4.21
L 78

Mons. le Président,

J'ai l'honneur de vous présenter un livre dont je suis l'auteur.

Si vous trouverez que cet ouvrage a mérité l'approbation que lui a accordé votre Accadémie de Sciences, j'éprouverai un grand plaisir.

Je suis avec un profond respect

Le très-humble et très-obéissant serviteur

Architecte Acquabona Lorenzo

Ancôna 23 Octobre 1898

Adresse:

Rione Archi Palazzo Gozzi

N 1

Ancona

(Italie)

NOZIONI

DI

CALCOLO INTEGRALE

PER

ACQUABONA LORENZO

Socio d'onore all'Accademia di Scienze *La Stella d'Italia*
e Accademico nell'*Institut du Midi* di Francia.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

1898

NOZIONI

DI

CALCOLO INTEGRALE

PER

ACQUABONA LORENZO
Socio d'onore all'Accademia di Scienze *La Stella d'Italia*
e Accademico nell'*Institut du Midi* di Francia.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

1898

ALL' ILLUSTRISSIMO

COMMENDATORE PROF. CREMONA LUIGI

SENATORE DEL REGNO

DIRETTORE

DELLA R. SCUOLA DI APPLICAZIONE

PER GLI INGEGNERI

DI

ROMA

PREFAZIONE

Le poche pagine che seguono hanno uno scopo solo, quello di richiamare alla memoria, senza troppa perdita di tempo, quelle nozioni di calcolo integrale, che spesse volte si rendono necessarie nella pratica, e che solo con una certa pazienza si rinvengono nei più voluminosi trattati sullo stesso argomento.

Ho supposto, naturalmente, la conoscenza perfetta del calcolo differenziale ed ho cercato di essere il più chiaro possibile, anche a rischio di poter sembrare qualche volta prolisso.

PARTE PRIMA

Teoria

1. Il calcolo integrale ha per iscopo di trovare una funzione quando se ne conosce il differenziale: in altre parole, data, ad es., una funzione $f(x)$, col calcolo integrale si cerca quella funzione che ha per differenziale $f(x)dx$.

La funzione che ha per differenziale $f(x)dx$ si dice l'integrale di $f(x)dx$: se $\varphi(x)$ è l'integrale di $f(x)dx$, ciò si esprime scrivendo

$$\int f(x)dx = \varphi(x) .$$

Per definizione si ha

$$d\varphi(x) = d\int f(x)dx = f(x)\,dx ,$$

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) ;$$

dunque i segni d e $\int$ si distruggono mutuamente.

Ricordiamo che se è

$$d\varphi(x) = f(x)\,dx ,$$

è anche, per c costante arbitraria

$$d\left\{ \varphi(x) + c \right\} = f(x)dx ;$$

dunque un differenziale dato ammette infiniti integrali, i quali tutti differiscono fra loro per una costante, dunque l'integrale generale di $f(x)dx$ è $\varphi(x) + c$, dove c, come abbiamo detto, è una costante arbitraria.

Dei fattori costanti che stanno sotto il segno integrale.

2. Sia $u = f(x)$, è facile riconoscere che (per a costante)

$$\int dau = au \quad , \quad a \int du = au \, ,$$

dunque

$$\int dau = a \int du \, .$$

Ma è

$$dau = adu \, ,$$

quindi

$$\int dau = \int adu = a \int du \, ,$$

il che significa che i fattori costanti che stanno sotto il segno $\int$ si possono senz'altro portare fuori di esso.

Integrazione immediata di talune funzioni semplici di una sola variabile.

3. Abbiamo dal calcolo differenziale

$$d(x + c) = dx \, ,$$

sarà dunque

$$\int dx = \int d(x + c) = x + c \, .$$

Analogamente, poichè

$$d(x^{n+1} + c) = (n + 1)x^n dx \, ,$$

ossia

$$x^n dx = \frac{d(x^{n+1} + c)}{n + 1} \, ,$$

sarà

$$\int x^n dx = \int \frac{d(x^{n+1} + c)}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} \int d(x^{n+1} + c) =$$

$$= \frac{x^{n+1} + c}{n + 1} = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + c_1 \, ,$$

dove c_1 è sempre una costante arbitraria, come la era c (e quindi si può rimpiazzare anche con c).

Dalla relazione

$$d(e^x+c)=e^x dx$$

si ricava

$$\int e^x dx=\int d(e^x+c)=e^x+c.$$

Così da

$$d(a^x+c)=a^x l.a dx,$$

ossia

$$a^x dx=\frac{d(a^x+c)}{l.a},$$

si ha

$$\int a^x dx=\int\frac{d(a^x+c)}{l.a}=\frac{1}{l.a}\int d(a^x+c)=\frac{a^x+c}{l.a}=\frac{a^x}{l.a}+c.$$

Poichè

$$d(l.x+c)=\frac{dx}{x},$$

sarà

$$\int\frac{dx}{x}=\int d(l.x+c)=l.x+c.$$

E così essendo

$$d(\operatorname{sen}x+c)=\cos x dx,$$

sarà

$$\int\cos x dx=\int d(\operatorname{sen}x+c)=\operatorname{sen}x+c;$$

e
$$d(\cos x+c)=-\operatorname{sen}x dx,$$

sarà

$$\int-\operatorname{sen}x dx=\int d(\cos x+c)=\cos x+c,$$

ossia

$$\int\operatorname{sen}x dx=-\cos x-c=-\cos x+c.$$

Essendo

$$d(\operatorname{tang}x+c)=\frac{dx}{\cos^2 x},$$

sarà

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\operatorname{tang} x + c) = \operatorname{tang} x + c\,;$$

e

$$d(\operatorname{cotang} x + c) = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}\,,$$

sarà

$$\int -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int d(\operatorname{cotang} x + c) = \operatorname{cotang} x + c\,,$$

ossia

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotang} x - c = -\operatorname{cotang} x + c. \quad (^*)$$

Analogamente, poichè

$$d(\sec x + c) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx\,,$$

sarà

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \int d(\sec x + c) = \sec x + c\,;$$

e

$$d(\operatorname{cosec} x + c) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,,$$

sarà

$$\int -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int d(\operatorname{cosec} x + c) = \operatorname{cosec} x + c\,,$$

ossia

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cosec} x - c = -\operatorname{cosec} x + c.$$

Dalle formule

$$d(\operatorname{arc\,sen} x + c) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad d(\operatorname{arc\,cos} x + c) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

(*) Avvertiamo che $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$, perchè (-1) è costante.

si ricava

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d(\text{arc sen}\, x + c) = \text{arc sen}\, x + c,$$

$$\int - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int d(\text{arc cos}\, x + c) = \text{arc cos}\, x + c,$$

ossia

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\,\text{arc cos}\, x - c = -\,\text{arc cos}\, x + c;$$

dunque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x + c = -\,\text{arc cos}\, x + c,$$

relazione che si riconoscerà esatta quando si pensi che c è una costante arbitraria, e che, per essere

$$\text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2},$$

le quantità arc sen$x$, — arc cos$x$ differiscono appunto per una costante.

Dalle formule

$$d(\text{arc tang}\, x + c) = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d(\text{arc cotang}\, x + c) = -\frac{dx}{1+x^2}$$

si ricava

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int d(\text{arc tang}\, x + c) = \text{arc tang}\, x + c,$$

$$\int - \frac{dx}{1+x^2} = \int d(\text{arc cotang}\, x + c) = \text{arc cotang}\, x + c;$$

ossia

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\,\text{arc cotang}\, x - c = \text{arc cotang}\, x + c,$$

dunque

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + c = -\text{arc cotang}\, x + c\,,$$

dove le due quantità arc tang$x$, — arc cotang$x$ differiscono per una costante e c è una costante arbitraria.

Finalmente dalle formule

$$d(\text{arc sec}\, x + c) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\quad d(\text{arc cosec}\, x + c) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

si ricava

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int d(\text{arc sec}\, x + c) = \text{arc sec}\, x + c\,,$$

$$\int -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int d(\text{arc cosec}\, x + c) = \text{arc cosec}\, x + c\,,$$

ossia

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\text{arc cosec}\, x - c = -\text{arc cosec}\, x + c\,,$$

dunque

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec}\, x + c = -\text{arc cosec}\, x + c\,,$$

dove, come al solito, le due quantità arc sec$x$, — arc cosec$x$ differiscono per una costante e c è una costante arbitraria.

Integrazione di una somma di funzioni della medesima variabile indipendente. Integrazione per scomposizione.

4. Se u, v, z sono funzioni della stessa variabile indipendente, si ha

$$d\{(u+v+z)+c\} = du + dv + dz\,;$$

dunque

$$\int(du+dv+dz)=\int d\{(u+v+z)+c\}=(u+v+z)+c.$$

Ma è anche

$$\int du+\int dv+\int dz=(u+c_1)+(v+c_2)+(z+c_3)=(u+v+z)+c,$$

dunque

$$\int(du+dv+dz)=\int du+\int dv+\int dz,$$

il che significa che l'integrale di una somma di funzioni della medesima variabile indipendente è eguale alla somma degli integrali delle funzioni date.

Di qui un metodo d'integrazione che diremo per scomposizione, e che viene illustrato dall'esempio seguente.

Esempio. — Sia da calcolare

$$\int(6a^2x^3+3b^2\sqrt[3]{x^2}-\cos x)\,dx,$$

avremo

$$\int(6a^2x^3+3b^2\sqrt[3]{x^2}-\cos x)\,dx=$$

$$=\int 6a^2x^3dx+\int 3b^2\sqrt[3]{x^2}\,dx-\int\cos x\,dx=$$

$$=6a^2\int x^3dx+3b^2\int\sqrt[3]{x^2}\,dx-\int\cos x\,dx=$$

$$=6a^2\frac{x^4}{4}+3b^2\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\operatorname{sen}x+c=$$

$$=\frac{3}{2}a^2x^4+\frac{9}{5}b^2\sqrt[3]{x^5}-\operatorname{sen}x+c.$$

Integrazione per parti o per fattori.

5. Se u, v sono due funzioni della medesima variabile indipendente x, si ha

$$duv=udv+vdu,$$

dunque

$$\int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu = \int duv = uv\,,$$

ossia

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Di qui un metodo di integrazione che diremo per parti o meglio per fattori e che viene illustrato dagli esempi che seguono.

Esempio 1°. — Sia da calcolare $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Poniamo

$$x = u\,, \quad v = \cos x\,,$$

ossia

$$dv = -\operatorname{sen} x\, dx\,, \quad \operatorname{sen} x\, dx = -dv\,,$$

sarà

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int u(-dv) = \int -udv = -\int udv = -uv + \int vdu =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + c\,.$$

Esempio 2°. — Sia da calcolare $\int l\,.\,x\, dx$.

Poniamo

$$l\,.\,x = u\,, \quad x = v\,,$$

da cui

$$dx = dv\,,$$

sarà

$$\int l\,.\,x\, dx = \int udv = uv - \int vdu = xl\,.\,x - \int x d\, l\,.\,x =$$

$$= x\, l\,.\,x - \int x \frac{dx}{x} = xl\,.\,x - \int dx = xl\,.\,x - x + c =$$

$$= x\,(l\,.\,x - 1) + c\,.$$

Esempio 3°. — Sia da calcolare $\int x \cos(ax) dx$.

Poniamo

$$x = u\,, \quad \operatorname{sen}(ax) = v\,,$$

da cui

$$dv = \cos(ax)\, d\,(ax) = a \cos(ax) dx\,,$$

ossia

$$\cos(ax)\,dx = \frac{dv}{a},$$

allora

$$\int x\cos(ax)dx = \int u\frac{dv}{a} = \frac{1}{a}\int udv = \frac{1}{a}\left\{uv - \int vdu\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{x\,\mathrm{sen}\,(ax) - \int \mathrm{sen}\,(ax)\,dx\right\}.$$

Ma è

$$d\cos(ax) = -\,\mathrm{sen}\,(ax)\,d\,(ax) = -\,a\,\mathrm{sen}\,(ax)dx\,,$$

ossia

$$\mathrm{sen}\,(ax)\,dx = -\,\frac{d\cos(ax)}{a};$$

dunque avremo

$$\int \mathrm{sen}\,(ax)\,dx = \int -\frac{d\cos(ax)}{a} = -\frac{1}{a}\int d\cos(ax) =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax) + c\,;$$

dunque

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\left\{x\,\mathrm{sen}\,(ax) - \int \mathrm{sen}\,(ax)dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{x\,\mathrm{sen}\,(ax) + \frac{1}{a}\cos(ax)\right\} + c = \frac{x\,\mathrm{sen}\,(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c.$$

Esempio 4°. — Sia da calcolare $\int x\,\mathrm{sen}\,(ax)\,dx$.

Poniamo

$$x = u\,,\quad \cos(ax) = v\,,$$

da cui

$$\mathrm{sen}\,(ax)\,dx = -\frac{dv}{a},$$

avremo

$$\int x\mathrm{sen}\,(ax)\,dx = \int u\left(-\frac{dv}{a}\right) = \int -\frac{udv}{a} = -\frac{1}{a}\int udv =$$

$$= -\frac{1}{a}\left\{uv - \int vdu\right\} = -\frac{1}{a}\left\{x\cos(ax) - \int \cos(ax)dx\right\}.$$

Ricordiamo che è

$$d\,\mathrm{sen}(ax) = \cos(ax)\,d\,(ax) = a\cos(ax)\,dx\,,$$

ossia

$$\cos(ax)\,dx = \frac{d\,\mathrm{sen}(ax)}{a}\,,$$

allora

$$\int x\,\mathrm{sen}\,(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\left\{x\cos(ax) - \int \frac{d\,\mathrm{sen}\,(ax)}{a}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a}\left\{x\cos(ax) - \frac{1}{a}\int d\,\mathrm{sen}\,(ax)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{a}\left\{x\cos(ax) - \frac{1}{a}\,\mathrm{sen}\,(ax)\right\} + c =$$

$$= -\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{\mathrm{sen}\,(ax)}{a^2} + c\,.$$

Esempio 5°. — Sia da calcolare $\int x^2\cos(ax)\,dx$.
Poniamo $x^2 = u$, $\mathrm{sen}(ax) = v$, da cui

$$\cos(ax)\,dx = \frac{dv}{a}\,,$$

allora

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \int u\frac{dv}{a} = \frac{1}{a}\int udv = \frac{1}{a}\left\{uv - \int vdu\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{x^2\,\mathrm{sen}(ax) - \int \mathrm{sen}\,(ax)\,dx^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{x^2\,\mathrm{sen}\,(ax) - \int 2x\,\mathrm{sen}\,(ax)\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{x^2\,\mathrm{sen}\,(ax) - 2\int x\,\mathrm{sen}\,(ax)\,dx\right\} =$$

$$= (\text{v. esempio } 4°)\ \frac{1}{a}\left\{x^2\,\mathrm{sen}\,(ax) - 2\left[-\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{\mathrm{sen}\,(ax)}{a^2}\right]\right\} + c =$$

$$= \frac{x^2\,\mathrm{sen}\,(ax)}{a} + \frac{2x\cos(ax)}{a^2} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,(ax)}{a^3} + c.$$

Integrazione per sostituzione.

6. Sia una funzione $f(x)$, poniamo $x = \varphi(t)$, sarà

$$dx = \varphi'(t)dt \quad (*),$$

ossia

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

da cui

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt.$$

Può darsi che il secondo integrale sia calcolabile direttamente, allora, calcolando questo integrale e sostituendo poi a t il suo valore in funzione di x, si viene ad avere $\int f(x)dx$. In ciò consiste il metodo d'integrazione per sostituzione, chè verremo illustrando con opportuni esempî.

Esempio 1°. — Sia da calcolare $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$.

Ricordiamo che $d\operatorname{sen} x = \cos x\,dx$, allora

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\,d\operatorname{sen} x.$$

Poniamo $\operatorname{sen} x = z$ (**), da cui $d\operatorname{sen} x = dz$, allora

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\,d\operatorname{sen} x = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + c = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c.$$

Esempio 2°. — Sia da calcolare $\int a\cos(ax)\,dx$.

Poniamo $ax = z$, da cui $d(ax) = adx = dz$, allora

$$\int a\cos(ax)dx = \int \cos z\,dz = \operatorname{sen} z + c = \operatorname{sen}(ax) + c.$$

Esempio 3°. — Sia da calcolare $\int \frac{3x^2}{a^3 + x^3}\,dx$.

(*) $\varphi'(t)$ indica la derivata prima di $\varphi(t)$.

(**) L'equazione $\operatorname{sen} x = z$ corrisponde all'altra $x = \operatorname{arc\,sen} z$, che è la $x = \varphi(t)$ precedente.

Poniamo $a^2+x^3=z$, da cui $dz=d(a^2+x^3)=3x^2dx$, allora

$$\int\frac{3x^2}{a^2+x^3}dx=\int\frac{dz}{z}=l.z+c=l.(a^2+x^3)+c.$$

Esempio 4°. — Sia da calcolare $\int 2ax(x^2-a^2)dx$.

Poniamo $x^2-a^2=z$, da cui $dz=d(x^2-a^2)=2xdx$, allora

$$\int 2ax(x^2-a^2)dx=\int azdz=a\int zdz=a\frac{z^2}{2}+c=\frac{a(x^2-a^2)}{2}+c.$$

Esempio 5°. — Sia da calcolare $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Poniamo $x^2+a^2=y^2$, da cui

$$d(x^2+a^2)=2xdx=dy^2=2y\,dy,$$

ossia $xdx=ydy$, avremo

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{dy}{\pm\sqrt{y^2}}=\pm\int\frac{ydy}{y}=\pm\int dy=\pm y+c=$$

$$=\pm\sqrt{x^2+a^2}+c.$$

Esempio 6°. — Sia da calcolare $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

Poniamo $x=ay$, da cui $dx=day=ady$, allora

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{ady}{a^2+a^2y^2}=\int\frac{ady}{a^2(1+y^2)}=\int\frac{dy}{a(1+y^2)}=\frac{1}{a}\int\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}y+c=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right)+c.$$

Esempio 7°. — Sia da calcolare $\int\frac{adx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

Poniamo $x=ay$, da cui $dx=d(ay)=ady$, allora

$$\int \frac{adx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a^2dy}{ay\sqrt{a^2y^2-a^2}} = \int \frac{ady}{y\sqrt{a^2(y^2-1)}} = \int \frac{ady}{ay\sqrt{y^2-1}} =$$

$$= \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \text{arc sec}\, y + c = \text{arc sec}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Esempio 8°. — Sia da calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Poniamo $x = 1 - y$, da cui $dx = -dy$, allora

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{-dy}{\sqrt{2(1-y)-(1-y)^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{2-2y-1+2y-y^2}} =$$

$$= -\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \text{arc cos}\, y + c = \text{arc cos}\,(1-x) + c.$$

Integrazione per serie.

7. Sia dato il differenziale $f(x)dx$ e supponiamo che si possa sviluppare $f(x)$ in una serie convergente secondo Maclaurin, supponiamo cioè che sia

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots$$

dove $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$,... sono, rispettivamente, i valori che assumono le derivate prima, seconda, terza,... di $f(x)$, quando in esse si faccia $x = 0$.

Allora

$$f(x)\,dx = f(0)\,dx + xf'(0)\,dx + \frac{x^2}{1.2}f''(0)dx + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)\,dx + \ldots$$

e quindi

$$\int f(x)\,dx =$$

$$\int \left[f(0)\,dx + xf'(0)\,dx + \frac{x^2}{1.2}f''(0)dx + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)dx + \ldots\right] =$$

$$=\int f(0)\,dx+\int xf'(0)\,dx+\int\frac{x^2}{1.2}f''(0)\,dx+\int\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)\,dx+\ldots=$$

$$=f(0)\int dx+f'(0)\int x\,dx+\frac{f''(0)}{1.2}\int x^2dx+\frac{f'''(0)}{1.2.3}\int x^3dx+\ldots=$$

$$=c+f(0)x+f'(0)\frac{x^2}{2}+f''(0)\frac{x^3}{1.2.3}+f'''(0)\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

Esempio 1°. — Sia da calcolare $\int\frac{dx}{1+x}$.

Abbiamo

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

che è una serie convergente per valori di x compresi fra $+1$ e -1, allora, poichè

$$f(0)=1\,,\quad f'(0)=-1\,,\quad f''(0)=2\,,\quad f'''(0)=-6\,,\ldots$$

sarà

$$\int\frac{dx}{1+x}=c+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=l.(1+x)+c.$$

Esempio 2°. — Sia da calcolare $\int\frac{dx}{1+x^2}$.

Abbiamo

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots,$$

che è una serie convergente per valori di x compresi fra $+1$ e -1, allora, poichè

$$f(0)=1\ ,\quad f'(0)=f'''(0)=f^{\text{v}}(0)=\ldots=0\ ,$$

$$f''(0)=-2\ ,\quad f^{\text{iv}}(0)=24\ ,\ldots,$$

sarà

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\text{arc tang}\,x+c.$$

Integrazione delle frazioni razionali.

8. Sia da calcolare $\int \frac{F(x)dx}{f(x)}$, dove $F(x)$, $f(x)$ sono funzioni algebriche intiere di x, ed $F(x)$ è di grado superiore ad $f(x)$. Si divida $F(x)$ per $f(x)$ fino ad ottenere un resto $\varphi(x)$ di grado inferiore ad $f(x)$. Sia Q il quoziente ottenuto, allora potremo scrivere

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

da cui

$$\frac{F(x)dx}{f(x)} = Qdx + \frac{\varphi(x)dx}{f(x)},$$

ossia

$$\int \frac{F(x)dx}{f(x)} = \int Qdx + \int \frac{\varphi(x)dx}{f(x)}.$$

Essendo Q una fuzione algebrica intiera di x si potrà calcolare il valore di $\int Qdx$ colle regole già esposte, e rimarrà da calcolare $\int \frac{\varphi(x)dx}{f(x)}$, dove $\varphi(x)$ è di grado inferiore ad $f(x)$.

Sia m il grado dell'equazione $f(x) = 0$ e si cerchino le sue m radici $a, b, c, \ldots, m$, sarà $f(a) = f(b) = \ldots = f(m) = 0$.

Poniamo

$$[1] \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{M}{x-m},$$

dove A, B, ..., M sono quantità costanti, che si possono determinare pensando che dalla [1] si ha

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \ldots + M\frac{f(x)}{x-m},$$

e quindi, per

$$x = a, b, \ldots, m, \quad A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \ldots, \quad M = \frac{\varphi(m)}{f'(m)}.$$

Allora dalla [1] si ricava

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = \mathrm{A}\,\frac{dx}{x-a} + \mathrm{B}\,\frac{dx}{x-b} + \ldots + \mathrm{M}\,\frac{dx}{x-m},$$

da cui

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{dx} = \int \mathrm{A}\,\frac{dx}{x-a} + \int \mathrm{B}\,\frac{dx}{x-b} + \ldots + \int \mathrm{M}\,\frac{dx}{x-m} =$$

$$= \mathrm{A}\int \frac{dx}{x-a} + \mathrm{B}\int \frac{dx}{x-b} + \ldots + \mathrm{M}\int \frac{dx}{x-m}.$$

Ora, poichè $d(x-a) = dx$, possiamo scrivere

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = l\,.(x-a) + c\,.$$

Analogamente

$$\int \frac{dx}{x-b} = l\,.(x-b) + c\,, \ldots,\quad \int \frac{dx}{x-m} = l\,.(x-m) + c\,,$$

dunque

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)} = \mathrm{A}\int \frac{dx}{x-a} + \mathrm{B}\int \frac{dx}{x-b} + \ldots + \mathrm{M}\int \frac{dx}{x-m} =$$

$$= \mathrm{A}l\,.(x-a) + \mathrm{B}l\,.(x-b) + \ldots + \mathrm{M}l\,.(x-m) + c\,.$$

Illustriamo il processo con qualche esempio.

Esempio 1°. — Sia da calcolare $\int \frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2}$.

Allora $f(x) = x^2 - x - 2$, l'equazione $x^2 - x - 2 = 0$ ha per radici $a = 2$, $b = -1$; $f'(x) = 2x - 1$, dunque

$$f'(a) = 3\ ,\quad f'(b) = -3\ ;\quad \varphi(x) = 3 - 2x\,,$$

da cui

$$\varphi(a) = -1\ ,\quad \varphi(b) = -5\ ;$$

allora

$$A=\frac{\varphi(a)}{f'(a)}=-\frac{1}{3}\,,\quad B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)}=-\frac{5}{3}.$$

Finalmente

$$\int\frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2}=-\frac{1}{3}\,l.(x-2)-\frac{5}{3}\,l.(x+1)+c.$$

Esempio 2°. — Sia da calcolare $\int\frac{dx}{m^2-x^2}$.

Allora $f(x)=m^2-x^2$, l'equazione $m^2-x^2=0$ ha per radici $a=m$, $b=-m$; $f'(x)=-2x$, dunque

$$f'(a)=-2m\,,\quad f'(b)=2m\,;\quad \varphi(x)=1\,,$$

ed anche

$$\varphi(a)=\varphi(b)=1\,,$$

cioè

$$A=\frac{\varphi(a)}{f'(a)}=\frac{1}{-2m}\,,\quad B=\frac{\varphi(b)}{f'(b)}=\frac{1}{2m}\,,$$

dunque

$$\int\frac{dx}{m^2-x^2}=-\frac{1}{2m}\,l.(x-m)+\frac{1}{2m}\,l.(x+m)+c=$$

$$=\frac{1}{2m}\left\{l.(x+m)-l.(x-m)\right\}+c=\frac{1}{2m}\,l.\frac{x+m}{x-m}+c.$$

Integrazione di funzioni irrazionali.

9. Una funzione che contenga solo dei monomî irrazionali è sempre integrabile, giacchè, data la funzione

$$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}\,,$$

possiamo porre

$$x=y^n\,,\quad x^{\frac{m}{n}}=y^{n\frac{m}{n}}=y^m\,,$$

da cui $dx = ny^{n-1}dy$, e quindi

$$\int \sqrt[n]{x^m}\, dx = \int y^m \,.\, ny^{n-1}\, dy = n \int y^{m+n-1} \,.\, dy =$$

$$= n\, \frac{y^{m+n}}{m+n} + c = n\, \frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} + c = n\, \frac{x^{1+\frac{m}{n}}}{m+n} + c\,,$$

ciò che del resto si poteva dedurre anche da considerazioni precedenti.

Esempio. — Sia da calcolare $\int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx$.

Poniamo $x = y^6$, da cui $dx = 6y^5 dy$, e quindi, per essere

$$\sqrt{x} = y^3\,,\quad \sqrt[3]{x^2} = y^4\,,\quad \sqrt[3]{x} = y^2\,,$$

$$\int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{1 + y^3 - y^4}{1 + y^2} \,.\, 6y^5\, dy = 6 \int \frac{y^5 + y^8 - y^9}{1 + y^2}\, dy\,.$$

Ora

$$\frac{y^5 + y^8 - y^9}{1 + y^2} = \frac{y^9 - y^8 - y^5}{-y^2 - 1} =$$

$$= -y^7 + y^6 + y^5 - y^4 + y^2 - 1 - \frac{1}{-y^2 - 1} =$$

$$= -y^7 + y^6 + y^5 - y^4 + y^2 - 1 + \frac{1}{1 + y^2}\,.$$

Allora

$$\int \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx = 6 \int \frac{y^5 + y^8 - y^9}{1 + y^2}\, dy =$$

$$= 6 \int \left\{ -y^7 + y^6 + y^5 - y^4 + y^2 - 1 + \frac{1}{1 + y^2} \right\} dy =$$

$$= 6 \left\{ \int -y^7 dy + \int y^6 dy + \int y^5 dy + \int -y^4 dy + \int y^2 dy + \int -dy + \int \frac{dy}{1 + y^2} \right\} =$$

$$=6\left\{-\frac{y^8}{8}+\frac{y^7}{7}+\frac{y^6}{6}-\frac{y^5}{5}+\frac{y^3}{3}-y+\text{arc tang}\, y\right\}+c=$$

$$=-\frac{3}{4}y^8+\frac{6}{7}y^7+y^6-\frac{6}{5}y^5+2y^3-6y+6\,\text{arc tang}\, y+c=$$

$$=-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+x-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\,\text{arc tang}\, x^{\frac{1}{6}}+c=$$

$$=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+$$

$$+6\,\text{arc tang}\sqrt[6]{x}+c.$$

10. Passiamo ora all'integrazione di differenziali contenenti il radicale $\sqrt{x^2+ax+b}$. Poniamo

$$\sqrt{x^2+ax+b}=x+z\ ,\quad x^2+ax+b=x^2+2xz+z^2\ ,$$

$$ax+b=2xz+z^2\ ,\quad x(a-2z)=z^2-b\ ,\quad x=\frac{z^2-b}{a-2z}\ ,$$

$$\sqrt{x^2+ax+b}=\sqrt{\left(\frac{z^2-b}{a-2z}\right)^2+a\left(\frac{z^2-b}{a-2z}\right)+b}=$$

$$=\frac{\sqrt{z^4-2bz^2+b^2+(az^2-ab)(a-2z)+a^2b-4abz+4bz^2}}{a-2z}=$$

$$=\frac{\sqrt{z^4-2bz^2+b^2+a^2z^2-a^2b-2az^3+2abz+a^2b-4abz+4bz^2}}{a-2z}=$$

$$=\frac{\sqrt{z^4+2bz^2+b^2+a^2z^2-2az^3-2abz}}{a-2z}=\frac{\sqrt{(az-z^2-b)^2}}{a-2z}=$$

$$=\frac{az-z^2-b}{a-2z}\ ;$$

$$dx=\frac{2(a-2z)z+2(z^2-b)}{(a-2z)^2}\,dz=\frac{2az-2b}{(a-2z)^2}\,dz=\frac{2(az-b)}{(a-2z)^2}\,dz\,.$$

Sostituendo ad x, $\sqrt{x^2+ax+b}$, dx i loro valori per z, la funzione diventa razionale e quindi integrabile.

Esempio. — Sia da calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}$.

Potremo scrivere, in seguito a quanto sopra,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}} = \int \frac{2(az-z^2-b)}{(a-2z)^2} \cdot \frac{a-2z}{az-z^2-b} dz = \int \frac{2dz}{(a-2z)} =$$

$$= \int \frac{dz}{\frac{a}{2}-z} = -\int \frac{d\left(\frac{a}{2}-z\right)}{\frac{a}{2}-z} = -l.\left(\frac{a}{2}-z\right) + c.$$

Ma dall'equazione

$$ax+b = 2xz+z^2, \quad z^2+2xz-(ax+b)=0,$$

si ricava

$$z = -x \pm \sqrt{x^2+(ax+b)} = -x \pm \sqrt{x^2+ax+b},$$

dunque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}} = -l.\left[\frac{a}{2}+x \pm \sqrt{x^2+ax+b}\right] + c.$$

11. Avendo da integrare differenziali contenenti

$$\sqrt{-x^2+ax+b},$$

si ponga

$$\sqrt{-x^2+ax+b} = \sqrt{b} - xz,$$

e si seguiti in maniera analoga a quella secondo cui si è proceduto nel caso precedente.

Esempio. — Sia da calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$.

Poniamo $\sqrt{-x^2+ax+b}=\sqrt{b}-xz$, ossia

$$-x^2+ax+b=(\sqrt{b}-xz)^2=b-2\sqrt{b}\,.\,xz+x^2z^2,$$

$$-x^2+ax=-2\sqrt{b}\,.\,xz+x^2z^2, \quad -x+a=-2\sqrt{b}\,.\,z+xz^2,$$

$$x(1+z^2)=a+2\sqrt{b}\,.\,z\,, \quad x=\frac{a+2\sqrt{b}\,.\,z}{1+z^2}\,,$$

$$\sqrt{-x^2+ax+b}=\sqrt{-\frac{(a+2\sqrt{b}\,.\,z)^2}{(1+z^2)^2}+a\frac{a+2\sqrt{b}\,.\,z}{1+z^2}+b}=$$

$$=\frac{\sqrt{-(a^2+4a\sqrt{b}\,.\,z+4bz^2)+a(a+2\sqrt{b}\,.\,z)(1+z^2)+b(1+z^2)^2}}{1+z^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{-a^2-4a\sqrt{b}.z-4bz^2+a^2+a^2z^2+2a\sqrt{b}.z+2a\sqrt{b}.z^3+b+2bz^2+bz^4}}{1+z^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{-2a\sqrt{b}\,.\,z-2bz^2+a^2z^2+2a\sqrt{b}\,.\,z^3+b+bz^4}}{1+z^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{b}\,.\,z^2-az)^2}}{1+z^2}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b}\,.\,z^2-az}{1+z^2};$$

$$dx=\frac{2z(a+2\sqrt{b}\,.\,z)-2\sqrt{b}(1+z^2)}{(1+z^2)^2}dz=$$

$$=\frac{2az+4\sqrt{b}.z^2-2\sqrt{b}-2\sqrt{b}\,z^2}{(1+z^2)^2}dz=\frac{2az+2\sqrt{b}.z^2-2\sqrt{b}}{(1+z^2)^2}dz=$$

$$=\frac{2(az+\sqrt{b}\,.\,z^2-\sqrt{b})}{(1+z^2)^2}dz=\frac{-2(\sqrt{b}-\sqrt{b}\,.\,z^2-az)}{(1+z^2)^2}dz.$$

Allora

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}=\int\frac{-2(\sqrt{b}-\sqrt{b}\,.\,z^2-az)}{(1+z^2)^2}\cdot\frac{(1+z^2)}{\sqrt{b}-\sqrt{b}\,.\,z^2-az}dz=$$

$$=\int\frac{-2dz}{1+z^2}=-2\int\frac{dz}{1+z^2}=-2\,\text{arc tang}\,z+c.$$

Ma dall'equazione

$$-x+a=-2\sqrt{b}\,.\,z+xz^2,$$

ossia

$$xz^2-2\sqrt{b}\,.\,z+(x-a)=0,$$

si ricava

$$z=\frac{2\sqrt{b}\pm\sqrt{4b-4x(x-a)}}{2x}=\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b-x(x-a)}}{x}=\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{-x^2+ax+b}}{x},$$

dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}=-2\,\mathrm{arc\,tang}\,z+c=$$

$$=-2\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{-x^2+ax+b}}{x}+c.$$

12. Se nel differenziale entra $\sqrt{-x^2+ax-b}$, si risolva l'equazione $x^2-ax+b=0$ e siano μ, ν le sue due radici. Poniamo $\sqrt{-x^2+ax-b}=(x-\mu)z$, allora poichè

$$x^2-ax+b=(x-\mu)(x-\nu),$$

ossia

$$-x^2+ax-b=-(x-\mu)(x-\nu),$$

$$\sqrt{-x^2+ax-b}=\sqrt{-(x-\mu)(x-\nu)},$$

sarà

$$(x-\mu)z=\sqrt{-(x-\mu)(x-\nu)},\quad z^2(x-\mu)^2=-(x-\mu)(x-\nu),$$

$$z^2(x-\mu)=-(x-\nu),\quad xz^2-\mu z^2=\nu-x,\quad x(z^2+1)=\nu+\mu z^2,$$

$$x=\frac{\nu+\mu z^2}{1+z^2};$$

$$\sqrt{-x^2+ax-b}=\left(\frac{\nu+\mu z^2}{1+z^2}-\mu\right)z=\frac{\nu z+\mu z^3-(1+z^2)\mu z}{1+z^2}=$$

$$=\frac{\nu z+\mu z^3-\mu z-\mu z^3}{1+z^2}=\frac{(\nu-\mu)z}{1+z^2}\,;$$

$$dx=\frac{2\mu z(1+z^2)-2z(\nu+\mu z^2)}{(1+z^2)^2}dz=\frac{2\mu z+2\mu z^3-2\nu z-2\mu z^3}{(1+z^2)^2}dz=$$

$$=\frac{2z(\mu-\nu)}{1+z^2}dz\,.$$

Poi si procede come al solito.

Esempio. — Sia da calcolare $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax-b}}$.

Dall'equazione $x^2-ax+b=0$ si ricavano le due radici

$$\mu=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\,,\quad \nu=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Allora

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax-b}}=\int\frac{2z(\mu-\nu)}{(1+z^2)^2}\cdot\frac{(1+z^2)}{(\nu-\mu)^2}dz=$$

$$\int-\frac{dz}{1+z^2}=-\int\frac{dz}{1+z^2}=\text{arc cotang}\,z+c\,.$$

Ma dall'equazione $\sqrt{-x^2+ax-b}=(x-\mu)z$ si ricava

$$z=\frac{\sqrt{-x^2+ax-b}}{x-\mu}=\frac{\sqrt{-x^2+ax-b}}{x-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}}=\frac{2\sqrt{-x^2+ax-b}}{2x-a-\sqrt{a^2-4b}}\,,$$

dunque

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax-b}}=\text{arc cotang}\,z+c=$$

$$=\text{arc cotang}\frac{2\sqrt{-x^2+ax-b}}{2x-a-\sqrt{a^2-4b}}+c\,.$$

Di alcune formule che possono facilitare la ricerca di integrali.

13. Sia da calcolare $\int f(x+a)dx$. Facciamo $x+a=y$, allora $dx=dy$, $\int f(x+a)dx=\int f(y)dy$. Noto quest'ultimo integrale, si sostituisca ad y il suo valore per x e si avrà l'integrale richiesto.

Esempio 1°. — Sia da calcolare $\int (x+a)^2 dx$.

Posto $x+a=y$, $dx=dy$, si ha

$$\int (x+a)^2 dx = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c = \frac{(x+a)^3}{3} + c\,.$$

Esempio 2°. — Sia da calcolare $\int \cos(a+x)dx$.

Posto $x+a=y$, $dx=dy$, si ha

$$\int \cos(a+x)\,dx = \int \cos y\,dy = \operatorname{sen} y + c = \operatorname{sen}(a+x) + c\,.$$

14. Sia da calcolare $\int e^x f(e^x)dx$. Poniamo $e^x=y$, allora

$$e^x dx = dy\,, \text{ e quindi } \int e^x f(e^x)\,dx = \int f(y)dy.$$

Noto quest'ultimo integrale si sostituisce ad y il suo valore per x e si ha l'integrale cercato.

Esempio. — Sia da calcolare $\int e^x \cos e^x\,dx$.

Poniamo $e^x=y$, $e^x dx=dy$, si ha

$$\int e^x \cos e^x\,dx = \int \cos y\,dy = \operatorname{sen} y + c = \operatorname{sen} e^x + c\,.$$

15. Sia da calcolare $\int \cos x\, f(\operatorname{sen} x)\,dx$. Poniamo $\operatorname{sen} x=y$, allora $\cos x\,dx=dy$, e quindi $\int \cos x\, f(\operatorname{sen} x)dx = \int f(y)\,dy$. Noto quest'ultimo integrale, si sostituisce ad y il suo valore per x e si ha l'integrale cercato.

Esempio. — Sia da calcolare $\int \cos x \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

Posto

$$\operatorname{sen} x = y\,, \quad \cos x \, dx = dy\,,$$

si ha

$$\int \cos x \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c\,.$$

Analogamente, se sia da calcolare $\int \operatorname{sen} x \, f(\cos x) \, dx$, porremo $\cos x = y$, da cui $-\operatorname{sen} x \, dx = dy$, e quindi

$$\int \operatorname{sen} x \, f(\cos x) dx = \int - f(y) \, dy = - \int f(y) \, dy\,.$$

Noto quest'integrale si sostituisca ad y il suo valore per x e si avrà l'integrale richiesto.

Avendo da calcolare

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} f(\operatorname{tang} x) \, dx\,,$$

si ponga $\operatorname{tang} x = y$, allora

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dy\,,$$

quindi

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} f(\operatorname{tang} x) \, dx = \int f(y) \, dy\,, \quad \text{ecc.}$$

Avendo da calcolare

$$\int - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} f(\operatorname{cotang} x) \, dx$$

si ponga $\operatorname{cotang} x = y$, allora

$$- \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = dy\,,$$

quindi

$$\int - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} f(\operatorname{cotang} x) \, dx = \int f(y) \, dy\,, \quad \text{ecc.}$$

Lo stesso metodo si seguirà per integrali della forma seguente:

$$\int f(\text{arc sen}\,x)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,,\quad \int f(\text{arc cos}\,x)\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

$$\int f(\text{arc tang}\,x)\frac{dx}{1+x^2}\,,\quad \int f(\text{arc cotang}\,x)\frac{dx}{1+x^2}\,,$$

$$\int f(\text{arc sec}\,x)\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\quad \int f(\text{arc cosec}\,x)\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,.$$

16. Sia da calcolare $\int f(l\,.\,x)\frac{dx}{x}$.

Poniamo $l\,.\,x=y$, allora

$$\frac{dx}{x}=dy\,,\quad \int f(l\,.\,x)\frac{dx}{x}=\int f(y)\,dy\,.$$

Noto quest'integrale, si sostituisca ad y il suo valore per x e si avrà l'integrale richiesto.

Esempio. — Sia da calcolare $\int \cos(l\,.\,x)\frac{dx}{x}$.

Posto

$$l\,.\,x=y\,,\quad \frac{dx}{x}=dy\,,$$

sarà

$$\int \cos(l\,.\,x)\frac{dx}{x}=\int \cos y\,dy=\text{sen}\,y+c=\text{sen}(l\,.\,x)+c\,.$$

17. Sia invece da calcolare $\int f(e^x)\,dx$.

Poniamo $e^x=y$, allora

$$e^x dx=dy\,,\quad dx=\frac{dy}{e^x}=\frac{dy}{y}\,,\quad \int f(e^x)\,dx=\int f(y)\frac{dy}{y}\,.$$

Noto quest'integrale, si sostituisca ad y il suo valore per x e si conoscerà così anche l'integrale cercato.

18. Avendo da calcolare $\int f(\operatorname{sen} x)\,dx$, si faccia $\operatorname{sen} x = y$, allora

$$\cos x\,dx = dy\ ,\quad dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{dy}{\pm\sqrt{1-y^2}}\,,$$

$$\int f(\operatorname{sen} x)\,dx = \int f(y)\,\frac{dy}{\pm\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Si calcoli quest'integrale, si sostituisca ad y il suo valore per x e si avrà l'integrale cercato.

Analogamente per $\int f(\cos x)\,dx$, facendo $\cos x = y$, cioè

$$-\operatorname{sen} x\,dx = dy\ ,\quad dx = -\frac{dy}{\operatorname{sen} x} = -\frac{dy}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{dy}{\mp\sqrt{1-y^2}},$$

si avrà

$$\int f(\cos x)\,dx = -\int f(y)\,\frac{dy}{\pm\sqrt{1-y^2}}\,,\quad \text{ecc.}$$

19. Si abbia da calcolare $\int f(\operatorname{sen} x,\ \cos x)\,dx$.

Si ponga $\operatorname{tang}\frac{x}{2} = y$, da cui

$$\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dy\,,$$

$$dx = \frac{2dy}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2dy}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} = \frac{2dy}{1+y^2}\,;$$

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tang}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2y\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2y\,\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2y}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}\,;$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} - 1 =$$

$$= \frac{2}{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+y^2} - 1 = \frac{2-1-y^2}{1+y^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Allora

$$\int f(\operatorname{sen} x,\ \cos x)\,dx = \int \left(\frac{2y}{1+y^2},\ \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2dy}{1+y^2}.$$

Si calcoli quest'integrale, si sostituisca ad y il suo valore in funzione di x e si avrà per tal modo l'integrale richiesto.

20. Riportiamo qui sotto alcuni integrali che sono d'uso piuttosto comune.

1. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$. Applicando quanto si è detto al paragrafo 15, si ponga $\operatorname{sen} x = y$, allora $\cos x\,dx = dy$, e quindi

$$\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c.$$

2. $\int \operatorname{tang} x\,dx$. Si sa che $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, dunque

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} =$$

$$= -l.\cos x + c = l.\frac{1}{\cos x} + c.$$

3. $\int \operatorname{cotang} x\,dx$. Si sa che $\operatorname{cotang} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, dunque

$$\int \operatorname{cotang} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{d\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = l.\operatorname{sen} x + c.$$

4. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang} x} = \int \frac{d\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = l.\operatorname{tang} x + c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}} =$ (vedi al caso precedente) $= l\,.\operatorname{tang}\frac{x}{2} + c\,.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$. Ricordiamo che

$$\operatorname{sen}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos x\,,$$

dunque

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)} = -\int \frac{d\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \text{(vedi al caso numero 2)} = -\,l\,.\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) + c =$$

$$= l\,.\frac{1}{\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)} + c\,.$$

Degli integrali definiti.

21. Quando si sia calcolato un integrale indefinito è facile ricavarne il valore in corrispondenza a particolari valori della variabile indipendente. Poniamo di aver calcolato i valori che assume l'integrale quando alla variabile indipendente siano stati dati i valori a e b e facciamo la differenza fra il secondo valore ed il primo; questa differenza è quella che noi diciamo il valore dell'integrale definito fra i due limiti a e b. Ad indicare un integrale definito fra due limiti a e b si usa la notazione $\int_a^b$. Per calcolare il valore di un integrale definito basta calcolare l'integrale indefinito e procedere poi come si è detto qui innanzi.

Esempio 1°. — Sia da calcolare $\int_2^3 x^2 dx$.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c\,;\int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{(3)^3}{3} + c\right] - \left[\frac{(2)^3}{3} + c\right] = \frac{27-8}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Esempio 2°. — Sia da calcolare $\int_a^b \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{dx}{x} = l\,.\,x + c\,;\quad \int_a^b \frac{dx}{x}\,[l\,.\,b + c] - [l\,.\,x + c] = l\,\frac{b}{a}\,.$$

Esempio 3°. — Sia da calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$.

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c\ ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + c\right] - \left[\operatorname{sen} 0^\circ + c\right] = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Esempio 4°. — Sia da calcolare $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx$.

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c\ ;$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx = \left[\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + c\right] - \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + c\right] = -1 - 1 = -2\,.$$

Esempio 5°. — Sia da calcolare $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + c\ ;$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=[\text{arc tang}\infty+c]-[\text{arc tang}\,0^\circ+c]=$$

$$=\text{arc tang}\,\infty-\text{arc tang}\,0^\circ=\frac{\pi}{2}.$$

Esempio 6° — Sia da calcolare $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc sen}\,x+c\,;$$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=[\text{arc sen}\,1+c]-[\text{arc sen}\,0+c]=$$

$$=\text{arc sen}\,1-\text{arc sen}\,0=\frac{\pi}{2}.$$

22. Della costante arbitraria potendo sempre disporre a piacere, possiamo sempre (come abbiam fatto) ritenere che essa abbia un valore determinato c; in tale ipotesi se è

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x),$$

sarà

$$\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a).$$

Analogamente

$$\int_b^a f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a),$$

dunque

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx,$$

cioè si può invertire l'ordine dei limiti di un integrale definito, purchè se ne cambi il segno.

23. Se c è un valore compreso fra a e b si avrà

$$\int_a^c f(x)\,dx=\varphi(c)-\varphi(a)\ ,\quad \int_c^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(c)\,,$$

quindi

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \varphi(c) - \varphi(a) + \varphi(b) - \varphi(c) =$$

$$= \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Nel caso in cui $f(x)$ diventa infinito per $x=b$, si definisce

$$\int_a^b f(x)dx \text{ come il limite di } \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\,,$$

quando ϵ tende a zero.

Nel caso in cui $f(x)$ diventa infinito per $x=a$, si definisce

$$\int_a^b f(x)dx \text{ come il limite di } \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,,$$

quando ϵ tende a zero.

Finalmente, se per un valore c compreso fra a e b la $f(x)$ diventa infinita o discontinua, si pone, per definizione,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx\,,$$

quando ϵ ed η tendono a zero.

Differenziazione e integrazione sotto il segno.

24. Sia $u = \int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$. Differenziando, rispetto ad a e b, si ricava

$$\frac{du}{da} = -\varphi'(a)\ ,\quad \frac{du}{db} = \varphi'(b)\,.$$

Ma la derivata di $\varphi(x)$ è (per definizione) $f(x)$, dunque

$$\frac{du}{da} = -f(a)\ ,\quad \frac{du}{db} = f(b)\,.$$

Se a e b sono funzioni di una certa variabile t indipendente da x, il differenziale totale di u, considerato come funzione della variabile indipendente t, sarà

$$du = \frac{du}{da} da + \frac{du}{db} db = -f(a) da + f(b) db .$$

25. Sia $u = \int_a^b f(x, t) dx$. Se a e b sono indipendenti da t, sarà

$$u + \Delta u = \int_a^b f(x, t + \Delta t) dx ,$$

da cui

$$\Delta u = \int_a^b f(x, t + \Delta t) dx - \int_a^b f(x, t) dx =$$
$$= \int_a^b [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx .$$

Allora

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx ,$$

e passando al limite per $\Delta t = 0$,

$$\frac{du}{dt} = \int_a^b \frac{df(x, t)}{dt} dx .$$

Se a e b dipendono da t, il differenziale totale di u rispetto a t sarà

$$du = \frac{du}{da} da + \frac{du}{db} db + \frac{du}{dt} dt =$$
$$= -f(a, t) da + f(b, t) db + dt \int_a^b \frac{df(x, t)}{dt} dx .$$

26. Sia $u = \int f(x, t) dx$, dove t non dipende da x. Potremo scrivere

$$u = \int_a^x f(x, t) dx + \psi(t),$$

dove $\psi(t)$ è una funzione arbitraria di t. Allora, differenziando rispetto a t e nell'ipotesi che a come x sia indipendente da t, avremo

$$\frac{du}{dt} = \int_a^x \frac{df(u, t)}{dt} dx + \psi'(t) ,$$

od anche

$$\frac{du}{dt} = \int_a^\infty \frac{df(x,t)}{dt} dx,$$

perchè $\psi'(t)$ non contiene x.

27. Sia ora $\int dy \int_a^b f(x,y) dx$, dico che è

$$\int dy \int_a^b f(x,y)\, dx = \int_a^b dx \int f(x,y)\, dy.$$

Infatti

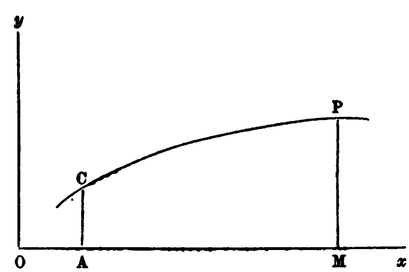
$$\frac{d}{dy}\left[\int_a^b dx \int f(x,y)\, dy\right] = \int_a^b dx \frac{df(x,y)}{dy} dy = \int_a^b f(x,y)\, dx,$$

ed integrando, rispetto ad y,

$$\int_a^b dx \int f(x,y)\, dy = \int dy \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

Condizioni di integrabilità delle funzioni.

28. Un differenziale relativo ad una sola variabile si può sempre integrare. Infatti, data la funzione $y = f(x)$, si costruisca la curva che ha per equazione $y = f(x)$ rispetto ad un sistema



di assi rettangolari nel piano. L'area CAMP, corrispondente all'ascissa fissa OA ed all'ascissa mobile OM, è una funzione di x. Nel calcolo differenziale si dimostra che il differenziale di quell'area è appunto $f(x)dx$, dunque l'area detta è $\int f(x) dx$.

29. Sia ora una funzione di due variabili $f(x,y)$, avremo

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

e

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{du}{dy}}{dx},$$

ossia, ponendo

$$M = \frac{du}{dx}, \quad N = \frac{du}{dy},$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Se dunque esiste la funzione u, deve essere verificata la condizione precedente.

Supponiamo ora verificata questa condizione e dimostriamo che si può sempre trovare una funzione u di x, y, il cui differenziale totale sia $Mdx + Ndy$. Poniamo

$$u = \int Mdx + \psi(y),$$

e deriviamo, rispetto ad y, si avrà

$$\frac{du}{dy} = \frac{d\int Mdx}{dy} + \frac{d\psi(y)}{dy},$$

ma deve essere

$$\frac{du}{dy} = N,$$

dunque

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = N - \frac{d\int Mdx}{dy}.$$

Il secondo membro, come il primo, non dovendo contenere x, sarà

$$\frac{d\left(N - \frac{d\int Mdx}{dy}\right)}{dx} = 0,$$

cioè

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d\,\frac{\int M dx}{dy}}{dx} = \frac{d\,\frac{\int M dx}{dx}}{dy} = \frac{dM}{dy};$$

se anche questa seconda condizione è verificata, esisterà la funzione $\psi(y)$ e sarà

$$\psi(y) = \left(N - \frac{d\int M dx}{dy}\right) dy,$$

cioè

$$v = \int M dx + \int \left(N - \frac{d\int M dx}{dy}\right) dy.$$

30. Nel caso di più variabili procederemo come pel caso particolare di tre, del quale veniamo subito a trattare.

Se si ha $u = f(x, y, z)$ è

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = M dx + N dy + P dz,$$

se si pone

$$\frac{du}{dx} = M, \quad \frac{du}{dy} = N, \quad \frac{du}{dz} = P.$$

Ora

$$\frac{d\,\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d\,\frac{du}{dx}}{dy}, \quad \frac{d\,\frac{du}{dz}}{dx} = \frac{d\,\frac{du}{dx}}{dz}, \quad \frac{d\,\frac{du}{dz}}{dy} = \frac{d\,\frac{du}{dy}}{dz}$$

ossia

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dM}{dz}, \quad \frac{dP}{dy} = \frac{dN}{dz}.$$

Se dunque esiste la funzione u devono essere verificate le tre condizioni ultimamente poste.

Reciprocamente se queste condizioni sono verificate esiste una funzione u che avrà per differenziale totale

$$du = M dx + N dy + P dz.$$

Poniamo intanto

$$u = \int \mathrm{M}dx + \varphi(y,z).$$

Se

$$\frac{du}{dy} = \mathrm{M}, \quad \frac{du}{dz} = \mathrm{P},$$

sarà

$$\frac{d\int \mathrm{M}dx}{dy} + \frac{d\varphi(y,z)}{dy} = \mathrm{N}, \quad \frac{d\int \mathrm{M}dx}{dz} + \frac{d\varphi(y,z)}{dz} = \mathrm{P},$$

ossia

$$\frac{d\varphi(y,z)}{dy} = \mathrm{N} - \frac{d\int \mathrm{M}dx}{dy}, \quad \frac{d\varphi(y,z)}{dz} = \mathrm{P} - \frac{d\int \mathrm{M}dx}{dz}.$$

Poichè $\varphi(y,z)$ non contiene x sarà

$$\frac{d\,\frac{d\varphi(y,z)}{dy}}{dx} = \frac{d\left\{\mathrm{N} - \frac{d\int \mathrm{M}dx}{dy}\right\}}{dx} = \frac{d\mathrm{N}}{dx} - \frac{d\mathrm{M}}{dy} = 0,$$

$$\frac{d\,\frac{d\varphi(y,z)}{dz}}{dx} = \frac{d\left\{\mathrm{P} - \frac{d\int \mathrm{M}dx}{dz}\right\}}{dx} = \frac{d\mathrm{P}}{dx} - \frac{d\mathrm{M}}{dz} = 0,$$

ossia

$$\frac{d\mathrm{N}}{dx} = \frac{d\mathrm{M}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{P}}{dx} = \frac{d\mathrm{M}}{dz}.$$

Inoltre dovrà essere

$$\frac{d\,\frac{d\varphi(y,z)}{dy}}{dz} = \frac{d\,\frac{d\varphi(y,z)}{dz}}{dy},$$

ossia

$$\frac{d\left(\mathrm{N} - \frac{d\int \mathrm{M}dx}{dy}\right)}{dz} = \frac{d\left(\mathrm{P} - \frac{d\int \mathrm{M}dx}{dz}\right)}{dy},$$

$$\frac{d\mathrm{N}}{dz} - \frac{d\,\frac{d\int \mathrm{M}dx}{dy}}{dz} = \frac{d\mathrm{P}}{dy} - \frac{d\,\frac{d\int \mathrm{M}dx}{dz}}{dy},$$

cioè

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$$

per essere

$$\frac{d\,\frac{d\int Mdx}{dy}}{dz} = \frac{d\,\frac{d\int Mdx}{dz}}{dy}.$$

Se questa condizione e le altre due sono verificate sussiste una funzione $\varphi(y, z)$ che ha per differenziale totale

$$\left[N - \frac{d\int Mdx}{dz}\right] dy + \left[P - \frac{d\int Mdx}{dy}\right] dz$$

e sarà

$$\varphi(y, z) = \int \left[N - \frac{d\int Mdx}{dz}\right] dy + \int \left[P - \frac{d\int Mdx}{dy}\right] dz$$

e quindi

$$u = \int Mdx + \int \left[N - \frac{d\int Mdx}{dz}\right] dy + \int \left[P - \frac{d\int Mdx}{dy}\right] dz.$$

Equazioni differenziali.

31. Si dice equazione differenziale di n^{mo} ordine una relazione fra una variabile, una sua funzione e le derivate di questa di grado non superiore all' n^{mo}.

Un'equazione differenziale di primo ordine avrà dunque la forma

$$f\left(x, y\,\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

L'integrazione di tali equazioni si opera immediatamente se è possibile ridurle alla forma

$$\varphi(x)\,dx = \psi(y)\,dy$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono rispettivamente funzioni della sola x e della sola y. Allora si ha

$$\int \varphi(x)\, dx = \int \psi(y)\, dy + c.$$

Esempio 1°. — Data l'equazione differenziale

$$x^2 dx + \cos y dy = 0$$

ossia

$$x^2 dx = -\cos y dy,$$

integrando si ha

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \int -\cos y dy + c = -\operatorname{sen} y + c$$

e quindi

$$\frac{x^3}{8} + \operatorname{sen} y = c.$$

Esempio 2°. — Sia l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{mx}{\sqrt{x^2+1}}\, dx + n^y\, l.n dy = 0$$

ossia

$$\frac{mx}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = -n^y\, l.n dy,$$

integrando si ha

$$\int \frac{mx}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int m(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} x dx = \int m \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+1) =$$

$$= m\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = m\sqrt{x^2+1} = \int -n^y\, l.n dy + c =$$

$$= -l.n \frac{n^y}{l.n} + c = -n^y + c,$$

ossia

$$m\sqrt{x^2+1} + n^y = c.$$

Esempio 3° — Sia l'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \frac{2y}{y^2-a}\,dy = 0$$

ossia

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2y dy}{y^2-a}.$$

Integrando si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\,\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) = \int \frac{2ydy}{y^2-a} + c =$$

$$= \int \frac{d(y^2-a)}{y^2-a} + c = l.(y^2-a) + c,$$

ossia

$$\text{arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) - l.(y^2-a) + c = 0.$$

32. Vediamo ora come si possa in alcuni casi ridurre un'equazione differenziale del primo ordine alla forma

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0.$$

1° Sia l'equazione differenziale

$$\varphi(y)\,dx + \psi(x)dy = 0,$$

dividendo per

$$\varphi(y)\,\psi(x)$$

si ha

$$\frac{dx}{\psi(x)} + \frac{dy}{\varphi(y)} = 0$$

equazione che si può integrare.

Esempio. — Sia l'equazione $ydx + xdy = 0$, dividendo per xy si ha

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

ossia

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \int \frac{dx}{x} = l \,.\, c = -\int \frac{dy}{y} + c = -l \,.\, y + c,$$

dunque

$$l \,.\, x + l \,.\, y = c.$$

2° Sia un'equazione differenziale del primo ordine della forma

$$f(x)\, \varphi(y)\, dx + \psi(x)\, \theta(y)\, dy = 0,$$

dividiamo per $\varphi(y)\, \psi(x)$ e si otterrà

$$\frac{f(x)\, dx}{\psi(x)} + \frac{\theta(y)\, dy}{\varphi(y)} = 0$$

equazione dove le variabili sono separate.

Esempio. — Sia l'equazione differenziale del primo ordine

$$x^3 \cos^2 y\, dx - (x^4 + a) \operatorname{sen} y\, dy = 0,$$

ossia, dividendo per $(x^4 + a) \cos^2 y$,

$$\frac{x^3 dx}{x^4 + a} - \frac{\operatorname{sen} y dy}{\cos^2 y} = 0, \quad \frac{x^3 dx}{x^4 + a} = \frac{\operatorname{sen} y dy}{\cos^2 y},$$

integrando si ha

$$\int \frac{x^3 dx}{x^4 + a} = \int \frac{\frac{1}{4} d(x^4 + a)}{x^4 + a} = \frac{1}{4}\, l \,.\, (x^4 + a) = \int \frac{\operatorname{sen} y dy}{\cos^2 y} + c =$$

[vedi al paragrafo 3] $\sec y + c$,

ossia

$$\frac{1}{4}\, l \,.\, (x^4 + a) - \sec y = c.$$

3° Sia un'equazione differenziale del primo ordine della forma

$$\varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy = 0,$$

dove le due funzioni $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ sono omogenee di grado n rispetto ad x e ad y, tali cioè che si può scrivere

$$\varphi(x,y) = x^n \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right), \quad \psi(x,y) = x^n \psi_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

L'equazione differenziale data allora si può scrivere

$$x^n \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^n \psi_1\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

ossia, dividendo per x^n,

$$\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi_1\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Poniamo $\frac{y}{x} = z$ e quindi $dy = zdx + xdz$, sarà

$$\varphi_1(z)\,dx + \psi_1(z)\,(zdx + xdz) = 0$$

$$dx\,[\varphi_1(z) + z\,\psi_1(z)] + x\,\psi_1(z)\,dz = 0$$

e dividendo per $x\,[\varphi_1(z) + z\psi_1(z)]$

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi_1(z)\,dz}{\varphi_1(z) + z\psi_1(z)} = 0$$

ed integrando

$$l\,.\,x + \int \frac{\psi_1(z)\,dz}{\varphi_1(z) + z\psi_1(z)} = c,$$

nella quale $\int \frac{\psi_1(z)\,dz}{\varphi_1(z) + z\psi_1(z)}$ è sempre calcolabile.

Esempio. — Sia l'equazione differenziale

$$(4ax^3y + 2bxy^3)\,dx + (ax^4 + 3bx^2y^2)\,dy = 0,$$

ossia

$$x^4\left(4a\frac{y}{x}+2b\frac{y^3}{x^3}\right)dx+x^4\left(a+3b\frac{y^2}{x^2}\right)dy=0$$

$$\left[4a\frac{y}{x}+2b\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]dx+\left[a+3b\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dy=0,$$

dalla quale ponendo $\frac{y}{x}=z$ e quindi $dy=zdx+xdz$ si ricava

$$(4az+2bz^3)\,dx+(a+3bz^2)\,(zdx+xdz)=0,$$

$$[4az+2bz^3+z\,(a+3bz^2)]\,dx+[a+3bz^2]\,xdz=0.$$

Dividiamo per $x\,[4az+2bz^3+z\,(a+3bz^2)]$ otterremo

$$\frac{dx}{x}+\frac{a+3bz^2}{4az+2bz^3+z\,(a+3bz^2)}\,dz=0$$

ed integrando

$$l.x+\int\frac{a+3\,bz^2}{4az+2bz^3+z(a+3bz^2)}dz=c,\quad l.x+\int\frac{a+3bz^2}{5az+5bz^3}dz=c.$$

Ora

$$\int\frac{a+3bz^2}{5az+5bz^3}\,dz=\frac{1}{5}\int\frac{a+3bz^2}{az+bz^3}\,dz=\frac{1}{5}\,l.(az+bz^3)+c,$$

dunque

$$l.x+\frac{1}{5}\,l.(az+bz^3)=c,$$

od anche

$$l.x+l.\sqrt[5]{az+bz^3}=c,\quad l.x\sqrt[5]{az+bz^3}=c,$$

da cui, ricordando che è $z=\frac{y}{x}$,

$$l.x\sqrt[5]{a\,\frac{y}{x}+b\frac{y^3}{x^3}}=c.$$

Equazioni lineari.

33. Si chiama equazione lineare di primo ordine un'equazione che si può ridurre alla forma $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, essendo P e Q funzioni della sola x. Per integrarla poniamo $y = uz$, cioè

$$dy = udz + zdu,$$

allora l'equazione precedente diventa

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dx} + Pu\right) = Q.$$

Dei due fattori u e z uno è arbitrario, poniamo che sia u tale da soddisfare la condizione

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} + Pu = 0,$$

allora l'equazione differenziale precedente diventa

$$(2) \qquad u\frac{dz}{dx} = Q.$$

Ma dalla (1) si ha

$$\frac{du}{u} = -Pdx$$

ed, integrando rispetto ad x,

$$l.u = -\int Pdx + c, \quad u = e^{-\int Pdx} + c,$$

dunque la (2) diventa

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Q}{u} = Qe^{\int Pdx},$$

e quindi si ha

$$z = \int Qe^{\int Pdx} dx + c,$$

dove l'integrale è calcolabile.

Esempio. — Sia l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3,$$

dove

$$P = 1, \; Q = x^3,$$

allora

$$z = \int x^3 e^{\int dx} dx + c = \int x^3 e^x dx + c = \int x^3 de^x + c =$$

$$= [\text{integrando per parti}] \; x^3 e^x - \int 3e^x x^2 dx + c =$$

$$= x^3 e^x - \int 3x^2 de^x = x^3 e^x - [3x^2 e^x - \int 6x e^x dx] + c =$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x de^x = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 [x e^x - \int e^x dx] +$$

$$+ c = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c,$$

$$u = e^{-\int dx} = e^{-x},$$

$$y = uz = e^{-x} \{ x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c \} =$$

$$= x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + c.$$

34. In generale si dicono equazioni differenziali lineari quelle che si possono ridurre alla forma

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots\ldots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

dove P, Q, ..., T, U, V rappresentano funzioni della sola variabile x.

Nel caso in cui sia $V = 0$ allora l'equazione precedente si riduce all'altra

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots\ldots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

È facile mostrare che se esistono n funzioni particolari y_1, y_2, ..., y_n che soddisfano l'equazione precedente, essa è soddisfatta anche dalla funzione $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = y$, dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono delle costanti arbitrarie.

Infatti derivando successivamente si ha

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + c_n \frac{d^2y_n}{dx^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^my}{dx^m} + c_1 \frac{d^my_1}{dx^m} + c_2 \frac{d^my_2}{dx^m} + \ldots + c_n \frac{d^my_n}{dx^m}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione differenziale (1) si ricava

$$c_1 \left(\frac{d^my_1}{dx^m} + \ldots + \mathrm{T} \frac{dy_1}{dx} + \mathrm{U}y_1 \right) + c_2 \left(\frac{d^my_2}{dx^m} + \ldots + \mathrm{T} \frac{dy_2}{dx} + \mathrm{U}y_2 \right) + \ldots$$

$$\ldots + c_n \left(\frac{d^my_n}{dx^m} + \ldots + \mathrm{T} \frac{dy_n}{dx} + \mathrm{U}y_n \right) = 0,$$

dove per ipotesi ciascuno dei fattori contenuti in parentesi si annulla.

Dunque un'equazione lineare senza secondo membro ha per integrale generale $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$, dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono costanti ed $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono funzioni di x soddisfacenti all'equazione (1).

Ponendo nella (1) $y = e^{mx}$, e quindi

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}, \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = m^n e^{mx},$$

si ottiene

$$e^{mx} (m^n + \mathrm{P}m^{n-1} + \ldots + \mathrm{T}m + \mathrm{U}) = 0,$$

equazione soddisfatta da tutte le n radici dell'equazione

$$m^n + Pm^{n-1} + \ldots + Tm + U = 0,$$

radici che indicheremo con $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$.

Se le radici sono tutte reali e disuguali allora avremo n integrali particolari dell'equazione differenziale data, e precisamente $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots\ldots, e^{m_n x}$, l'integrale generale sarà dunque

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots\ldots + c_n e^{m_n x}.$$

Esempio. — Sia l'equazione differenziale lineare di secondo ordine (senza secondo membro)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 10y = 0.$$

Ponendo $y = e^{mx}$, $\frac{dy}{dx} = me^{mx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$, dunque

$$e^{mx}(m^2 + 3m - 10) = 0.$$

Risolve l'equazione $m^2 + 3m - 10 = 0$, che ha le due radici

$$m_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = 2.$$

$$m_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 - 7}{2} = -5.$$

Gli integrali particolari sono

$$e^{2x},\ e^{-5x}$$

e quindi l'integrale generale sarà

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}.$$

PARTE SECONDA

Applicazioni

---

a) Quadratura delle superficie piane.

35. Data una linea piana $y = f(x)$ riferita ad un sistema di assi ortogonali si ricava, nel calcolo differenziale che il differenziale $f(x)\,dx$ è il differenziale dell'area racchiusa fra la linea data, l'asse delle ascisse e due ordinate, una fissa e l'altra mobile. Allora il valore di quest'area sarà dato in generale da $\int f(x)\,dx$, in particolare da un integrale definito della forma precedente, come vedremo negli esempi che seguono.

Esempio 1°. — **Trovare l'area del circolo.**

L'equazione del circolo riferito a due diametri fra loro perpendicolari è $x^2 + y^2 = a^2$, se con a si indica il raggio. Risolvendo la precedente equazione rispetto ad y si ottiene $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e quindi l'area di un quadrante di circolo sarà data da $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. Ora integrando per parti si ottiene

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ma

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 + a^2 - a^2)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= a^2 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

quindi

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{ arc sen} \left(\frac{x}{a}\right) - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{ arc sen} \left(\frac{x}{a}\right),$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \text{ arc sen} \left(\frac{x}{a}\right) + c$$

ed integrando fra i limiti 0 ed a

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 0 + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

Dunque l'area dell'intiero circolo sarà πa^2.

Esempio 2°. — Trovare l'area di un segmento parabolico compreso fra la curva ed una corda perpendicolare all'asse.

L'equazione della parabola riferita al suo asse (preso come asse delle ascisse) ed alla perpendicolare condotta all'asse per il vertice della parabola è $y^2 = 4px$, se con p si indica la distanza fra il vertice della parabola ed il suo fuoco. Dall'equazione precedente si ricava $y = \sqrt{4px} = 2\sqrt{px}$ e quindi l'area richiesta sarà in generale

$$\int_0^x 2\sqrt{px}\,.\,dx = 2\int_0^x \sqrt{px}\, dx = 2\sqrt{p} \int_0^x \sqrt{x}\, dx.$$

Ricordiamo ora che

$$dx^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}\, dx,$$

dunque

$$\int dx^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \int \sqrt{x}\,.\,dx$$

od anche

$$\int \sqrt{x}\,.\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}},$$

dunque

$$\int_0^x \sqrt{x}\,.\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

ossia l'area cercata è misurata da

$$2\sqrt{p}\,.\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{p}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{4x\sqrt{px}}{3} = \frac{2}{3}\,xy,$$

cioè l'area di un segmento parabolico è equivalente ai due terzi del rettangolo che gli è circoscritto.

Esempio 3°. — Trovare l'area dell'ellisse.

L'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi è

$$a^2\,y^2 + b^2\,x^2 = a^2\,b^2,$$

dove a è il semiasse maggiore (asse delle x) e b il semiasse minore. Da questa si ricava

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'area del quadrante di ellisse sarà data da

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx.$$

Abbiamo visto (all'esempio 1° precedente)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\text{ arc sen}\left(\frac{x}{a}\right),$$

dunque sarà

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left\{\frac{a^2}{2}\,.\,\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\pi a^2 b}{4a} = \frac{\pi ab}{4}.$$

L'area dell'ellisse sarà $4\,.\,\frac{\pi ab}{4} = \pi ab.$

Esempio 4°. — Trovare l'area di un segmento iperbolico compreso fra la curva ed una corda perpendicolare all'asse. L'equazione dell'iperbole riferita all'asse (preso come asse delle ascisse) ed alla perpendicolare all'asse passante per il centro dell'iperbole è

$$-a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

se con $2a$ si indica la distanza fra i vertici e con b il secondo cateto di un triangolo rettangolo che ha per primo cateto a e per ipotenusa la distanza fra il centro dell'iperbole ed i fuochi. Dall'equazione data si ricava

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

allora l'area cercata sarà data da

$$\int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx.$$

Per calcolare

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx$$

incominciamo ad integrare per parti, allora

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Ma

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{(x^2 + a^2 - a^2)\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx =$$

$$= a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \int \sqrt{x^2 - a^2}\,.\,dx,$$

dunque

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx,$$

ossia

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Dal paragrafo 10 si ricava

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + ax + b}} = -\,l\left[\frac{a}{2} + x \pm \sqrt{x^2 + ax + b}\right] + c,$$

dunque sarà analogamente

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = - l \left[x \pm \sqrt{x^2 - a^2} \right] + c.$$

Allora

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, . \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} l \left[x \pm \sqrt{x^2 - a^2} \right] + c,$$

$$\frac{b}{a} \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{bx}{2a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{ab}{2} l \left[x \pm \sqrt{x^2 - a^2} \right]$$

$$\frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{x^2 - a^2} . dx = \frac{bx}{2a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{ab}{2} l \left[x \pm \sqrt{x^2 - a^2} \right] - \frac{ab}{2} l . a + c =$$

$$\frac{bx}{2a} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{ab}{2} l \left[\frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right] + c.$$

b) Rettificazione delle curve piane.

36. Sappiamo dal calcolo differenziale che il differenziale ds dell'arco è dato da $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, se $y = f(x)$ è l'equazione della curva. Allora la lunghezza di un arco è data

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, . \, dx$$

calcolato entro limiti opportuni, come vedremo negli esempi che seguono.

Esempio 1°. — Cerchiamo la lunghezza della circonferenza di un circolo.

L'equazione del cerchio riferito a due diametri perpendicolari è

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

da cui

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \; dy = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \; \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

La lunghezza di un quarto di circolo sarà data allora da

$$\int_0^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \int_0^a \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \operatorname{arc\,sen} \frac{a}{a} = \frac{a\pi}{2}.$$

In conseguenza la circonferenza del circolo sarà

$$\frac{4a\pi}{2} = 2a\pi.$$

Esempio 2°. — Calcolare la lunghezza di un arco di parabola.

L'equazione della parabola riferita all'asse ed alla perpendicolare all'asse passante pel vertice è

$$y^2 = 4px,$$

da cui

$$y = 2\sqrt{px},\ dy = \sqrt{\frac{p}{x}}\,dx,\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{x}}.$$

L'arco di parabola sarà dato allora da

$$\int_0^x \sqrt{1+\frac{p}{x}}\,dx = \int_0^x \sqrt{\frac{p+x}{x}}\,dx,$$

per la cui integrazione vedi nella parte prima.

Ma si può scrivere anche

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,.\,dy$$

e quindi essendo $y^2 = 4px$, cioè

$$2ydy = 4pdx,\ \frac{dx}{dy} = \frac{y}{2p},$$

sarà

$$\int_0^y \sqrt{1+\frac{y^2}{4p^2}}\,dy$$

l'arco richiesto. Ora

$$\int_0^y \sqrt{1+\frac{y^2}{4p^2}}\,dy = \frac{1}{2p}\int_0^y \sqrt{y^2+4p^2}\,dy,$$

resta dunque da calcolare

$$\int \sqrt{y^2 + 4p^2} \, . \, dy.$$

Integriamo per parti

$$\int \sqrt{4p^2 + y^2} \, . \, dy = y \sqrt{4p^2 + y^2} - \int \frac{y^2 \, dy}{\sqrt{4p^2 + y^2}} \, .$$

Per calcolare

$$\int \frac{y^2 \, dy}{\sqrt{4p^2 + y^2}}$$

poniamo

$$\sqrt{4p^2 + y^2} = u,$$

ossia $4p^2 + y^2 = u^2$, allora

$$2y \, dy = 2udu, \; dy = \frac{udu}{y},$$

poichè

$$y = \sqrt{u^2 - 4p^2}, \; dy = \frac{udu}{\sqrt{u^2 - 4p^2}} \, .$$

Allora

$$\int \frac{y^2 \, dy}{\sqrt{4p^2 + y^2}} = \int \frac{(u^2 - 4p^2) udu}{\sqrt{u^2 - 4p^2} \, . \, u} = \int \sqrt{u^2 - 4p^2} \, . \, du =$$

$$= \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - 4p^2} + \frac{4p^2}{2} l \, . \, [u \pm \sqrt{u^2 - 4p^2}] + c =$$

$$= \frac{\sqrt{4p^2 + y^2}}{2} \, y + 2p^2 \, l \, . \, [y + \sqrt{4p^2 + y^2}] + c.$$

Finalmente sarà

$$\frac{1}{2p} \int_0^y \sqrt{4p^2 + y^2} \, . \, dy =$$

$$= \frac{1}{2p} \left\{ \frac{y \sqrt{4p^2 + y^2}}{2} - 2pl \, . \, [y + \sqrt{4p^2 + y^2}] + 2pl \, . \, 2p \right\} + c =$$

$$= \frac{y \sqrt{4p^2 + y^2}}{4p} - 2pl \, . \, [y + \sqrt{4p^2 + y^2}] \, .$$

perchè essendo c arbitraria la possiamo prendere in modo che soddisfi l'equazione $2pl\,.\,2p + c = 0$.

c) Superficie dei solidi di rivoluzione.

37. Sia una curva piana qualsiasi la cui equazione rappresenteremo con $y = f(x)$. Se la curva ruota intorno all'asse delle ascisse l'area da essa generata si può imaginare come il limite a cui tende la somma delle superficie laterali dei tronchi di cono che nella stessa rotazione si otterrebbero imaginando inscritto nella curva un contorno poligonale (quando aumenta indefinitamente il numero dei lati di tale contorno). Due vertici consecutivi del contorno poligonale avranno le coordinate (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, la superficie generata dal lato che li unisce sarà minore dell'area generata, ruotando come al solito, da un rettangolo avente l'altezza $y + \Delta y$ ed una base arbitraria, mentre sarà maggiore dell'area generata nella solita rotazione da un rettangolo avente l'altezza y e base arbitraria. Potremo dunque scrivere indicando con M il punto di coordinate (x, y) e con N l'altro

$$2\pi y\,.\,x_1 < \text{sup. generata da } \overline{\mathrm{MN}} < 2\pi\,(y + \Delta y)\,x_2$$

dove con x_1 e x_2 abbiamo indicato le basi arbitrarie dei due rettangoli. La stessa disuguaglianza vale se si faccia $x_1 = x_2$ ed eguale all'arco infinitesimo compreso fra M ed N. Indichiamo quest'arco con Δs, allora

$$2\pi y \Delta s < \text{sup. generata da } \overline{\mathrm{MN}} < 2\pi\,(y + \Delta y)\,\Delta s.$$

Ma per $\overline{\mathrm{MN}} = 0$ il limite delle due quantità estreme è $2\pi y ds$, dunque indicando con dA il differenziale dell'area generata nell'anzidetta rotazione sarà

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

e quindi l'area si troverà calcolando

$$\int 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

entro opportuni limiti, come vedremo negli esempi che seguono.

Esempio 1°. — Calcolare la superficie di una sfera.

Una sfera si può imaginare generata da un circolo ruotante intorno ad un diametro (preso come asse delle x), e la cui equazione (se come asse delle y si prende il diametro perpendicolare al primo) è $x^2 + y^2 = a^2$, da cui

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},\ dy = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

dunque l'area di mezza sfera si avrà cercando

$$2\pi \int_0^a \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2 - x^2}} \,.\, \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi \int_0^a a dx =$$

$$= 2\pi a \int_0^a dx = 2\pi a^2,$$

dunque l'intiera superficie sferica sarà $2\pi a^2 \,.\, 2 = 4\pi a^2$.

Esempio 2°. — Trovare la superficie di un'ellissoide di rivoluzione.

Tenendo a mente le avvertenze del paragrafo 35 sarà

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'equazione dell'ellisse, da cui

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\ dy = -\frac{b}{a}\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}},$$

la superficie di mezzo ellissoide sarà data dunque da

$$2\pi\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx = 2\pi\int_0^a \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx = \frac{2\pi b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2}\,dx.$$

Poniamo

$$1-\frac{b^2}{a^2} = e^2$$

sarà

$$\frac{2\pi b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2}\,dx = \frac{2\pi b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi b}{a}\int_0^a \sqrt{\frac{e^2a^2}{e^2}-e^2x^2}\,.\,dx = \frac{2\pi be}{a}\int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}\,.\,dx.$$

Ma al paragrafo 35 abbiamo visto

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{ arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

sarà dunque

$$\int \sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}\,.\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2} + \frac{a^2}{2e^2}\text{ arc sen}\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

e quindi

$$\frac{2\pi be}{a}\int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}\,dx = \frac{2\pi be}{a}\left[\frac{a}{2}\sqrt{\frac{e^2}{a^2}-x^2} + \frac{a^2}{2e^2}\text{ arc sen } e\right] =$$

$$= \pi be\sqrt{\frac{e^2}{a^2}-x^2} + \frac{\pi ba}{e}\text{ arc sen } e =$$

$$= \pi ba\left\{e\sqrt{\frac{1}{e^2}-1} + \frac{1}{e}\text{ arc sen } e\right\} = \pi ba\left\{\sqrt{1-e^2} + \frac{\text{arc sen } e}{e}\right\}.$$

L'intiera superficie rotonda dell'ellissoide di rivoluzione sarà dunque

$$2\pi ba\left\{\sqrt{1-e^2} + \frac{\text{arc sen } e}{e}\right\}.$$

d) Cubatura dei solidi di rivoluzione.

38. Ricordando le avvertenze del paragrafo precedente si potrà scrivere $\pi y^2 \Delta x <$ vol. generato da $\overline{MN} < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$.

Detto dV il differenziale del volume è allora $dV = \pi y^2 dx$, e quindi il volume di un solido di rivoluzione si avrà calcolando entro opportuni limiti $\int \pi y^2 dx$, come si vede negli esempî qui sotto.

Esempio 1°. — Calcolare il volume della sfera.

Valgano tutte le osservazioni fatte al paragrafo 35. Per avere il volume di mezza sfera basta calcolare

$$\pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \pi \int_0^a a^2 dx - \pi \int_0^a x^2 dx =$$

$$= a^3 \pi - \pi \left(\frac{a^3}{3} \right) = \frac{2\pi a^3}{3},$$

quindi il volume di tutta la sfera sarà

$$2 \cdot \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Esempio 2°. — Calcolare il volume dell'ellissoide di rivoluzione.

Valgono tutte le avvertenze del paragrafo precedente. In tal caso essendo

$$y^2 = \frac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2}$$

dovremo calcolare (per avere il volume di mezzo ellissoide)

$$\pi \int_0^a \frac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2}\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a a^2 dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} a^3 - \frac{\pi b^2}{a^2} \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} \pi a b^2$$

ed il volume totale dell'ellissoide sarà dunque

$$2 \cdot \frac{2}{3} \pi a b^2 = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

INDICE

PARTE PRIMA

Teoria

PARTE SECONDA

Applicazioni