exhiberi debet, dubium nullum esse potest, quin etiam in vera aqua locum habere debeat, sed ob aliam rationem effectus mox euanescere debet, quantaecunque enim fierent vires quas latera vasis durante pressione emboli sustinerent, si embolo conglutinato concipiamus latera vasis his viribus vel minimum cedere, quod reuera fieri tuto assumere licet, tum aqua simul omnes has vires amittet. Hanc igitur veram caussam esse intelligi oportet, cur embolo vasi affixo aqua subito nullas amplius vires pressionis exerceat.

Phaenomenon 3.

24. Omnis generis fluida a calore in maius spatium expandi, a frigore autem in minus spatium

contrahi experientia declarat, quatenus quidem ob vires sollicitantes hoc fieri licet.

Illustratio.

Quae fluida aquae sunt similia quorum densitas a nullis viribus comprimentibus alteratur, ea tamen aucto calore in maius spatium ita expanduntur, vt nulla vis hunc effectum coercere valeat, minuto autem calore effectus contrarius producitur densitas ergo a calore minuitur a frigore augetur. In fluidis autem aëri similibus hoc phaenomenon ita se habet, vt aucto calore ea tantum in maius spatium se expandere conentur, ac tum demum se actu expandunt, quando vires comprimentes hunc effectum non impediunt. Cum igitur ante viderimus, in aëre quemuis densitatis gradum cum certa pressione esse coniunctum, id eatenus tantum est intelligendum, quatenus aër in eodem caloris statu versatur, caloris enim mutatione haec regula vehementer perturbatur. Aucto namque calore dum densitas manet eadem, pressio augetur: dum autem pressio manet eadem, densitas minuitur, contrarium vero euenit calore imminuto, ita vt tum densitate manente eadem pressio debilitetur, pressione autem eadem manente densitas augeatur. Apprime haec conueniunt cum iis quae in physicis tradi solent, si modo loco pressionis elasticitatem substituamus, quoniam enim sub notione pressionis elasticitas commodissime comprehenditur, ideas hic eo minus multiplicaplicare nolo, vt eadem principia tam ad aquam quam aërem accommodari queant.

Coroll. 1.

25. Etsi ergo densitas aquae omni virium comprimentium actioni resistit, tamen non pro constanti est habenda, quia cum calore aliquantillum variatur, ita vt pro quouis caloris gradu peculiaris densitas aquae sit tribuenda.

Coroll. 2.

26. In aëre autem iam non amplius pressio a sola densitate pendet, sed insuper caloris ratio habenda est, quo aucto eadem densitas maiorem pressionem postulat, minuto vero minorem. Pressione autem seu elasticitate eadem manente, calor auctus aërem in maius spatium distendens, eius densitatem diminuit.

Coroll. 3.

27. Si ergo aër non semper vel vbique eodem calore est praeditus, pressio qua pollet, tanquam functio spectari debet tam densitatis quam caloris, ideoque tanquam functio duarum quantitatum variabilium, qua vtraque crescente augeatur, vtraque vero decrescente minuatur.

Scho-

Scholion I.

28. Quod ſi ergo denſitatem littera q calorem vero littera r deſignemus, preſſio autem littera p repraeſentetur, qua vel vis in datam baſin agens indicetur, vel potius altitudo columnae certae cuiusdam materiae conſtantis, cuius pondus aequatur, vi prementi quaecunque fuerit baſis quandoquidem hoc modo quantitas baſeos ex calculo extruditur. His igitur poſitis quantitas p vt functio binarum q et r eſt ſpectanda, de cuius natura hoc tantum nouimus quod creſcente vtraque q et r etiam p augeatur. Quomodocunque autem quantitas p ab iſtis binis q et r pendeat, ea per applicatam cuiusdam ſuperficiei ſequenti modo repraeſentari poterit. Sumta enim ſuper recta A D portione $AR = r$ et in plano tabulae ordinata illi normali $RQ = q$ ex Q eidem plano perpendicularis erigatur $QP = p$ haec in certa quadam ſuperficie terminabitur, cuius natura ſi eſſet perſpecta, pro quouis alio calore Ar aliaque denſitate rq applicata, ibi ad hanc ſuperficiem erecta qp preſſionem veram eſſet exhibitura. Pro quouis autem calore $AR = r$ in recta ad eam normali tam denſitatem minimam R M quam aër tum a nullis viribus preſſus induit, quam maximam R N quae ipſi a viribus adeo infinitis inducitur notari conuenit, quoniam applicata $QP = p$ in M euaneſcit in N vero fit infinita, quod ſi ſimili modo in m et n eueniat, ſuperficies in punctis M et m planum tangens inde verſus N et n progrediendo

Tab. V. Fig. 4.

conti-

continuo eleuabitur, vt in ipsis punctis N et n ad altitudinem infinitam exsurgat: vltra hos terminos autem nusquam porrigetur. In axe A D sine dubio quoque huiusmodi duo termini dantur, quorum alter minimo, alter vero maximo calori respondet, quem quidem aër recipere potest: sicque tota superficies spatio cuidam finito in plano tabulae imminebit.

Scholion 2.

29. Quemadmodum autem supra relationem inter densitatem q et pressionem p dedimus quae non adeo a veritate abhorrere videtur, ita nunc etiam calorem introducendo simili formula rem illustrare poterimus ponendo:

$$p = n(qr - A)\sqrt{\frac{qr - A}{B - qr}}$$

existente B quantitate constante maiore quam A. Hinc enim pro quolibet calore r si densitas fuerit $q = \frac{A}{r}$ pressio p euanescit, eritque adeo haec densitas minima isti gradui caloris conueniens, pro densitate autem $q = \frac{B}{r}$ pressio fiet infinita, haecque propterea densitas maxima eiusdem caloris: tum vero etiam haec formula declarat, quando densitas fuerit calori reciproce proportionalis, vt qr aequetur quantitati constanti mediae inter limites A et B pressionem p fore eandem, veluti experientia postulare videtur. Quod si ergo haec formula phaenomenis aëris satisfaciat, hic imprimis notandum est

 eam

eam quoque ad aquam egregie pertinere, dummodo quantitas constans B ipsi A aequalis statuatur, tum enim perpetuo sit oportet $qr = A$ seu densitas calori reciproce proportionalis, et simul omni pressioni locus conceditur. Ex consideratione vero etiam generali § praec. natura aquae obtinetur, si pro quouis gradu caloris termini densitatis M et N euanescant, tum enim tota superficies fiet cylindrica plano tabulae normaliter insistens, quo indicatur cuique calori determinatam densitatem respondere, cui omnes pressiones ab euanescente vsque ad infinitam aeque conueniunt.

Scholion 3.

30. Pro praxi autem, nisi densitas aëris sit vel nimis magna vel nimis parua, quoniam tum manente calore pressio proxime vt densitas est, manente densitate autem, calori proportionalis aestimari potest, quandoquidem certior ratio calorem metiendi adhuc latet, poni conueniet $p = nqr$ ita vt pressio rationem sequatur compositam densitatis et caloris. Verum vt haec formula etiam ad aquam accommodari possit, generalius poni potest:

$$p = A + m(nqr - A)$$

vnde fit $p = nqr$ si sumatur $m = 1$, qui valor itaque naturae aëris conuenire censendus est. Pro aqua autem hunc numerum m infinitum capi oportet, indeque perspicuum est, nisi pressio p sit infinita,

neces-

necessario esse debere $n q r = A$ ita vt pro quouis caloris gradu aqua certam condensationem recipiat: tum vero ob $m = \infty$ et $n q r - A = 0$ valor ipsius p prorsus manet indeterminatus, neque vlla pressio valebit eam aquae densitatem, quae ipsi pro caloris gradu conuenit, vel minimum immutare. Quamcunque autem legem sequi libuerit, id satis iam est perspicuum, naturam aquae non adeo a natura aëris discrepare, vt non commodissime eidem generi subiici queant: quod quidem in sequenti tractatione est maximi momenti, vt quaecunque in genere tam circa aequilibrium, quam motum inuestigauimus, deinceps aeque ad aërem atque ad aquam transferri queant. Nihil igitur hic interest, siue dentur fluida mediae cuiusdam naturae inter aquam et aërem, quae a viribus vrgentibus quodammodo condensari se patiantur siue minus? ac Theoria a praxi remota semper aeque subsistere censenda est. Id tantum tenendum est in sequentibus perpetuo fluida perfecta considerari per quae omnes pressiones quaquauersus aequaliter diffunduntur.

CAPVT II.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM REMOTA GRAVITATE ALIISQVE SIMILIBVS VIRIBVS.

Lemma.

31. Si corpus cuiuscunque figurae per totam ſuperficiem vndique normaliter ſollicitetur a viribus aequalibus, quatenus in aequalia ſuperficiei elementa agunt, tum omnes hae vires coniunctim ſe mutuo deſtruent.

Demonſtratio.

Tab. V. Fig. 5. Referatur tota ſuperficies ad ternas coordinatas inter ſe normales, quae pro puncto ſuperficiei quocunque p ſint $AM = x$ $MP = y$ et $Pp = z$, ſumtisque elementis $MN = PQ = dx$ et $PR = QS = dy$, vt in plano pro baſi aſſumto AMP habeatur rectangulum elementare $PQRS = dxdy$ cui in ſuperficie corporis emineat elementum $pqrs$, in quod normaliter ducta ſit recta pO baſi in O occurrens. Hoc igitur elementum $pqrs$ per hypotheſin ſecundum directionem pO ſollicitatur a vi areae huius ipſius elementi proportionali quae ergo vis commodiſſime

diſſime exhibetur pondere columnae cuiusdam materialis normaliter iſti elemento inſiſtentis, et cuius altitudo vbique ſit eadem $= p$. Cum iam recta pO normalis ſit ad ſuperficiem erit elementum $p\,q\,r\,s$ ad areolam PQRS $= dx\,dy$ vt recta pO ad P$p = z$ hincque $p\,q\,r\,s = \frac{pO}{z}\,dx\,dy$ ex quo pondus illius columnae aeſtimandum eſt $= p\,\frac{pO}{z}\,dx\,dy$ qua vi elementum $p\,q\,r\,s$ in directione pO vrgetur. Nunc igitur hanc vim ſecundum directiones ternarum coordinatarum reſoluamus, ac pro directione pP quidem vis tota multiplicari debet per $\frac{Pp}{pO}$ vnde vis ſecundum directionem pP ſollicitans prodit $= p\,d\,x\,d\,y$ vnde cum coordinatas inter ſe permutare liceat, vis qua idem elementum ſecundum directionem AM vrgetur, erit $= p\,d\,y\,d\,z$ et ſecundum directionem MP $= p\,d\,x\,d\,z$. Cum harum trium virium ſimilis ſit ratio ſufficit vnam conſideraſſe, quae ſit vis $p\,d\,x\,d\,y$ qua elementum $p\,q\,r\,s$ in directione pP ſollicitatur: vbi obſeruetur, cum corpus vndique ſit terminatum, rectas pP, qQ, Rr, Ss productas denuo ſuperficiem alicubi traiicere eiusque elementum abſcindere debere, quod cum pari vi vrgeatur ſecundum eandem directionem Pp ſed contrariam, hae vires ſibi aequales et contrariae ſe mutuo deſtruent. Simili modo pro viribus $p\,d\,y\,d\,z$ et $p\,d\,x\,d\,z$ quibus elementum $p\,q\,r\,s$ ſecundum directiones AM et MP vrgetur, dabuntur alia ſuperficiei elementa, quae vires his aequales et directe contrarias ſuſtinent: quod cum in omni-

omnibus elementis eueniat, perſpicuum eſt omnes omnino vires iunctim conſideratas ſe mutuo perfecte deſtruere, et in aequilibrio continere.

Coroll. 1.

32. Duo hic caſus occurrunt, prout vires iſtae aequales vel extrinſecus ſuperficiem introrſum vrgendo agunt, vel intrinſecus ſuperficiem extrorſum diſtendendo, vtroque autem caſu omnes vires iunctim ſumtae in aequilibrio verſantur.

Coroll. 2.

33. Neque ergo ab huiusmodi viribus corpus ad motum cietur ſiue id ſit ſolidum ſiue fluidum, dummodo iis ſuſtinendis par ſit, ſcilicet ſi vires introrſum vrgeant, corpus in minus volumen coarctare, ſin autem extrorſum pellant, in maius diſtendere conantur. Quare dum corpus huic actioni ſufficienter reſiſtat nullus plane effectus ab huiusmodi viribus producetur.

Coroll. 3.

34. Si igitur corpus per totam ſuperficiem ab huiusmodi viribus aequalibus normaliter vrgeatur, ſiue extrorſum ſiue introrſum, nulla vi externa opus eſt, qua id in ſtatu ſuo contineatur, ſed ſponte in quiete perſeuerabit.

Theo-

Theorema.

35. Dum pressio qua fluidum extrinsecus vrgetur, per totam eius massam aequaliter diffunditur, tam omnes fluidi partes, quam vas in quo continetur, in aequilibrio consistunt.

Demonstratio.

Quoniam per naturam fluiditatis pressio fluidum vrgens aequaliter per totam eius massam diffunditur, latera vasis in quo continetur vbique eiusmodi vires aequales sustinent quales in lemmate praemisso sumus contemplati, ita vt quoduis elementum sustineat vim ipsi proportionalem, quae commodissime per altitudinem certae columnae indicatur, quippe cuius pondus eam vim exhibere censendum est. Quare cum latera vasis ab his viribus normaliter extrorsum vrgeantur, ea se mutuo destruent, et vasi ab illis nulla mutatio inducetur, dummodo distensioni sufficienter resistat. Deinde cum etiam singulae fluidi particulae a paribus viribus quaquauersus comprimantur, in aequilibrio pariter erunt constitutae, dummodo vlteriori compressioni resistant, quod euenit si singulae partes eam habeant densitatem eumque caloris gradum, cui eadem pressio conueniat. At si fluidum aquae sit simile, ne hac quidem conditione est opus, cum in omni statu etiam maximas vires sustinere valeat.

Coroll.

Coroll. 1.

36. Corpus ergo etiam huic fluido immerſum, quia vndique a ſimilibus viribus comprimitur, erit in aequilibrio, neque ad vllum motum ab his preſſionibus concitabitur. Perindeque hic eſt, ſiue hoc corpus fuerit denſius ſiue rarius quam fluidum.

Coroll. 2.

37. Dum fluidum in vaſe contentum ope emboli vrgetur, et preſſio eadem per totum fluidum diffunditur, vires a fluido ipſo exercitae ſe in aequilibrio ſuſtinent: vas autem a vi embolum vrgente perinde ac corpus ſolidum ſollicitatur, et cum fluido incluſo promoueretur, niſi vi contraria ſuſtentaretur.

Scholion 1.

38. Cum de ipſo vaſe, in quo fluidum continetur, quaeſtio eſt, eae vires quas a fluido incluſo patitur, probe ſunt diſtinguendae ab iis viribus, quae extrinſecus ope emboli in fluidum agunt. Ponamus ope emboli pO fluidum in vaſe ABCDEF contentum vrgeri, et iam in aequilibrio verſari, omnes ergo fluidi partes tam inter ſe quam in latera vaſis agent viribus aequalibus, quas vt vidimus certa altitudine $= p$ repraeſentare licet, ac per lemma patet ſingulas fluidi partes vtpote quaquaverſus aequaliter preſſas in aequilibrio contineri, neque

Tab. V. Fig. 2.

que in iis vllum motum inteſtinum generari. Quatenus porro latera vaſis ab iisdem viribus extrorſum pelluntur, quoniam hae vires ſe mutuo deſtruunt, eatenus etiam ipſum vas in aequilibrio ſeruatur. Verum praeter has vires, vas etiam ſuſtinet vim qua embolus vrgetur, idque perinde ac ſi cum fluido vnum corpus ſolidum conſtitueret; ne igitur ab hac vi ad motum concitetur, vi contraria et aequali opus eſt, vt totum vas cum fluido in quiete retineatur. Sin autem embolus vaſi affigatur, et iam vis externa tollatur, fluidum quidem in eodem ſtatu perſeuerabit, ſed vas nullam vim extrinſecus ſuſtinens per ſe in aequilibrio erit conſtitutum.

Scholion 2.

39. Quoniam in hoc capite fluida neque grauitati neque aliis ſimilibus viribus ſubiecta aſſumimus, quae actione ſua corpora quaſi penetrant, ſed tantum vires extrinſecus in fluida agentes contemplamus, veluti embolorum ope, quarum actio in certam tantum ſuperficiei partem exeritur, haec duo virium genera ſollicite a ſe inuicem diſtinguere conuenit, quarum illas grauitati ſimiles vires, internas appellare licet, quoniam ſaltem ſingulis particulis inſitae videntur, etiamſi earum cauſa extrinſecus ſit quaerenda: hae autem vires embolorum ope vrgentes merito externas vocamus. Hoc igitur capite in ſtatum aequilibrii fluidorum inquirimus, quando a nullis viribus internis ſollicitantur; vbi inprimis

notandum eſt, remotis his viribus internis, idcirco preſſiones internas, quae a viribus externis per totam fluidi maſſam diffunduntur, minime tolli, ideoque cum viribus internis minime confundi oportere. Quam confuſionem feliciſſime euitabimus, ſi vti inſtituimus, iſtas preſſiones in calculo per altitudines exhibemus, dum vires internas veras grauitati ſimiles more in mechanica recepto exprimimus. Quaecunque ſcilicet preſſio in fluido reperiatur, qua omnes partes tam ſe mutuo vrgent, quam in latera vaſis agunt, ea conuenientiſſime certa quadam altitudine $= p$ indicatur, vbi quidem certa quaedam materia vniformis grauis aſſumitur ex qua ſi formetur columna cylindrica illius altitudinis aequalis p, cuius baſis ſit aequalis ipſi ſuperficiei preſſionem ſuſtinenti, tum huius columnae pondus preſſionem ſit relaturum. Huius materiae, ex qua iſtas columnas formamus, denſitatem vnitate conſtanter denotabimus, ita vt earum ſoliditas ſimul pondus preſſionem referens ſit exhibitura, dum cuiusque alius materiae pondus ex volumine in denſitatem multiplicato aeſtimatur. Quando enim etiam grauitatem a fluido excludimus, tamen nihil impedit, quo minus in preſſione definienda grauitatem in ſubſidium vocemus.

Scholion 3.

40. Quodſi fluidum etiam a nullis viribus externis vrgetur, ita vt eius partes nullam plane pres-

preſſionem in ſe mutuo exerceant, tum huiusmodi fluidi maſſa quaecunque, quomodocunque eius partes inter ſe fuerint diſpoſitae, ſemper erit in aequilibrio, neque opus eſt, ad fluidum in quiete continendum, vt id vaſi cuipiam ſit incluſum. Hoc ergo caſu preſſio atque adeo altitudo preſſionem metiens vbique erit nulla, etiamſi enim aliquod vas fluidum ambiret, eius tamen latera nullam ab eo vim ſuſtentarent, perinde foret, ac ſi vas plane abeſſet, hocque valet, ſiue fluidum fuerit homogeneum ſiue heterogeneum ſiue compreſſionis capax ſiue ſecus. Si fluidum inſtar aquae nullam compreſſionem patiatur, ſingulae partes naturalem ſuam habebunt denſitatem, quae ſcilicet cuique pro ratione caloris conuenit: ſin autem fluidum veluti aër compreſſionis ſit capax, tum quia nullae vires comprimentes adſunt, quaelibet pars ſe ad minimam ſuam denſitatem componet, quae cum etiam a calore pendere poſſit, ſimul huius ratio eſt habenda, ita vt hoc aequilibrii caſu in ſingulis partibus denſitas ſit minima, ſeu volumen, in quod ſe pro gradu caloris expandere poſſunt, maximum: quare quo hoc fieri poſſit, vaſis fluidum continentis ideam plane remouemus. At ſi fluidum a viribus externis vrgeri ſumamus, id neceſſario vaſe incluſum concipi debet, cuius latera eius preſſionem ſuſtineant et diffuſionem coerceant: hunc ergo caſum prout fluidum compreſſionis vel ſit capax vel ſecus, accuratius euoluamus.

Problema I.

41. Si fluidum nullius compreſſionis capax in vaſe a vi quacunque ope emboli vrgeatur, definire preſſionem, per totam fluidi maſſam diffuſam, ſeu altitudinem, qua haec preſſio repraeſentatur.

Solutio.

Tab. V. Fig. 1. Sit baſis emboli O, qua fluidum normaliter premitur $= ff$ vis autem embolum trudens aequetur ponderi P, quandoquidem omnes vires diſtinctiſſime per pondera exhibentur. Introducetur iam materia quaedam homogenea, cuius denſitas ſit cognita, et vnitate expreſſa, huius quaeratur maſſa, quae grauitati expoſita idem eſſet habitura pondus P huic autem maſſae tribuatur figura columnae cylindricae ſeu prismaticae, cuius baſis ſit $= ff$, atque altitudo ponatur $= p$, ita vt volumen columnae prodeat $= ffp$ ob denſitatem $= 1$ ſimul pro maſſa ideoque et pondere habendum, quod ergo illius ponderis P loco adhibeatur. Quoniam igitur quantacunque fuerit emboli baſis ff, fluidi preſſio ſemper eſt eadem, modo altitudo illa p fuerit eadem, haec ipſa altitudo p conuenientiſſime pro menſura preſſionis aſſumitur? eaque cognita quantitas preſſionis facillime cognoſcitur. Ac primo quidem ſi quaeratur quanta vi latera vaſis vbique premantur, ea in elementa minima diuiſa concipi conuenit, quoniam preſſio in ſingula normaliter agit; ſi enim maior portio

portio consideraretur a pluribus discrepans, diuersitas directionis hanc determinationem turbaret. Sit igitur in vasis cauitate interna *c d* eiusmodi spatiolum, quod pro plano haberi queat, eiusque areola $= kk$: atque pressio, quam id sustinet, aequabitur ei ponderi, quod esset habitura massa illius materiae homogeneae densitate $= 1$ praeditae, cuius volumen foret $= kkp$; tantaque vi istud spatiolum *c d* secundum directionem *m r* in id normalem premetur. Hinc ergo omnes vires, quas vasis parietes a fluido sustinent, clarissime agnoscuntur. Pares autem vires etiam omnes fluidi partes *f g h* a circumfluo vndiquaque sustinent, neque tamen de statu suo naturali deturbantur quia nullius compressionis sunt capaces, atque vires ipsae vt vidimus se mutuo in aequilibrio tenent. Quin etiam corpus solidum huic fluido immersum easdem vires esset experturum, ac propterea etiam in quiete perseueraturum. Tum vero aequilibrium aeque locum habebit, siue fluidum fuerit homogeneum siue heterogeneum, singulae enim partes suam quaeque conseruabunt densitatem naturalem, quae cuique cum ratione indolis tum caloris est propria.

Coroll. 1.

42. Quodsi ergo in eodem vase diuersa fluida veluti aqua, spiritus vini, et mercurius, vtcunque fuerint permixta, omnes partes non obstante pressione emboli in perfecto erunt aequilibrio, neque

vlla adest causa, quae singula in vnum locum congregare nitatur.

Coroll. 2.

43. Talia ergo diuersa fluida eam mixtionis rationem, quae ipsis semel fuerit inducta perpetuo conseruabunt, neque in lateribus vasis vllum discrimen reperietur, quippe quae siue a spiritu, siue ab aqua, siue a mercurio tangantur, paribus viribus sollicitabuntur.

Coroll. 3.

44. Quin etiam si in vase tantum aqua contineatur, eaque vero in aliis locis alio caloris gradu fuerit praedita, quaeuis portio densitatem suo caloris gradui propriam habebit: neque ob pressiones internas vlla mutatio in permixtione exorietur. Si enim per communicationem mutuam mox omnis aqua ad eundem calorem reducitur, id ob aliam contingit rationem physicam ad quam hic non attendimus.

Scholion.

45. Quando experientia ostendit in tali diuersorum fluidorum permixtione densiora fundum petere, rariora vero sursum pelli hoc manifesto a grauitate proficiscitur, quae in densioribus maior est, in rarioribus minor. Hic autem omnes cogitationes a grauitate aliisque similibus viribus internis abstrahimus,

himus, vnde etiam illi effectui nullus locus conceditur. Plurimum autem intereſt noſſe, remota gravitate omnem variorum fluidorum permixtionem aeque ſubſiſtere poſſe, neque etiam preſſiones externas vllam mutationem efficere valere: ne eos effectus, quos grauitate admiſſa euenire videmus alii cuipiam cauſae adſcribamus. Simili modo corporum huiusmodi fluidis immerſorum ratio eſt comparata, quae ſiue ſint denſiora ſiue rariora fluida in eodem perpetuo loco perſeuerant, neque a viribus vndique aequaliter prementibus vllam impulſionem ad motum recipiunt. Id tantum euenire poteſt, vt ſi tale corpus fuerit lagena vitrea caua, ac preſſiones eius robur ſuperent, ea diffringatur ſicque eius particulae ad motum introrſum concitentur, iſte vero effectus neutiquam ad praeſens inſtitutum eſt referendus; aeque parum ac ille, quo fluidum in variis locis vario calore praeditum per communicationem mox ad eundem caloris gradum redigi videmus, qui effectus non tam preſſioni internae quam alii cauſae phyſicae adſcribi debet, etſi negare nolim eum ab maiorem preſſionem mutuam accelerari poſſe. Tum vero hic inprimis tota moles ſpectari poteſt, quae ſi fuerit ſatis vaſta, vtique euenire poteſt, vt gradus caloris in variis regionibus maxime diſcrepet, et diutiſſime ſine alteratione conſeruetur.

Pro-

Problema 2.

46. Si fluidum compreſſionis capax in vaſe contentum a vi quacunque ope emboli comprimatur, praeter preſſionem definire denſitatem in ſingulis locis, cum id fuerit in ſtatum aequilibrii redactum.

Solutio.

Tab. V. Fig. 2. Fluidum ergo aëri ſimile in vaſe ABCD EF contineri aſſumimus, quod a data vi, quae pondere $= P$ exhibeatur, embolum pO vrgente eousque iam ſit redactum, vt in aequilibrio conſiſtat. Quod cum euenerit preſſio perinde ſe habebit, ac praecedente caſu, quia natura fluidi hic nullam diuerſitatem parit, ad eam ergo definiendam ſit baſis emboli $O = ff$ et quaeratur columna eiusdem baſis ff et altitudinis $= p$ quae ex materia illa vniformi denſitatis $= 1$ conſtans habitura eſſet pondus $= P$ atque haec altitudo p tam in ipſa fluidi maſſa quam in vaſis lateribus vbique preſſionem menſurabit, prorſus vt in praecedente problemate oſtendimus. Quod autem nunc ad denſitatem fluidi in ſingulis punctis attinet, videndum eſt vtrum vbique idem caloris gradus verſetur nec ne? Vtrumuis igitur contigerit, ponamus in Q gradum caloris eſſe $= r$ et quia fluidi natura certam ſupponit legem, ſecundum quam preſſio tam a denſitate quam calore pendet, ob datam hic preſſionem $= p$, ex ea lege, quomodocunque fuerit comparata, determinabitur denſi-

densitas fluidi in hoc loco Q, quod si in omnibus punctis fiat, per totam fluidi massam iam innotescet densitas siue ea fuerit vbique constans siue variabilis: neque hic refert, vtrum tota massa sit fluidum eiusdem generis nec ne?

Coroll. 1.

47. Ad aequilibrium igitur producendum embolum eousque adigi oportet, donec ob auctam densitatem, pressio interna aequalis fiat vi embolum vrgenti, quae aequalitas ex altitudine p est aestimanda.

Coroll. 2.

48. Si embolus tum vasi affigatur, vt fluidum in vase vndique clauso contineatur, omnia in eodem statu manebunt, pressio scilicet vbique erit eadem, altitudine $= p$ agnoscenda, et ex hac pressione et calore in singulis punctis Q densitas agnoscetur.

Coroll. 3.

49. Viciffim ergo quoque si huiusmodi fluidum in vase clauso contineatur pressio per totum vas erit eadem, ideoque ex cognita densitate et calore in quouis loco cognoscetur. Simul ergo intelligitur, quanta vi P embolo applicanda, opus foret, ad fluidum in hunc statum compellendum.

Scholion 1.

50. Ex cognita denſitate in ſingulis punctis maſſa totius fluidi definiri poteſt, tota enim maſſa in elementa infinite parua diuiſa, cuiusque volumen multiplicetur per denſitatem, et huius formulae integrale per totum fluidum extenſum dabit maſſam fluidi, ſimulque pondus quod ob grauitatem eſſet habiturum. Quod cum inertiae ſit proportionale, in motus determinatione potiſſimum erit conſiderandum, quia hic autem adhuc circa aequilibrium verſamur, maſſae et inertiae conſideratio nondum in computum venit. Hic tantum monuiſſe ſufficit, quomodocunque eadem fluidi maſſa a viribus externis in maius minusue volumen redigatur, inertiam ſeu materiae quantitatem perpetuo eandem manere: neque etiam ob auctum minutumue calorem vllam alterationem pati.

Scholion 2.

51. Stabilita preſſionis menſura quae ad noſtrum inſtitutum maxime eſt accommodata, eadem ſuppeditat nobis idoneam rationem denſitatem cuiusque fluidi metiendi. Cum enim illa menſura ſit petita a materia quadam homogenea, cuius denſitatem vt cognitam ſpectamus et vnitate deſignamus, cuiuscunque alius fluidi denſitatem certo numero exprimi oportet, qui ſcilicet ſit ad vnitatem vt haec denſitas ad illam: ac ſi fluidi denſitas non vbi-

que

que ſit eadem, pro quolibet loco numero variabili, qui ſit q eam denotari conueniet. Quod autem ad calorem attinet, cuius ratio etiam eſt habenda, nulla certa menſura eius adhuc eſt cognita, vnde definire liceat, quando alius calor alio ſit duplo maior, thermometra enim nihil aliud declarant, niſi alium caloris gradum alio vel eſſe maiorem vel minorem. Liberum ergo nobis eſt, modo quocunque varios caloris gradus metiendi vti; vnde pro aëre hic modus videtur maxime idoneus, vt ſi pro denſitate data $q = b$ et certo calore $r = c$ preſſio fuerit $p = a$, tum is calor duplus $r = 2c$ cenſeatur, qui pro eadem denſitate aëri preſſionem duplam $p = 2a$ inducat, vnde manente denſitate $q = b$ pro quocunque calore r preſſio erit $p = \frac{ar}{b}$: ſicque viciſſim ex preſſione p gradus caloris r colligi poteſt. Cum deinde praeterea pro eodem calore preſſio ſit denſitati proportionalis, ſiquidem denſitas ab vtroque limite extremo multum diſtet, pro aëre hac formula generali $p = \frac{aqr}{bc}$ vti licebit. Generatim ergo erit calor directe vt preſſio ſeu elaſticitas aëris, ac reciproce vt eius denſitas: quorum elementorum illud ex barometro, hoc vero ex thermometro aëreo cognoſcitur. Pro aqua autem productum qr videtur eſſe quantitas conſtans.

CAPVT III.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE SOLLICITATORVM IN GENERE.

Problema 3.

52. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque sollicitetur inuestigare conditiones sub quibus fluidum in aequilibrio consistere possit.

Solutio.

Tab. VI. Fig. 6. Consideretur fluidi particula elementaris quaecunque sub figura parallelepipedi $k\,l\,m\,n\;\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu$ ad ternas coordinatas inter se normales relata, quae sint $AS = x$ $SK = y$ et $Kk = z$, ita vt parallelepipedum ex harum differentialibus sit formatum, ideoque eius volumen $= dx\,dy\,dz$. Statuatur densitas fluidi in puncto $k = q$ posita semper densitate eius materiae, qua ad pressiones definiendas vtimur $= 1$, eritque massa totius elementi $= q\,dx\,dy\,dz$, quae simul si id esset grauitati expositum, eius pondus exprimeret. Iam a quibuscunque viribus hoc elementum sollicitetur, eas semper secundum directiones ternarum coordinatarum seu axes principales AP, AQ, et AR, inter se normales resoluere licet,

cet, sintque hae tres vires in puncto k sollicitantes secundum $kl = P$, secundum $km = Q$ et secundum $kn = R$ quae vires acceleratrices intelligantur, posita grauitatis vi acceleratrice $= 1$ hinc nostrum elementum pro ratione massae $q\,dx\,dy\,dz$ ab his viribus acceleratricibus animatum sollicitabitur his tribus viribus motricibus sec. AP vi $= P\,q\,dx\,dy\,dz$ sec. AQ vi $= Q\,q\,dx\,dy\,dz$; sec. AR vi $= R\,q\,dx\,dy\,dz$ vbi litterae P. Q. R numeros denotant vt functiones ternarum variabilium x, y, z spectandos. Cum autem fluidum in aequilibrio consistat, necesse est vt harum virium actio a pressionibus idem elementum vndequaque vrgentibus coerceatur. Hunc in finem sit altitudo pressionem in puncto k exhibens $= p$ quae cum pariter vt functio ternarum variabilium x, y et z considerari debeat, statuamus eius differentiale

$$dp = L\,dx + M\,dy + N\,dz$$

ita vt sit more signandi recepto

$$L = \left(\frac{dp}{dx}\right) \quad M = \left(\frac{dp}{dy}\right) \quad N = \left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Perpendantur iam pressiones, quas singulae hedrae nostri parallelepipedi ab his viribus sustinent, ac primo quidem patet pressiones hedrae $l\,n\,\lambda\,\nu$ superare pressiones hedrae $k\,m\,\varkappa\,\mu$ in singulis punctis particula $= L\,dx$ quare cum vtriusque harum hedrarum area sit $= dy\,dz$ elementum nostrum secundum directionem PA vrgebitur vi $= L\,dx\,dy\,dz$. Deinde pressiones hedrae $m\,n\,\mu\,\nu$ excedunt pressiones hedrae $k l \varkappa \lambda$ in ſingulis punctis particula $= M dy$ vnde elementum ſecundum directionem Q A vrgetur vi $M\,dx\,dy\,dz$: ac tandem ſimili modo reperitur elementum noſtrum ſecundum directionem R A vrgeri vi $= N\,dx\,dy\,dz$. Cum nunc hae vires illas, quae ex viribus ſollicitantibus naſcuntur, continere in aequilibrio debeant, quia directiones ſunt contrariae neceſſe eſt ſit

$$L = Pq, \quad M = Qq \quad \text{et} \quad N = Rq.$$

Quare ex viribus ſollicitantibus preſſio fluidi in puncto k ita definitur, vt ſit

$$dp = q(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Denique vero ſi gradus caloris in puncto k littera r deſignetur, quem vt cognitum ſpectare licet, dabitur quoque relatio inter litteras p, q, r ex natura fluidi, ex qua denſitas q per p et r determinetur; ſi ergo haec conditio cum illa aequatione differentiali coniungatur, ex viribus ſollicitantibus, quae in ſingulis punctis agunt vna cum gradu caloris r colligi poterit preſſio fluidi p in ſingulis locis, indeque porro denſitas q, vt fluidum in aequilibrio conſiſtere poſſit.

Coroll. 1.

53. Si vires ſollicitantes euaneſcant vt ſit $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, fit $dp = 0$ ideoque p quantitas conſtans, tum ſcilicet preſſio vbique per totam fluidi

fluidi maſſam eadem eſſe debet, vt aequilibrium locum habere poſſit, prorſus vti in capite praecedente oſtendimus.

Coroll. 2.

54. Ob vires autem ſollicitantes preſſio per fluidi maſſam fit variabilis, eiusque variabilitas cum ab his viribus tum a gradu caloris pendet, ſiquidem denſitas q per preſſionem p et calorem r determinatur. Euenire ergo poterit, vt preſſio alicubi euaneſcat, vel adeo negatiua euadat.

Coroll. 3.

55. Aequilibrium ergo locum habere nequit, niſi aequatio $dp = q(Pdx + Qdy + Rdz)$ ſit poſſibilis: quod cum non niſi ſub certis conditionibus eueniat ob plures variabiles, euidens eſt infinitos dari caſus, quibus aequilibrium ne locum quidem habere poſſit, quos ergo caſus in poſterum ſollicite perſcrutari conueniet.

Scholion 1.

56. Fluidum hic nusquam terminari aſſumſi, quoniam conditio vaſis id continentis nihil ad determinationem preſſionis confert, ſed tantum impedit, ne fluidum diffluat. Pro lubitu ergo fluidum limitibus circumſcribere licet, idque conſiderare, quaſi vaſi eſſet incluſum, tum vero ex ſtatu aequilibrii hic definito patebit, quantam preſſionem latera

ra vasis in singulis punctis a fluido sustineant, vnde vicissim colligere licebit quanta firmitate vas praeditum esse oporteat, vt his pressionibus resistere, fluidumque coercere valeat. Imprimis autem hic inaequalitas pressionum spectari debebit, vt vbi latera vasis maximas vires sustineant, innotescat. Sin autem eueniat, vt alicubi pressio prorsus euanescat, ibi plane non opus est fluidum coerceri, sed sponte in statu suo perseuerabit, etiamsi ibi vas omnino apertum relinquatur. In hac regione fluidum dicitur ad libellam compositum, eiusque superficies vt extrema spectatur, quia etiamsi quicquam fluidi vltra eam existeret, id ob defectum pressionis non cohaereret, et quasi plane abesset, considerari posset. Extrema ergo cuiusque massae fluidae superficies est ea, vbi pressio euanescit, et status aequilibrii sponte conseruatur, vt ibi vase non opus sit ad diffluxum coercendum. Sin autem vasi alicubi apertura tribuatur, hinc patet quanta vi ope emboli haec apertura obstrui debeat ne ibi fluidum effluat, quae vis vtique euanescit, si apertura in extremam fluidi superficiem cadat. Quando fluidum a sola grauitate animatur, haec extrema superficies simul est suprema, ad libellam composita, quod idem euenit si vires sollicitantes ad punctum fixum conuergant, quo casu superficies suprema fit sphaerica.

Scho-

Scholion 2.

57. Quomodo autem preſſio ſeu altitudo eam metiens p in ſtatu aequilibrii fieri poſſit negatiua, difficulter perſpicitur. Cum enim preſſio poſitiua particulas fluidi ita afficiat, vt ſe mutuo penetrare conentur, iſteque effectus tam ob impenetrabilitatem quam ob difficultatem eas in anguſtius ſpatium comprimendi irritus reddatur, negatiua preſſio in hoc conſiſtet, vt fluidi particulae quaſi ſe mutuo repellant: quoniam autem niſi fluidum vaſi ſit incluſum, nihil impedit, quo minus partes a ſe inuicem recedant, continuitas mox diſſoluetur, neque ergo aliter aequilibrium adeſſe poteſt, niſi quatenus ſingulae particulae ab omni nexu ſolutae ſeorſim quieſcant. Hic autem caſus non amplius ad mechanicam fluidorum eſt referendus, quia ſingulae guttulae tanquam corpuſcula ſolida tractari debent. In vaſe autem fluidum continente preſſio negatiua multo minus locum habere poteſt, cum fieri nequeat, vt latera a fluido introrſum premantur. Ex quo ſtatuendum eſt, quoties calculus preſſionem declarat negatiuam, toties fluidi continuitatem tolli, idque quaſi in guttas ſeparatas diſpergi, vt eius conſideratio non amplius ad praeſens inſtitutum ſit referenda: cuius quippe principia huic innituntur fundamento, vt fluidi partes continuae maneant. Hoc autem non ſolum de aequilibrio ſed etiam de motu fluidorum eſt tenendum, nusquam preſſionem fieri

 poſſe

posse negatiuam, quin simul continuitas tollatur. Ac si in motu aquae per tubos, ab auctoribus interdum pressio negatiua fieri asseritur, id ita est accipiendum, eam tantum fieri minorem pressione atmosphaerae, ideoque adhuc esse positiuam. Statim autem ac reuera fit negatiua, dispersio in guttas obseruatur, vti videmus in fontibus salientibus, qui postquam summitatem attigerunt, in guttas dispserguntur: ibi igitur pressio negatiua fieri est censenda.

Scholion 3.

58. Circa ipsas porro vires sollicitantes, vnde ternas vires P, Q et R elicuimus, omnino tenendum est, eas neutiquam ad libitum fingi licere, sed ita assumi debere, vti in mundo reuera existunt. Primo ergo occurrit grauitas, quae nisi fluidum, quod consideratur, maximum volumen occupet, quantitatem et directionem constantem habere est censenda, sin autem fluidum maiorem habeat expansionem grauitatis directiones conuergere sunt statuendae, veluti quando totum mare vel atmosphaera aërea examini subiicitur. Deinde etiam attractio vniuersalis, qua non solum corpora coelestia, sed etiam eorum partes se mutuo attrahere deprehenduntur plurimas vires reales suppeditat, quarum actioni fluida subiiciuntur. Hae autem vires omnes hac insigni gaudent proprietate, vt ex iis formula differentialis $Pdx + Qdy + Rdz$ semper euadat verum

rum differentiale cuiuspiam functionis variabilium x y et z ideoque sit $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) : \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$ atque huius functionis indoles eo magis est notatu digna, quod ea in principio minimae actionis ab Ill. Praeside de *Maupertuis* inuento ipsam quantitatem actionis exprimat. Quod si ergo haec quantitas actionis designetur littera V, vt sit $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ habebimus $dp = qdV$, et quia q per p et r determinatur, intelligitur, nisi quantitas r ita sit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, aequilibrium plane locum habere non posse, sin autem vires P, Q, R pro lubitu fingere liceret, vt formula $Pdx + Qdy + Rdz$ integrationem respueret, tum fluidum aequilibrii plane non foret capax, nisi forte in calore eiusmodi variatio statui posset, qua aequatio inuenta fieret integrabilis. Cum igitur huiusmodi casibus aequilibrium nullum plane locum habere posset, fluida perpetuo motu agitari necesse foret.

Problema 4.

59. Si fluidum a viribus quibuscunque sollicitatum in aequilibrio consistat, eique corpus quodcunque solidum sit immersum, inuestigare vires, quas hoc corpus a pressione fluidi ambientis sustinet.

Solutio.

Sit B C D E id corpus solidum, quod ei fluido, cuius statum aequilibrii modo definiuimus, sit Tab. VI. Fig. 7.

 immer-

immerſum, ab eoque circumquaque eas ſuſtineat preſſiones, quas ibidem inuenimus. Ad eas autem euoluendas primum obſeruo hoc corpus easdem pati preſſiones, quas ſuſtineret ea fluidi maſſa, cuius nunc locum corpus obtinet: quo circa in locum corporis mente ſubſtituamus aequale fluidi volumen, quod cum futurum eſſet in aequilibrio, neceſſe eſt, vt preſſiones quas a fluido ambiente ſuſtinet, aequales ſint et contrariae actioni virium P, Q, R idem volumen ſollicitantium. Probe autem hic eſt animaduertendum iſti volumini loco corporis ſubſtituto in ſingulis punctis eam denſitatem tribui oportere, quam aequilibrii conditio ante definita poſtulat, ex quo forte neceſſe eſt vt etiam caloris ratio habeatur. Definito autem effectu, quem hae vires P, Q, R in iſto volumine producunt, ei aequalis erit et contrarius is effectus quem corpus ſolidum propoſitum a preſſionibus fluidi ambientis ſuſtinet.

Coroll. 1.

60. Cognitio ergo ſola virium, quibus fluidum ſollicitatur, non ſufficit ad vim, quam corpus immerſum ſuſtentat, definiendam, ſed inſuper noſſe oportet pro eo loco quem corpus occupat, quamnam ibi fluidum habiturum eſſet denſitatem in ſingulis punctis.

Coroll. 2.

61. Hinc in eodem fluido, prout corpus in alio atque alio loco conſtituitur preſſiones id maxi-

me

me diſcrepantes ſuſtinere poteſt, hocque non ſolum ob variationem virium ſollicitantium, ſed etiam ob variationem denſitatis quae fluido in diuerſis locis ineſt: etiamſi in loco, quem iam corpus occupat, nullum adſit fluidum, ac fortaſſe denſitas huic loco conueniens nusquam alibi in fluido reperiatur.

Coroll. 3.

62. Deinde etiam plurimum intereſt, cuiusmodi ſitum idem corpus in fluido teneat: fieri enim poteſt vt idem corpus ſi tantillum inuertatur longe alias preſſiones ſuſtineat. Quamobrem non ſolum volumen corporis ſed etiam figura cum ſitu plurimum conferunt ad vim, quam ſuſtinet definiendam: niſi forte fluidum ſit homogeneum et graue, quo caſu haec vis a ſolo volumine pendet.

Scholion 1.

63. Hoc ergo caſu facillimo excepto, determinatio virium, quas corpus ſubmerſum ſuſtinet, calculos ſaepe vehementer moleſtos poſtulat, quoniam omnia elementa fluidi intra volumen corporis concipiendi conſiderare oportet. Ita ſi parallelepipedum elementare $klmn\kappa\lambda\mu\nu$ in loco corporis fuerit, cuius maſſa eſt $= q\,dx\,dy\,dz$, ſingulae hae formulae differentiales $P\,q\,dx\,dy\,dz$, $Q\,q\,dx\,dy\,dz$ et $R\,q\,dx\,dy\,dz$ ope triplicis integrationis per totum corporis volumen extendi debent, cuius figura ſi fuerit irre- Tab. VI Fig. 6.

 gula-

gularis, haec inueſtigatio valde ſit difficilis, neque in genere pro viribus quibuscunque P, Q, R quicquam definire licet. Totum ergo hoc negotium in ſequentes tractationes eſt reſeruandum, vbi praecipuos virium ſollicitantium caſus, qui quidem in mundo locum habent, accuratius euoluemus: hic vero ſufficiat, methodos quicque praeſtandi in genere ſaltem indicaſſe.

Scholion 2.

64. Alia autem ſtatim ſe offert methodus directa hoc idem problema ſoluendi, dum preſſiones, quas corpus in ſingulis ſuperficiei ſuae elementis ſuſtinet, perpenduntur, eaeque ſecundum ternas directiones fixas reſolutae per totam ſuperficiem in vnam ſummam colliguntur. Verum hic antea aequationem differentialem pro preſſione p inuentam integrari neceſſe eſt, vnde niſi preſſio ſatis ſimpliciter exprimatur haec methodus in calculos inextricabiles praecipitaret. Id tantum hic commodi eueniret, quod dum preſſio p per integrationem definienda conſtantem quandam arbitrariam recipit per circumſtantias fluidi datas definiendam, haec quantitas conſtans in hoc negotio prorſus non in computum ingrediatur, propterea quod preſſiones circumquaque aequales ſe mutuo deſtruunt. Eatenus ergo tantum corpus ſubmerſum a preſſionibus fluidi ad motum impellitur, quatenus hae preſſiones non ſunt aequales: inuenta autem hac vi, qua corpus impellitur,

litur, ſi ea cum reliquis viribus, quae in idem corpus agunt, comparatur, facile iudicare licebit, vtrum corpus ſit in quiete permanſurum, an vero motum impetraturum. Quoniam vero hic tantum de aequilibrio agitur, niſi corpus in fluido ſponte quieſcat, id vi quacunque in hoc ſtatu conſeruari concipiendum eſt, niſi forte quaeſtio de primo tantum momento, quo corpus fluido eſt immiſſum, inſtituatur.

Problema 5.

65. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque ſollicitatum fuerit in aequilibrio, eique corpus ſolidum ex parte tantum immergatur, definire vires, quas eius pars ſubmerſa a preſſionibus fluidi ſuſtinet.

Solutio.

Ante omnia notandum eſt hunc caſum locum habere non poſſe, niſi in fluido, in quo datur extrema ſuperficies, in qua preſſio prorſus euaneſcat, quae ergo non indiget vaſe continente quo coerceatur. Sit ergo F C E G haec ſuperficies fluidi extrema ideoque aperta, dum in reliquis locis vaſe quocunque continetur, hicque corpus ſolidum B C D E fluido ita ſit immerſum vt portio C D E ſub fluido verſetur, portio vero C B E promineat; quo poſito qnaeſtio eſt quantas vires hoc corpus a preſſionibus fluidi ſuſtineat. Primum autem obſeruo, ſi portio Tab. VI. Fig. 8.

portio prominens C B E ſecundum ipſam fluidi ſuperficiem extremam C E reſecetur, partem reliquam etiamnunc easdem preſſiones eſſe ſuſtentaturam, nunc autem haec pars C D E quaſi tota eſſet fluido immerſa conſiderari poterit, dummodo ſtrato fluidi infinite tenui tegi concipiatur, qua conditione ne opus quidem eſt, quia per totam ſuperficiem F C E G preſſio eſt nulla. Hinc per Problema praecedens vis, quam haec pars ſubmerſa ſuſtinet aequalis et contraria eſt illi vi, quam vera fluidi portio hunc locum occupans et cum reliquo fluido aequilibrium ſeruans a viribus ſollicitantibus P, Q et R ſuſtineret. Mente ergo ſpatium C D E fluido repleatur, cuius denſitas in ſingulis punctis, ad aequilibrium requiſita per ſuperiora patebit, et virium P, Q et R ſollicitatio in hanc maſſam exquiratur; quae in contrarium verſa dabit vim quaeſitam, a corporis ſolidi parte ſubmerſa ſuſtentatam.

Coroll. 1.

66. Si haec vis inuenta ab iis, quibus corpus ſolidum per ſe ſollicitatur perfecte deſtruatur, id ſponte in hoc ſtatu perſeuerabit, et fluido inſidebit, ſin ſecus eueniat corpus vel maius vel minus immergetur, vel conuertetur, niſi a noua vi aequilibrium conſeruetur.

Coroll. 2.

67. Inuentio ergo iſtius vis eodem modo inſtitui debet, vti in praecedente problemate oſtendimus:

mus: praeter volumen ſcilicet partis ſubmerſae eius quoque figuram noſſe oportet, tum vero potiſſimum denſitatem quam fluidum hoc volumen occupans et cum reliqua maſſa in aequilibrio conſiſtens, in ſingulis punctis eſſet habiturum. Quae inueſtigatio ita eſt comparata, vt nonniſi in caſibus particularibus deinceps tractandis ſuſcipi queat.

Scholion.

68. Imprimis autem notandum eſt, non ſemper omnes vires elementares quibus volumen quoddam fluidum a viribus P, Q et R ſollicitatur, ad vnicam vim omnibus aequiualentem reuocari poſſe; ſed quandoque eas vires ad duas, interdum etiam ad tres reduci debere, vt paucioribus non idem effectus obtineri queat. Haec autem virium ſupputatio eodem modo inſtitui debet, quo in corporibus ſolidis a viribus quibuscunque ſollicitatis vti ſolemus, quandoquidem hae vires, poſtquam fuerint inuentae, facta inuerſione ad corpus ſolidum ſunt applicandae. In maſſa ergo fluida, in locum partis ſubmerſae ſubſtituta, primum notetur centrum inertiae, deinde vero etiam per id terni axes inter ſe normales ducti concipiantur, quo facto primum omnes vires ſollicitantes elementares in ipſum centrum inertiae transferantur, earumque vis aequiualens vna quaeratur. Praeterea ſingularum virium elementarium momenta reſpectu ternorum axium colligantur, vt pateat quantum virium momentum

 corpus

corpus circa ſingulos axes ſuſtineat. Denique eadem illa vis cum his tribus momentis contrario modo corpori ſolido in locum fluidi reſtituto applicetur, ſicque facillime patebit quemnam effectum in eo ſint productura, et quomodo hoc corpus in quiete conſeruari oporteat.

Problema 6.

69. Si fluidum quodcunque a viribus quibuscunque ſollicitatum ſit in aequilibrio et vaſi cuicunque incluſum, inueſtigare vires, quas totum vas a fluidi preſſione in latera exerta ſuſtinet.

Solutio.

Si omnes preſſiones inter ſe eſſent aequales, vas fluidum continens foret in aequilibrio, neque vlla vi externa opus eſſet ad id continendum: Eatenus ergo tantum vi opus eſt ad vas ſuſtentandum, quatenus preſſiones in eius latera non vbique ſunt aequales. Tum autem ſunt inter ſe inaequales, quando fluidum a viribus, quas hic litteris P, Q, R indicauimus, ſollicitatur vnde leui attentione intelligitur, vas omnes eas vires ſuſtentare, quibus ſingula fluidi elementa a viribus P, Q et R ſollicitantur, ſi enim omnis maſſa fluida ſubito in corpus ſolidum concreſceret, easdemque vires ſuſtineret, eae quaſi in ipſum vas immediate agerent, conſiderari poſſent. Eadem autem veritas per ratiocinium ſupra adhibitum confirmari poteſt; concipiantur latera

tera vaſis tenuiſſima, idque fluido quaſi infinito immerſum ſpectetur, ita vt fluidum externum cum interno in aequilibrio verſetur. Hoc poſito euidens eſt preſſiones, quas vas a fluido externo ſuſtinet, praeciſe aequales et contrarias eſſe iis viribus, quibus a fluido interno vrgetur, et quas hic inueſtigamus. Verum preſſiones externae, quoniam totum vas vt ſolidum corpus fluido immerſum ſpectari poteſt, aequales ſunt et contrariae, viribus quibus fluidum vaſi incluſum actu ſollicitatur; denuo igitur conuerſione facta, et fluido externo penitus remoto, perſpicuum eſt totum vas omnes ſuſtinere vires, quibus fluidum incluſum ſollicitatur.

Coroll. 1.

70. Vas igitur totum perinde vrgetur, ac ſi fluidum vna cum vaſe corpus ſolidum conſtitueret, quod ab iisdem viribus ſollicitaretur. Interim tamen in preſſione quam latera ſuſtinent ingens erit diſcrimen, quia in corpore ſolido preſſiones longe aliter propagantur atque in fluido.

Coroll. 2.

71. Vt ergo non ſolum fluidi aequilibrium, ſed etiam ipſum vas cum fluido in quiete conſeruetur, neceſſe eſt vt vas extrinſecus a viribus idoneis ſuſtentetur; et quantis viribus ad hoc opus ſit ex principiis poſitis determinari oportet.

Scholion.

72. Hic fluidum a vaſe vndequaque includi et compeſci aſſumimus, niſi forte in ea regione, vbi preſſio eſt nulla, vas ſit apertum et fluidi ſuperficies haec extrema nuda appareat. Sin autem alio loco fuerit foramen, idque ad eruptionem impediendam ope emboli debita vi intruſi obturetur, tum vas praeter illas vires fluidum ſollicitantes, etiam hanc emboli vim ſuſtinebit, quae cum pro emboli baſi maior minorue eſſe poſſit, diuerſiſſimis viribus idem vas ſubiectum eſſe poteſt. Statim vero atque embolus vaſi affigatur ſeu agglutinetur, hae nouae vires ſubito euaneſcunt, ac vas ſolas priores ſuſtinet.

CAPVT IV.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM A SOLA GRAVITATE SOLLICITATORVM.

Problema 7.

73.

Si fluidum quodcunque a ſola grauitate deorſum ſollicitetur quae concipiatur vt vis conſtantis magnitudinis, cuius directiones ſint inter ſe parallelae omnia

omnia momenta ad ſtatum aequilibrii requiſita exponere, et principia ante ſtabilita in genere ad hunc caſum accommodare.

Solutio.

Spectetur planum tabulae vt horizontale, cui ergo directio vis ſollicitantis vbique ſit normalis, quantitatem autem huius vis acceleratricis littera g deſignemus, ipſa grauitate naturali exiſtente $= 1$, vt pateat quomodo phaenomena ſe eſſent habitura, ſi grauitas foret vel maior vel minor. Concipiatur nunc fluidi elementum quodcunque in Z, vnde ad planum horizontale demiſſo perpendiculo ZY, et ab Y ad rectam fixam AP ducta normali YX, ſint ternae coordinatae locum puncti Z definientes $AX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$. In Z porro ſit gradus caloris $= r$, denſitas fluidi $= q$, et altitudo preſſionem metiens $= p$, ita vt relatio inter p, q, r per fluidi naturam ſit data. Cum nunc elementum in Z deorſum ſecundum ZY ſollicitetur vi acceleratrice $= g$, pro ſolutione generali capitis praecedentis hic habebimus $P = 0$, $Q = 0$ et $R = -g$, vnde aequatio differentialis conditionem aequilibrii exprimens erit $dp = -gq\,dz$, quae niſi denſitas q ita ſit comparata, vt integratio ſuccedat, aequilibrium omnino locum habere nequit. Dato autem aequilibrio reliqua problemata in cap. praec. tractata facilem ſolutionem admittunt: Si enim corpus ſolidum BCDE fluido ſit ſubmerſum, id ſurſum vrgebitur

Tab. VI. Fig. 9.

Tab. VI. Fig. 7.

 tanta

tanta vi, quanta fluidi massa eius locum occupans et cum reliquo fluido in aequilibrio consistens a grauitate g deorsum pelleretur, quae ergo vis huius massae fluidae ponderi aequabitur et per eius centrum inertiae erit directa. In ipso ergo corpore B C D E notetur hoc punctum G quod massae fluidae in eius locum substitutae foret centrum inertiae, toto huius massae pondere existente $= G$, et hoc corpus fluido submersum sursum pelletur vi $= G$, cuius directio per punctum G transibit. Simili mo-
Tab. VI. do res se habebit si tantum portio corporis C D E
Fig. 8. fluido immergatur, pro quo casu, quae modo de toto corpore sunt dicta, hic tantum de parte submersa sunt intelligenda.

Si denique fluidum fuerit vasi inclusum, totum vas inde eandem vim sustinet, ac si fluidum in solidum concresceret, pondere scilicet totius massae fluidae deorsum premetur, cuius directio transibit per centrum inertiae totius massae fluidae in vase contentae.

Coroll. 1.

74. Duo igitur casus hic sollicite sunt distinguendi, prout variabilitas densitatis q aequilibrium admittat vel minus. Si enim aequilibrium excludatur, fluidum perpetuo motu agitabitur, neque ea quae de statu aequilibrii sunt tradita, vllo modo locum habere possunt.

Coroll.

Coroll. 2.

75. Cum autem ex fluidi natura relatio detur inter pressionem p densitatem q et calorem r, densitas q vt functio ipsarum p et r spectari poterit; nisi ergo calor r qui a loco pendere censendus est, a sola altitudine $YZ = z$ pendeat, aequilibrium plane locum inuenire non poterit.

Coroll. 3.

76. Hinc sequitur aequilibrium tum solum existere posse, cum gradus caloris in eadem altitudine per totam fluidi massam fuerit idem. Sin autem in paribus altitudinibus calor fuerit diuersus, fluidum nullo modo se ad aequilibrium componere poterit.

Scholion 1.

77. Fluidum hic in genere sum contemplatus, ita vt hae conclusiones tam ad fluida aquae similia, quam quae veluti aër compressionem et rarefactionem admittunt, accommodari queant. Quare quo natura aequilibrii accuratius perspiciatur, vtrumque fluidorum genus seorsim euoluemus; in priori quidem discrimen probe est notandum, prouti fluidum per totam massam fuerit homogeneum nec ne? cuius quidem casus, quo fluidum vbique eadem gaudet densitate, totam hydrostaticam vulgarem complectitur. Sin autem sit heterogeneum, siue id fiat permixtione diuersorum fluidorum, siue idem

idem fluidum in diuerſis locis diuerſo caloris gradu fuerit praeditum, hic imprimis quaeſtio euoluenda occurret, quando aequilibrium ſit poſſibile et ſub quibus conditionibus. Altera autem huius capitis pars circa fluida compreſſionis capacia verſabitur, vbi etiam plures caſus tam pro permixtione, plurium huiusmodi fluidorum diuerſorum quam pro variatione caloris expediri conueniet.

Scholion 2.

78. Vbique autem cum ſtatus aequilibrii fuerit definitus, etiam inueſtigabimus, quomodo corpora ſolida ipſis immerſa ſe ſint habitura, vbi imprimis notandum eſt, niſi fluidum ſit homogeneum ſeu vbique eandem habeat denſitatem, regulas vulgares de vi, quam corpora ſubmerſa ſuſtinent, non amplius eſſe veritati conſentaneas. Quodſi enim denſitas fluidi fuerit variabilis pro loci diuerſitate, tum etiam locus, vbi corpus ſolidum fluido immergitur, conſiderari debet: ſiquidem pro eo loco, quem corpus ſolidum in fluido occupat, etiamſi fluidum inde iam ſit expulſum, tamen diligenter perpendi oportet, quantam denſitatem fluidum, mente ſaltem in locum ſolidi ſubſtitutum, in ſingulis punctis eſſet habiturum, id quod ex conditione aequilibrii eſt definiendum. Non ſolum enim tum pondus huius maſſae fluidae quaeri debet, ſed etiam eius centrum inertiae, cuius locus potiſſimum a variatione denſitatis

tatis pendebit. Nisi enim hoc punctum exacte fuerit cognitum, media directio vis, qua solidum a fluido vrgetur, assignari non potest.

APPLICATIO
ad fluida omnis compressionis expertia.

Problema 8.

79. Si fluidum fuerit homogeneum, eiusque densitas q vbique eadem seu constans, statum aequilibrii assignare, et quantas vires tam vas continens quam corpora immersa sustineant, definire.

Solutio.

Cum densitas vbique sit eadem ponatur $q = b$ et solutio superior praebet $dp = -g b dz$, vnde integrando elicimus $p = gb(h-z)$, existente h constante per integrationem ingressa. In eleuatione igitur super plano horizontali, a quo altitudinem z sumsimus, facta ea $z = h$ pressies euanescit, ibique ergo existit extrema fluidi superficies quae propterea etiam est horizontalis. Sit ergo F E G haec suprema superficies ad libellam composita, et C Y D planum horizontale pro basi assumtum, vt illius eleuatio sit $EY = h$ atque in altitudine quacunque minore $YZ = z$, pressio erit $p = gb(h-z) = gb . EZ$. In eadem ergo altitudine YZ pressio vbique est eadem, Tab. VI. Fig. 10.

et profunditati E Z infra supremam superficiem F G proportionalis, praeterea vero sequitur rationem grauitatis g et densitatem fluidi b. Quodsi nunc hic perinde atque in pressionis euolutione grauitatem g vnitate indicemus et pro materia vniformi, ex qua pressio definitur, hoc ipsum fluidum substituamus vtpote etiam homogeneum, fiet altitudo pressionem metiens $p = b - z =$ EZ, ita vt iam in loco quouis Z pressio p aequetur ipsi profunditati E Z infra supremam superficiem; et corpus quoduis huic fluido immersum sursum vrgebitur vi, quae ponderi aequalis voluminis fluidi est aequalis, quod cum sit homogeneum, eius media directio per corporis centrum magnitudinis transibit. Vas autem totum fluidi quod continet pondus sustinebit.

Coroll. 1.

Tab. VI. Fig. 11. 80. Quamcunque igitur vas tale fluidum continens habuerit figuram, suprema fluidi superficies F f, E e, G g in idem planum horizontale cadit, in qua pressio vbique est nulla. Infra autem hanc superficiem pressio vbique profunditati erit aequalis, siquidem hoc ipsum fluidum loco materiae illius homogeneae grauis, ex qua pressio definitur, in vsum vocetur.

Coroll. 2.

81. Circa latera ergo huius vasis in T pressio aequatur altitudini T V, ita vt spatiolum ad T norma-

normaliter prematur a vi aequali ponderi columnae ex eodem fluido formatae, cuius altitudo eſt T V et baſis ipſum illud ſpatiolum. Similique modo ad t preſſio altitudini t V aequabitur.

Coroll. 3.

82. Quod ad corpus ſolidum quodcunque immerſum B C D attinet quoniam tam denſitas quam grauitas fluidi vbique eſt eadem, perinde eſt in quonam loco intra fluidum id ſit collocatum, ſemper enim ſurſum pelletur vi aequali ponderi paris voluminis B C D fluidi, cuius media directio per eius centrum magnitudinis tranſit.

Scholion.

83. Haec ſunt principia vniuerſae hydroſtaticae, ex quibus omnia, quae in hac diſciplina tradi ſolent, facillime deducuntur, quae cum ſatis ſuperque iam ab Auctoribus ſint expoſita, iis plenius euoluendis hic non immoror. Ad maiora potius pergo, quae vulgo minus accurate tractari ſolent, quando ſcilicet fluidum ex partibus heterogeneis eſt compoſitum, quorſum referendus quoque eſt caſus, quo idem fluidum diuerſis caloris gradibus eſt praeditum, quoniam tum etiam eius denſitas eſt diuerſa: vbi imprimis animaduerti oportet his caſibus fieri poſſe, vt aequilibrium nullum prorſus locum inueniat, ideoque fluidum continuo motu agitari

 neceſ-

necesse sit. Cuius motus determinatio etiamsi huc non pertineat, tamen quodammodo eius rationem perspicere licebit, vnde plurima phaenomena naturae satis feliciter explicari poterunt.

Problema 9.

84. *Si fluidum nullam compressionem patiens fuerit heterogeneum, seu ex diuersis materiis fluidis mixtum, definire rationem permixtionis vt aequilibrium subsistere possit, simulque aequilibrii phaenomena.*

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9. Denotante littera g vim acceleratricem grauitatis, sit q densitas fluidi in puncto Z, cuius locus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ determinatur. Si igitur altitudo p ibidem pressionem exhibeat, pro aequilibrio hanc habemus aequationem $dp = -gq\,dz$, quae nisi integrationem admiserit, aequilibrium oriri nequit. Necesse ergo est vt densitas q a sola variabili z pendeat, quia alioquin integratio excluditur; si enim forte obiiciatur, hoc fieri posse, dummodo quantitas q fuerit functio binarum variabilium p et z, euidens est, quia tum altitudo p functioni ipsius z aequalis inueniretur, etiam q per certam functionem ipsius z expressum iri. Quare ad aequilibrium necessario requiritur vt densitas q a sola variabili z pendeat; quae conditio eo redit vt in aequalibus altitudinibus

bus z, ſeu in qualibet ſectione horizontali eadem vbique denſitas reperiatur. Diuerſa ergo fluida planis horizontalibus a ſe inuicem ſeparata eſſe oportet, ita vt ſi F G ſit ſuperficies ſuprema, vbi preſſio euaneſcit, per eam vbique fluidum eiusdem denſitatis expandatur, quod infra iterum plano horizontali H I terminetur: vbi ſi aliud fluidum incipiat, id quoque vsque ad planum quoddam horizontale inferius extendatur, ſicque porro ſi plura fluida diuerſa ſequantur. Quodſi in tali fluido corpus ſolidum B C D E ſit immerſum, eius loco fluidum, quod cum reliquo foret in aequilibrio conſideretur, eiusque tam pondus quam centum inertiae O notetur, quo facto hoc pondus dabit vim, qua corpus B C D E a preſſionibus fluidi surſum pelletur, cuius directio per punctum O tranſire eſt concipienda. Denique ſi caſu figurae denſitas ſupremi ſtrati F I ſit $= l$, ſequentis H L $= m$, et infimi KN $= n$, preſſio in loco Z erit $= g(GI.l + IL.m + LZ.n)$. Tab. VII. Fig. 12.

Coroll. 1.

85. Plura ergo diuerſae denſitatis fluida in aequilibrio conſiſtere nequeunt, niſi ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe fuerint diſpoſita. Ac ſi initio alium ſitum habuerint, vel ad iſtum ſe component, vel ſe intime miſcendo fluidum homogeneum conſtituent, vel nunquam ad aequilibrium peruenient.

Coroll. 2.

86. Cum idem fluidum pro diuerſo caloris gradu variam denſitatem recipiat, perſpicuum eſt, etiam fluidum alias homogeneum ſe ad aequilibrium componere non poſſe, niſi per quamlibet ſectionem horizontalem calor vbique fuerit idem.

Scholion 1.

87. Vt plura fluida heterogenea in aequilibrio conſiſtant, ſufficiat ea ſecundum ſtrata horizontalia inter ſe eſſe diſpoſita, vt per quamlibet ſectionem horizontalem per totam fluidi maſſam factam denſitas vbique ſit eadem, neque ad hoc abſolute requiritur, vt ſpecifice grauiſſimum locum infimum, leuiſſimum vero ſupremum occupet. Ita aequilibrium daretur etſi ſupremum ſtratum F I argentum viuum, medium H L aquam et infimum K N oleum contineret; verum hoc aequilibrium minime eſſet ſtabile; quoniam leuiſſima facta concuſſione, ſtatim ac grauioris fluidi particula in inferius leuius cederet, aequilibrium ita perturbaretur, vt grauiſſimum fundum eſſet petiturum, leuiſſimum vero in ſupremum ſtatum ſe recepturum, quandoquidem haec tria fluida ab intima permixtione, qua fluidum homogeneum oriretur abhorrent Quamobrem vt aequilibrium perenne obtineatur, variorum fluidorum ſtrata ita diſponi debent, vt deorſum deſcendendo continuo grauiora ſeu denſiora occur-

currant. At ſi fluida etſi denſitate differentia, facile permiſceri patiantur, aequilibrium vix obtineri poteſt, niſi ea ita confundantur, vt fluidum homogeneum mentiantur. Vtcunque ergo fluida denſitate differant, tamen per agitationem ita ſe tandem disponent, quemadmodum ſtatus aequilibrii poſtulat.

Scholion 2.

88. Fieri autem poteſt, vt fluidum adeo homogeneum nunquam in aequilibrium perueniat, quando ſcilicet cauſa externa adeſt, qua fluido in vna vaſis parte continuo maior caloris gradus imprimitur, veluti ſi vaſis F N aquam continentis lateri G N ignis ſit appoſitus, quo aqua in regione E N contenta multo calidior conſeruatur, et vas in alteram partem F M ſatis protenſum ſit, vt idem caloris gradus eousque propagari nequeat, ac circa F M aqua perpetuo ſit multo frigidior. Cum igitur in parte igni vicina E N aquae denſitas ſit minor, in oppoſita vero F L maior, aequilibrium nullo modo locum inuenire poteſt, cuiusmodi autem motus in eo ſit futurus, ex ſequenti ratiocinio coniici poterit: Concipiamus diaphragma verticale E L aquam calidiorem a frigidiori ſeparans, atque vt in eius ima parte Z preſſio vtrinque exiſtat aequalis, neceſſe eſt aquae calidioris altitudinem E Z ſuperare altitudinem frigidioris *e* Z. Hoc ergo modo impedietur ne particula in foraminulo Z *z* ad motum incitetur, at in locis altioribus verſus *e* ſumtis

Tab. VIII. Fig. 13.

ſumtis preſſio aquae calidae ſine dubio ſuperabit preſſionem frigidae, ex quo ſi totum diaphragma foraminibus pertuſum concipiatur, per ſuperiora aqua calida effluet in regionem frigidae. Qui fluxus ſimul ac inceperit ob auctam altitudinem aquae frigidae eius preſſio circa fundum in Z augebitur contraria vero calidae minuetur, ſicque aqua frigida hic in locum calidae pelletur ac ſimul prior cauſa aquam calidam in regione ſuperiori verſus F vrgens denuo vigebit. Qui vterque fluxus cum perpetuo continuari debet, etiam penitus ſublato diaphragmate EL, euidens eſt hoc caſu quo aqua in regione EN iugiter maiori calore praedita eſt quam in regione oppoſita FL eiusmodi motum perennem in aqua ineſſe debere, vt ſuperne circa GF fluxus fiat ab G ad F aquae calidae in locum frigidae, inferne autem contra ab M ad N aquae frigidae in locum calidae; niſi forte amplitudo vaſis NM ita ſit parva, vt tandem aquae per totam extenſionem idem caloris gradus induci queat.

Scholion 3.

89. Haec concluſio ex theoria deducta, quod fluidum nunquam in ſtatum aequilibrii peruenire poſſit, niſi in aequalibus altitudinibus vbique idem reperiatur caloris gradus, maximi eſt momenti, ac ratio etiam huius phaenomeni nunc perſpicue cognoſcitur quae in eo eſt ſita, quod ſi fluidum ita ſit diſpoſitum, vt circa fundum aequilibrium detur,

id

id prope ſupremam ſuperficiem prorſus excludatur. Ex quo intelligitur, quo profundius ſit huiusmodi fluidum, quo in maius ſpatium id extendatur, et quo maius fuerit diſcrimen in gradu caloris, eo fortiorem eſſe debere iſtum fluxum internum, quo circa ſuperficiem aqua calida in locum frigidae, circa fundum autem contra aqua frigida in locum calidae continuo fertur. Si ergo in mari eiusmodi locus detur, vel lacus quidam ita ſit comparatus, vt in altero termino aqua perpetuo ſit magis calida quam in termino oppoſito, hoc phaenomenum imprimis cerni debebit, vt in ſuperficie aqua continuo a loco calidiori in frigidiorem defluat, circa fundum autem fluxus contrarius obſeruetur. His perpenſis ſatis veriſimile videtur, oceani fluxum intra tropicos ab oriente in occidentem ab hac cauſa potiſſimum oriri, quandoquidem a ſole mare in locis orientalioribus multo magis calefit, quam in occidentalioribus, qui effectus inſuper a continuo ſolis progreſſu ab oriente in occidentem haud mediocriter augetur.

APPLICATIO
ad fluida compreſſionis et rarefactionis capacia.

Problema 10.

90. *Si fluidum aëri ſimile a grauitate animatum vbique eodem caloris gradu ſit praeditum, ſtatum aequilibrii definire et preſſionem in ſingulis locis.*

 Solu-

Solutio.

Tab. VI. Fig. 9. Assumto quodam plano horizontali AXY supra quod altitudines huius fluidi mensurentur, sit in Z eius particula quaecunque, eiusque altitudo super isto plano $YZ = z$. Densitas porro ibi sit $= q$, et altitudo pressionem metiens $= p$; et quoniam gradus caloris vbique idem statuitur, densitas q a sola pressione p pendebit eiusque certa erit functio ex natura fluidi definienda. Grauitatis nunc vi acceleratrice posita $= g$, pro qua in mensura pressionis vnitate vtimur, status aequilibrii hac aequatione differentiali $dp = -gqdz$ definitur, quae cum q sit functio ipsius p semper integrationem admittit, et integrata praebet $\int \frac{dp}{q} = g(b-z)$, vnde primo intelligimus, aequilibrium semper locum habere, et cum in eum statum peruenerit, pressionem in singulis locis assignare poterimus. Patet autem pressionem p per solam altitudinem z determinari, ita vt vbique ad aequales altitudines eadem futura sit pressio p. Cum igitur euolutio huius formulae pendeat a ratione, qua densitas q per pressionem p determinatur, aliquot hypotheses percurramus.

I. Sit primo $p = \frac{aq}{b}$, ita vt densitati b conueniat pressio a, et generatim pressio densitati sit proportionalis. Quare ob $q = \frac{bp}{a}$ habebimus $\frac{a}{b} lp = g(b-z)$, ac si sumamus in plano horizontali AXY densitatem rem esse $= b$, et pressionem $= a$, fiet $\frac{a}{b} la = gb$, ideoque $\frac{a}{b} lp = \frac{a}{b} la - gz$ seu $l\frac{a}{p} = \frac{gb}{a} z$.

II. Loco alterius hypothesis supra ex aëris maxima et minima densitate stabilitae quia ad integrationem minus est idonea, sequente vtamur ad phaenomena egregie accommodata. Posita densitate minima $= m$, maxima vero $= n$ statuamus $q = \frac{mk + np}{k + p}$, vbi k denotet pressionem valde magnam, quam experimentis vix attingere liceat, verumtamen talem, vt pro pressionibus mediocribus, mk prae np quasi euanescat, quod cum densitas minima m prae maxima n vix pars $\frac{1}{1000000}$ aestimari queat, facile efficitur, si verbi gratia pressione atmosphaerae in plano horizontali A X Y posita $= a$ sumatur $k = 100\, a$ vel etiam $k = 1000\, a$; hoc autem modo si pressio mediocris non vehementer ab a abhorreat, in illius formulae numeratore pars mk prae np, in denominatore vero pars p prae k negligi poterit vt prodeat $q = \frac{np}{k}$, seu densitas pressioni proportionalis, vt aëris indolés postulat. Hinc ergo nostra aequatio differentialis erit $\frac{k + p}{mk + pn} dp = -g dz$, vnde si in ipso plano horizontali A X Y fuerit pressio $= a$, integratio praebet

$$\frac{a - p}{n} + \frac{(n - m)k}{nn} l \frac{mk + na}{mk + np} = gz.$$

Quodsi densitatem in eodem plano horizontali vocemus $= b$ ob $b = \frac{mk + na}{k + a}$ erit $k = \frac{(n - b)a}{b - m}$ ideoque in genere $q = \frac{m(n - b)a + n(b - m)p}{(n - b)a + (b - m)p} = m + \frac{(n - m)(b - m)p}{(n - b)a + (b - m)p}$,

 ex

ex quo aequatio nostra statum aequilibrii definiens erit:

$$\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)} l \frac{(n-m)ba}{m(n-b)a+n(b-m)p} = gz.$$

Cum igitur sursum ascendendo pressio p continuo diminuatur pro eius quauis diminutione infra a altitudo z hinc facile definitur, ac pressio p plane euanescet in altitudine, quae est $= \frac{a}{ng} + \frac{(n-m)(n-b)a}{n.n(b-m)g} l \frac{(n-m)b}{m(n-b)}$, vbi densitas fiet $= m$, et atmosphaera penitus desinere est censenda. Quantam pressionem solida huiusmodi fluido immersa sustineant, ex praecedentibus satis intelligitur.

Coroll. 1.

91. Quia pressio atmosphaerae per altitudines mercuriales mensurari solet, densitas mercurii vnitate est denotanda; vnde parum a scopo aberrabimus, si maximam aëris densitatem n etiam vnitate designemus: tum autem denotante iam a altitudinem barometri in superficie terrae erit propemodum densitas ibi $b = \frac{1}{10000}$, minima vero densitas m minimum adhuc millies minor est aestimanda.

Coroll. 2.

92. Quodsi porro grauitatem g vnitate designemus aequatio inuenta erit:

$$z = a - p + \frac{9999(1-m)a}{1-10000m} l \frac{(1-m)a}{9999ma+(1-10000m)p}$$

vnde

vnde tota atmosphaerae altitudo facta pressione $p = 0$ reperitur $= a + \frac{9999(1-m)a}{1-10000m} l \frac{1-m}{9999m}$. Quare posito $m = 10^{-\mu}$ quia exponens μ est valde magnus, erit proxime:

$$z = a - p + 10000\, l \frac{10^{\mu-4} a}{a + 10^{\mu-4} p},$$

hincque altitudo atmosphaerae $= a + 10000\, a. (\mu - 4)\, l\, 10$.

Coroll. 3.

93. Cum igitur sit $a = 2\frac{1}{2}$ ped. et $l 10 = 2.30258$ si altitudo atmosphaerae statuatur $= \lambda a$, vt λ sit numerus maximus, fiet hinc $\lambda - 1 = 23026 (\mu - 4)$. Quare si modo sit $\mu = 6$ seu $m = \frac{1}{1000000}$, fit $\lambda = 2.23026$, et 23026 ped. pro milliari germanico aestimatis altitudo atmosphaerae ad quinque milliaria assurget, sumtoque $\mu = 8$ ad decem milliaria.

Coroll. 4.

94. Si ergo altitudo atmosphaerae aestimetur 5 milliarium erit aeris densitas minima $m = \frac{1}{1000000}$, qui valor cum tantum centies sit minor densitate, quam sentimus, experimenta pneumatica vtique suadent vt statuamus $m = \frac{1}{100000000}$, et altitudinem atmosphaerae 10 milliarium vnde pro quauis altitudine z erit $z = a - p + 10000\, a\, l \frac{10000\, a}{a + 10000\, p}$ ibique erit

densitas aeris $q = \frac{1}{1000000000} + \frac{p}{10000\,a + p}$ densitate mercurii existente $= 1$.

Scholion.

95. Hae duae hypotheses etsi natura prorsus diuersae tamen inter se vix discrepant, nisi pressio sit vel nulla vel adeo infinita. Quando autem pressio nulla statuitur, discrimen cernitur maximum, cum prior hypothesis, atmosphaerae altitudinem infinitam tribuat altera vero finitam, antequam autem ascendendo ad hanc peruenitur, ratio qua et densitas q et pressio p decrescit, ex vtraque hypothesi eadem fere prodit. Ac si liceret infra planum A X Y in viscera terrae descendere, vix vlla differentia perciperetur, nisi ad maximam profunditatem fuerit deuentum, quanquam in descensu differentia sensibilior fieri debet quam in ascensu, ex his formulis autem tabula condi solet ostendens quantum in ascensu ad quamuis altitudinem pressio cum densitate minuatur, in descensu vero augeatur, quae autem ab experientia haud mediocriter abludere deprehenditur. Cuius rei causa non in eo sita est putanda, quod hic non veram relationem inter densitatem et pressionem simus secuti, quomodocunque enim ea fuerit comparata, semper pro iis altitudinibus ad quas nobis ascendere licet, eadem lex prodire debet, propterea quod in his variationibus densitas satis exacte pressioni est proportionalis. Vera autem huius aberrationis causa sine dubio in eo est quae-

quaerenda, quod hic toti atmoſphaerae vbique eundem calorem tribuimus, cum tamen experientia longe aliud declaret, qua nouimus aſcendendo gradum caloris continuo diminui, ita vt ad certam altitudinem ſub aequatore aeque ac ſub polis vbique terrarum frigus intenſiſſimum fere in eodem gradu reperiatur, atque tota caloris et frigoris variatio et viciſſitudo tantum circa terrae ſuperficiem obſeruetur, cum etiam in terrae interiora penetrando continuo magis ad aequalitatem componatur. Lex vero, qua calor ſurſum aſcendendo diminuitur, nullam certam regulam ſequitur, ſed pro variatione climatum et tempeſtatum maxime eſt irregularis; vnde in ſequente problemate rem ita generaliter ſum complexurus, vt ad omnes caſus accommodari queat; pro ſcala nempe caloris in quauis altitudine lineam curuam quamcunque adhibebo; vbi autem hoc perpetuo eſt tenendum, niſi vbique in aequalibus altitudinibus idem ſit caloris gradus, aequilibrium plane dari non poſſe.

Problema. II.

96 Data ſcala caloris pro qualibet altitudine ſuper plano horizontali, definire ſtatum aequilibrii atmoſphaerae et preſſionem cum denſitate aeris in quauis altitudine.

Solutio.

A plano horizontali CAD aſcendendo per altitudinem verticalem $AZ = z$ ſit ibi gradus caloris Tab. VII. Fig. 14.

ris $= r$ repraesentatus applicata Z R curuae cognitae C R r, quae est scala caloris; tum vero in eadem altitudine sit densitas aëris $= q$ et pressio $= p$, quae simul denotet altitudinem mercurii in barometro ad Z constituto, ita vt hic densitas mercurii vnitate exprimatur, ideoque q sit fractio valde exigua. In ipso autem plano horizontali C A D sit gradus caloris $AC = c$, densitas aeris $= b$ et pressio seu altitudo barometri in $A = a$. Iam pro altitudinibus ad quas ascendere licet, ante vidimus pressionem densitati proportionalem statui posse, siquidem calor fuerit idem; calore ergo variabili assumto si eius mensura adhuc incerta ita determinetur, vt manente densitate eadem calor pressioni proportionalis aestimetur, habebimus $p = \frac{aqr}{bc}$, vnde fit $q = \frac{bcp}{ar}$. Quare cum status aequilibrii hac aequatione differentiali contineatur $\frac{dp}{q} = -dz$, posita vi grauitatis acceleratrice $g = 1$ erit $\frac{dp}{p} = \frac{-bcdz}{ar}$, quae aequatio cum r sit functio ipsius z vtique integrationem admittit, simulque indicat hoc casu aequilibrium locum habere, quo cum atmosphaera peruenerit fiet integrando $lp = \text{Const.} - \frac{bc}{a}\int\frac{dz}{r}$. Ex scala caloris C R r construatur alia curua D S s, vt sit vbique $ZS = \frac{c}{r} = \frac{AC}{ZR}$, ideoque $AD = 1$, et per quadraturam huius curuae habebimus $l\frac{a}{p} = \frac{b}{a}\cdot ADZS$, vnde definita pressione p pro altitudine $AZ = z$, erit ibidem densitas $q = \frac{bcp}{ar} = \frac{bcp}{a.\,ZR}$. Vel si loco caloris r ipsam aream curuae D S s in calculum introducere

ducere velimus ponendo $\int\frac{c\,dz}{r}=s$, ita vt s sit certa functio ipsius z euanescens posito $z=0$, erit $l\frac{a}{p}=\frac{bs}{a}$ seu $p=a\,e^{\frac{-bs}{a}}$, et ob $r=\frac{c\,dz}{ds}$, habebitur $q=\frac{bp\,ds}{a\,dz}$ $=\frac{b\,ds}{dz}e^{\frac{-bs}{a}}$ vbi notetur, si calor per totam altitudinem esset idem fore $s=z$, sin autem calor decrescat functionem s in maiore ratione crescere debere quam z, ita tamen vt posito $z=0$ fiat $s=0$ et $\frac{ds}{dz}=1$, vnde statui conueniet $s=z+\alpha z^{\lambda}$ existente $\lambda>1$. Quo facto erit $r=\frac{c}{\alpha\lambda z^{\lambda-1}+1}$, et $q=\frac{bp}{a}$ $(1+\alpha\lambda z^{\lambda-1})$.

Coroll. 1.

97. Quodsi scala caloris CRr sit linea recta verticalem AZ in altitudine $z=b$ secans, ita vt ibi calor prorsus euanescat; pro hoc casu habebimus $r=c(1-\frac{z}{b})$ tum vero $p=a(1-\frac{z}{b})^{\frac{bb}{a}}$ et $q=b$ $(1-\frac{z}{b})^{\frac{bb}{a}-1}$. Hinc posito $z=b$ pressio ibi euanescet, densitas vero q vel euanescet si $b>\frac{a}{b}$ vel erit $=b$ si $b=\frac{a}{b}$ vel adeo infinita euadet si $b<\frac{a}{b}$.

Coroll. 2.

98. Si scala caloris sit logarithmica sursum cum verticali AZz conuergens, seu $z=b\,l\frac{c}{r}$ erit

$r = ce^{\frac{-z}{b}}$, hinc $q = \frac{bp}{a} e^{\frac{z}{b}}$, ideoque $\frac{dp}{p} = -\frac{b}{a} e^{\frac{z}{b}} dz$, vnde integrando colligitur $l\frac{a}{p} = \frac{bb}{a}(e^{\frac{z}{b}} - 1)$, ex qua aequatione pro quauis eleuatione z pressio p assignari poterit. Hoc casu in altitudine infinita tam pressio p quam densitas q cum calore r euanescet.

Coroll. 3.

99. Si calor etiam descendendo decrescat formula $r = \frac{c}{1 + \alpha\lambda z^{\lambda-1}}$ ad hunc casum accommodari potest sumendo pro λ numerum imparem vnitate semper maiorem. Veluti posito $\lambda = 3$, habebimus $r = \frac{c}{1 + 3\alpha zz}$, $s = z + \alpha z^3$, hinc $p = ae^{\frac{-bz}{a}}(1 + \alpha zz)$ atque $q = \frac{bp}{a}(1 + 3\alpha zz)$. Hic si ponatur $z = \infty$, cum calore etiam pressio cum densitate euanescet.

Scholion 1.

100. Relatio inter pressionem, densitatem et calorem, etiam generalior in calculum introduci potest, ei qua supra sumus vsi conformis, vbi densitatem minimam $= m$, maximam vero $= n$ statuimus. Sit enim hic ob calorem variabilem $\frac{qr}{c} = \frac{mk + np}{k + p}$ seu $q = \frac{mk + np}{k + p} \cdot \frac{c}{r}$ et sumto $g = 1$ aequatio differentialis $\frac{k + p}{mk + np} dp = \frac{-c\,dz}{r}$ integrata dat $\frac{a - p}{n} + \frac{(n - m)k}{nn} l \frac{mk + na}{mk + np} = \int \frac{c\,dz}{r}$. Pro casu ergo praesenti, vbi densitas in superficie terrae $= b$ fit $k = \frac{(n - b)a}{b - m}$ et

et $q = \left(m + \frac{(n-m)(b-m)p}{(n-b)a + (b-m)p}\right)\frac{c}{r}$ hincque $\frac{a-p}{n} + \frac{(n-m)(n-b)a}{nn(b-m)}$ $l\,\frac{(n-m)ba}{m(n-b)a + n(b-m)p} = \int\frac{c\,dz}{r}$.

Cum autem ob denſitatem mercurii $= 1$ ſtatui queat $n = 1$, ac tam b prae n, quam m prae b ſit fractio minima, ſatis exacte habebimus:

$$q = \left(m + \frac{bp}{a - b(a-p)}\right)\frac{c}{r} \text{ et}$$

$$a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp + m(a-p)} = \int\frac{c\,dz}{r}.$$

Hic ſi vtamur hypotheſi $r = \frac{c}{1 + 3\alpha zz}$ obtinebimus

$$q = \left(m + \frac{bp}{a - b(a-p)}\right)(1 + 3\alpha zz) \text{ et}$$

$$a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp + m(a-p)} = z + \alpha z^3$$

vnde poſito $p = 0$ tota atmoſphaerae altitudo, quae ſit $= b$ ita definitur, vt ſit $a + \frac{a}{b}\,l\,\frac{b}{m} = b + \alpha b^3$; ex quo patet α ita exiguam fractionem eſſe debere vt etiamſi b ſit altitudo aliquot milliarium, tamen αbb non fiat numerus praemagnus. Ponamus ergo $\alpha bb = \lambda$, eritque $r = \frac{cbb}{bb + 3\lambda zz}$; $q = \left(m + \frac{bp}{a - b(a-p)}\right)\frac{bb + 3\lambda zz}{bb}$ et $a - p + \frac{a}{b}\,l\,\frac{ba}{bp + m(a-p)} = \frac{z(bb + \lambda zz)}{bb}$ vnde facto $p = 0$, ob $z = b$ erit $a + \frac{a}{b}\,l\,\frac{b}{m} = (1 + \lambda)b$, et $q = m(1 + 3\lambda)$. Verum quia ob maximas atmoſphaerae mutationes hic nihil eſt certum vel conſtans, vberior euolutio huius hypotheſis prorſus foret inutilis.

 Scho-

Scholion 2.

101. Quascunque autem conclusiones hinc inferre licet, probe semper est tenendum, eas locum non habere, nisi atmosphaera fuerit in aequilibrio; statim enim atque ea ventis agitatur, omnia quae hinc de pressione et altitudine barometri tradi solent, maxime perturbantur, neque amplius quicquam certi statui potest, cuius circumstantiae imprimis ratio est habenda, quando altitudo barometrica in diuersis altitudinibus et profunditatibus obseruatur: etiamsi enim status caloris perfecte esset cognitus, nihil tamen inde colligere liceret, nisi atmosphaera prorsus esset tranquilla. Vt autem atmosphaera in aequilibrio consistere possit, omnino necesse est, vt in aequalibus altitudinibus, seu per quoduis eius stratum horizontale densitas vbique sit eadem, vnde etiam eadem pressio consequitur. Vidimus autem hoc neutiquam euenire posse, nisi simul in aequalibus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, ex quo sequitur, quoties in vna terrae regione ad eandem altitudinem aër fuerit calidior vel frigidior quam in alia, aequilibrium nullo modo subsistere posse, sed ventum necessario exoriri debere non ante cessaturum quam per ingentem saltem terrae tractum in quouis strato horizontali aër sese ad eundem caloris gradum composuerit. Quod cum rarissime eueniat, mirum non est, atmosphaeram vix vnquam prorsus esse tranquillam, ideoque dubium est nullum, quin haec praecipua ventorum causa sit statuenda.

tuenda. Cuiusmodi autem motus in aëre oriri debeat, quando in aequalibus altitudinibus gradu caloris discrepat, tametsi haec quaestio ad theoriam motus fluidorum pertinet, tamen simili modo, quo supra vsi sumus, quodammodo colligere licet, quantum quidem ad praesens institutum sufficit; atque hinc plurimorum phaenomenorum causam intelligere licebit.

Problema 12.

102. Si calor atmosphaerae in vna regione multum discrepet ab eo, quem in alia regione ad eandem altitudinem habet, ita vt aequilibrium locum habere nequeat, motum aëris hinc oriundum praeterpropter saltem definire.

Solutio.

Sit aër regioni A B imminens maiore calore praeditus, quam qui regioni C D imminet; concipiamus primo prope terram tubum horizontalem bc a regione calida in frigidam porrigi, et atmosphaeram in eo statu esse, vt pressio in b aequalis sit pressioni in c, ideoque aër in tubo bc quiescat. Ob calorem ergo circa b maiorem quam circa c, densitas ad b minor erit quam ad c, hincque par aëris volumen ibi minus habebit pondus quam hic. Nunc similem tubum horizontalem $\beta\gamma$ altius situm consideremus, ac manifestum est pressionem ad β minorem esse pressione ad b pondere columnae Tab. VII. Fig. 15.

 aëris

aëris a b ad β protensae; similique modo pressionem ad γ deficere a pressione ad c pondere columnae aëris a c ad γ protensae, at haec columna ob densitatem maiorem per $c\gamma$ grauior est illa; vnde cum pressiones ad b et c sint aequales, pressio ad γ vtpote maiore parte minuta minor erit pressione ad β, quippe quae minore parte mulctatur. Ex quo necesse est aërem in superiori tubo a regione calidiore in frigidiorem propelli; qui fluxus cum aëris molem in regione frigida augeat, in calida vero minuat, etiam circa tubum inferiorem bc aequilibrium mox turbabitur, et aër hic a regione frigida in calidam propelletur. Idem eueniet si aërem primum circa tubum superiorem $\beta\gamma$ in aequilibrio fuisse statuamus, ita vt tum pressiones ad β et γ fuerint aequales, tum enim a β ad b descendendo pressio minus accipiet augmentum quam a γ ad c descendendo, quia ibi aëris densitas minor est quam hic, ex quo in c pressio erit maior quam in b et aër frigidior per hunc tubum in locum calidiorem propelletur, quo fluxu etiam aequilibrium superne ita turbabitur, vt iam aër calidior per tubum $\beta\gamma$ in locum frigidiorem deferatur. Hinc ergo remotis his tubis tuto pronunciare possumus, si aër regioni AB imminens calidior sit aëre regioni CD imminente, tum infra ventum oriri a regione frigida in calidam, supra autem contra ventum a regione calida in frigidam spirantem. Tum vero de vi huius venti duplicis, in genere sequentia notari

tari licet. Primo quo maius fuerit discrimen inter calorem et frigus, eo hunc ventum fortiorem esse debere. Secundo quo maior fuerit altitudo $b\,\beta$, per quod hoc discrimen porrigitur, ob maiorem aequilibrii perturbationem etiam ventum accelerari oportere. Tertio vero quo minus regio frigida a calida distet, eo magis etiam ventum augeri, quia tum minor aëris massa ab iisdem viribus per tubos $c\,b$ et $\beta\,\gamma$ est propellenda, dum contra si hae regiones maxime distent, fluxus aëris admodum lenis oriri debet ob insignem massam mouendam.

Coroll. 1.

103. Si ergo duo conclauia vicina per ianuam inuicem communicent et alterum fuerit calefactum, alterum frigidum, tum infra aër ex conclaui frigido in calidum intrabit, supra autem habebit fluxum contrarium, vti experientia ostendit.

Coroll. 2.

104. In eodem porro conclaui, quod ope fornacis est calefactum in regione inferiori aër ad fornacem accedit, in superiori vero inde recedit, sicque prope fornacem continuo sursum ascendet, et motu suo exiles machinas agitare valet, prouti experientia declarat.

Coroll. 3.

105. Si in foco camini ignis accendatur, statim atque aër ei imminens calorem concipit, in regione

gione inferiori aër vndequaque ad ignem propellitur, et cum fumo per caminum egreditur, dum eius locum aër exterior per rimas conclauis intrans ſupplere valeat.

Coroll. 4.

106. Haec etiam cauſa eſt, quod in Africae littoribus quae interdiu ab imminente ſole maxime vruntur, continuus ventus ab oceano afflet in regionibus ſcilicet humilioribus, dum is ſine dubio in ſublimi curſum tenet contrarium.

Scholion 1.

107. Hinc igitur perſpicuum eſt quantum iſte fluxus aëris ad ignem ſuper focis et in fornacibus ſuſcitandum conferat, dum continuo motu ad ignem appellens per caminum aſcendit, ac phaenomena notiſſima producit. Id tantum dubium hic exoritur, quod exempla eiusmodi caminorum non deſint, quibus iſte aëris fluxus minime conſpiciatur ac potius fumus a fluxu contrario in conclaue depelli videatur. Quanquam autem vitium plerumque in eo eſt poſitum, quod vel ob anguſtiam vel alia impedimenta camini liber aëris aſcenſus coërceatur, tamen haec ſola cauſa huiusmodi aduerſis phaenomenis explicandis haud ſufficere videtur. Ad fumum autem ſeſe aëri admiſcentem hic quoque eſt attendendum, quo ſine dubio denſitas aëris haud mediocriter

criter augetur; cum enim affluxus aëris ſupra explicatus inde oriatur, quod a calore denſitas aëris diminuitur, ſi eueniat, vt ob fumum tantundem augeatur, ille effectus prorſus ceſſare debet, quin etiam ob maiorem denſitatem curſus contrarius per caminum deſcendens fumum in conclaue expellere poterit. Quare ne hoc incommodum vſu veniat, imprimis curandum eſt, vt fumus liberrimum exitum per caminum inueniat, hocque modo eius quantitas prope ignem ita diminuatur, vt aër inde vix maiorem denſitatem adipiſcatur.

Scholion 2.

108. Num autem ventus ille perennis orientalis, qui inter tropicos obſeruatur, ab eadem cauſa oriatur? haud ſatis liquet, quoniam in locis magis ad occidentem ſitis, ad quae ſol curſum ſuum dirigit, calor atmoſphaerae maior certe non eſt, quam in iis quibus ſol imminet. Et cum poſt meridiem demum calor ſentiatur maximus, hinc potius ſequi videtur, a regionibus occidentalioribus aerem affluere debere. Quo autem hic aliquid certius ſtatuere queamus repraeſentet circulus A B D C globum terraqueum, in quo ſit A locus, cui iam vel ſol immineat, vel vbi calor ſit maximus, ita vt tam in regione occidentaliori B quam orientaliori C gradus caloris ſit multo minor. Hoc poſito certo affirmare licet, ſi ſol perpetuo eidem loco A immi- Tab. VII. Fig. 16.

 neret,

neret, vel calor maximus ibi perennis foret, tum vndequaque perinde aërem prope ſuperficiem ad locum A delatum iri, ita vt in B ventus occidentalis, in C vero orientalis ſentiri deberet; dum in regione ſublimi aër vbique curſum contrarium eſſet habiturus. Nunc autem ponamus maximum calorem ab A continuo occidentem verſus proferri, ac manifeſtum eſt inde affluxum ab oriente intendi, ab occidente autem debilitari debere. Si enim haec promotio caloris ſatis eſſet rapida, facile intelligitur motum ab occidente prorſus extinctum iri, atque vniuerſam atmoſphaeram fere vniformiter ab oriente in occidentem conuerti debere; quae cum quaſi ſponte ſe ad talem motum componat impetu ſemel accepto, vix opus eſſe videtur, vt in ſuprema regione motus exiſtat contrarius, quo iactura retro facta compenſetur; vel ſi adſit talis motus, multo erit debilior. Neque ergo dubito cauſam euri perennis in zona torrida principio hic ſtabilito et cum motu telluris diurno coniuncto attribuere.

CAPVT

CAPVT V.

DE AEQVILIBRIO FLVIDORVM AD CENTRA VIRIVM FIXA SOLLICITATORVM.

Problema 13.

109.

Si vis acceleratrix, qua ſingulae fluidi particulae ad centrum virium vrgentur, ſit functioni cuicunque diſtantiae ab hoc centro proportionalis, definire fluidi ſtatum aequilibrii.

Solutio.

Sit A centrum virium per quod tranſeat planum illud fixum A X Y, ad quod ſitum ſingularum fluidi particularum Z referamus per ternas coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$ ſitque in Z preſſio $= p$ et denſitas fluidi $= q$. Statuatur nunc puncti Z a centro virium diſtantia $AZ = v$, vt ſit $vv = xx + yy + zz$, et ſit V ea functio diſtantiae v, quae vim acceleratricem in Z ſecundum Z A exprimit. Haec vis ſecundum ternas coordinatas reſoluta dat vires ſequentes: Tab. VII. Fig. 17.

$$\text{sec. direct. } XA \text{ vim } = \frac{Vx}{v} \text{ vt sit } P = -\frac{Vx}{v}$$

$$\text{sec. direct. } YX \text{ vim } = \frac{Vy}{v} \text{ vt sit } Q = -\frac{Vy}{v}$$

$$\text{sec. direct. } ZY \text{ vim } = \frac{Vz}{v} \text{ vt sit } R = -\frac{Vz}{v}.$$

Quocirca ex probl. 3. pro statu aequilibrii fluidi hanc habebimus aequationem

$$dp = -\frac{qV}{v}(xdx + ydy + zdz)$$

quae ob $vdv = xdx + ydy + zdz$ contrahitur in hanc:

$$dp = -qV dv.$$

Quod si iam densitas q ita sit comparata, vt haec aequatio integrationem admittat, quod non euenit, nisi q sit functio binarum quantitatum p et v, status aequilibrii locum habet, eiusque natura per integralem huius aequationis exprimetur.

Coroll. 1.

Tab. VII. Fig. 18 110. Vt ergo fluidum ad aequilibrium se componat, densitas q tantum a distantia a centro virium $AZ = v$ et a pressione p in loco Z pendere debet; quia autem tum ex aequatione $dp = -qV dv$ pressio p per solam distantiam v determinatur, etiam densitas per solam distantiam v determinabitur.

Coroll. 2.

111. Si ergo fluidum fuerit in aequilibrio, tum in aequalibus a centro A distantiis hoc est per totam

totam ſuperficiem ſphaerae radio $AZ=v$ circa centrum deſcriptae vbique eadem preſſio p eademque denſitas q reperietur, id quod de omnibus ſuperficiebus ſphaericis concentricis eſt intelligendum.

Coroll. 3.

112. Quod ſi igitur in diſtantia $AC=b$ preſſio euaneſcit, per totam quoque ſuperficiem ſphaericam CEGF euaneſcat neceſſe eſt, haecque ſuperficies fluidi ſuprema eſt cenſenda. Vnde patet fluidum in aequilibrio conſtitutum neceſſario figuram ſphaericam induere, in cuius centro poſitum ſit centrum virium.

Coroll. 4.

113. Si preſſio in C euaneſcat, erit in loco centro propiore Z, poſito interuallo $CZ=b-v=u$, preſſio $p=\int qVdu$, integrali hoc ita accepto, vt euaneſcat poſito $u=0$, hoc autem integrale, exprimit pondus columnae fluidae ex C in Z protenſae, quo ea a vi centripeta ad Z vrgetur: Quare ad centrum A accedendo preſſio p continuo augebitur.

Scholion 1.

114. Ratiocinium hoc clarius reddetur, ſi columnae cylindricae CZ baſin tribuamus $=ff$, vt eius volumen ob altitudinem $CZ=u$ ſit ffu, et incrementum eius, dum altitudo elemento du augetur,

tur, $=ff\,du$; maſſae ergo elementum ob denſitatem in $Z=q$ erit $=ffq\,du$, quod in vim acceleratricem V, qua deorſum ſollicitatur ductum, dabit ponderis incrementum $=ffqV\,du$; ex quo totius columnae CZ pondus erit $=ff\int qV\,du$, quod ſi ponatur $=P$, preſſio in Z erit $p=\frac{P}{ff}$; vnde perſpicuum eſt preſſionem in Z ponderi columnae fluidae CZ eſſe proportionalem, ſiquidem haec columna a ſuprema fluidi ſuperficie capiatur. Quoniam igitur haec columna quo magis verſus centrum A extenditur eo fit neceſſario ponderoſior, ſimul intelligitur, quo propius ad centrum A accedatur, eo magis preſſionem p augeri debere. Atque hinc etiam vis, quam quoduis corpus ſolidum fluido immerſum ab eius preſſionibus ſuſtinet, colligi debet, quippe quae aequalis et contraria eſt ei vi, qua maſſa fluida in locum corporis ſolidi ſubſtituta a vi centripeta vrgetur. Hincque ex vi, qua corpus ſolidum ipſum a vi centripeta ſollicitatur, iudicare licebit, vtrum id in fluido ſit quieturum, an vero vel ſurſum vel deorſum pellatur? prouti haec vi illi fuerit vel aequalis; vel ea minor maiorue: quin etiam fieri poteſt, ſi ambae vires non per idem corporis punctum tranſeant, vt ei interea motus quoque gyratorius imprimatur.

Scholion 2.

115. Si ergo denſitas in locis a centro A aeque remotis non ſit aequalis ſtatus aequilibrii locum

eum habere nequit, qualem autem tum motum adipiſcatur fluidum, ſequenti modo colligere licebit. Ponamus in locis b et β denſitatem minorem eſſe quam in locis c et γ, fluidum autem ita eſſe diſpoſitum, vt in b et c preſſiones ſint aequales, ideoque fluidum in tubo bc in aequilibrio verſetur; quo poſito preſſio ad β maior erit preſſione ad γ, quoniam pro illa obtinenda a preſſione in b pondus columnae rarioris βb ſubtrahi debet, pro hac vero denſioris γc. Fluidum ergo per tubum ſuperiorem $\beta\gamma$ a loco, vbi denſitas eſt minor defluet in locum, vbi denſitas eſt maior, qui fluxus ſimul ac inceperit aequilibrium in tubo inferiori bc turbabitur, hicque fluidum denſius ad rarius fluere incipiet. Idem motus prodibit ſi primum fluidum in tubo ſuperiori $\beta\gamma$ in aequilibrio fuiſſe aſſumamus. Quocirca tuto concludimus, ſi in regione βb denſitas minor fuerit quam in regione γc, tum infra fluidum ex c in b ſupra autem contra ex β in γ fluere debere; qui motus tamdiu durabit, quoad aequilibrium locum inuenire queat; ac ſi ob calorem ad $b\beta$ minorem denſitas ibi conſtanter ſit maior quam ad $c\gamma$ hic motus perpetuo durabit, qui caſus omnino conuenit cum illo, quem ſupra euoluimus.

Scholion 3.

116. Pro diuerſa ergo fluidi indole circa aequilibrium ſequentia ſunt notanda. Primo ſi fluidum

dum ſit homogeneum denſitatem habens inuariabilem, veluti aqua eodem vbique caloris gradu praedita, cum ſe ad aequilibrium compoſuerit, in aequalibus a centro virium diſtantiis preſſio vbique eſt eadem: ſin autem fluidum ſit heterogeneum, cuius tamen ſingulae partes nullam denſitatis mutationem patiuntur, aequilibrium ſubſiſtere nequit, niſi in aequalibus a centro virium diſtantiis denſitas vbique ſit eadem, at tum etiam preſſio ibidem aequalis ſit neceſſe eſt. Idem tenendum eſt, ſi idem fluidum ob diuerſos caloris gradus ratione denſitatis diſcrepet, tum enim ad aequilibrium requiritur, vt in aequalibus a centro virium diſtantiis vbique idem reperiatur caloris gradus, quod niſi eueniat, aequilibrium locum habere nequit, ſed in regionibus inferioribus fluxus dabitur perpetuus a loco frigidiori in calidiorem, in ſuperioribus vero contra a loco calidiore in frigidiorem. Quod ſi fluidum aëri ſit ſimile et denſitatem habeat variabilem non ſolum a gradu caloris ſed etiam a preſſione pendentem; tum aequilibrium dari nequit, niſi per ſingulas ſuperficies ſphaericas circa centrum virium deſcriptas vbique idem caloris gradus regnet; tum vero etiam per totam cuiusque harum ſuperficierum expanſionem et denſitas et preſſio eadem deprehendetur. In his igitur omnibus caſibus maxime intereſt fluidi maſſam in eiusmodi ſtrata diuidi, quae a centro virium aeque diſtent, ideoque figuram habeant ſphaericam, quae ſtrata aequilibrata vel libellata vocare

care licet; ſimili modo quo caſu ante tractato, vbi directiones grauitatis inter ſe erant parallelae, haec ſtrata plana et horizonti parallela accipi debebant.

Problema 14.

117. Si ſingulae fluidi partes ad duo pluraue centra virium ſimul ſollicitentur viribus acceleratricibus, quae vtcunque a diſtantiis pendeant, conditiones inueſtigare, ſub quibus fluidum in aequilibrio conſiſtere queat.

Solutio.

Sint plura centra virium fixa C, C′, C″ vtcunque diſpoſita ſiue in eodem plano ſiue ſecus; ac fluidi conſideretur elementum quodcunque in Z ſitum, vbi denſitas ſit $= q$, et preſſio $= p$. Ponantur huius puncti Z diſtantiae a ſingulis virium centris: Tab. VIII. Fig. 19.

$$CZ = v;\ C'Z = v';\ C''Z = v''$$

et vires acceleratrices, quibus ad ea ſeorſim ſollicitatur, ſint V, V′, V″. Harum autem virium effectus ratione aequilibrii ſeorſim definire licet, quoniam ſupra vidimus in genere pro aequilibrio eſſe debere $\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, vbi ſingulae vires reſolutae in P, Q, R partes peculiares inducunt. Calculo ergo vt ante ſubducto pro ſingulis viribus ternae coordinatae ex calculo excedent, et ad hanc aequationem peruenietur:

$$\frac{dp}{q} = -V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv''$$

 vnde

vnde patet si densitas q fuerit vel constans, vel a sola pressione p pendeat, integrationem succedere, ideoque aequilibrium locum habere, cuius indoles hac aequatione exprimetur:

$$\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$$

vbi notari meretur formulam integralem $\int V\,dv$ repraesentare actionem vis V; quare si omnium virium iunctim consideratarum actio tota statuatur $=W$, vt sit

$$W = \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$$

habebitur $\int \frac{dp}{q} = \text{Const.} - W$. Notio autem huius actionis ita est stabilienda, vt pro quouis spatii puncto, quod virium actioni subiicitur, certum sortiatur valorem longitudine seu altitudine quadam exprimendum, siquidem vires acceleratrices V, V', V'' grauitati homogeneae numeris absolutis indicantur; ita vt actio virium in quouis puncto euadat pressioni homogenea, quippe quam etiam certa altitudine repraesentamus. Actione ergo in calculum introducta erit aequatio differentialis pro statu aequilibrii $dp = -q\,dW$, vnde si densitas q non solum a pressione p sed etiam a loco pendeat, veluti si cuilibet loco certus caloris gradus conueniat, tum aequilibrium locum habere nequit, nisi calor vnice ab actione virium W pendeat, ita vt in omnibus punctis, vbi eadem actio viget, ibi etiam calor sit idem; tum autem in iisdem locis quoque densitas et pressio in aequilibrio fiet eadem.

Coroll.

Coroll. 1.

118. Totum ergo negotium eo redit, vt omnia puncta, vbi actio virium est eadem probe notentur, quae cum pro quauis actionis quantitate W in certam quandam superficiem cadant, talis superficies stratum aequilibratum repraesentabit; ita vt in quolibet strato aequilibrato actio virium vbique sit eadem.

Coroll. 2.

119. Ad aequilibrium igitur id maxime requiritur, vt per singula strata aequilibrata fluidum vbique eandem habeat densitatem, tum vero etiam pressio vbique erit eadem in quolibet scilicet strato aequilibrato. Vnde perspicuum est extremam seu supremam fluidi superficiem secundum huiusmodi stratum aequilibratum se componere debere; ex quo haec strata ad libellam disposita sunt censenda.

Coroll. 3.

120. Si vnicum sit centrum virium, omnia strata aequilibrata figuram habent sphaericam centro virium descriptam, ideoque inter se erunt parallela. Sin autem duo pluraue adsint centra virium, figura singulorum stratorum aequilibratorum admodum fit plerumque irregularis, neque ea amplius inter se erunt parallela, sed potius crassitie inaequabili praedita.

Scholion 1.

121. Duae hic occurrunt notiones maxime notatu dignae, quarum prior eſt notio actionis virium, quae in quoduis punctum agunt, atque alibi oſtendi hanc notionem in principio minimae actionis, maximi eſſe momenti, ex quo ſi forte ea quibusdam geometris vel nimis metaphyſica vel adeo nimis ſterilis fuerit viſa, hic certe ſummam eius vtilitatem agnoſcent. Dum enim vires quaecunque acceleratrices in punctum definitum agunt, ibi certam exerunt actionem quae conuenientiſſime eo modo, quo hic vſus ſum, repraeſentatur, dum ſcilicet quaelibet vis per differentiale directionis ſuae multiplicata integratur, et haec integralia ex ſingulis viribus nata in vnam ſummam colliguntur; vnde conceptus metaphyſicus formari poterit. Ita hic littera W dum exprimit ſummam formularum $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ deſignabit actionem virium V, V′, V″ punctum Z, in quo fluidi elementum concipimus, ſollicitantium. Parum autem refert, quantam conſtantem ob integrationes introducamus, quoniam hanc notionem eo dirigimus, vt omnia loca, in quibus eadem ineſt actio definiamus; interim tamen cum elicuerimus $\int \frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - W$ pro quolibet caſu haec conſtans facile determinatur. Hinc igitur nata eſt altera notio ſtratorum aequilibratorum, quorum quoduis eam vniuerſam ſuperficiem complectitur, cuius omnibus punctis eadem

actio

actio conuenit; quantae autem ſit vtilitatis haec notio in aequilibrio fluidorum definiendo, hic iam ſatis copioſe eſt declaratum: at vero etiam in motu fluidorum inueſtigando aeque eſt neceſſaria, vti ex ſequentibus patebit. Determinatio autem horum ſtratorum aequilibratorum pro qualibet virium ſollicitantium hypotheſi, ad problema geometricum reducitur, cuius ſolutio autem plerumque ita ſit difficilis, vt ſtratorum horum figura inde difficulter cognoſci queat. Quoniam vero huiusmodi caſus vix in rerum natura occurrunt, operae haud eſt pretium hunc laborem ſuſcipere; quin potius vires reales, quae in fluida terreſtria agunt, eorumque ſtatum aequilibrii afficiunt, ſum exploraturus.

Scholion 2.

122. Cum ſcilicet omnia, quae nobis circa aequilibrium et motum fluidorum explorare licet, potiſſimum ad fluida ſuper terra conſtituta referri conueniat, aquam nimirum et aërem, perpendendum eſt a cuiusmodi viribus haec fluida praeter grauitatem ſollicitentur. Ac primo quidem occurrit vis centrifuga, qua haec fluida ob motum vertiginis terrae, ab eius axe repelluntur, quam ipſis ab axe diſtantiis proportionalem eſſe conſtat. Etſi enim conſideratio huius vis, ob motum vnde naſcitur neutiquam ad theoriam aequilibrii pertinet; tamen quia eius actio eſt perennis, ſtatim ac fluida ſeſe in certum ſtatum compoſuerint, hic ſtatus vt

aequilibrium ſpectari poteſt, ſiquidem is perfecte cum eo conuenire cenſendus eſt, quem eadem fluida induerent, ſi terra quieſcente ſingula fluidorum elementa praeter grauitatem continuo a viribus illis ab axe repellerentur. Quamobrem quomodo ſtatus aequilibrii in hac hypotheſi comparatus eſſe debeat, plurimum intererit hic inueſtigare, cum concluſiones etiamſi fictioni innitantur, tamen minime a veritate aberrare ſint putandae. Deinde etiam conſtat tam ſolem quam lunam vi ſua attractrice in fluida terrae effectum ſatis notabilem exſerere; qui etiamſi cum continuo motu ſit coniunctus, tamen ita ad ſtatum aequilibrii reuocari poteſt, vt concluſiones vel non multum a veritate abhorreant vel ſaltem ad motus cognitionem deinceps inueſtigandam maxime ſint neceſſariae. Quare etſi ſol et luna quotidie circa terram circumferantur, conueniet quaeſtionem ita conſtitui, vt terra in quiete ſpectata, ſol vel luna perpetuo eidem terrae puncto imminere concipiatur, et ſtatus aequilibrii fluidorum ab hac vi cum grauitate coniuncta productus definiatur. Tum enim his aſtris etiam procedentibus intelligetur, quemnam ſtatum fluida quouis momento induere conentur; tametſi enim nunquam in aequilibrium ſint peruentura, tamen cognitio aequilibrii quod quaſi affectant, maximam habebit vtilitatem.

Pro-

Problema 15.

123. Si praeter vim centripetam, qua fluidum ad punctum fixum C vrgetur, singulae particulae Z ab axe fixo A B per centrum C transeunte repellantur viribus distantiae X Z ab axe proportionalibus definire statum aequilibrii, fluidi cuiuscunque. Tab. VIII. Fig. 20.

Solutio.

Sit fluidi elementum quodcunque in Z, cuius densitas sit $= q$ et pressio $= p$; ponatur eius distantia a centro C Z $= v$, cuius functioni V aequalis sit vis acceleratrix, qua id elementum ad C vrgetur, huius ergo vis actio in punctum Z erit $= \int V dv$, partem constituens actionis totius ante littera W indicatae. Altera vero pars oritur ex vi qua elementum Z ab axe A B repelli assumimus, sit ergo perpendiculum ex Z ad axem ductum Z X $= x$, et vis ipsa acceleratrix repellens $= \frac{x}{f}$, quoniam distantiae x proportionalis statuitur. Iam ex praecedentibus perspicuum est, si haec vis contrariam haberet directionem Z X, eam spectari posse vt vim centripetam ad centrum in directione Z X infinite remotum tendentem, sicque eius actio foret $= \int \frac{x\,dx}{f} = \frac{xx}{2f}$: nunc igitur quia vis ab axe repellit, actio statuenda est $= -\frac{xx}{2f}$, ita vt actio tota pro elemento in Z sit $= \int V dv - \frac{xx}{2f}$ loco litterae W substi-

ſubſtituenda, ex quo pro ſtatu aequilibrii haec habetur aequatio

$$\int\frac{dp}{q} = \text{Conſt.} - \int V\,dv + \frac{xx}{2f} \quad \text{ſeu } dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - V\,dv\right)$$

vnde patet niſi denſitas q ſit conſtans vel a ſola preſſione p pendens, eam inſuper ipſam actionem W inuoluere debere cum alioquin aequilibrium ſubſiſtere non poſſit. Pro aequilibrio ergo neceſſe eſt, vt denſitas q ſit vel conſtans, vel functio ſolius preſſionis p, vel functio duarum quantitatum p et $W = \int V\,dv - \frac{xx}{2f}$. Si ergo calor ſit variabilis, eum functionem ipſius W eſſe oportet, ita vt in omnibus locis, vbi actio W eſt eadem, hoc eſt in quolibet ſtrato aequilibrato, ſit idem. Tum vero ibidem et denſitas et preſſio eadem ſit oportet; ac ſuprema fluidi ſuperficies ſecundum tale ſtratum aequilibratum ſemper erit diſpoſita. Pro grauitate hic functionem quandam V diſtantiae $CZ = v$ introduxi quia eius indoles eſt ambigua; ſi enim in viſcera terrae deſcendimus, haec vis ipſi diſtantiae proximae cenſetur proportionalis, ſin autem ſupra terram per atmoſphaeram aſcendimus, quadrato diſtantiae reciproce proportionalis aeſtimatur: ex quo coniicere licet prope ſuperficiem quousque vel aſcendere vel deſcendere datur, grauitatem recte conſtantem et vnitati aequalem poni, vnde erit $dp = q\left(\frac{x\,dx}{f} - dv\right)$, pro ſtratis autem aequilibratis habebitur haec aequatio $v = \text{Conſt.} + \frac{xx}{2f}$, quae ergo exprimit naturam ſupremae ſuperficiei fluidorum. Ita ſi si semiaxis totius superficiei sit $CA = k$ vbi $x = 0$, semidiameter aequatoreus vbi $v = x$, ex hac aequatione $x = k + \frac{xx}{2f}$, definitur $x = f - \sqrt{(ff - 2fk)}$ vbi notetur f esse quantitatem maximam.

Coroll. 1.

124. Si ergo quaestio sit de figura oceani terram cingentis, posita densitate $q = 1$, erit pro loco sub oceano quocunque Z pressio $p = k + \frac{xx}{2f} - v$ vnde pro suprema superficie erit $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$, vnde vt supra fit semiaxis $CA = k$ et semidiameter aequatoris $= f - \sqrt{(ff - 2fk)} = k + \frac{kk}{2f} + \frac{k^3}{2ff}$ siquidem f multum superet k.

Coroll. 2.

125. Cum reuolutio terrae circa axem absoluatur tempore $23^h, 56', 45'' = 86205''$, pro quo numero si scribamus ν, et altitudinem lapsus vno minuto secundo facti ponamus $= g$ erit quantitas illa $f = \frac{\nu\nu g}{2\pi\pi}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$; ex quo colligitur $f = 376474180.g$ et ob semiaxem terrae $k = 19601352$ ped. paris. fit $f = 289,95\,k$, ex quo semidiameter aequatoris prodit $= k\left(1 + \frac{1}{5799}\right) = \frac{581}{580}k$.

Coroll. 3.

126. Pro pressione autem atmosphaerae, si in terrae superficie sub polo ponatur altitudo barome-

tri $= a$, densitas aëris $= b$, existente densitate mercurii $= 1$, ob $q = \frac{bp}{a}$ erit $l\frac{k}{a} = \frac{b}{a}(k - v + \frac{xx}{2f})$, et vbique in superficie maris ob $k + \frac{xx}{2f} - v = 0$ altitudo barometri p erit eadem $= k$. Sub aequatore autem ob strata crassiora atmosphaera altius assurgit quam sub polis.

Scholion.

127. Mirum hic videri non debet quod semidiameter aequatoris parte tantum $\frac{1}{580}$ superare inventus sit semiaxem terrae, cum tamen experientia iam constet excessum ad partem $\frac{1}{200}$ assurgere. Ratio huius discriminis in eo latet, quod hic grauitatem perpetuo ad centrum directam et a sola distantia ab eo pendentem assumsimus, ita vt quomodocunque terrae figura mutetur, grauitatis tamen eadem esset mensura. Verum nunc satis euictum est grauitatem ab attractione omnium terrae partium proficisci, ideoque statim atque terrae figura sphaerica alteretur, ipsam quoque grauitatem mutationem pati, atque haec grauitatis mutatio in causa est, quod ob motum vertiginis terrae aberratio a figura sphaerica multo maior existat. Hugenius quoque qui primus figuram terrae definire ex theoria est conatus, dum ad solam vim centrifugam respexit, grauitate vt inuariabili spectata eandem rationem inter axem terrae et diametrum aequatoris scilicet fere 580 : 581 elicuit, ex quo calculus hic adhibitus minime suspectus videri debet. Hic autem

locus

locus non eſt, vt ex vera attractionis indole calculum propius ad veritatem accommodemus, dum pro aequilibrio tam aquae quam aëris cognoſcendo haec allata abunde ſufficiunt. Neque etiam ei caſui quo in iisdem ſtratis caloris gradus diſcrepat, immoror, cum ſatis conſtet ex ſuperioribus, cuiusmodi motus tum oriri debeat.

Problema 16.

128. Si terrae centro C immineat in E ſiue ſol ſiue luna ſiue aliud corpus attrahens in ratione reciproca duplicata diſtantiarum definire ſtatum aequilibrii fluidorum circa terrae ſuperficiem ſitorum, hoc eſt oceani et atmoſphaerae, dum tam terra quam corpus in E ſine motu ſpectantur. Tab. VIII. Fig. 21.

Solutio.

Poſita diſtantia $CE = b$, ſit maſſa terrae $= C$, corporisque $E = E$ ita vt in diſtantia quacunque $= d$, ſit vis attrahens terrae $= \frac{C}{dd}$ corporis vero $E = \frac{E}{dd}$. Conſideretur iam fluidi elementum quodcunque in Z, cuius denſitas ſit $= q$ et preſſio $= p$; ac vires acceleratrices quibus hoc elementum vrgetur perpendi oportet. Vocentur diſtantiae $CZ = v$ et $EZ = u$, vt poſito angulo $ECZ = \Phi$, ſit $uu = bb - 2bv\cos\Phi + vv$, ac primo punctum Z ſollicitatur ad centrum C vi $= \frac{C}{vv}$, quae abit in vnitatem ſi Z in ſuperficie terrae ipſa capiatur; huius ergo vis actio eſt $= \int \frac{C\,dv}{vv} = \frac{-C}{v}$ partem totius actionis

W constituens. Tum vero idem elementum Z ad E vrgetur vi $= \frac{E}{uu}$, cuius propterea actio est $= \int \frac{E\,du}{uu} = \frac{-E}{u}$. Quoniam vero centrum terrae quod ad E incitatur vi $= \frac{E}{bb}$, in quiete spectatur, tanta vi singula puncta terrae in directionem contrariam vrgeri sunt censenda, hinc ducta ZY ipsi EC parallela, seu ZX ad EC normali, vt sit $ZY = CX = v \cos.\Phi$, punctum Z insuper sollicitari statuendum est secundum ZY vi $= \frac{E}{bb}$, cuius ergo actio est $= \int \frac{E\,d.v\cos.\Phi}{bb} = \frac{Ev\cos.\Phi}{bb}$. Quamobrem tota actio in puncto Z erit $W = \frac{-C}{v} - \frac{E}{u} + \frac{Ev\cos.\Phi}{bb}$, sicque pro statu aequilibrii habebitur haec aequatio:

$$dp = -q\left(\frac{C\,dv}{vv} + \frac{E\,du}{uu} + \frac{E\,d.v\cos.\Phi}{bb}\right)$$

vbi notandum aequilibrium locum habere non posse nisi densitas q sit vel constans vel a sola pressione p pendeat, vel functio sit binarum quantitatum p et W; tum igitur etiam tam densitas q quam pressio p certis functionibus actionis W aequabuntur. Pro stratis autem aequilibratis aequatio generalis erit $\frac{C}{v} + \frac{E}{u} - \frac{Ev\cos.\Phi}{bb} = \text{Const.}$ Cum autem distantia b prae v valde sit magna, erit per approximationem

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{b} + \frac{v\cos.\Phi}{bb} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2-1)}{2b^3} + \frac{v^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2-3)}{2b^4} + \frac{v^4(35\cos.\Phi^4-30\cos.\Phi^2+3)}{8b^5}$$

hincque colligitur actio tota omissis constantibus:

$$W = \frac{-C}{v} - \frac{Evv(3\cos.\Phi^2-1)}{2b^3} - \frac{Ev^3\cos.\Phi(5\cos.\Phi^2-3)}{2b^4} - \frac{Ev^4(35\cos.\Phi^4-30\cos.\Phi^2+3)}{8b^5}$$

existente $dp = -q\,dW$. Notandum autem est si semidiamidiameter terrae vocetur $= k$, fore $\frac{C}{kk} = 1$, ideoque $C = kk$, tum vero si in E sit luna haberi proxime $E = \frac{1}{80} C = \frac{kk}{80}$, sin autem E sit sol eius distantia media a terra existente $= b$, fore $E = \frac{16\, b^3}{390 \cdot 1465^2 \cdot k^3} C = \frac{C\, b^3}{38894140\, k^3}$ ideoque $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{38894140\, k}$ ob $C = kk$, dum pro luna si eius distantia a terra media ponatur $= b = 60\, k$ est $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{17280000\, k}$.

Coroll. 1.

129. Siue ergo in E consideremus siue solem siue lunam, posito $\frac{E}{b^3} = \frac{1}{nk}$ existente pro luna $n = 17280000$, at pro sole $n = 38894140$, erit actio $W = \frac{-kk}{v} - \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} - \frac{v^3 \cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$ et pro aequilibrio habebitur haec aequatio $dp = -q\, dW$.

Coroll. 2.

130. Pro mari ergo si eius densitatem statuamus constantem $q = 1$, vt pressio p definiatur per altitudinem columnae aqueae, fit $p = \text{Const.} + \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3 \cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$; qui postremus terminus tuto omitti potest, vnde pro superficie maris vbi $p = 0$, posito semidiametro $CA = k$ vbi $\Phi = 0$, habebitur aequatio $k + \frac{k}{n} + \frac{kk}{nb} = \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} + \frac{v^3 \cos.\Phi(5\cos.\Phi^2 - 3)}{2nbk}$, vnde colligitur proxime $v = k - \frac{3k\sin.\Phi^2}{2n}$, ita vt fit $CD = k - \frac{3k}{2n}$ existente pro luna $\frac{3k}{2n} = 1\frac{2}{3}$ ped. pro sole vero $\frac{3k}{2n} = \frac{3}{4}$ ped. paris.

Coroll. 3.

131. Pro atmoſphaera autem, ſi in A ſit altitudo barometri $= a$ et denſitas aëris $= b$ ob $q = \frac{bp}{a}$ ſit $l\frac{p}{a} = \text{Conſt.} - \frac{bW}{a}$ ſeu $\frac{a}{b} l \frac{p}{a} = \frac{kk}{v} + \frac{vv(3\cos.\Phi^2 - 1)}{2nk} - k - \frac{k}{n}$. Vbique ergo in ſuperficie terrae vbi $v = k$ erit $\frac{a}{b} l \frac{p}{a} = \frac{-3k\sin.\Phi^2}{2n}$ ſeu $p = a - \frac{3bk\sin.\Phi^2}{2n}$. Quare in A et B barometrum tenebit maximam altitudinem in D vero minimam, differentia exiſtente $= \frac{1}{6000}$ ped. pro luna, at $= \frac{1}{13333}$ ped. pro ſole, quae ergo ſentiri nequit.

Scholion 1.

132. Sole ergo vel luna in E verſante mare tam in A quam e regione in B intumeſcit, in D vero ſubſidit, neque tamen differentia maior foret quam $1\frac{2}{3}$ ped. pro luna et $\frac{3}{4}$ ped. pro ſole, ſiquidem haec luminaria perpetuo eidem loco A imminerent vnde ſi coniunctim agerent, quod ſit tam in coniunctione quam in oppoſitione, maxima maris altitudo ſuperaret minimam fere $2\frac{1}{2}$ ped. Cum autem ambo luminaria continuo ab oriente in occidentem progrediantur, facile intelligitur antequam aquae in A et B confluere queant, luminaria iam vlterius eſſe promota, vnde fit vt in quoque loco aqua tardius intumeſcat, quam ſol vel luna per eius zenith vel nadir tranſierit, idque eo magis, quo maiora impedimenta affluxui obſtent, veluti ſi per freta vel loca minus profunda tranſire cogatur. Tum vero

vbi

vbi affluxus iste maiori celeritate contingit, ob impetum conceptum fieri potest, vt aqua ad multo maiorem altitudinem eleuetur, quam pro ratione aequilibrii: cum enim tantum aquae affluat, quantum ad insignem maris tractum tumefaciendum sufficeret, si mare subito littoribus in angustum spatium coarctetur, omnis aqua eo affluens ad insignem altitudinem ascendere debebit, quemadmodum satis nota aestus marini phaenomena declarant.

Scholion 2.

133. Videamus etiam accuratius, quemadmodum atmosphaera a tali actione afficiatur, et quanta in ea ascendendo vbique densitas et pressio sit futura. Terrae igitur superficiem sphaericam assumentes, cuius radius sit $= k$, si in loco quocunque a recta C E angulo $= \Phi$ remoto per altitudinem $= s$ ascendamus vt sit $v = k + s$, ex aequatione supra inventa colligimus fore proxime $p = a - bs - \frac{3bk\sin.\Phi^2}{2n}$, dum scilicet altitudo barometri in A statuitur $= a$, et aëris densitas $= b$, mercurii densitate existente $= 1$. In altitudine ergo ista s densitas aëris erit $q = \frac{bp}{a} = b - \frac{bbs}{a} - \frac{3bbk\sin.\Phi^2}{2na}$, vnde si in hoc loco columnam aeream consideremus cuius basis sit $= ff$, massa aëris in ea contenta erit $= ff\int q\,ds = ff(bs - \frac{bbss}{2a} - \frac{3bbks\sin.\Phi^2}{2na})$. Talis ergo columna in A vel B constituta continebit quantitatem aëris $= ff(bs - \frac{bbss}{2a})$,

at

at ſimilis columna in D quantitatem aëris $= ff(bs - \frac{bbss}{2a} - \frac{3bbks}{2na})$ ex quo illa hanc ſuperat quantitate $= \frac{3bbffks}{2na}$. Quare neceſſe eſt vt inſignis portio aëris in loca A et B affluat, in regionibus D autem atmoſphaera minuatur, vnde in aere ſimilis motus reciprocus atque in mari oriri debebit neque tamen barometrum in A vel B hoc aëris augmentum indicabit, propterea quod ob vim ad E vrgentem grauitas aëris eo congeſti diminuitur. Quanta autem celeritate aër verſus loca A et B affluat, dum luminaria ab E promouentur, hinc minime definire, neque etiam probabili modo coniectare licet, cum iſta quaeſtio theoriam aequilibrii longe tranſcendat. Quae autem hactenus de aequilibrio fluidorum ſunt tradita omnino ſufficere videntur omnibus quaeſtionibus huc ſpectantibus euoluendis: neque propterea vlteriori explicationi immoror ſed potius progredior ad principia motus fluidorum ſtabilienda, quae multo maiorem curam ac diligentiam requirunt.

PHYSICA.

PHYSICA.

DE CALORE ANIMALIVM

DISSERTATIO PHYSICA EXPERIMENTALIS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Habent corpora terreſtria ſuum calorem, qui per orbem terrarum diſtributus, vti per totum Planetarum ſyſtema eſt, ita vt nullus locus et nullum corpus, quod omni calore et igne careat, eſſe videatur. Facile hinc iudicari poteſt, quid de frigore abſoluto, quod nonnulli ſomniant, ſit habendum. Fac dari eiusmodi locum et corpus quod omni calore et igne plane careat, quomodo igitur eiusmodi frigus abſolutum cognoſci poteſt et determinari? Summum frigus, quod in his terris adhuc innotuit, eſt illud, quod ego primus arte produxi, dum hydrargyrum congelare animum induxi, et reuera congelaui, non multum vltra ſexcentos gradus ſcalae Delilianae haberi poteſt; ſed multo maiorem frigoris gradum eſſe poſſibilem, nemo facile dubitabit, qui vero determinabilis non videtur. Eodem modo ſummi caloris et ignis gradus determinatio non eſt in poteſtate, ſed de hoc alias. Ceterum

rum corpora orbis terrarum non aequalem habent calorem. Huc ſunt referenda corpora vita praedita, praecipue corpora animalia. Habent enim animalia, ſi non omnia, pleraque tamen, calorem quendam additiuum ſeu addititium, quem quoque vitalem, inſitum et innatum vocare ſolent. Hic calor omnino mirabilis, et omni attentione dignus merito reputandus eſt, vti quoque ſemper a viris eruditiſſimis eſt reputatus. Nam in diuerſis animalibus deprehenditur diuerſus, maior, minor et vix ac ne vix quidem ſenſibilis. Deinde hic calor admiratione et conſideratione dignus eſt quod conſtans ſit, ſcilicet idem caloris gradus diuerſo tempore et loco, cum hac tamen reſtrictione vt corpus animale ſanum ſit et maneat. Nam calor animalis non manet conſtans, ſi corpus in morbum et ſtatum praeternaturalem incidit, et extraordinarium. In animi deliquiis vix ac ne vix quidem calor eſt ſenſibilis, contra ea in febribus ardentibus calor hic incrementa maiora et minora ſumere ſolet, vt experimenta demonſtrarunt, vt alia attentione digna nunc taceamus. Progrediamur igitur ad ipſa experimenta, quae animalium calorem addititium demonſtrant. Hunc calorem eſſe exploratum thermometris ordinariis facile adparet, quum gradus caloris tanti non ſit, vt aliis inſtrumentis opus ſit, qualia ſunt Pyrometra, Machina Mortimeri, qua conſtat multo maiores caloris gradus metiri, quam thermometris ordinariis, quae praeterea etiam ad huius

ius generis experimenta instituenda non apta et adcommodata sunt. Vsi sumus thermometris vtplurimum Delilianis, in quibus vti constat o siue ziphra indicat aquae bullientis calorem, et numerus 150. punctum congelationis aquae. Longitudo thermometri erat mediocris, scilicet octo aut nouem pollices parisienses vix excedens, longiores enim minus commode tractari possunt. Bulbus thermometri erat sphaericus, vt commode inseri in cauitatem animalis factam posset, et generatim melius adplicari. Plerumque vno eodemque thermometro vsi sumus, nisi necessitas illud mutare coegerit, v. c. dum fractum fuit, aut aliud vitium contraxit. Quum constet thermometra ceteris paribus sub eadem barometri altitudine impleri debere si concordare debent; quae adhibui omnia, impleta sunt sub altitudine fere media 28. sc. pollicum parisiensium. Porro et haec cautio in explorando animalium calore est obseruanda, vt sufficiens adhibeatur tempus. Sin minus, gradus caloris quoque erit minor. Sufficiens tempus illud erit iudicandum, si mercurius non amplius adscendat, sed subsistat, qua cautela neglecta experimenta non possunt non fieri vitiosa, vti iam multa id genus vitia in obseruationes et experimenta irrepsere, et dissensum in experimentis fecere.

Situs oculi quoque recte comparatus esse debet i. e. ne supra et infra punctum thermometri obseruandum sit constitutus. Alias facile vnius alteriusque gradus error, vel in defectu committi potest, vel

 in

in excessu. Quam exactissime igitur fieri potest, situs oculi cum puncto thermometri conuenire debet. His cautelis obseruatis experimenta mea thermometro Delisliano rite constructo institui. Notaui gradum, vbi subsistebat mercurius in thermometro, qui igitur summus caloris gradus caloris animalis erat. Primum experimenta fecimus ad hominis sani calorem explorandum quam adcuratissime. Inserui vtplurimum thermometrum vel in os meum vel in os aliorum, et tam diu ibi detinui, donec hydrargyrus in thermometro non amplius adscenderet; quo facto obseruaui mercurium circa numerum 96, et 95 stetisse scalae Delilianae. Conuenit numerus hic 95 cum numero 98, et 96 cum numero $97\frac{1}{5}$ scalae *Fahrenheitianae*.

Fahrenheitius iam calori humano attribuit sc. 96° scalae thermometri sui. Conuenit hic numerus cum gradu $96\frac{2}{3}$ thermometri Delisliani. Differentia igitur inter obseruata mea et inter *Fahrenheitiana* non magna est, scilicet vnius gradus aut ad summum duorum graduum. Multo maior vero differentia reperitur inter mea et aliorum nonnullorum obseruata, dum 91. 92. 93. 94 et 95. scalae *Fahrenheitianae* calori humano adsignarunt. Quum igitur hi gradus omnes multo minores sint his, quos ego per innumera reperi experimenta: facile iudicari potest, tempus non sufficiens esse adhibitum donec sc. mercurius non amplius adscenderet, et mercurius calorem perfecte adsumeret. Calor vrinae fere con-

conuenit, debitis cautelis adhibitis, cum calore indicato, vnum tamen gradum et ad summum $1\frac{1}{2}$ hic calor vrinae maior obseruatus mihi est, qui gradus sine dubio gradus caloris viscerum adiacentium est. Nam a calore sanguinis procul dubio pendet calor partium corporis humani et animalium calidorum; hinc mirum non est omnes corporis humani partes et animalium fere aequalem habere calorem. Cautio in calore vrinae explorando haec inprimis est necessaria, vt vitrum seu vas calorem vrinae iam fere possideat, vas enim nondum sat calidum sistit gradum caloris minorem. Obtinetur autem haec temperies optime, si experimentum demum instituatur, postquam iam vitrum semel vel aliquoties vrina recens missa, fuit imbutum. Quodsi igitur vrina animalis recens tam facile haberi posset, quam hominis, expedita esset methodus calorem viscerum animalium adcurate explorandi. In quibusdam difficultas non adeo magna reperitur. Sunt haec experimenta instituta tempore diuersissimo et loco in diuersissimis subiectis; pueris, puellis, adultis, et semper calorem fere eundem obseruaui, si vnum et ad summum $1\frac{1}{2}^{\circ}$ gradum sed raro, excipias, posita scilicet sanitate hominis. Hoc quoque de diuerso sexu intelligi debet. Nam differentia tam in ore, quam in vrina saepius vix sensibilis deprehendebatur. Est hic gradus caloris corporis humani minimus inter corpora animalia quadrupedia, vti experimenta mox adducenda demonstrabunt. Calorem

rem animalium quadrupedum ſequentium fere exploranimus. Calorem vituli et bouis; porcelli et ſuis; capellae et caprae; agni et ouis; canis, felis etc.

Ad calorem vituli quod attinet vt ab eo incipiam, eum reperimus 90. graduum thermometri noſtri ſeu ſcalae delilianae, tam in ſanguine recens effluente, quam in abdomine ſecto. Hic gradus 90. conuenit cum numero 104. ſcalae *Fahrenheitianae*. Quod ſi igitur calor hominis ponatur aequalis 96. *Fahrenheitii*: ſequitur, vt hic gradus caloris ſuperet calorem hominis 8. gradibus, vel ſi ponatur 97. ſeptem gradibus maior erit calor vituli quam hominis.

Eundem caloris gradum quoque reperi in porcello ſcilicet aequalem 90° noſtrae ſcalae. Ergo et hic gradus caloris maior erit 8 vel 7 gradibus caloris hominis.

Calorem capellae tam in ſanguine recens effluente, quam in abdomine ſecto reperi = 92° ſcalae noſtrae, qui gradus conuenit cum numero $101\frac{1}{2}$ ſcalae *Fahrenheitii*. Eſt igitur hic caloris gradus minor, quam antecedens vituli et ſerculi, maior tamen humano $4\frac{1}{2}$ gradibus Fahr. Calor agni et ouis a calore capellae et caprae parum aut nihil omnino differebat. Calorem canium et felium non exploraui per ſectionem viuam, vti in antecedentibus animalibus feci, ſed tantum inter femora. Inveni

veni calorem felis = 92 ſcalae noſtrae eoque = $101\frac{1}{2}$ Fahr. Eſt igitur et hic calor, vti capellae, $4\frac{1}{2}^{\circ}$ Fahr. maior humano. Sed ſolet calor internus viſcerum et ſanguinis 2. gradibus maior eſſe, ſi ſecentur; addendi igitur adhuc erunt duo gradus, ita vt calor ſanguinis et viſcerum felis maior humano cenſendus ſit $6\frac{1}{2}$.

Calorem canis vel canum inter femora reperi = 93. thermometri noſtri, qui caloris gradus conuenit numero ſcalae Fahrenheitianae $100\frac{1}{2}$. Quodſi et hic duo gradus addantur, calor internus viſcerum et ſanguinis canum erit cenſendus = $102\frac{1}{2}$ ideoque maior humano $6\frac{1}{2}$ vel certe $5\frac{1}{2}^{\circ}$.

Haec hic ſufficiant de animalibus quadrupedibus, quorum calorem exploraui et explorandi occaſionem habui, alia alio tempore.

Quodſi haec experimenta recte conſiderentur, et comparentur, patebit primum calorem hominis omnium quadrupedum exploratorum eſſe minimum. Nam minor gradus quam 96. et noſtri thermometri, et Fahrenheitii, calor horum animalium non eſt deprehenſus, ideoque non minor calore humano. 2). Porro gradum 90. noſtri thermometri eſſe maximum in animalibus quadr. quorum calor mihi exploratus eſt = ſcilicet 104. ſcalae Fahrenheitianae. Non autem exiſtimandum eſt hunc gradum 90. ſiue 104. Fahr. caloris, eſſe maximum omnium quadrupedum, neutiquam, dantur ſine dubio maiores;

qui vero adcurate explorati non ſunt, vti quoque qui ſit maximus, nondum conſtat. Sed de his alias. Differentia caloris inter haec animalia non adeo magna eſt, ſcilicet tantum graduum 8. Fahr. a 96 ad 104. f.

At enim vero differentia caloris multo maior eſt in auibus. Hae enim ſuperant calorem quadrupedum, vti ex ſequentibus patebit experimentis. Aues varii ſunt generis, quarum calorem exploraui, vt anſeres, gallinae noſtrae et indicae, gallopaui, anates, columbae et varii generis aues minores. Calorem anſerum inueni in abdomine ſecto et ſanguine $= 87$ ſcalae noſtrae, qui numerus conuenit cum numero $107\frac{3}{5}$ ſcalae Fahr. Eſt igitur hic gradus caloris maior $10\frac{1}{2}^{\circ}$ F. calore humano, et calore quadrupedum, quos exploraui, maior $3\frac{1}{2}$ Fahrenh. Nam 104° F. maximus caloris gradus eſt, quem deprehendi inter animalia quadrupedia, qui numerus conuenit cum 90. ſcalae noſtrae. Eundem caloris gradum quoque inueni in diuerſis aliis ad auium genus pertinentibus, vt gallinis et gallis gallinaceis in abdomine ſecto et ſanguine.

Eundem quoque caloris gradum conuenire obſeruaui anatibus, gallopauis et gallinis indicis ſeu Africanis, columbis, ſcilicet in abdomine ſecto et ſanguine. Parua enim aut nulla differentia reperta eſt mihi inter calores harum auium maiorum. At enim vero mirandum videtur aues minores maiorem

rem possidere caloris gradum vtplurimum. Reperi nempe in duabus auibus minoribus rubeculis dictis, gradum caloris = 84 nostri thermometri.

Conuenit hic numerus cum numero 111 scalae Fahr. aut propius $111\frac{1}{5}$. qui est maximus caloris gradus, quem inter aues adhuc obseruaui. Superat igitur hic caloris gradus calorem humanum 15 fere gradibus, et quadrupedum qui est = 90 = 104 septem gradibus. Sub alis auium duorum graduum minorem reperi, vtplurimum calorem, quam in sanguine et abdomine secto, vti inter femora quadrupedum esse quoque solet.

Est igitur differentia caloris inter ipsas aues sat parua, scilicet trium graduum nostri thermometri, et inter aues maiores fere nulla, licet hic calor, si cum calore hominum et animantium quadrup. comparetur, omnium sit maximus.

Sed veniendum nunc est ad animalia frigida sic dicta, quae secundum experimenta nostra, omni calore addititio carent, sed tantum calorem habent medii ambientis, fluidi aquae et aëris. Huc pertinent primum potissimum pisces branchias agitantes, et pulmone carentes.

Pisces varii generis fuere, circa quos cepi experimenta, vt lucii, anguillae, bramae (Braxen) carpiones siue cyprini, lampretae et alii. Omnes hos pisces calore additiuo carere, innumeris reperi experimentis, adcuratissime institutis. Immisi pisces in

 diuer-

diuersas aquas, diuersae temperiei, et semper obseruaui piscem eam temperiem aquae adsumsisse, in qua satis diu fuit detentus, quamuis differentia temperiei sat magna erat.

Summa cautio est adhibita, quum pisces aperirentur, ne calor manus afficeret thermometrum; foramen feci tantum in ventre piscium, vt bulbus thermometri inseri possit, quo facto semper obseruaui eundem caloris gradum fuisse piscis, ac aquae ambientis.

Non igitur videtur dubitandum, quin si pisces dicto calore interno plane non careant, is tamen certe non sit sensibilis et obseruabilis, vti in plantis, arboribus et succo arborum. Diuersa autem ratio caloris animalium marinorum et piscium pulmones habentium est. Haec enim aeque ac animalia terrestria suum habent calorem addititium, vti delphinus, canis marinus. Phocae enim calor 103 tribuitur, ideoque 7 gradibus F. maior humano. Par est ratio insectorum, licet congregata calorem quendam efficere possint, qui tamen ad calorem internum referendus proprie non est. Porro ad animalia calore additiuo carentia quoque pertinent ranae quas exploraui.

Circa ranas quoque plurima eepi experimenta, quae eodem modo institui, quo circa pisces. Scilicet, aqua in quam immisi ranas, erat diuersae temperiei. Pro hac diuersitate temperiei et caloris, ranae quoque diuersum possidebant calorem, et ad-

adſumebant. Sed et hic, vti in piſcibus, magna opus eſt cautione, ne quid alieni caloris immiſceatur, et vitium ſubreptionis committatur, a quo procul dubio non ſunt immunes, qui ranis aliquot caloris interni gradus tribuere, independentes a fluido vel generatim medio ambiente, aëre et aqua etc.

Denique ad animalia calore additiuo carentia ſunt referenda animalia alias calida, ſed hieme ſomno ſepulta, eoque vita minima tantum praedita. Mures alpini, vti marmora hieme iacent. Sic in aliis quoque animalibus hieme dormientibus, nullum calorem vitalem obſeruare licet. Nullam hic quidem propriam experientiam et propria experimenta ſequi poſſum; ſtudebo tamen et meis obſeruationibus et experimentis, ſi fieri poterit, haec confirmare. Alia nunc praeterimus, quae in poſterum forſitan addemus et cum aliorum obſeruatis, adcurate comparabimus. Nam facile intelligitur haec experimenta a me facta et recenſita, omnia plane noua, et primum a me inſtituta non eſſe.

Inſeruient tamen etiamſi antea facta, vti generatim experimenta de nouo inſtituta ſeu repetita 1) ad confirmanda antecedentia; 2) vel ad corrigenda et emendanda; 3) ad perficienda; 4) falſa et erronea refutanda, et infirmanda; 5) dubia et controuerſa certa reddenda, et decidenda, quaeque ſibi contraria, conciliandа. Experimenta vero non repetita, ſemper minorem habere fidem quam repetita cenſentur, idque iure meritoque.

Quae in antecedentibus adduxi experimenta, potiſſimum pertinebant ad hominem animaliumque ſanorum calorem internum inuariabilem. Calor vero eſt variabilis et diuerſus in hominum et animalium morbis, maior ſcilicet et minor pro varietate morborum; maior in febribus ardentibus, minorque in animi deliquiis. Hinc thermometra iam ab antiquis inde temporibus ad ſtatum valetudinis explorandum ſunt adhibita, vt a Sanctorio et aliis; variabilis tamen hic calor praeternaturalis ad certum tantum terminum deprehenditur adſcendere; praeſertim in febribus ſcilicet ad gradum 105 et 106. 7 et 8. thermometri Fahr. Hic notatu dignum eſt, in febribus exiſtente etiam paroxismo frigoris duos et tres caloris gradus reperiri plures, quam in ſtatu ſanitatis hominis. Sed haec ſunt diligentius adhuc excutienda, pauca enim adhuc ſunt huius generis experimenta genuina, in plerisque ingentia ſubreptionis vitia commiſere, dum non ad legem thermometri, ſed ad ſenſum, calorem determinare conati ſunt. Hinc gradus caloris tradidere tam magnos, vt manifeſto viuere homines et animalia non poſſent amplius.

Suntne igitur certi determinatique gradus caloris, quos tolerare poſſunt homines et animalia, et quos ferre nequeunt ſed moriuntur et pereunt

calore

calore vel frigore? Sunt omnino; ſed in diuerſis ſubiectis diuerſi. Hominum alii maiores, alii minores caloris et frigoris gradus ſuſtinere poſſunt, prouti conſuetudo, altera natura vel ſuffragatur, vel minus.

Vtplurimum tanti caloris gradus tolerantia illis tribui ſolet, quantus eſt ille, qui eorum ſanguini conuenit.

At enim vero multo maiorem caloris gradum homines et animalia perferre poſſunt, certe ad breue tempus, et pro conſuetudine maiore et minore, tam in balneis, quam in locis calidioribus. *Richmannus* pro ſua conſuetudine ferre potuit in tepidariis gradum 125. Fahr. vti et mihi, quum hoc experimentum faceret dixit, et ſcripto quoque annotauit.

Calor in tepidariis ruſticis ordinarie eſſe ſolet 88 noſtri thermometri, qui eſt aequalis $106\frac{1}{2}$ Fahr. Et ſi ſunt calidiſſima calor deprehendi ſolet 80°, eſt hic gradus aequalis 116 Fahr. Gradus igitur caloris, quem *Richmannus* ſuſtinuit, maior adhuc eſt nouem gradibus. In calore tepidariorum recte indicando reſpiciendum eſt ad altitudinem, in quo thermometrum eſt ſuſpenſum. Nam quo maior haec eſt, eo maior quoque eſſe ſolet et debet caloris gradus, quum ſurſum tendat calor, vti conſtat. Bene tolerari ſaepius poteſt calor inferior, quum paullo

ſupe-

ſuperior ſuſtineri nequeat vti ipſe expertus in caſis ruſticorum in Liuonia ſum. Non potui ibi erectus ſtare, ſed ſedere debui, quo modo calorem alias mihi intolerabilem facile toleraui. Par eſt ratio animalium. Poſſunt et haec maiorem caloris gradum perferre, quam eſt calor ſanguinis eorum. Canes in vaporariis incluſi vario caloris gradu periere 115. 120. 146. Cyprini viuere poſſunt in aqua calida 92 et 94. In gradu 111. Fahr. piſces mortui, ranae tamen adhuc viuere poſſunt.

In calore = 146. Fahr. paſſer mortuus eſt intra ſeptem minuta, et in eodem calore paullo poſt periere canis et felis. Multa hic ſuperſunt vel plane non determinata vel non adcurate. Difficilius multo determinari poteſt gradus frigoris, quem homines ferre poſſunt et animalia et quibus frigoris gradibus moriuntur et pereunt. Et hic conſuetudo multum facit. Pueri ruſticorum hic maiorem frigoris gradum facile ferre poſſunt, quam alibi. Diverſo frigoris gradu et homines et animalia moriuntur et pereunt, et ſub diuerſis circumſtantiis, quarum omnino ratio eſt habenda. Aues migratoriae et quae ſe occultant cum aliis animalibus hieme dormientibus, minimum frigoris gradum ſuſtinere poſſe videntur; id quod etiam de inſectis valet, quae quidem maximum caloris, ſed minimum frigoris gradum ferre poſſunt. Eſt et hic magnus campus nondum cultus et excultus. Pereunt plantae diuer-

ſo

ſo frigoris gradu, pereunt homines et animalia, itidem diuerſo frigoris gradu, qui gradus aut nondum, aut non ſatis adcurate ſunt determinati, vti quoque re vera tam facile determinari non poſſunt. Plantae quoque poſſunt maiorem et minorem frigoris gradum ſuſtinere. Vnde diuiſio inter plantas calidas et frigidas nata eſt.

Denique quaeritur, vnde ſit hic animalium calor internus, additiuus, quum non pendeat a mediis ambientibus et circumſtantiis? Sententiae hic in magna ſunt poſitae varietate, quarum nulla ſua caret difficultate, hinc haec quaeſtio ſemper pro difficillima enodatu eſt habita. Alii potiſſimum ad fermentationem quandam in ſanguine prouocant, alii ad electricitatem, alii ad motum ſanguinis progresſiuum. Alii ſufficere hic putant hunc animalium calorem addititium adpellare innatum, quaſi hac ratione intelligerentur ortus et geneſis caloris in ſanguine et partibus animalium. Eſt qualitas hoc ſenſu obſcura Scholaſticorum calor innatus.

Qui ad fermentationem prouocant ſibi videntur actionem caloris in efferueſcentia et conflictu partium ſanguinis potiſſimum inuenire. Philoſophari hi quidem non male viderentur, modo eiusmodi motus inteſtinus demonſtrari poſſet. Hunc vocare occultum rem non conficit, et decidit vtrum eiusmodi motus fictus ſit an realis.

Non melius hic philoſophari videntur qui cauſſam caloris huius in electricitate poſitam exiſtimant. Sed et hoc gratis afferi videtur, quod vero pluribus oſtendi poſſet, ſi ſpatium et ſcopus hic permitteret. Alias hypotheſes lubens praetereo.

Optime igitur omnium omnino philoſophari cenſendi ſunt, qui rationem caloris animalium in motu ſanguinis progreſſiuo quaerunt, attritu et frictione. Nam diminuto motu ſanguinis, diminuitur quoque calor ſanguinis et animalis partium, vti euidentiſſime, animae deliquia hominum, et, illa animalia oſtendunt et demonſtrant, quae hyeme dormire et ſomno ſepeliri ſolent. Nam in his vita minima tantum ineſt, et motus ſanguinis minimus, vix ac ne vix quidem ſenſibilis. Iacent enim quaedam, vt mures alpini ad inſtar marmorum. Par ratio eſt omnium aliorum in hibernaculis ſuis dormientium et ſomno ſopitorum animalium. Concludendum hinc omnino videtur, vt alias; ceſſante cauſſa caloris animalium interni, ceſſare et ipſum calorem tanquam effectum et ceſſante effectu, ipſam quoque cauſſam ceſſare debere. Si motus aquae celeris et aliorum fluidorum per canales ſenſibilem caloris effectum non producunt, videtur potiſſimum hoc inde eſſe, quod non ſatis ſint heterogenea, vti ſanguis animalium eſt, quae attritum et frictionem ſatis validam efficere queant. Sed ſubſiſtendum hic mihi eſt, plura et ſupple-

ſupplementa dabo in poſterum. Ceterum, vti in tota ſtructura et conformatione machinae hominum et animalium, Dei omnipotentia, ſapientia, et bonitas eſt admiranda, ſic inprimis quoque in hoc, quod vitam, ſanitatem, quin ſuauitatem vitae dependentem a calore interno et motu ſanguinis per cor aequabili fecerit, turbato enim hoc motu, animi quoque tranquillitas turbari ſolet.

DE
OSSIBVS SIBIRIAE FOSSILIBVS
CRANIIS PRAESERTIM RHINOCEROTVM ATQVE BVFFALORVM, OBSERVATIONES.

Auctore
P. S. PALLAS.

Quamprimum Musei Ill. Academiae curam gerere atque diuitias perlustrare coepi, statim adtentiore examine digna mihi visa sunt *ossamenta fossilia* animalium exoticorum, quae ex omnibus Imperii Ruthenici, praesertim e borealibus Sibiriae regionibus aduecta, maximo hodie numero et infinita paene varietate Museum illud ornant. Sunt ea maximam partem Elephantorum variae magnitudinis ac aetatis reliquiae, numeroque satis probant immensam horum animalium copiam, quae per vniversam borealem Asiam, a patria elephantorum hodierna remotissimam, sparsim defossa iacent. Quanquam enim, posterioribus maxime saeculis, increbrescente curiosorum in conquirendis naturae miraculis industria, in Germania (*a*), Italia (*b*), Gallia

(*a*) Sic inclaruerunt ossa fossilia prope Canstadium in Sueuia reperta, de quibus egerunt *Dav. Spleissius* in *Oedipo osteologico. Scaphus.*

lia (*c*), Anglia (*d*), Polonia (*e*), imo extrema quoque Islandia (*f*) vario tempore variisque in lo-

Iii 3 cis

Scaphuſ. 1701. 4. Io. Chr. Harenberg in tractatione *de Lilio lapideo ſ. Encrino Guelpherbit.* 1729. 4. *c. f.* et I. Sam. Carl in *Lapide Lydio philoſophico-pyrotechnico ad oſſium foſſilium docimaſiam analytice demonſtrandam adhibito. Franc. ad M.* 1704. Dein famoſum eſt ſceleton elephantinum in collis arenoſi intemeratis ſtratis repertum prope *Bergtonna* inter Erfurtum et Longoſaliſſam Thuringiae; de quo conſule I. Geo. Hogervm in *Miſcell. Nat. Cur. dec.* 3. *an.* 7, 8. *p.* 294. *obſ.* 175. praeſertim vero Gvil. Ern. Tentzelivm in *epiſtola ad Anton. Magliabecchium Goettingae* 1696. 4. poſteaque *Ienae* 8. germanico idomate edita; vt et in *Act. anglic. vol.* 24. *n.* 234. Vt alia praeteream, v. gr. oſſa et dentes veroſimillime elephantina Manhemii ex antiqua ripa Nicri fluuii effoſſa, de quibus Ioh. Dan. Geyer. in *Miſc. N. C. dec.* 2. *an.* 6. *p.* 176. *obſ.* 85. et imprimis celebrem cauernam ſyluae Hercyniae, prope Elbingerodam, cui Bavmannianae nomen, de qua Conr. Gesnervs in libello *de figuris lapidum p.* 155. 157. aliique.

(*b*) In Italia Auctores perpauci oſſium foſſilium memorias ſuppeditant; aliqua tamen habent recentiorum nonnulli, qui nunc ad manus non ſunt, et Hier. Ambr. Langemantel in *Miſc. N. cur. dec.* 2. *an.* 7. *p.* 466. *obſ.* 234.

(*c*) Carolo VII. imperante, circa an. 1456. reliquias elephanti in Gallia effoſſas, aliaque Gallorum de oſſibus gigantum prodita eodem referenda, aſſerit Moanevs in *Act. angl. vol.* 34. *n.* 403. Recentiora Eboris in Gallia effoſſi, etiam in Turcheſiam mutabilis, exempla vide apud Ill. Bvffonivm *hiſt. nat. vol. XI. ed. min XXII. p.* 209. *ſeqq.* et oſſium aliorum *p.* 208. 227.

(*d*) In ducatu Northamptonienſi ex argilla effoſſa fragmina dentium elephantinorum exſertorum, nec longe ab eo loco inventum cis eruta fuerint ſceleti elephantini, gigantea fragmenta et ebur foſſile in omnibus fere apud exteros Muſeis occurrat, nulla tamen vnquam regio tot tanta-

ventum molarem MORTONVS habet *nat. hiſt. of Northamptonſ. p. 252.* Et in Staffordiae comitatu in marga repertam maxillam elephanti ROB. PLOT *nat. hiſt. of Staffordſ. p. 78.* Vnaque cum iſtis Gloceſtriae et Londini repertas reliquias eiusdem belluae, e proprio Muſeo recenſet Ill. SLOANE l. c. In Hybernia quoque occidentali, quatuor pedibus ſub terra profunditate, ſupra ſtratum e ramis et herbis reperta fuerunt oſſa magna, friabilia, cum quatuor maximis dentibus veroſimillime elephantinis; obſeruantibus NEVILLE et TH. MOLINEUX in *nat. hiſt. of Ireland Dublin. 1726. 4. p. 128.*

(*e*) In Polonia lectum Ebur foſſile memorat CONR. GESNER *de fig. lapid. p. 157.* et circa Gedanum KLEIN *hiſt. nat. piſcium Miſſ. II. p. 29-32.* ad Viſtulam haud procul a Varſauia RZACZINSKI *hiſt. nat. cur. Polon. p. 1, 8.* qui etiam varia ex aliis auctoribus collegit, praeſertim circa antra ſic dicta draconum Liptovienſia Hungariae, oſſibus variis, etiam elephantinis, ſparſa, de quibus autopta narrat, et dentes ibi lectos vrſi vel leonis caninos celebrat BRVCKMANNVS *epiſt. itiner. cent. I. ep. 77. p. 12. ſeq.* Aliis quoque Pannoniae in locis reperta varia ex elephanto, coſtas, vertebras, dentes exſertos atque molares, tibiam, maxillam, recenſet et partim delineat, Ill. Comes MARSILLI in *Danub. Pannon. Myſici vol. II. Part. I. p. 73. tab. 28-31.* Contra *quem* vero et GOROPIVM in Belgio a Romanis elephantorum reliquias deriuantes pugnat, et diluuiana eſſe maūult SLOANEVS *l. c. p. 510. ſeq.*

(*f*) Exemplum rariſſimum reperti in Islandia molaris elephantini prodidit BARTHOLINVS *Actor. Hafnienſ. vol. I. p. 83. obſ. 43.* Forſan et huc aliqua faciunt ab OLIG. IACOBAEO recenſita.

tantaque in hoc genere grauissimarum et antiquissimarum telluris mutationum monumenta prodidit, ac Sibiria nostra, cuius subterraneum Ebur, quamquam hodienum nonnisi casu riparumque ad maiora flumina ruinis detegi solaet, ea tamen sic quoque copia legitur, vt inter merces indigenas non vltimum obtineat locum, illud praesertim, quod in terris hyperboreis aeterno gelu rigentibus repertum, plane incorruptum et tornatili operi adhuc aptum est.

Miraretur nemo, si in Italia, Hispania, Galliisque solis inuenta fuerint elephantina ossa, quum in has regiones Punicis maxime bellis, et in Italiam Tarentino quoque, imo et ad luxuriam spectaculorum, insignes horum animalium greges adductos fuisse, ibique periisse, ex historiis constet. Ad similes itaque casus, post explosam vulgi in Sibiria de bellua subterranea maxima (*Mamont*) fabulam (*g*), multi etiam docti viri ossamenta elephantorum Sibirica referre haud dubitarunt: animalia illa modo a Iudaeis, quos *Rudbeckius* in borealem Asiam migrasse

(*g*) De his vulgi in Sibiria ineptiis imprimis euoluendi sunt Ill. BASIL. NICETAE fil. TATISCHTSCHEV in *Actis Vpsaliensibus* et GMELINVS in *Itinerario Sibirico*. Deinde vero YSBRANDVS IDES atque STRAHLENBERGIVS. Vocabulum *Mamont*, quod Belluae fabulosae tribuitur, et vnde Russi ossa fossilia *Mamontouaia kost* appellarunt, verosimillime Tataricae originis est, quorum lingua: *mama* terram significare accepi.

grasse somniauerat, modo ab Alexandro M. imo a recentioribus quoque Asiae domatoribus, Tschingischano et reliquis Mongalorum imperatoribus (*h*) in longe dissitas hasce regiones deducta fuisse perhibentes; quorsum tamen illorum neminem vnquam penetrasse, multoque minus tot Elephantos viuos deducere potuisse, satis constat. Quandoquidem vero in media Italia, vbi tot circensibus maxime ludis elephantos periisse scimus (*i*), subterranea eorundem vestigia nonnisi rarissime detecta fuerint; contraque elephantina, cum ipso, apud omnes tamen facile populos pretioso, adeoque non defodiendo aut temere abiiciendo ebore, saeculi iam fere spatio, per vniuersam, qua ad extremum orientem atque boream

(*h*) Cel. BAYERVS hanc viam multis argumentis munire adlaborauit, et in Mungalorum quidem patriam et australiorem Sibiriam elephantos facile perducit, per bella Mungalorum, si fides historiis, cum Indis et Tataris gesta. Conf. *Petersburg. Anmerk. über die Zeitungen an. 1730. n. 90. p. 359. seq.* Vbi tamen simul improbatur haec quoque sententia, ob immensum dentium eburneorum in Sibiria iam ab vltimo inde saeculo quotannis lectorum, cui numero elephantorum bellicorum vniuersae Indiae exercitus sufficere haud potuisset; nedum si perpendas multo maiorem ossium vim in terris intactis vastissimis adhuc latere, quae posteros manet, imo forte nunquam exhaurietur.

(*i*) Testis praesertim PLINIVS *hist. nat. lib. VIII. cap. 6.* vbi L. Metelli pontificis victoria 142. elephantos in Sicilia de Poenis captos et in Italiam transuectos, ibique periisse narrat; cap. 7. variis temporibus in circo exhibitos et confectos enumerans.

ream latissime patet, Sibiriam sese magna copia manifestauerint, longeque maiorem vim, non tantum prope flumina, vbi casu, vti dictum, deteguntur, sed per totam illam continentem terram latere credibile sit; tantum belluarum exercitum in regiones illas inhospitas humana opera deductum non fuisse, sed elephantinum forte genus, temporibus omni traditione humana anterioribus, in his ipsis terris, mitiore tunc certe coelo gaudentibus, atque, si dicere fas sit, soli magis obuersis, diu vixisse multiplicasse, et pereuntium cadauerum ossibus solum ditasse, quidni potius concludamus? Nihil enim nunc moror sententias eorum, qui vel voluntaria obcoecatione miraque pertinacia intra terram genita, cum petrefactis vulgo dictis omnibus, ossa Sibirica putarunt, vel sub diluuii vniuersalis aliusue globi catastrophes tempus, profugos Elephantas, cum reliquis calidioris coeli animalibus, in has terras, ad aliquot millenas leucas ab eorum patria distantes, incredibili cursu contendisse, ibique mersos tandem periisse existimarunt. Cui vltimae opinioni imprimis *I. G. Gmelinus* olim noster fauisse videtur (*k*).

Et tale quidem fuisse quondam borealium regionum, imprimis Sibiriae clima, vt Elephas calidissi-

(*k*) Gmelinvs in *Itinerar. Sibirica vol. I. p.* 157. a cuius opinione haud plane alienus videtur Ill. Bvffonivs.

diſſimi coeli alumnus, et temperatius quoque clima nonniſi aegrius, cum plenaria foecunditatis exſtinctione ferens, ibi viuere atque multiplicare non recuſauerit, praeter eorum numerum hac terra obrutorum, de quo apud omnes conſtat, porro probat elegans BARTRAMII obſeruatio (*l*) de teſtaceis marinis nonniſi calidioris zonae in borealibus hodie terris petrificatorum ſtrata conſtituentibus, quam vndique confirmatam videmus; probant aut probare videntur elephantina ſceleta et hippopotamorum dentes noſtris temporibus in America ſeptentrionali non tantum a Gallico quodam duce (*m*), ſed nuperrime etiam ab Anglis (*n*) lecta. Quum enim certo ſciamus

(*l*) Nempe teſtacea petrefacta in ſeptentrionalis Americae montanis copioſe reperiunda, non ea eſſe, quae hodie in mari alluente ſub eodem latitudinis gradu viuunt, ſed in multo calidiore demum tractu, verſus auſtraliorem Carolinam et Floridam demum occurrere, obſeruauit Acutiſſ. *Barramius* eoque argumento, et repertis in Sibiria oſſibus elephantinis *Burneti* theoriam, de diuerſis antiquae terrae climatibus, confirmari putauit; teſte *Kalmio* in *Iſtnerar. Americ.* (ed. germ.) *vol. 2. p. 281.*

(*m*) Femur elephantinum maximae molis, in Canada repertum deſcribit, et plurimum ſimul ibi repertorum oſſium, interque alia molaris Hippopotami meminit BVFFONIVS *l. c. p. 230 - 233.*

(*n*) De ſceletis complurium elephantorum in montibus Americae borealis ab Anglis nuper inuentis relationem optimi COLLINSONI ad Amiciſſimum SCHLOSSERVM nuper accepi, et vt accurata oſſium in Angliam delatorum detur deſcriptio, valde opto. Famam de oſſibus gigantum immenſae ſtaturae in Penſyluania effoſſis iam acceperat KALM. *l. c. p. 250.*

mus Elephanti atque Hippopotami genus in tota hodie America non reperiri, neque magis, quam reliqua calidiorum Aſiae et Africae regionum animalia, nouo orbi communia eſſe; nulla alia via in Canadam animalia iſta tranſire potuiſſe video, quam ab extrema Aſiae orienti obuerſa extremitate, quam totam eorum pariter oſſamentis ſparſam eſſe videmus, quaeque olim minus forte lato ab America freto diremta fuit. Fateor tamen, rationem non poſſe reddi, quare nec Elephanti, quos in Americam vere transfretaſſe reperta ibi oſſa argumento ſunt, neque alia aeſtuantis zonae, quibus aeque facilis, atque illis erat tranſitus, animalia, frigeſcentibus Americae ſeptentrionalibus, in meridionales plagas receſſerint, ibique ſpeciem propagauerint, vt eorum ſaltem aliqua nouo orbi cum Aſia atque Africa inter tropicos comprehenſis communia hodie obſeruarentur, quod tamen ſecus ſe habet. Lubenter etiam fateor, neque in his, neque circa marina petrefacta per totam continentem terram copioſiſſime diſſeminata, nos certi vnquam quidquam aſſerere poſſe, imo ne hypotheſin quidem vllam fingere, niſi Deum e machina excitando, aut ingenioſa *Burneti*, *Whiſtoni*, *Buffonii* aliorumque de globi noſtri fatis commenta adoptando et ornando.

Ego illa acutioribus ingeniis enodanda relinquo. Ad retractandam vero materiam, a multis auctoribus diligenter agitatam, impulerunt me reli-

 quiae

quiae in intima Sibiria repertae et in Museo nostro depositae *Rhinocerotum*, *Gazellae* indicae, atque immensae staturae *Buffalorum*, quantos hodie nec Africa, neque calidissima India gignit, quique Tauroelephantum nomen, ab antiquis Zoologis immani Aethiopiae ferae tributum, iure sibi poscere videntur. Et has quidem exuuias descriptione tanto magis dignas esse credidi, quo luculentius id saltem euincunt, non elephantas modo, sed alia quoque calidiorum regionum, etiam fera ac indomita, adeoque certe non humanis viribus adducta animalia in his olim terris, vbi nunc eorum ossa supersunt, vixisse et multiplicasse; vt dolendum omnino sit nonnisi magnae molis ossa hucusque per Sibiriam collecta fuisse, multoque maiorem minorum sceletorum copiam forte negligi, quibus lites in hac re omnes dirimi dudum potuissent. Auctores certe, qui Elephantos, vt dixi, bello per Sibiriam sparsos fuisse crediderunt, et tempus, ducem, exercitum, quibus deduci potuerint, adeo anxie quaesiuerunt, vano destitissent labore, si praeter prius exposita non ignorassent plurimorum calidissimi coeli animalium reliquias, in eadem Sibiria pariter reperiri (*o*). Sed praeter elephantina ossa nihil adferri vide-

(*o*) De ossibus Sibiriae fossilibus, Mamonteis dictis, praesertim egit Ill. TATISCHTSCEV in *Act. Vpsaliensibus;* Cf. etiam *Petersb. Anmerk. zu den Zeitungen* l. c. Dein e MESSERSCHMIDIO viderunt, imo hodiernis quoque auctoribus vix alia innotuerunt. Nempe negliguntur a barbaris harum rerum collectoribus minorum animalium ossa, et ea solum mittuntur, quorum istis moles mira et commendabilis videtur. Non tamen dubium est innumera alia minoris magnitudinis ossa exoticorum animalium ibi passim superesse, quibus nobis ob inscitiam atque supinam incuriam plebeculae carendum est; idque solo ossium in Sueuia canstadiensium exemplo discimus, vbi omnigena diuersissimae staturae animalium extraneorum ossa, elephantinis immixta fuisse dicuntur, vt antra draconum dicta Liptouiensia, et in Hercynia celebrem speluncam *Baumannianam* nunc non memorem.

De fossilibus *Rhinocerotum* in calidissimas Indiae atque Africae tractus hodie relegatorum, per aquilonares terras sparsis reliquiis, nemo, quod mirum, hactenus satis expressi quidquam memoriae prodidit. Refert quidem in itinerario suo Cel. *Gmelinus* (*) circa Lenam flumen inuentum aliquando

 fuisse

dio Breynivs in *Act. angl. vol. 40. n. 446.* Sloanevs l. supra citato, Ides, Stralenberg, Lavr. Lange, Le Brvn, Ioh. Bell. anglus, et Gmelinvs in suis itinerariis, tandemque, cum Bvffonio, D'Avbentonvs *l. c.*

(*) *Itinerar. vol. 3. p. 148.* Nempe miles *Spiridon Portniagin*; ad ossa mamontea conquirenda missus, 200 circiter stadiis russicis a promontorio sacro (*Swiatoi noss*) versus *Vstianskoi* hybernculum, fuiſſe ignoti animalis caput, bouino ſub ſimile, cornua tamen ſupra nares gerens. Verum praeterquam quod illud non viderit ipſe, eiusque relatio e diuerſis videatur circa Taurorum atque Rhinocerotum reperta crania, relationibus coaluiſſe, ne in ſuſpicionem quidem Rhinocerotis ipſum perueniſſe apparet. Diſſertius quidem, et iure credo, ad Rhinocerotem refert maxillae portionem cum molaribus, haud procul a Cantabrigia repertam *Grewius* (*p*); ſed tamen is quoque, incredulis, ſola dentium comparatione fretus, minime perſuaſit. Certiora igitur hoc loco dabimus et minus ambigua futura. Habemus enim quatuor vera et ſatis integra *Rhinocerotum* in Muſeo *crania*, habemus quinque genuina, variae molis *cornua* eiusdem animalis. Eaque omnia in media Sibiria reperta fuiſſe certum eſt; quamquam locos, vbi ſingula inuenta fuere, non accurate conſignatos inuenerim, neque affirmare poſſim cornua iisdem cum craniis in regionibus eruta fuiſſe; cum de vnico tantum craniorum ex affixa ſchedula liquido conſtet, illud vna cum maiore, quod integrum habemus

---

naculum, circa Lenam in terra turfoſa reperit cranium elephantis cum cornibus, nec longe ab eo loco *animalis ignoti cranium* cet. — Videntur etiam Rhinocerotis oſſa fuiſſe, quae GMELINVS *p. 153.* vna cum craniis Tauro-Elephantis infra deſcribendis, reperiri dicit ad *Niſchnaia-Tunguska;* e quibus ſibi viſa, tibias, femora, in ſumma breuitate ſcribit craſſiſſima fuiſſe.

(*p*) *Muſei regal. Societat. pag. 32. tab. 16.*

mus cornu (fig. 4.) in tractu Iacutensi anno 1727. oblatum fuisse. Quia sceleton Rhinocerotis vllamue eius partem nondum ab vllo auctore descriptam invenio, in exponenda singulari fabrica cranii huius animalis paulo verbosiorem esse liceat. Tab. X. Fig. 4.

Rhinoceros, prouti ordine naturali proxime ad suillum genus collocari debet, eidemque multis structurae momentis pariter ac vitae genere moribusque affinis est, imo apri quandam speciem africanam, quae nuperrime innotuit (*q*) dentium quoque primorum defectu, corii natura, rostrique cornea duritie proxime refert: ita et cranii conformatione nulli quadrupedum generi aptius conferri posse videtur. Ea tamen cranii pars, quae cornu Rhinocerotis sustinet, cuius ille situ pariter atque natura ab animalibus cognitis omnibus differt, ipsa quoque structurae et figurae plane peculiaris est, neque vlli inter reliquas quadrupedes exemplo comparabilis. Scilicet omnem vim animalis robustissimi in haec eius arma dum dirigeret natura, rostrum, cui extremo innatum est eorum primarium, ossea compage validissima ita firmandum erat, vt immanes indomiti animalis inque omnia coeca rabie ruentis impetus sustinere queat. Hinc totum primo cranium, quod exserendis belluae viribus quasi vectem praebet

(*q*) Aper aethiopicus, quem in *Miscellaneis Zoologicis*, et nuper, addita icone castigata, nouisque obseruationibus in *Spicilegiorum Zoologicorum Fascic. II.* nuper descripsi.

praebet, e ſolido fere oſſe robuſtiſſime fabrefactum eſt. Nulla enim, inaudito fere exemplo, apparent ſuturarum veſtigia; totaque cranii ſubſtantia, vbique craſſiſſima, parum intus raritatis, quam diploën dicunt, habet, imo per anguſta quoque et oblonga, pro encephalo recipiendo, olla cauatur. Nihil porro zygomatibus et illa quae inter roſtrum et ollam cranii comprehenditur, portione robuſtius eſſe poteſt. Deinde quum in animalibus reliquis omnibus oſſa naſi et maxillaria in regione hiatus naſalis late deficiant, et extrema roſtri mera cartilagine perficiantur, (quam in ſolo affini genere ſuillo, cui pariter inſignior promuſcide vis erat exſerenda, oſſiculum columnare fulcit,) Rhinocerotis contra cranium ſupra narium caua craſſo fornicatoque oſſe luxuriat, et hoc inſuper ſepto inter duo narium caua perpendiculari, craſſiſſimo, longitudinaliter ſuffulcitur. Si denique retro productum occipitis latum cacumen firmandis muſculis ceruicalibus, cranii leuatoribus, deſtinatum; ſi condylos maximos, fere ginglymoideos, capiti ſupra columnam vertebralem valide iactando, tanquam trochleas, deſtinatos conſideraueris, conſtans apparebit naturae ſollertia inſtrumenta vbique actioni et viribus exſerendis adaptantis.

Tab. IX. Fig. 1-3. *Olla* ſiue poſterior pars cranii, vt modo dictum eſt, irregulari ſubtetraëdra pyramide ſeu potius cuneiformi pecctine (vt in ſuillo maxime genere) retrorſum adſurgit, quam circumſcribunt ſuperficies

ficies ſuperne tres, cum poſtica latis craſſisque marginibus concurrentes. *Superficies* haecce *poſterior*, inferne in medio *foramine occipitali* magno, ſuperius inciſo, et vtrinque *condylis* inde a foramine transverſis, ſubſemicylindraceis, extrorſum adſcendente conuexitate auctis praefinita, planiuſcula eſt, ita tamen, vt ſupra foramen occipitale leui conuexitate tumeſcat, hinc *foraminulo* ſurſum obliquo perforetur, et ſupra illud leuiter, at lateribus, ſupra condylos inſigniter deuexa cauetur. *Superiorum* facierum *media* plana fere eſt, poſteriusque latior in transuerſum occipitis pectinem deſinit, anterius autem decliuis et denuo lateſcens, in conuexiorem frontem ſenſim euaneſcit. Superficies *laterales* obliquiores, verſus orbitas ſenſim inſigniter cauatae deſcendunt, et plerumque, incerto quamuis loco, circa medium geminis *foraminibus*, calamum ſcriptorium admittentibus pertuſae ſunt, quorum ab altero latere in vno craniorum noſtrorum ſolitarium ſupereſt, et in alio vtrinque ambo oblitterata vix apparent. Non praetereunda quoque ſunt inſignia *foramina*, quae condylorum occipitalium baſin permeant, et digitum minorem facile transmittunt, arteriis vertebralibus veroſimillime deſtinata, introrſum verſus cranii cauum paulo anguſtiora, extrorſum et deorſum in ſemicanalem proceſſuum adſtantium effuſa.

Praeter *hos* ipſos *proceſſus*, qui maſtoideorum loco ſunt, *alii* habentur ſubter cranii ellam minores

 et

et anteriores, adeoque ſtyloideis ſitu comparandi, figura autem, vti priores, pyramidati, et longitudine quoque iisdem ſubaequales. Supra geminos vtrinque proceſſus *meatus auditorius* patet, ſubtus et poſtice tubere angulato oſſeo munitus. Intra eosdem vero proceſſus notabilis vtrinque eſt *oſſis petroſi* anguloſa difformitas, in *hiatu* lacero vndique fere libere et abrupte prominentis. Medius inter foramina lacera *iſthmus* cranii inſigniter carinatus eſt, obſoleſcente tamen verſus palatum iugo.

Quanquam ipſa cranii olla antrorſum vere coarctetur, oſſea tamen eius ſubſtantia imis lateribus, mox ante meatus auditiuos lateſcit et in *zygomata* aſſurgit, poſtice depreſſo-ancipitia, dein per maiorem longitudinis partem triquetra, antice vero, vbi ſupra molarium baſin implantantur, obſoletius tetraëdra, atque extrorſum tuberculoſo-prominula.

Orbitarum cauitas perampla, vndique aperta, neque margine fere, niſi anterius, verſus zygomatis radicem *ſuggrundio* deſuper limitata tuberculoſiſſimo, quaſi lacero, et duplici plerumque foramine peruio. Vbi deficit ſuggrundium, notabilis eſt *ſpina* prominens, ſed magis introrſum poſita. *Foramen opticum* poſterius in fundo orbitae latum, antrorſum ſpectans, exterius veluti oſſea lamina valuatum, pollicem facile admittit. Anterius ex aduerſo optici foraminis ex orbita continuatur canalis digiti medii capax, magno *foramine zygomatico* paulo pone hiatum narium effuſus.

Frons

Frons inter orbitas atque antica crura zygomatum latiuſcula, tota, imprimis verſus latera, tuberculis crebra, ſcaberrima, et in vno praeſertim ſpecimine quam maxime hiulca; in omnibus vero *ſulcis* ramoſis, arteriarum, per foramina ſupraciliaria eſcendentium, et calamos ſcriptorios aequantium, veſtigiis, arata eſt. Videtur haecce frontis in antiquiore ſpecimine notabilior inaequalitas orta fuiſſe ab incremento et ortu cornu ſecundarii, quod ſenioribus Rhinocerotum plerisque adeſſe arbitror, quodque, ſaltem in africanis (*r*), adoleſcentulis iamiam propullulat. Huius enim baſis totam ferme frontis aream paulo ante medias orbitas occupare ſolet.

(*r*) Vana eſt Rhinocerotum in vnicornes et bicornes diſtinctio. Vnicornes enim ſpecie diuerſi eſſe non videntur, quamquam re vera exiſtant, longiore et magis ſubulato cornu, ſaltem in Aſia. Cornua duplicia innumera vidi, et in tenera iam aetate, fere ſimul prorumpunt. In quinquennis capite Promontorio B. Spei ad Muſeum *Sereniſſ. Principis Auriaci* miſſo, ſecundarium iam inſigniter protuberabat, quamuis primarium palmo vix eſſet altius. Vidi, raro exemplo, *cornu ſecundarium* Rhinocerotis, ſemipedale, a baſi poſtice *apophyſin* acutam, conicam, ſeſquipollicarem exſerens, ſimillimum illi, quod GLEDITSCHIVS in *Materia Medica* celebrat, quodque pariter ſecundarium fuiſſe autumo. Per huiusmodi credo luſum explicandus erit locus ALEX. HAMILTON in *Account of the Eaſt-Indies (Edinb. 1727. 8.) vol. 1. p. 7.* vbi cornu Rhinocerotis africani triplex deſcribit, e quibus primarium erat 18 vnciarum, proximum 12″ et poſtremum 8″. — In capite Rhinocerotis capenſis cornu ſecundarium baſi vsque in frontem, inter oculos, extenditur, adeoque recte a *Kolbio* frontale dicitur.

Venio nunc ad extremitatem cranii, ſeu *roſtrum*, ad baſin, inter zygomata craſſiſſimum, et ſubtus aluearibus molarium dentium poſterius ampliſſimis auctum. Haec ipſa vero *aluearia* antrorſum ſenſim anguſtiora roſtri molem ſubtus paulatim contrahunt.

Palatum inter alueolares veluti vallos aequabile, leuiter excauatum, prope molares poſteriores vtrinque *foramine* pennam minorem vix admittente, et aliquot minoribus peruium, ad fauces deficit margine obtuſo, qui medio tuberculo, ad inſtar valuularum cordis lunarium, intercipitur. *Criſtae pterygoideae* a palato retrorſum clementer decreſcunt; et vbi fere euaneſcunt, adeſt vtrinque *foramen* inſigne, quod digitum minimum vix non admittit. Anterius ſub extremo roſtro, loco foraminum palatinorum plerisque animalibus ſolemnium, dehiſcit palatum *hiatu* triangulari, poſtice acutiſſimo, quem ſeptum naſale introrſum bipertit, et cuius poſtico angulo foraminulum adſtat ſolitarium, fere coecum.

Latera extremi roſtri vtrinque ampliſſima *narium* cauitate, antrorſum effuſa, late patent. Has interſtinguit *ſeptum* continuum, ſolidiſſimo et digitum fere, praeſertim verſus anteriora, craſſo oſſe conſtans, verſus fauces margine conuexe tumidulo praefinitum, marginem vero palati non exaequans, ſed citra eundem terminatum. Narium aperturas deſuper late obumbrat et roſtrum obtuſe terminat

teſtudo

testudo subonalis, conuexa, e crassissimo osse facta et robusta septi pariete longitudinaliter suffulta. Huius externa tota facies tuberculis longe, quam in fronte, prominentioribus exasperata est et confragosa, in medio tamen longitudinaliter laeuigata magis, et veluti *raphe* quadam inscripta; margines iisdem tuberculis quasi laceri apparent. Camerae narium compressae sunt et retrorsum maxime versus ethmoideos anfractus dilatantur, quorum tamen minime insignis est apparatus. Prope aperturam narium anteriorem intrinsecus e superiore cuiusuis camerae fornice descendit lamina ossea crassa, inuoluta, siue *os conchoideum* spongiosum.

Ex alueolorum reliquiis apparet, animalia quorum fossilia describimus crania, *molares* superioris maxillae *dentes* vtrinque habuisse senos, seu forte septenos: adest enim in vno specimine dens ante alueolorum seriem minutus, a quo reliquorum, qui in omnibus nostris speciminibus desunt solis radicum vestigiis relictis, moles sensim crescebat, ita vt postremi omnium maximi fuisse videantur; penultimorum vero aliquem esse a *Grewio* delineatum ex illius cum alueolis craniorum nostrorum comparatione satis fit verosimile.

Non parum miratus sum, in omnibus quatuor craniis nullum omnino superesse vestigium *dentium primorum*, quos grauissimi auctores, *Parsonius*, et et cum eo *Linnaeus*, *Buffonius*, *Chardin* (*s*) aliique Rhinoceroti tribuunt, a molaribus remotos et in vtraque maxilla ſolitarios. Quamquam enim nullos huiusmodi dentes olim in ſiccato capite Rhinocerotis circiter quinquennis, Promontorio Bonae Spei in Muſeum *Sereniſſimi Arauſionis Principis* miſſo, deprehendiſſem, tamen ſubdubitabam, et aetate provectioribus demum erumpere putabam. Poſteaquam vero in ſpeciminibus adultis Muſei noſtri ne veſtigium quidem apparere video, vbi dens talis inſitus fuiſſe, vel firmari poſſe credatur, non poſſum non ſuſpicari, auctores qui primores dentes Rhinoceroti tribuunt omnes, hallucinatos fuiſſe, et primum e molaribus conoideum voluiſſe: Idque tanto magis credibile erit, ſi perpendamus, qui Rhinocerotis hiſtoriam dederunt, omnes nonniſi viuum animal examinaſſe, in quo difficile ſane et fallax eſſe debet dentium ſcrutinium. Accedit, quod interuallum inter primos molares et apicem maxillae ſuperioris in craniis non admodum prolixum ſit, quodque palatum mox ante molarium alueolos in anguſtum iugum et veluti carinam ſenſim contrahatur, vt nec alueolo locus ſit vllus, neque dentes illi primores, ſi adfuiſſent, tam magno ſpatio, quam auctores illi dicunt, ab inuicem diſtarent. Adde etiam, quod

(*s*) *Chardin voyage en Perſe (edit. 8va Pariſ. 1723.) vol. 8. p. 132.* Bovffon. *l. cit. p. 241. et 275.* Parsons in *Act. angl. n. 470.*

quod Rhinoceros, cui accuratiſſimus alias *D' Aubentonus* primores dentes fuiſſe ſcripſit, e data magnitudine etiam iunior videatur fuiſſe illo, cuius ipſe ſiccatum cum pelle caput diligenter in *Muſeo Auriaco* luſtraui, et cui itaque dentes illi per aetatem adeſſe omnino debuiſſent. E quibus omnibus iure concludi poſſe credo Rhinocerotem conformatione dentium cum Bradypode atque Daſypode conuenire. Neque ſolum hoc eſt affinitatis, praeſertim cum Daſypode momentum; namque huius cutis pariter atque pedes non exiguam ſtructurae ſimilitudinem cum Rhinocerote produnt, quanquam hunc nihilominus ſuillae genti magis propinquum eſſe putem.

Crania illa Muſei noſtri, etſi vix determinandae antiquitatis dicenda ſint, et monumentis humanis forte omnibus anteriora, tamen corruptionem tanto temporis ſpatio, etiam in ſpongioſiore parte, vbi molares fuerant infixi, parum ſenſerunt. Nempe, vt ſupra de Ebore foſſili monuimus, glacies regiones illas continuo adſtringens, neque per aeſtatem in terrae profundo reſoluenda, animales haſce reliquias contra edacis aeui dentem quaſi loricat atque firmat. Itaque craniorum etiam, quae deſcripſimus, ſubſtantia fuſca quidem, ſed praedura adhuc eſt, nec niſi in ſuperficie calcinata atque ochraceo vel limoſo terrae, in qua ſepulta iacuerunt, colore inquinata atque imbuta. Imo in vno nitor etiam et odor, quum raditur, oſſeus paſſim ſupereſt. Illud vero, quod antiquiſſimum, hiulca fronte prae-

praeſigne ſupra memorauimus, corruptius eſt et tota ſuperficie ad inſignem ſatis profunditatem calcinatum, vngue facile raditur. Duo alia paſſim in ſuperficie leues ſecuris, vt videtur, ictus paſſa ſunt, iis maxime in locis, vbi cornua haeſerunt; non autem affirmauerim cornuum adhaeſionem hiſce ictibus anſam repertoribus dediſſe. In horum tandem vno frons a dextro latere, proxime ſupra oculum, maiuſculo foramine, ſed rotundato perrupta eſt, quod viuo animali inflictum fuiſſe videtur.

Vt aliqua proſtet craniorum noſtrorum menſura, liceat hic inſerere tabulam comparatiuam omnium ſpeciminum, ſecundum menſurae Pariſinae normam expreſſam; in qua notari velim terminos omnes filo, ſecundum ſuperficiem adplicato exploratos fuiſſe:

	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.
Longitudo tota ab extremo roſtro, ad prominentiſſimam partem occipitis - - - - - - -	33. 0	31. 3	30. 9	29. 5
—— palati inde ab angulo carinae ante hiatum palatinum notabil	12. 0	8. 0		
—— aluearium pro dentibus -	9. 3	0. 0	11. 3	0. 0
—— tuberis cornigeri ſupra nares		10. 6	10. 6	0. 0
circiter - - - - -	11. 3	7. 10	9. 8	10. 0
—— hiatus narium - - -	8. 3		7. 0	7. 0
—— zygomatis a meatu auditorio ad foramen zygomaticum exteriorem arcum menſurando	9. 9	9. 6	8. 9	9. 9

Longi-

	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.	poll. lin.
Latitudo ſumma cranii inter tuberoſitates zygomatum anteriores	11. 9	10. 6	10. 3	11. 5
—— inter proceſſus orbitales -	11. 4	0. 0	11. 1	10. 3
—— tuberis cornigeri - - -	7. 9	7. 6	6. 6	7. 6
Profunditas ollae cerebri ſtylo explorata - - - - - -	7. 0	6. 10	6. 9.	6. 6

Procedo nunc ad *Cornua Rhinocerotum* Sibirica, quorum, vt monui, quina in promptu ſunt. Et haec quidem omnia primaria fuiſſe e magnitudine, proportione et figura facile apparet. Minora ſiue frontalia cornua vel ob minus inſignem molem a collectoribus neglecta, vel Rhinocerotes qui haſce plagas quondam occupabant vnicornes fuerunt, quod in Aſiaticis hodienum frequenter obſeruari auctorum aliqui aſſeruerunt. Duo e quinis Muſei noſtri cornibus foſſilibus integerrima ſunt; eaque mole, figura et proportione nihil inſoliti habent. *Vnius* nempe longitudo eſt 33″. 3‴, circumferentia imae baſeos, quae tamen filorum extimorum et breuiſſimorum ſtratum amiſit, 23″. 6‴. et paulo ſupra baſin 17″. 6‴ vnde ſenſim in ſubulatum acumen adtenuatur, retrorſum clementer curuatum. *Alterius* longitudinem deprehendi 2′. 1″. 4‴ circumferentiam infimam 1′. 7″. 9‴ et quinorum pollicum ſupra baſin diſtantia 1′. 2″. 6‴ figuram autem omnino priori ſimilem. Vtriusque ſubſtantia nonniſi in ſuperficie antiquata fiſſuris hinc inde fatiſcit, qua- Tab. X. Fig. 4.

 les

les et recentia ſpecimina ſiccatione non raro contrahunt.

Dolendum eſt in tribus reliquis cornibus e Sibiria miſſis, quorum vel figura vel magnitudo minus vulgaris fuit, ab ignaro et rudi populo ſecuri, vt videtur, ablatam fuiſſe ab vtroque latere ſubſtantiam; cuius rei nullam aliam mihi fingere poſſum rationem, niſi hanc, quod vel ea ſubſtantia corrupta atque in fibras ſuas reſoluta fuerit, vel ſimilitudinem acicis, cornuumue caprinorum conciliare iis voluerit vulgus. *Vnum* ex his mutilatis et cornuum Ibicis ad inſtar planis cornibus longitudinem aequat 4 pedum et vnius fere pollicis. Curvatur illud arcu inſigni, et maiore quam hactenus in Rhinocerote obſeruatum eſt. *Alterum*, quod itidem, ob ſingularem circumcaeſuram, icone expreſſum eſt, altitudine eſt 2′. 8″ rectiuſculum; ſingulari autem ratione anterius verſus baſin craſſeſcit, ſituque magis reclinato conſtitutum fuiſſe videtur; ita vt tota figura a ſolita inſigniter abludat. *Tertium*, cuius icon minus neceſſaria viſa eſt, vti primum, paulo magis, quam vulgaria, incuruatur, et arcuatam fere figuram vnguis Ardeae exprimit, longitudine 2′. 11″. 6‴ proportione fere eadem, quae in cornibus integris ſupra indicata eſt.

Tab. X. Fig. 6.

Subſtantia horum cornuum duriſſima quamuis et rigida, adhuc, tamen ita in ſuperficie praeſertim reſoluta eſt, vt *fila* cornea longitudinalia, paral-

parallela, quae in recentibus firmiter compacta aegerrime apparent, egregie conspiciantur et facili opera separari queant. Itaque cornu Rhinocerotis e talibus filamentis siue setis corneis totum compositum esse, longeque alia structura gaudere, atque cornua persistentia, lamellata animalium plerorumque ruminantium, recte D' AUBENTONUS exposuit. Similem fere crassissimae epidermidis constitutionem, e fibris ad cutem perpendicularibus, in Manato s. Vacca marina STELLERVS olim noster descripsit. Subsimilem etiam structuram inuenias testarum Mytuli margaritiferi sole vel igne calcinatarum. Verum in Rhinocerotis cornu hoc praesertim mirabile est, quod media praesertim substantia adultioribus excrescat. Figura enim cornuum adtenuata imprimis debetur numero fibrarum superiora versus imminuto: extimae scilicet varia a basi distantia veluti praetritae et senescentes desinunt; vnde in plerisque recentibus Rhinocerotum cornibus superficies versus basin muscosa quadam hispiditate horret. Hoc autem phaenomenon a sola belluae actione, cornu ad arbores continuo adterentis, deriuari haud poterit; sic enim cornuum cacumen, quod maiorem vim patitur, minus cresceret, parique modo detritum et senio quasi consumtum obseruaretur; quod secus euenit. Extremitas enim cornuum semper solidissima ac sanissima deprehenditur; et natura animalium partes exterius iniuriis praecipue obnoxias, cornua, vngues, rostro auium

 (prae-

(praeſertim Picorum), inſita vi quadam vegetatiua, iis maxime in locis vbi maiorem adtritum patiuntur, continuo ſupplet, nec ſeneſcere patitur. Hinc neceſſario ſtatuendum eſt, fibras in cornu Rhinocerotis extimas, ſuccreſcentibus e nucleo ſenſim interioribus, inutiles et effoetas non amplius creſcere, ſed velut emortuos capillos apicibus deteri atque reſolui.

Praeterquam quod in cornibus Rhinocerotum foſſilibus ſtructuram fibroſam confirmatam inuenerim, ſingularem quoque obſeruaui fibrarum per interualla coaleſcentiam quandam, in iis maxime ſpeciminibus, quorum ſubſtantia lateralis ſecuri dedolata eſt, conſpicuam. Haec ideo quaſi articulata aut inſcriptionibus transuerſis ſolidioris texturae vndata diceres; neque aptius comparari poteſt huius ſtructurae ratio et adſpectus, quam cum muſculis rectis abdominis in humano cadauere, quorum laxiores fibrae muſculoſae, inſcriptionibus transuerſis in tendineam albedinem et ſubſtantiam denſatis, interruptae ſunt. Atque vti hos muſculos per tendinea interualla firmari intelligimus, ita quoque cornuum ſubſtantiam compactioribus illis ſpatiis inſigniter contineri, nemo non videt.

Poſt deſcriptas Rhinocerotum reliquias praecipuam in Oſteophylacio noſtro adtentionem merentur

tur *crania Buffalorum* gigantea, quorum integrum vnum et complurium fragmenta e Sibiria adlata habemus. Gigantea dico, quum maxima vrorum nostratium in Museo seruata crania, omnesque Buffali Capensis aut Indici, quas viderim aut descriptas inuenerim, reliquias tantum superent, quantum illa a craniis boum domesticorum, ista a Buffalorum Italicorum mole distant, quae prioribus collata pygmaea certe dicenda sunt. Animalia, quorum crania illa fuere, hodie tanta, in rerum natura, quod sciam, nullibi exstant. Neque enim Buffali calidissimarum regionum, quibus hocce animal natura destinatum est, nec vri nostro aeuo maximi, armenta Hungarica atque Podolica istis saepe vix minora, et vastior iisdem Bison Americae septentrionalis, qui post Rhinocerotem et Hippopotamum quadrupedum omnium certe maximum est (*t*), ad Buffa-

 lorum

(*t*) Ill. Bvffonivs, nescio quo argumento, Bisontem Americanum minorem esse credidit, quam sunt Asiae atque conterminae Europae feri Tauri (*hist. nat. vol. XI. edit. min. XXIII. p. 104.*) a quibus tamen istius originem iure deducit. Putauit scilicet, Vir Illustrissimus, omnia animalia, quae ex antiquo orbe in Americam transmigrauarint, minora et debiliora euasisse. Et tamen Alcem, Rhangiferum, Damam, Leporem, Vulpem nigram (quae est Lupus niger Bvffonii), in America boreali potius maiora esse, quam in Asia orientali, certis mihi constat documentis. Similiter Bison americanus, quem secundum praeconceptam hypothesin et ex male intellectis, vt videtur, itineratorum relationibus, minorem Asiatico statuit, re vera Vris vel lorum, quos frigidam nunc totam Sibiriam olim aluisse e lectis ossibus constat, molem nequaquam adtingunt.

Loca in quibus huiusmodi crania reperta fuere *Cel.* GMELINVS in *itinerario* suo nominat: extremam Sibiriam, circa Anadyr fl. et regiones ad Neo-Tunguskam. Integrum vero, quod Museum nostrum ornat, cranium illud est, cuius ad Ilgense munimentum (*Ilginskoi Ostrog*) effossi meminit idem (*itinerar. vol.* 3. *p.* 753.). Idque *Celeberr.* MVLLERO nostro deberi, qui illud a sacerdote illius loci acceperat, in catalogis rerum naturalium a GMELINO transmissarum inuenio. Fuit autem in ripa Ilgae fluminis vernalibus aquis subruta inuentum; nec alia prope ossa adfuisse dicuntur. Extra Sibiriam inuentorum craniorum taurinorum tam vastae magnitudinis duo tantum exempla habemus; quorum alterum in *Actis anglicis vol.* 37. *pag.* 427. *tab.*) KLEINIVS, alterum *Ill.* BVFFONIVS in aureo suo opere (*hist. natur. ed. minor. vol.* 23. *p.* 261.) communicarunt. Prior describit atque delineat occiput tauri, vel potius *Buffali*, cum cornibus deter-

vel maximis vastior est et procerior; vti ex visis adultorum craniis, et viuo Bisonte, Philadelphico, an. 1766. in Belgio exhibito didici, quem nondum ad adultam tamen aetatem peruenisse cornuum paruitas arguebat, etsi mole iam Vrum insigniter superaret. Neque sane vllam inuenio rationem, quae in pinguissimis felicissimae Americae pascuis, armenta fera minuere debuisset.

detruncatis, vix inferius noſtris magnitudine, et figura iisdem ſimillimum, prope *Dirſchau* in Gedanenſi regione effoſſum; in eoque diſtantiam inter baſes cornuum 1 pedis et $1\frac{1}{3}$ pollic. latitudinem inter orbitarum margines 1′. 4″ et circumferentiam cornuum ad baſin 1′. 6″ poſuit. E paulo minore animale fuit nucleus cornu bouilli, quem in Galliae quodam flumine inuentum recenſuit BVFFONIVS, cuiusque circumferentiam 1′. 1″. 8‴ eſſe ſcripſit.

Crania *noſtra*, cum quibus KLEINIANVM cornibus et orbitarum conformatione omnino conuenit, Vri vel Biſontis non fuiſſe, ſed ad Buffali genus, hodie calidioris Indiae inquilinum, referri debere inſignis latitudo et conuexiuſcula planities frontis atque bregmatum, prominentia orbitarum tubuliformis, latitudo oſſium maxillae ſuperioris, et ſitus denique cornuum magis, quam in Vro, transverſus et reclinatus, neque non corneae vaginae figura externe angulata, atque inſigniter rugoſa, arguunt. Quae diſcriminis momenta vt melius appareant, in tabula noſtra altera, praeter integrum illud cranium e Sibiria foſſile a fronte et a latere expreſſum (fig. 1. 2.) etiam vri maximi noſtratis cranium duplici item icone expoſui (fig. 3. 4.). Quae cum icones ſumma cura, ſeruatis, ad appoſitam diminutam menſurae in pollices diuiſae ſcalam, cunctis proportionibus, exactiſſime delineatae fuerint, ſine vlteriore verborum apparatu inde et vera

Tab. XI. XII. Fig. 1. 2. 3. 4.

vera vtriusque forma, et differentiae, atque insignis cranii fossilis magnitudo satis superque intelligi poterunt. Adferam tamen mensuras vtriusque generaliores, filo exploratas; quamquam et haec opera, ob iconum perfectionem superflua fere videatur.

	In Buffali Cranio foss. poll. lin.	In Vri cranio. poll. lin.
Longitudo cranii a fine ossium nasi, qua fronti committuntur ad cristam transuersam occipitalem -	21. 0	16. 6
Longitudo ossium nasi, quorum in cranio fossili dextrum breuius 3'''	9. 0	
Longitudo aluearium pro molaribus, quae in cranio fossili, ob defectus, satis accurate mensurari haud potuere - - -	7. 6	10. 3 5. 9
Eadem ratio impedimento fuit, quominus longitudo ossium maxillae superioris comparari potuerit -	— —	— —
Longitudo nuclei cornuum ossei, exterius secundum arcum adplicato filo, a corona baseos ad apicem - - - - - - -	13. 6	6. 3
Latitudo summa occipitis inter angulos mastoideos, vt ita dicam,	11. 3	9. 9
Circumferentia arcus occipitalis, inter hos ipsos angulos mastoideos	18. 9	15. 6

Alti-

	In Buffali Cranio foss. poll. lin.	In Vri cranio. poll. lin.
Altitudo occipitis a margine foraminis occipitalis ad criſtam transverſam ſeu arcum occipitalem -	4. 2	3. 9
Latitudo cranii inter cornuum radices - - - - -	13. 11	10. 0
Latitudo inter extremas orbitarum oras - - - - -	14. 1	11. 9
Latitudo inter foramina ſupra-orbitalia - - - - -	8. 9	6. 2
Latitudo maxillae ſuperioris ad molares poſtremos. - - -	8. 0	2. 2

Nucleus cornuum oſſeus in giganteo noſtro Buffali cranio 14 pollices circumferentia explet, quum in maximo Vro vix 8 poll. excedat. Corneae vaginae, quae nucleos oſſeos loricat, craſſities, in vtroque cranio non potuit exacte comparari. Quod in foſſili cranio ſupereſt corneae ſubſtantiae, nouem, vbi media craſſities, lineas aequat. Dextrum *huius* cornu, (cui fere integra ſupereſt vagina, externe longitudinaliter angulata et verſus baſin rugoſiſſima,) cum corneo inuolucro commenſuratum vix 15 poll. craſſitiem dedit; quum in Vri cornibus eadem deprehenſa fuerit 10″. 2‴. Vnde maius corneae ſubſtantiae in Vro volumen apparet. Vaginae iſtae corneae, in cranio foſſili antiquitate in lamellas resolutae, structuram cornu bouilli per strata accrescentem et a textura cornu Rhinocerotis supra exposita diuersissimam elegantes exhibent. Illam autem corneam substantiam, quae alias facillime putrescit, in cranio per tot secula solo, sed frigore adstricto, condita magna pro parte adhucdum superesse mirum videri non debet, cum ipsum quoque cranium passim nitorem osseum seruauerit.

Praeter cranium istud integrum dicendum, habemus ex tribus aliis fragmenta; occipitis nempe portiones, cum vno alteroue cornu superstite. Horum vnum, quamuis quibusdam mensuris priori cedat, (interualla cornuum 12''. 3''' et longitudinem nuclei ossei 21''. 8''' praebens,) ob latitudinem tamen occipitis inter angulos mastoideos mensurati maiorem (12''. 10''') et insigniorem nuclei cornuum crassitiem seu circumferentiam (13''.) senioris animalis videtur fuisse. Fragmenta illa, sub mitiore forte coelo e terra eruta, corruptionem multo magis senserunt.

Tantos olim Buffalos (*u*) in Sibiria vixisse ex eorum reliquiis videmus. Hodie vero ne in Indiis quidem pares gigni minus habebit miraculi, si ponderaueris, quantum nostris sub oculis passim addant anima-

(*u*) Posset huc referri locus Plinii *hist. nat. lib. VIII. cap. 37.* „Vrorum cornibus barbari *septentrionales* potant: vrnasque binas capitis vnius cornua implent.

animalibus domesticis incrementum clima et pabuli largioris atque pinguioris qualitas, quantulosque eaedem caussae alibi producant earundem specierum pygmaeos. Quis non nouit insignem inter armenta Podoliae et macros ericetorum boues, quis inter pusillos arietes septentrionalium regionum et Indicos vel Capenses proceros ignorat differentiam. Imo maior adhuc est inter pygmaeos Indiae orientalis vel Insularum septentrionalium equos, illosque quos Frisia aut Anglia generat; maior inter Vrum aut Bisontem Americes, et bouem paruulum, gibbosum, Zebu dictum Africae et Indiae. Et vt propius ad effectus climatis Sibirici etiam hodiernos accedamus, quantum non distant Musmones Corsicae ab ariete fero seu Argali orientalioris Sibiriae, quamquam hic vere sit vnum idemque cum istis animal. Si vero olim calidiorem fuisse Sibiriam et feliciore coelo gaudentem insuper statuamus, sine qua conditione frigoris impatientissimi Buffali ibi viuere haud potuissent, ratio in propatulo est, quae eosdem in pinguissimis tunc pascuis ad tantam molem potuit auxisse, quam fossilibus craniis videmus; quum etiam hodie Americae septentrionalis, quam magnam cum Sibiria similitudinem habere omnes fatentur, mitiore in climate, Virginiae, Pensyluaniae Canadae in syluis, Bisontes cum Europaeis et Asiaticis certe congeneres, et ex antiquo in nouum orbem olim migrasse credendos, in stupendam excrescere molem certo constet.

 Cre-

Credo ſic etiam climatis habendam eſſe rationem in explicanda gigantea ſtatura *ceruorum*, quorum in Hybernia praeſertim effoſſa miramur cum vaſtiſſimis cornibus bipedalia crania. Quamquam enim aliqua ex illis alcium et tarandorum fuiſſe concedam, imo affirmem; vidi tamen et ab auctoribus nonnullis memorantur reliquiae, quae ad giganteam quandam, hodie nullibi reperiundam cerui vel ſpeciem vel varietatem pertinuerunt; idque praeſertim de eo affirmare auſim cranio, cuius meminit TH. MOLYNEUX (*v*).

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Supereſt animalium exoticorum calidi climatis in Sibiria olim viuentium tertium monumentum, nempe cornu foſſile *Gazellae recticornis* (*x*), quam hodie

(*v*) De cornibus ceruinis maximis in Hybernia frequenter effoſſis euolue Th. Molineux *nat. hiſt. of Ireland p. 137.* vbi cranium praeſertim deſcribit 2′. longitudine, cuius cornua in latitudinem 10′. 10. ſpargebantur, ramis lateralibus duobus inſtructa et extremitate latiſſima, palmata. Conf. etiam Th. Knowlton in *Actis Anglic. vol. 44. p. 124. tab. 1.* et I. Hopkins *Act. Angl. n. 472. p. 257.* Quae autem deſcribit Iac. Kelly *ib. n. 394. p. 122.* vera Alces cornua ſunt, et Rhangiferorum quoque cornua in Hybernia reperiri monet Cr. Mortimer *id. n. 444. p. 389.* Quae vero Molyneux obſeruauit ob cranii magnitudinem, ad Rhangiferum referri nequeunt.

(*x*) Volo Antilopen bezoarticam *Spicil. Zoolog. Faſcic. I. p. 14.* quae eſt Capra Gazella Linnaei, et Paſan Bvffonii, In huius hodie ſola, quantum ſcimus, Africa alit, quaeque mihi, poſterioribus curis, nomen *Orygis* antiquorum, ad aliam olim Gazellae Afrae ſpeciem a me relatum, merere videtur. Conuenit enim huic, quod de *pilo contrario* Orygis PLINIVS refert; cuiusmodi miram velleris conſtitutionem in nulla huc vsque animalium ſpecie, praeter Gazellam iſtam et Zebram africanam obſeruare potui. Conuenit etiam quod de cornibus Orygis, apud nonnullos Africae populos haſtarum loco vſitatis prodiderunt AGATHARCHIDES, STRABO, et LAMPRIDIVS. — Cornu iſtius foſſilis rectiſſimi, 27″. 6‴ longi et valde corrupti figuram ideo adponere non placuit, quia nullo modo a vulgaribus huius ſpeciei, plerumque item rectiſſimis cornibus, in curioſorum muſeis paſſim occurren-

ius nuper pelle eleganter ſeruata, miram illam obſeruaui pilorum diſpoſitionem. Nempe in lumbis *vortex* eſt pilorum, proxime ante maculam quandam rhombeam nigram, quae caudae baſin ſtipat; ab hoc vortice per ſpinam longitudinaliter pilus antrorſum tendit, vsque ad verticem capitis, a media vero ſpina vtrinque transuerſim defluit, verſus abdomen et imprimis hypochondria ſenſim refluus, ita vt pilis ab inguine adſcendentibus occurrens in imo vtrinque hypochondrio alium efficiat inſignem vorticem. Idem fere notatur in *Zebra* africana, ſed minore gradu, etenim vortex lumbaris longius a cauda remotus eſt, neque reflui per latera pili vorticem in hypochondriis conſtituunt, ſed verſus aluum aequaliter deorſum tendunt, ſecundum directionem faſciarum. Singulari autem modo vtrinque ad ſpinam vndulati huic ſunt pili, maxime verſus iubamcurrentibus differunt, horumque optimas icones proposuit Ill. BVFFONIVS (*y*). Nolui autem hac occasione praeterire aliud *Gazellae* cuiusdam *Indicae*, quae apud Zoologos plane non occurrit, cornu singulare, generali quidem forma prioris cornibus persimile, gracilitate vero, annulorumque conuexitate ac glabritie diuersissimum, cuius ideo iconem in Tabula X. adiiciendam curaui.

Tab. X. Fig. 5.

Hoc itaque *cornu* longissima quae viderim Gazellae prioris cornua proceritate superat, etsi longe tenuius sit, maxime ad basin. Quum nempe vulgaria Gazellarum cornua tantum 25 ad 30 pollicum longitudine, circumferentia vero ad basin 5″ plus minus vulgo inueniantur, nostrum contra in longitudine 33 proxime pollicum, circumferentia ad basin seu crassitie vix 3″. 7‴ explet. Deinde non, vt vulgaria, rugis acutis, inaequalibus, postice veluti sursum tersis annulosum est; sed *annulis* aequalibus, conuexis, distinctis, 3″ circiter latis, subarticulatum, quorum inferiores paulo latiores, summi sensim obsoletiores sunt, vt tandem vltimus seu quadragesimus versus extremitatem cornu laeuissimam prorsus euanescat. Horum annulorum *primus et vicesimus* ad posterius cornu nostri latus in duos aequales annulos discedit. Inter singulos annulos inferiores, apparet *stria* gemina eleuata, obsoletissima.

(*y*) Bvffon. *hist. nat. XII. t. 33. f. 3.*

ma. Notandum quoque eſt non omnino rectum eſſe cornu illud, ſed verſus extremitatem leuiſſime falcatum; ſubſtantiam autem eſſe nigerrimam, et extus glabram, quamuis nulla certiſſime arte polita. Apparet ex his cornu noſtrum etiam ab iis differre, quae Ill. BVFFONIVS tabulae ſupra citatae fig. 1. et 2. tamquam diuerſa a vulgaribus, expreſſit.

Expoſita iam ſunt, quae huic commentationi anſam dederunt. Antequam vero coronidem ſcripto imponam, liceat ditiſſimam *oſſamentorum* et *dentium elephantinorum foſſilium* ſeriem, qua muſeum noſtrum exterorum vniuerſa cimelia longe ſuperat, breuiter exponere. Loca vbi iſta omnia reperta fuerint prodere neque poſſum, neque noſtra intereſt. Sufficit noſſe, non tantum ad omnia fere Imperii Ruſſici maiora flumina aliquando lectas fuiſſe elephantorum reliquias, et Tanaim, Volgam, Iaikum, Dvinam, Obyum, cum Tobolio, Tom et Irtiſch fl. neque non vlterioris Sibiriae Ieniſeam, Angaram, Chatangam, Lenam, Indigirkam, Kolymam; imo verſus extremum orientem effuſum quoque Anadyr fluuium, ripas ſuas lambendo atque cauando gigantea paſſim detexiſſe ſceleta; ſed paſſim etiam in locis ab omni fluento remotis, occaſione puteorum aut fundamentorum pro aedificiis, complura paſſim eruta fuiſſe, magno teſtimonio totam hanc telluris partem innumeris elephantorum reliquiis ſcatere. Reperiuntur oſſa illa vsque ad ipſa oceani glacialis littora, et

ibi

ibi praeſertim integerrimum et ab omni corruptione ſeruatum eruitur Ebur, quod alibi vel calcinatum, exeſum, et in lamellas cretaceas reſolutum, vel ſaltem tinctura terrae flaueſcente, caſtanea, imo livido-coeruleſcente inquinatum offendunt.

Habemus in Muſeo *tria* integra elephantorum foſſilia *crania*, quorum et aliquot dentes ſimul adlati, et vnius maxilla adſunt, praeter ſex alias, quarum crania non habentur, maxillas. E craniis vnum permagni elephantis fuit; quippe quod parciſſimo modulo, ab occipitis inciſura media, ad alveolorum marginem 3′. 5″. 6‴ aequare inueni, quum in maximis Petropolin olim adductorum cranium vix 2′. 10″ excedat. Alueolorum ſingulorum roſtri diameter in eodem cranio eſt 5″. 10‴ et ebur vnius lateris, quod in Muſeo ſimul adeſt, in longitudinem curuatur 8′. 11″ ſolidiſſimum atque ex albo flauicantis coloris. Repertum fuit hocce cranium in arenoſo, montis cliuo, ad ripam orientalem Indigirkae fluuii praeruptam, ex aduerſo ripae quam *Sztanoi-jahr* vocant, et ab accuratiſſimo MESSERSCHMIDIO olim Petropolin miſſum. Plura ibi ſimul ſceleti oſſa occurrebant, quorum et aliqua ſimul aduecta ſunt; praeſertim *femur*, quod inter cuncta Muſei noſtri foſſilia oſſa eminet, et longitudinem, quamuis carie temporis abſumto capite, 40 pollicum excedit; itemque humerum ſiniſtrum 2′. 11″. 6‴ longum.

Alterum

Alterum ex istis craniis, curante item MESSERSCHMIDIO Petropolin delatum, haud insolitae molis est, et cum plerisque sceleti ossibus, costis etiam, scapulis et vertebris, e ripa Lenae fluuii, non longe ab eiusdem ostio effossum fuerat. Vnde *tertium* erutum sit, non satis constat.

Longum esset innumeros Musei nostri *dentes fossiles eburneos* variae molis atque curuaturae, secundum figurae et magnitudinis singula momenta prosequi. Dextri partim sunt, partim sinistri lateris. Quidam, praeter colorem, quem flauum, ferrugineum, fuscumue contraxerunt, ebori recenti soliditate similes; alii vel tota substantia, vel aliqua sui parte calcinati sunt, vt pulchre appareat lamellosa, et simul a centro radiatim fibrosa eboris textura. Duos solummodo ex his adtingam, quorum *alter* ob insignem molem notabilis, octopedalis fere, quanquam alueolari portione atque mucrone orbatus, circumferentia explet ad basin 1′. 7″. 6‴ et in medio 1′. 7″. *Alter* Archangelopoli in Museum missus et solidissimus non modo pro insigni longitudine gracillimus est (longit. 4′. 10″ circumferentia in medio maiore 9″. ad alueolum 7″. 3‴), sed etiam miro modo in laxam spiram veluti manibus tortus, accedit ad dentem elephantinum recentem a GREWIO (mus. regal. societ. tab. 4.) delineatum.

Praetereo plurimos *molares* elephantinos vario tempore e Sibiria aduectos. Innumera praeterea confractorum offium fragmenta. Integros vero *humeros* octo habemus, *vlnas* quatuor, *fcapulas* fractas tres *offa*, *peluis* duo, *femora* integra quinque; fed *vertebras* tantum binas foffiles. Haec omnia, vna cum craniis, aliquam quidem intra terram fuperficietenus calcinationem paffa funt, et linguae acriter adhaerefcunt, offeum tamen etiamnum rafa odorem, imo quaedam paffim et nitorem feruarunt; colorem vero plane fordidum, fufcum vel buxeum, ocreolimofum, acquifiuerunt.

Ex enumeratis offibus (quae ad elephantos pertinere dudum, ante D'AUBENTONUM, cui hoc tribuit BVFFONIVS, accurata eorum fecundum figuram et proportionem, cum fceleto elephantino recenti comparatione demonftrarunt e noftris Celeberrimi Viri MESSERSCHMIDIVS, DVVERNOY, GMELINVS,) egregie confirmatur D'AUBENTONI obferuatio circa incrementum offium in iunioribus animalibus maxime in longitudinem, poft adultam vero aetatem magis in craffitiem luxuriantium. Didici etiam e numerofis Mufei noftri craniis et maxillis elephantinis, varietatem aliquam in fitu dentium exfertorum obferuabilem, quorum alueoli modo tota longitudine paralleli et arcte contigui funt, modo leuiter diuergunt, vel tandem paralleli inter fe diftant, fpatio faepe quatuor aut quinque vnciarum; et tunc interiecto pariete offeo et cellulofitate coadunantur. — Demum

ex

ex iisdem craniis et maxillis apparuit vera dentium molarium conditio, quos modo ſolitarios, modo geminos elephanto tribuerunt auctores, in vtroque veraces. Iuniores enim elephanti molares quidem extus in qualibet maxilla habent vtrinque ſolitarios, oblonga atque detrita corona prominentes; verum adſunt ſimul intra cauernas maxillarum, in imis faucibus repoſtas, latentia ſingula germina. Eaque ſucceſſu temporis excreſcunt, e cellulis ſuis oblique antrorſum prorumpunt, antiquorum dentium faciem poſticam planam trudunt, eosdemque loco ſuo ſenſim depellunt, vt hi tandem toti extra ſenſim obſoleſcentes alueolos aſſurgant et denique ſponte excidant. Tunc iam anteriore ſui parte, quae latior eſt et prominentior, exſurgunt noui illi molares, atque manducatione conuexum primo eorum iugum in planitiem ſenſim adteritur; creſcunt dein praeſertim ſecundum diametrum longiorem, dumque ex antiqua ſede antrorſum veluti progerminant et protruduntur, priorum molarium alueolos, quaeque horum ſuperſunt veſtigia, comprimunt, obruunt et oblitterant; acquiſitaque demum per totam longitudinem area molari plana, oblonga, in ſeram animalis aetatem perſiſtunt. Omnes fere huius incrementi gradus in Muſeo noſtro demonſtrari poſſunt, vbi ſimul apparet conſtans haec, inter molares primae aetatis et ſuccedentes illos, diſtinctio, quod priores non ſolum multo minus in longitudinem exporrecti ſint, ſed et complures habeant radices conicas; cum ſecundarii contra toto corpore in longitudinalem carinam et veluti cuneum coarctentur, quo alueolo ſuo inhaerent; vnde extra alueolos etiam figura tota facillime diſtinguuntur.

Quum ſupra probabiliorem eſſe dixerim ſententiam illorum, qui elephantos olim in Sibiria multiplicaſſe ſtatuunt, ne huic opinioni ſoli fauiſſe dicar, pro coronide adiiciam obſeruationem primo Ill. TATISTSCHEV, qui maxillam elephantinam, vna cum *Ammonitis* et *Belemnitis*, prope pagum Woldina repertam in Muſeo noſtro depoſuit; aliamque STELLERI, qui reliquias elephantinas, et ſimul Ichthyodontes ſeu vulgo dictas *Gloſſopetras* in Tura fluuio reperta memorat. Nonne haec autem iis ſeruiunt, qui omnia diluuio tribuere auent. Sed quis non potius credat petrefacta illa marinorum corporum, in verum lapidem mutata, oſſibus elephantinis, quibuscum reperta ſunt, quorum tamen natura alterata non eſt, longe antiquiora eſſe, atque tum iam iis in locis ſparſa iacuiſſe, vbi natus forte et educatus occubuit tandem elephas. Quicquid ſit, non diſputo, neque vllam hypotheſin tenaciter defendo. Qui vero omnia explicare amant, quantum lubet hypotheſibus indulgeant, atque ante omnia explicent, quanam ratione *maxilla Rosmari* a IOSEPHO MONTI obſeruata in agrum Bonienſem, cornua monodontis ſeu Monocerotis marini in mediam paſſim Sibiriam, immenſa vis coralliorum exoti-

exoticorum et magna pro parte incognitorum in Gothlandiam eique vicinos maris balthici tractus, aut in montem S. Petri prope Traiectum ad Mosam, itemque conchylia marina indica in elatas mediterraneas regiones, et in montes sub ipsa arcto mari glaciali vicinos, inter Piasidam et Ieniseam fluuios, vbi ista corpora hodie petrefacta reperiuntur, delata fuerint?

DE
FORMATIONE INTESTINORVM
OBSERVATIONES IN OVIS INCVBATIS INSTITVTAE.

Pars III.

Phaenomena amnii ſpurii interna, vbi ſimul de formatione Meſenterii, Thoracis, Abdominis, Alarumque et Pedum agitur.

Auctore

C. F. WOLFF.

§. 119.

Primordium canalis inteſtinorum in Diſſertationibus, praecedenti Commentariorum Tomo inſertis, ita comparatum eſſe dixi, vt ſit tubus ſimplex, rectilineus, anterius apertus, cuius membranae, vtrinque reflexae, continuarent in amnium ſpurium, quod amnium verum, ex embryonis abdomine continuatum, aeque ac embryonem ipſum, includit. Inteſtina igitur exterius in amnio ſpurio integro in conſpectum veniunt, adeo tamen, vt ſola eorum ſuperficies interna ſeu cauitas ſub ſpecie qui-

quidem foueae cardiacae, rimae et foueolae inferioris appareat. Si igitur externam considerare velis superficiem, quo ex habitu, figura et connexione intestina cognoscantur; amnium spurium aperiendum est. Phaenomena igitur, quae intra hoc apparent, quae interna appello, huius Dissertationis obiectum constituent. Vt, quantum fieri potest, breuissime ad demonstrationem eorum perueniam, quae in superioribus dissertationibus adfirmaui; foueam cardiacam ventriculi cauitatem, rimam intestini medii et foueolam inferiorem intestini recti cauitatem esse; primum exponam subiectum III. dies duodecimque horas incubatum, quod autem non minus in omnibus suis partibus perfectum est, quam embryones esse solent IV. dies incubati. Hac enim aetate intestina adhuc in illo statu primordiali sunt, et ita tamen simul comparata sunt, vt pro intestinis facile agnoscantur. In embryonibus aetate superioribus status ille et phaenomena iam euanescunt; in inferiobus intestinorum primordia, nisi ex perfectioribus subiectis iam nota fuerint, vix cognoscuntur.

Embryo IV. dierum. Limbus et apertura abdominis; primordium vmbilici. Tab. XIII. Fig. 2. *i. i.*

§. 120. In embryonibus igitur, quatuor dies incubatis, vel in subiecto praesenti (Tab. XIII. Fig. 1. 2.), perfectione illis aequali, si membrana areae inferior (fig. 1. *r.*) quae bullam (fig. 1. *a. b. c.*) producit, a superiori membrana (fig. 1. *r.*) soluitur et ad anteriorem partem embryonis reflectitur, quo ipso scilicet facto bulla destruitur, amnium verum in conspectum

ſpectum venit (fig. 2. *b. b.*) quod, niſi laeſum eſt, ſubtiliſſimae veſiculae inſtar expanſum et pellucidiſſimo humore repletum apparet, in praeſenti vero ſubiecto collapſum erat. Primum, quod hic notabile occurrit, limbus abdominis eſt, (fig. 2. *i. i. i.*) ex quo amnium verum continuatur, cuiusque in ſuperioribus mentionem iam feci. Ille a regione pubis anterius incipit, inde retrorſum vtrinque recta procedit ad paruam a ſpina dorſali diſtantiam vsque. Tum incipit adſcendere parallelus ſpinae dorſali, quacum faſciam ſeu laminam intercipit abdominis lateralem (H. H.) ſatis anguſtam adhuc, quae vix quartam partem exhibet abdominis perfecti et integri. Ad regionem cardiacam vel paulo ſuper hanc regionem limbus antrorſum curuatur et cum limbo alterius lateris coniungitur. Limbus iſte oram conſtituit cauitatis totius, quae abdomen, peluim et thoracem complectitur, quae ſatis longa et lata, ſed minus profunda eſt propter anguſtiam laminae lateralis abdominis (H. H.). Apertura huius cauitatis, quae non minor eſt, quam cauitas ipſa in ſuo ambitu, primordium eſt vmbilici; ea enim, prout parietes cauitatis, praecipue lamina (H. H.), increſcunt, imminuitur et conſtringitur; donec vltimum paruum inde orificium pro largiſſimo ſacco abdominis euadit, quod auibus pro vmbilico eſt. Hoc tempore de toto ſacco abdominali ſola regio lumbaris, quam lamina (H. H.) exhibet, et aliqua pars regionis hypochondriacae vtrinque adeſt.

§. 121.

§. 121. Ex ipſo hoc limbo membrana amnii veri continuatur, ſed aliter, quam in quadrupedibus hoc fieri ſolet. In his enim abdominis cutis ad regionem vmbilicalem in longum funiculum vmbilicalem producitur, qui vaſa vmbilicalia continet, et ex eius funiculi fine demum membrana reflexa amnium conſtituere incipit. In auibus nullus vnquam funiculus exiſtit; ſemper mera eſt apertura abdominis loco vmbilici, maior priori tempore, deinde anguſtior, et ex huius aperturae limbo membrana orta continuo retrorſum flectitur et amnium verum conſtituit, quo ergo caput, dorſum, cauda et tubercula alarum pedumque teguntur. Loco ventris magna, quam dixi, apertura eſt, quam ergo non modo abdominis ſed ſimul ipſius amnii veri quoque aperturam eſſe, facile intelligitur.

Amnium verum Fig. 2. *b. b. b.*

§. 122. Ante hunc limbum abdominis membrana apparet, ex inteſtinis continuata, reſecta in hac figura ad aliquam vsque partem (*n*) quae ſurſum et retrorſum reflexa in ſtatu naturali amnium ſpurium producebat (fig. 1. *a. b. c.*), quae etiam nunc in hoc praeparato, vbi reflexa in ſitum naturalem reſtituitur, eadem rurſum phaenomena, foveam cardiacam, rimam foueolamque inferiorem offert. (fig. 1. *f.* N.) Idem quoque limbus inteſtinalis in hac interiori membranae bullae ſuperficie apparet (fig. 2. *k. k.*) quo exterius in bulla integra fouea et rima cingebantur (fig. 1. *e.*) adeo, vt facile

Rimam, exterius in amnio ſpurio apparentem, cauitatem inteſtini medii; ſuturam ipſum marginem inteſtini meſentericum; foveolam inferiorem cauitatem recti esse, ostenditur. Fig. 2. et 3.

cile sit easdem membranae huius partes, quas exterius in bulla integra vidimus, interius quoque, in huius membranae superficie interna recognoscere. Quodsi nunc examinare velis, quaenam partes sint, quae retro limbum intestinalem sequuntur, quae exterius in bulla integra foueam cardiacam, rimam et foueolam inferiorem constituebant, quas cauitatem intestinorum esse dixeram; nihil opus est, quam vt limbum abdominis, vna cum eo, quod de abdomine et de thorace adest, simulque pedem et alam remoueas, quo hae membranae partes, tum quatenus extra abdominis cauitatem eminent, tum quatenus intus reconduntur, plenius in conspectum veniant, quo facto hae partes ita apparent, quemadmodum in figura 3. delineatae sunt, vbi vides, immediate post limbum intestinalem intestinum ipsum sequi, adeo vt, si nunc membrana (*n.*) in pristinum situm naturalem reflectitur, ita quidem, vt limbus ipse vna cum membrana reuoluatur, quemadmodum in situ naturali se habet, manifesto appareat, labium marginis rimae exterius (fig. 1. *e.*) a limbo; interius a parte intestini (fig. 3. M. *m.*) anteriori formari; rimae cauitatem reliquam esse ipsius intestini cauitatem, et formari a media posteriori parte intestini (fig. 3. M. *m.*); suturam autem, siue fundum rimae esse postremum intestini marginem, quo laminae vtriusque lateris cohaerere et mesenterium constituere incipiunt. Saepius et variis in subiectis hoc experimentum institui; neque aliter, quam vti dixi,

dixi, ſe rem habere, inuenire potui. Dum in tali praeparato, quod figura 3 exhibet, membrana (*n.*) antrorſum reflexa eſt, ventriculum vides (*i.*) inteſtinum medium (*m.* M.) et rectum (*p. q.*); vbi hanc membranam reuoluis, vti eſt in ſitu naturali; in loco inteſtini medii rimam vides priſtinam, in amnio ſpurio integro viſam, ſuperius in loco pylori fere, ex quo duodenum deſcendit, fouea nunc cardiaca apparet, et inferius loco principii inteſtini recti foveola eſt. Caeterum de figura, quam conſideramus ſecunda notandum eſt, videri, quaſi limbus inteſtinalis (*k. k*) in parte media ab omni retro continuatione liber eſſet et ſeparatus a partibus, quae itidem extra abdomen eminent, (*m.*) quae partes eleuatiores ipſius inteſtini medii ſunt. Hoc inde euenit, quod inteſtinum medium, maxime in parte ſua media valde depreſſum ſitum, et verſus latus embryonis dextrum inclinatum eſt. Dum modo autem membrana (*n.*) antrorſum paulisper trahitur, vt inteſtinum plicatum extendatur, totum inteſtinum a parte ſuprema (*o.*) vsque ad rectum (*p.*) tanquam vnum cum limbo continuum, quemadmodum in figura 3 apparet (fig. 3. *o. m. p*), in conſpectum venit. Malui tamen phaenomena, vti ſponte apparent, et partes maxime in ſuo ſitu naturali delineare. Licet enim ruditer ſatis meas delineationes ſculptor reddiderit, accurate tamen reddidit vt explicationi phaenomenorum et deſcriptioni ſufficiant, neque quidquam veritati detrahant. Caeterum inteſtinum medium accuratius, quomodo ſe habeat in huius aetatis embryonibus ad §. 126. et inteſtinum rectum ad §. 127. definietur; fouea autem cardiaca quod cauitas ſit ventriculi certo tempore in explicatione embryonis trium dierum ad §. 146. demonſtrabitur.

Scholium de ſitu cordis in huius aetatis embryonibus. Fig. 1. 2. 3.

§. 123. Caeterum inteſtinum hoc medium extra abdomen non modo ſed etiam extra amnium prominere totum, ſatis manifeſtum eſt et ex ſola conſideratione figurae patet. Quod cor autem attinet, non negauerim, hoc tectum eſſe in huius quidem aetatis embryonibus. Apparet interim in figura 1. vbi partes omnes in ſitu naturali, et embryo totus valde compreſſus per membranam bullae, qua includuntur, transparent, limbum abdominis, eundemque amnii veri limbum (C.) accurate tangere marginem inferiorem auriculae ſiniſtrae (*k.*). Quodſi ergo cor hoc tempore ita ſitum eſt vt ventriculo ſuo recta deorſum et potius paulum retrorſum (in figura 3 enim ſpina dorſalis extenſa eſt) ſpectet, neceſſe eſt, vt totus ventriculus cum canale auriculari (fig. 3. *a. b.*) extra thoracem, abdomen et amnium verum promineat, et in interſtitio illo (fig. 1. *m.*) inter amnium verum et ſpurium ſitus ſit, tectus in hac figura a parte ſuperiori transparente inteſtini (fig. 1. *d*). In figura 2 vbi embryo amnio ſpurio exutus, erectus eſt, auricula (*g.*) vna cum corde ſurſum ſe retraxit. Verum cum tamen thoracis primordium hac aetate adſit, quod auricu-

las

las anterius et lateraliter tegit, et ad eorundem marginem inferiorem in amnium verum reflectitur; hoc sufficit, vt aliquatenus cor thorace tectum esse hac aetate dici possit. In iunioribus autem embryonibus aliter comparatum est; quemadmodum in inferioribus patebit.

§. 124. Detectis autem visceribus ad modum fig. 3. in suprema et anteriori regione thoracis cor se offert, adeo situm, vt apice suo obtuso deorsum, basi sursum respiciat. In eo in hoc latere sinistro ventriculus sinister (*a.*) auricula sinistra (*c.*) et arcus aortae (*d.*) apparent. Ventriculi sinistri pars inferior dilatata et rotunda, superior (*b.*) versus auriculam angustior est, quam partem Perill. *Hallerus* primus, ni fallor, distinxit et canalem auricularem merito vocauit. Auricula sinistra, dextra maior, collapsa et corrugata tenuibus plicis fere circularibus apparet, et in media sui parte fere semper guttam sanguinis coagulatam, per tenuem auriculae membranam transparentem fouet. Aortae principium in hoc latere non apparet; emergit in latere dextro cordis; inde antrorsum adscendit et retrorsum porro curuatur, arcumque producit descendendo. Retro auriculam sinistram appendix quasi apparet (*e.*) vtriusque auriculae, ex qua vena caua descendit, quae collapsa plicas itidem producit varias. Vena caua se in hepar immergit, cuius lobus sinister (*f.*) in hoc latere apparet, angustus, ventriculo et duodeno in-

Tab. XIII. Viscera in latere sinistro. Fig. 3. Cor *a. b. c. d.*

Hepar (*f.*)

 cum-

Ren (*s. s.*) cumbens. Miram figuram renes habent, qui proxime ad ſpinam dorſalem vtrinque ſiti ſunt, eiusque ductum ſequuntur. Lineares fere ſunt et longiſſimi; incipiunt in regione thoracis retro pulmones et deſcendunt ad infimam inteſtini recti extremitatem vsque, cui vtrinque inſeruntur. Neque vretheres diſtinguuntur neque in parte ſuperiori vaſorum conglomeratorum quid ſimile obſeruatur, ſed toti reni vniformis, eaque aliena a ſolita, ſtructura eſt, lamellata ſcilicet, lamellis transuerſaliter poſitis diſtinctis et vere ſeparatis, quae praeſertim in anteriori ſuperficie diſtincte euolui poſſunt, in parte poſteriori vero quaſi funi cuidam affiguntur. Poſt diem ſeptimum denique et octauum ex his lamellis glomeres vaſorum complicatorum euadunt.

Ventriculus Fig. 3. I *i.* et Duodenum *i. l.* §. 125. Inter renem et hepatis lobum ventriculus ſitus eſt, qui ex loco, connexione aliisque ſignis non agnoſci non poteſt (fig. 3. I. *i.*). Ille ex oeſophago ortus recta deſcendit in duodenum (*i. l*), quod retro membranae partem (*o.*) porro in inteſtinum medium (*m.*) tranſit. Adeoque hac aetate ventriculus ipſe non apertus, ſed integer iam eſt et quod (fig. 1.) adhuc ſupereſt foueae cardiacae veſtigium non immediate in ventriculum ſed in duodenum et inde in ventriculum ducit, huiusque igitur duodeni cauitas eſt. Tertio autem die finito, quo tempore fouea cardiaca in ſuo ſtatu perfectionis eſt, eadem ipſius ventriculi cauitas eſt, vti ad

§. 146.

§. 146. videbimus. Quae ſub ventriculo et duodeno ſequitur membranae pars (o.) ea eſt, in qua venae adſcendentis, idemque vitellariae vtriusque truncus haeret, qui ſi ſanguine depletus eſt; vti hic contigit, quaſi limbis vtrinque cinctus et tenuiori membrana factus eſſe videtur. Ad inteſtinum tamen pertinet, idemque ſupplet in hac facie laterali ſiniſtra.

§. 126. A duodeno (*l.*) inteſtinum medium incipit et deſcendit vsque ad rectum (*p.*). Hoc medium comprehendit in ſe rudimentum totius inteſtinorum tractus, qui in adulto corpore duodeno et principio recti, vbi caeca oriuntur, intereſt. Efficitur, quemadmodum § 120. iam dixi, a membrana partium bullae lateralium, eaque eius parte, qua rima formatur, vtpote quae ipſa inteſtini medii cauitas eſt. Vidi in aliis ſubiectis, non totum inteſtinum intra rimam reconditum fuiſſe, ſed eius partem tantum poſteriorem, minorem; anteriorem, eamque maiorem partem reuolutam fuiſſe et contribuiſſe ad formandum limbum, qui exterius in bulla integra apparet (fig. 1. *e.*). Vidi inteſtinum eo vsque reuolutum, vt totum dicas inteſtinum medium inuerſum fuiſſe. Tum rima eo anguſtior eſt et minus profunda, et limbus eo latior. Quo autem rima profundior eſt, eo quoque limbus ſemper anguſtior, eoque pars minor de inteſtino reuoluta eſt, quod facile intelligitur. In ipſo quoque hoc ſubiecto aliqua omnino pars de inteſtino reuoluta eſt. Quantum

Inteſtinum medium quomodo in huius aetatis embryonibus comparatum ſit accuratius deſcribitur (*l. m.* M. *p.*)

tum enim limbus (fig. 1. *e.*) latior eſt limbo (fig. 3. *k.*), tantum illi de inteſtino acceſſit. Conſiſtit igitur inteſtinum medium totum in duabus laminis, in marginibus ſuis poſterioribus coniunctis et in meſenterium continuatis, marginibus autem anterioribus ſeparatis reuolutis et in bullae partes laterales continuatis.

Inteſtinum rectum quomodo ſit comparatum in embryonibus 4 dierum accuratius exponitur. Fig. 3. *p. q.*

§. 127. Inteſtinum rectum (fig. 3. *p. q.*) integrum eſt, infundibuliforme, vtrinque complanatum. Incipit ſuperius hiatu ſurſum oblique et antrorſum ſpectante; inde curuatum retrorſum deorſum in cylindricam partem verſus anum excurrit. Eius laterales partes planiores (*p.*) continuationes ſunt laminarum (*M*) ex quibus inteſtinum medium conſtat. Hiatus limbo cingitur, a limbo inteſtini medii deriuato. Pars anterior immediate ex ea membranae bullae parte continuatur, quae inuolucrum caudae conſtituit. Margo poſterior eſt continuatio ſuturae inteſtini medii, quae in hoc quidem inteſtino exterius in amnio ſpurio integro obſeruatur, in inteſtino recto vero apparet, dum anterior eius pars ſectione longitudinali aperitur, quod non difficile experimentum aliquoties inſtitui. Hiatus inteſtini recti in praeparato huius figurae patet, dum membrana (*k k.*) in ſitum naturalem reflectitur, et eſt ipſa foueola inferior (fig. 1. N.). Margo nempe hiatus limbo cinctus ora eſt foueolae; cauitas inteſtini recti pro eadem foueolae cauitate facillime et manifeſto recognoſcitur. Atque hic quoque idem, quod

quod de inteſtino medio notaui, obtinet; non totum inteſtinum rectum intra foueolam reconditum eſſe, ſed partem eius ſuperiorem (fig. 3. *p.*) quae prope oram eſt, reuolui in ſitu naturali vna cum membrana (*k.*) et contribuere multum ad augendum foueolae limbum (fig. 1. N.).

§. 128. In dextro latere remotis membranis et partibus thoracis abdominisque lateralibus vna cum ala et pede, viſcera huius conditionis in conſpectum veniunt. In ſuprema et anteriori thoracis regione cor apparet, eiusque quidem ventriculus ſiniſter maior, minor dexter, arcus aortae et auricula dextra. Ventriculus ſiniſter (*a.*) dextro longe maior, neque ideo tectus ab hoc, figurae globoſae eſt, cum in latere ſiniſtro ob canalem auricularem, in quem ille abit, oblongior eſſe videretur. In eius dextra ſuperficie paulo ſuperius ventriculus dexter ſub ſpecie protuberantiae ei adhaeret (*b.*) qui fere ſemigloboſam figuram habet, tamen verſus aortam paulo longior excurrit. Ex hoc aortae arcus (*c.*) adeo oriri videtur, vt non mirum ſit, ſi *Malpighius* hoc phaenomenon pro veritate accepit, quem *Malpighii* errorem Perill. *Hallerus* correxit. Retro arcum aortae auricula dextra ſita eſt. Haec vti ſiniſtra ſaepe ſanguine diſtenta, ſaepe tamen collapſa inuenitur, ſoletque figura eſſe fere rotunda et ſuperficie gaudere leuiter conuexa, margineque anteriori crenato incumbere ventriculo dextro et aortae. Pone hanc pulmo

Viſcera in latere dextro. Fig. 4.

Ventriculi cordis (*a.b.*)

Aorta (*c.*)

Auricula dextra (*d.*)

Pulmo (*e.*)

pulmo apparet (*e.*); corpusculum oblongum fere cylindricum. Tenerrima inter omnes partes substantia gaudent pulmones fere pellucida. Inferior pars mammillaris subtilissimae vesiculae instar primum in conspectum venire solet. Inter cor et pulmonem

Hepar (*f. f.*)

sub ipsa auricula hepatis lobus dexter situs est (*f. f.*) oblongus curuatus superficie anteriori concaua, cui cor incumbit; a parte eius superiori vena caua recipitur.

Ren (*g. g.*)

Ren (*g. g.*) consueta sua figura lineari iuxta spina dorsalem decurrit, in rectum intestinum inseritur.

Arteria vitellaria (*h. h.*)

Sub ipso pulmone arteria vitellaria dextra prodit, descendit, in membrana bullae continuat. Vena vitellaria ex trunco venoso communi (fig. 3. *o.*) orta descendit similique modo in membrana continuat.

Lamina intestini medii dextra (Fig. 4. *i. i.*)

§. 129. Lamina intestini medii dextra, ab extremitate inferiori duodeni (fig. 3. *l.*) orta, a primo hoc ortu in latere dextro apparet (*i.*) sub ipso lobo hepatis dextro (*f.*) inde aequali latitudine descendit. In hoc autem latere dextro nullo limbo anterius lamina intestinalis a reliqua membrana bullae separatur, distinguitur autem ab eadem vti et a posteriori membranae parte, quae mesenterium constituit, maiori aliqua crassitie et opacitate. Intestinum rectum nulla alia phaenomena offert in hoc latere, quam quae in latere sinistro iam obseruata sunt.

Embryo II dies incubatus. Fig. 5. Caput cor.

§. 130. Consideratis hactenus intestinorum primordiis quomodo se habeant in embryonibus IV. dierum;

dierum; eadem primordia nunc repetenda ſunt ex primis, quantum fieri poteſt, embryonibus, vt, vnde haec quoque, quae hactenus vidimus, primordia ſuum ortum duxerint, pateſcat. Primum in hunc finem inquiramus ſubiectum illud idem, quod in prioribus diſſertationibus in figura 6. quoad externum habitum integrum et amnio ſpurio incluſum expoſui; nam in iunioribus nihil aliud de inteſtinis intus deprehenditur, quam quod etiam in integra bulla ſponte in conſpectum venit. In hoc ſubiecto igitur bullam aperui, vaginam capitis a parte embryonis ſupracardiaca detraxi omnemque membranam bullae ad interiores ſui limites prope limbum reſecui, ipſamque, quae adeſt de amnio vero, partem ſupracardiacam remoui, vt nudus embryo remaneret. Tum iſte apparuit ad modum figurae 5. In eo notari merentur ſynciput (*a.*) ex lobis anterioribus cerebri compoſitum, permagnum; deinde occiput (*b.*) et pone illud medullae oblongatae tubercula (*c. d.*) quae partes ſub ſpecie quator vel quinque tuberculorum in vnam ſeriem diſpoſitorum in primis embryonibus XXIV. horarum, qui plane erecti ſunt et proni cubant, iam obſeruari ſolent. Deinde cor ſingulari ſitu ſe offert, quod baſi retrorſum et ea parte in qua apex poſt haec oritur, antrorſum recta reſpicit. In eo corde auricula ſiniſtra (*h.*) maſſulam ſanguinis coagulati in ſua cauitate habet; figurae fere rotundae eſt; tenuiſſima membranula conſtat. Inde canalis auricularis (*i.*) breuis antrorſum

Qqq 2

ſum et paulo ſurſum producitur, qui magis dilatatus in ventriculum ſiniſtrum (*k*) vnum nempe eundemque canalem continuatum abit, tum iſte curvatur paulum deorſum et maxime ſimul dextrorſum; iterumque ad locum (*l.*) retrorſum et ſurſum curvatur et nunc ab ipſo termino (*l.*) aorta eſſe incipit.

Lamina abdominalis, primordium abdominis. Fig. 5.

§. 131. In parte embryonis infracardiaca lamina exterior (*o. p. q. s. t. z.*) rudimentum abdominis exhibet, quod autem magis multo diſtare a perfecto abdomine, quam illud in ſubiecto IV. dierum (fig. 2.), facile patet. Mera ſiquidem lamina eſt oblonga, anguſta, leuiter concaua, neque cum ſacco abdominis, qui largiori cauitate, anguſtiori orificio gaudet, vllam ſimilitudinem habet. In ſubiecto quatuor dierum ambitus cauitatis, niſi maior ambitu aperturae, aequalis ſaltem erat eidem. In hoc embryone leuior concauitas laminae pro cauitate abdominis et peripheria laminae ſeu margo loco aperturae eſt. Haec caeterum peripheria limbo inſtructa eſt tenuiſſimo, qui limbo (fig. 2. *i. i.*) reſpondet. Partes vtrinque laterales laminae (*u. u. v. v.*) referunt laminas (fig. 2. H. H.) quae regionem abdominis lumbarem conſtituunt. De tota regione epigaſtrica, de vmbilicali, de toto hypogaſtrio, de ipſa pelui nihil adeſt. Probe enim notandum eſt, partes, quae in adulto corpore in poſtremis locis abdominis reconduntur, renes, laminas meſenterii, et meſorecti, in hoc embryone nudas eminere ante

oram

oram laminae abdominalis. Laminae ſcilicet interiores (*ſ. ſ. r. r.*) laminas meſenterii repraeſentant, quae renes ſibi exterius applicatos habent, adeo vt ren a lamina meſaraica diſtingui nequeat. Pars autem harum laminarum infima meſorectum exhibet. Quodſi igitur nihil eſt, quod meſorectum aut locum futuri inteſtini recti, neque coccygis rudimentum anterius tegit, peluim adeſſe dici non poteſt. Ex marginibus lateralibus laminae abdominalis, (*s. t.*) ex quibus in ſubiecto quatuor dierum (fig. 2.) nec minus in embryone trium dierum (fig. 6.) amnium verum continuatur, quod in praeſenti ſubiecto II dierum in tota regione infracardiaca deficit, membranula continuatur tenuiſſima, quae ſe applicat ad membranam areae inferiorem, ex laminis (*ſ. ſ. r. r.*) continuatam, et tanquam huius membranae lamella ſuperior ſeu exterior conſideranda eſt.

§. 132. Partes laminae abdominalis laterales (*u. u. v. v.*) ſuperius ad regionem (*p. q*) vbi lamina magis, quam in parte inferiori concaua eſt, anguſtiores euadunt et denique in regione cardiaca ipſa plane euaneſcunt, adeo vt margines laminae abdominalis ſurſum in immediatos ſpinae dorſalis margines anteriores (*h. f.*) tranſeant, valde ſibi propinquos, et faciem ſpinae anteriorem anguſtiſſimam inter ſe includentes; pars enim ſpinae dorſalis (*f. d. e.*) regionem eius thoracicam refert. Ex his marginibus ſpinae dorſalis anterioribus (*h. f.*) vtrinque membrana

Quid loco thoracis ſit? Thorax ipſe deficit.

 brana

brana amnii veri oritur supracardiaci, quae, dum oritur, ilico retrorsum reflectitur circa spinam thoracicam, eiusque vaginam, ipsi spinae conformem, cylindricam, constituit. Membranae autem amnii veri superior pars, quae caput inuoluit, ex processibus (*g. f.*) oritur et actutum inde circa synciput (*a.*) reflectitur et super occiput porro in partem amnii dorsalem continuat. Amnium hoc supracardiacum, angusta capitis et spinae dorsalis thoracicae vagina est, quae in dorso ad regionem cardiacam terminatur plica semilunari. Ex quibus nunc facile patet, nullas hoc tempore thoracis partes laterales, quae in adulto a costis efficiuntur neque partem eius anteriorem, quae a sterno formatur, generatim nullum thoracem adesse. Nimirum in foetu, propediem in lucem prodituro, amnium oritur ex apertura vmbilicali abdominis et continuatur ex cute, quae prius pectoris faciem anteriorem, deinde abdominis regionem epigastricam, et vmbilicalem denique, obduxerat. In quadrupedibus quidem cutis, ex apertura continuata, in longam prius funiculi vmbilicalis vaginam, attenuata, producitur, et tum demum in amnium abit. In auibus vero immediate ex apertura vmbilicali in amnium cutis reflectitur. In auibus igitur in ipsa apertura vmbilicali, vbi cutis in amnium reflectitur, finis abdominis simulque principium amnii ponendum est. Nunc in embryone IV. dierum (fig. 2.) iam vidimus, aperturam vmbilicalem maiorem esse quam in foetu;

fu ; extendere ſe ſurſum ad regionem vsque circiter cardiacam. Ibi ergo immediate ex fine thoracis amnium oriebatur in parte ſuperiori; et regio de abdomine epigaſtrica nulla aderat. Lateraliter amnium oriebatur ex parte abdominis lumbari; pars iliaca et vmbilicalis ſimiliter deficiebant. In praeſenti denique embryone II. dierum apertura vmbilicalis iterum maior eſt; extendit ſe ſurſum ad regionem primae vertebrae dorſi vsque (fig. 5. *f.*) quae eadem ſimul regio maxillae inferioris (g.) eſt; (nam quae pro collo ſumatur, pars ſpinae dorſalis, non datur hactenus; circa diem octauum illa in collum elongatur). Atque in eodem hoc loco ad regionem primae vertebrae dorſi amnium quoque oritur immediate, et reflectitur, vbi ortum eſt, immediate circa ſynciput embryonis. Lateraliter autem oritur vtrinque ex marginibus anterioribus ſpinae dorſalis et ſimiliter actutum reflectitur. Oritur ergo amnium in ipſis iis locis, vbi thorax oriri deberet; idemque in parte ſuperiori punctum (fig. 5. *f.*), prima ſcilicet vertebra dorſi et eadem linea lateraliter (*h f.*), latus vertebrarum dorſalium, quae in corpore adulto principium thoracis exhibent, in hoc embryone principium amnii veri, adeoque finem thoracis ſuppeditant, id eſt, vt paucis, quod res eſt, dicam verbis, thorax hactenus nullus adeſt; nam ſi quis diceret, thoracem tamen adeſſe, ſed inuiſibilem, ſed pellucidum &c. eum alias res agere, facile patet.

§. 133.

Et cor nudum eſt, nec, niſi extimo embryonis inuolucro tegitur.

§. 133. Cor, quod ad faciem anteriorem ſpinae dorſi thoracicae ſitum eſt, nullo thorace hactenus tectum eſſe hoc tempore, non opus eſt, vt moneam, ſiquidem thorax hoc tempore nullus adeſt. Sed neque amnio vero tegitur, niſi in poſtrema forte ſui parte, adeo nempe, vt dimidia circiter poſterior auriculae (*h.*) pars vtrinque ab oriente membranae amnii parte laterali tangatur, anterior vero eius dimidia pars, porro canalis auricularis (*i.*) totus, et totus ventriculus (*k.*) nec non aorta (*l.*) nudae promineant extra hoc amnium thoracicum. Hoc enim dum lateraliter ex marginibus anterioribus ſpinae (*h. f.*) oritur, vix antrorſum producitur, quin actutum reflectitur retrorſum ad formandam vaginam cylindricam circa ſpinam dorſi. Superius autem membrana amnii orta ex proceſſibus (*g. f.*) multo minus cor tangit. Atque hoc valet de corde dum in ſyſtole eſt et contractum. Vbi vero idem in area viua, ſanguine in ventriculum impulſo, diſtenditur, ſaltim ad alteram tantam, quam nunc in hac figura habet, longitudinem antrorſum ſagittae inſtar proſilit. Sic igitur cor nullo thorace, nullo amnio vero, ſed ſolo ſpurio, et quidem ea eius parte, quam vaginam capitis dixi; immediate tegitur. Ita ergo omnino mirum eſt, cor non modo intra embryonem non exiſtere, ſed neque eius proximo inuolucro, amnio vero contineri, ſed ſolo exteriori demum inuolucro, amnio ſpurio nempe, includi. Quod quidem eo magis notan-

notandum mihi fuit, cum Perill. *Hallerus*, princeps harum inquisitionum Autor, cor omni tempore a thorace tectum esse, adfirmauerit (Phys. Tom. VIII. pag. 364.).

§. 134. Si haec lamina abdominalis (§. 131.), rudimentum sacci abdominis in embryone duorum dierum, cum abdomine in embryone IV. dierum, et cum adulto sacco abdominis, comparatur; facile apparet, quomodo successiue eiusmodi perfectum abdomen formetur. In primis, qui obseruati sunt, embryonibus lamina abdominalis plana est, caeterum longa et angusta. Inde incipit marginibus suis lateralibus adeo antrorsum curuari, vt lamina fiat concaua, qualem in praesenti subiecto habemus. Denique margines contrahuntur magis magisque et parietes contra increscunt. Sic species sacci nunc primum oritur, orificio in parte anteriori magno instructi; quae fere conditio est in embryone (fig. 2.). Denique auctis magis continuo sacci, aut conuolutae laminae, lateribus, marginibusque continuo magis constrictis, tandemque concretis, perfectum inde et clausum abdomen euadit. Schol. de formatione abdominis.

§. 135. Thoracem autem oriri, manifestum est, dum membrana quam ex marginibus vtrinque spinae dorsalis thoracicae (*h. f.*) et superius ex processibus (*g. f.*) continuari, et ad amnium verum pertinere dixi, incipit adeo prolongari, vt a processibus (*g. f.*) versus cor descendat, a marginibus Scholium de formatione thoracis.

 vero

vero (*h. f.*) antrorſum verſus idem producatur, prius quam ſurſum ſuper caput et retrorſum ſuper ſpinam dorſalem reflectitur. Tum ea membranae pars, quae a proceſſibus et marginibus verſus cor producitur, quaeque interior eſt, ad thoracem pertinet, eiusque primum rudimentum refert; illa vero, quae poſt reflexionem ſurſum et retrorſum continuat, quaeque exterior eſt, ad amnium pertinet et ipſa membranae reflexione ſuperior thoracica pars aperturae vmbilicalis efficitur. Quo igitur longius membrana, prius quam reflectitur, deorſum et antrorſum producitur, eo maior de thorace pars adeſt. In praeſenti embryone a primo ortu immediate reflectitur; ideoque nullus thorax adeſt, et tota membrana ad amnium pertinet. In embryone trium dierum (fig. 6.) ad notabilem iam longitudinem illa deſcendit tum in parte anteriori (fig. 6. *m.*) quae ſterni primordium refert, tum etiam in parte laterali (fig. 6. *n.*) cuius aliquam in hac figura partem reſecui, vt auricula cordis detegatur. Sic ſucceſſiue deſcendit haec membrana per regionem thoracis, per epigaſtricam regionem ad regionem vmbilicalem vsque, et formatur ea ratione paullatim thorax, regio abdominis epigaſtrica et vmbilicalis. Videtur autem conſtrictio embryonis et capitis depreſſio aliquid ad hunc deſcenſum membranae et formationem thoracis contribuere. Semper enim ſuperior membranae pars, quae ex proceſſibus (fig. 5. *g. f.*) continuatur, ſynciput (*a.*), circa quod illa

aſcenadſcendit, tangit. Dum igitur embryo conſtringitur, et caput deprimitur, neceſſe eſt, vt membrana ſimul deprimatur. Tamen non vnicam, neque praecipuam cauſam eſſe, quin, etiamſi caput erectum teneretur, tamen thoracem forte productum iri, facile largior. Siquidem mechanicis eiusmodi cauſis parum tribuo in formandis corporibus organicis, quae viribus potius, materiae inditis, mea quidem ſententia debentur.

§. 136. In anteriori laminae abdominalis facie concaua ſimilis fere continetur lamina anguſtior et magis conuoluta (*ſ. ſ. r. r.*) cuius in deſcriptione aperturae amnii ſpurii (§. 100.) ſub nomine fiſtulae inteſtinalis mentionem iam feci. Ea vero non inteſtini primitiui ipſius ſed meſenterii primordium eſt, huiusque duas laminas, a ſe inuicem adhuc dum ſeparatas, et late patentes, exhibet, adeo vt inter vtrasque has lamellas, quae fiſtulae parietes conſtituunt, nuda ſpinae dorſalis facies anterior appareat, fundumque fiſtulae huius ſeu laminae concauae efficiat. Vti igitur fouea cardiaca ſuo tempore, die ſcilicet tertio finito, ventriculum; vti rima poſt diem tertium inteſtinum medium; vti denique foveola inferior die tertio finito inteſtinum rectum refert; ita apertura amnii ſpurii ſeu fiſtula inteſtinalis meſenterii primordium exhibet. Margines convolutae huius laminae anteriores limbi illi ſunt (Diſſ prior. fig *6. n. n. m. u.*) interiores ſeu inteſtinales, qui, dum ſucceſſiue conſtringuntur, futuram

Aperturae amnii ſpurii die II. exterius apparentis explicatio. Primordium meſenterii ex duabus laminis diſtantibus conſtans.

efficiunt (Tab. prior. Diff. fig. 7. *l.*). Hinc ergo patet, futuram proprie esse marginem posteriorem intestini medii, seu coniunctionem posteriorem laminarum intestinalium (fig. 3. *m.* M.) vbi hae laminae coniunctae incipiunt mesenterium constituere. Dum igitur sutura formatur, partes huius laminae laterales vniuntur, et mesenterium hac ratione oritur, simulque intestinum medium formari incipit. Illud ergo simili fere modo, vt intestinum, fit, dum duae laminae, quae separatae prius fuerunt, coniunguntur et concrescunt. Et patet igitur, si ad formationem intestinorum respicimus, ea non modo laminas fuisse meras planas certo tempore die scilicet quarto, quae marginibus anterioribus separatis reuolutisque pateant, solisque posterioribus in mesenterii laminas continuatis, cohaereant, sed adeo fuisse repraesentata, prius quam ad hunc statum perveniunt, scilicet secundo die finito, per laminas, quae neque marginibus posterioribus cohaerent, sed a primo principio separatae sunt et late a se inuicem distant. Hoc modo de his laminis mesenterii separatis notandum est, eas adhucdum renes sibi exterius adiectos vtrinque habere, adeo vt laminae (*f. f. r. r.*) renum aeque ac mesenterii primordia referant.

Quid loco intestini medii hoc tempore sit. Nullum eius

§. 137. Quid nunc de intestini medii, primordio hoc tempore sentiendum sit, facile patet. Cum margo fistulae apertae margo intestinalis mesenterii sit, et intestinum igitur in parte membra-

nae

nae exteriori quaerendum ſit; ea membrana vero ab ipſo margine fiſtulae immediate extrorſum reflectatur, adeoque bullam conſtituere incipiat et ab eo termino igitur ad bullam ipſam pertineat; nullus locus et nulla particula in hac membrana ſupereſt, quae pro inteſtini primordio haberi poſſit; conſequenter nullum hoc tempore inteſtini primordium adeſt. In embryone IV. dierum (fig. 3) inteſtinum pars quidem eſt membranae bullae, ſed diſtincta tamen a reliqua bullae membranaa aliqua opacitate, cum reliqua membrana tenuior et pellucidior ſit. In hoc autem embryone nullum non modo ſignum datur, quo interior huius membranae pars, quae inteſtinum referat, ab exteriori diſtinguatur, quae ad bullam pertinet; ſed neque locus datur, vbi inteſtinum exiſtere dici poſſit, neque particula in membrana eſt, quam ad laminam inteſtini referre, vel pro ea ſumere liceret. Eſtque accurate cum inteſtino medio, veluti cum thorace hoc tempore comparatum. Producitur autem lamina inteſtinalis, quemadmodum de thorace dictum fuit, dum membrana bullae proxime ad terminum laminae meſaraicae per nutritionem augetur, et ſic noua membranae pars inter laminam meſenterii et eam membranae partem, quae ad bullam pertinet, producitur. Hoc vero poſt diem tertium denique fit, quando laminae meſenterii iam vnitae ſunt. Diſtinguendum igitur eſſe, videmus, inter productionem et formationem inteſtini medii. In embryone quatuor

rudimentum hactenus adeſt.

tuor dierum vidimus illud inteſtinum nondum formatum eſſe. Erant enim loco inteſtini duae laminae marginibus poſterioribus cohaerentes, anterioribus autem patentes et reuolutae. Dum poſthaec hae laminae etiam anterius coniunguntur; inteſtinum ex his laminis formatur. Hactenus ergo nondum formatum eſt in embryone IV. dierum. Sed laminae tamen adſunt, ex quibus formatur. In praeſenti embryone II dierum iſtae laminae nondum adſunt. Ergo prius laminae producuntur; deinde ex iis inteſtinum formatur.

Primordii ventriculi conditio. (Fig. 5. *n*.)

§. 138. Ventriculum non ſatis diſtincte vidi quidem in hoc embryone; aliquid tamen reperi membranae (*n*) quod eius locum occupabat, ſed ita non erat comparatum, vt pro eiusmodi ventriculo, qualem in embryonibus, aetate ſuperioribus inueni, haberi potuiſſet. Figura conſueta deerat. Erat autem (*n*) membranula ſimplex transuerſa, ex ſuperiori laminarum meſenterii parte continuata. Sicuti laminae meſenterii in partes bullae laterales, ita haec membranula in vaginam capitis producebatur, quemadmodum hoc ipſum in externa bullae facie (Tab. Diſſ. prior. fig. 6.) apparet. Haec itaque cum primordii ventriculi ſit conditio, pro vero quoque primordio eius hanc membranulam agnoſco, ſed tamen diuerſo ab illis (fig. 3 et 6.) et gradu perfectionis inferiori ideo, quod ſolita figura externa conoidea non gaudebat.

§. 139.

Quid loco primordii inteſtini recti adſit. Sola limborum interiorum coniunctio. (Fig. 5 z.)

§. 139. Euidentius autem inteſtini recti primordium, quomodo comparatum ſit hac aetate, conſtat. Laminae meſaraicae, quae ſuperius latiores ſunt, deorſum continuo anguſtiores euadunt, donec in regione (y.) praeter limbum nihil adſit. Hic ſolus limbus ergo ad finem vsque extremitatis medullae vtrinque decurrit, ibique ex vtroque latere coniungitur (z) extremitatemque globoſam ſpinae dorſalis (y.) cingit. Haec inferior itaque limborum coniunctio (z.) primordium inteſtini recti eſt. Ex comparatione enim non modo cum embryone ſequenti (fig. 6.) vbi huius inteſtini primordium infundibili forme iam eſt; ſed etiam ex connexione partium facile patet, hanc limborum coniunctionem eſſe marginem illius inteſtini, quale (fig. 6) exiſtit, ſuperiorem, ſeu oram, qua id terminatur, et quae ſimul limbum foueolae inferioris in bulla efficit, quae quidem non meſorectum ſed ipſum inteſtini primordium eſt.

De formatione inteſtini recti Scholium.

§. 140. Inteſtinum rectum igitur primam ſuam originem inuolucro caudae debet et inde formandae foueolae inferiori; quemadmodum thoracem vidimus pendere a parte ſuperiori amnii veri, qua vagina circa caput formatur; vtrique enim ſimilem eſſe rationem facile patet. Dum membrana areae inferior circa extremitatem embryonis inferiorem in ſpeciem bullae eleuatur, quae inuolucrum caudae conſtituit, huius bullae margo ſuperior ipſa haec

haec pars limbi eſt, vel coniunctio limborum, quam pro recti primordio agnoſcimus. Margo nempe ille ſuperior inuolucri efficitur, dum membrana ad hunc locum reflectitur et rugam producit, cuius lamina interior adſcendens inteſtini recti primordium eſt, exterior deſcendens ad inuolucrum pertinet. Simili modo vidimus thoracem fieri, dum membrana a proceſſibus (*g. f.*) deſcendens primordium thoracis, ſaltem aetate paullulo ſuperiori, eademque reflexa adſcendens amnium verum referret, eaque ratione ſimilem rugam produceret. Deinde tota haec ruga dum per nutritionem pars interior aeque ac exterior elongatur, magis magisque adſcendit ad regionem pubis vsque; ſic lamina interior, quae inteſtini recti paries anterior eſt, perficitur; ſimulque eiusdem parietes laterales et poſterior creſcunt et inteſtinum infundibuliforme oritur.

De formatione peluis Schol.

§. 141. Hinc peluis ortus intelligitur, cui omnino iterum eadem inteſtini recti et thoracis conditio eſt. Quemadmodum inteſtinum continuatio inuolucri caudae eſt, et cum eo inuolucro rugam producit, ita peluis primordium, vti thorax, amnii veri continuatio eſt, et ſimilem rugam cum eo conſtituit, quae inter vtrasque laminas rugae inteſtini recti continetur, ſimulque cum hac ruga creſcit et adſcendit in ſolitam foueolae inferioris altitudinem. In hoc quidem embryone peluis nondum obſeruatur, ſed in adultioribus eius primordium ſub ſimilis

ſimilis limborum abdominalium coniunctionis ſpecie primum apparet; qui limbus marginem oſſium pubis tum in ſpecie refert. Iſte ſenſim eleuatur et in eam denique formam abit, quam in figura ſequenti conſiderabimus.

§. 142. Generatim, quemadmodum in Diſſertatione praecedenti, analogiam eſſe vidimus in ſtatu embryonis primordiali inter totum truncum, tubum cibarium, ſyſtema nerueum areolamque pellucidam; ſingularem magis ſimilitudinem obtinere facile patet, inter truncum embryonis in ſpecie et tubum cibarium. Thoraci quippe ventriculus, abdomini inteſtinum medium, peluique inteſtinum rectum reſpondet. Tubus cibarius in amnium ſpurium continuatur, eiusque principium eſt, adeo vt ex ventriculo in ſpecie vagina capitis, ex inteſtino medio partes bullae laterales, et inuolucrum caudae ex inteſtino recto propagentur. Similis conditio trunco eſt reſpectu amnii veri, in quo easdem facile, quas in ſpurio notaui, partes diſtinguas, vaginam capitis, partes laterales, et inuolucrum caudae. Simili igitur modo analogae trunci partes in analogas partes amnii veri continuantur, iisque principia ſuppeditant. Ex thorace, vel in iuniori embryone ex radice thoracis vagina capitis in amnio vero oritur. Ex faſciis abdominalibus, quae regionem lumbarem referunt, partes laterales amnii veri, ex pelui inuolucrum caudae in amnio vero producitur. Porro autem vidimus (§. 135.) in exemplo thoracis

Scholium de Analogia inter truncum embryonis in ſtatu primordiali et tubum cibarium.

et in peluis exemplo, ita esse cum harum partium trunci formatione comparatum, vt prius existat amnium verum, quod in ipsis iis locis, ad spinam nempe dorsalem immediate, oritur, in quibus partes illae trunci, si adessent, oriri deberent. Tum ipsum harum partium amnii veri principium ad spinam dorsalem prolongatur, et hac ratione partibus trunci, veluti thoraci, pelui, formandis ansa praebetur. Eandem vero conditionem respectu formationis vidimus quoque in intestino medio (§. 137.) cuius locum in embryone duorum dierum (vbi amnium verum quoque thoracis locum occupat,) partes bullae laterales occupabant, adeo vt hae immediate ex marginibus anterioribus laminarum mesaraicarum orirentur, vbi laminae intestini medii oriri debuissent. Similem quoque in intestino recto conditionem vidimus (§. 139.). In ventriculo (§. 138.) non ita distincte quidem vidi, sed nullum dubium est, simili quoque modo cum hoc esse comparatum. Denique abdomen in primo initio lamina explanata est, quae sensim conuoluitur, marginibusque constrictis et lateribus auctis in saccum mutatur, tandemque clauditur (§. 134.). Idem de intestino medio valet. Imo de toto trunco affirmare licet, eum fuisse laminam planam, quae margine superiori deorsum voluto thoracem, margine inferiori sursum curuato peluim, et marginibus lateralibus ad se inuicem antrorsum conniuentibus abdomen producat. Atque idem omnino de tubo cibario valet.

let. Neque negligendum eſt, ſicuti caput embryonis depreſſum formationem thoracis adiuuat (§. 135.), ita ſimili modo, conſtricto rurſum per thoracem corde, et deorſum compreſſo, adiuuari formationem ventriculi; cui formando vagina capitis ſimili modo, ac amnium verum thoraci, anſam praebet.

§. 143. Dum lamina abdominalis, conuoluta, marginibus conſtrictis, tandemque concretis in ſaccum vltimum abit clauſum, et eam formam perpetuo retinet; lamina vero inteſtinalis conuoluta cylindricum tubum apertum prius, deinde marginibus conſtrictis clauſum efficit, et denique, formam tubi retinendo, in longiſſimum canalem extenditur, multifariam curuatum et complicatum: an diuerſi huius euentus phaenomenorum, in ſtatu primordiali ſimilium, cauſa, vel aliquid cauſae in eo conſiſtit, vt abdomen inteſtinum continens, ab eo dilatetur in latum ſaccum? inteſtinum vero in abdomine contentum, non dilatatum retineat ideo tubi ſpeciem, et cogatur, dum in minori ſpatio comprimitur, in plexus ſe complicare? Non multum me credere his explicationibus mechanicis, ſuperius iam dixi. Thoracem, abdomen, peluim, ventriculum, inteſtina, formari, non perpetuo adfuiſſe, id vidimus. Qua ratione formentur, id vidimus quoque; cauſas efficientes non vidimus, neque de iis ſermo mihi eſt in his diſſertationibus.

Scholion. De cauſa differentiae inter abdomen et tubum cibarium in adulto.

Renum primordia (*ſ. ſ. r. r.*)

§. 144. Denique renes quoque laminis meſenterii adhaerere, iam monui, quibus igitur non ſolum meſenterii, ſed renum quoque primordium repraeſentatur, adeo, vt interior ſuperficies laminas meſenterii, exterior renes exhibeat. Non quidem ſeparaui has partes a ſe inuicem, vt vtraque haec primordia diſtincta viderim; ſed multa tamen ſunt, quae de vera exiſtentia renum, his laminis applicatorum, dubitare non ſinunt.

Phaenomena interna in embryone III. dies incubato. fig. 6. Caput (*a. b. c.*)

§. 145. Ad ſubiectum denique tranſeo, cuius in prioribus diſſertationibus externa inuolucra expoſui, vltimum, quod in figura ſeptima ibidem delineaueram, quod nonniſi duos dies duodecimque horas incubatum quidem fuit, ſed ſubiecto tres dies incubato facile tamen aequale erat. Inuolucris itaque omnibus exutis, praeterea laminis abdominalibus lateralibus, inferiorique parte laterum thoracis remotis partes interiores ſecundum fig 6. in latere ſiniſtro hoc modo in conſpectum veniunt. Caput, quod eleuaui, vt cor et ventriculus diſtincte videri poſſint, adeo erat poſitum, vt occiput (*b.*) antrorſum, ſynciput (*a.*) verſus cor proſpiceret. In anteriori parte thoracis cor, vt ſolet, comparet, adeo ſitum, vt ventriculo ſuo, qui die ſecundo (fig. 5.) antrorſum directus erat, oblique deorſum nunc proſpiciat, quemadmodum die quarto finito idem ventriculus recta deorſum et potius retrorſum paulisper ſpectat (fig. 3). Egregie hanc ſitus cordis mutatio-

Cor *o. p. q.*

tationem intelligere licet ex incremento thoracis (§. 135.) explicato. Cum die ſecundo nullus adſit thorax, qui poſſit cor continere et comprimere, ventriculus ſanguine dilatatus recta antrorſum proſilit, eundemque ſitum in ſtatu, vbi neque agit, neque patitur, inter ſyſtolen et diaſtolen medio, conſeruat (fig. 5.). Tertio autem die finito dum thorax in parte ſuperiori formari incipit, cor ex priori ſitu deorſum paullatim premitur; denique die quarto, vbi thorax magis increuit illud magis quoque verſus corpus embryonis coercetur. Ex ſolis his phaenomenis, niſi loco thoracis amnium verum a ſpina dorſali oriri et ſurſum abire vidiſſem die ſecundo, colligeret forte, nullum thoracem exiſtere, Perilluſtris Vir, qui cor nudum eſſe negat. Auricula ſiniſtra (*o.*) maſſulam ſanguinis fouet, vt ſolet, coagulati, tenuisque veſiculae inſtar transparens eſt, et figuram globoſam habet. Inde paullo anguſtior canalis auricularis (*p.*) oblique antrorſum deſcendit et in protuberantem ventriculum ſiniſtrum (*q.*) dilatatur, ex quo canalis cordis in dextrum latus curuatur ibique in arcum aortae adſcendit. Retro cor hepatis lobus ſiniſter apparet oblongus, tenuis, deorſum in membranam (*r.*) continuatus et retro hunc lobum hepatis ventriculus (*s.*). Hepar.

§. 146. Iſte nunc iam ea figura et habitu gaudet, quo ſatis manifeſto cognoſci poſſit, figura nempe oblonga, fere conoidea, extremitate ſuperiori angu- Ventriculus cuius cauitatem foueam cardiacam esse in hoc embryone ostenditur.

angustiori, ex oesophago continuata, quae rudimentis pulmonum tegitur. Inde paulo antrorsum curvatus descendit et apertura inferiori denique terminatur. Haec apertura ventriculi (*v.*), quae eadem fouea cardiaca est, tenero limbo cingitur, qui deorsum in limbum intestini continuat, et sicuti in facie externa bullae vena adscendens recta in foueam cardiacam intrare obseruatur, ita in hac quoque superficie interna haec vena egregie apparet (*t.*), sanguine distenta, quae adeo in ventriculi cauitatem recta intrat, vt totam hanc cauitatem occupet, et ventriculus sanguine venae turgere, eique quasi externum inuolucrum seu vaginam praebere videatur. Tamen proprie non in cauitatem ventriculi, sed potius in eius membranam transire dicenda est haec vena, licet totam cauitatem fere occupet. Ventriculus enim continuatio est membranae bullae; iam vero hactenus in ea membrana intraque eius substantiam, quasi inter duas laminas vena processit; ergo in ventriculo quoque in ipsa eius membrana procedere pergit. Videtur autem in cauitatem introire, quia vena sanguine turget et super parietem internum ventriculi tantum eminet vt parua ventriculi cauitas ea occupetur. In aliis subiectis, vbi vena sanguine minus distenta fuit, vena quoque minus cauitatem ventriculi tenere visa est. Caeterum, foueam cardiacam esse cauitatem ventriculi in hoc embryone, ex sola consideratione huius figurae eiusque comparatione cum (fig. 7. Diss. praec.) patet.

tet. Vidimus exterius in amnio ſpurio integro (fig. cit.) venam adſcendentem in foueam cardiacam intrare et ſe abſcondere. In membranae ſuperficie interna (fig. 6.) recognoſcimus eandem venam in eodem loco, vbi exterius in foueam cardiacam intrabat, in ventriculum intrare. Orificium igitur foueae cardiacae orificium ventriculi, illius cauitas huius cauitas fuit. In ſubiecto illo IV. dierum (fig. 3.) quod aptum quidem erat ad demonſtrandum primordium inteſtini medii, eiusque ortum, non adeo euidenter conditio ventriculi apparebat, qui hoc tempore cum parte inteſtini duodeni integer iam eſt et perfectus. Rima nimis iam conſtricta et orificium foueae cardiacae a ventriculo remotum eſt; adeoque fouea cardiaca ad ventriculi cauitatem ducit quidem in illo IV. dierum embryone, non autem ad ipſum ventriculum pertinet, ſed ad duodenum potius. In hoc autem III. dierum embryone fouea cardiaca ab ipſo ventriculo efficitur.

§. 147. Retro ventriculum meſenterium incipit et deorſum inter limbum inteſtinalem et renem ad inteſtinum rectum vsque continuat (*y.*). Hoc nunc idem eſt, quod (fig. 5.) laminis, ex quibus conſtat, ſaparatis a ſe inuicem et patentibus fiſtulae apertae ſpeciem prae ſe ferebat, et cuius laminae anguſtiores renibus tegebantur, quod nunc laminis extenſis et vnitis membranam vnam refert. Ad limbum ſcilicet inteſtinalem (*w.*) vsque laminae cohaerent,

Meſenterium nunc formatum integrum (fig. 6. *y.*)

et

et idem locus futurum arcum minorem inteſtini, vel marginem poſteriorem laminarum inteſtinalium refert; cum ipſo vero limbo illae laminae incipiunt ſeparari et in bullam reflecti. Caeterum arteria (B) inter renem et meſenterium prodit et in membrana bullae porro continuat.

Laminae inteſtini medii, vix inchoatae. (*v. w. z.*)

§. 148. De inteſtino medio nihil praeter limbum (*w*) adeſt, qui adeo tenuis et debilis quidem eſt, vt vix diſtinguntur. Incipit a limbo aperturae ventriculi, continuat deorſum et in inteſtinum rectum abit. Hic ergo ſola membranae pars eſt, quae ad inteſtinum pertinet, eiusque primordium refert. Quicquid retro hunc limbum eſt ad meſenterium, quicquid ante eundem eſt ad membranam bullae pertinet. Laminae enim a ſpina dorſali vsque ad limbum connexae ſunt et meſenterium igitur referunt. Limbum autem marginem anteriorem eſſe laminae inteſtinalis patet ex comparatione figurae tertiae, et quae anterius ſequitur membrana (*x.*) manifeſto eadem eſt (fig. 3. *n.*). Pro lamina igitur inteſtinali nihil reſtat praeter ipſum limbum. Caeterum limbum hunc eundem eſſe qui (Diſſ. praec. fig. 7. *n.*) exterius apparebat et futuram igitur marginem poſteriorem eſſe inteſtini medii, quilibet facile videt, adeo, vt de laminis inteſtini medii hoc etiam tempore nihil adſit praeter marginem eorum poſtremum, quo illae coniunctae meſenterium conſtituere incipiunt.

§. 149.

Inteſtinum rectum eiusque formatio (z. l.)

§. 149. Inteſtinum rectum in latere hoc ſiniſtro infundibuliforme (*z. l.*) apparet, apice oblique deorſum retrorſum, hiatu ſurſum antrorſum poſito. Ille in anum abit; hic aperturam et foueolam inferiorem conſtituit. Dum enim membrana (*x.*) reflectitur; in eo loco, vbi nunc inteſtinum eſt (*z. l.*) foueola apparet, adeo vt foueola ſit inteſtini recti cauitas. Ex comparatione autem huius cum priori figura apparet, quomodo inteſtinum rectum increſcat. Dum ſutura formatur, laminae meſenterii a renibus vtrinque ſoluuntur, vniuntur et conſtituunt meſenterium. Interim limbus ille inuolucri caudae et rudimentum inteſtini recti (fig. 5. *z.*) dum nutritur et increſcit, adſcendit, et euadit ex ſimplici ruga paries inteſtini anterior; ſic tubus hic infundibuliformis oritur.

Peluis (l. i.) eiusque formatio.

§. 150. Similis inteſtini recti conditio pelui (*l. i.*) eſt Hic priori tempore ſimiliter ſub plicae ſpecie, exterius circa plicam inteſtinalem (fig. 5. *z*) poſitae, apparet et coniunctio inferior limborum abdominalium eſt, marginemque pubis refert. Tum ſimili modo iſte margo nutritione auctus adſcendere, globoſamque extremitatem ſpinae dorſalis, quam hactenus cingebat (fig. 5. *y.*) inuoluere incipit (fig. 6. *k.*). Deinde porro vsque in regionem foueolae inferioris adſcendit (fig. 6. *i.*). Sic paries anterior peluis, ſimulque craſſum inuolucrum producitur, quo inteſtinum rectum, interea formatum, aeque ac finis globoſus (*k.*) includitur, quodque peluim conſtituit.

ſtituit. Hoc peluis primordium in media parte conſtringitur ibique regionem perinaei efficit. Inferius eadem adhuc ſpinae dorſalis extremitas globoſa ſed inuoluta carne peluis apparet (*k*) et primordium vropygii conſtituit, ſoletque cauda vel apex caudae vocari. Superius idem adhuc (fig. 5. *z*.) margo ſed craſſior ex quo amnium verum deriuatur, et qui regionem pubis nunc refert, apparet (fig. 6. *l*. *i*.).

Renes (A).

§. 151. Renes ſub ſolita figura laminarum anguſtarum longitudinalium apparent (A.) ſoluti autem ſunt a laminis meſenterii, quibus hactenus adhaerebant.

De pedibus et alis.

§. 152. De pedibus et alis quaedam adhuc addam. Apparere eas primum ſub tuberculorum figura in theoria generationis dixeram. Videmus haec tubercula in embryone IV. dierum (fig. 2) per amnium verum transparentia. Ala (fig. 2. *f*.) ſuperficie externa conuexa glabra gaudet. Superficies interior, quae ad thoracem applicata eſt, plana eſt, glabra, inaequalis, impreſſionibus eminentiisque inſtructa. Ad marginem poſteriorem, quae pars craſſiſſima totius tuberculi eſt, qua idem corpori adhaeret, ſuperius inferiusque productiones carneae excurrunt, quibus ſimiliter ala corpori adfigitur. In pede ſimiles ſunt ſuperficies; margo vero qui in hoc ſitu inferior eſſe videtur, embryone extenſo, poſterior eſt, quo pes corpori adhaeret, ex quo ſimiles quoque productiones excurrunt. Margo anterior,

rior, in hoc ſitu ſuperior, acutus eſt. Sic quarto die finito haec rudimenta ſe habent. In praeſenti embryone aliter comparata ſunt, vti ex ſolo pede (fig. 6. *b.*) patet. Totum abdomen hoc tempore apertum eſt et limbo craſſiuſculo terminatur. In ipſo hoc limbo ad ſolita loca ſuperius alarum, inferius pedum tubercula propullulare incipiunt vtrinque. In embryonibus (Diſſ. praec. fig. 5 et 6) nulla prorſus in limbis tubercula diſtinguebantur. In illo quidem (fig. cit. 5.) lamina abdominalis a lamina inteſtinali nondum plane ſeparata erat; limbi tamen in regione alarum ſeparari incipiebant. In hoc (fig. cit. 6.) limbi abdominis toti ſeparati ſunt, ſed nulla veſtigia tuberculorum in iis deprehenduntur. Quando haec primum apparent, vix a limbo ipſo diſtinguuntur et merae eius incraſſationes ſunt, quae pedum et alarum prima rudimenta referunt. Poſtea vero, dum ex labio interiori limborum lamina abdominalis antrorſum prolongatur, tuberculum in ſuperficie exteriori abdominis exiſtere incipit, quod hactenus in ipſo margine eius ſeu limbo collocatum erat. Interim continuo figuram meri tuberculi, qualem in praeſenti quoque ſubiecto (fig. 6. *b*) habent, conſeruant; denique die quarto fere finito eam ſingularem formam induunt, (fig. 2.) quam deſcripſi.

Scholion. De primis rudimentis digitorum.

§. 153. Dixeram in libro, germanico ſermone ſcripto, de generatione (§. 70.), quo tempore prima

prima rudimenta digitorum nondum videram, fore, vt haec, si deprehenderentur, simili tuberculorum sub specie in conspectum venirent. Saepe post haec embryones eius aetatis offendi, vbi prima digitorum initia videre licuit. Recte quidem tubercula dixi esse. Nam vidi vbi vix eminebant; vidi vbi successiue magis protuberabant, accurate rotunda in ambitu suo. Eatenus vero erraui, quod credidi, ex margine anteriori acuto ipso fore vt prodeant, quae potius in superficie interiori prodeunt prope marginem anteriorem, et repraesentant in specie extremos apices digitorum. Retro haec tubercula rotunda longitudinales totidem eminentiae in hac interiori superficie apparent, ex anterioribus rotundis versus marginem pedis posteriorem deriuatae, quae digitorum phalanges referunt. Vix eminent in superficie interiori, quae inferior pedis futura est, et marginem anteriorem non attingunt; successiue autem elongantur, vt ante marginem prominere incipiant, tandemque in digitos excrescunt. Margo vero ille pedis anterior acutus; in plicam paruam cutaneam abit, quae in adultiori pede supremam articulationem digitorum tegit partimque in eam, quae digitis intermedia est. Facile patet, in auibus aquaticis fore, vt idem margo in illam similem sed longe maiorem plicam interdigitalem natatoriam abeat, quae his animalibus propria est.

§. 154.

§. 154. Ex hoc ſtatu embryo in illum, quem ſub initio huius diſſertationis deſcripſi, (fig. 2. 3.) ſolo partium incremento tranſit. Pars membranae, quae oram foueae cardiacae eandemque ventriculi efficit, increſcit. Sic orificium deſcendit, ventriculo permanente in ſuo loco; oritur ergo hac ratione pars duodeni. Limbus inteſtini medii, contiguus in hoc embryone margini meſenterii, per incrementum membranae ab eodem antrorſum remouetur; oritur ergo inter limbum et marginem meſenterii pars membranae noua, quae laminam inteſtini medii conſtituit. Denique, dum inteſtinum rectum creſcit, eius orificium adſcendit, adeo, vt totum inteſtinorum orificium, fouea nempe cardiaca, rima et foueola contrahantur magis magisque, et ventriculus contra et inteſtina interius increſcant. Sic ſtatus (fig. 2. 3.) oritur. Idem hoc negotium nunc porro continuatur. Fouea cardiaca exterius et rima magis conſtringuntur, adeo, vt denique ad paruum orificium redeat haec inteſtinorum apertura; ſicuti in prioribus diſſertationibus iam dixi; quo ipſo effici, facile patet, vt totum inteſtinum medium denique in integrum tubum transmutetur, relicto tantummodo paruo foraminulo in parte eius media anteriori, ex quo membrana areae inferior, ſeu interior vitelli tunica, continuatur. Pars huius tunicae, quae anguſtum illud orificium conſtituit, ipſa denique elongatur et in ductum abit breuem, qui ductus communicatorius eſt inter ſaccum vitelli et inteſti-

Quomodo inteſtina ex hoc ſtatu, quo II. die gaudeat in illum tranſeant in quo ſunt die IV. Qua ratione porro perficiantur.

inteſtina. Interim, dum haec exterius aguntur, dum inteſtinum clauditur, hoc quoad longitudinem, figuram et ſitum interius ſimul mutatur. Ventriculus, hactenus perpendiculariter ſitus, vt cardia ſurſum, pylorus deorſum ſpectet, in ſitum transverſalem tranſit. Duodenum (fig. 3. *i. l.*) in arcum incipit intumeſcere, anterius verſum, qui inteſtini arcus ſuperior et minor eo tempore eſt. Tota media et inferior inteſtini portio (*m.* M.) ſecundum maiorem arcum producit, antrorſum ſpectantem, ſed adeo ſitum, vt ſuperior eius pars, a portione (*m.*) formata in latere embryonis dextro in conſpectum veniat, in ſiniſtro ſe fere ſubducat; inferior autem arcus pars, a portione (M.) producta magis in ſiniſtra regione verſetur, et minus inde in dextro latere appareat. Haec die ſexto et ſeptimo fiunt. Denique plures eiusmodi arcus et flexiones canalis inteſtinalis producuntur.

§. 155. Loco plurium corollariorum, quae ad dilucidandam theoriam generationis ſpectarent, vnum tantummodo ſubiungam, quod epigeneſin confirmet. Vidimus varias corporis partes, veluti thoracem (§. 132.) certo tempore nondum exiſtere, et exiſtere eo tempore non poſſe; neque concludimus, thoracem non exiſtere, eo argumento, quod obſeruatus non eſt; ſed vidimus in eo loco, vbi thorax oriri deberet, oriri amnium verum, quo notum eſt, terminari in foetu anterius totum truncum;

cum, atque hinc concludimus, quod iſte thorax, qui non apparet, non exiſtere poſſit, adeoque non exiſtat. Idem de pelui obſeruatum eſt, cuius locum pars inferior amnii occupat (§. 141.) ſimiliter vidimus in eo loco, vbi lamina inteſtini medii vtrinque incipere deberet, aut limbum inteſtinalem, qui terminus huius laminae anterior eſt, (§. 148.) aut immediate partes bullae laterales incipere (§. 137.) certo teſtimonio, has laminas inteſtini medii hoc tempore adeſſe non poſſe. Idem de inteſtino recto valet (§ 139.). Hoc primum argumentum eſſe puto epigeneſeos; vnde nempe colligi poteſt, partes corporis non ſemper exſtitiſſe ſed ſucceſſiue productas eſſe; quomodocunque caeterum haec productio fiat; nam non dico per concurſum particularum; per modum fermentationis; per cauſas et rationes mechanicas; per vires animae partes produci; produci vero dico. Si illae partes in ſtatu paulo adultiori conſiderantur, nouo argumento anſam praebent. Nunc primordia earum adſunt, ſed ita comparata, vt facile cognoſcas, nondum eſſe partes integras, iamiam formatas, ſed talia rudimenta, quae in eiusmodi partes transformanda ſunt. Loco inteſtini medii, id eſt totius tractus inteſtinorum, quae inteſtino duodeno et recto intereſt, duas ſimplices laminas vides, marginibus anterioribus reuolutas, caeterum planas, ſeparatas et diſtantes a ſe inuicem (§. 126.), immo priori tempore per totum meſenterium ſeparatas (§. 136.). Quaero igitur, an hae lami-

laminae ſint integrum inteſtinum? Nemo ſane affirmabit. Hinc concludo igitur, partes integras et formatas non ſemper exſtitiſſe, ſed certo tempore poſt conceptionem formatas eſſe. Nolo vberius loqui de ſtatu embryonis XXIV· horarum, vbi ſimpliciora multum omnia ſunt; nam non credo, validiora his, quae iam dixi, dici poſſe.

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Pars areae, cui embryo inhaeret, exſciſſa, in ſuperficie inferiori; quo amnium ſpurium cum transparente embryone appareat, ex ouo IV. dies incubato. Pertinet haec figura ad ſeriem obſeruationum in diſſertationibus prioribus deſcriptarum, quibus amnium ſpurium eiusque phaenomena externa exponuntur; ſequitur immediate poſt VII. figuram Tabulae prioris et explicatur §. 113. 114.

r. r. Pars areae vaſculoſae exſciſſa, inuerſa, cui bulla incumbit.

a. b. c. Bulla ſiue amnium ſpurium curuatum fere reniforme.

g. h. i. l. Embryo ſimiliter contractus transparens. *h.* occiput. *g.* ſynciput. *i.* ſpina dorſalis. *l.* ala ſiniſtra.

k. Au-

k. Auricula cordis ſiniſtra, in qua maſſula ſanguinis coagulati.

B. Thoracis pars lateralis ſiniſtra,

C. C. Limbus orificii abdominis, idemque orificii amnii veri limbus (fig. 2. *i*. *i*. Tab. prior. Diſſ. fig. 7. *x*. *x*.).

e. Limbus inteſtinalis, idemque orificii amnii ſpurii limbus (Tab. prior. Diſſ. fig. 7. *n*. *n*.).

m. Spatium in regione abdominali inter amnium ſpurium et verum, vt quae partes in eo continentur, extra abdomen vel thoracem et extra amnium verum ſitae ſint. Sunt autem ſitae in eo ſpatio inferior pars cordis, totum inteſtinum medium et ſuperior pars recti.

d. De inteſtino medio aliquid transparens. Reliquae partes, compreſſae, non diſtincte transparent.

f. Fouea ſubrotunda; ex fouea cardiaca, rima et foueola inferiori orta, adeo tamen comparata, vt in parte eius ſuperiori fouea cardiaca, in media rima in inferiori foueola ſatis diſtincte adhuc cognoſcantur.

N. Foueola inferior cum ſuo limbo.

p. Vena vitellaria dextra. *o*. arteria eiusdem lateris. *n*. arteria vitellaria ſiniſtra. *s*. vena adſcendens.

q. Veſicula vmbilicalis, a membrana areae tecta.

Fig. 2. Idem subiectum, in eodem situ, membrana amnii spurii a superiori areae membrana soluta, antrorsum reflexa, resecta ad partem vsque *n.* relictam (vid. §. 120.) quo embryo apparet solo amnio vero inuolutus.

a. Particula membranae areae superioris, in solo hoc loco amnio vero adhaerentis.

b. b. b. amnium verum collapsum. (§. 121.).

c. Embryonis occiput. (*d.*) Synciput. D. Tuberculum medium, quod post diem VI. euanescit.

e. e. Spina dorsalis E regio ossis coccygis.

f. Ala sinistra. F. pes sinister (§. 152.).

g. Auricula sinistra cordis (§. 123.).

h. Thoracis pars lateralis. Rugae et plicae ab amnio vero productae.

i. i. i. Limbus orificii abdominis, ex quo membrana amnii veri continuata immediate reflectitur ad amnium formandum, adeoque aperturam relinquit in abdomine (*i. i. i.*) ambitu abdominis ipso non minorem (§. 120.).

H. H. Regio abdominis lumbaris, quae sola fasciae longitudinalis instar spinae dorsi vtrinque adhaerens de abdomine adest, et anterius limbo terminatur. (§. 120.)

I. Huius fasciae posterior pars gibba, a subiecto rene (fig. 3. *s. s.*).

k. l. m. n. o. p. partes extra abdominis cauitatem prominentes.

k. k.

k. k. Limbus inteſtinalis (fig. 1. *k.*) ex quo membrana amnii ſpurii *n.* continuata ilico reflectitur ad formandum amnium ſpurium relinquendo tanquam orificium eiusdem foveam illam (fig. 1. *n.*) (§. 122.).

l. Quod videtur eſſe interſtitium inter limbum (*k.*) et partes (*m.*) eſt profundior inteſtini plica (vid. §. 122.).

m. Inteſtini medii, paulum complicati partes eminentiores eaedem, quae transparebant per membranam amnii ſpurii (fig. 1. *m.*) (§. cit.)

n. Pars membranae amnii ſpurii antrorſum reflexa plicata (§. cit.).

o. Eiusdem membranae pars quae verſus ventriculum continuat per foueam cardiacam, quae truncum venoſum continet (§. 125.).

p. Superior pars inteſtini recti ipſius (fig. 3. *p.*).

Fig. 3. Idem ſubiectum; deſtructo amnio; remotis partibus lateralibus thoracis, faſciisque abdominalibus vna cum limbo, cum alis pedibusque et capite; remanente ſola de trunco ſpina dorſali; quo viſcera in conſpectum veniant (§. 124.).

a. Ventriculus ſiniſter cordis. *b.* canalis auricularis. *c.* auricula ſiniſtra. *d.* arcus aortae (§. 124.).

e. Saccus venarum, in quo orificium venae abſciſſae. (ibid.).

f. Hepatis lobus finifter. (ibid.) *g.* membrana inde deducta ad membranam amnii fpurii applicata; membranofi, quod auibus eft, diaphragmatis primordium.

h. Oefophagus. *i.* ventriculus. (§. 125.)

k. k. Limbus inteftinalis, quo membrana amnii fpurii (*n.*) ab inteftinali lamina (*m.* M,) cuius illa continuatio eft, diftinguitur, qui, fi vna cum membrana (*n.*) conformiter fitui naturali reflectitur, foueam illam (Fig. 1. *n.*) eandemque cauitatem inteftini reftituit. (§. 122.)

l. Duodenum, retro membranae partem (*o.*), cui adhaeret, defcendens (§. 125.).

m. M. Inteftinum medium. Eft mera lamina inteftinalis finiftra, quae cum fimili, dextra, fibi contigua, inteftinum medium refert (§. 126.).

n. Pars membranae amnii fpurii, ex lamina inteftinali continuata, plicata.

o. Huius membranae pars oblique furfum fuper inteftina decurrens, quae truncum venofum continet (§. 2. *o.*).

p. Pars fuperior inteftini recti infundibuliformis; eadem, quae (fig. 2. *p*) extra peluim et extra amnium eminebat, quae in fubiecto integro fig. 1. foueolam inferiorem conftituit (§. 127.).

q. In-

q Inteſtini recti pars inferior integra cylindrica, vt ipſe ventriculus hac aetate eſt, reliquo inteſtini tubo, his intermedio, toto anterius aperto. (ibid.)

r. r. Meſenterium; eadem membranae amnii ſpurii (*n.*) et inteſtinalium laminarum continuatio, in quo vero ambae laminae cohaerent, quae huc vsque ſeparatae ſunt.

s. s. Ren ſiniſter (§. 124.) *t. t.* ſpinae dorſalis pars.

u. Arteria vitellaria ſiniſtra.

Fig. 4. Idem praeparatum figurae 3. in latere dextro. (§. 128.).

a. Ventriculus cordis ſiniſter. *b.* dexter. *c.* Aorta (ibid.).

d. Complectitur hic ab arcu aortae auricula dextra, quae in hoc ſubiecto depleta non diſtincte apparet. (ibid.)

e. Pulmonis dextri primordium *f. f.* hepatis lobus dexter (ibid.) *g. g.* Ren dexter (ibid.).

h. h. Arteria vitellaria dextra (ibid.).

i. i. Lamina inteſtinalis ad inteſtinum medium formandum dextra. (§. 129.).

k. Inteſtinum rectum. *l.* meſenterium.

m. m. Lamina dextra membranae amnii ſpurii.

n. Vena vitellaria dextra. N. truncus venoſus.

o. o. Spina dorſalis.

Fig. 5. Idem ſubiectum, quod priori tabula fig. 6. integrum exhibitum erat; amnio ſpurio et membranis reliquis exutum, extenſum. (§. 130.).

a. Syncipüt, lobos cerebri anteriores continens.

b. Occiput, quod lobos cerebri poſteriores continet. (ibid.)

c. *d*. Regio nuchae, ex tuberculis ſimilibus compoſitae. *d*. *e*. Regio thoracis *e*. *z*. reliqua ſpina dorſalis, regionem abdominis exhibens.

g. Pars maxillae inferioris ſiniſtra.

f. Proceſſus; an prima coſta? Inter hanc et maxillam (*g*) anterius amnii veri membrana oritur, et immediate circa ſynciput adſcendit. (§. 132.).

h. Auricula ſiniſtra cordis *i*. canalis auricularis (§. 130.).

k. Ventriculus cordis vnicus ſiniſter. *l*. Aorta (ibid.).

m. Membranula eadem, quae (*g*. fig. 3.).

n. Pars membranae amnii ſpurii ea, qua fouea cardiaca formatur, idemque ventriculus. (§. 138.)

o. *p*. *q*. *s*. *t*. *z*. Rudimentum abdominis. Mera lamina concaua, a ſpina dorſali et lamellis lateralibus (*v*. *v*. *u*. *u*.) formata (§. 131.).

o. Pars laminae abdominalis ſuperior concaua dextra (ibid.).

p. *s*. Margo laminae abdominalis ſuperius introrſum, inferius paullatim extrorſum vergens,

gens, acutus adhuc, deinde in limbum intumescens (fig. 2. *i. i.*) idem, qui Tab. prior. (fig. 6. *l. l.*) (ibid.

q. Pars laminae abdominalis superior, sinistra maxime concaua. In hoc loco tuberculum alae propullulat.

r. Margo laminae abdominalis, vbi haec magis patet et planior est, crassior dextro margine; idem (Tab. prior. fig. 6. *q.*); rudimentum illius (fig. 2. *i. i.*).

v. v. Lamella abdominis lateralis dextra (ibid.).

u. u. Eadem in latere sinistro. Efficiunt hae lamellae, limbis vel marginibus suis terminatae fossas illas laterales (Tab. prior. fig. 6. *r. q.*) (§. 100.) et sunt primordia fasciarum, quae quarto die abdomen constituunt (fig. 2. H. H.) (§. 131.).

s. s. r. r. r. z. Fistulam intestinalem dixi (Diss. prior. §. 100.) Proprie mesenterii rudimentum exhibet, cuius laminae separatae sunt, et late patent, exterius autem renes sibi applicatos habent. (§. 136.) (144.) *s. s.* Lamina mesaraica dextra cum rene dextro. *r. r. r.* sinistra. Horum margines anteriores iidem (Tab. prior. fig. 6. *n. n. m. u*) et primordia limborum (fig. 2. *k. k.*).

w. Interstitium inter vtramque laminam mesenterii, in quo nuda spina dorsalis in conspectum

ſpectum venit; idem (Tab. prior. fig. 6. *p.*) (§. 136.).

x. Spina dorſalis.

y. Vropygii ſeu coccygis primordium.

z. Peluis primordium quod diſtinctum eſſe debet a ſimili interiori inteſtini recti primordio (vid. Tab. prior. fig. 6. *u.*) (§. 139. 140. 141.).

Fig. 6. Idem ſubiectum, quod (Tab. prior. fig. 7.) integrum in parte areae vaſculoſae exhibetur, membranis exutum (§. 145.).

a. Syncipút *b.* tuberculum illud (fig. 2. D.) (ibid.).

c. Occiput. *d.* principium amnii veri, quod circa caput reuoluitur.

e. Spina dorſalis thoracica. *f.* Rudimenta coſtarum?

g. Pars thoracis. *h.* auricula cordis ſiniſtra.

i. Canalis auricularis. *k.* Ventriculus cordis (§. 145.).

l. Lobus ſiniſter hepatis (ibid.) *m.* Ventriculus (§. 146.).

n. Limbus ventriculi, quo iſte a reliqua, quae ex eo continuatur, membrana amnii ſpurii (*p. q.*) diſtinguitur, idemque ipſe limbus foueae cardiacae (Tab. prior. fig. 7. *k.*) in ſuperficie poſteriori viſus (conſer. §. 146.).

o. Membrana phraenica, eadem (fig. 5. *k.* fig. 3. *l.*).

p. Vena

p. Vena adſcendens (Tab. prior. fig. 7. *q.*) deorſum reflexa (§. 146.).

q. Pars vaginae capitis in eaque ſurculi venoſi (Tab. prior. fig. 7. *r. r.*) deorſum reflexa.

Fig. 6. Idem ſubiectum, quod (tabul. prior. fig. 7.) integrum in parte areae vaſculoſae exhibetur, membranis exutum (§ 145.).

a. Synciput. *b.* occiput. *c.* tuberculum illud (fig. 2 D.) (ibid.).

d. Spina dorſalis thoracica. *e.* regio nuchae.

f. Rudimenta coſtarum?

g. Alae primordium reclinatum.

h. Primordium pedis (§. 152.).

i. Regio pubis. *k.* vropygium.

l. Cauitatis peluis primordium (§. 150.).

m. Principium amnii veri, quod circa caput reuoluitur.

n. Pars thoracis. *o.* auricula cordis ſiniſtra.

p. Canalis auricularis. *q.* Ventriculus cordis (§. 145.).

r. Membrana phraenica, eadem (fig. 5. *m.* fig. 3. *g.*) ex lobo hepatis ſiniſtro continuata.

ſ. Oeſophagus a pulmone tectus.

s. Ventriculus (§. 146.).

t. Vena adſcendens (Tab. prior. fig. 7. *q.*) deorſum reflexa (§. 146.).

u. Pars vaginae capitis in eaque ſurculi venoſi (Tab, prior. fig. 7. *r. r.*) deorſum reflexa.

 v. Lim-

v. Limbus ventriculi, quo iste a reliqua, quae ex eo continuatur, membrana amnii spurii (*t. u.*) distinguitur, idemque ipse limbus foueae cardiacae (Tab. prior. fig. 7. *k.*) in superficie posteriori visus (confer. §. 146).

w. Limbus intestinalis idem, qui (Tab. prior. fig. 7. *n*) et primordium ipsius (fig. 2. *k. k.*) (§. 148.).

x Pars membranae amnii spurii, antrorsum reflexa, quae, si vna cum limbo in situm naturalem reflectitur, futuram restituit. (Tab. prior. fig. 7. *l.*) (§. 148.).

y. Mesenterium, nunc formatum (§. 147.).

z. Superior pars intestini recti, infundibuli formis, quae, reflexa membrana in situm naturalem, foueolam inferiorem restituit (Tab. prior. fig. 7. *m.*)(§. 149.).

A. Ren sinister, a mesenterio nunc separatus.

B. Arteria vitellaria.

DESCRIPTIO
LEPORIS PVSILLI.

Auctore
P. S. PALLAS.

Multa dantur in Imperio Rutheno, eiusque vastissima praesertim parte Asiatica, quadrupedum e censu animalia, quorum notitia hactenus vel plane caruit naturalis historia, vel quae, post celeberrimorum etiam virorum *Messerschmidii*, *Gmelini*, *Stelleri*, in his labores, obscura tamen, nec rite illustrata esse Zoologi conqueruntur. Sufficiat pro exemplis nominasse Moschum, Antilopen orientalem, (джерень). Ferorum in desertis Mungalicis et Transbaicensibus Equorum species, Canem Alopecem (карсакЪ), et Melanotum (караганЪ), Mustelam Lutreolam (норка); Tandemque Murino e genere Citillum, Murem leucostictum (сусликЪ), et Iaculum Asiaticum (земляно зайецЪ); vt reliqua mira, tenebrisque praesertim condita Orientalioris Sibiriae atque Camtschatcae animalia taceam, quae vtinam in natali solo scrutari posse olim largiatur fortuna. Ne igitur post peracta, quae diuinus AUGVSTISSIMAE in scientias amor per vastissimi Imperii felicissimas prouincias institui iussit, itinera physica, horum maxime animalium in historia desiderari quidquam possit, mihi praesertim sedulo curandum esse duco, omnique deligentia adlaboro.

Neque successu hactenus caruisse me, curiosi gaudeant. Vix enim Trans-volgenses modo campos attigi, et iam plus multo, quam sperraueram, in Zoologicis noui et notatu digni occurrit. Obseruaui hac ipsa hyeme, et *auium* aliquas pulcerrimas, incognitas, neque descriptas antea species, et *quadrupedia* varia, parum vel plane non Zoologis nota: quae praesertim hyberno subinde otio illustrare animus est.

Primum erit ex his, quod *Leporem pusillum* appello, animalculum, quale in rerum natura dari ne quidem somniassem vnquam: vera *leporini generis* species, sed minutissima, variisque externae et internae structurae momentis admiranda. In campis circa volgam, imo et vltra Rhymnum siue Iaicum dissitis minime infrequentem illam esse audio, ita, vt etiam vulgari nomine et peculiari inter Tataros nota sit, quorum a plerisque vocatur *Sulgan*, aliis, communi fere cum muribus Campestribus nomine, *Kir-sickan*. Apertos campos (степь) solitaria colit, ibique, vti Citillus et mus leucostictus, cuniculis sub terra latet, quibus plerumque noctu exire consueuit. Hanc ob causam, et quod etiam hyeme vagatur, seseque vestigiis pariter, cuniculique apertura supra niuem prodit, haud raro capitur decipulis, quas illo ipso tempore venatores, supra eius-

modi

modi antra, Ermineis vulgo habitata, ſtatuunt. Infeſtatur tunc et a feris minutis campeſtribus, Putorio, Ermineo, Muſtela, quibus hyeme, ob torpidas in cuniculis Murium campeſtrium varias ſpecies, parcior praeda venit, facilisque eſt de imbelli animalculo victoria.

Aeſtate variis herbis ſucculentis paſci ſolet animalculum; vbi vero has oppreſſit hyems, et omnia niue tecta ſunt, excrementis animalium maiorum phytiuororum, praeſertim equorum et ouium, contentum victitat, quibus ventriculum quoque in diſſecto ſpecimine repletum inueni. De prolificationis et geſtationis tempore, deque catulorum numero nondum conſtat; ea vero vernis menſibus ſuppleri poterunt. Digna interim viſa eſt ſtructura *Leporis puſilli*, quae Zoologis citius communicetur.

Dentium ſuperiorum duplicatione et figura, *digitorum* numero quinario in palmis, et in plantis quaternario, *hirſutie* pedum, *velleris* colore et indole, *internaque* partim *ſtructura*, cum congeneribus, Lepore vulgari atque cuniculo, conuenit illi. Contra: *Capitis* figura, breuitate *auricularum* et *artuum* poſteriorum, *caudae* vero plenario defectu ab vtroque inſigniter diſcrepat. *Coli* ſtructura varia non minus, quam in lepore vulgari admiranda eſt; et numero *coſtarum* lepus puſillus omnia nota animalia, ſuperat praeter Cauiam Capenſem a me primum deſcriptam in *Miſcellaneis Zoologicis* et *Spicile-*

 giorum

giorum Zoologicorum ſecundo faſciculo; cuius animalis ſolum cranium in fonte quodam Sidonis antiquae repertum nuper memorauit *Illuſtr.* BVFFONIVS in hiſt. natur. vol. XV. pag. 205. Huic 22. enim ab vtroque latere numerantur, Lepori puſillo tantum 17.

Tab. XIV. Fig. 2. In craſſo inteſtino diſſecti ſpeciminis *Aſcarides* circiter decem inueni praeciſe tales, quales in equis, ſed triplo vel quadruplo maiores, plerumque ſesqui pollicares inueniuntur, quae tamen figura et, ni fallor, ſpecie conueniunt cum minutis Aſcaridibus hominum inteſtina infeſtantibus, inque gallinis, quae fimeta frequentant, vulgaribus. Vix dubium eſt, has ex ouulis vel vermiculis cum Equino ventre ab animalculo comeſtis natas, ideo parentum fere in magnitudinem excreuiſſe; nullam enim aliam cauſam video, quare in tantillo animalculo vermiculus ille in tantum luxuriauerit, quum tamen in ipſo homine ſemipollicarem longitudinem vix vnquam attingere obſeruetur. Aſcarides iſtae omnes in parte coli coeco proxima et trifariam celluloſa haerebant.

Vellus *Leporis puſilli* noſtri ad tolerandam hyemen ſatis largum eſt, et e praelongis pilis compoſitum, lanugine etiam corpus molliter fouente. Quamquam omnium fere animalium recentia maxime vellera, calido loco ſiccata, frictione electrica fiant, in nullo tamen phaenomenon iſtud facilius, leuiſſimoque adeo tactu effici, et pilos verſus ap-

pro-

propinquantem digitum promptius aſſurgere vidi, quam in hoc et vulgari Sorice. Imo in Lepore minuto, fortiori frictione, nuda manu inſtituta, in loco tenebroſo copioſae etiam ſcintillae eliciuntur; quod in Erminei quoque cauda obtineri poteſt.

Deſcriptio.

Magnitudo Ratti; Habitus ſingularis. Tab. XIV. Fig. 1.

Caput oblongius, quam in Lepore vulgari, vellere largiter veſtitum.

Naſus Leporinus, totus villoſiſſimus, vix angulo inter nares nudiuſculo.

Labium ſuperius bilobum, ad ſeptum narium vsque obſolete bipartitum, *inferius* dentes vaginans, vt in congeneribus, gliribusque omnibus.

Dentes primores (Tab. XIV. fig. 3. 4. quae ſunt naturali magnitudine) albi, *ſuperiores* duplicati; horum *exteriores* ſulco canaliculati, extremoque argute emarginati, ita tamen, vt communis acies tantummodo ſit tridentata, interiori nempe vtriusque dentis angulo contiguo et quaſi coadunato. *Denticuli pone* baſin maiorum minuti, obtuſi (Fig. 4. *a.*). *Inferiores* dentes ſimplices, oblique truncati, plani. Fig. 3. 4.

Myſtaces per roſtri tumidula latera ſparſi, pilis ſuperioribus nigricantibus, inferioribus reclinatis, praelongis, albidis (Fig. 3. 4.) *Verruca* ſupra-ocularis tripilis, *parotica* vnipilis.

Oculi

Oculi mediocres, obſcuri. *Auriculae* rotundatae, latae, vellere ſemilatentes, intus gryſeo-villoſae, verſus marginem fuſceſcentes, ipſoque limbo tenerrime piloſo, albidae.

Truncus gracilis, abdomine ſubuentricoſo; *Cauda* nulla; *Artus* breues, etiam poſtici.

Palmae pentadactylae, *pollice* remoto, breui, digitis duobus exterioribus degradatis (fig. 5. *a.* 6. vbi dextra). *Plantae* tetradactylae, extimo praeſertim breuiore (fig. 6. *a. b.*). *Volae* ſiue ſoleae pedum, vt in lepore, pilis horrentibus, confertis hirſutiſſimae; poſticorum vsque ad calcaneos, villoque ſubreflexo, fuſceſcente; anticorum villo albido verſus digitos vergente, (fig. 5. 6. *b b.*).

Vellus largum, proque tantillo animalculo prolixum. *Lanugo* vbique denſa, tenerrima, fuſca. *Pili* recti, praelongi, (praeſertim in dorſo ſubpollicares), extremitate gryſeo nigroque varii, vnde oritur *color* corporis fere leporinus. Ambitus oris, gula et pectus albent; corpus ſubtus reliquum, et pedes ſupra e gryſeo-luteſcente albicant.

Menſurae.

Pondus animalculi integri aequat vnciam vnam medicam, cum ſeptem circiter drachmis.

Longitudo animalculi ab apice naſi ad coccygem Pariſinae menſurae - -	5′′. 6′.
Eadem ab apice naſi ad vngues extenſorum pedum anteriorum - - - -	3. 9.

Item

Item ad vngues extremos plantarum extensis artubus posticis - - - -	7.	6.
Longitudo capitis a nucha - - - -	1.	6.
—— —— antibrachii - - - - -	1.	0.
—— —— palmae ab articulo carpi ad extremos vngues - - - - - -	0.	$6\frac{3}{5}$.
—— —— Femorum - - - - - -	0.	9.
—— —— Tibiarum - - - - - - -	1.	0.
—— —— Plantae a calcaneo ad extremos vnguiculos - - - - - - - -	0.	$11\frac{1}{2}$.
—— —— Auricularum - - - - -	0.	5.
Earumdem latituto - - - - - -	0.	$5\frac{1}{3}$.
Circumferentia capitis ante auriculas -	2.	5.
—— —— Thoracis pone pedes anticos -	3.	1.
—— —— Abdominis - - - - -	3.	8.

Zootomica.

Hepar feptemlobatum, *ventriculus* arcuatus, finiftrorfum gibbus, fundo fecundum cardiam (Tab. XIV. fig. 7. *a.*) in fecesfum fiue finum rotundatum (Litt. *c.*) adfurgente.

Inteftinum a Pyloro (Litt. *b.*) ad craffum vsque fubaequabile, ad fummum calami cygnei amplitudine, minore autem verfus duodenum, et extremo ileo (fig. 8. A.). Longitudine tripedale.

Coecum (fig 8. *a—b.*) fesquipollicare, calami fcriptorii capax, teretiufculum, apice obtufo incuruatum, verfus ilei infertionem (Litt. *b.*) fenfim ampliatum atque cellulofum.

 Colon

Colon per longitudinem quinque cum dimidio pollicum, (Litt. *b—d.*) digiti minimi amplitudine, imo ex parte (*c—d.*) capacius, ligamento fecundum mefenterii infertionem decurrente crifpatum, in *cellulas* transuerfas integras. *Hinc* 1 poll. et 3 lin. longitudine aequabile (Litt. *d—e.*) teres, calamo fcriptorio craffius. *Tunc* longitudine itidem 1''. 3'''. denuo exampliatum (Litt. *e—f*) tribusque ligamentis longitudinalibus, mefenterico vno, duobusque planis inftar coli humani in cellulas trifariam difpofitas, transverfas concameratum, quae in fericbus binis anguftae funt, et transuerfim lineares, in tertia ampliores.

Sequitur *tandem* inteftinum calamo fcriptorio vix capacius (Litt. *f—g.*) cellulis oualibus excrementa formantibus moniliforme, adtenuatumque in *inteftinum vltimum*, excretorium, trium et dimidii pollicum longitudine.

Afcarides (fig. 2.) in priore parte coli (fig. 8. *b—d.*) latebant, octo vel decem.

Diaphragma centro tendineo, fagittato, ampliffimo. *Ren* dexter fitu altior, magnitudine fabae; finifter paulo minor. *Vefica* pifo amplior; *teftes* exiliffimi. *Cor* magnitudine dupla fabae.

In *fceleto*: clauiculae arcuatae, magnae, (cum fint in lepore rectae, minutae, et inutiles,) humero laxe cohaerentes. *Coftae* ab vtroque latere feptemdecim, quarum denae fpuriae. *Sternum* quinque articulorum.

Coccygis os ifchia paulo ex fuperans, planiusculum, articulorum quatuor, longitudine 5 linearum.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

EXPOSITIO.
VTRIVSQVE OBSERVATIONIS
ET
VENERIS ET ECLIPSIS SOLARIS
FACTAE PETROPOLI IN SPECVLA ASTRONOMICA.

Auctore
CHRISTIANO MAYER.

Altitudines Solis correſpondentes.
Die 18. Maii captae quadrante 2½ pedum.

T. P. ad ortum			Alt. limbi ⊙ app. ſuper.			T. P. ad occaſ			Meridies medius		
H.	M.	S.	G.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S
8	33	29	36	24	45		31	27	0	2	28.
	37	5	36	49	20		27	56	0	2	30, 5
	39	16	37	4	10		25	44	0	2	30
	42	16	37	24	40		22	44	0	2	30
	44	32	37	40	0		20	26½	0	2	29, 25
	52	32½	38	34	0	3	12	23	0	2	27, 75
9	17	46	41	16	10		47	14	0	2	30
	19	26½	41	27	5	2	45	29	0	2	27. 7
						Ex his fit merid. med.			0	2	29, 15
						Aequatio					8, 25
						Meridies verus . .			0	2	20, 50
						Temp. med. mer. veri			11	56	59, 5

Altitudines Solis correſpondentes.

Die 19. Maii.

T. Pend. ad ortum			Alt. limbi Solis app. ſuper.			T. P. ad occaſum.			Meridies medius.		
H	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
8	59	29½	39	28	12		5	23¾	0	2	26, 62
9	2	49	39	49	27	3	2	11½	0	2	30, 25
	5	30	40	7	12		59	22	0	2	26
	7	41½	40	21	15		57	10	0	2	25, 75
	10	11	40	37	26		54	46	0	2	28, 5
	13	44½	40	59	48		51	8	0	2	27, 2
	17	49	41	25	20		47	4½	0	2	26, 75
	19	28½	41	36	0		45	26½	0	2	27, 5
	22	3	41	51	40		42	49	0	2	26
	4	45	42	7	36	2	40	8½	0	2	26, 75
						Meridies ex his med.			0	2	27, 08
						Aequatio . . .					8, 0
						Meridies verus .			0	2	19, 08
						Temp.med mer. veri			11	57	7, 5

Die 20. Maii.

T. Pend. ad ortum			Altit. limbi ☉ app. ſuper.					T. P. ad occaſum.			Meridies medius.		
H.	M.	S.		G.	M.	S.		H.	M.	S.	H.	M.	S.
9	0	23		39	41	28		3	4	36	0	2	29, 5
	5	7		40	13	0			59	42	0	2	24, 5
	10	4	limb.	41	26	20	inferior.		54	56	0	2	30
	12	37		41	0	58			52	9	0	2	23
	17	11¾		41	29	28			47	42	0	2	26, 87
	18	32		41	37	40			46	20	0	2	26
	20	47½		41	51	20		2	44	7	0	2	27
								Meridies med. ex his			0	2	26, 69
								Aequatio . . .					7, 76
								Meridies verus .			0	2	18, 93
								Temp.med.mer, veri			11	57	16, 0

Altitu-

Altitudines Solis correſpondentes.

Die 23. Maii.

T. Pend. ad ortum.			Altit. limbi ☉ app. ſuper.			T. Pend. ad occaſ.			Meridies medius.		
H.	M.	S.	G	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
8	42	20	38	2	45		22	27	0	2	23, 5
	46	56	38	33	22		17	51	0	2	23, 5
	54	8	39	22	18		10	39½	0	2	23, 75
9	0	54	40	6	29	3	3	57	0	2	25, 5
	19	43½	42	6	10		45	6	0	2	24, 75
	28	39	43	1	0		36	3½	0	2	21. 25
	30	19	43	11	15	2	34	24	0	2	21, 5
						Merid. ex his med.			0	2	23, 40
						Aequatio . . .					7, 07
						Meridies verus .			0	2	16, 33
						T. med. merid. veri			11	57	43, 6

Ex comparatione meridiei veri	Sec.
Diei 18. cum 19. quantitas diurnae retardationis penduli erit	9″, 42
cum 20 - - - - - - - - - - - -	9, 07
cum 23 - - - - - - - - - - - -	9, 63
Diei 19. cum 20 - - - - - - - - - - - -	8, 65
cum 23 - - - - - - - - - - - -	9, 71
Diei 20. cum 23 - - - - - - - - - - - -	10, 06

Reiicimus quantitatem 8″, 65, quod haec differentia manifeſte tabulis debeatur, plus minus incremento diurno motus medii Solis ex ſola interpolatione atque in ſolis primis decimarum notis appropinquantibus, vt manifeſtum eſt comparanti plures eiusmodi tabulas. Eum vero errorem nouis ac prolixis

lixis calculi laboribus nunc velle detegere, prorſus inutile foret huic noſtro inſtituto. Sumpto autem ex 5 reliquis penduli retardationibus medio, retardatio diurna eiusdem eſt $9''$, 57, quae obſeruationibus omnibus ſatisfacit.

Ita enim ex datis meridierum momentis euidens eſt primo, tempus meridiei veri die 24. Maii ad pendulum fuiſſe $0^h, 2', 16''$, 21. dein euidens quoque eſt, pendulum hoc non ſequi tempus medium, neque accelerationem habere reſpondentem huic motui Solis medio, cum nulla ſit neque acceleratio, neque retardatio eiusdem reſpectu motus veri ſolaris, niſi vnius circiter decimae, quo centrum Solis ſequenti die v. g. 24 tardius appulit ad meridianum noſtrum, quam die 23, quae tamen acceleratio iuxta motum medium Solis deberet eſſe $9''$, 8. Nulla ergo pro tempore obſeruationis veſpertinae ſeu matutinae diei 23 pars proportionalis accelerationis aut retardationis horologii quaerenda eſt, et ad tempus meridiei aequatione correctum addenda, vel ab eo ſubtrahenda, vt habeatur tempus verum factae obſeruationis; ſed a tempore obſeruato ſubtrahenda ſolum ſunt $2', 16''$, eo quod tempus verum in meridie ſemper ſit $0^h, 0', 0''$ et horologium die 23 Maii ſupra t. v. indicauerit $2', 16''$, 33.

Placet rem exemplo declarare, quamuis id Aſtronomis notiſſimum ſit. Itaque ſi pendulum motum

motum medium Solis exacte sequeretur, et meridiem ostendisset v. g. die 18, quam inuenimus $0'$, $2'$, $20''$, 50, ob incrementum diurnum accelerationis motus medii Solis $= 8''$; die 19 profecto ostendere debebat $0^h, 2', 28'', 50$; ostendit autem ex obseruatis Solis altitudinibus correspondentibus correctis $0^h, 2', 19''$: ergo a die 18 ad 19 retardatio diurna penduli mei supra motum medium Solis fuit, vt supra dixi, $9'', 42$; supra motum autem verum Solis fuit nulla.

Id ipsum alia ratione clarissime ostendi potest, conuertendo tempus verum factae cuiusuis obseruationis in tempus medium, idque comparando tempori penduli. Ita tempore contactus interioris in egressu Veneris a me obseruato pendulum meum ostendit $15^h. 28', 0^{h'}$, a quo subtractum tempus meridiei eius diei $0^h, 2', 16'', 33$

	h.	m.	s.
relinquit tempus verum - - - - -	15	25	43,7
inde subtracto tempore medio meridiei veri	11	57	43,6
Residuum est tempus medium non correct.	15	28	0,1

Acceleratio diurna motus medii Solis supra motum verum a die 23. ad 24. est $9'', 8$, ergo pars proportionalis debita interuallo $15^h, 28'$ erit $5'', 91$, quae addita tempori medio non correcto $15^h, 28', 0'', 1$, producit tempus medium factae obseruationis $15^h, 28', 6''$. Sed enim pendulum meum a die 23 in 24 defecit a motu medio Solis quantitate $9'', 93$. quare vt tempus medium reducatur ad tempus penduli, pars proportionalis, interuallo 15 horarum, 28′, 6″ debita, (quae eſt 5″, 98) auferenda eſt a tempore medio dato 15^{h}, 28′, 6″, et reſiduum 15^{h}, 28′, 0″, 02, ſatis oſtendit, tempus obſeruatum penduli congruere tempori medio, neque vlli alteri reductioni locum eſſe poſſe.

Atque hinc patet, ſtatum penduli et temporis veri ad praeciſionem vnius ſecundi exacte cognitum fuiſſe. Ceterum, ne quis caſus pendulo accidens obſeruationem turbaret, duo reliqua pendula Londinenſia, virgis quoque metallicis inſtructa, quae biduo ante Illuſtriſſimum Collegium Marinum ſubmiſerat, et quorum acceleratio diurna vnius, et retardatio alterius a pendulo normali 5″ non ſuperabat, duo item reliqua Pariſina praeſtantiſſimi artificis le Paute, et tertium D. Charoſt per eos dies frequenter cum normali collata et explorata ſunt.

Inſtrumenta ita diuiſa, vt mihi pro obſeruando contactu Veneris tubus achromaticus Londinenſis 18. pedum inſignis bonitatis: alter 7. pedum pariter achromaticus Praenobili D. Profeſſori *Euler*, qui eſt Academiae a Secretis: teleſcopium catoptricum *Schortii* 2½ pedum Cl. Dno Adiuncto *Lexell*: alterum maius 3 pedum 6 digitorum eiusdem celeberrimi artificis Dno *Stahl*, expeditionis meae Socio, ſeruiret.

Quod

Quod in inferiori Speculae conclaui non ita commodus in orientem proſpectus pateret, placuit obſeruandae Veneri ſupremum eligere tabulatum, locum, ſi quis vnquam, ſolidum ac fornice et cupro clauſum. Figuram is refert circularem, cuius extimam oram ambit murus $2\frac{1}{2}$ pedes craſſus et 4. fere pedes altus; huic ferramenta complura circum ad perpendiculum inſiſtunt, quibus cylinder ligneus annulis ferreis armatus cum reliquo machinamento inductus eſt pro facili tubi maioris motu horizontali et verticali. Praeterea tubus 18 pedum clatris incluſus atque ita in aequilibrio poſitus eſt, vt vix manu Obſeruatoris indigeret; transmiſſo per annulum ferreum humi fixum fune vacillationi tubi ſatis cautum erat. Simili apparatu regebat in omnem partem ſuum quoque tubum Praenobilis D. Profeſſor *Euler*. Sociorum duo reliqui iſto minime indigebant pro ſuis teleſcopiis ſupra ſeparata fulcra commode inſiſtentibus. E tribus, ad numerandas vibrationes penduli conſtitutis, alterni minuta ſecunda numerare, tertius numerantibus prope pendulum, ne quis error irreperet, inuigilare aſſueuerant. Collocatum inſuper pone Obſeruatores pendulum Pariſinum, quod ipſo die 23. hora 5. veſperi ad idem ſecundum temporis cum normali compoſitum eſt, a quo die 24. hora 4 matutina nonniſi 5″ aberrabat, vt Obſeruatores ſuis ipſi oculis minuta prima temporis expedite viderent.

De obſeruatione Veneris veſpertina die 23. Maii.

Iſto apparatu iam inde ab hora 5 et dimidia veſperi diei 23 fixo in Solem obtutu intuebamur. Caelum erat ſerenum, limbus Solis conſtanter bene terminatus, niſi tum, quod quidem vnus ego tubo 18. pedum notaui, cum tenuiſſima inciſura maculae nigricantis extimam oram et orientalem et occidentalem Solis ſubinde perſtringeret; indicium id fuit emergentis et immergentis maculae. Fuit, cum de hoc ſpectaculo ob ſuſpicionem ſatellitis Veneris Socios admonerem; ſed quod huiusmodi marginales lunulae, quarum omnino 4 ſucceſſiue obſeruaui, et figuram referrent irregularem, et poſt duas horas magis increſcerent vel euaneſcerent, facile eam ſuſpicionem dimiſi.

Ita caelo conſtanter ſereno certi omnino ſumus, ad horam vsque 9. 5′ T. V. nullum veſtigium Veneris aut eius ſatellitis apparuiſſe, a quo tempore ob viciniam horizontis vaporoſi limbus ſolis ſemper magis vndulare, atque etiam iſtis vaporibus aliquantum tegi, videbatur. Cum ecce centro ſolis iam infra horizontem depreſſo, (nam occaſum totalem apparentem eo die circa horam 9. 10′, 40″ T. V. obſeruaueramus) repente Venerem omnino nigram, atque eiusdem apparentis magnitudinis, qualem poſtridie conſpexeram, intueor hora 9. 9′. 39″ T. V.

Illu-

Illuſionem fuiſſe opticam, eo minus perſuadere mihi poſſum, quod eo momento iisque circumſtantiis temporis de Venere videnda ſpem fere omnem abieceram. Ipſo autem momento penduli $9^h. 11'. 55''$. id phaenomenon me conſpexiſſe, ex repentina mea vociferatione teſtes habeo obſeruationum Socios. Porro cenſeo, refractione fieri potuiſſe, vt Venerem omnino nigram, id eſt luce orbatam poſt occaſum centri ſolis, atque limbo boreali ſolis ita nube temperato, prope contactum exteriorem viderem. Conſonat locus in ſole per tubum Aſtronomicum apparens ad occaſum, ſiue ex parte limbi Solis apparenter occidentalis, conſonat tempus et calculis et egreſſui Veneris reſpondens; quod tamen aliarum obſeruationum deciſioni relinquendum eſt.

Quidquid autem ſit de obſeruatione veſpertina, meum iam eſt, obſeruationem matutinam Illuſtriſſimae Academiae exponere, eamque primum admonere, nos omnes vno circiter quadrante horae ante ortum Solis ſtetiſſe eodem loco ad obſeruandum paratos.

Obſeruatio Egreſſus Veneris die 23 Maii.

Temp. Pend.			Temp. Ver.			
H.	M.	S.	H.	M.	S.	
14	52	15	14	49	58	Venus oriente Sole in parte limbi borealis videtur, limbo Solis et Veneris vndulante, maleque terminato.
	54	42		52	26	Videtur centrum Solis eſſe in horizonte. Venus verſicolor, nam limbus eius borealis ruber, auſtralis caeruleſcens, medium nigrum Obſeruatoribus omnibus apparet.
15	25	59	15	23	43	Venus melius terminatum limbum habere videtur et colores diſparent, vndulatio tamen adhuc notabilis. Contactus interior certo necdum contigit.
	27	50		25	33,7	Domino *Stahl* contactus interior eſſe videtur, limbo Solis necdum inciſo.
	27	57		25	40,7	Cl. D. Adiunctus *Lexell* eundem contactum videt.
	28	0		25	43	Idem contactus Profeſſori *Mayer* videtur accidere.

Temp.

Temp. Pend.			Temp. Ver		
H.	M.	S.	H.	M.	S.
	28	3		25	46, 7
	28	4		25	47, 7
15	41	0	15	38	44

Contactus internus ob ſenſibilem inciſionem et curuaturam limbi ſolis Profeſſori *Mayer* praeteriiſſe videtur.

Eandem limbi inciſionem proxime a contactu notat Praenobilis D. Profeſſor *Euler*.

Dein micrometro obiectiuo diſtantiam Veneris a limbo Solis auſtrali metiri aggreſſus ſum, vt locum Veneris in limbo occidentali Solis quam proxime determinarem. Chorda verticalis obſeruatione inuenta eſt in partibus diametri Solis $= 3$ dig. 5. lin. 45, 3 particul. ſeu $31', 36'', 734$, vt ſequitur:

dig. lin. part.

2. 4. 10 $= 21', 8'', 365$; quae fuit diſtantia Veneris a limbo Solis auſtrali. Subtracta quantitate iſta $21', 8'', 365$ ex diametro Solis in ipſa eclipſi obſeruata $31', 36'', 734$ ſequeretur, centrum Veneris a proximo limbo boreali in egreſſu remo-

Temp.

tum fuiſſe 10′, 28″, 369. Sed enim centrum Veneris egreſſum erat $15^h, 34', 39''$, id eſt 4′, 5″ ante hanc dimenſionem inſtitutam; igitur ſupputanda eſt pars illa exigua proportionalis in partibus circuli maximi, et per eam diſtantia haec 10′, 28″, 369 obſeruatione inventa minuenda eſt Plures dimenſiones ob viciniam temporis contactus exterioris capere non potui. Is ita habet;

Temp. Pend.			Temp. Ver.				
H.	M.	S.	H.	M.	S.		
15	45	30	15	43	13, 7	D. *Stahl*	contactum exteriorem vident.
	45	40		43	23, 7	Cl. D. Adiunctus *Lexell*	
	45	47		43	30, 7	Praenobilis D. Profeſſor *Euler*	
	45	57		43	40, 7	Profeſſor *Mayer*	

Ex contactu dubio exteriore a me pridie viſo - - - - - - -	9^h, 9′, 39″,
Et contactu vltimo - - - - - -	15, 43, 40, 7
Sequitur I. durationem totius tranſitus fuiſſe - - - - - -	6, 34, 1, 7

II.

II. Moram inter contactum interiorem et exteriorem obſeruatam

	H.	M.	S.
a D. *Stahl*	o	17	40
a Praen. D. Prof. *Euler*	o	17	43
a Cl. D. *Lexell*	o	17	43
a Prof. *Mayer*	o	17	57

Conſtitueram primum, omnino ſupprimere dimenſionem diametri Veneris, a me micrometro obiectiuo, tubo Palatino 7. pedum adhaerente, factam hora Penduli $15, 7', 48''$, ſeu $15^h, 5', 32''$ T. V. eamque a me inuentam 1. lin. 4. particul., id eſt $57''$; eoquod in annotanda hac obſeruatione, omiſſa linea, particulas tantum fuiſſe notatas inuenerim; ſed, re melius conſiderata, viſum eſt, rem, vt acciderat, communicare.

Atque talis quidem fuit obſeruatio celeberrimi huius phaenomeni, caelo non vsque adeo iniquo, vt non potius confidam, eam plurimum profuturam ad veram parallaxeos inquiſitionem, ſi eum laborem in ſe ſuſceperit Illuſtriſſimus, et toto orbe notiſſimus Dominus Profeſſor *Leonardus Euler.* Id certum, paucis poſt egreſſum Veneris minutis vndulationem limbi Solaris omnem ſublatam, nobis pulcherrimam occaſionem praebuiſſe faciendae bonae obſeruationis eclipſis Solaris inſtantis, quo toto tempore nulla in caelo nubecula apparuit, barometro ſtante ad altitudinem 28. dig. 2 linearum.

 Et

Et ego quidem tubo 7. pedum achromatico ope micrometri obiectiui phases huius eclipsis metiebar: Praenobilis D. Professor *Euler* tubo dioptrico 9. pedum, habente micrometrum ordinarium, macularum immersiones et emersiones: Cl. D. Adiunctus *Lexell* eodem, quo mane vsus erat, telescopio Schortii distantiam cornuum: D. *Stahl* altitudines Solis obseruandas susceperant, quamuis illi ab hoc negotio fuerit abstinendum, quod eius opera in dirigendo micrometro et notandis particulis maxime indigerem.

Quod ad valorem partium micrometri pertinet, eum ex assumpta diametro Solis pluribus ante diebus conclusimus. Captis enim plus quam 40. eiusmodi obseruationibus prope meridianis id tandem deduximus, particulam vnam micrometri mei proxime aequalem esse 1″, 0565, vnde lineam aequiualere 52″, 8250, atque decem eiusmodi lineas, i. e. digitum 8′, 48″, 2500, cui basi innititur tabula micrometri huius Palatini.

Neque minus inde constat, isto micrometro in 5. digitos Londinenses diuiso, quorum singuli continent 10. lineas, angulum subtendi posse 44′, 1″, 2500, magno sane Astronomicarum obseruationum commodo; siquidem huiusmodi instrumento coniunctiones omnes fixarum cum planetis et praecipue cum luna multo quidem exactius, quam micrometris ordinariis, determinari possunt. Sed enim de vsu huius micrometri atque eius praestantia non

est

eſt hic dicendi locus. Mihi nunc ſatis eſt oſtendere, me ex dimenſione diametri Solaris, per eos dies quotidie variantis, variata quoque menſura micrometri, ſumpto ſemper ex pluribus obſeruationibus arithmetice medio, veritatem proxime attigiſſe, vt reductio particularum eiusdem in obſeruatione eclipſis Solaris omnino pro iuſta et exacta aſſumenda videatur.

Obſeruatio Eclipſis Solaris

Petropoli in ſpecula Aſtronomica die 23. Maii 1769. Tubo achromatico *Dollondi* 7. pedum, micrometrum obiectiuum habente, facta a *Chriſtiano Mayer*, Sereniſſimi Electoris Palatini Aſtronomo.

emp. Pend.			Temp. Ver.				Immerſiones.								
.	M.	S.	H.	M.	S.		Partes Microm. Dig.	lin.	partic.	Minuta reducta. M.	S.	Decim.	Minuta reducta. M.	S.	Decim.
							Partes lucidae.						Partes obſcuratae		
I	12	45	9	10	28,7	initium									
	17	0		14	54		3	3	38	29	43	37	1	53	36
	21	7		18	51		3	1	46	28	6	17	3	30	56
	24	50		22	34		3	0	8	26	33	20	5	3	53
	27	48		25	32		2	8	37	25	18	19	6	18	18
	33	6		30	50		2	6	29,9	23	25	03	8	11	69
	36	46		34	30		2	5	7,3	22	8	33	9	28	39
	39	37		37	21		2	4	5,8	21	13	92	10	22	80
	42	50		40	34		2	2	47	20	11	80	11	24	92
	45	35		43	19		2	1	49	19	21	09	12	15	64
	48	4		45	48		2	1	12,3	18	42	31	12	54	41
	54	1		51	45		1	9	37	17	22	76	14	13	96
	57	47		55	31		1	9	2,3	16	46	10	14	50	62
	1	42		59	26		1	8	17	16	8	81	15	27	92
	11	3	10	8	47		1	7	45,4	15	45	99	15	50	74

T. Penduli H.	M.	S.	Temp. Verum H.	M.	S.		Emerſiones. Partes microm Dig.	lin.	partic.	Minuta reducta. M	S.	Decim.	Minuta reducta. M.	S.	Decim.
							Partes lucidae.						Part. obſcuratae		
22	17	26	10	15	10		1	8	19	16	10	92	15	25	81
	21	14		18	58		1	8	47	16	40	50	14	56	22
	24	29		22	13		1	9	26, 6	17	11	77	14	24	95
	27	7		24	51		2	0	10, 5	17	47	59	13	49	14
	30	46		28	30		2	1	6	18	35	66	13	1	07
	35	22		33	6		2	2	27, 2	19	50	88	11	45	84
	39	41		37	25		2	3	45, 5	21	3	04	10	33	68
	42	54½		40	38		2	5	5, 3	22	6	22	9	30	51
	45	41		43	25		2	6	0, 9	22	54	40	8	42	33
	55	50		53	34		3	0	10, 3	26	35	63	4	1	10
	59	45		57	29		3	2	7, 2	28	8	00	3	18	72
23	3	34	11	1	18		3	3	40	29	45	48	1	51	24
	6	7		3	51		3	4	40, 2	30	38	52		58	21
	8	30		6	14	Finis.									
	9	56		7	40	Diameter ⊙ capta microm. obiectiuo	3	5	45, 3	31	36	7344			

Ex diſtantia cornuum heliometro a Cl. D. *Lexell* dimenſa diam. lunae fuit $33'.50''.47$.

Ex initio et fine medium huius eclipſeos eruitur hora $10.\ 8', 20'', 2$ T. V. Duratio tota $1^h, 55', 44'', 3$.

Cl. D. Adiunctus *Lexell* initium eodem prorſus momento temporis, quo ego, $9^h, 10', 28'', 7$ obſeruauit: finem $11^h, 6', 9''$ T. V. hinc duratio tota fit $1^h, 55', 40''$ medium eclipſeos $10^h, 8', 18'', 8$, T. V.

D.

D. *Stahl* initium 4. Secundis nobis citius vidit tubo quadrantis Palatini, nempe $9^h, 10', 24'', 7$, cuius etiam obseruationi pro vero contactu limbi lunae ita deferendum esse puto, vt detractis adhuc $2''$, initium verum huius eclipseos ponendum esse censeam $9^h, 10', 23$. T. V. qua correctione adhibita medium eclipseos fit $10^h, 8', 18'', 5$, et duratio tota $1^h, 55', 51''$, nempe $6''$ et 7 decimis maior, quam immediate ex ipsa obseruatione a me facta eruitur.

Impeditus accommodando micrometro suo Praenob. D. Professor *Euler* initium quidem non obseruauit, sed finem in proiectione Camerae obscurae notauit $11^h, 6', 5''$, T. V.

Eundem quoque finem in inferiori conclaui speculae Astronomicae obseruauit Praenob. D. Professor *Kotelnikow* tubo suo achromatico $11^h, 12', 42$ vel $43''$ sui penduli, quod factis plurimis comparationibus spatio 24 horarum accelerabat supra pendulum Londinense $55''$. Aliunde tamen constabat, indicem eiusdem penduli praecedere $4', 2''$ pendulo Londinensi; vnde hac quantitate $4', 2''$, a tempore obseruato subtracta, tempus huius obseruationis incidit in $11^h, 8', 40''$ penduli Londinensis, seu in $11^h, 6', 24''$ T. V. atque hinc iterum sublatis $18''$, quanta fuit acceleratio penduli Praen. D. Prof. *Kotelnikow* ab hora 3 matutina vsque ad horam 11, contingit tempus verum finis

finis huius eclipſeos a Praen. D. Profeſſ. *Kotelnikow* obſeruati $11^h, 6', 6''$, quod proxime coincidit cum tempore a Praen. D. Profeſſore *Euler* in proiectione obſeruato.

Quantitas obſcurationis ex mea obſeruatione erat 6 dig. 065. ſeu $15', 50'', 744$ eiusmodi partium, quarum diameter Solis hora 11. $7', 40''$, eodem micrometro dimenſa capiebat $31', 36'', 7344$.

Quantum ad dimenſionem diametri lunaris, ex repetita dimenſione diſtantiae cornuum lunae, capta a Cl. D. *Lexell* ope alterius heliometri, teleſcopio catoptrico Schortii adhaerentis, eius quoque valorem partium ſcalae ex comparatione dimenſionum diametri Solis conſecuti ſumus. Nam cum paulo ante et poſt tempus huius eclipſeos diametrum Solis apparentem vtroque heliometro dimenſi eſſemus, Cl. D. Adiunctus *Lexell* eam inuenit $4^{dig.}\ 1^{lin.}\ 19^{part.}$ ope ſui micrometri, qualem ego in meo, tubo 7. pedum achromatico *Dollondi* accommodato, deprehendi $3^{dig.}\ 5^{lin.}\ 45^{part.}\ 3$. Hinc facta reductione vtriusque micrometri ad eundem valorem partium, apparentem diſtantiam cornuum, atque inde apparentem diametrum lunae ſupputauimus.

De

De Maculis in Eclipſi hac obſeruatis, earumque poſitione.

Maculae in Sole erant omnino 6. Earum immerſio et emerſio a Praen. D. Profeſſore *Euler* ita obſeruatae ſunt.

		Temp. Pend.			Temp. Ver.	
Maculae maioris immerſio	H.	M.	S.	H.	M.	S.
Limb. dext. - - -	9	38	5	9	35	49
Limb. ſiniſt. - - -	9	39	40	9	37	24
Maculae I. Immerſio -	9	49	19	9	47	3
Maculae I. Emerſio - -	10	38	40	10	36	24
Maculae II. Immerſio -	9	51	42	9	49	26
Maculae II. Emerſio - -	10	36	20	10	34	4
Maculae III. Immerſio -	9	53	32	9	51	16
Maculae III. Emerſio - -	10	36	20	10	34	4
Mac. paruae Immerſio -	10	0	25	9	58	9
Mac. paruae Emerſio - -	10	52	41	10	50	25
Mac. in margine Immerſio	10	10	26	10	8	10
Mac. in margine Emerſio	11	5	12	11	2	56

Finita obſeruatione poſitionem macularum micrometro obiectiuo determinaui, ſed earum duntaxat, de quibus ſuſpicio eſſe poterat, vel eſſe, vel ſaltem propinquas eſſe ſatelliti Veneris, cui obſeruando iam pridie et triduo poſt toti eramus intenti: in his ſuſpicionem praebuit macula tertia, mole valde exigua et magis ceteris rotunda; quamuis et ipſa in limbo inferiore irregularis appareret.

Poſitio

Poſitio Macularum

Intuitu diametri Solaris verticalis et horizontalis.

	Temp. Pend.			T. Verum.			dig.	lin.	part.
margo ſiniſter -	11^h	48′	13″	11^h	45′	57″	1	$1\frac{1}{2}$	8, 5
Maculae mai. Poſitio horiz.									
margo dexter -	11	51	16	11	49	0	1	$2\frac{1}{2}$	9
Eiusdem Poſitio vertical. -	11	57	30	11	55	14	1	$3\frac{1}{2}$	10
Mac. III. Poſitio vertic. -	12	11	53	12	9	37	1	$2\frac{1}{2}$	1
Mac. III. Poſit. horizont -	12	18	39	12	16	23	1	$4\frac{1}{2}$	16
poſit. horizont	12	24	21	12	22	5	0	1	17
Mac. in margine poſit. vertic. -	12	29	43	12	29	27	0	2	17

Ex his obſeruationibus apparentem trium macularum ſitum in ſchema coniecimus, aſſumpta diametro Solis 359 partium decimalium, ſeu 3 dig. 5 lin. 45 particularum, quo poſito.

Maculae maioris diſtantia a limbo occidentali Solis fit 131.
a limbo auſtrali - - - - 137.
Maculae 3^{tiae} diſtantia a limbo occidentali - - - 148.
a limbo auſtrali - - - 125.
Maculae marginalis diſtant. a limbo orientali - - - 013.
ab eodem limbo verſus auſtrum - 023.

Simili ratione et trium reliquarum macularum, et plurium huiusmodi poſitiones ſequentibus diebus a me determinatae ſunt, quarum hic vnum duntaxat exemplum ad eiusdem diei obſeruationes pertinens dedimus.

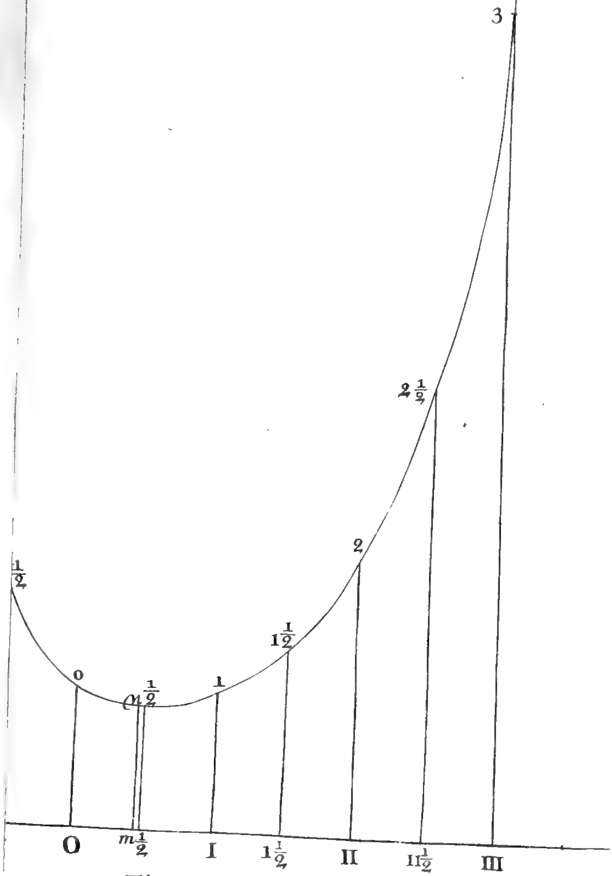


Fig. 1.

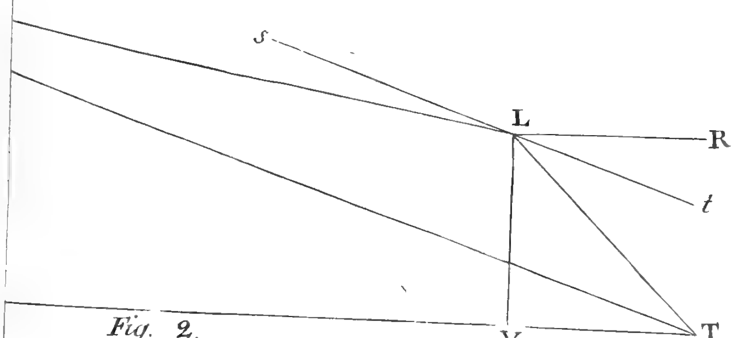


Fig. 2.

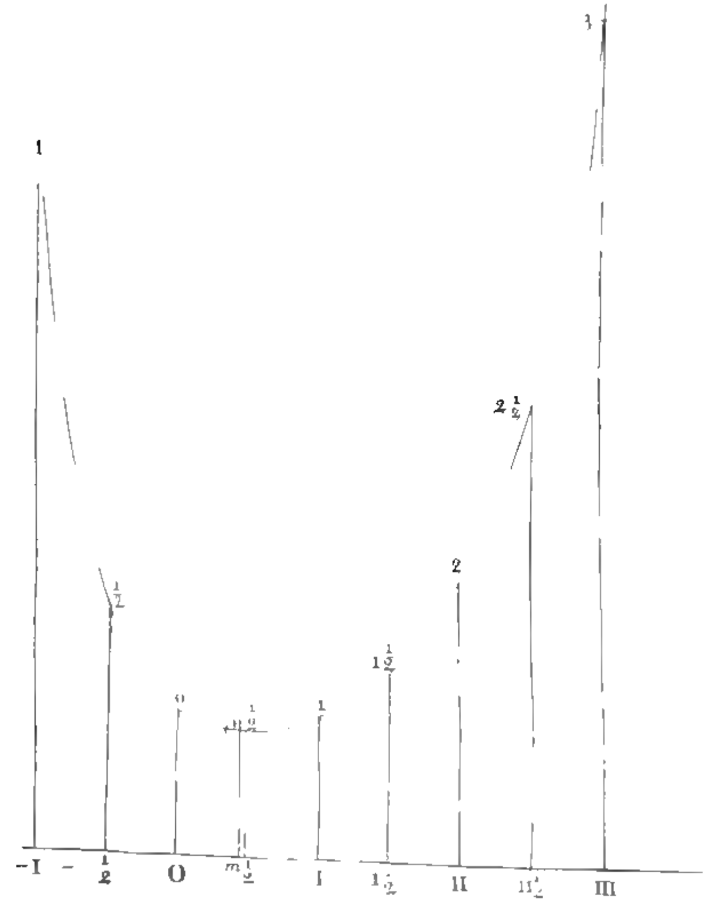


Fig. I

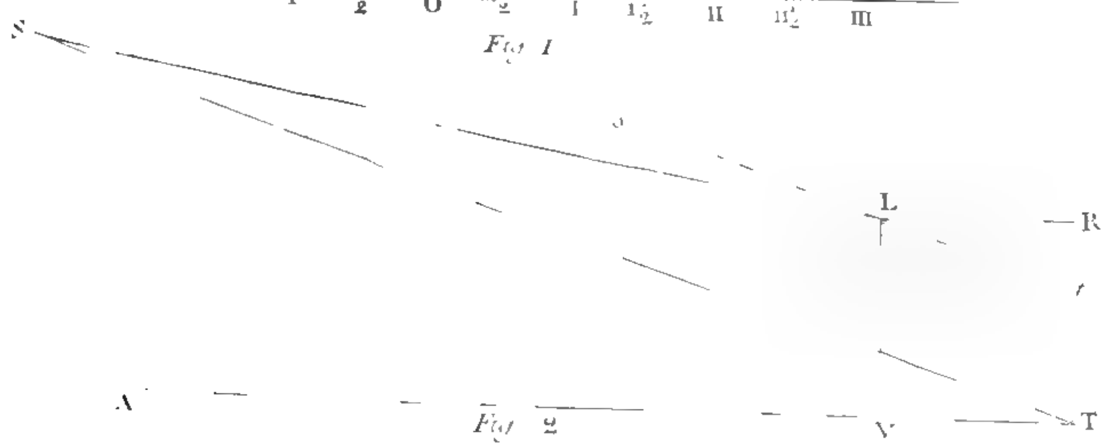


Fig. 2

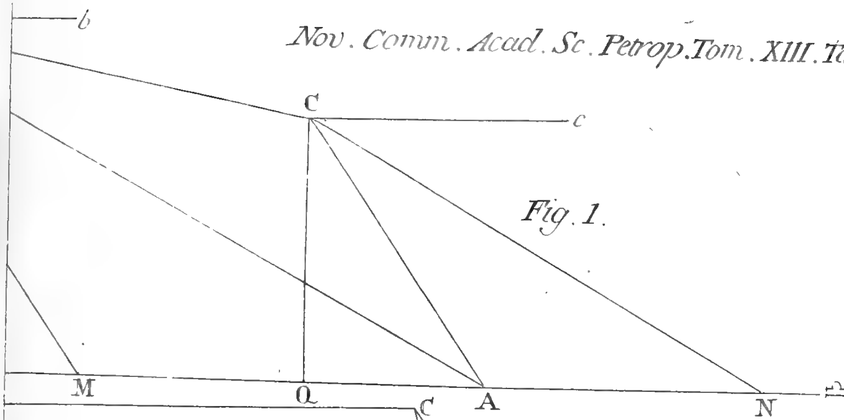


Fig. 1.

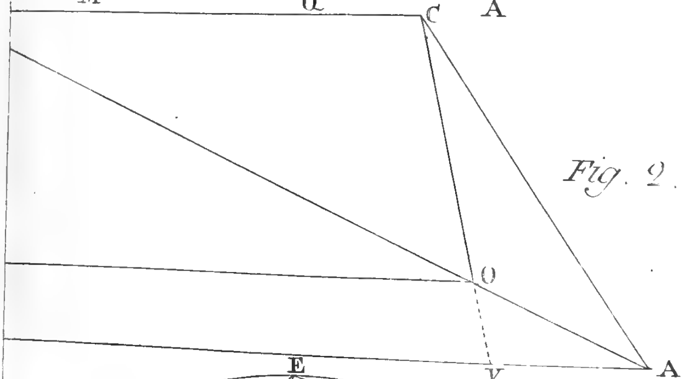


Fig. 2.

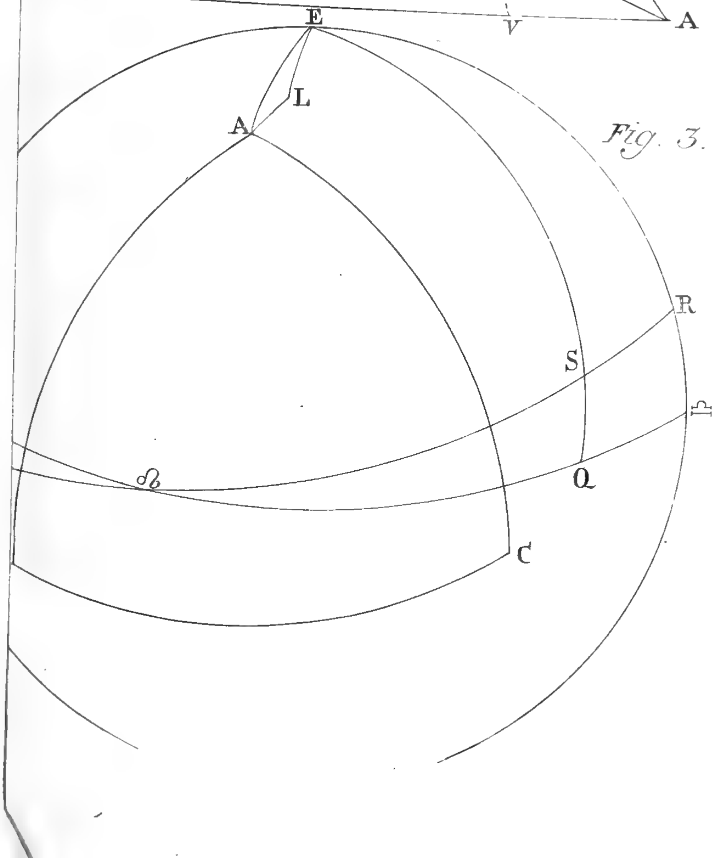


Fig. 3.

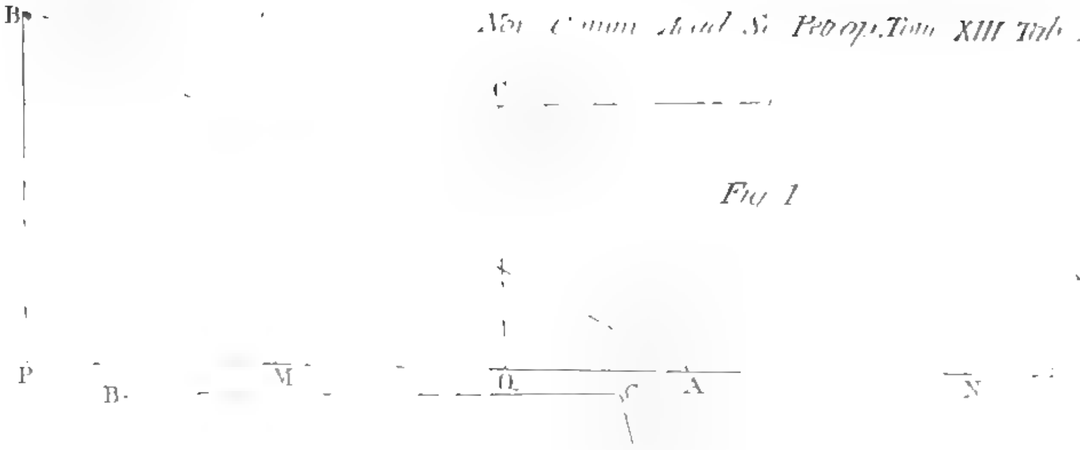
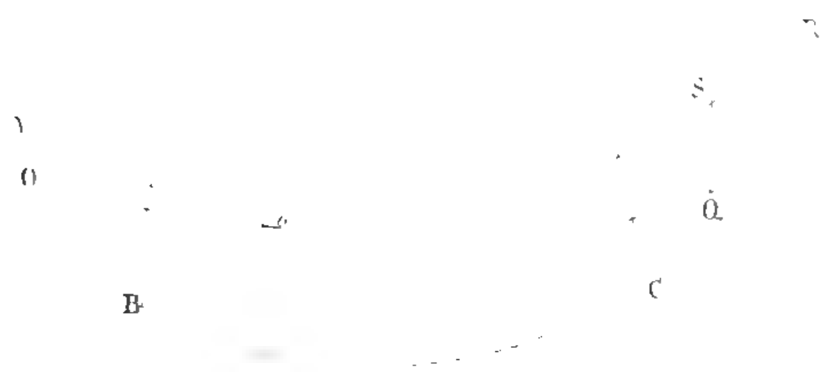


Fig. 1

Fig. 2



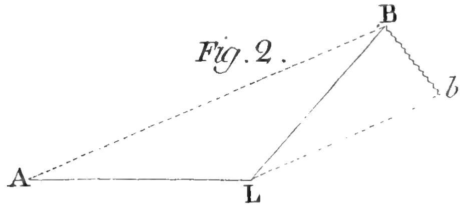


Fig. 2.

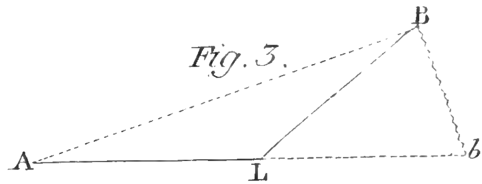
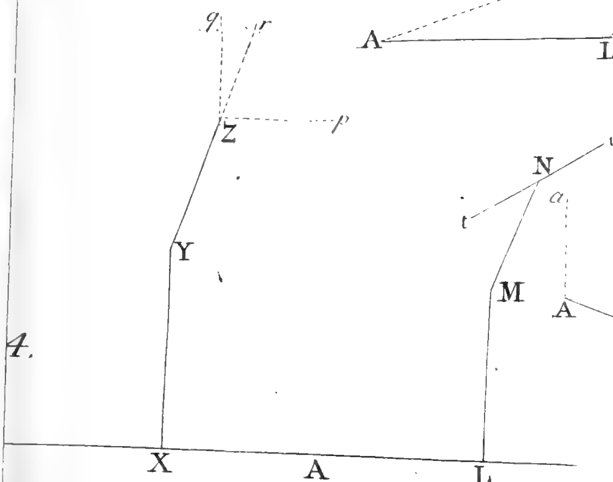


Fig. 3.



4.

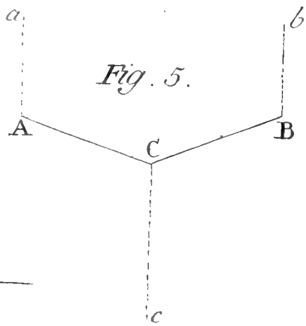
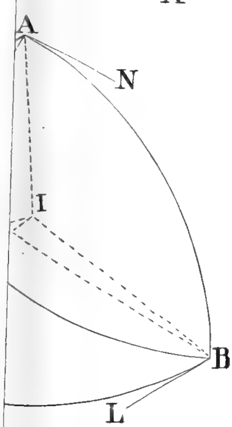


Fig. 5.



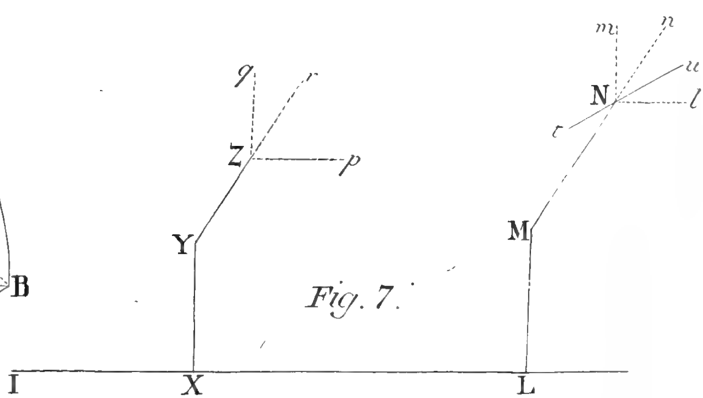


Fig. 7.

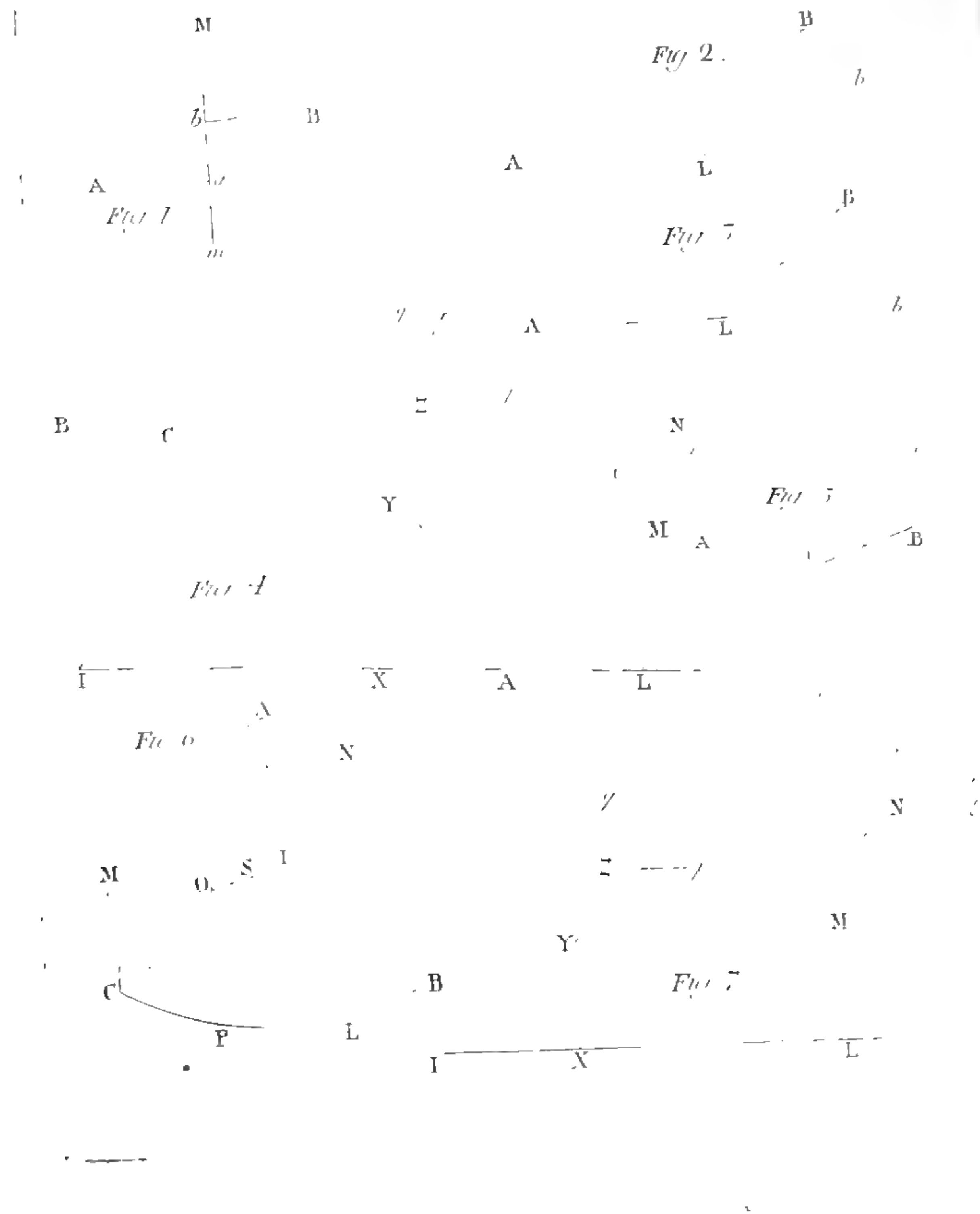
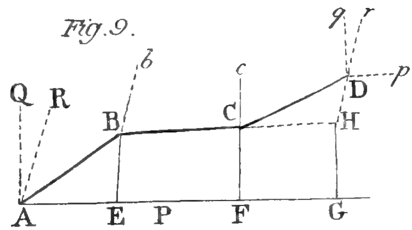
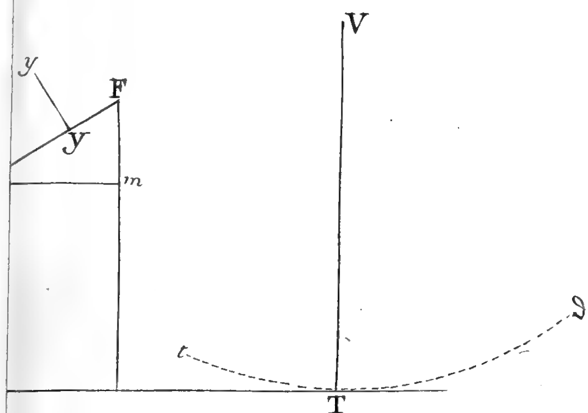


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 6
Fig. 7

Fig. 9.





ig. 11.

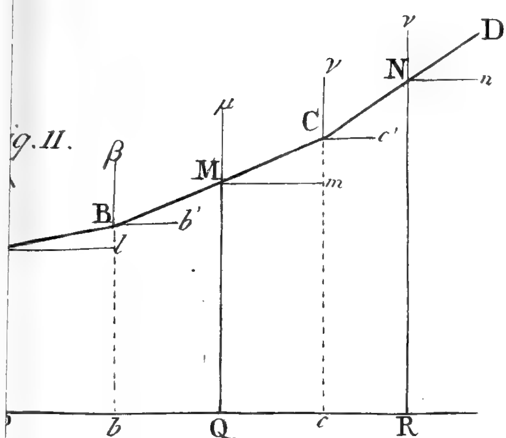


Fig. 8.

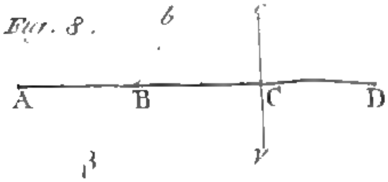


Fig. 9.

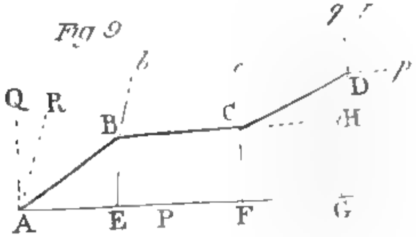


Fig. 10.

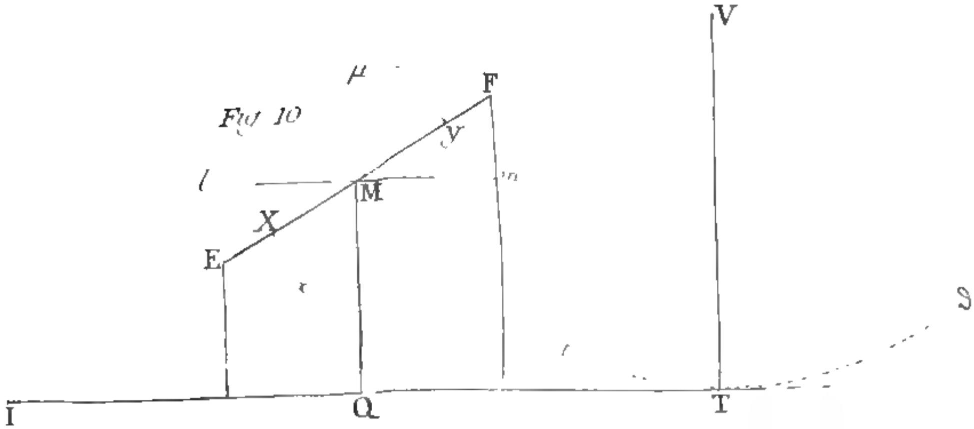
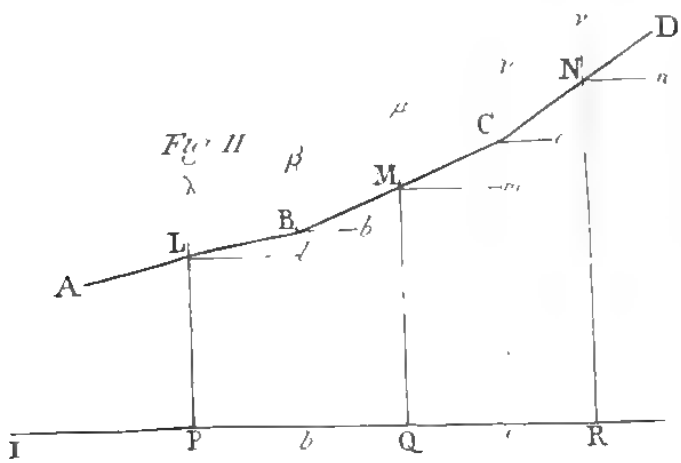


Fig. 11.



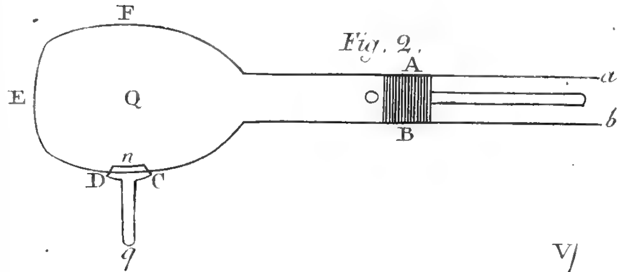


Fig. 2.

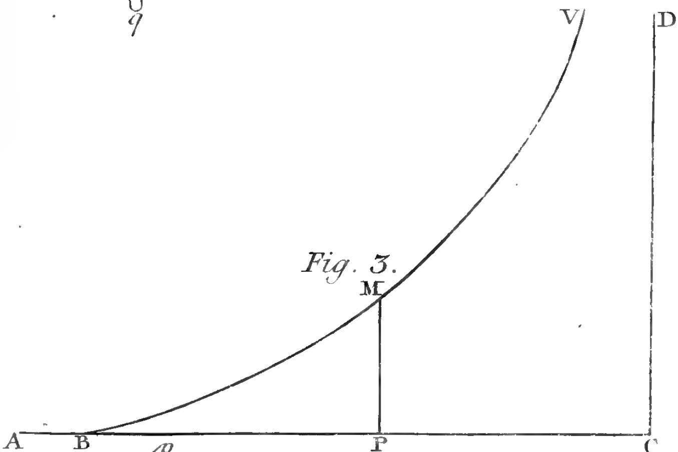
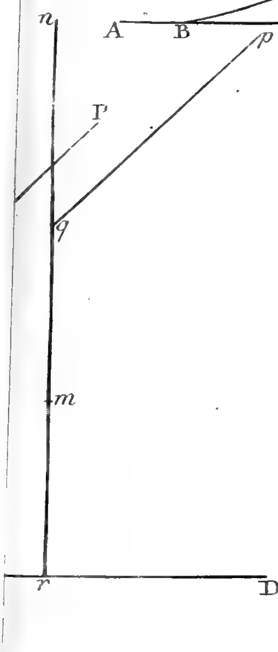


Fig. 3.



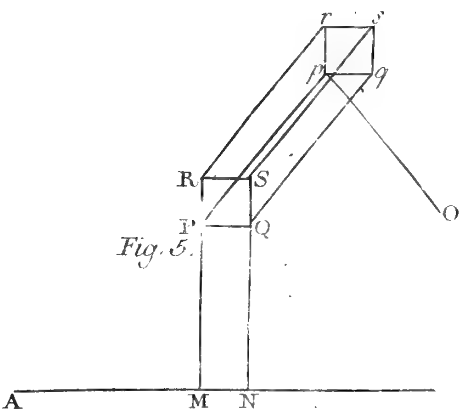


Fig. 5.

Fig. 1

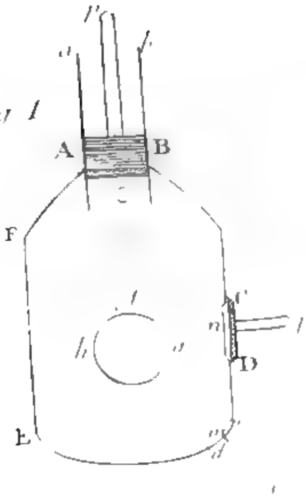


Fig. 2

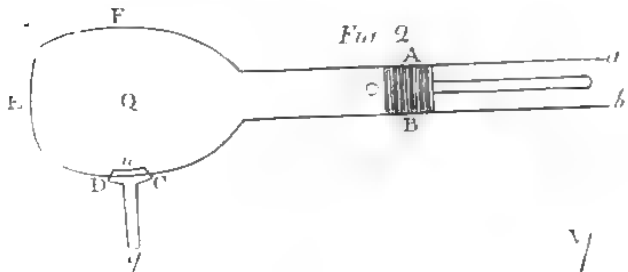


Fig. 3

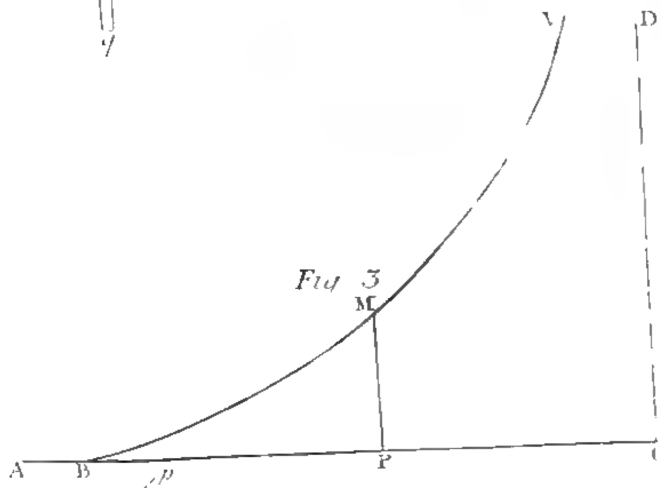


Fig. 4

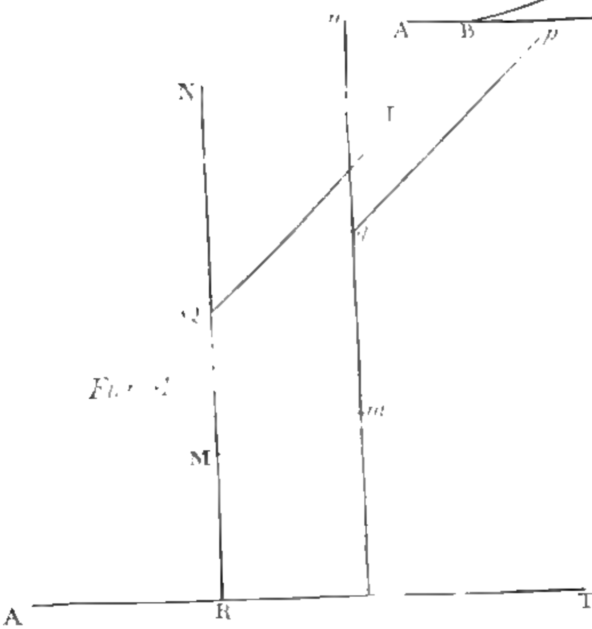
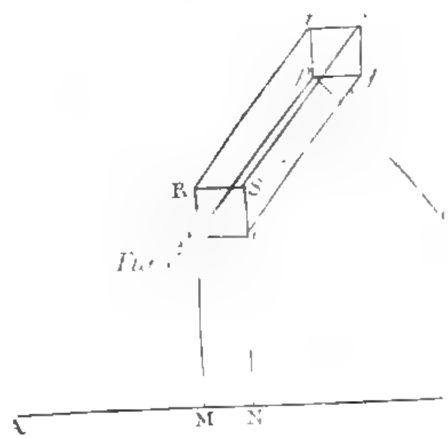
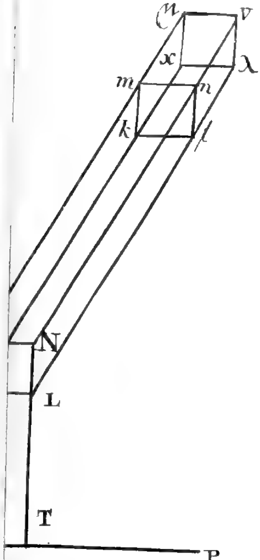


Fig. 5





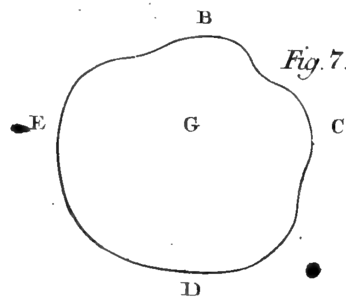


Fig. 7.

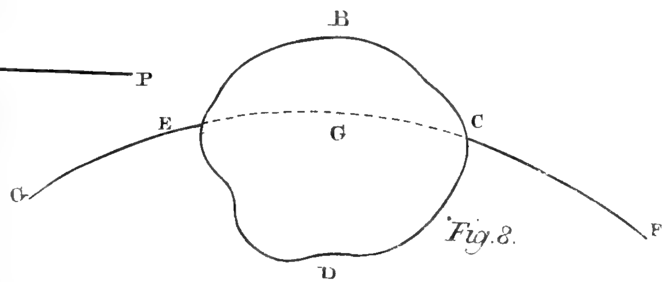


Fig. 8.

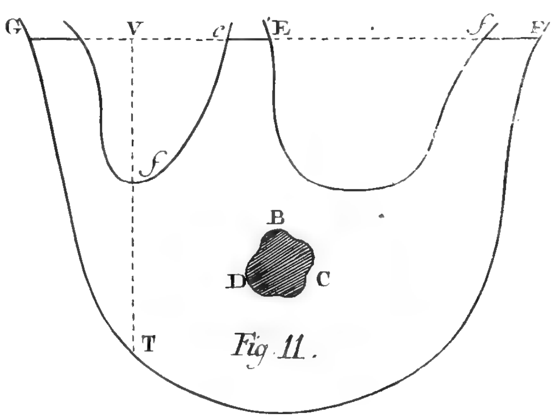


Fig. 11.

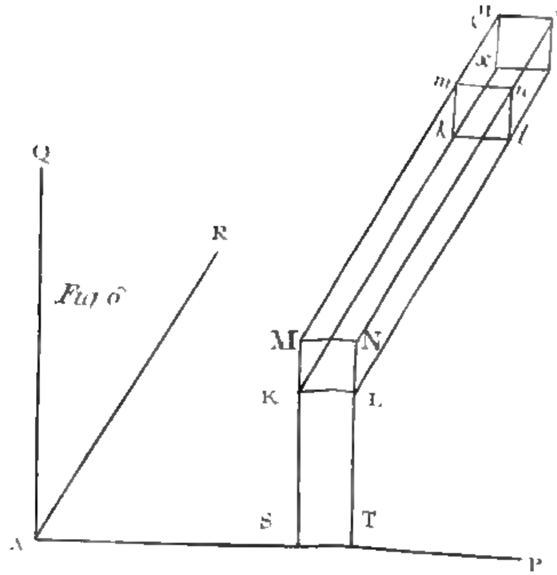


Fig 6

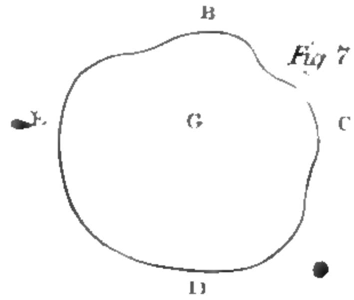


Fig 7

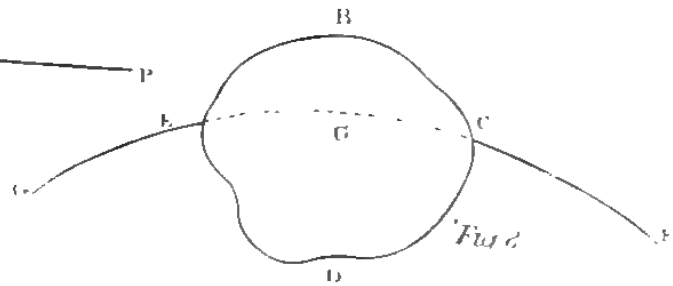


Fig 8

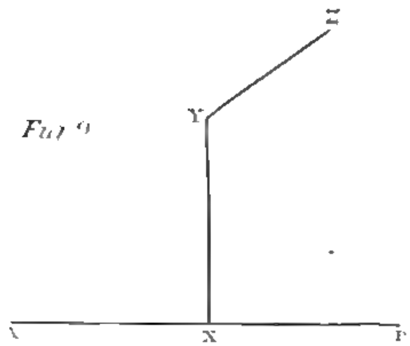


Fig 9

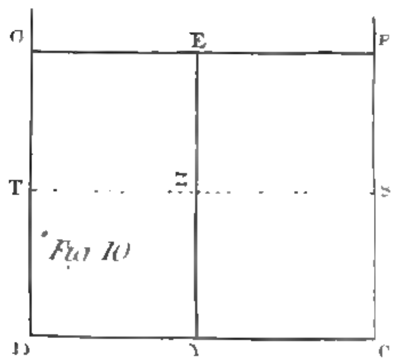


Fig 10

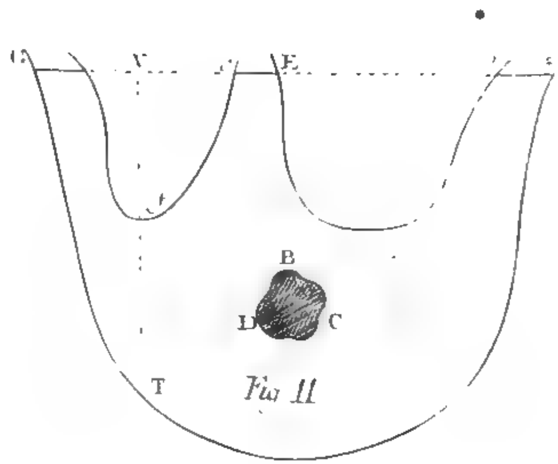


Fig 11

Fig. 12.

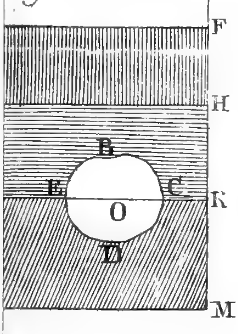


Fig. 13.

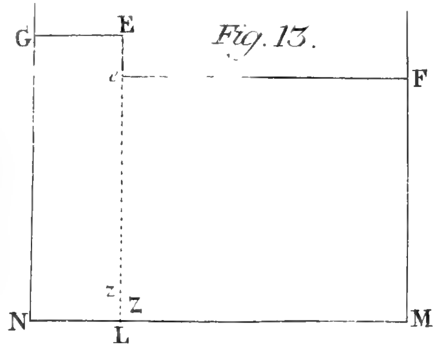


Fig. 14.

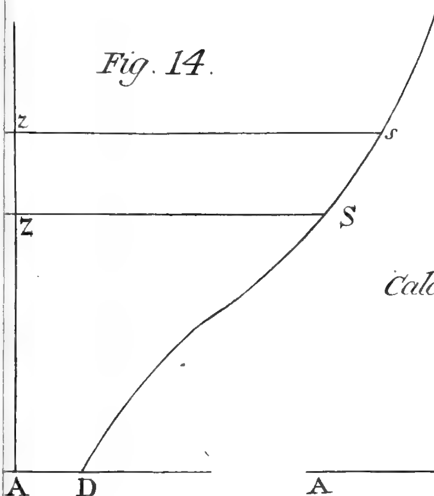
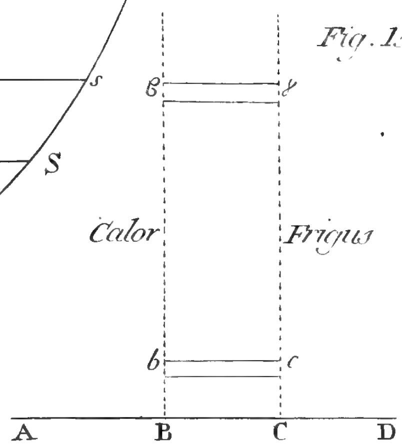


Fig. 15.



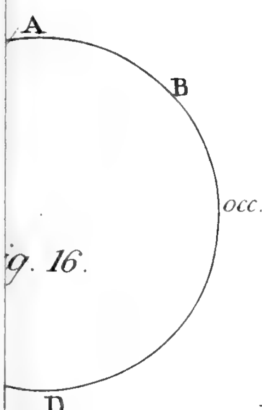


Fig. 16.

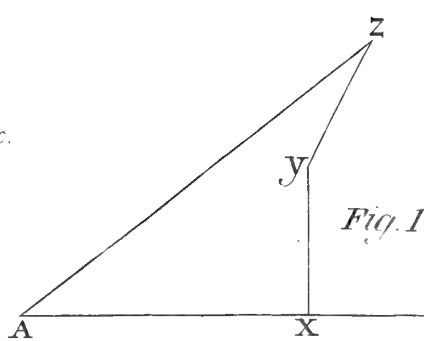


Fig. 17.

Fig. 12

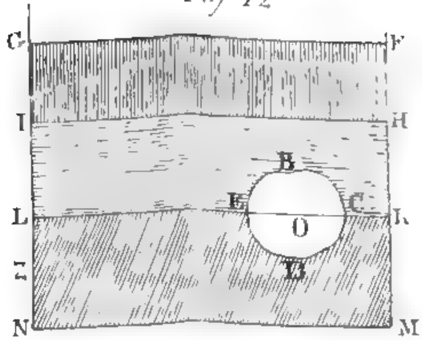


Fig. 13

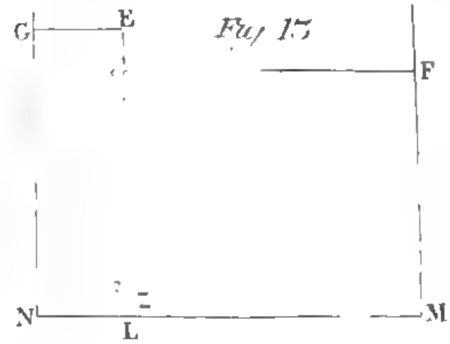


Fig. 14

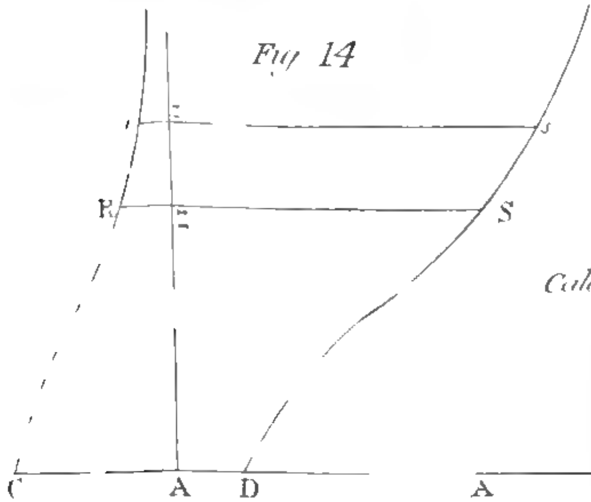


Fig. 15

Fig. 16

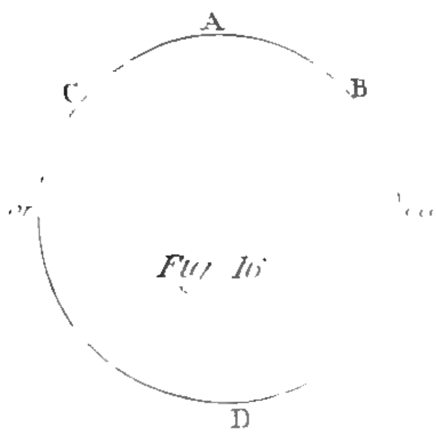
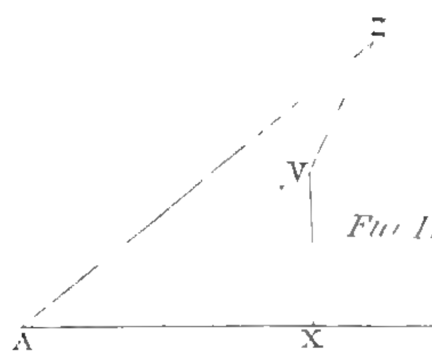
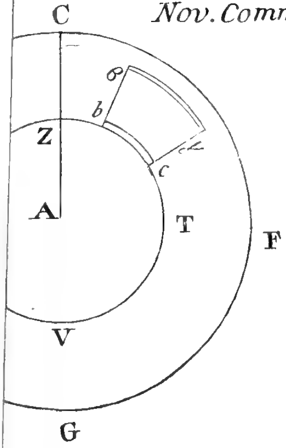


Fig. 17





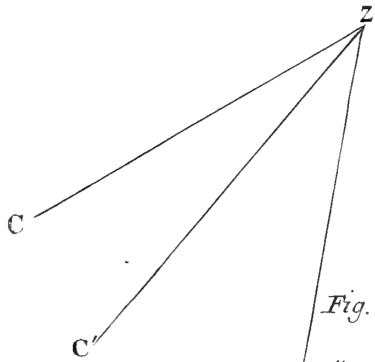
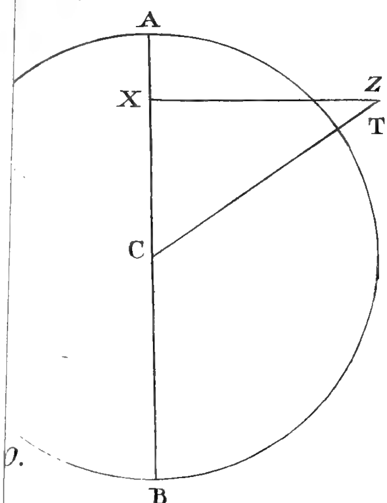


Fig. 19.



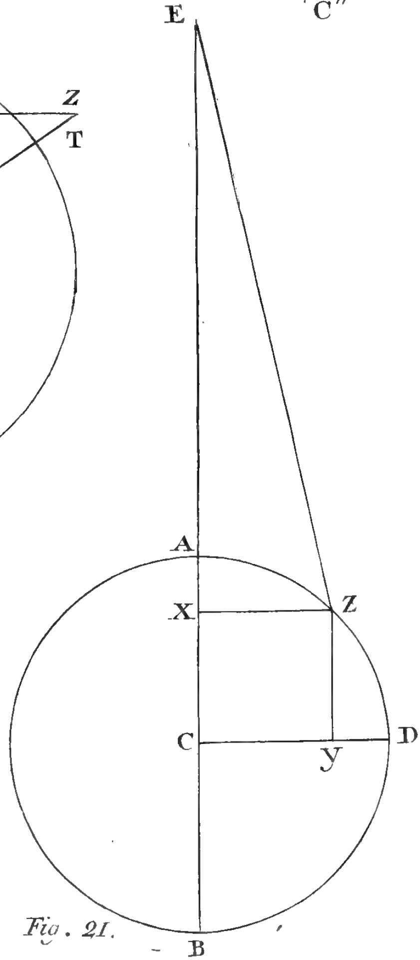


Fig. 21.

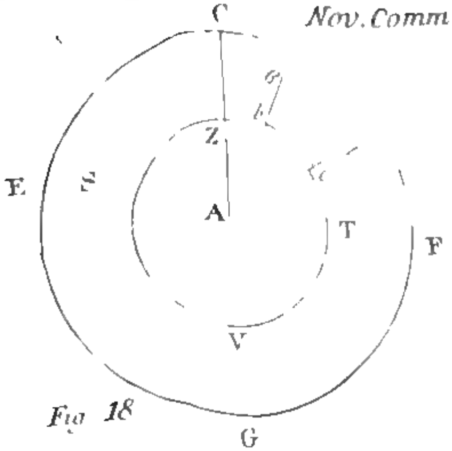


Fig 18

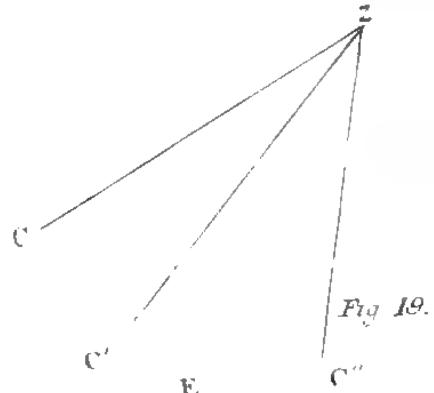


Fig 19.

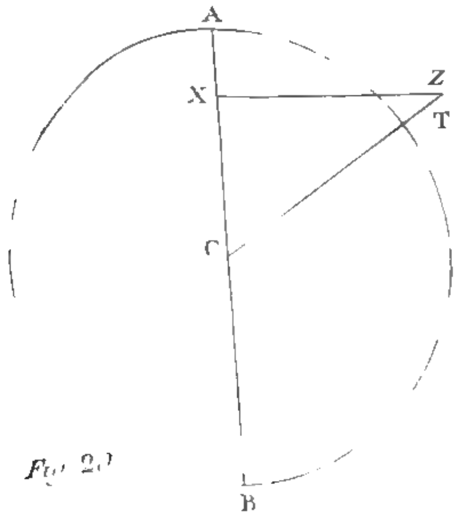


Fig 20

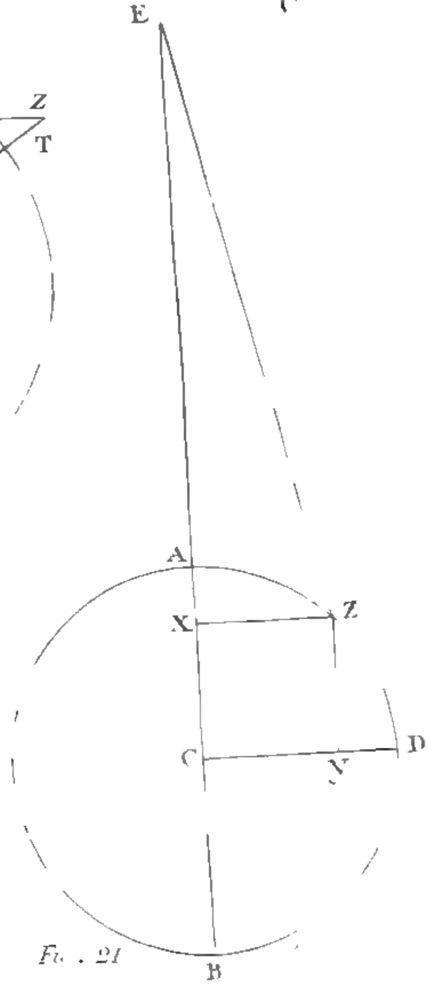


Fig. 21

Fig 1.

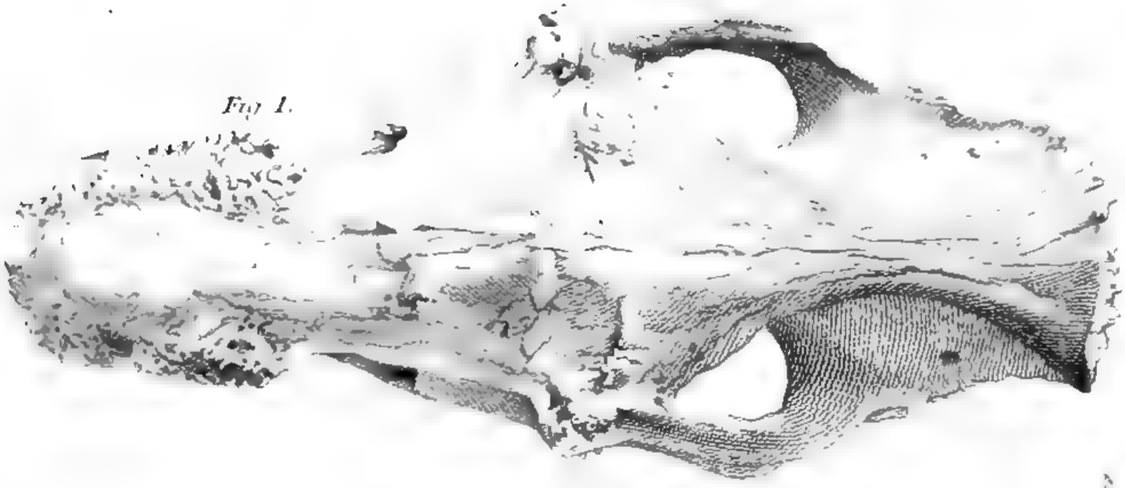
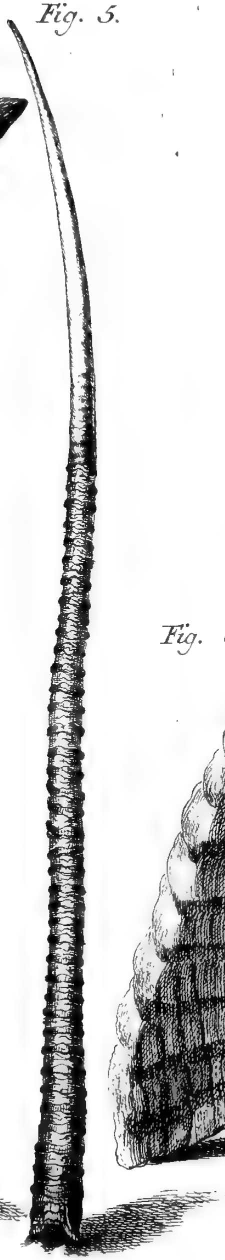


Fig 2

Fig 3

Fig. 5.



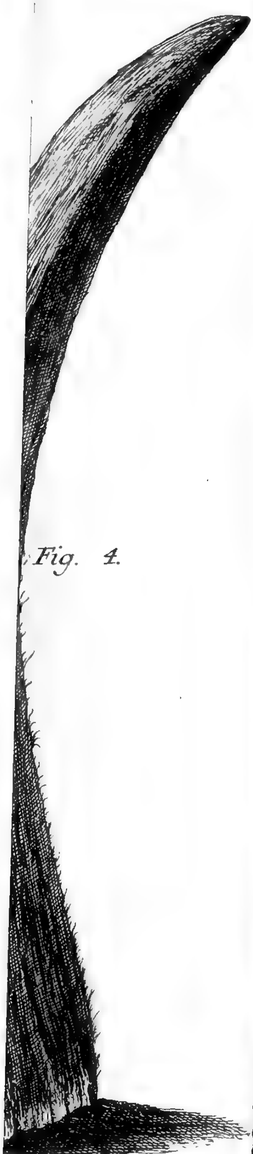


Fig. 4.

Fig. 6.

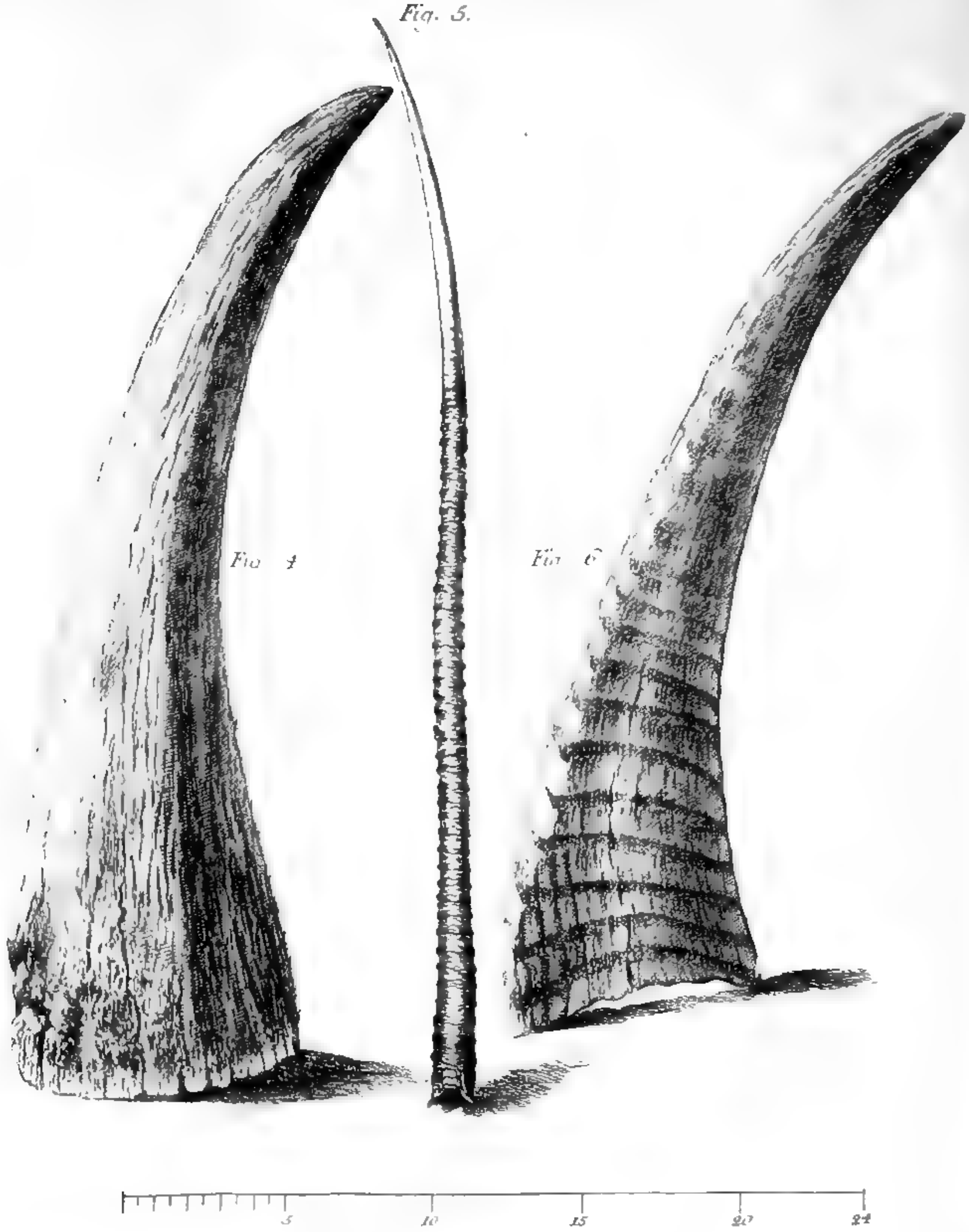


Fig. 5.
Fig. 4
Fig. 6
5
10
15
20
24

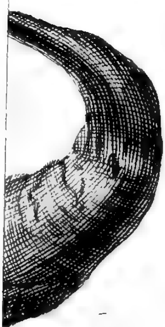


Fig. 2.

Fig 1

Fig 2

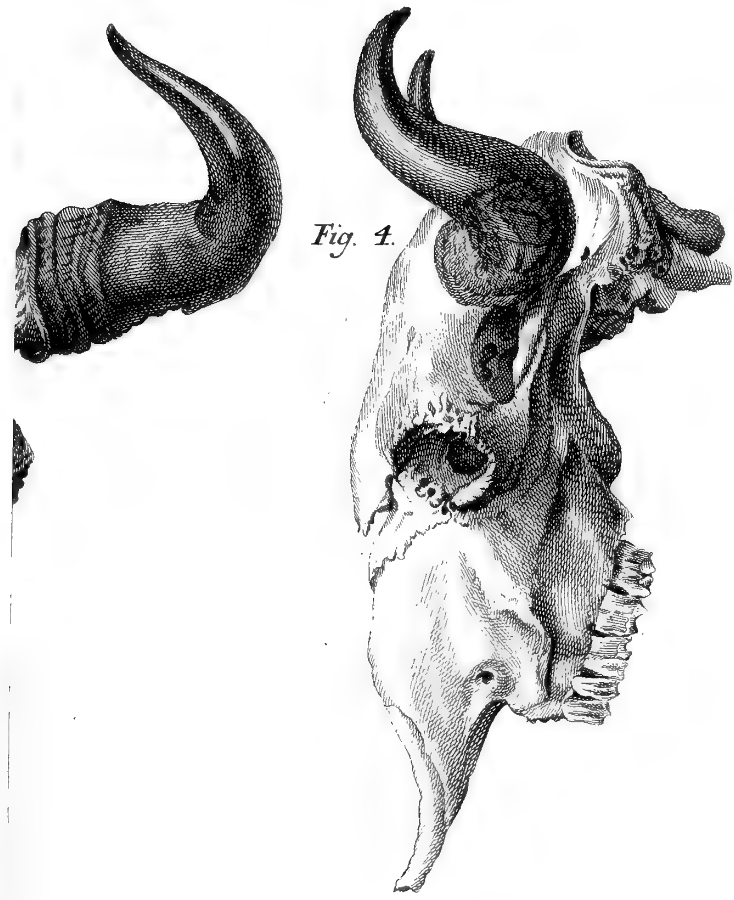


Fig. 4.

15 20 24

Fig 3

Fig 4

Fig. 2.

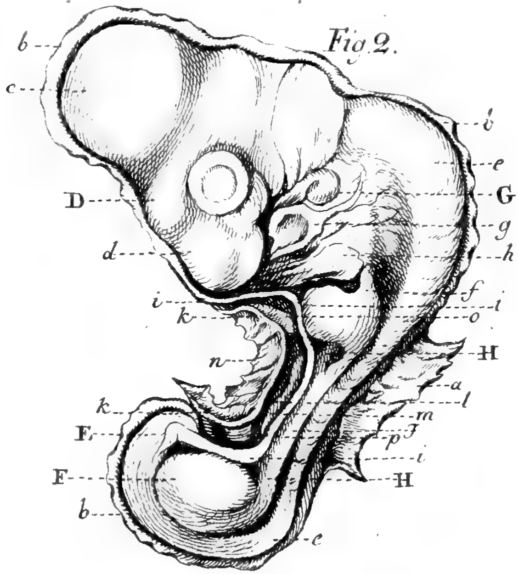


Fig. 4.

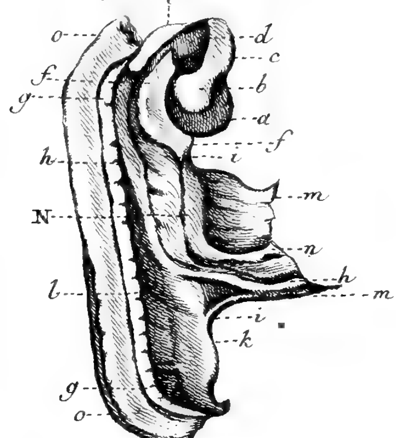


Fig. 6.

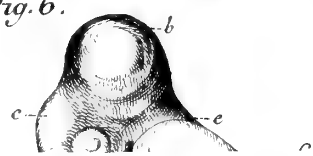


Fig. 1.

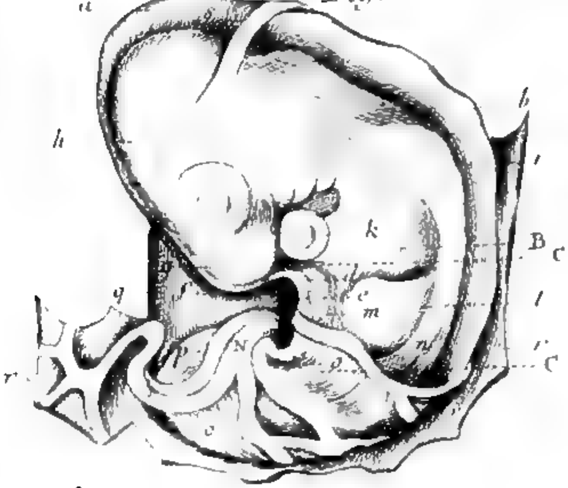


Fig. 2.

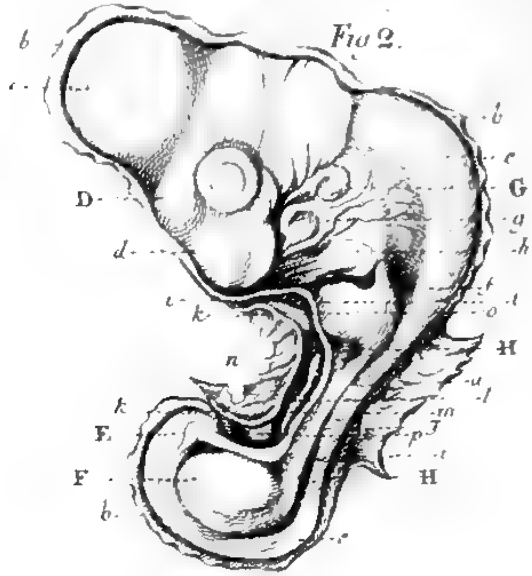


Fig. 3.

Fig. 4.

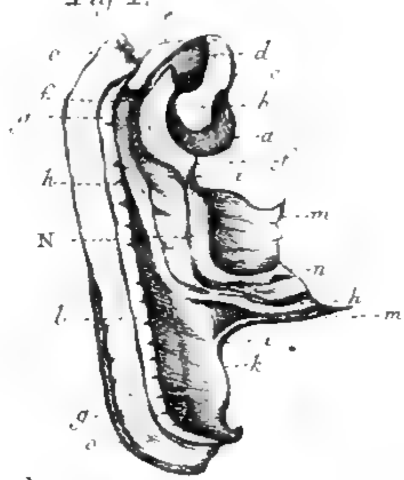


Fig. 5

Fig. 6

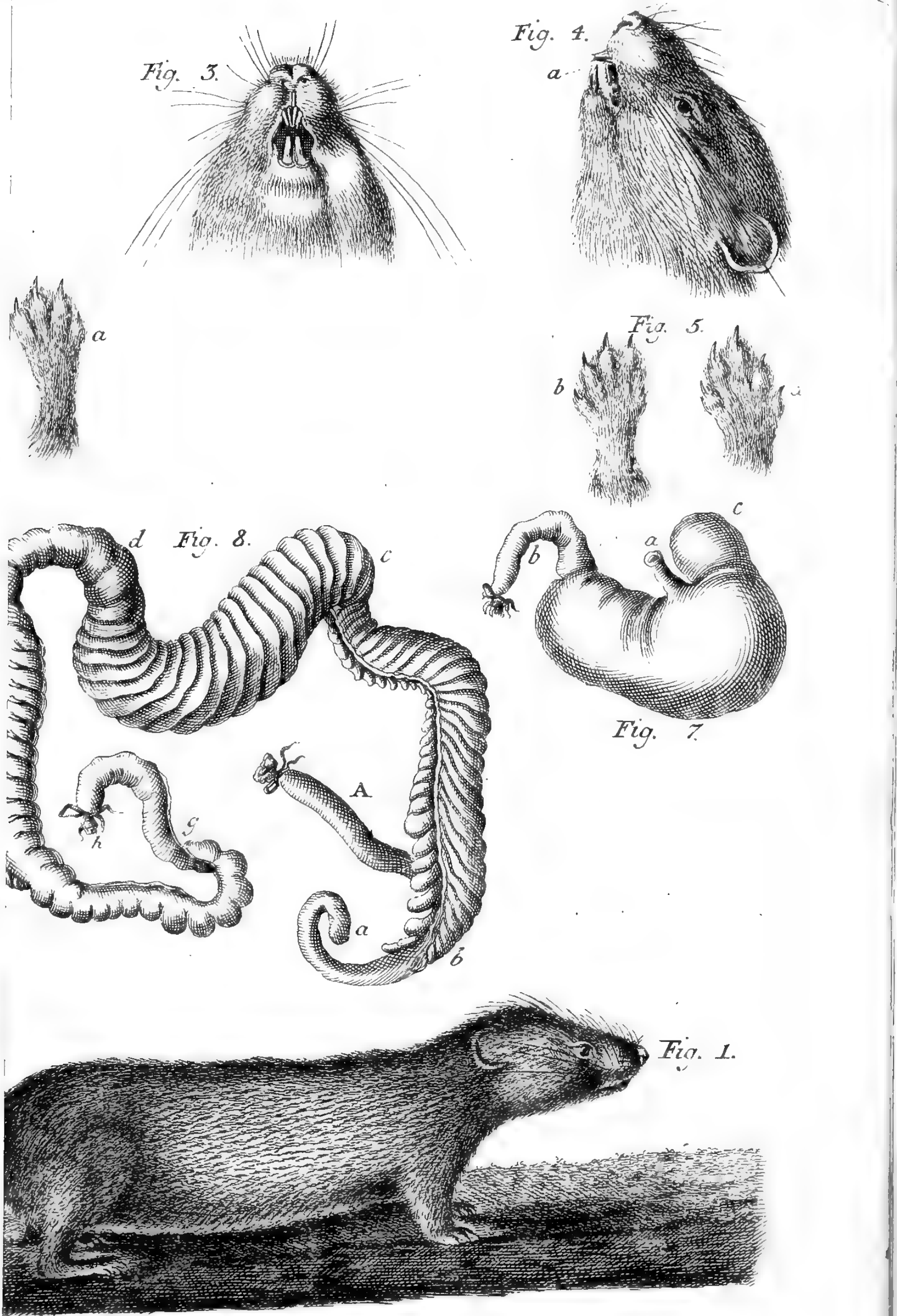


Fig. 3.
Fig. 4.
a
a
Fig. 5.
b
a
d
Fig. 8.
c
a
b
c
Fig. 7.
A
g
h
a
b
Fig. 1.

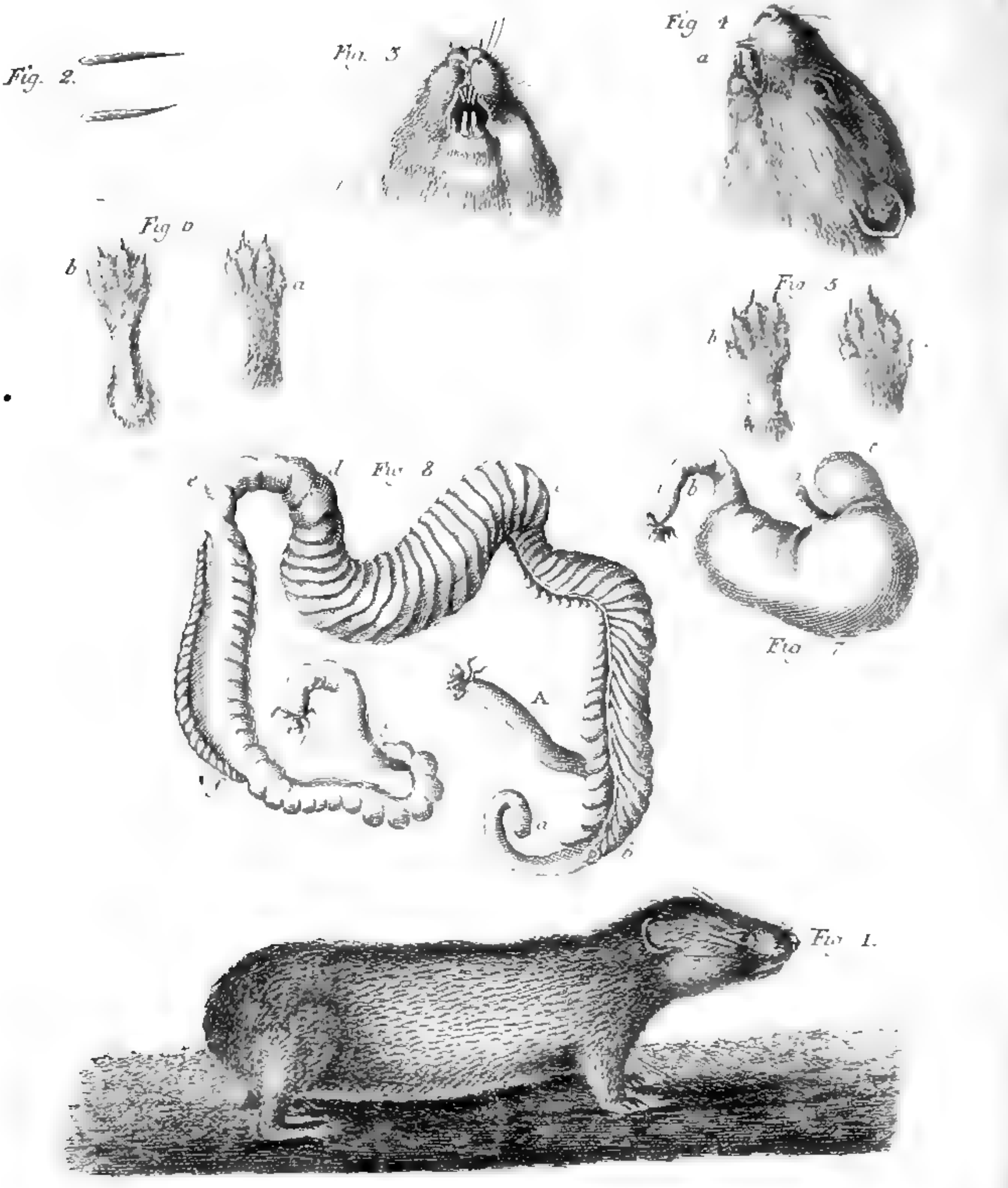
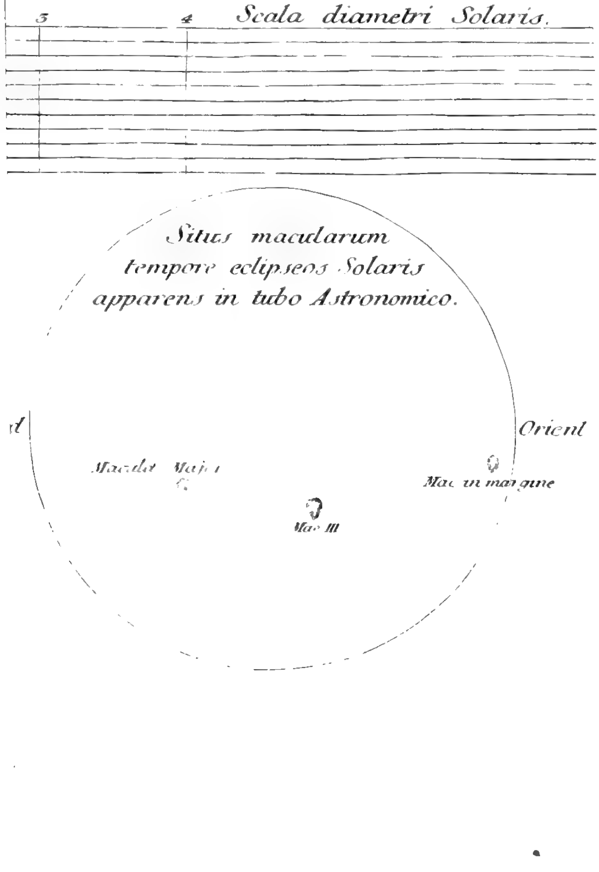


Fig. 2.
Fig. 3
Fig 4
a
Fig 6
b
a
Fig 5
b
Fig 8
d
A
a
b
Fig 7
Fig 1.


3
4
Scala diametri Solaris.
Situs macularum
tempore eclipseos Solaris
apparens in tubo Astronomico.
d
Orient
Macula Major
Mac. in margine
Mac. III

Situs macularum
tempore eclipseos Solaris
apparens in tubo Astronomico