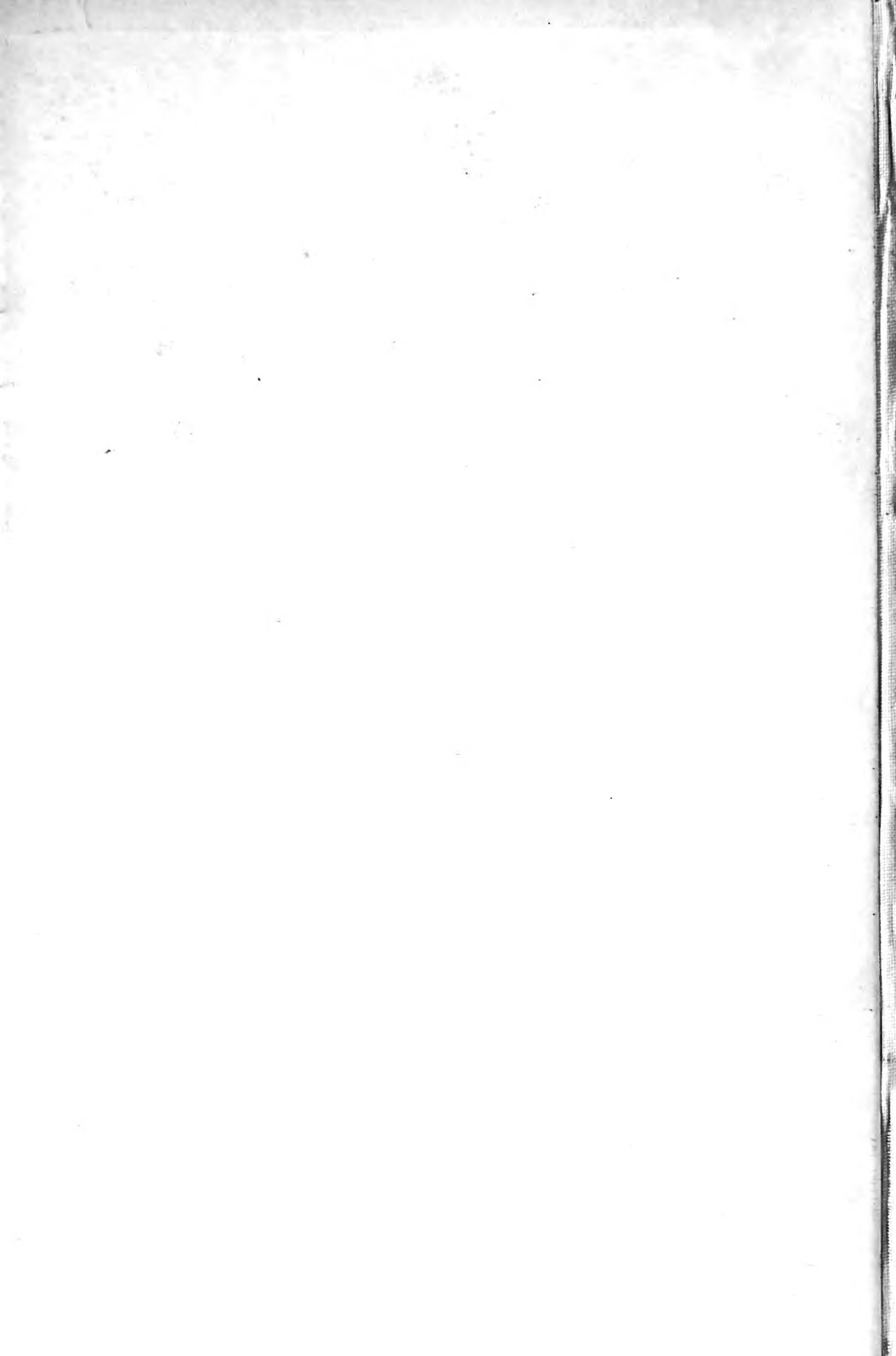
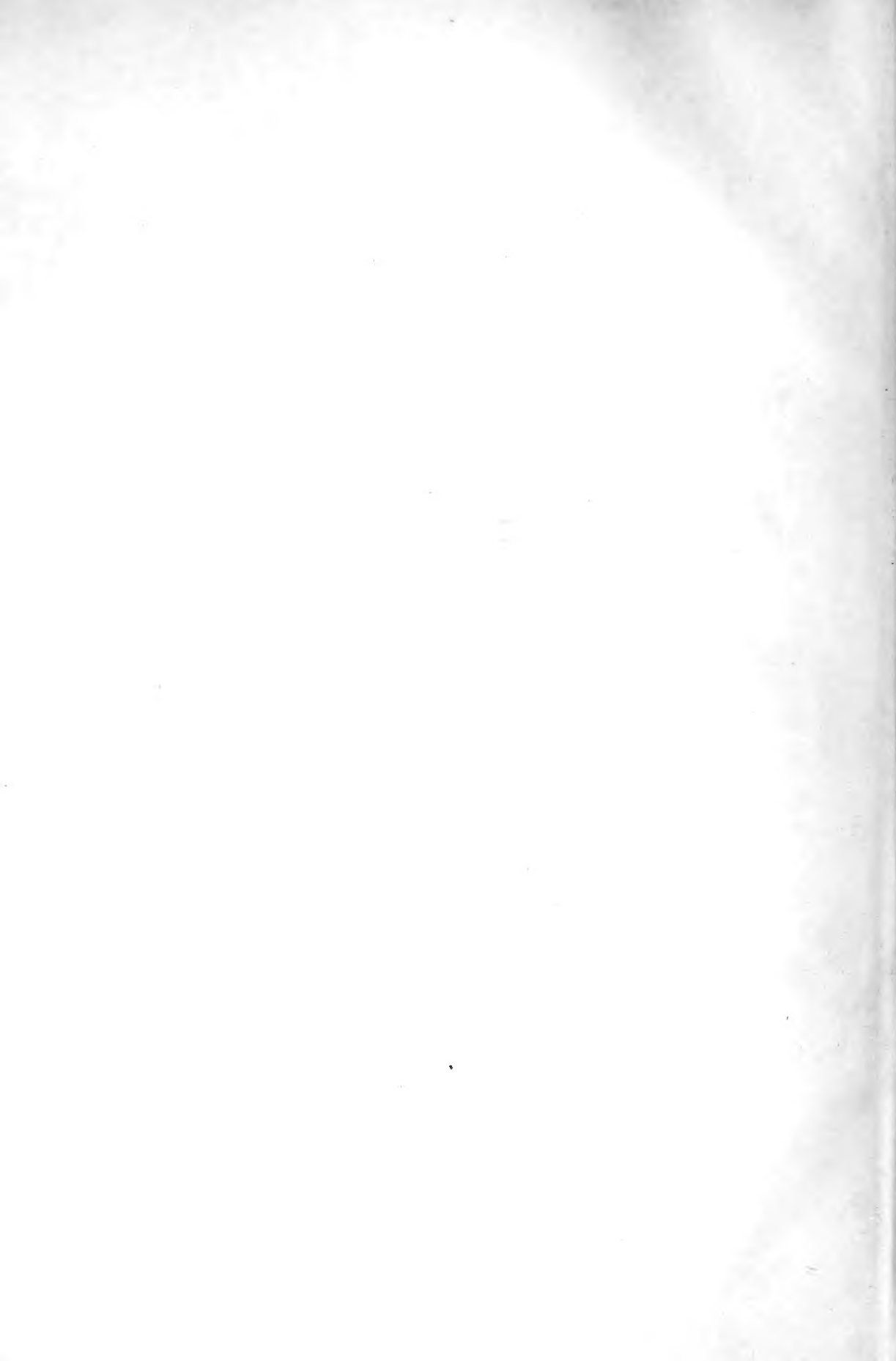


UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY





Handwritten signature

902

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

157

VERSLAG VAN DE GEWONE
VERGADERINGEN DER WIS- EN
NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 24 DECEMBER 1910
:-: TOT 28 APRIL 1911 :-:

DEEL XIX
(2^{DE} GEDEELTE)

121542
317112

JOHANNES MÜLLER :-: AMSTERDAM
:=====: MEI 1911 :=====:

Q
57
A522
dl 19
gold 2

I N H O U D.



			Blz
Verslag Vergadering	24 December	1910	717
„	„	28 Januari 1911	877
„	„	25 Februari „	1067
„	„	25 Maart „	1209
„	„	28 April „	1371

719

**KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.**

**VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 24 December 1910.**

E R R A T A.

In het verslag der vergadering van 25 Februari 1911:

p. 1207 r. 17 v. o. leze men achter hetgeen: bij de heliumtemperaturen.
„ 14 „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ electronen: een met \sqrt{T} evenredige
en dus op den weerstand.

In het verslag der vergadering van 28 April 1911:

p. 1480 r. 14 v. o. leze men achter getal: $h/k =$
„ 2 „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ 0.00225 i. pl. v. 0.0013.

PH. KOHNSTAMM: „Over „osmotische temperaturen” en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 864.

PH. KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER: „Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheden”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 875.

H. KAMERLINGH ONNES: „Verdere proeven met vloeibaar helium”, p. 875.

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 875.

Errata, p. 876.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Digitized by the Internet Archive
in 2009 with funding from
University of Toronto

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 24 December 1910.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 718.

J. CLAY: „Invloed van elektrische trillingen op platinaspiegels (Cohaerer-werking)”. (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ), p. 718.

S. L. SCHOUTEN: „Reinculturen uit één onder het mikroskoop geïsoleerde cel”. (Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en M. W. BEJERINCK), p. 721. (Met één plaat).

H. H. ZEYLSTRA FZ.N.: „Over de oorzaak der dimorphie bij *Oenothera nanella*”. (Aangeboden door de Heeren HUGO DE VRIES en J. W. MOLL), p. 732. (Met één plaat).

L. E. J. BROUWER: „Over één-éénduidige, continue traformaties van oppervlakken in zichzelf” (3de mededeeling). (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 737.

H. J. E. BETH: „De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen” (3de gedeelte). (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 748. (Met één plaat).

GEORGE MAJCEK: „On quartic curves of deficiency zero with a rhamphoid cusp and a node”. (Aangeboden door de Heeren JAN DE VRIES en D. J. KORTEWEG), p. 768.

J. BÖESEKEN en H. J. PRINS: „De synthese van as. heptachloorpropaan uit tetrachlooraethyleen en chloroform onder medewerking van aluminiumchloride”. (Aangeboden door de Heeren S. HOOGEWERFF, en A. F. HOLLEMAN), p. 776.

G. VAN RIJNBERK: „Unisegmentale reflexen”. (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en T. PLACE), p. 778.

J. R. KATZ: „Onderzoekingen over de analogie tusschen opzwellen en mengen. (2e mededeeling). Opzwellbare kristallen en mengkristallen”. (Aangeboden door de Heeren C. A. PEKELHARING en H. ZWAARDEMAKER), p. 781. (Met één plaat).

J. SCHMUTZER: „Over de oriëntering van mikro-kopische kristaldoorsneden”. (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en J. CARDINAL), p. 787.

A. SMITS en H. L. DE LEEUW: „Bewestigingen van de nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie”. I. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en A. F. HOLLEMAN), p. 802. (Met één plaat).

L. S. ORNSTEIN: „Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer”. I. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 809.

PAUL HERTZ: „Ueber die kanonische Gesamtheit”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 824.

PH. KOHNSTAMM en L. S. ORNSTEIN: „Over het warmte-theorema van NERNST”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en H. A. LORENTZ), p. 848.

PH. KOHNSTAMM: „Over „osmotische temperaturen” en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 864.

PH. KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER: „Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheden”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 875.

H. KAMERLINGH ONNES: „Verdere proeven met vloeibaar helium”, p. 875.

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 875.

Errata, p. 876.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgevingen van de Heeren MAX WEBER, H. E. DE BRUIJN, W. H. JULIUS, A. P. N. FRANCHIMONT, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen en van den Heer K. MARTIN, dat hij in de eerstvolgende maanden niet tegenwoordig zal kunnen zijn.

De Voorzitter zegt, dat hij van plan was den Heer MARTIN na zijn terugkomst van zijn wetenschappelijke expeditie welkom te heeten. Tot zijn spijt is hij daartoe niet in staat, doordat de Heer MARTIN de vergadering om gezondheidsredenen niet kan bijwonen. Hij verheugt zich echter te kunnen mededeelen dat er gegronde hoop is om te verwachten dat de Heer MARTIN binnen niet te langen tijd wêer geheel hersteld zal zijn.

2°. Kennisgeving van de „Reale Accademia della Scienze” te Turijn dat haar lid Prof. ANGELO MOSSO den 24^{en} November j.l. te Turijn is overleden.

Deze kennisgeving is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

3°. Schrijven van Prof. EMILE CHAIX te Genève ten geleide van een voorloopig programma voor de uitgave van een „Atlas photographique des formes du relief terrestre” en met het verzoek aan de Akademie om ook haar steun aan deze uitgave te verleen.

Ter kennisneming voor de leden beschikbaar gesteld.

De Secretaris wenscht den Heer H. A. LORENTZ geluk met zijne benoeming tot Associé der „Académie des Sciences” te Parijs en wijst op de groote beteekenis dier benoeming.

De vergadering geeft door applaus van hare instemming blijk.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt eene mededeeling aan van den Heer J. CLAY: „*Invloed van elektrische trillingen op platina-spiegels. (Cohaerer-werking).*”

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Naar aanleiding van eenige onzekerheid, die, zoover ik weet, nog altijd bestaat ten aanzien van de cohaerer-werking op platina-spiegels, deel ik hierbij iets van mijne ervaring daaromtrent mee.

Verschillende waarnemers¹⁾ hebben opgemerkt, dat elektrische trillingen den galvanischen weerstand van een Platina-spiegel vermeerderen.

Dit was moeilijk overeen te brengen met de onderstelling van LODGE²⁾ dat de elektrische trillingen de metaaldeeltjes van een cohaerer gunstiger schikken voor de galvanische geleiding.

1) ASCHKINASS. Verh. d. Phys. Gesellsch. Berlin. 1894 en Wied. Ann. 57. BRANLY La Lumière Electrique 40. 1891. HAGA. Wied. Ann. 56. 1895. MIZUNO Phil. Mag. 40. 1895 D. v. GULIK. Diss. Groningen. 1896. Wied. Ann. 66. 1898.

2) LODGE. The Work of HERTZ and his Successors 1894.

No. 1			No. 2			No. 3			No. 6		
Afstand	Omstandigheden	Weerstand in Ohm.	Afstand	Omstandigheden	Weerstand in Ohm.	Afstand	Omstandigheden	Weerstand in Ohm.	Afstand	Omstandigheden	Weerstand in Ohm.
30 c.M.	tr en kl ¹⁾	230	30 c.M.	tr en kl	165	25 c.M.	tr	35.1	30 c.M.	tr	9600
	kl	206		kl	104		kl	34.5		kl	8000
200 c.M.	tr	241	15 c.M.	tr	163		tr	34.9		tr	9650
	tr en kl	210		kl	135		tr	35.9		tr	∞
	kl	203	25 c.M.	tr en kl	160		tr	35.3			
50 c.M.	tr en kl	220	8 c.M.	tr	122	No. 4			No. 7		
	kl	195		kl	1100						
	tr en kl	220	28 c.M.	tr en kl	200						
30 c.M.	tr en kl	182		kl	124	30 c.M.	tr	99.5	30 c.M.	tr	10.241
	kl	195		kl	143		kl	99.0		kl	10.241
	tr	181	20 c.M.	tr en kl	100		tr	99.0		tr	10.241
	tr en kl	177		kl	145			157			
	kl	205	10 c.M.	tr	220	No. 5					
	tr en kl	173		tr	142						
10 c.M.	tr	380	6 c.M.	tr	198						
	kl	320		tr en kl	140						
5 c.M.	tr en kl	800	30 c.M.	kl	210	30 c.M.	tr en kl	144			
	kl	690		tr en kl	170		kl	141			
20 c.M.	tr en kl	604	30 c.M.	tr	490	5 c.M.	tr	142.5			
	kl	493	6 c.M.	kl	470		kl	142.5			

¹ tr(illingen) en kl(oppen).

Het bleek mij nu, dat de invloed der electriche trillingen zeer veel van omstandigheden afhangt. Ik had eenige platina-spiegels gemaakt, die niet tot dezelfde temperatuur verhit waren, zoodat het platina niet op alle even vast lag.

Spiegel No. 1 en 2 (zie tabel) waren tot $\pm 300^\circ$, 3, 4 en 5 tot ± 400 verhit. No. 6 was een buis, die inwendig verplatineerd was, zoodat het platina niet stevig kon worden ingesmolten in het glas. No. 7 was een buis, die van buiten was verplatineerd door langen tijd op rood-gloeihitte te verwarmen. Van deze laatste kon het platina zelfs met een scherp voorwerp niet worden weggenomen.

Uit de tabel kan nu de invloed der electriche trillingen worden nagegaan. Deze is 't grootste bij 1 en 2, veel minder bij 3, 4 en 5, bij 6 weer groot en 7 niets.

Het blijkt dus, dat de grootte der verandering samenhangt met de gebondenheid van het platina, 't geen dus op een mechanische werking wijst. Vooral bij 1 en 2 had kloppen na een verandering meestal een flinke herstellende werking. Bij No. 2 werd zelfs eens een verandering van 3 Ohm in den weerstand, tengevolge van een sissend geluid, waargenomen. Het bleek verder dat op grooten afstand der trillingsbron (de vonk van een inductieklos) de trillingen een vermindering van den weerstand teweeg brachten, op kleineren afstand daarentegen een vermeerdering. Wij kunnen dit laatste dunkt mij opvatten als een analogon van de werkin van een electrostatisch veld op b.v. gipspoeder. Wanneer het veld zwak is krijgt men tengevolge van het electrostatisch veld goed doorlopende krachtlijnen, maar wordt het veld sterker, dan worden de richtende krachten te groot, de deeltjes worden geheel meegenomen en de krachtlijnen verbroken. Zoo ook waarschijnlijk hier. Bij een zwak veld worden de metaaldeeltjes gunstiger geschikt, maar wordt het veld sterker, dan wordt op vele plaatsen de gunstige ligging verbroken.

De omkeering van den invloed zal op des te korter afstand moeten gebeuren naar mate het platina vaster op 't glas ligt. Ook dit werd bij deze spiegels opgemerkt.

Bij buis No. 7 werd niet de minste verandering opgemerkt zelfs niet op 1 e.M. afstand van de vonk.

Deze verschijnselen bevestigen dus de onderstelling van LODGE omtrent den mechanischen invloed der electriche trillingen in verschillend opzicht.

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik mijn hartelijken dank te betuigen aan den Directeur en de Professoren aan het Natuurkundig Laboratorium te Delft, voor hunne welwillendheid om mij in de gelegenheid te stellen experimenteel te werken.

Delft, Dec. 1910.

Microbiologie. — De Heer WENT biedt een mededeeling aan van den Heer S. L. SCHOUTEN: „*Reinkulturen uit één onder het mikroskoop geïsoleerde cel*”.

(Mede aangeboden door den Heer M. W. BEJERINCK).

In 1899 demonstreerde ik op het Nat. en Gen. Congres te Haarlem¹⁾ een door mij gevonden methode voor het isoleeren, onder het mikroskoop, van één cel, welke methode, nader uitgewerkt en toegepast, in 1901 in de verslagen van de Kon. Akad. verscheen²⁾ en ook het onderwerp mijner dissertatie was³⁾. Sinds dien zette ik mijn onderzoekingen in die richting voort. In 1905 publiceerde ik de toen veel verbeterde methode, met nieuwe toepassingen, wederom⁴⁾, en thans, 5 jaren later, is de methode in verschillende opzichten weer zoo verbeterd en vereenvoudigd, dat ik meen niet langer te mogen wachten met hierover eene mededeeling te doen.

Terwijl ik voor bijzonderheden verwijs naar mijn laatste publicatie, die, behoudens de hier volgende veranderingen, ook thans nog tot leidraad kan dienen, wil ik hier even herinneren aan de hoofdlijnen der methode, om daarna de verbeteringen na te gaan.

Op een met een weinig vaseline ingewreven en daarna geflammeerd dekglas zet men een druppel af met het materiaal waaruit men een cel wil isoleeren. Op een afstand van ongeveer 3 mm. daar tegenover brengt men de druppels waarin men de reinkultuur wil doen ontstaan. Daarna legt men dit dekglas op een vochtige kamer die zich op de voorwerptafel van het mikroskoop bevindt. De linker-zijwand van die vochtige kamer is voorzien van een horizontale spleet, die gesloten wordt door een dikke vloeistof, en door welke een glazen naald steekt die aan het einde in een oogje is omgebogen. De naald kan door een eenvoudig mechanisme om een steunpunt draaien, zoodat het uiteinde de onderkant van het dekglas kan aanraken. Door een bewegelijke objecttafel is het mogelijk gemaakt dit op iedere plaats in het gezichtsveld te doen.

1) Een methode voor het maken van reinkulturen, uitgaande van één onder het microscoop geïsoleerde cel”. Handelingen v. h. 7e Nederl. Nat. en Gen. Congres, gehouden te Haarlem 1899.

2) „Over reinkultuur van Saprolegniaceën”. Verslag van de Gewone Vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeling van 30 Maart 1901.

3) Reinkulturen uit één onder het mikroskoop geïsoleerde cel. Proefschrift. Utrecht 1901.

4) Reinkulturen aus einer unter dem Mikroskop isolierten Zelle. Zeitschr. für wiss. Mikr. und für mikr. Technik. Bd. XXII. 1905 p. 10.

De ruimte in de vochtige kamer is door een op den bodem liggenden druppel met waterdamp verzadigd. Deze condenseert tegen de onderzijde van het dekglas, en wel, daar dit met vaseline is behandeld, in den vorm van kleine, afgeronde, niet met elkaar vervloeiende druppeltjes.

De naald wordt op een wijze, waarop we hieronder zullen terugkomen, vóór het gebruik gesteriliseerd. Nu zoekt men een mikro-organisme dat men isoleeren wil, aan den rand van den z.g.n. materiaaldruppel op. Men beweegt de naald naar boven, zóó dat het uiteinde aan den rand van den druppel, bij de te isoleeren cel terecht komt. Als men dan de vochtige kamer zijdelings verschuift, zal de cel, met een zeer klein druppeltje, uit den grooten druppel kunnen worden getrokken. Deze cel wordt nu in het oog van de naald opgevangen. Daarna wordt dit oog wat naar beneden gebracht, zoodat het 't dekglas niet meer aanraakt, en wordt de vochtige kamer, bij zwakke vergrooting zoo ver zijdelings verschoven, dat het oog, bij een opwaartsche beweging, dicht bij den rand van een der steriele druppels terecht komt, en de geïsoleerde cel, in een klein druppeltje, weer op het dekglas brengt. Onder controle van sterke vergrooting schuift men dan dit druppeltje met de cel in den sterielen druppel, waarin de kultuur zal ontstaan, den z.g.n. kultuurdruppel. Het glaasje wordt daarna gelegd op een gewone vochtige kamer, die men bij de vereischte temperatuur bewaart. Is de kultuurdruppel *vast*, dan zal de kolonie aan den rand ontstaan, en haar ontwikkeling van den aanvang af met de sterkste vergrooting kunnen vervolgd worden. Is ze *vloeibaar*, dan zal de kultuur zich doorgaans meer over den geheelen druppel verdeelen.

Tot zooverre de methode in hoofdlijnen. Van de sinds mijn laatste publicatie ingevoerde verbeteringen noem ik allereerst deze, dat ik behalve het isoleerapparaat, zooals dat tot hertoe door den mechanicus D. B. KAGENAAR Sr. te Utrecht voor den prijs van f' 60.— (zonder naalden) werd vervaardigd, nog een vereenvoudigd toestel heb geconstrueerd, waarvan de prijs, met 3 isoleernaalden f' 25.— bedraagt. Het bezwaar dat de naalden niet in den handel waren, is dus weggenomen.

Vroeger gebruikte ik één puntvormige naald, en 3 in een oog eindigende: een zeer klein oog van 9μ , een middelsoort van 30μ en een groot van 50μ diam. De ondervinding heeft mij geleerd dat het kleinste oog, waarvan de vervaardiging het moeilijkst was, moet vervallen. Het was bestemd voor het isoleeren van bacterien; met een iets grooter oog gaat dit echter veel beter, en daarom is het voldoende 3 naalden te hebben: een puntvormige, een oog van

$\pm 30 \mu$ uitw. diam. voor bacterien en kleine gisteellen of sporen, en een oog van $\pm 50 \mu$ uitw. diam. voor grootere cellen.¹⁾

Bij het oudere toestel bevindt zich aan elken kant van het microscoop een naald; met de eene wordt de cel geïsoleerd, en vlak naast den kultuurdruppel neergezet, en met de andere, d. i. dan altijd de puntvormige, wordt de cel in den kultuurdruppel gevoerd.

De oorspronkelijke bedoeling hiervan was deze: mocht er, behalve de geïsoleerde cel, soms een tweede cel in het oog zijn medegevoerd, dan zou die op het moment van het brengen in den kultuurdruppel wel eens, misschien ongemerkt, kunnen loslaten, en, met de geïsoleerde cel, in den druppel kunnen terecht komen. Deze fout wordt echter voorkomen als men dat laatste overvoeren in den kultuurdruppel verricht met de tweede naald, waarvan men weet dat ze steriel is.

De ondervinding heeft mij intusschen geleerd, dat men in vele gevallen de geheele bewerking ook wel met één naald kan doen; daarvoor moeten echter de cellen in het materiaal zóó geïsoleerd van elkaar voorkomen, dat men er gemakkelijk één cel uit kan halen, zonder dat er een andere meegaat. Uit dat oogpunt heeft het vereenvoudigde apparaat slechts één naaldhouder, en wel links van het microscoop. Een *algemeenen* regel mag men hiervan echter niet maken, iets waarop ik hieronder nader hoop terug te komen.

Bij het oudere toestel staat het microscoop op een plaat die door middel van 2 schroeven in 4 richtingen kan worden bewogen; men begint n.l. altijd met het microscoop zoo te stellen dat de naald, als ze het glas aanraakt, midden in het gezichtsveld komt. Bij het vereenvoudigde toestel is deze plaat, hoe praktisch en gemakkelijk in het gebruik, om onkosten te vermijden, weggelaten; men zet dus het microscoop met de hand en door middel van kloppen met den vingertop (waarmede men zeer kleine verschuivingen krijgt) op de juiste plaats.

De naaldhouders kan men instellen voor microscopoptafels van verschillende hoogten.

In de jaren, verlopen sinds mijn laatste publicatie, heb ik echter nog vele andere ondervindingen opgedaan, die ik meen hieraan te moeten toevoegen.

Allereerst deze die v.n.l. voor bacterien geldt: men isoleere uit materiaal dat zoo jong mogelijk is. Onderzoekingen van den laatsten tijd hebben duidelijk aangetoond dat bacterien in een kultuur zeer

¹⁾ De bovengenoemde afmetingen zijn *gemiddelde* waarden; diam. en draaddikte kunnen, zonder bezwaar, wat grooter of kleiner zijn.

snel afsterven. De groeikurve die men verkrijgt als men de tijden als abscissen, de levende bacterien als ordinaten voorstelt, stijgt snel, en daalt dan snel. Bij cholera bv. bereikt ze, bij 37°, na 12 uur reeds het maximum. Bij oudere kulturen zal men dus grooter kans hebben verzwakte individuen te isoleeren, die dan geen kolonie geven.

Men vermijde voorts onnoodig lange verlichting tijdens het isoleeren. Daar 't licht bij deze methode toch vrij sterk moet zijn, vooral bij een 1000-malige vergrooting, is 't het beste met kunstlicht te werken, b.v. gloeilicht, waaruit de chemisch werkzame stralen van het ultraviolette gedeelte zijn verwijderd. Hiervoor gebruike men den bekenden glazen bol, thans niet gevuld met koperoxydammoniak, maar met een niet te donkere oplossing van kaliumbichromaat (op een bol van 3.5 L. inhoud is 1 gr. voldoende). Wil men dan het gele licht, dat volgens sommigen voor de oogen nadeelig is, wat temperen, dan kan dit gebeuren door 't leggen van een dun kobaltglaasje op het irisdiaphragma.

Andere belangrijke verbeteringen hangen samen met het gebruik van de vochtige kamer, waarop het dekglasje wordt gelegd, nadat het eigenlijke isoleeren is afgelopen.

Als men de methode voor het maken van zgn. druppelkulturen in vochtige kamers in de handboeken naleest, krijgt men over 't algemeen den indruk dat zulke kulturen vrijwel altijd slagen. Jaren lang heb ik niet beter geweten, en het mislukken van vele door mij aangelegde kulturen toegeschreven aan fouten in mijn methode van werken, totdat ik in KÜSTER'S „Kultur der Mikroorganismen" op pag. 54 de mededeeling vond dat er hierbij allerlei factoren zijn, die verhinderend kunnen werken. En toen ik naar aanleiding van de daar geciteerde verhandelingen o.a. de breed opgezette en nauwkeurig nitgevoerde proeven van CLARK en DUGGAR¹⁾ doorlas, zag ik dat zij dezelfde ervaringen hadden opgedaan als ik. CLARK komt tot de conclusie dat sommige mikroorganismen gevoelig zijn voor zelfs geringe verschillen in concentratie van den kultuurdruppel, of in dampspanning binnen de ruimte van de vochtige kamer. Hij legt daarom²⁾ geen druppels water op den bodem van de vochtige kamer, maar eenige druppels van dezelfde vloeistof waarin gekweekt wordt. Dan zal de dampspanning van de kultuurdruppels en van de druppels op den bodem dezelfde zijn, en er dus geen reden zijn voor de

1) J. F. CLARK, On the toxic effect of deleterious agents on the germination and development of certain filamentous Fungi. Bot. Gazette 1899. vol. 28. pag. 289.
B. M. DUGGAR, Physiological studies with reference to the germination of certain fungous spores. Bot. Gazette. 1901. vol. 31 pag. 38.

2) l. c. pag. 294.

kultuurdruppels om waterdamp op te nemen of af te geven, waardoor de concentratie verandert. Daar het toenemen van de temperatuur in de afgesloten ruimte van de vochtige kamer ook nadeelig is, wordt deze door CLARK bij het zetten in de stoof niet terstond geheel bedekt met het dekglas, maar blijft er een klein spleetje over, dat eerst later wordt afgesloten. CLARK gebruikt verder betrekkelijk groote vochtige kamers, n.l. een glazen cylinder van $17\frac{1}{2}$ mm. inw. diam. en 10.7 mm. hoogte. Men zal verstandig doen deze wenken — voor zoover dit mogelijk is — in aanmerking te nemen, en ook het reinigen van de dekglasjes, waarop genoemde onderzoekers in 't bijzonder de aandacht vestigen, niet als een bijzaak te beschouwen. De dekglasjes moeten betrekkelijk nieuw zijn, althans niet zoo oud dat ze een begin van verwerking vertoonen (microscopisch te herkennen aan kleine krasjes, — een beeld dat sommige verontreinigingen echter ook vertoonen). CLARK en DUGGAR beschrijven uitvoerig hun reinigingsmethode; ik voor mij kook ze ± 10 min. in een zeepoplossing uit, waarna ze overvloedig in gewoon water, liefst afzonderlijk, worden afgespoeld en droog bewaard. Andere methoden van reiniging, zooals in 't bekende kaliumbichromaatmengsel of in aether, kunnen natuurlijk, zoo noodig, aan dit uitkoken in zeepoplossing voorafgaan.

Alleen bij het gebruik van *goede* dekglasjes krijgt men scherp begrensde druppels. Verder moeten de glaasjes kort vóór het isoleeren van vaseline worden voorzien; is dit eenige dagen van te voren gebeurd, dan zijn de druppels niet zoo mooi.

Een belangrijke factor is het verdunnen van het materiaal. De beste en eenvoudigste methode bleek mij hierin te bestaan, dat men een zeer grooten druppel vloeistof op een gewoon met vaseline geprepareerd dekglasje brengt. Dit kan, veel beter dan met een oogvormige naald, geschieden door middel van een reepje platinablik, lang ± 5 cm., breed $\pm 2\frac{1}{2}$ mm., dat in de lengterichting rechthoekig tot een gootje is omgebogen, en dat men verder als een gewone entnaald behandelt. In dien druppel, waarin het er niet zoo nauw op aankomt, omdat hij zoo groot is, brengt men wat materiaal en verdeelt het er in. Blijkt het dat er te veel in is gebracht, dan zuigt men met een stukje filtreerpapier wat weg, en vult met vloeistof weer bij. Men neemt er de materiaaldruppels uit voor het isoleeren, en bewaart hem zoo noodig op een gewone vochtige kamer.

In mijn laatste publicatie geef ik aan, dat de materiaaldruppel altijd uit physiologische NaCl-oplossing moet bestaan, omdat daarbij het geïsoleerde druppeltje het best loslaat van den grooten druppel. 't Is mij bij mijn latere proefnemingen gebleken dat men er ook, hoewel iets minder goed, sommige andere vloeistoffen voor kan gebruiken,

zoals vleeschbouillon, glucose-pepton voor gist en schimmels, enz.
Ten slotte nog enkele kleine wenken en verbeteringen.

Op de uiteinden der isoleernaalden kunnen soms onzuiverheden en bacterien capillair vastdrogen, vooral als men ze niet terstond na het gebruik reinigt. In dat geval helpt eenvoudig onderdompelen in zwavelzuur niet, maar doet men 't beste de uiteinden eerst in aether af te spoelen, en daarna korten tijd te houden in sterk zwavelzuur, dat in een waterbad op 100° is gebracht.

De spleet in de isoleerkamer, waardoor de naald steekt, wordt, beter dan met olijfolie en diapalm — zooals ik dat vroeger aangaf —, afgesloten met paraffinum liquidum, aangedikt met wat fijn verdeelde vaseline.

De dekglasjes worden niet door middel van vaseline op de vochtige kamers bevestigd, maar met een mengsel van 20 vol. vaseline op 1 vol. paraffine, dat een temperatuur van 37° kan verdragen zonder te smelten.

Gaarne zou ik het, wat de techniek van mijn methode betreft, hierbij laten, als ik niet meende eenige opmerkingen te moeten maken naar aanleiding van een verhandeling van den Heer A. W. NIEUWENHUIS, voorkomende in het zittingsverslag van 29 Oct. jl., getiteld: „Wijze om microörganismen uit één cel te kweeken”. Over de *hoofddlijnen* der methode zal ik niet spreken, daar ze volkomen dezelfde zijn als bij de mijne. Ik wil alleen de bezwaren nagaan die NIEUWENHUIS tegen mijn methode heeft, en de wijzigingen die hij daarom in de fijnere uitwerking er van gemeend heeft te moeten aanbrengeu.

NIEUWENHUIS stelt 4 eischen voor een isolatie-methode, en zegt dat er geen methode is, die aan die eischen voldoet. Aan de eerste, volgens welke er bij vergrootingen van 300 en meer moet geïsoleerd kunnen worden (N. gebruikt die van 300 en 350), voldoet mijn methode natuurlijk wel, want al mijn isolatie-proeven met bacterien zijn genomen met $\frac{1}{16}$ ol. imm. LETZ, dus bij een vergrooting van ± 1000 .

De 2e eisch is, dat het af te zonderen organisme noch door chemische, noch door physische prikkels mag worden geschaad. Wat de *chemische* prikkels aangaat, beweert NIEUWENHUIS dat er op mijn oogvormige naalden, wanneer die in zwavelzuur en ammonia zijn gedesinfecteerd, stoffen achterblijven die de cellen prikkelen, en dat ik daarvan zelf, op pag. 113 van mijn dissertatie, het bewijs geef. In werkelijkheid deel ik daar echter mede dat dit alleen het geval is als men niet *op de goede manier* steriliseert, d.i. als men de naalden dieper in het zwavelzuur steekt als in de ammonia, waardoor het

overtollige zuur naar de punt van de naald zou opstijgen. Ik heb daaraan uitdrukkelijk toegevoegd: „Toen ik, onder vermindering van „deze fouten, het staafje nogmaals isoleerde, bleek zijn vervloeings- „vermogen na de isolatie even sterk te zijn. Van een niet-opkomen „der kolonies had ik toen ook geen last meer”. Dat dit steriliseeren schadelijke gevolgen zou hebben, heb ik nooit kunnen ontdekken, hoewel ik de kwestie speciaal heb onderzocht door het nemen van parallelproeven met gesteriliseerde en niet-gesteriliseerde isoleernaalden. Bovendien wordt de naald, voor het gebruik, altijd nog afgespoeld in een steriel druppel, die zich op het isoleer-dekglaasje bevindt, en kan men haar nog van te voren even houden in een buisje met steriel water van 100°, waarin het *eventueel* achtergebleven spoor ammonium-sulfaat zeer snel oplost. Ik geloof echter niet dat dit zout ooit achterblijft; men eindigt toch met indampeling in een overmaat van ammonia, en dit verdampt binnen enkele oogenblikken.

Over schadelijke *physische* prikkels wordt verder gezweven; we kunnen ze dus ook onbesproken laten. Alleen wil ik thans reeds zeggen dat daarvoor bij het *overslepen* van de geïsoleerde cel, zooals ik het oorspronkelijk (zie mijn dissertatie) deed, en zooals NIEUWENTHUIS het thans nog doet, meer gevaar bestaat als bij het *overdragen* volgens mijn methode (zie later.)

De 3e eisch waaraan mijn methode niet zou voldoen, is die van de grootst mogelijke eenvoudigheid, waardoor de werkwijze binnen het bereik valt van iederen experimentator. Dit schijnt wel het grootste bezwaar te zijn. In het begin toch van zijn verhandeling stelt NIEUWENTHUIS haar als vrijwel onbruikbaar ter zijde. „Ze is — zoo heet het daar — voor algemeene toepassing veel te samengesteld, daar zij te hooge eischen stelt aan de vaardigheid en het geduld van den onderzoeker; door den langen tijd, die voor de uitvoering noodig is, zou zij zelfs voor een in die richting zeer ontwikkeld onderzoeker moeielijk veel gebruikt kunnen worden.” Wat dit betreft, kan ik niet beter doen dan op mijn conclusie in mijn laatste verhandeling te wijzen ¹⁾: „Durch einige Uebung, bringt man es recht bald so weit, dass, wenn das Material ungefähr die richtige Verdünnung hat man in ungefähr 5 Minuten eine Bakterie aus dem Materialtropfen isoliert und in den Kulturtropfen bringt”. En dit geldt *bakterien*; schimmelsporen en gistcellen gaan nog gemakkelijker. De ervaring heeft mij bovendien geleerd dat iemand die nooit nog met de methode werkte, haar even spoedig machtig was als de een of andere sporen- of cilien-kleurmethode.

De 4e eisch, een gemakkelijk handhaven van asepsis bij de uit-

¹⁾ pag. 26.

voering, wordt niet verder als bezwaar tegen mijn methode uitgewerkt. Misschien denkt NIEUWENHUIS hier aan mijn vochtige kamers, die ik niet telken male flambeer, maar inwendig van vaseline voorzie. Bij de honderden proeven die door mijn handen zijn gegaan, heb ik niet één geval van infectie waargenomen; de vaseline houdt de opgevallen organismen vast, en ze ontkiemen er niet in.

Men zou, wat bovengenoemden eisch van eenvoudigheid betreft, er op kunnen wijzen dat er dan toch een ander bezwaar aan mijn methode verbonden was: de moeilijkheid van het vervaardigen der glazen naalden. Zeer zeker zijn de naalden van NIEUWENHUIS gemakkelijker te maken. Ik heb echter in mijn laatste verhandeling op pag. 18 medegedeeld dat ik persoonlijk, zoolang de methode van het vervaardigen nog niet was gepubliceerd, gaarne ieder wilde helpen die er mij om vroeg. Ik schreef daar: „Eventuelle Anfragen werde ich indessen vorläufig gern entgegennehmen”. En dat heb ik steeds — waar 't landgenooten betref — belangeloos gedaan, óók b.v. toen de heer NIEUWENHUIS met mijn methode begon te werken. Verder heb ik de methode voor het vervaardigen gepubliceerd, en er op gewezen dat ieder de toestelletjes, daarvoor noodig, gemakkelijk zelf kan maken ¹⁾.

Intusschen wijs ik er met nadruk op, dat dit met de *werkwijze* der methode niets te maken heeft. Niemand zal b.v. de werkwijze van het telefoneeren ingewikkeld noemen, omdat het vervaardigen van het telefoontoestel moeielijk is.

Tot zooverre de bezwaren tegen mijn methode, waarvan ik mij het laatste — de moeilijkheid van het vervaardigen der glazen naalden, en het feit dat deze niet in den handel waren — kan indenken; 't verheugt mij daarom des te meer dat dit bezwaar is weggenomen.

Thans wensch ik de veranderingen te bespreken die NIEUWENHUIS in mijn methode heeft aangebracht.

Uit angst o. a. voor het bovenbehandelde denkbeeldig gevaar van het steriliseeren der isoleernaalden, geeft NIEUWENHUIS er de voorkeur aan voor iedere isolatie een nieuwe naald te maken, die niet in eér oog, maar in een bolletje eindigt, en die dan met gips in den naaldhouder bevestigd moet worden. 't Schijnt mij onnoodig toe, aan te toonen dat dit veel omslachtiger is dan 't voortdurend werken met dezelfde naald, die als 't noodig is even op de bekende wijze wordt gesteriliseerd. Met één naald kan men jaren lang werken; ze zijn

¹⁾ Zeitschr. für wiss. Mikr. und für mikr. Technik, Bnd. 24, 1907 pag. 258. BURRI heeft — zie zijn „Tuscheverfahren” — bij vergissing gelezen dat deze apparaatjes 100 Mk. kosten, wat de prijs was van het *isoleertoestel*!

veerkrachtig, en breken niet tenzij men ze ruw stoot of laat vallen.

De naald is bij NIEUWENHUIS bevestigd in een statief, dat los naast het microscoop staat, terwijl bij mijn apparaat statief en microscoop op één plaat staan, wat zeker geen complicatie mag genoemd worden, en dit vóór heeft, dat een verschuiven, b.v. door stooten, van het statief t. o. v. het microscoop onmogelijk is. In het statief van NIEUWENHUIS kan de naald in 3 richtingen bewogen worden, wat volkomen overbodig is als men, gelijk ik dit *van den aanvang af* heb gedaan, een beweeglijke voorwerptafel gebruikt. Intusschen is NIEUWENHUIS (p. 533) na eenigen tijd ook op datzelfde denkbeeld gekomen.

Verder legt hij het dekglas, waarop geïsoleerd zal worden, onder het microscoop op een soort kamer, die aan één zijde geheel open is voor 't binnentreden van de isoleernaald. Bij mijn toestel komt die naald binnen door een spleet die met paraffinum liquidum wordt afgesloten. Daardoor ontstaat een gesloten vochtige kamer, wat dit groote voordeel heeft dat, als op den bodem een druppel is gelegd, zelfs het kleinste geïsoleerde druppeltje niet verdampt, zoodat men aan geïsoleerde cellen observaties van desnoods een dag lang kan doen. Dat de asepsis hierbij ook beter gewaarborgd is als bij de 8 m.m. hooge kamer van NIEUWENHUIS met geheel open zijwand, behoeft geen betoog.

Het grootste bezwaar heb ik echter tegen het feit dat NIEUWENHUIS de geïsoleerde cel in 't druppeltje *sleept* over het glas naar den kultuurdruppel. Dit kan bij hem niet anders, daar hij een knodsvormige naald gebruikt.

In mijn dissertatie sleep ik de cellen ook over, maar ik ben er in den loop der jaren — een enkele uitzondering daargelaten — van teruggekomen. Een van de redenen, die zeker wel mag gelden, is, dat dit slepen, als men het met zeer kleine cellen doet, voor het oog vermoeiend is. De voornaamste reden is echter deze, dat men er zeer spoedig last van heeft dat de cellen achterblijven, wat vooral met lange en dunne staafvormige bacterien, spirillen of spirochaeten het geval is. Er zijn allerlei cellen die zich niet laten overslepen, zelfs al neemt men een grooten transportdruppel, die dan weer dit bezwaar met zich meebrengt dat men een verontreinigende bacterie er niet licht in ontdekt. NIEUWENHUIS zegt dat bij hem zelfs sporen soms tegen het ondervlak van het dekglas blijven vastkleven. Geen wonder, vooral als men bedenkt dat het geïsoleerde druppeltje in zijn aan één zijde geheel open kamer op zijn tocht ook nog gaat verdampen. Als een cel achterblijft, raadt hij aan „den knop er achter te brengen, en vervolgens voort te bewegen”; hij zegt echter zelf

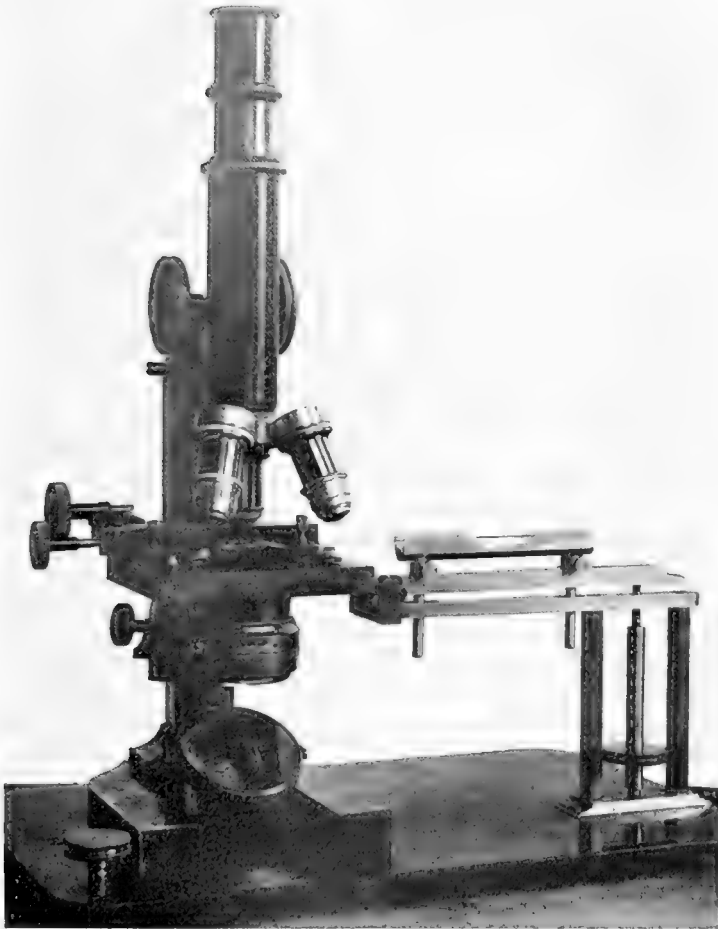
dat hierdoor gevaar voor beschadiging ontstaat. Dat microörganismen met lange fijne eilien door dat meeslepen er niet beter op worden, dat men hier veilig van een schadelijken physischen prikkel mag spreken, is duidelijk. Om al deze redenen gebruik ik een oogje, waarin ik één cel opvang, welke ik dan in eens, zonder slepen, naast den kultuurdruppel breng. Alleen in een *enkel* uitzonderingsgeval, als nl. de cel zich door de een of andere oorzaak niet gemakkelijk laat opvangen in het oogje, kan men tot dit slepen zijn toevlucht nemen (want men kan dit met mijn oogvormige naald óók doen), maar dan zal bij mijn methode het transportdruppeltje onderweg tenminste niet verdampen.

De wijziging om de cel altijd met de ééne naald, waarmede ze geïsoleerd is, terstond in den kultuurdruppel te brengen, kan ik evenmin toejuichen. NIEUWENHUIS zegt op pag. 532: „dat de over te voeren deeltjes zoo ver mogelijk van elkaar in den materiaaldruppel moeten voorkomen, om een verontreiniging van de naald tegen te gaan, is duidelijk; vandaar sterke verdunning der materiaalsuspensie.” Gaarne geef ik toe dat, als de cellen ver van elkaar in den druppel voorkomen, men er vrij wel zeker van kan zijn dat bij het uithalen van één cel uit den druppel, de naald niet door naastliggende cellen zal worden verontreinigd. Als in een mengsel echter betrekkelijk slechts weinig cellen van een bepaalde soort voorkomen, en men juist zulk een cel moet hebben, mag men niet zoo sterk verdunnen, daar de kans dat men ze bij den rand tegenkomt, dan veel te gering is. En dan loopt men wel degelijk gevaar dat men, ééne cel isoleerende, andere cellen meevoert die de proef doen mislukken. Daarom blijf ik het gebruik van 2 naalden *voor moeilijke gevallen* (ook b.v. bij slijmig materiaal) noodig vinden. Met de eerste brengt men de geïsoleerde cel vlak naast den kultuurdruppel; met de tweede, die dan nog zeker steriel is, er in. Bij mijn oorspronkelijken toestel staan die naalden steeds aan weerszijden van het microscoop, dus op twee statieven; bij mijn vereenvoudigd apparaat met één naaldstatief, wordt in zulke gevallen de eerste naald vervangen door de tweede. Daarvoor moet natuurlijk het isoleerdekglaasje even op een gewone vochtige kamer worden gelegd. Men kan echter ook, zonder het microscoop, den kultuurdruppel met een gewone platina entnaald iets naar den kant van het geïsoleerde druppeltje uitrekken; dan zal de geïsoleerde cel er ook in terecht komen.

Thans nog een paar kleine opmerkingen.

Voordat NIEUWENHUIS het dekglasje, waarop geïsoleerd is, op de vochtige kamer legt, ter verdere ontwikkeling van de cultuur, zuigt hij den materiaaldruppel weg met een filtreerpapiertje. Dit is bij zijn

S. L. SCHOUTEN. „Reinkulturen uit één onder het microscoop
geïsoleerde cel.”



Apparaat voor het isoleeren van één cel.

methode noodig. De druppels moeten, n.l. omdat er gesleept wordt, dicht bij elkaar liggen, wat allicht een verontreiniging van den kultuurdruppel door hyphen, die uit den materiaaldruppel groeien, zou tengevolge hebben. Terwijl het de vraag blijft of er na dit wegzuigen geen cellen achterblijven, die in de vochtige ruimte toch ontkiemen, wijs ik er op dat bij mijn methode die afstand zoo groot kan zijn dat er geen sprake van een dergelijke infectie is; ik heb er nooit last van gehad. Het laten liggen van dien materiaaldruppel heeft zijn voordeelen; men kan uit het gedrag van de er in voorkomende cellen (of de sporen zich ontwikkelen, of de bacterien bewegelijk blijven, enz.) soms belangrijke conclusies trekken.

NIEUWENHUIS legt geen druppel op den bodem van de vochtige kamer, omdat hij dan last heeft van te sterke condensatie tegen het dekglas. Dit bezwaar vervalt als de glaasjes op de boven beschreven wijze zijn gereinigd, en als de vochtige kamers niet — gelijk hij dit doet — op een vast voorwerp in de verwarmde ruimte worden geplaatst, zoodat het voorwerpglas 't warmste is, maar b.v. in een doosje op 2 houten latjes. NIEUWENHUIS meent dat de geringe verdamping van een grooten kultuurdruppel geen schadelijke gevolgen kan hebben; na de bovengenoemde onderzoekingen van CLARK en DUGGAR blijft echter voorzichtigheid aanbevolen.

Alles te zamen genomen is er onder de veranderingen die NIEUWENHUIS in mijn methode voorstelt, maar een enkele waarin ik — doch slechts ten deele — met hem mee kan gaan, en die dan ook in mijn vereenvoudigd apparaat (waarvan ik om bepaalde redenen de publicatie nog wat had willen uitstellen) is verwezenlijkt: de twee naaldhouders vervangen door ééne. Waar hij echter aanraadt voor het isoleeren *steeds* niet meer dan één naald te gebruiken, scheiden zich onze wegen. Als hij meer uitgebreide onderzoekingen had gedaan met moeielijk materiaal, b.v. met bakteriën, in plaats van met zooveel grootere schimmelsporen, zou hij hierin niet een verandering hebben voorgesteld.

't Zou mij verheugen als het feit dat de naalden thans in den handel zijn, aanleiding mocht geven tot een ruimer gebruik van mijn methode. Ik ben er van overtuigd dat een groot arbeidsveld er mee kan bewerkt worden. Wie uit de uitvoerige beschrijving van mijn laatste publicatie afleidt dat ze te moeielijk is, vergist zich; ik heb gemeend alle kleine bijzonderheden daar te moeten opnoemen, om het den gebruiker zoo gemakkelijk mogelijk te maken, hoe verleidelijk 't ook was om door een vluchtige beschrijving den indruk te wekken van al te grooten eenvoud. Wie overigens voor het isoleeren van bakteriën terugschrikt, kan werken met gist- of schimmelmateriaal.

De techniek van de methode zal er bij een veelvuldig gebruik wèl bij varen, want ik kan mij niet voorstellen dat die volmaakt is. Tegen de veranderingen door NIEUWENHUIS voorgesteld, meende ik echter terstond te moeten opkomen, daar ze m. i. geen verbeteringen zijn.

Ten slotte nog een wenk : wien geldelijke middelen dit veroorloven, geef ik in overweging zich aan te schaffen het toestel met twee naaldhouders en bewegelijke tafel, waarop het microscop komt te staan ; het is, hoewel het ingewikkelder *schijnt*, 't gemakkelijkst in het gebruik. Ik wijs er echter op dat het gebruik van de rechter-naald moet vervallen, wanneer men als bewegelijke objecttafel neemt een zgn. „Kreuztisch” van ZEISS (misschien ook van andere fabrikanten) ; bij deze toch bevindt zich een van de beide schroeffrondsels juist op de plaats van die naald.

Plantkunde. — De Heer HUGO DE VRIES biedt eene mededeeling aan van den Heer H. H. ZEIJLSTRA FZS. : „*Over de oorzaak der dimorphie bij Oenothera nanella.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. W. MOLL).

In 1905 heb ik mij bezig gehouden met een onderzoek aangaande de dimorphie van *Oenothera nanella*, dat door tal van andere bezigheden voor mijn vertrek naar Indië niet kon voltooid worden. Hoewel 't mijn voornemen is in het volgende jaar dit onderzoek voort te zetten, acht ik het gewenscht reeds thans de voorloopige uitkomsten mede te deelen.

In „die Mutationstheorie” heeft DE VRIES bij de beschrijving van de door mutatie ontstane *Oenothera*-soorten, ons bekend gemaakt met een dwergvorm, die reeds bij den aanvang van de proeven, in 1888, optrad. Sedert vertoonde hij zich telkenmale, als met een niet te gering aantal planten gewerkt werd.

DE VRIES noemt deze plant *Oenothera Lamarckiana nanella*, of liever, kortweg, *Oenothera nanella*, omdat, hoewel het *nana*-kenmerk bij soorten uit de meest verschillende familiën kan optreden, ten opzichte van constantheid bij uitzaaiing deze *Oenothera* zich in geen enkel opzicht van eene elementaire soort onderscheidt.

Niet slechts uit *Oenothera Lamarckiana*, ook uit *Oenothera laevifolia*, *O. scintillans*, *O. leptocarpa*, en uit bastaarden van *Oenothera Lamarckiana* met de nieuwe soorten kwam *Oenothera nanella* volkomen gelijkvormig te voorschijn. Gemiddeld vertoonde $\frac{1}{2}$ 0 0 van de planten het dwergtype.

Reeds als kiemplant is de *nanella* te herkennen aan de twee eerste bladeren, die kortgesteeld en breed zijn. Daarop volgen 2—4 bladeren met lange stelen, die meer het *Lamarckiana*-type bezitten; DE VRIES beschouwt hun optreden als atavisme.

In den regel is *Oenothera nanella* éénjarig. In dit geval groeit de opgaande stengel nu reeds uit; bij planten, die tweejarig zullen worden, ontwikkelen zich meerdere breede, kortgesteelde wortelbladeren, zoodat de plant met een dwergrozet overwintert.

De nitgegroeide stengel heeft opvallend korte geledingen. Dit, gevoegd bij den breeden vorm der bladeren, geeft aan de plant een zéér gedrongen uiterlijk.

Ondanks de geringe grootte der plant zijn bloemen en vruchten nauwelijks kleiner dan die van de *Lamarckiana*. Het kan voorkomen, dat een plant deze bloemen reeds draagt, als de stengel nog slechts 10 cM. hoog is.

Deze zéér karakteristieke vorm vertoonde zich op 80.000 planten door mutatie ongeveer 400 maal. Zorgvuldig en herhaaldelijk werd de constantheid nagegaan.

In 1893 werden eenige *nanella*'s waarvan de voorouders in 1889 als mutanten uit *Oenothera laevifolia* waren ontstaan, met hun eigen stuifmeel bestoven. Het zaad leverde 440 planten, die alle het *nanella*-kenmerk droegen.

In 1895 werden op gelijke wijze twintig *nanella*'s behandeld, die zelf als mutant uit *Lamarckiana* waren te voorschijn gekomen. Zij leverden 2463 nakomelingen; alle waren *nanella*'s.

Met even gunstigen uitslag werd de proef in 1896 met 18000 planten herhaald. Drie kiemplanten vertoonden, te gelijk met de *nanella*-kenmerken, die van *Oenothera oblonga*, één die van *O. elliptica*.

Uit deze proeven werd de gevolgtrekking gemaakt, dat *Oenothera nanella* reeds terstond bij haar optreden bij uitzaaiing volkomen constant is.

In 1905 werden tusschen de *nanella*'s planten gevonden, die, hoewel dwergen, van den zooeven beschreven vorm verschilden door het bezit van langgerekte stengelleden en smaller, gesteelde bladeren. Tevens waren daarbij planten, die, naast deze slanke stengels, één of meer gedrongen gebouwde takken droegen.

In vergelijking met den nieuwen vorm, heeft de eerste onmiskenbaar een misvormd uiterlijk. De vraag drong zich daardoor op den voorgrond, of deze dimorphie van stengels en bladeren wellicht geweten moet worden aan den invloed van organismen in het lichaam der plant. Eene afwijking, die vaak optreedt bij de bloemknoppen

van *Oenothera nanella*, en die in haar verloop in „die Mutations-theorie” nauwkeurig omschreven is, geeft ons krachtigen steun hier te denken aan den invloed van een parasiet, die de plant wel niet doodden kan, maar niettemin in haar ontwikkeling zéér hindert:

„Auf einjährigen Exemplaren sind die Blüten vielfach unvollständiger Ausbildung ausgesetzt. Aber meist nur eine oder wenige Blumen pro Pflanze. Bisweilen fehlt der Blütenstaub oder er ist nur in spärlicher Menge entwickelt; ziemlich oft können die Narben sich nicht öffnen und bleiben somit zu einem vierseitig-conischen Gebilde zusammengefügt. Dieses Gebilde ist oft nur sehr klein und so schwach, dass es vor der Bestäubung sich schwärzt und vertrocknet. Oder der Griffel ist zu kurz, bisweilen kaum aus der Blütenröhre hervorragend.

„Sehr auffallend ist der schiefe Stand der Blütenknospen auf den Kelchröhren. Die Kelchzipfel mitsamt der Krone sind dann an ihrem Grunde gebogen; im ersteren Fall derart, dass sie senkrecht auf der Röhre stehen. Das Öffnen des Kelches ist dadurch erschwert und geht in abnormaler, oft mangelhafter Weise vor sich. Die Blumenblätter entfalten sich unvollständig und die Geschlechts-theile sind meist mehr oder weniger steril.

„Alle diese Abweichungen sieht man namentlich an den untersten Blüten der Traube, zumal wenn die Pflanze bereits bei einer Stengelhöhe von 10—15 cm. zu blühen anfängt. Aber auch bei der gewöhnlichen *Lamarckiana* misslingen oft mehrere von den untersten Blüten. *Wächst die Nanella durch diese Periode hindurch und wird sie dabei auffallend kräftiger, so bildet sich nach einer kürzeren oder längeren blüthenlosen Zwischenstrecke in der Traube meist eine rolle und schöne Krone grosser Blumen aus. Diese erhebt sich auf dem dünnen, wenig beblätterten blüthenlosen Stengeltheil hoch über die untere Hälfte der Inflorescenz empor. Aber bei Weitem nicht alle Individuen werden hinreichend stark, um solches zu erreichen.*

„Handelt es sich somit darum, die Zwerge in möglichst schöner Entwicklung und voller Blütenpracht zu cultiviren, so empfiehlt es sich, sie stets durch späte Aussaat zu zweijährigen Exemplaren zu erziehen”.¹⁾

Uit het cursief gedrukte gedeelte van bovenstaand citaat is te zien, dat, bij objectieve beschouwing, de gedrongen gebouwde *Oenothera*

1) Die Mutationstheorie, Bd. I. h'adz. 267 en 268.

In de Engelsche uitgave is Vol. I. p. 376 toegevoegd: „These and other malformations of the dwarfs are often due to a disease and as such to a large degree dependent on outer circumstances (note of 1908).”

Deze noot berust op het hier gepubliceerde onderzoek.

nanella zich gedraagt, alsof zij bij hare ontwikkeling een weerstand te overwinnen heeft. Gelukt haar dit, dan vormt zich een normale top aan den bloemtros.

Snijdt men den stengel van eene misvormde *nanella* door, dan vindt men op een deel der doorsnede de elementen groepsgewijze gevuld door eene zwarte massa. Het sterkst vertoonen dit de elementen van het secundaire hout; deze zijn op dwarsdoorsnede inwendig vaak geheel zwart. Men vindt deze vulling zoowel bij de houtvezels als bij de mergstraalcellen; de houtvaten zijn in den regel niet geheel gevuld, maar langs den wand ligt hier in den vorm van een segment vaak eene gelijksoortige stof. Evenzoo is het gesteld met de cellen van het merg, het schorsparenchym, het collenchym en de opperhuid. Niettemin kunnen in het schorsparenchym ook geheel gevulde cellen aangetroffen worden.

In den wortel van *Oenothera nanella* vertoont zich het verschijnsel op gelijke wijze.

Beziet men de doorsnede met sterker vergrooting, dan lost zich de zwarte massa op in een groot aantal zwarte stippen, die zich blijkbaar bevinden in eene gelei-achtige middenstof. Bij voldoende sterke vergrooting treft men, vooral dáár, waar de massa uit doorgesneden cellen zich min of meer over het praeparaat uitgebreid heeft, gemakkelijk plaatsen aan, waar de zwarte stippen zoover uiteenliggen, dat zij afzonderlijk zijn waar te nemen.

Ieder individu heeft om zich eene lichtere zone. Ten deele zijn de individuen paarsgewijze of bij viertallen gerangschikt. Niet alle individuen zijn even donker van kleur, het meerendeel evenwel is ook bij de sterkste belichting ondoorzichtend.

De uitwendige kenmerken laten geen twijfel of het waargenomen organisme in de weefsels van *Oenothera nanella*, is eene bacterie van het geslacht *Micrococcus*. Zij verschilt van de *Micrococcus* uit het tandsljm noch in vorm, noch in grootte, doch is in den regel donkerder van kleur.

Naar het schijnt vormt de *Micrococcus* eene zoëgloea, welke den geheelen vezel of de cel vult. In de praeparaten is in den regel eenige ruimte tusschen celwand en inhoud, doch deze laatste heeft vaak zóó nauwkeurig denzelfden veelhoekigen omtrek als de cel, dat niet betwijfeld kan worden, dat de inhoud zich eerst onder invloed van het praepareeren van den wand teruggetrokken heeft.

Andere organismen dan deze *Micrococcus* werden tot nu toe niet aangetroffen.

Hoewel dus eenerzijds de *Oenothera nanella* in haar gedrongen

stengels zich als eene zieke plant voordoet, en anderzijds in hare weefsels een organisme is aangetroffen, dat zeer wel de oorzaak daarvan kan zijn, blijft het bewijs, dat inderdaad *Micrococcus* de bewerker van de misvorming is, nog te leveren. Tevens wacht de vraag, hoe het te verklaren is, dat bij het ontstaan door mutatie van *Oenothera nanella* steeds de zieke vorm optrad en eerst vele jaren later de eerste normale plant werd gevonden, op nadere beantwoording.

De bijgevoegde afbeelding van eene *Oenothera nanella* met tweecërlei stengels is vervaardigd naar eene photographie, op 27 Sept. 1905 in den Hortus botanicus te Amsterdam van eene geheel uitgegroeide plant genomen. De meest rechte stengel was 33 c.M. hoog. In het midden ziet men een zieken stengel, met dicht opeengedrongen bladeren. De top van dezen stengel is van een ander exemplaar naar de natuur bijgeteekend, ten einde het verschil tussehen normale en abnormale bloemknoppen te laten zien. Bij den zieken stengel is de kelkbuis gekromd, zoodat de kelk en de bloemkroon een bijna rechten hoek met de as van het vruchtbeginsel maken, terwijl bij den normalen stengel de verschillende deelen van den bloemknop in elkaars verlengde liggen.

De zieke stengels hebben veel korter en tevens dikker geledingen, dan de gezonde stengels.

De bladeren van de ware *Oenothera nanella* gelijken volkomen op die van *O. Lamarckiana*, de grootte daargelaten. Die van de afwijkende stengels daarentegen zijn voorzien van zéér korte, broze bladstelen en breede, korte bladschijven.

Gezonde stengels zijn tot heden slechts bij uitzondering waargenomen. Eensdeels moge dit zijn verklaring vinden in het feit, dat de normale *nanella* geheel op eene dwergachtige *Lamarckiana* gelijkt, en bij de gevolgte wijze van beoordeeling als jonge kiemplant voor deze laatste kan zijn aangezien. Anderdeels moet in rekening gebracht worden, dat het niet is mogen gelukken zaad te winnen van gezonde stengels. Deze treden in den regel aan eene plant later op, en bloeien te laat om hunne vruchten tot rijpheid te brengen. De uit zaad verkregen *nanella's* hebben dus alle zieke ouders gehad, en de mogelijkheid is niet uitgesloten, dat zij, zoolal niet den *Micrococcus* zelf, dan toch de vatbaarheid voor de aanvallen van dit organisme van hunne ouders hebben mede gekregen.

Zoolang het niet zal gelukt zijn, volkomen gezonde *nanella's* te kweeken, zal het niet mogelijk zijn, door infectieproeven uit te maken of inderdaad de *Micrococcus* de oorzaak van het ziekteverschijnsel is.

VERKLARING DER PLAAT.

- Fig. 1. *Oenothera nanella*, dimorphe plant ($\times \frac{2}{5}$).
 Fig. 2. Dwarsdoorsnede door een stengel, nabij het cambium ($\times 355$).
 Fig. 3. Dwarsdoorsnede door een stengel; eenige houtvezels nabij het primaire hout ($\times 1730$).

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer I. E. J. BROUWER: „*Over één-éénduidige, continue transformaties van oppervlakken in zichzelf.*” (3^{de} mededeeling¹).

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

In de tweede mededeeling zijn verschillende punten van het betoog slechts kort aangeduid. Voor een volledige uiteenzetting zijn eenige op zich zelf staande ontwikkelingen noodig; daartoe gaan we thans over.

§ 1.

Definities en hulpstellingen.

Op een oppervlak verstaan we onder een *eindig continuum* een samenhangende verzameling, die al haar grenspunten bevat, en waarin elke fundamenteaalreeks van punten een grenspunt bezit.

Onder een *continuum* verstaan we een samenhangende en al haar grenspunten bevattende verzameling, die voor elke twee harer punten een die beide punten bevattend eindig deelcontinuum bezit.

Een eindig continuum met een enkel restgebied noemen we, zoo dat restgebied voor de analysis situs het karakter bezit van het restgebied eener trematuur, een *circulair continuum*.

Een continuum met een enkel restgebied, dat voor de analysis situs met het oppervlak zelf gelijkwaardig is, noemen we een *parabolisch continuum*.

Zooewel een circulair* als een parabolisch continuum bezit de eigenschap, zich tezamen met een zekere omgeving één-éénduidig en continu te laten afbeelden op een deelgebied van een Cartesiaansch vlak. Daar ligt dan het circulaire continuum geheel in het eindige, het parabolische continuum strekt zich uit tot het oneindige. Beide bepalen er een enkel restgebied, en bezitten er een enkelen omtrek van *bereikbare* punten, die voor het circulaire continuum cyclisch geordend, voor het parabolische continuum lineair geordend liggen.

¹) Zie deze Verslagen, Dl. XVII (2), p. 741, Dl. XVIII (1), p. 106. Vgl. ook het inmiddels verschenen overzicht: „*Ueber eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich*” (Mathem. Annalen, Bd. 69, p. 176), waar het eindresultaat dezer onderzoekingen is geformuleerd.

Een eindig blijvende vector in het Cartesiaansche vlak, waarvan het beginpunt een enkelvoudigen kurvenboog a aflegt, en het eindpunt als continue functie van het beginpunt een anderen enkelvoudigen kurvenboog b , beginnend in P en eindigend in Q , beschrijft als integraal der oneindig kleine richtingsveranderingen een zekeren *totalen draaiingshoek*.

Vervangen we b door een anderen enkelvoudigen kurvenboog b' , die eveneens in P begint en in Q eindigt, dan gelden de beide volgende stellingen:

HULPSTELLING 1. *Heeft a met $b + b'$ geen punt gemeen, en wordt a door $b + b'$ niet van het oneindige gescheiden, dan brengt de wijziging van b tot b' geen verandering in den totalen draaiingshoek van den vector.*

In dat geval kunnen we n.l. een gesloten kromme construeeren, die a in haar buitengebied, $b + b'$ in haar binnengebied bevat, en kunnen de wijziging van b tot b' op continue wijze, en geheel in dat binnengebied uitvoeren. De totale draaiingshoek van den vector kan dan eenerzijds slechts continue wijzigingen ondergaan, en anderzijds slechts met veelvouden van 2π verspringen; hij blijft dus onveranderd.

HULPSTELLING 2. *Vormen b en b' samen een enkelvoudige gesloten kromme, die a in haar binnengebied bevat, dan neemt door de wijziging van b tot b' de totale draaiingshoek van den vector met een bedrag van 2π toe of af, naarmate de positieve omloopszin der gesloten kromme correspondeert met een beweging van P naar Q langs b' of langs b .*

Wanneer n.l. van een vector het eindpunt een enkelvoudige gesloten kromme éénmaal rondloopt in positieven zin, terwijl het beginpunt als continue functie van het eindpunt een in zichzelf terugkeerende geheel binnen die gesloten kromme gelegen baan beschrijft, kunnen we door continue wijziging, waarbij de totale draaiingshoek van den vector niet verandert, de baan van het eindpunt veranderen in een cirkel, en die van het beginpunt reduceeren tot het middelpunt van den cirkel. Voor en na deze verandering is dus de totale draaiingshoek 2π , waaruit hulpstelling 2 onmiddellijk volgt.

§ 2.

Het invariante punt van het circulaire continuum.

We denken ons een tweezijdig oppervlak, dat met invariante indicatrix zoodanig één-éénduidig en continu in zichzelf getransformeerd wordt, dat daarbij een circulair continuum φ' in zichzelf overgaat.

We beelden φ' te zamen met een zekere omgeving ψ' één-éénduidig

en continu af op een deelgebied van een Cartesiaansch vlak, waarbij ze achtereenvolgens in φ en ψ overgaan, en nemen aan, dat φ' geen voor de transformatie invariant punt bezit.

Dan kunnen we g omgeven met een zoodanig op een afstand ε approximeerend¹⁾ en geheel tot ψ behoorend polygoon \mathfrak{Y} , dat ook het beeld van \mathfrak{Y} voor de transformatie geheel binnen ψ ligt, dat in elk punt op of binnen \mathfrak{Y} de lengte van den *transformatievector* (d.i. de vector, die van het punt naar zijn beeldpunt voor de transformatie voert) niet onder zeker minimum b daalt, en dat elk punt van \mathfrak{Y} zich met φ laat verbinden door een weg $< \frac{1}{32} b$.

Op \mathfrak{Y} kiezen we vervolgens de punten P_1, P_2, \dots, P_n , welke in deze volgorde in den zin van een positieven omloop op elkander volgen, en de eigenschap bezitten, dat in elken deelboog $P_k P_{k+1}$ (waartoe ook de boog $P_n P_1$ behoort) de afstand der eindpunten ligt tusschen $\frac{1}{8} b$ en $\frac{3}{8} b$, en de afstand van twee willekeurige zijner punten $\frac{3}{4} b$ niet overschrijdt²⁾. Trekken we nu uit elk punt P_k een

binnen \mathfrak{Y} liggenden weg $P_k R_k < \frac{1}{32} b$ naar φ , dan kan de enkelvoudige kurvenboog $R_k P_k P_{k+1} R_{k+1}$ zijn beeld voor de transformatie $q_k \tau_k \tau_{k+1} q_{k+1}$ niet snijden.

De bogen $R_k P_k P_{k+1} R_{k+1}$ noemen we *skeletbogen*; de bogen $q_k \tau_k \tau_{k+1} q_{k+1}$ *beeldskeletbogen*.

Stellen we den totalen draaiingshoek, beschreven door den transformatievector bij een positieven omloop van \mathfrak{Y} , voor door \mathfrak{D} , en den totalen draaiingshoek, beschreven door een vector, waarvan het beginpunt loopt langs den skeletboog $P_k P_{k+1}$, en het eindpunt als continue functie van het beginpunt langs den beeldskeletboog $\tau_k \tau_{k+1}$, door α_k , dan hebben we:

$$\mathfrak{D} = \Sigma \alpha_k.$$

Door τ_k zullen we voorstellen een zoodanig punt van den beeldskeletboog $\tau_k q_k$, dat, zoo deze boog \mathfrak{Y} niet snijdt, met τ_k , en anders met zijn laatste snijpunt met \mathfrak{Y} identiek is. Verstaan we dan onder β_k den totalen draaiingshoek, beschreven door een vector, waarvan het beginpunt loopt langs den skeletboog $P_k P_{k+1}$, en het eindpunt als continue functie van het beginpunt langs den beeldskeletboog $\tau_k \tau_{k+1}$, dan hebben we eveneens:

$$\mathfrak{D} = \Sigma \beta_k.$$

¹⁾ SCHOENFLIES, Bericht über die Mengenlehre II, p. 104.

²⁾ SCHOENFLIES, Bericht über die Mengenlehre II, p. 183.

We onderscheiden nu drie gevallen :

1°. Op den omtrek van φ liggen de segmenten $R_k R_{k+1}$ en $Q_k Q_{k+1}$ buiten elkaar (zie fig. 1). Dan kunnen τ_k en τ_{k+1} verbonden worden door een (in de figuur gestreepten) enkelvoudigen kurvenboog, die òn binnen \mathfrak{P} , òn binnen het tusschen φ en den beeldskeletboog $Q_k \tau_k \tau_{k+1} Q_{k+1}$ ingesloten gebied ligt, en dien we zullen noemen den

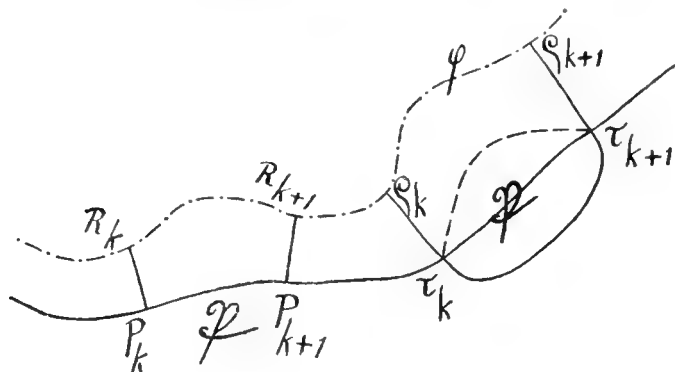


Fig. 1.

baanboog $\tau_k \tau_{k+1}$. Deze baanboog scheidt met den beeldskeletboog $\tau_k \tau_{k+1}$ tezamen den skeletboog $P_k P_{k+1}$ niet van het oneindige.

Stellen we dus den totalen draaiingshoek, beschreven door een vector, waarvan het beginpunt loopt langs den skeletboog $P_k P_{k+1}$, en het eindpunt als continue functie van het beginpunt langs den baanboog $\tau_k \tau_{k+1}$, voor door γ_k , dan hebben we in dit eerste geval :

$$\beta_k = \gamma_k.$$

2°. Op den omtrek van φ is het segment $R_k R_{k+1}$ een deel van het segment $Q_k Q_{k+1}$. Ook dan kunnen we een (in fig. 2 gestreepten) zoowel binnen \mathfrak{P} , als binnen het tusschen φ en den beeldskeletboog

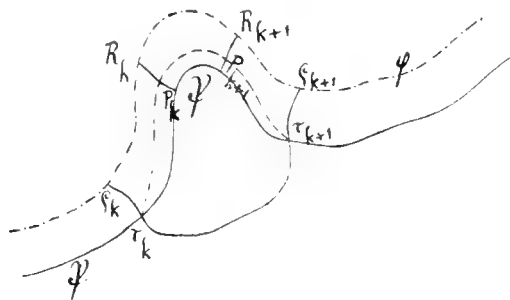


Fig. 2.

$Q_k \tau_k \tau_{k+1} Q_{k+1}$ ingesloten gebied liggenden baanboog $\tau_k \tau_{k+1}$ construeeren. Deze vormt nu echter met den beeldskeletboog $\tau_k \tau_{k+1}$ een enkelvoudige gesloten kromme, die den skeletboog $P_k P_{k+1}$

binnen zich bevat, en wiens positieve omloopszin correspondeert met een beweging van τ_k naar τ_{k+1} langs den beeldskeletboog $\tau_k \tau_{k+1}$.

In dit tweede geval hebben we dus, den hoek γ_k op dezelfde wijze als in het eerste geval definieerende:

$$\beta_k = \gamma_k + 2\pi.$$

3°. Op den omtrek van \mathcal{G} is het segment $q_k q_{k+1}$ een deel van het segment $R_k R_{k+1}$ (zie fig. 3). Dan ligt de beeldskeletboog $q_k \tau_k \tau_{k+1} q_{k+1}$ geheel binnen \mathcal{P} , en we kiezen als baanboog $\tau_k \tau_{k+1}$

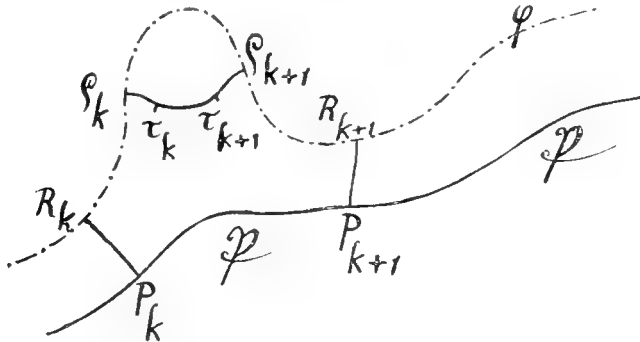


Fig. 3.

den beeldskeletboog $\tau_k \tau_{k+1}$ zelf. Den hoek γ_k op dezelfde wijze als in het eerste en tweede geval definieerende, hebben we dus in dit derde geval:

$$\beta_k = \gamma_k.$$

Nu kunnen we echter $\Sigma \gamma_k$ opvatten als den totalen draaiingshoek, beschreven door een eindig blijvenden vector, waarvan het beginpunt \mathcal{P} in positieven zin rondloopt, en het eindpunt als continue functie van het beginpunt een nergens buiten \mathcal{P} tredende in zichzelf terugkeerende baan­kromme aflegt, zoodat we hebben:

$$\Sigma \gamma_k = 2\pi.$$

Hieruit volgt in verband met het bovenstaande:

$$\Sigma \beta_k = 2n\pi,$$

waarin n een geheel positief getal > 1 voorstelt.

Derhalve kan ook \mathcal{P} niet gelijk aan nul zijn, waaruit volgt, dat de distributie der transformatievectoren binnen \mathcal{P} minstens één singulier punt moet bezitten, m. a. w. dat, in strijd met de aanname aan het begin dezer §, binnen \mathcal{P} minstens één voor de transformatie invariant punt moet liggen.

Hiermede is bewezen:

STELLING 1. *Bij een één-eenduidige, continue transformatie met invariante indicatrix van een tweezijdig oppervlak in zichzelf bevat een invariant circulair continuum minstens één invariant punt.*¹⁾

¹⁾ Vgl. Mathem. Annalen, Bd. 69, p. 178; deze Verslagen XVIII (1), p. 115.

Het invariante punt van het parabolische continuum.

We denken ons een tweezijdig oppervlak, dat met invariante indicatrix zoodanig één-éénduidig en continu in zichzelf getransformeerd wordt, dat daarbij een nergens dicht parabolisch continuum φ' in zichzelf overgaat.

We nemen aan, dat φ' geen voor de transformatie invariant punt bezit. Dan kan zijn omtrek ook geen invarianten Schnitt bevatten; deze toch zou een circulair continuum zijn, en dus volgens stelling I aanleiding geven tot een invariant punt.

We beelden φ' tezamen met een zekere omgeving ψ' één-éénduidig en continu af op een deelgebied van een Cartesiaansch vlak, waarbij ze achtereenvolgens in φ en ψ overgaan. Alle in het volgende in het Cartesiaansche vlak te construeeren figuren, en evenzoo hun beelden en hun „tegenbeelden” (d. w. z. hun beelden voor de reciproke transformatie) onderstellen we in ψ te liggen. We onderstellen verder, dat voor een positieven omloop van den omtrek van φ elk bereikbaar punt aan zijn beeldpunt voorafgaat.

We omgeven φ met een fundamenteaalreeks van binnen elkaar liggende, op steeds afnemende afstanden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ approximeerende polygonale lijnen $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots$ en leggen naar een op den omtrek van φ liggend bereikbaar punt A een weg w , die alle Ψ_k 's éénmaal, en niet meer dan éénmaal snijdt, en $\leq 4\varepsilon_1$ is. ¹⁾

Onder een *omtrekdomein* van φ verstaan we een zoodanig segment van het lineaire ordetype zijner bereikbare punten, dat geheel buiten zijn beeldsegment ligt, doch waarvoor elke uitbreiding die eigenschap doet verloren gaan.

Laten X en Y zijn twee bereikbare punten op den omtrek van φ , welke door A worden gescheiden, terwijl de volgorde XAY correspondeert met een positieven omloopszin, en zoowel tusschen X en A , als tusschen A en Y ten minste drie buiten elkaar liggende omtrek-domeinen bestaan.

Laat B zijn een zoodanig voor een positieven omloopszin aan X voorafgaand, en een eindigen afstand p van het omtreksegment XY bezittend bereikbaar punt van φ , dat tot de grens der beide door w tusschen φ en Ψ_1 bepaalde gebieden behoort.

Verstaan we verder onder U een willekeurig bereikbaar punt van den omtrek van φ , wiens afstand van B niet grooter is dan ε_1 , dan

¹⁾ Vgl. SCHOENFLIES, Bericht über die Mengenlehre II, p. 127; L. E. J. BROUWER, „Zur Analysis Situs”, Mathem. Annalen, Bd. 68, p. 428.

onderstellen we ε_1 zóó klein, dat, onafhankelijk van de keuze van U , in alle punten, wier afstand van het omtreksegment $BU \leq 32 \varepsilon_1$ is, de lengte van den transformatievector $\geq 64 \varepsilon_1$ is, terwijl van een enkelvoudigen, tusschen twee bereikbare punten van den omtrek van φ loopenden kurvenboog $\leq 32 \varepsilon_1$, indien een zijner eindpunten tot het omtreksegment BU behoort, het beeld en het tegenbeeld buiten elkaar liggen.

Laat C zijn een zoodanig voor een positieven omloopszin op Y volgend bereikbaar punt van φ , dat van B een afstand $< \rho$, en $< \frac{1}{4} \varepsilon_1$ bezit.

Zij S_1 de eerste niet aan B voorafgaande, positief gerichte omtrek-schnitt, voorbij welken tot aan A alle bereikbare punten van φ van het oneindige uit kunnen worden bereikt langs wegen, die het rechte lijnsegment BC niet snijden.

We kiezen dan (zie fig. 4) op de polygonale lijn Ψ_1 een boog D_1E_1 , waarvoor de afstand der eindpunten $8 \varepsilon_1$, en de afstand van twee

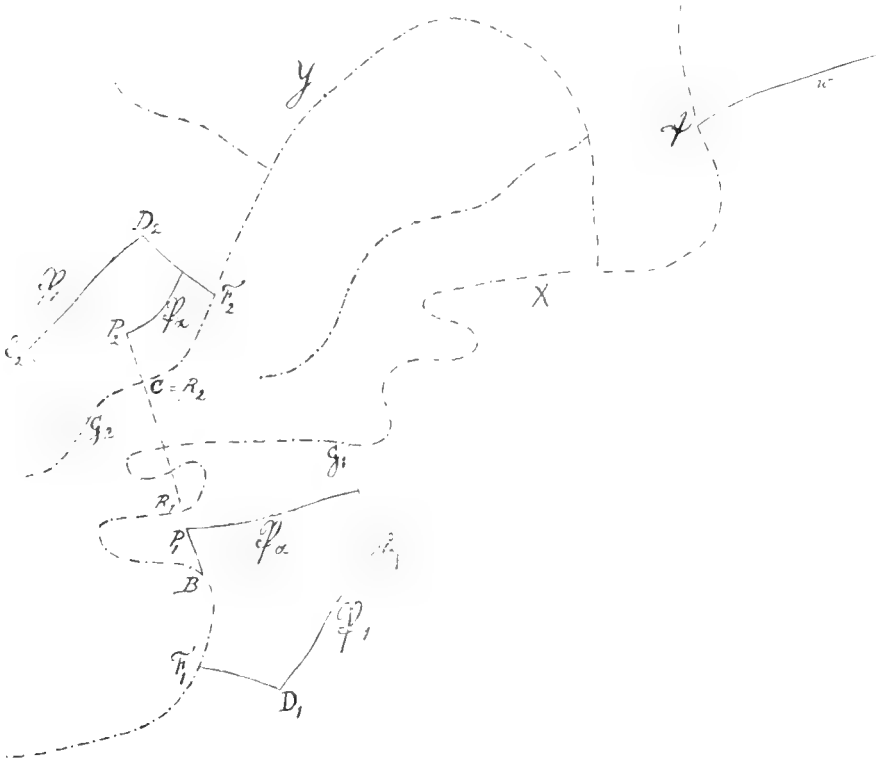


Fig. 4.

willekeurige zijner punten $< 16 \varepsilon_1$ is, terwijl zich uit D_1 en E_1 het lijnsegment BC niet, en voor $\alpha > m$ de polygonale lijn Ψ_2 slechts

eenmaal snijdende wegen D_1F_1 en $E_1G_1 < 2\varepsilon_1$ naar φ laten leggen, waartusschen de Schnitt S_1 ligt ingesloten. We mogen ε_1 zoo klein onderstellen, dat niet alleen de boog $F_1D_1E_1G_1$, maar ook het beeld daarvan *den weg w niet snijdt*.

We bepalen nu een approximeerende polygonale lijn Ψ_1 ($r_1 > m$), die de volgende eigenschap bezit:

Zoo een deel van het omtreksegment F_1G_1 door het lijnsegment BC van het oneindige wordt gescheiden, snijdt zij tusschen D_1F_1 en E_1G_1 het lijnsegment BC ; het laatste snijpunt, dat BC daar ter plaatse met Ψ_1 heeft, stellen we dan voor door P_1 ;

in het tegenovergestelde geval snijdt zij een naar B voerenden, D_1F_1 en E_1G_1 niet snijdenden weg $< \frac{1}{8}\varepsilon_1$; haar laatste snijpunt met dien weg stellen we dan voor door P_1 .

Zij S_2 de laatste niet voorbij C liggende, negatief gerichte omtrekschnitt zoodanig dat tusschen A en S_2 alle bereikbare punten van φ van het oneindige uit kunnen worden bereikt langs wegen, die het lijnsegment P_1C niet snijden.

We kiezen dan op de polygonale lijn Ψ_1 een boog D_2E_2 , waarvoor de afstand der eindpunten $8\varepsilon_1$, en de afstand van twee willekeurige zijner punten $< 16\varepsilon_1$ is, terwijl zich uit D_2 en E_2 zoodanige wegen D_2F_2 en $E_2G_2 < 2\varepsilon_1$ naar φ laten leggen, die het lijnsegment P_1C niet, en voor $\alpha > m$ de polygonale lijn Ψ_2 slechts eenmaal snijden, en waartusschen de Schnitt S_2 ligt ingesloten. We mogen ε_1 zoo klein onderstellen, dat niet alleen de boog $F_2D_2E_2G_2$, maar ook zijn beeld en zijn tegenbeeld *den weg w niet snijden*.

We bepalen verder een approximeerende polygonale lijn Ψ_2 ($r_2 > m$), die de volgende eigenschap bezit:

Zoo een deel van het omtreksegment F_2G_2 door het lijnsegment P_1C van het oneindige wordt gescheiden, snijdt zij tusschen D_2F_2 en E_2G_2 het lijnsegment P_1C ; het eerste snijpunt, dat P_1C daar ter plaatse met Ψ_2 heeft, stellen we dan voor door P_2 ;

in het tegenovergestelde geval snijdt zij een naar C voerenden, D_2F_2 en E_2G_2 niet snijdenden weg $< \frac{1}{8}\varepsilon_1$; haar eerste snijpunt met dien weg stellen we dan voor door P_2 .

Ten slotte leggen we zoowel aan Ψ_1 als aan Ψ_2 de voorwaarde op, dat van hun tusschen D_1F_1 en E_2G_2 bevat gedeelte zoowel het beeld als het tegenbeeld binnen Ψ_1 , en binnen het beeld van Ψ_1 ligt.

In het lijnsegment BC , eventueel gecompleteerd met de er aan toegevoegde, naar B resp. C voerende wegen, ligt nu een P_1 en P_2 verbindende, den tusschen P_1 en w ingesloten boog van Ψ_1 , en den tusschen P_2

en w ingesloten boog van \mathfrak{V}_2 niet snijdende (in fig. 4 gestreepte) enkelvoudige kurvenboog $< \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1$, waarvan we het eerste resp. laatste snijpunt met \mathfrak{q} voorstellen door R_1 resp. R_2 .

Onder het *skeletboogje* $R_1 P_1 G_1$ zullen we verstaan den enkelvoudigen kurvenboog, verkregen door van R_1 eerst den weg $R_1 P_1$ te volgen, dan \mathfrak{V}_1 tot aan haar snijpunt met $E_1 G_1$, en eindelijk den weg $E_1 G_1$, van dat laatste snijpunt af tot aan G_1 .

Dit skeletboogje $R_1 P_1 G_1$ ligt geheel buiten zijn beeldskeletboogje $\mathfrak{q}_1 \pi_1 \gamma_1$, welk beeldskeletboogje noch den weg w , noch den weg $E_1 G_1$ snijdt, terwijl de omtreksegmenten $R_1 G_1$ en $\mathfrak{q}_1 \gamma_1$ buiten elkaar liggen.

De boogjes $P_1 G_1$ en $\mathfrak{q}_1 \pi_1$ verbinden we (zie fig. 5) door een enkelvoudigen kurvenboog $K_1 L_1$, behoorende tot een approximeerende

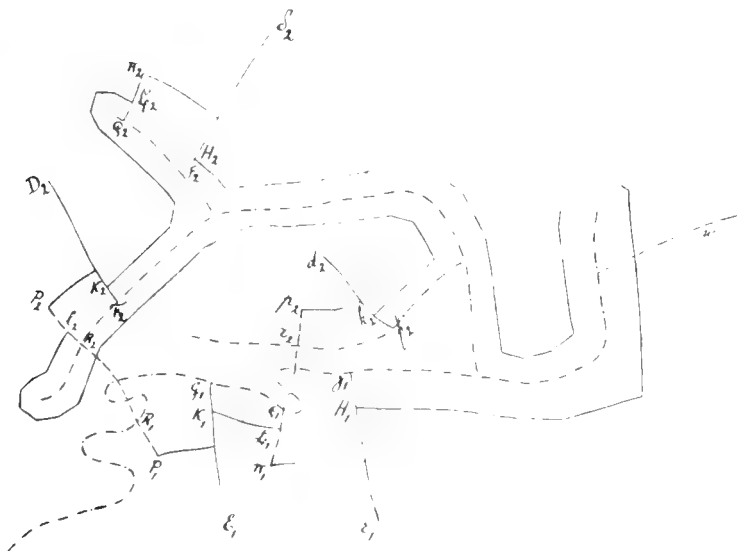


Fig. 5.

polygonale lijn \mathfrak{V}_1 ($r_1 > r_1'$), en buiten zijn eindpunten noch de skeletbogen $R_1 P_1 G_1$ en $\mathfrak{q}_1 \pi_1 \gamma_1$, noch de wegen w en $E_1 G_1$ snijdende.

Den boog $K_1 L_1$ verdeelen we in zoodanige deelbogen, dat voor elk daarvan de afstand der eindpunten ligt tusschen $4\varepsilon_1$ en $12\varepsilon_1$, en de afstand van twee willekeurige zijner punten niet grooter is dan $24\varepsilon_1$. Uit de deelpunten trekken we rechte lijnen $< \frac{3}{2} \varepsilon_1$ naar

\mathfrak{q} . Twee op elkaar volgende dezer wegen, tezamen met den tusschenliggenden deelboog van $K_1 L_1$ beschouwen we weer als skeletboog.

Onder het *skeletboogje* $R_2 P_2 F_2$ verstaan we den enkelvoudigen

kurvenboog, verkregen door van R_2 eerst den weg R_2P_2 te volgen, dan \mathfrak{P}_2 terug te loopen tot aan haar snijpunt met D_2F_2 , en ten slotte dezen weg tot aan F_2 af te loopen.

Dit skeletboogje $F_2P_2R_2$, zijn beeld $f_2p_2r_2$, en zijn tegenbeeld $r_2\tau_2q_2$ liggen geheel buiten elkander, en snijden den weg w niet. Verder snijdt $r_2\tau_2q_2$ nòch den weg D_2F_2 , nòch zijn beeld d_2f_2 , snijdt $f_2p_2r_2$ nòch den weg D_2F_2 , nòch zijn tegenbeeld d_2f_2 , en snijdt $F_2P_2R_2$ nòch den weg d_2f_2 , nòch den weg d_2f_2 .

De boogjes P_2F_2 en $q_2\tau_2$ verbinden we door een enkelvoudigen kurvenboog K_2L_2 , behoorende tot een approximeerende polygonale lijn $\mathfrak{P}_2(\tau_2 > r_2)$, en buiten zijn eindpunten nòch de skeletbogen $R_2P_2F_2$, $q_2\tau_2r_2$ en $r_2p_2f_2$, nòch de wegen w , D_2F_2 , d_2f_2 en d_2f_2 , nòch zijn eigen beeld k_2l_2 snijdende.

De boogjes $\tau_1\gamma_1$ en τ_2r_2 verbinden we door een enkelvoudigen kurvenboog H_1H_2 , behoorende tot een approximeerende polygonale lijn $\mathfrak{P}_2(\tau > r_1 \text{ en } \tau > r_2)$, en buiten zijn eindpunten nòch de wegen E_1G_1 en D_2F_2 , nòch hun beelden $\epsilon_1\gamma_1$ en d_2f_2 , nòch de skeletbogen $R_1P_1G_1$, $q_1\tau_1\gamma_1$, $q_2\tau_2r_2$, $R_2P_2F_2$ en $r_2p_2f_2$, nòch de verbindingsbogen K_1L_1 , K_2L_2 en k_2l_2 snijdende.

Uit H_1H_2 en vandaar naar \mathcal{C} vertrekkende rechtlijnige wegen construeeren we ten slotte skeletbogen op dezelfde wijze als boven voor K_1L_1 is geschied.

We hebben nu een enkelvoudige gesloten kromme $P_1K_1L_1\tau_1H_1H_2\tau_2L_2K_2P_2R_2R_1P_1$, en na toevoeging van het beeld $\tau_1q_1r_2p_2$ van den gestreepten verbindingsboog $P_1R_1R_2P_2$ een tweede enkelvoudige gesloten kromme $\tau_1H_1H_2\tau_2L_2K_2P_2l_2k_2p_2r_2q_1\tau_1$ opgebouwd. Deze twee gesloten krommen hebben den boog $\tau_1H_1H_2\tau_2L_2K_2P_2$ gemeen, en deze boog heeft voor beide gesloten krommen denzelfden binnenkant, zoodat hij door de beide completeerende bogen $P_2R_2R_1P_1K_1L_1\tau_1$ en $P_2l_2k_2p_2r_2q_1\tau_1$ tezamen *niet van het oneindige wordt gescheiden*.

De eerste gesloten kromme stellen we voor door \mathcal{C} , en stellen ons ten doel, den totalen draaiingshoek te zoeken, die de transformatievector bij een positieven omloop van \mathcal{C} beschrijft.

Daartoe kunnen we gedurende het afleggen van den boog $P_1K_1L_1\tau_1H_1H_2\tau_2$ in de baan van het eindpunt van den transformatievector telkens een beeldskeletboog vervangen door een baamboog volgens de in § 2 uiteengezette methode, met de beperking, dat we hier steeds in het geval 1° dier § verkeereren. Na die vervanging ligt de baan van het vectoreindpunt nergens meer buiten \mathcal{C} , terwijl haar eerste en laatste punt dezelfde zijn gebleven, en de beschreven totale draaiingshoek niet is veranderd.

Vervolgens kunnen we den totalen draaiingshoek, die gedurende het afleggen van den boog $\pi_2 L_2 K_2 P_2$ wordt beschreven, op grond van § 1 ook verkrijgen, door van een vector eerst het beginpunt den boog $\pi_2 L_2 K_2 P_2$, en het eindpunt als continue functie van het beginpunt den boog $P_2 R_2 R_1 P_1 K_1 L_1 \pi_1$ te doen langsluopen; en vervolgens, terwijl het beginpunt in P_2 wordt vastgehouden, het eindpunt nog den boog $\pi_1 Q_1 P_2 P_2$ te doen afleggen.

Ten slotte kan men den totalen draaiingshoek, die gedurende het afleggen van den boog $P_2 R_2 R_1 P_1$ wordt beschreven, ook verkrijgen, door van een vector eerst, terwijl het beginpunt in P_2 wordt vastgehouden, het eindpunt langs $p_2 p_2 \pi_1$ te laten loopen, en dan, terwijl het eindpunt in π_1 wordt vastgehouden, het beginpunt langs $P_2 R_2 R_1 P_1$ te laten loopen.

De totale draaiingshoek van den transformatievector bij een positieven omloop van \mathcal{C} wordt dus verkregen, door eerst, zoolang het beginpunt van den vector langs den boog $P_1 K_1 L_1 \pi_1 H_1 H_2 \pi_2$ loopt, het eindpunt een zekere nergens buiten \mathcal{C} tredende baan te doen beschrijven; vervolgens, terwijl het beginpunt langs den boog $\pi_2 L_2 K_2 P_2$ loopt, het eindpunt den boog $P_2 R_2 R_1 P_1 K_1 L_1 \pi_1$ te doen volgen; en ten slotte, terwijl het beginpunt langs den boog $P_2 R_2 R_1 P_1$ loopt, het eindpunt in π_1 vast te houden.

In geen der drie gedeelten dezer beweging is dan het eindpunt van den vector buiten \mathcal{C} getreden, zoodat de beschreven totale draaiingshoek $+ 2\pi$ bedraagt, en de distributie der transformatievectoren, in strijd met de aanname, binnen \mathcal{C} minstens één singulier punt moet bezitten.

Hiermede is bewezen:

STELLING 2. *Bij een één-eenduidige, continue transformatie met invariante indicatrix van een tweezijdig oppervlak in zichzelf bevat een invariant nergens dicht parabolisch continuum minstens één invariant punt.*¹⁾

E R R A T A.

In de tweede mededeeling over dit onderwerp, deze Verslagen XVIII (1) p. 109 r. 6, en p. 110 r. 5 staat: gesloten kromme; lees: vrije omtrek p. 115 r. 22 en 30, en p. 117 r. 12 staat: *in zichzelf*; lees: *in zichzelf met invariante indicatrix*

p. 116 r. 14 v. o. staat: wordt het; lees: wordt het, indien zich niet een der gevallen van fig. 9 voordoet,

ibid. r. 7 v. o. staat: en; lees: en, zoo de samenhang niet kan worden opgeheven,

p. 117 r. 7—9 te schrappen: verder kunnen we overdekt,

¹⁾ Vgl. *Mathem. Annalen*, Bd. 69, p. 178.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer H. J. E. BETH over: „*De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen.*” (Derde gedeelte).

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

§ 1. In mijn proefschrift¹⁾ zijn onderzocht de schommelingen om een evenwichtsstand van een mechanisme met twee vrijheidsgraden bij het bestaan van een lineaire relatie tusschen de principale trillingsgetallen, voor welke relatie de coëfficiëntensom $S \leq 4$ is. In het volgende zal dit onderzoek worden uitgebreid tot een mechanisme met een willekeurig aantal vrijheidsgraden.

In de eerste plaats zullen we den invloed nagaan van een relatie tusschen twee der trillingsgetallen. Vervolgens zullen de relaties besproken worden, welke kunnen bestaan tusschen 3 of 4 der trillingsgetallen. Relaties tusschen meer dan 4 der trillingsgetallen vallen buiten beschouwing, aangezien we steeds $S \leq 4$ te denken hebben.

RELATIES TUSSEHEN TWEE DER TRILLINGSGETALLEN.

§ 2. We denken ons een mechanisme met k vrijheidsgraden. Tusschen de trillingsgetallen n_1 en n_2 van de principale coördinaten q_1 en q_2 bestaat de relatie:

$$\gamma n_1 = n_2 + \varrho,$$

waarin $\gamma = 1, 2$ of 3 . De overige $k-2$ principale trillingsgetallen n_3, n_4, \dots, n_k treden in de relatie niet op; er wordt bovendien ondersteld, dat er tusschen de k trillingsgetallen of tusschen enkele hunner geen zuivere of benaderde relatie bestaat behalve de zoeven genoemde.

Onder *storende termen van de eerste soort* in de bewegingsvergelijkingen zullen we termen verstaan, welke steeds storend zijn, ook als geen relatie bestaat. Bij substitutie van de bij eerste benadering aan te nemen uitdrukkingen voor de coördinaten komt uit zulk een term een term te voorschijn, die dezelfde periode en dezelfde phase heeft als de coördinaat, op welke de vergelijking, waarin de storende term voorkomt, meer in het bijzonder betrekking heeft. Deze storende termen zijn van de orde h^2 of hooger.

Onder *storende termen van de tweede soort* verstaan we zoodanige,

¹⁾ Amsterdam, 1910; ook: Versl. der Kon. Ak. van Wet. p. 634—650, en p. 722—738 (1910); Archives Néerlandaises, Série II, Tome XV, p. 246—283 (1910).

welke hun storende eigenschap aan de bestaande relatie danken. Bij substitutie als boven komt uit zulk een term een term te voorschijn, welke met de coördinaat in periode, maar niet in phase overeenstemt. Deze storende termen zijn van de orde h^{S-1} of hooger.

§ 3. $S = 3$ ($2n_1 = n_2 + \varrho$). Er treden in het algemeen storende termen van de tweede soort van de orde h^2 op. De storende termen van de eerste soort kunnen dus, omdat ze minstens van de orde h^3 zijn, en we alleen de storende termen van de laagste orde in de vergelijkingen opnemen, worden weggelaten. De storende termen van de orde h^3 treden alleen op in de vergelijkingen voor q_1 en q_2 , en zij bevatten geen andere coördinaten dan q_1 en q_2 . Daardoor krijgen deze twee vergelijkingen, voor zoover ze moeten worden beschouwd om tot de eerste benadering te komen, dezelfde gedaante als we vroeger hebben gevonden voor een willekeurig mechanisme met slechts twee vrijheidsgraden. De coördinaten q_1 en q_2 gedragen zich dus alsof zij de eenige coördinaten waren. Aangezien in de vergelijkingen voor q_3, q_4, \dots, q_k geen storende termen van de orde h^2 voorkomen, gedragen zich deze coördinaten bij eerste benadering, alsof er geen relatie bestond.

§ 4. $S = 4$ ($3n_1 = n_2 + \varrho$). Beide soorten van storende termen zijn minstens van de orde h^3 . Storende termen van de tweede soort van de orde h^3 treden alleen op in de vergelijkingen voor q_1 en q_2 en zij bevatten geen andere coördinaten dan q_1 en q_2 ; het zijn dus dezelfde termen als die, welke in het geval $S = 4$ bij een mechanisme met twee vrijheidsgraden als storende termen der tweede soort optreden.

Echter is het duidelijk, dat storende termen van de eerste soort van de orde h^3 in alle vergelijkingen voorkomen, en dat zij even zeer de coördinaten q_3, \dots, q_k als q_1 en q_2 zullen bevatten. We herleiden ze op de volgende wijze.

In de eerste vergelijking zijn storende termen van de eerste soort van de orde h^3 die met: $q_1^3, q_1^2 \ddot{q}_1, q_1 \dot{q}_1^2, q_1 q_2^2, q_1 q_3^2, \dots, q_1 q_k^2, \ddot{q}_1 q_2^2, \ddot{q}_1 q_3^2, \dots, \ddot{q}_1 q_k^2, q_1 \dot{q}_2^2, q_1 \dot{q}_3^2, \dots, q_1 \dot{q}_k^2, q_1 q_2 q_3, q_1 q_3 q_3, \dots, q_1 q_k q_k$.

Wanneer we als oplossing bij eerste benadering nemen

$$q_r = \frac{\sqrt{a_r}}{n_r} \cos(n_r t + 2n_r \beta_r) \quad (r = 1, 2, 3, \dots, k)$$

dan mogen we in de termen van hooger orde \ddot{q}_r vervangen door $-n_r^2 q_r$, en \dot{q}_r^2 door $a_r - n_r^2 q_r^2$. Dan behouden we als storende termen der eerste soort in de eerste vergelijking alleen die met

$$a_r q_1, q_1^3, q_1 q_2^2, q_1 q_3^2, \dots, q_1 q_k^2.$$

We vervangen dan verder $q_1 q_2^2$ door $\frac{a_2}{2n_2^2} q_1$ enz.

Herleiden we op deze wijze de storende termen der eerste soort ook in de overige vergelijkingen, dan vinden we dat deze termen in de verschillende vergelijkingen de afgeleiden zijn, resp. naar q_1, q_2, \dots, q_k van

$$\sum_{r=1}^{r=k} A_r q_r^4 + \sum_{r=1}^{r=k} \sum_{s=1}^{s=k} B_{rs} a_r q_s^2,$$

waarin A_r en B_{rs} konstanten voorstellen.

We hebben dus aangetoond dat er een functie bestaat, waarvan de storende termen in de vergelijkingen de afgeleiden zijn. Schrijven we haar als functie der a 's, β 's en t en laten daarna de termen weg, welke t expliciet bevatten, dan vinden we:

$$-R = \chi_2(a_1, a_2, \dots, a_k) + q'h^2 a_2 + m_1 a_1 \sqrt{a_2} \cos \delta n_1 (\beta_1 - \beta_2).$$

Hierin is χ_2 een homogene kwadratische functie der a 's; de term $q'h^2 a_2$ is opgenomen om op de bekende wijze met de relatierest rekening te houden.

De a 's en β 's moeten nu als functien van t worden bepaald met behulp van het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\dot{a}_r = \frac{\partial R}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r = -\frac{\partial R}{\partial a_r} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, k).$$

We merken onmiddellijk op, dat ook thans:

$$\dot{a}_1 = -\dot{a}_2.$$

Derhalve

$$a_1 + a_2 = \text{konstant.}$$

Uit de afwezigheid van $\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_k$ in R blijkt dat:

$$\dot{a}_3 = \dot{a}_4 = \dots = \dot{a}_k = 0.$$

Derhalve:

$$a_3 = \text{konstant, } a_4 = \text{konstant, } \dots, a_k = \text{konstant.}$$

\dot{a}_1 en \dot{a}_2 krijgen dezelfde gedaante als voor het mechanisme met 2 vrijheidsgraden.

De uitdrukkingen voor $\dot{\beta}_1$ en $\dot{\beta}_2$ bevatten, behalve de termen, welke zij bevatten voor het mechanisme met twee vrijheidsgraden, beide nog een lineaire functie van a_3, a_4, \dots, a_k . Wegens het zooeven gevondene herleiden zich deze functiën tot konstanten van de orde h^2 . Zij $m_1 h^2$ deze konstante term in het tweede lid der vergelijking voor $\dot{\beta}_1$, $m_2 h^2$ die in het tweede lid der vergelijking voor $\dot{\beta}_2$. De invloed dezer termen bestaat dan hierin, dat het trillingsgetal n_1 moet worden vermeerderd met $m_1 h^2$ en de relatierest met $\delta n_1 (m_2 - m_1) h^2$.

α_1 , α_2 , β_1 en β_2 worden dan bepaald uit dezelfde vergelijkingen als in het geval van het mechanisme met twee vrijheidsgraden. De coördinaten q_1 en q_2 gedragen zich dus ook hier, alsof zij de eenige coördinaten waren. De invloed der $k-2$ overige vrijheidsgraden bestaat in een wijziging van n_1 en n_2 , welke wijziging van de orde h^2 is, en afhankelijk van de amplituden der overige $k-2$ trillingen.

$\beta_3, \beta_4 \dots \beta_k$ zijn, gelijk de gedaante van R leert, lineaire functiën van $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$. Daar $\alpha_3, \alpha_4 \dots \alpha_k$ konstant zijn, en α_2 uit te drukken is in α_1 , zijn $\beta_3, \beta_4, \dots \beta_k$ te schrijven als lineaire functiën van α_1 . De coördinaten $q_3, q_4 \dots q_k$ ondervinden dus den invloed der relatie, echter alleen in de phase, niet in de amplitude. Daar α_1 (evenals α_2 , β_1 en β_2) reeds vroeger als functie van t bepaald is, kunnen ook $\beta_3, \beta_4 \dots \beta_k$ worden bepaald. Het vraagstuk is dus geheel tot kwadraturen teruggebracht.

§ 5. $S = 2$ ($n_1 = n_2 + \varrho$). Alle storende termen, welke we te beschouwen hebben, zijn weer van de orde h^3 . Bij dit geval doet zich de eigenaarigheid voor, dat alle storende termen van de tweede soort tevens als storende termen van de eerste soort moeten worden beschouwd. Een term $q_1 q_2^2$ b.v. in de eerste vergelijking levert als storende termen een term met $\cos (nt + 2n \beta_1)$ en een met $\cos (nt + 4n \beta_2 - 2n \beta_1)$.

Evenals dat zoeven voor het geval $S = 4$ gedaan is, kan ook voor dit geval gemakkelijk worden aangetoond, dat, afgezien van een wijziging van hun trillingsgetal, de coördinaten q_1 en q_2 zich gedragen, alsof men te doen had met een mechanisme met twee vrijheidsgraden, terwijl de overige coördinaten den invloed der relatie ondervinden in hun phase, doch niet in hun amplitude.

RELATIE TUSSEHEN DRIE DER TRILLINGSGETALLEN, WAARVOOR $S = 3$.

§ 6. De eenige relatie, welke voor $S = 3$ nog te bespreken is, luidt:

$$n_1 + n_2 - n_3 = \varrho.$$

Evenals dat in § 3 gedaan is voor het geval van eene relatie tusschen twee der trillingsgetallen, waarvoor $S = 3$, kan ook hier worden aangetoond, dat bij eerste benadering alleen de coördinaten q_1, q_2 en q_3 den invloed der relatie ondervinden, en dat q_1, q_2 en q_3 zich gedragen, alsof zij de eenige coördinaten waren. We kunnen ons dus bepalen tot een mechanisme met slechts drie vrijheidsgraden: q_1, q_2 en q_3 zijn de principale coördinaten.

Aangezien in de bewegingsvergelijkingen reeds onder de termen

van de orde h^2 storende termen voorkomen, behoeven we in de uitdrukkingen voor de levende kracht en de potentiaalfunctie geen termen op te nemen van hooger orde dan h^3 . Derhalve:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=3} \dot{q}_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=3} \sum_{s=1}^{s=3} (P_{rr} \dot{q}_r^2 + 2 P_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s),$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=3} n_r^2 q_r^2 + H_3(q_1, q_2, q_3),$$

alwaar H_3 een homogene functie van den derden graad voorstelt, en

$$P_{rs} = a_{rs} q_1 + b_{rs} q_2 + c_{rs} q_3.$$

De vergelijking van LAGRANGE voor den coördinaat q_1 luidt:

$$\ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 = - \sum_{r=1}^{r=3} P_{1r} \ddot{q}_r - \sum_{r=1}^{r=3} (b_{1r} q_2 + c_{1r} q_3) \dot{q}_r + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=3} a_{rr} \dot{q}_r^2 + a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \frac{\partial H_3}{\partial q_1}.$$

Wanneer we in de termen van het tweede lid \ddot{q}_r door $-n_r^2 q_r$ vervangen hebben, dan zijn in het geval der onderstelde relatie in deze vergelijking als storend te beschouwen de termen met $q_2 q_3$ en die met $\dot{q}_2 \dot{q}_3$. Laten we alle overige termen van hooger orde weg, dan wordt de vergelijking:

$$\ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 = (c_{12} n_2^2 + b_{13} n_3^2 - p) q_2 q_3 - (-a_{23} + b_{13} + c_{12}) \dot{q}_2 \dot{q}_3.$$

(p is de coëfficiënt van den term $q_1 q_2 q_3$ in H_3).

We mogen nu $\dot{q}_2 \dot{q}_3$ vervangen door $n_2 n_3 q_2 q_3$, omdat deze twee produkten bij substitutie van de bij eerste benadering te nemen uitdrukkingen voor q_2 en q_3 denzelfden storenden term opleveren. Hierdoor komen we tot:

$$\ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 = \{a_{23} n_2 n_3 + b_{13} n_3 (n_3 - n_2) + c_{12} n_2 (n_2 - n_3) - p\} q_2 q_3.$$

In het tweede lid $n_1 + n_2 - n_3 = 0$ stellende, vinden we ten slotte:

$$\ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 = (a_{23} n_2 n_3 + b_{13} n_1 n_3 - c_{12} n_1 n_2 - p) q_2 q_3.$$

We kunnen op dezelfde wijze ook de twee andere vergelijkingen vereenvoudigen; daarbij moeten we bedenken, dat in de tweede vergelijking $\dot{q}_1 \dot{q}_3$ is te vervangen door $n_1 n_3 q_1 q_3$, echter in de derde vergelijking $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ door $-n_1 n_2 q_1 q_2$. Het resultaat is dat de bewegingsvergelijkingen als volgt te schrijven zijn:

$$\ddot{q}_r + n_r^2 q_r - \frac{\partial R}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, 3). \quad \dots \quad (1)$$

waarin

$$-R = \{p - (a_{23} n_2 n_3 + b_{13} n_1 n_3 - c_{12} n_1 n_2)\} q_1 q_2 q_3.$$

Nemen we echter als verkorte 3^{de} vergelijking:

$$\ddot{q}_3 + (n_1 + n_2)^2 q_3 = 0,$$

dan is

$$- R = \{p - (a_{23} n_2 n_3 + b_{13} n_1 n_3 - c_{12} n_1 n_2)\} q_1 q_2 q_3 - \varphi (n_1 + n_2) q_3^2 \equiv p' q_1 q_2 q_3 - \varphi (n_1 + n_2) q_3^2.$$

Zuivere relatie $n_1 + n_2 - n_3 = 0$.

§ 7. Als eerste benadering van stelsel (1) nemen wij:

$$q_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{n_1} \cos (n_1 t + 2n_1 \beta_1),$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{n_2} \cos (n_2 t + 2n_2 \beta_2),$$

$$q_3 = \frac{\sqrt{a_3}}{n_1 + n_2} \cos \{(n_1 + n_2)t + 2(n_1 + n_2)\beta_3\}.$$

De a 's zijn noodzakelijk positieve grootheden en worden in het algemeen gedurende de beweging niet nul. We schrijven nu $- R \equiv p' q_1 q_2 q_3$ als functie van de a 's, β 's en t , en laten daarna de termen weg, welke t expliciet bevatten. Dan wordt:

$$- R = p'' \sqrt{a_1 a_2 a_3} \cos \varphi,$$

waarin

$$p'' = \frac{p'}{4n_1 n_2 (n_1 + n_2)},$$

$$\varphi = 2 \{n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2 - (n_1 + n_2)\beta_3\}.$$

Het stelsel vergelijkingen, dat de veranderlijkheid der a 's en β 's bepaalt, luidt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_1 &= 2n_1 p'' \sqrt{a_1 a_2 a_3} \sin \varphi, & \dot{\beta}_1 &= \frac{p'' \sqrt{a_1 a_2 a_3}}{a_1} \cos \varphi, \\ \dot{a}_2 &= 2n_2 p'' \sqrt{a_1 a_2 a_3} \sin \varphi, & \dot{\beta}_2 &= \frac{p'' \sqrt{a_1 a_2 a_3}}{a_2} \cos \varphi, \\ \dot{a}_3 &= -2(n_1 + n_2) p'' \sqrt{a_1 a_2 a_3} \sin \varphi, & \dot{\beta}_3 &= \frac{p'' \sqrt{a_1 a_2 a_3}}{a_3} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Een integraal van dit stelsel is:

$$\sqrt{a_1 a_2 a_3} \cos \varphi = \text{konstant} \dots \dots \dots (3)$$

Voorts merken we op, dat:

$$\frac{\dot{a}_1}{n_1} = \frac{\dot{a}_2}{n_2} = - \frac{\dot{a}_3}{n_1 + n_2},$$

$$\dot{a}_1 + \dot{a}_2 + \dot{a}_3 = 0.$$

Derhalve:

$$\frac{a_1}{n_1} - \frac{a_3}{n_2} = C_2 h^2, \quad \frac{a_1}{n_1} + \frac{a_3}{n_1 + n_2} = C_3 h^2, \quad \frac{a_2}{n_2} + \frac{a_3}{n_1 + n_2} = (C_3 - C_2) h^2 \quad (4)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = \text{konstant} \dots \dots \dots (5)$$

Hierin zijn C_2 en C_3 konstanten. C_3 is positief en $C_3 > C_2$. We denken C_2 ook positief; dit houdt geen beperking in; wanneer nl. C_2 negatief was, dan zouden we slechts de coördinaten q_1 en q_2 hebben te verwisselen.

Stellen we:

$$\frac{\alpha_1}{n_1} = \xi h^2,$$

dan is:

$$\frac{\alpha_2}{n_2} = (\xi - C_2) h^2, \quad \frac{\alpha_3}{n_1 + n_2} = (C_3 - \xi) h^2.$$

Hierdoor krijgt (3) de gedaante:

$$V \xi (\xi - C_2) (C_3 - \xi) \cos \varphi = k, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin k een konstante voorstelt.

De eerste vergelijking van (2) wordt door invoering van ξ :

$$\xi = 2p'' \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} h \sqrt{\xi (\xi - C_2) (C_3 - \xi)} \sin \varphi \quad . \quad . \quad (7)$$

Eliminatie van φ tusschen (6) en (7) levert op:

$$\pm V \xi (\xi - C_2) (C_3 - \xi) \quad k^2 = 2p'' \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} h d\xi.$$

Hierdoor is ξ als functie van t te bepalen, waardoor α_1 , α_2 en α_3 bekend zijn; vervolgens φ uit (3); ten slotte β_1 , β_2 en β_3 uit (2).

§ 8. Stellen we betrekking (6):

$$V \xi (\xi - C_2) (C_3 - \xi) \cos \varphi = k$$

voor op poolcoördinaten; we nemen ξ als voerstraal, φ als poolhoek.

Daar α_1 , α_2 en α_3 positief zijn, zijn ξ , $\xi - C_2$ en $C_3 - \xi$ positief, dus blijft ξ tusschen C_2 en C_3 . We hebben dus slechts krommen te beschouwen, gelegen tusschen de cirkels $\xi = C_2$ en $\xi = C_3$.

De krommen blijven rechts of links van O , naar gelang k positief of negatief is. In fig. 1 zijn, voor bepaalde waarden van C_2 en C_3 , voor enkele waarden van k de krommen geteekend.

De afstanden der snijpunten van een kromme met de as der hoeken worden gevonden als de positieve wortels van de vergelijking:

$$\xi (\xi - C_2) (C_3 - \xi) - k^2 = 0.$$

Voor gegeven waarden van C_2 en C_3 is er een maximale waarde van k^2 , voor welke deze verg. twee gelijke en beneden welke zij 3 bestaanbare wortels heeft. Voor deze waarde heeft de kromme zich samengetrokken tot een geïsoleerd punt. Dit betreft een bijzonder bewegingsgeval.

Een ander bijzonder geval hebben we voor $k^2 = 0$. Er heeft degeneratie plaats tot het punt $\xi = 0$, de cirkels $\xi = C_2$ en $\xi = C_3$, en de rechte $\cos \varphi = 0$.

Verder zijn er bijzondere gevallen voor bijzondere waarden van U_2 en U_3 . Is $U_2 = U_3$, dan is noodzakelijk $k = 0$; dit hoort dus bij het tweede bijzondere geval. Is $U_2 = 0$, dan gaat door $\xi = U_3 \zeta$ te stellen de betrekking (6) over in die, welke we hadden bij het mechanisme met twee vrijheidsgraden, waarvoor $n_2 = 2n_1$.

De bijzondere gevallen zullen in § 14 besproken worden.

§ 9. *Osculeerende krommen.* Ten einde de beweging van het mechanisme eenigszins aanschouwelijk te maken, gebruiken we een beeldpunt. We kiezen daarvoor het punt, welks rechthoekige coördinaten x , y en z op een willekenig tijdstip gelijk zijn aan de waarden der principale coördinaten q_1 , q_2 en q_3 op dat tijdstip. De beweging van het beeldpunt wordt dan gegeven door:

$$x = \frac{\sqrt{a_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1),$$

$$y = \frac{\sqrt{a_2}}{n_2} \cos(n_2 t + 2n_2 \beta_2)$$

$$z = \frac{\sqrt{a_3}}{n_1 + n_2} \cos\{(n_1 + n_2)t + 2(n_1 + n_2)\beta_3\}.$$

Door eliminatie van t tusschen deze vergelijkingen twee aan twee, en toekenning aan de α 's en de β 's van de waarden op een bepaald oogenblik, vindt men de projecties der osculeerende krommen op de coördinatenvlakken.

Deze projecties zijn LISSAJOUS'sche krommen; de osculeerende krommen zelf kunnen we LISSAJOUS'sche ruimtekrommen noemen.

§ 10. Zulk een ruimtekromme blijft besloten binnen een rechthoekig parallelipedum, begrensd door de vlakken:

$$x = \pm \frac{\sqrt{a_1}}{n_1}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{a_2}}{n_2}, \quad z = \pm \frac{\sqrt{a_3}}{n_1 + n_2}.$$

Tengevolge van de veranderlijkheid der α 's verandert dit omgeschreven parallelipedum voortdurend. De hoekpunten bewegen zich langs een ruimtekromme, die zich volgens (4) op het XY -vlak volgens een hyperbool, op het XZ - en het YZ -vlak als een ellips projecteert. Uit (5) volgt, dat deze kromme gelegen is op een ellipsoïde, welker assen gelegen zijn volgens de coördinatenassen en zich verhouden als $\frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} : \frac{1}{n_1 + n_2}$.

Daar de α 's tusschen bepaalde grenzen periodiek veranderen, zullen de hoekpunten zich langs de genoemde ruimtekromme tusschen twee uiterste standen heen en weer bewegen (zie fig. 2).

§ 11. Behalve van de α 's hangt de gedaante eener osculeerende kromme nog af van de β 's. Echter voor eene in een bepaald parallelipedum beschreven osculeerende kromme niet van 3, doch slechts van 2 grootheden, zooals blijkt door verandering van den oorsprong van tijd. Men kan komen tot:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{\alpha_1}}{n_1} \cos \{n_1 t + 2(n_1 \beta_1 - n_1 \beta_3)\}, \\
y &= \frac{\sqrt{\alpha_2}}{n_2} \cos \{n_2 t + 2(n_2 \beta_2 - n_2 \beta_3)\}, \\
z &= \frac{\sqrt{\alpha_3}}{n_1 + n_2} \cos (n_1 + n_2) t.
\end{aligned}$$

De gedaante der osculeerende kromme blijkt dus af te hangen van de grootheden $\beta_1 - \beta_3$ en $\beta_2 - \beta_3$. Stellen we nu:

$$\frac{\sqrt{\alpha_1}}{n_1} = A, \quad \frac{\sqrt{\alpha_2}}{n_2} = B, \quad \frac{\sqrt{\alpha_3}}{n_1 + n_2} = C, \quad 2(n_1 \beta_1 - n_1 \beta_3) = a, \quad 2(n_2 \beta_2 - n_2 \beta_3) = b,$$

dan wordt:

$$\left. \begin{aligned}
x &= A \cos (n_1 t + a), \\
y &= B \cos (n_2 t + b), \\
z &= C \cos (n_1 + n_2) t.
\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Uit (7) blijkt, dat in de uiterste parallelipeda krommen beschreven worden, voor welke $\sin \varphi = 0$. Voor deze krommen is derhalve:

$$2(n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2 - n_1 \beta_3 - n_2 \beta_3) = l\tau,$$

waarin l geheel.

$$\begin{aligned}
a + b &= l\tau \\
b &= l\tau - a.
\end{aligned}$$

De krommen, in de uiterste parallelipeda beschreven, worden dus gegeven door:

$$\left. \begin{aligned}
x &= A \cos (n_1 t + a), \\
y &= B \cos (n_2 t - a + l\tau), \\
z &= C \cos (n_1 + n_2) t.
\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

§ 12. De literatuur betreffende de LISSAJOUS'sche ruimtekrommen schijnt zich te beperken tot een verhandeling van A. RIGHI (Il Nuovo Cimento, tomo IX en X, 1873). RIGHI bespreekt alleen het geval, dat de perioden der drie onderling loodrechte trillingen een gemeene maat hebben, en onderzoekt welke symmetrie-eigenschappen deze krommen kunnen bezitten.

Stellen we in (8) $t = +\tau$ en $t = -\tau$ en noemen we de waarden

van x , y en z , welke bij deze waarden van t hooren, resp. x_1, y_1, z_1 , en x_2, y_2, z_2 , dan is

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = A \cos a \cos n_1 t, \quad \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = B \cos b \cos n_2 t, \quad z_1 = z_2$$

De kromme, voorgesteld door (8) heeft dus voor koorderichtingen, evenwijdig met het XY -vlak, als middellijn een kromme, welke wordt voorgesteld door de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= A' \cos n_1 t, \\ y_3 &= B' \cos n_2 t, \\ z_3 &= C' \cos (n_1 + n_2) t. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

waarin

$$A' = A \cos a, \quad B' = B \cos b.$$

Om de krommen te onderzoeken, voorgesteld door (8), kan men uitgaan van de eenvoudiger krommen, voorgesteld door (10). In fig. 3 is zulk een kromme perspectivisch, in fig. 4 (doorgetrokken lijnen) in projecties gegeven voor het geval n_1 en n_2 onderling meetbaar zijn, en wel $n_1 = 2n_2$; de ruimtekromme begint en eindigt in twee hoekpunten van het omgeschreven parallelepipedum, en wordt heen en terug doorloopen.

Wanneer de kromme (10) is geconstrueerd, dan bedenke men verder, dat

$$x = x_3 - \delta_1 \sin n_1 t, \quad y = y_3 - \delta_2 \sin n_2 t, \quad z = z_3,$$

waarin

$$\delta_1 = A \sin a, \quad \delta_2 = B \sin b$$

Men kan dus de kromme (8) beschreven denken door een punt, dat zich langs de kromme (10) beweegt en tegelijkertijd trillingen volgens de X - en Y -richting uitvoert. Hieruit kan men inzien, hoe de osculeerende kromme verandert bij toenemende waarden van a en b , en men kan afleiden, wanneer zij dubbelpunten vertoont. In fig. 4 zijn (gestippeld) de projecties aangegeven eener osculeerende kromme voor $n_1 = 2n_2$, en kleine waarden van a en b .

§ 13. Voor de krommen, voorgesteld door (9), bestaat een eenvoudige methode om de ZX - en ZY -projecties te construeeren, wanneer de XY -projectie gegeven is. We kunnen ons l als even denken; de krommen voor oneven waarden van l zijn het spiegelbeeld ten opzichte van het XZ -vlak van de krommen voor even waarden van l . De XY -projectie is een geheel willekeurige LISSAJOUS'sche kromme; voor $t = 0$ is de projectie van het punt op een diagonaal van den omgeschreven rechthoek.

Nu volgt echter uit (9):

$$Bq \cos \frac{z}{C} = Bq \cos \frac{x}{A} + Bq \cos \frac{y}{B}.$$

In fig. 5 is aangegeven, hoe voor ieder punt in de XY -projectie z te construeeren is. Men toont gemakkelijk aan, dat de snijpunten van (9) met het XY -vlak liggen op de ellips:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

De punten, waar de kromme aan de vlakken $z = \pm C$ raakt, projecteeren zich in de rechten:

$$\frac{x}{A} = \pm \frac{y}{B}.$$

§ 14. *Bijzondere gevallen.* Aan het slot van § 8 werden de bijzondere gevallen genoemd, welke zich kunnen voordoen. Het zijn:

A. *Bij gegeven waarden voor C_2 en C_3 is $k = 0$.* De betrekking

$$\sqrt{a_1 a_2 a_3} \cos \varphi = 0$$

laat verschillende mogelijkheden toe.

1°. Een der a 's is voortdurend nul. Geen dezer bewegingsvormen blijkt echter mogelijk te zijn bij substitutie in (1).

2°. $\cos \varphi = 0$. φ is voortdurend $\frac{\pi}{2}$ of $\frac{3\pi}{2}$. De bewegingsvorm verandert periodiek tusschen die, waarvoor $\xi = C_2$ ($a_2 = 0$) en die, waarvoor $\xi = C_3$ ($a_3 = 0$).

B. *Bij gegeven C_2 en C_3 is k^2 maximaal.* ξ is konstant, dus ook de a 's zijn konstant; het omgeschreven parallelipedum verandert niet. De β 's nemen eenparig toe met den tijd; de osculeerende kromme verandert van gedaante, echter blijft $\sin \varphi = 0$. De osculeerende kromme wordt dus voorgesteld door (9); a neemt met den tijd eenparig toe.

C. C_2 is gelijk nul. Dan is $\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{n_2}$. De beweging van de hoekpunten van het omgeschreven parallelodipedum heeft plaats langs een vlakke kromme; het vlak gaat door de Z -as. Wanneer $C_3 = 0$ is en tegelijkertijd $k = 0$ is, dan nadert de bewegingsvorm asymptotisch tot een Z -trilling, of er heeft voortdurend een Z -trilling plaats.

D. $C_2 = C_3$. Er heeft voortdurend een X -trilling plaats.

$$\text{Bewonderde relatie } n_1 + n_2 - n_3 = \varrho.$$

§ 15. We moeten denken dat ϱ van de orde h is. Nu is

$$- R = p' q_1 q_2 q_3 - (n_1 + n_2) q q_3^2.$$

Als eerste benadering nemen we voor q_1 , q_2 en q_3 dezelfde uitdrukkingen als in het geval der zuivere relatie. We vinden voor R als functie der α 's en β 's:

$$- R = p'' \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \cos \varphi - \frac{q}{2(n_1 + n_2)} \alpha_3.$$

We kunnen weer het stelsel vergelijkingen neerschrijven, dat de veranderlijkheid der α 's en β 's aangeeft. Dit stelsel heeft weder als integralen:

$$\frac{\alpha_1}{n_1} - \frac{\alpha_2}{n_2} = \text{konstant}, \quad \frac{\alpha_1}{n_1} - \frac{\alpha_3}{n_1 + n_2} = \text{konstant}, \quad \frac{\alpha_2}{n_2} - \frac{\alpha_3}{n_1 + n_2} = \text{konstant},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \text{konstant}.$$

Stellen we weer

$$\frac{\alpha_1}{n_1} = \xi h^2, \quad \frac{\alpha_2}{n_2} = (\xi - C_2) h^2, \quad \frac{\alpha_3}{n_1 + n_2} = (C_3 - \xi) h^2,$$

dan krijgt de integraal: $R = \text{konstant}$ de gedaante:

$$\sqrt{\xi(\xi - C_2)(C_3 - \xi)} \cos \varphi = q'(k - \xi),$$

waarin k een konstante voorstelt, en

$$q' = \frac{q}{2p'' \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2) h}}.$$

Men ziet nu gemakkelijk in, op welke wijze de coördinaten als functien van den tijd te vinden zijn.

§ 16. Een overzicht van de algemeene en bijzondere gevallen, welke zich kunnen voordoen, alsmede een inzicht in de wijze, waarop de overgang plaats heeft, eenerzijds tot het geval der zuivere relatie, anderzijds tot het algemeene geval, waarbij geen relatie bestaat, verkrijgt men door de betrekking tusschen ξ en φ op poolcoördinaten voor te stellen; ξ is de voerstraal, φ de poolhoek. In

$$\sqrt{\xi(\xi - C_2)(C_3 - \xi)} \cos \varphi = q'(k - \xi)$$

mogen we q' positief onderstellen; immers zijn de krommen voor negatieve waarden van q' het spiegelbeeld ten opzichte van de rechte $\varphi = \frac{\pi}{2}$ van de krommen voor positieve waarden van q' .

We geven aan C_2 en C_3 standvastige waarden, en zoeken bij zekere waarde van q' de gedaanten der krommen, die aan de verschillende mogelijke waarden van k beantwoorden. Vervolgens gaan we na hoe dit stelsel krommen verandert, als q' alle waarden van zeer klein tot zeer groot doorloopt.

Bij iedere waarde van ϱ zijn drie gevallen te onderscheiden :

1°. $k > C_3$. Daar $\xi < C_3$ blijft, blijft het tweede lid, dus ook $\cos \varphi$ positief. Krommen, rechts van O .

2°. $k < C_2$. Daar $\xi > C_2$ blijft, blijft het tweede lid, dus ook $\cos \varphi$ negatief. Krommen, links van O .

3°. $C_2 < k < C_3$. Het tweede lid, dus ook $\cos \varphi$, wordt nul voor $\xi = k$. Krommen, welke O omringen.

De krommen, door bovenstaande betrekking voorgesteld, liggen dus of geheel aan ééne zijde van O , of zij omringen O .

De gebieden van het vlak, ingenomen door deze verschillende soorten van krommen, worden begrensd door de krommen, welke beantwoorden aan $k = C_2$ en $k = C_3$.

Voor deze waarden van k heeft er degeneratie plaats.

Voor $k = C_2$ in :

$$\xi = C_2 \text{ en } V\xi(C_3 - \xi) \cos \varphi = -\varrho' V\xi - C_2.$$

Deze laatste kromme ligt links van O , zij begint en eindigt in de punten : $\xi = C_2$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Voor $k = C_3$ in :

$$\xi = C_3 \text{ en } V\xi(\xi - C_2) \cos \varphi = \varrho' V\xi - \overline{C_3 - \xi}.$$

Deze laatste kromme ligt rechts van O ; zij begint en eindigt in de punten : $\xi = C_3$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Om te onderzoeken, hoe het stelsel krommen verandert bij verandering van ϱ' is het voldoende de verandering der gedegeneerde krommen na te gaan. Het resultaat is, dat het gebied der krommen die O omringen, zeer klein is voor kleine waarden van ϱ' , en zich uitbreidt naarmate ϱ' toeneemt, zoodat die krommen overwegend zijn voor groote waarden van ϱ' .

We hebben dus voor kleine waarden van ϱ' bij voorkeur het geval, dat φ tusschen twee uiterste tegengestelde waarden heen en weer gaat, voor groote waarden van ϱ' bij voorkeur het geval dat φ alle waarden aanneemt.

Verder merken we op, dat naarmate ϱ' toeneemt, de krommen, welke O omringen, meer gaan gelijken op cirkels met O als middelpunt, m.a.w. ξ , en daarmede de α 's, veranderen weinig. Aldus naderen we tot het algemeene geval, waarbij ϱ' zoo groot geworden is, dat van geen relatie meer sprake is.

Ook hier krijgen we, bij iedere waarde van ϱ' , voor de maximale en minimale waarde van k een geïsoleerd punt op den oorsprong der hoeken.

Fig. 6 geeft eenige krommen voor een vrij kleine waarde van q' , fig. 7 voor vrij groote waarde van q' ; de —. — lijnen geven de gedegeneerde krommen aan.

RELATIES TUSSCHEN 3 DER TRILLINGSGETALEN, WAARVOOR $S = 4$.

§ 17. Er zijn twee van deze relaties te bespreken, n.l.:

$$(A) \quad n_1 + 2n_2 - n_3 = 0,$$

$$(B) \quad -n_1 + 2n_2 - n_3 = 0.$$

We beginnen met de bepaling van de storende termen der tweede soort in de bewegingsvergelijkingen. Deze bevatten geen andere coördinaten dan q_1 , q_2 en q_3 , en zij treden alleen op in de bewegingsvergelijkingen, welke op deze coördinaten meer in het bijzonder betrekking hebben. Het is dus duidelijk, dat we ter bepaling van de storende termen der tweede soort ons kunnen bepalen tot een mechanisme met 3 vrijheidsgraden.

In de vergelijkingen komen onder de termen van de orde h^2 geen storende voor; termen van hooger orde dan h^3 worden niet opgenomen. Derhalve kunnen we de potentiaalfunctie en de levende kracht als volgt schrijven:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=3} n_r^2 q_r^2 + H_4(q_1, q_2, q_3),$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=3} \dot{q}_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=3} (P_{rr} \dot{q}_r^2 + 2P_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s),$$

alwaar H_4 een homogene functie van den 4^{den} graad voorstelt, en

$$P_{rs} = \frac{1}{2} a_{rs} q_1^2 + \frac{1}{2} b_{rs} q_2^2 + \frac{1}{2} c_{rs} q_3^2 + e_{rs} q_1 q_2 + f_{rs} q_1 q_3 + h_{rs} q_2 q_3.$$

Schrijven we b.v. de bewegingsvergelijking voor q_1 neer, dan zijn voor de relaties (A) en (B) hierin als storend te beschouwen termen met:

$$q_2^2 q_3, q_2 \ddot{q}_2 q_3, q_2^2 \ddot{q}_3, \ddot{q}_2 q_3 \text{ en } q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3.$$

Vervangen we in deze termen \ddot{q}_2 door $-n_2^2 q_2$, \ddot{q}_3 door $-n_3^2 q_3$, \dot{q}_2^2 door $-n_2^2 q_2^2$ en $\dot{q}_2 \dot{q}_3$ door $n_2 n_3 q_2 q_3$.

Laten we alle niet storende termen van de orde h^3 weg, en maken we in de storende termen gebruik van de betrekking $n_1 \pm 2n_2 \mp n_3 = 0$ (hetgeen geoorloofd is, aangezien q van de orde h^2 is), dan bespeuren wij, dat de eerste vergelijking als volgt te schrijven is:

$$\ddot{q}_1 + n_1^2 q_1 = (\mp n_1 n_2 h_{12} \pm \frac{1}{2} n_1 n_3 b_{13} - \frac{1}{2} n_1^2 f_{22} + n_2 n_3 e_{23} - p) q_2^2 q_3 + \text{storende termen der eerste soort. (} p \text{ is de coëfficiënt van een term } q_1 q_2^2 q_3 \text{ in } U).$$

Van de \mp en \pm teekens moet het bovenste genomen worden in

het geval der relatie (A), het onderste in het geval der relatie (B).

Bij de bepaling van de storende termen der tweede soort in de vergelijkingen voor q_2 en q_3 , en de herleiding van deze termen volgens den zooveen aangegeven weg, vinden we als uitkomst, dat de storende termen de afgeleiden zijn eener zelfde functie, n.l. van

$$p' q_1 q_2^2 q_3.$$

waarin

$$p' = p \pm n_1 n_2 h_{12} \mp n_1 n_3 b_{13} + \frac{1}{2} n_2^2 f_{22} - n_2 n_3 e_{23}.$$

Dit deel der storingsfunctie kan weer op de gewone wijze in de α 's en de β 's worden uitgedrukt.

Als storende termen der eerste soort hebben we slechts over te nemen de termen, welke we in § 4 bepaald hebben. Immers zijn die termen onafhankelijk van de relatie.

We vinden dus, dat de storingsfunctie, uitgedrukt in de α 's en de β 's, de volgende gedaante aanneemt:

$$-R = \chi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) + \varrho^2 h^2 \alpha_3 + m_1 \alpha_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \cos \varphi,$$

waarin weder χ_2 een homogene, kwadratische functie van de α 's voorstelt.

De tweede term is opgenomen, omdat we voor eerste benadering nemen:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\sqrt{\alpha_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1), \\ q_2 &= \frac{\sqrt{\alpha_2}}{n_2} \cos(n_2 t + 2n_2 \beta_2), \\ q_3 &= \frac{\sqrt{\alpha_3}}{2n_2 \pm n_1} \cos\{(2n_2 \pm n_1)t + 2(2n_2 \pm n_1)\beta_3\}; \text{ enz.} \end{aligned}$$

Verder is

$$\varphi = \pm 2n_1 \beta_1 + 4n_2 \beta_2 - 2(2n_2 \pm n_1)\beta_3 = \pm 2n_1(\beta_1 - \beta_3) + 4n_2(\beta_2 - \beta_3).$$

§ 18. We kunnen weer de differentiaalvergelijkingen neergeschreven denken, welke de veranderlijkheid der α 's en β 's bepalen. We vinden dan onmiddellijk:

$$\alpha_1 = \text{konstant}, \quad \alpha_2 = \text{konstant}, \dots, \dots, \alpha_k = \text{konstant}.$$

Echter zijn $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ veranderlijk. De coördinaten q_4, q_5, \dots, q_k ondervinden dus den invloed der relatie in hun phase, doch niet in hun amplitude.

Beschouwen we in het bijzonder de vergelijkingen voor $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ en $\dot{\alpha}_3$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \pm 2m_1 n_1 \alpha_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \sin \varphi, \\ \dot{\alpha}_2 &= \mp 4m_1 n_2 \alpha_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \sin \varphi, \\ \dot{\alpha}_3 &= -2(2n_2 \pm n_1) m_1 \alpha_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \sin \varphi. \end{aligned}$$

We leiden hieruit af:

$$\mp \frac{\dot{\alpha}_1}{n_1} = - \frac{\dot{\alpha}_2}{2n_2} = \frac{\dot{\alpha}_3}{2n_2 \pm n_1},$$

$$\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_3 = 0.$$

§ 19. *Geval A.*

$$\frac{\alpha_1}{n_1} - \frac{\alpha_2}{2n_2} = (C_1 - C_2)h^2, \quad \frac{\alpha_2}{2n_2} + \frac{\alpha_3}{2n_2 + n_1} = C_2 h^2, \quad \frac{\alpha_1}{n_1} + \frac{\alpha_3}{2n_2 + n_1} = C_1 h^2,$$

waarin C_1 en C_2 positieve konstanten zijn.

Stellen we

$$\alpha_3 = (2n_2 + n_1)h^2 \xi,$$

dan wordt:

$$\alpha_1 = n_1(C_1 - \xi)h^2, \quad \alpha_2 = 2n_2(C_2 - \xi)h^2.$$

De integraal $R = \text{konstant}$ krijgt nu de gedaante:

$$(C_2 - \xi) V_2(C_1 - \xi) \cos \varphi = p \xi^2 + q \xi + r.$$

Geval B.

$$\frac{\alpha_1}{n_1} + \frac{\alpha_2}{2n_2} = C_1 h^2, \quad \frac{\alpha_2}{2n_2} + \frac{\alpha_3}{2n_2 - n_1} = C_3 h^2, \quad \frac{\alpha_3}{2n_2 - n_1} - \frac{\alpha_1}{n_1} = (C_3 - C_1)h^2,$$

waarin C_1 en C_3 positieve konstanten zijn.

Stellen we

$$\alpha_2 = 2n_2 h^2 \xi.$$

dan is

$$\alpha_1 = n_1(C_1 - \xi)h^2, \quad \alpha_3 = (2n_2 - n_1)(C_3 - \xi)h^2.$$

De integraal $R = \text{konstant}$ krijgt de gedaante:

$$\xi V(C_1 - \xi)(C_3 - \xi) \cos \varphi = p \xi^2 + q \xi + r.$$

§ 20. In geval *A* ligt ξ voortdurend tusschen 0 en C_1 of tusschen 0 en C_2 , naar gelang C_1 of C_2 de kleinste is. In geval *B* ligt ξ voortdurend tusschen 0 en C_1 of tusschen 0 en C_3 , naar gelang C_1 of C_3 de kleinste is.

Wanneer we weder de betrekkingen tusschen ξ en φ op poolcoördinaten voorstellen, dan krijgen we krommen van volkomen denzelfden aard, als in het geval van een mechanisme met twee vrijheidsgraden, waarvoor $n_2 = 3n_1$ is.

Er zijn dus krommen, die O niet omsluiten, en die dus betrekking hebben op bewegingsvormen, waarbij φ tusschen twee grenzen heen en weer gaat; en krommen, die O omsluiten, en die dus betrekking hebben op bewegingsvormen, waarbij φ alle waarden aanneemt. De overgang wordt gevormd door een kromme, die een dubbelpunt heeft op de as der hoeken; deze wijst op een bijzonder geval, waarbij de bewegingsvorm asymptotisch nadert tot een beweging, waarbij $\sin \varphi = 0$

en ξ standvastig is. Op een ander bijzonder geval wijst het geïsoleerde punt, op de as der hoeken gelegen; het wijst op een bewegingsvorm, waarbij $\sin \varphi = 0$ en ξ standvastig is.

§ 21. *Osculeerende krommen.* De osculeerende krommen van het beeldpunt zijn weer LISSAJOUS'sche ruimtekrommen. De hoekpunten van het omgeschreven parallelopipedum bewegen zich over een ruimtekromme, gelegen op een ellipsoïde, waarvan de assen langs de coördinatenassen liggen en waarvan de assenlengten zich verhouden als $\frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} : \frac{1}{2n_2 \pm n_1}$; de ruimtekromme projecteert zich in geval *A* op het *XY*-vlak als een hyperbool, op *XZ*- of *ZY*-vlak als een ellips, in geval *B* op het *XZ*-vlak als een hyperbool, op *XY*- en *YZ*-vlak als een ellips.

De osculeerende kromme, in een bepaald parallelopipedum beschreven, kan worden gegeven door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(n_1 t + a), \\ y &= B \cos(n_2 t + b), \\ z &= C \cos(2n_2 \pm n_1 t), \end{aligned}$$

waarin a en b de oogenblikkelijke waarden voorstellen, resp. van $2n_1(\beta_1 - \beta_3)$ en van $2n_2(\beta_2 - \beta_3)$.

In de niterste parallelopipeda worden krommen beschreven, waarvoor $\sin \varphi = 0$, dus waarvoor

$$2b \pm a = l\pi,$$

waarin l geheel.

Voor dit geval hebben we, als we ons l even voorstellen:

$$Bq \cos \frac{z}{C} = 2 Bq \cos \frac{y}{B} \pm Bq \cos \frac{x}{A}$$

RELATIES TUSSCHEN 4 DER TRILLINGSGETALLEN, WAARVOOR $S = 4$.

§ 22. Er zijn twee van deze relaties te bespreken, n.l.:

$$(A) \quad n_1 + n_2 + n_3 - n_4 = \varrho,$$

$$(B) \quad n_1 + n_2 - n_3 - n_4 = \varrho.$$

Na het vorige zal het duidelijk zijn dat we hebben te nemen:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=4} n_r^2 q_r^2 + H_4(q_1, q_2, q_3, q_4), \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=4} \dot{q}_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=4} \sum_{s=1}^{s=4} (P_{rr} \dot{q}_r^2 + 2P_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s), \end{aligned}$$

alwaar

$$P_{rs} = \frac{1}{2} a_{rs} q_1^2 + \frac{1}{2} b_{rs} q_2^2 + \frac{1}{2} c_{rs} q_3^2 + \frac{1}{2} d_{rs} q_4^2 + e_{rs} q_1 q_2 + f_{rs} q_1 q_3 + \\ + g_{rs} q_1 q_4 + h_{rs} q_2 q_3 + k_{rs} q_2 q_4 + l_{rs} q_3 q_4.$$

We kunnen weer aanwijzen, welke termen in de verschillende bewegingsvergelijkingen als storend zijn te beschouwen, en ze herleiden volgens den weg, in § 17 aangegeven.

Het resultaat der herleiding is dat de storende termen der tweede soort in de vergelijkingen voor q_1 , q_2 , q_3 en q_4 de afgeleiden zijn, resp. naar q_1 , q_2 , q_3 en q_4 van:

$$(-n_1 n_2 l_{12} \mp n_1 n_3 k_{13} + n_1 n_4 h_{14} \mp n_2 n_3 i_{23} - n_2 n_4 f_{24} \pm n_3 n_4 i'_{34} - p) q_2 q_3 q_4, \\ (p \text{ is de coëfficiënt van een term } q_1 q_2 q_3 q_4 \text{ in } H_4).$$

Van de \mp en \pm teekens moet het bovenste genomen worden in het geval der relatie (A), het onderste in het geval der relatie (B).

We nemen als eerste benadering:

$$q_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{n_1} \cos(n_1 t + 2n_1 \beta_1), \\ q_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{n_2} \cos(n_2 t + 2n_2 \beta_2), \\ q_3 = \frac{\sqrt{a_3}}{n_3} \cos(n_3 t + 2n_3 \beta_3), \\ q_4 = \frac{\sqrt{a_4}}{n_1 + n_2 \pm n_3} \cos\{(n_1 + n_2 \pm n_3)t + 2(n_1 + n_2 \pm n_3)\beta_4\}; \text{ enz.}$$

Dan hebben we te nemen als functie R :

$$-R = \chi_2(a_1, a_2, \dots, a_k) + q' h^2 a_4 + m_1 \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4} \cos q,$$

waarin

$$q = 2n_1 \beta_1 + 2n_2 \beta_2 \pm 2n_3 \beta_3 - 2(n_1 + n_2 \pm n_3) \beta_4 = \\ = 2n_1 (\beta_1 - \beta_4) + 2n_2 (\beta_2 - \beta_4) \pm 2n_3 (\beta_3 - \beta_4).$$

§ 23. We kunnen de vergelijkingen neerschrijven, welke de veranderlijkheid der α 's en β 's met den tijd aangeven, en vinden dan, zooals steeds in het geval $S=4$, dat de coördinaten $q_5, q_6 \dots q_k$ den invloed der relatie ondervinden in hun phase, doch niet in hun amplitude.

We houden ons daarom in het bijzonder bezig met de coördinaten q_1, q_2, q_3 en q_4 .

De vergelijkingen voor $\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3$ en \dot{a}_4 luiden:

$$\dot{a}_1 = + 2n_1 m_1 \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4} \sin q, \\ \dot{a}_2 = + 2n_2 m_1 \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4} \sin q, \\ \dot{a}_3 = \pm 2n_3 m_1 \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4} \sin q, \\ \dot{a}_4 = - 2(n_1 + n_2 \pm n_3) m_1 \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4} \sin q.$$

We leiden hieruit af:

$$\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{n_2} = \pm \frac{a_3}{n_3} = - \frac{a_4}{n_1 + n_2 \pm n_3},$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0.$$

§ 24. *Geval A.*

$$\frac{a_1}{n_1} ; \frac{a_4}{n_1 + n_2 + n_3} = C_1 h^2, \frac{a_2}{n_2} + \frac{a_4}{n_1 + n_2 + n_3} = C_2 h^2, \frac{a_3}{n_3} + \frac{a_4}{n_1 + n_2 + n_3} = C_3 h^2,$$

$$\frac{a_1}{n_1} - \frac{a_2}{n_2} = (C_1 - C_2) h^2, \frac{a_1}{n_1} - \frac{a_3}{n_3} = (C_1 - C_3) h^2, \frac{a_2}{n_2} - \frac{a_3}{n_3} = (C_2 - C_3) h^2,$$

waarin C_1 , C_2 en C_3 positieve konstanten voorstellen.

Stellen we:

$$a_4 = (n_1 + n_2 + n_3) \zeta h^2,$$

dan wordt

$$a_1 = n_1 (C_1 - \zeta) h^2, a_2 = n_2 (C_2 - \zeta) h^2, a_3 = n_3 (C_3 - \zeta) h^2.$$

De integraal $R = \text{konstant}$ krijgt de gedaante:

$$\sqrt{\zeta (C_1 - \zeta) (C_2 - \zeta) (C_3 - \zeta)} \cos \varphi = p \zeta^2 + q \zeta + r$$

Geval B.

$$\frac{a_1}{n_1} ; \frac{a_4}{n_1 + n_2 - n_3} = C_1 h^2, \frac{a_2}{n_2} + \frac{a_4}{n_1 + n_2 - n_3} = C_2 h^2, \frac{a_3}{n_3} - \frac{a_4}{n_1 + n_2 - n_3} = C_3 h^2,$$

$$\frac{a_1}{n_1} - \frac{a_2}{n_2} = (C_1 - C_2) h^2, \frac{a_1}{n_1} + \frac{a_3}{n_3} = (C_1 + C_3) h^2, \frac{a_2}{n_2} + \frac{a_3}{n_3} = (C_2 + C_3) h^2,$$

waarin C_1 , C_2 en C_3 positieve konstanten voorstellen.

Stellen we:

$$a_4 = (n_1 + n_2 - n_3) \zeta h^2,$$

dan wordt

$$a_1 = n_1 (C_1 - \zeta) h^2, a_2 = n_2 (C_2 - \zeta) h^2, a_3 = n_3 (C_3 + \zeta) h^2.$$

De integraal $R = \text{konstant}$ krijgt de gedaante:

$$\sqrt{\zeta (C_1 - \zeta) (C_2 - \zeta) (C_3 + \zeta)} \cos \varphi = p \zeta^2 + q \zeta + r.$$

Het is duidelijk dat het vraagstuk weer tot kwadraturen is teruggebracht, en dat de coördinaten met behulp van elliptische functiën in den tijd zijn uit te drukken.

§ 25. ζ verandert periodiek tusschen twee grenzen; deze grenzen liggen in geval *A* tusschen nul en de kleinste der drie grootheden C_1 , C_2 , C_3 ; in geval *B* tusschen nul en de kleinste van C_1 en C_2 .

De krommen, welke de betrekking tusschen ζ en φ voorstellen, hebben ook hier weer dezelfde gedaante als voor het geval der relatie $n_2 = 3n_1$.

We hebben dus als algemeene bewegingsvormen zulke, waarbij φ alle waarden aanneemt, en zulke, waarbij φ tusschen twee tegen-gestelde waarden heen en weer gaat; de eerste hebben we bij voorkeur voor groote waarden van de relatierest.

Verder is er weer een bijzonder geval, waarbij de amplituden standvastig zijn en $\sin \varphi = 0$ blijft; en een ander bijzonder geval, waarbij tot zulk een bewegingsvorm asymptotisch genaderd wordt.

§ 26. *Osculeerende krommen.* Het beeldpunt, dat de beweging van het mechanisme met 4 vrijheidsgraden zal voorstellen, beweegt zich in een ruimte R_4 . De coördinaten x, y, z en u van het beeldpunt op een rechthoekig coördinatenstelsel zijn op ieder oogenblik gelijk aan q_1, q_2, q_3 en q_4 . Zijn beweging wordt dan bepaald door:

$$x = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{n_1} \cos (n_1 t + 2n_1 \beta_1),$$

$$y = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{n_2} \cos (n_2 t + 2n_2 \beta_2),$$

$$z = \frac{\sqrt{\alpha_3}}{n_3} \cos (n_3 t + 2n_3 \beta_3),$$

$$u = \frac{\sqrt{\alpha_4}}{n_1 + n_2 \pm n_3} \cos \{(n_1 + n_2 \pm n_3) t + 2(n_1 + n_2 \pm n_3) \beta_4\}.$$

Kennen we aan de α 's en de β 's de oogenblikkelijke waarden toe, dan stellen deze vergelijkingen de osculeerende kromme voor het bedoelde oogenblik voor. De osculeerende kromme kunnen we een gewrongen LISSAJOUS'sche kromme noemen.

De kromme blijft besloten binnen een 4 dimensionaal parallelotoop, dat begrensd wordt door de ruimten: $x = \pm \frac{\sqrt{\alpha_1}}{n_1}$, $y = \pm \frac{\sqrt{\alpha_2}}{n_2}$,

$z = \pm \frac{\sqrt{\alpha_3}}{n_3}$, $u = \pm \frac{\sqrt{\alpha_4}}{n_1 + n_2 \pm n_3}$. Door de veranderlijkheid der α 's verandert ook het omgeschreven parallelotoop; de hoekpunten bewegen tusschen twee uiterste standen heen en weer langs een gewrongen kromme; deze kromme ligt op een hyperellipsoïde, wier assen gelegen zijn langs de coördinatenassen en een verhouding hebben van

$$1 : 1 : 1 : \frac{1}{n_1 + n_2 \pm n_3}.$$

De gedaante der gewrongen LISSAJOUS'sche kromme in een bepaald parallelotoop hangt, zooals men vindt door een verandering van den oorsprong van tijd, af van de grootheden:

$$2n_1 (\beta_1 - \beta_4), \quad 2n_2 (\beta_2 - \beta_4), \quad 2n_3 (\beta_3 - \beta_4).$$

De osculeerende krommen, in de uiterste parallelotopen beschreven, hebben de eigenschap dat

$$2n_1 (\beta_1 - \beta_4) + 2n_2 (\beta_2 - \beta_4) \pm 2n_3 (\beta_3 - \beta_4) = l\pi.$$

Voor deze krommen geldt de betrekking.

$$Bg \cos \frac{x}{A} + Bg \cos \frac{y}{B} \pm Bg \cos \frac{z}{C} = Bg \cos \frac{u}{D},$$

wanneer A, B, C en D geschreven wordt voor de amplituden, en l even gedacht wordt.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt eene mededeeling aan van den Heer Prof. GEORGE MAJGEN te Agram: “*On quartic curves of deficiency zero with a rhamphoid cusp and a node*”.

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

1. We shall here consider the quartic curve, which has as equation

$$(mx_3^2 + nx_1x_2)^2 - x_2x_3^2(a^2x_2 - bx_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (k_4)$$

It is easy to prove, that the represented curve has a rhamphoid cusp in the vertex $A(1,0,0)$ of the triangle of reference, that the cuspidal tangent is the side $x_2 = 0$ of this triangle, and that the vertex $B(0,1,0)$ is a node of the curve. The side $x_1 = 0$ is chosen as the harmonic conjugate of $x_3 = 0$ with respect to the two tangents of the double point B .

Indeed, the first polar curve of the point A with respect to k_4 breaks up into $x_2 = 0$ and the conic

$$mx_3^2 + nx_1x_2 = 0,$$

which has in the vertex A five points in common with k_4 . Evidently the only simple tangent of k_4 , passing through the cusp A , is represented by

$$a^2x_2 - bx_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (t)$$

The equation of a conic, which touches k_4 on $x_2 = 0$ in the cusp A and still in two other points, can be written in the well known form :

$$x_3^2 + 2\varepsilon(mx_3^2 + nx_1x_2) + \varepsilon^2x_2(a^2x_2 - bx_3) = 0.$$

If such a conic degenerates into two straight lines, one of which will be the tangent $x_2 = 0$, then the other must be the only double tangent belonging to k_4 .

If we put $2m\varepsilon = -1$, it follows from the last equation

$$x_2 = 0, \quad 4mnx_1 - (a^2x_2 - bx_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

and we have the equation of the *double tangent* d .

From the form of this equation is evident, that the double tangent passes through the point of intersection of the lines

$$x_1 = 0 \quad \text{and} \quad a^2x_2 - bx_3 = 0.$$

We can now say: The line (BR) joining the double point (B) to the point (R) of intersection of the double tangent with the simple tangent (t) , passing through the cusp (A) , is the *harmonic conjugate* of the line AB with respect to the two tangents of the double point B .

2. A pencil of conics having the two common tangents $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, with the points of contact A and B respectively, is indicated by the equation

$$x_3^2 + \mu x_1 x_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Each of these conics cuts the curve k_4 moreover in two points M, N ; let us determine the equation of the right line MN .

By eliminating x_3^2 out of the equations (k_4) and (1), we find

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \text{and} \quad MN = (n - \mu m)^2 x_1 + \mu (a^2 x_2 - b x_3) = 0 \quad (2)$$

so all these lines MN , passing through the point R , determine a pencil $[R]$. We put

$$\frac{\mu}{(n - \mu m)^2} = \varrho \quad \dots \dots \dots (3)$$

and from this ensues the equation

$$m^2 \varrho \cdot \mu^2 - (2cmn + 1) \mu + n^2 \varrho = 0,$$

giving the correspondence between ϱ and μ . Each value for ϱ furnishes two values for μ , and for each value of μ we find one value for ϱ .

The curve k_4 can therefore be determined by means of an involutory pencil of conics (1) and a projective pencil of rays (2). It is easy to see, that these two pencils have $x_1 = 0$ as a corresponding common element and that consequently the generated curve of order five breaks up into $x_1 = 0$ and the curve k_4 . All those conics of the pencil (1) have two tangents $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in common, and the vertex (R) of the pencil of rays is situated on the first of these tangents.

3. The points of contact D_1 and D_2 on the double tangent d , are projected out of the cusp A by two right lines, the equation of which will be obtained by eliminating x_1 out of (k_4) and (d) ; so from

$$[4m^2 x_3^2 + x_2 (a^2 x_2 - b x_3)]^2 - 16m^2 x_2 x_3 (a^2 x_2 - b x_3) = 0$$

we find

$$AD_1, AD_2 = 4m^2 x_3^2 - x_2 (a^2 x_2 - b x_3) = 0.$$

By eliminating $x_2 (a^2 x_2 - b x_3)$ out of the latter equation and (k_4) , we have

$$(m x_3^2 + n x_1 x_2)^2 - 4m^2 x_3^4 = 0$$

or

$$m x_3^2 + n x_1 x_2 \pm 2m x_3^2 = 0,$$

therefore

$$n x_1 x_2 - m x_3^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$n x_1 x_2 + 3m x_3^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

On these conics lie the points of intersection of k_4 with the pair of lines AD_1, AD_2 . The first conic (4) gives by combination with the equation (k_4) again the double tangent (l), and the second conic (5) furnishes by eliminating x_3^2 out of (k_4) and (5) the equation

$$3m(2nx_1x_2)^2 + 9nx_1x_2^2(a^2x_2 - bx_3) = 0$$

or

$$4mnx_1 + 3(a^2x_2 - bx_3) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

On this line lie the two points D'_1, D'_2 of intersection of k_4 with the projecting rays AD_1, AD_2 .

The line $D'_1D'_2$ cuts the curve k_4 again in two other points E_1, E_2 and bears four projecting rays out of the cusp A . This quadruple of rays will be obtained by eliminating x_1 out of (6) and (k_4), namely

$$16m^4x_3^4 - 4^3m^2x_2x_3^2(a^2x_2 - bx_3) + 9x_2^2(a^2x_2 - bx_3)^2 = 0,$$

and consequently the expression to the left must be divisible by the left side of the equation for AD_1, AD_2 , i. e. by

$$4m^2x_3^2 - x_2(a^2x_2 - bx_3).$$

The division gives the equation of the pair

$$AE_1, AE_2 = 4m^2x_3^2 - 9x_2(a^2x_2 - bx_3) = 0.$$

By eliminating $x_2(a^2x_2 - bx_3)$ out of the latter equation and (k_4), we obtain

$$(mx_3^2 + nx_1x_2)^2 - 4m^2x_3^4 = 0,$$

therefore

$$3nx_1x_2 + mx_3^2 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$3nx_1x_2 + 5mx_3^2 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

On the conic (7) are situated the points E_1, E_2 , and on the conic (8) the points E'_1, E'_2 as the fourth intersections of k_4 with the pair of lines AE_1, AE_2 .

The equation of $E'_1E'_2$ will be acquired by combination of (8) with (k_4); if we eliminate x_3^2 , we obtain:

$$E'_1E'_2 = 4mnx_1 + 15(a^2x_2 - bx_3) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

In pursuing these projections in this manner we can show that the general equation of all these lines $D'_1D'_2, E'_1E'_2, F'_1F'_2$, and so on, will be

$$4mnx_1 + [(2k)^2 - 1](a^2x_2 - bx_3) = 0 \dots \dots \dots (10)$$

k being any entire positive number or zero. All these projections are also elements of the pencil $[R]$.

The parameters in the equation (10) belonging to the mentioned projections are of the form

$$q_i = \frac{(2k)^2 - 1}{4mn}, (i = k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

We conclude from this that

the cross ratio of any four projections, determined by the equation of the form (10) is independent of the coefficients in the equation of k_4 , or, this cross ratio for the same four values of k is unaltered for all curves of the considered form.

The double tangent d , having the equation

$$4 mnx_1 - (a^2x_2 - bx_3) = 0, \dots \dots \dots (d)$$

belongs also to the projections (10); indeed, the equation (10) furnishes the equation (d) for $k = 0$.

Retaining the three lines

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ a^2x_2 - bx_3 &= 0 \end{aligned}$$

and

$$4 mnx_1 - (a^2x_2 - bx_3) = 0,$$

we can change the fourth ray, the equation of which is of the form (10). The cross ratio of these four lines will be:

$$\Delta = 1 - (2k)^2 \quad (k = 1, 2, 3, 4, \dots).$$

therefore the value of Δ is independent of the curve k_4 , and is a function of k alone.

4. We have seen, that in the projective generation of k_4 to any ray of pencil $[R]$ correspond two conics of the involutory pencil. The values of the parameters μ for these conics, which correspond to the right lines, indicated by (10), will be determined out of the equation, with respect to (3):

$$\frac{(2k)^2 - 1}{4mn} = \frac{\mu}{(u - m\mu)^2}$$

This quadratic equation furnishes two pairs of values for μ , namely

$$\mu_{1,2} = \frac{n [2k \pm 1]}{m [2k \mp 1]}.$$

We can now determine any number of discrete points of k_4 as follows; putting

$$p \equiv a^2x_2 - bx_3 = 0$$

we can write

$$\left. \begin{aligned} 4 mnx_1 + [2k + 1] [2k - 1] p &= 0 \\ m [2k \mp 1] x_3^2 + n [2k \pm 1] x_1x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}, (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

m, n being whatever constant numbers and p any right line passing

through A^1). If we eliminate x_1 out of the equations of the latter system, we shall obtain two pairs of pencils with non-consecutive rays in a correspondence (1, 2) i. e. $[R]$, $[A]$, having the equations

$$\left. \begin{aligned} 4mnx_1 + |2k + 1| |2k - 1| p &= 0 \\ 4m^2x_3^2 - |2k \pm 1|^2 px_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

where the coefficients have an interesting form.

5. The line $RB \equiv x_1 = 0$ cuts k_4 still in two points P_1, P_2 ; projecting these points out of the cusp A , we obtain two lines having as equation

$$m^2x_3^2 - x_2(a^2x_2 - bx_3) = 0. \quad \dots \quad (11)$$

Eliminating $x_2(a^2x_2 - bx_3)$ or $x_2 \cdot p$ out of k_4 and the latter equation, we have

$$(mx_3^2 + nx_1x_2) \pm mx_3^2 = 0$$

therefore

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad (a)$$

$$2mx_3^2 + nx_1x_2 = 0. \quad \dots \quad (b)$$

The equation (b) defines a conic, passing through the two points P_1P_2 in which the curve k_4 is cut still by the pair of lines (11). By eliminating x_2^2 out of (k₄) and (b) we obtain the equation of P_1P_2 in the form:

$$P_1P_2 \dots mnx_1 + 2p = 0.$$

On the line P_1P_2 lie two other points Q_1, Q_2 common to k_4 and P_1P_2 ; so we can now project the points Q_1, Q_2 out of A by two lines cutting k_4 still in the fourth intersections Q'_1, Q'_2 , and so on.

There is no difficulty to show, that the general equation of all these projections $P_1P_2, Q'_1Q'_2, S'_1S'_2, \dots$, will be

$$mnx_1 + k(k + 1)p = 0 \quad , \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad \dots \quad (12)$$

and we see, that all these projections are again elements of the pencil $[R]$.

By means of the involutory pencil of conics (1) we find with respect to (3) and (12):

$$\frac{k(k+1)}{mn} = \frac{\mu}{(n-m\mu)^2}.$$

1) In my paper: *Ein Satz über die ebene Kurve 4. Ordnung mit einer Spitze 2. Art*, Sitzungsberichte der K. Akademie in Wien, IIa, CXIX, 1910, I have considered a few similar relations for this curve of deficiency one. Next time I shall treat the same relations for a quartic curve with a spinode and a rhamphoid cusp (deficiency zero).

From this equation follows :

$$u_1 = \frac{n(k+1)}{mk} \quad , \quad u_2 = \frac{nk}{m(k+1)},$$

therefore any line having the form (12) cuts k_4 on the two conics :

$$\left. \begin{aligned} mkx_3^2 + n(k+1)x_1x_2 &= 0 \\ m(k+1)x_3^2 + nkx_1x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

By eliminating x_1 out of (12) and (13) we obtain two pairs of pencils with non-consecutive rays in correspondence (1, 2), by means of which any number of discrete points of k_4 can be determined; thus

$$\left. \begin{aligned} mnx_1 + k(k+1)p &= 0 \\ m^2x_3^2 - (k+1)^2x_2p &= 0 \\ m^2x_2^2 - k^2x_2p &= 0 \end{aligned} \right\} ,$$

k being any entire positive number or zero.

Let us observe, that any four lines having an equation of the form (12), give a cross ratio which is independent of the coefficients in the equation of k_4 , or, what is the same, that the *cross ratio* for the same four values of $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, is *unaltered for all the curves of the considered form*.

If we retain the three fixed rays

$$\begin{aligned} x_1 = 0 \quad , \quad p = 0, \\ 4mnx_1 - p = 0, \end{aligned}$$

any line of the form (12) gives with these three rays an absolute constant cross ratio for all the curves of the species k_4 , where k is a constant number :

$$L' = \frac{1}{4k(k+1)},$$

also a function of the chosen value of k for the same curve k_4 .

6. We have already indicated the two systems of projections, the *first* of which is acquired by projecting the two points of contact on the double tangent out of the cusp A , and the *second* by projecting the two common points to k_4 and $x_1 = 0$ out of the same centre of projection. We take now two of those projections, belonging to *various systems* for the same value of k , having the equations

$$\begin{aligned} 4mnx_1 + [(2k)^2 - 1]p &= 0 \\ mnx_1 + k(k+1)p &= 0. \end{aligned}$$

By the term "same value of k " for the two systems is meant that the *same number of projections* was made in both systems. These rays of the pencil $[R]$ bear with the fixed pair of rays

$$\begin{aligned} 4mnx_1 - \rho &= 0 \dots \dots \dots (d) \\ \rho &= 0 \end{aligned}$$

a cross ratio Δ'' . By means of the parameters

$$\frac{mn}{k(k+1)}, \frac{4mn}{(2k)^2-1}, 0, -4mn,$$

we shall obtain

$$\Delta'' = \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^2, (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

therefore a value invariable for all the curves k_4 with a rhamphoid cusp and a node, if the same value of k for all such curves has been chosen.

We see yet also, that the four points of intersection of the curve k_4 with each line h , passing through R , this point R , and the common point to h and $x_2 = 0$ are three pairs of the same involution. Then the pair $x_1 = 0, x_2 = 0$ is a degenerated conic of the pencil of conics (1) which bears k_4 with the projective pencil $[R]$.

7. A line passing through the point (M) of intersection of the double tangent (d) and the cuspidal tangent $(x_3 = 0)$ has an equation of the form

$$\mu^2 x_2 + (4mnx_1 - a^2 x_2 + bx_2) = 0 \dots \dots (14)$$

If we eliminate d out of (14) and (k_4) , writing the equation of k_4 in the form

$$(mx_3^2 - nx_1x_2)^2 + x_2x_3^2(4mnx_1 - a^2x_2 + bx_3) = 0 \dots (k_4)$$

we shall obtain

$$\mu^2 x_2^2 x_3^2 - (mx_3^2 - nx_1x_2)^2 = 0$$

therefore

$$\mu x_2 x_3 \pm (mx_3^2 - nx_1x_2) = 0 \dots \dots (15)$$

To any ray of the pencil $[M]$ corresponds a pair of conics (15), which form an involutory system for all values of μ . The two conics of the conjugate pair have in the vertex B a pair of tangents

$$\mu x_3 \pm nx_1 = 0,$$

which is divided harmonically by the two lines $x_1 = 0, x_3 = 0$. All the conics of the involutory system osculate one another in the cusp A on $x_2 = 0$.

From this follows an other generation of k_4 .

Let be given an involutory pencil of conics, which osculate each other in a point (A) on the common tangent $(x_2 = 0)$, and a pencil of rays $[M]$ having its vertex (M) on the tangent $x_2 = 0$, then we can arrange a correspondence between these pencils in this manner, that the parameter of a ray in the pencil $[M]$ is the square of the parameter belonging to the corresponding conjugate pair of conics in the involutory pencil.

The two pencils generate a curve of order five, which breaks up into the common corresponding right line $x_2 = 0$ and the curve k_4 of the considered species.

If we choose under all these conjugate pairs of conics that, for which the two tangents in the point B are identical with the tangents

$$nx_1 \pm ax_3 = 0$$

of the curve k_4 in the same point, then this pair will meet k_4 in two points U_1, U_2 ; we obtain the joining line of these points out of the equation of the considered pair of conics, i. e. out of

$$ax_2x_3 \pm (mx_3^2 - nx_1x_2) = 0;$$

so we have by the latter definition

$$U_1U_2 = a^2x_2 + d = 0$$

or

$$U_1U_2 = 4mua_1 + bx_3 = 0,$$

and this is the line passing through the vertex B and the common point (M) to the double tangent and the cuspidal tangent. Therefore the four points U_1, U_2, B and M lie on a straight line.

On each line passing through M we have obtained four points of k_4 as intersections of this line with two conics belonging to a pencil, which has three consecutive base-points in A , and the fourth base-point in B . To this pencil of conics belongs also the pair of lines $x_2 = 0, x_3 = 0$ as a degenerated conic. We can now say, that on each line s , passing through M , the two pairs of intersections with k_4 , the point M and the common point to s and $x_3 = 0$ are three pairs of elements of the same involution.

All the relations, considered here, remain unaltered, if the double point B is a "conjugate point" (acnode).

Scheikunde. — De Heer HOOGWERFF biedt, namens de Heeren J. BÖESEKEN en H. J. PRINS een mededeeling aan over: „*De synthese van as. heptachloorpropaan uit tetrachloor-aethyleen en chloroform onder medewerking van aluminiumchloride*”.

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN).

Bij een vorig onderzoek van een onzer (Recueil XXIX p. 109 (1910)) werd gevonden dat dichlooracetylchloride door aluminiumchloride in twee frichtingen wordt ontleed. Ten eerste splitst het zich in chloroform en kooloxyde; ten tweede ontstaat naast kooloxyde en zoutzuur een fraai gekrystalliseerd bij 32° smeltend produkt, waaraan provisorisch de samenstelling C_5Cl_{10} werd toegekend. Intusschen is het ons gelukt de ontleding zoodanig te leiden, dat een groote hoeveelheid dezer stof werd verkregen, waardoor eenige omzettingsprodukten konden worden bestudeerd. Uit dit onderzoek volgt, dat de stof identisch is met het door FRITSCH (Ann. 297 [1897] pag. 312) uit pentachlooraceton en phosphorpentachloride verkregen as. heptachloorpropaan, zooals uit onderstaand overzicht blijkt:

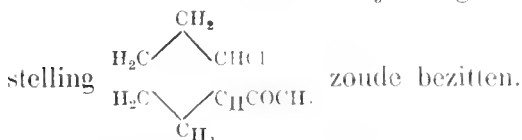
	Sm.p.	Kookp.	Analysen	Ontleding met NaOC H ₃ tot trichloorpropyleen
Produkt uit CHCl ₂ COCl en AlCl ₃ (B. en Pr.)	32° Stolp.	132° bij 31 mm 147° „ 43 „	C = 12.95 en 13.03 H = 0.52 „ 0.27 Cl = 86.60 „ 86.56	Met 1 M l. ontstond eene naar vruchtbaarheid rijkende olie, die alle eigenschappen v. h. door FRITSCH bereide C ₅ Cl ₆ bezat. Kp 209.
			Berekend C = 12.61 H = 0.33 Cl = 87.06	
CHCl ₂ CCl ₂ CCl ₂ (FRITSCH)	30°	150-151° bij 50 mm	Cl = 86.8	Met 1 Mol. ontstond eene naar framboos rijkende olie C ₅ Cl ₆ , Kp. 209 2.0, die met verdere 3 mol. in trichlooracrylzure-ortho-aethyl ester overgaat.

Terwijl wij ons bezighouden met de bestudeering van het vraagstuk hoe het heptachloorpropaan uit dichlooracetylchloride is ontstaan, is een onzer (Pr.) er in geslaagd dit chloride in zeer goede opbrengst te verkrijgen door direkte additie van chloroform aan tetrachlooraethyleen onder invloed van aluminiumchloride. Worden deze chloriden aan een terugvloei koeler gedurende eenigen tijd met elkander gekookt, dan is het aethyleenperchloride bijna geheel in heptachloorpropaan overgegaan.

Hierbij diene opgemerkt, dat noch chloroform, noch aethyleen

tetrachloride, noch het eindprodukt C_2Cl_7H zich met het aluminiumchloride vereenigt. Wel lost een weinig van den katalysator in C_2Cl_4 op, maar een additieprodukt kan niet worden afgezonderd. [Men kan aluminiumchloride uit C_2Cl_4 uitstekend omkristalliseeren, door het met het oplosmiddel tot 130° — 140° dus in toegesmolten buis, te verhitten. Bij afkoeling verkrijgt men het dan in groote zeszijdige kristalplaten, die na afgewassen te zijn met tetrachloorkoolstof en na droogzuiging geen koolstof meer bevatten].

Deze eenvoudige synthese heldert nu niet alleen het verloop der reactie van FRIEDEL en CRAFTS op, maar zij werpt belangrijk licht op de katalytische werking van aluminiumchloride, daar zij een bewijs te meer levert, dat de theorie der tusschenprodukten ter „verklaring” dezer werking moet worden opgegeven, hetgeen door een onzer reeds meermalen is betoogd. Wat het eerste punt betreft wijs ik op de onderzoekingen van KRAPIWIK (Cent.Blatt. 1910, I. pag. 1335) en van DARZENS (Compt. Rend. 150 p. 707). De eerste heeft uit zuurchloriden en onverzadigde aliphatische koolwaterstoffen met aluminiumchloride onverzadigde ketonen opgebouwd, de laatste uit tetrahydrobenzol op deze wijze het acetyltetrahydrobenzol bereid en tevens aangetoond dat hierbij een hydrochloride als tusschenprodukt ontstaat, waarvan zonder nader bewijs aangenomen wordt, dat dit de samen-



Er blijkt uit deze waarnemingen, dat er bij de condensatie aanwezig moeten zijn een onverzadigde verbinding en een andere stof (veelal een chloride); en uit onze synthese is het besluit te trekken, dat inderdaad het chloride (hier chloroform) wordt gesplitst en de stukken door de dubbele binding (hier van het aethyleenperchloride) worden opgenomen. Hierbij blijft de reactie staan, omdat het heptachloorpropaan stabiel is. ¹⁾

Wat het tweede punt betreft, er zijn geen aanwijzingen van tusschenprodukten (zie overigens de onderzoekingen van MENSCHUTKIN die ook geen additieprodukten van de benzolkoolwaterstoffen met aluminiumchloride heeft kunnen aantoonen. Cent.Blatt. 1910, I. p. 168), de belangrijkste katalytische werking moet dus plaats vinden gedu-

¹⁾ Er moge op gewezen worden, dat door deze onderzoekingen het bewijs geleverd is, dat er ten opzichte van de reactie van FRIEDEL en CRAFTS, tusschen het benzol en andere onverzadigde verbindingen geen essentieel verschil bestaat.

rende het eerste stadium der reactie, het oogenblik waarop de aanwezige molekulen onder den invloed van den katalysator komen. Dit is het eenvoudigst zoodanig te denken, dat het aluminiumchloride het chloroform in dier voege activeert dat de molekuuldeelen CHCl_3 en Cl zich kunnen hechten aan de eveneens geactiveerde dubbele binding van het aethyleenperchloride.

Wij hebben in de tweede plaats vastgesteld dat het pentachlooraethaan met chloroform en aluminiumchloride ook zeer gemakkelijk as. heptachloorpropana geeft. Daar het $\text{C}_2\text{Cl}_5\text{H}$ door aluminiumchloride bij het kookpunt van chloroform gesplitst wordt in C_2Cl_4 en HCl (zie ook MOUNEYRAT Bull. [3] 19 p. 179) is deze condensatie nu zeer eenvoudig te verklaren: het pentachlooraethaan splitst C_2Cl_4 af en dit addeert chloroform. Belangwekkend is deze synthese omdat wij hier te doen hebben met de opeenvolging van twee zeer eenvoudige gevallen van de reactie van FRIEDEL en CRAFTS (Recueil 29 (1910) p. 92)



In geval I wordt het chloride zoodanig geactiveerd dat ontleding intreedt, in geval II wordt het chloride wel geactiveerd maar niet ontleed.

Het onderzoek der aethaanchloriden wordt in verschillende richtingen voortgezet, de resultaten zullen elders worden gepubliceerd.

Delft, Dec. 1910.

Org. Chem. Lab.
der Techn. Hoogeschool.

Physiologie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer G. VAN RIJNBERG. „*Unisegmentale reflexen.*”

(Mede aangeboden door den Heer T. PLACE).

Voor physiologen en clinici geldt als eene grondstelling der reflexleer, dat als de meest eenvoudige uiting der reflexfunctie gelden mag een unisegmentaal of monomeer reflex, waarbij het de prikkel ontvangend huidveld, de aanvoerende zenuwbaan, de omkeerplaats in het ruggemerg, de afvoerende zenuwbaan en de, de reactie volvoerende spier (of klier), alle en uitsluitend binnen een zelfde lichaams- en ruggemergssegment gelegen zijn. Het verloop der intredende dorsale wortelvezels ten opzichte der cellen van den dorsalen en ventralen hoorn (coördinatorisch en executoirisch systeem) binnen hetzelfde ruggemergssegment, schijnt voor een monomeer reflex als een alleszins voldoende anatomisch substraat opgevat te kunnen worden. Toch had niemand,

voorzoover mij bekend, ooit een dergelijk eenvoudig reflex waargenomen, daar in alle gevallen waarin reflexen onderzocht werden, welker aan- en afvoerende zenuwbanen tot dezelfde ruggemergszenuw, en dus tot 't zelfde lichaamssegment behoorden, het ruggemergssegment, dat als keerpunt diende, nog met een grooter stuk ruggemerg samenhang en dus niet anatomisch en functioneel geïsoleerd was.

Sedert eenigen tijd mij-zelve de vraag voorgelegd hebbend of een dusdanig geïsoleerd ruggemergssegment geheel zelfstandig tot reflexfunctie in staat is, gelukte het mij voor eenige jaren, in aansluiting aan oudere onderzoekingen, te vinden dat, gelijk elders ¹⁾ medegedeeld, bij de pad (*Bulo vulgaris*) een stukje ruggemerg, ongeveer omvattend 't instralingsgebied van de 2^{de} ruggemergszenuw (= 1^{ste} armzenuw), na vernieling van het geheele overige centrale zenuwstelsel, nog in staat is reflexen te doen plaats vinden.

Thans kan ik de resultaten mededeelen van een onderzoek op honden. De proeven werden daarbij op de volgende wijze ingericht.

Bij een zich in morphine-chloroform-aethernarcose bevindenden liefst jongen hond werd het ruggemerg in het thorako-lumbair-gebied over minstens 7 segmenten blootgelegd, dan, zonder de dura meninx te openen, rechts en links van voren naar achteren minstens drie zenuwwortelparen doorgesneden, één intact gelaten en weer drie of meer beiderzijds doorgesneden. Huid- en spierwond werden daarop met een paar hechtingen voorloopig gesloten, en gewacht tot het dier uit de narcose voldoende ontwaakt was om op pijnlijke huidprikkelers te reageeren. Dan werd op de gewone gebruikelijke methode (knijpen) rechts en links op den romp ligging, vorm en uitbreiding bepaald der huidvelden, ongevoelig geworden ten gevolge van de doorsnijding der zenuwwortels, en van de daartusschen liggende gevoelige zone, beantwoordend aan het innervatiegebied (dermatoom) der gespaarde wortel. De gevonden grenzen werden als gewoonlijk met huidpotlood aangeteekend.

Nu werd de hond weder genarcotiseerd, de hechtingen losgeknoopt, 't ruggemerg weer blootgelegd, de dura mater van 't segment van het gespaarde wortelpaar opengeknipt, 't verloop der vezelbundeltjes daarvan nauwkeurig in oogenschouw genomen en dan het ruggemerg iets vóór de intréeplaats van 't meest craniale, iets achter die van het meest caudale bundeltje vlug dwars doorgeknipt, en ter bloedstilling wat warm vochtig gaas erop gelegd. Dadelijk daarop werd met de narcose opgehouden en een begin gemaakt met het onderzoek naar de eventueel nog voorhanden reflexfunctie.

Het is mij nu bij een reeks proeven gebleken, dat wanneer het

¹⁾ *Folia Neurobiologica*. II, 6. 718—729. Leipzig. 1909.

geïsoleerde segment behoorde tot die, welke aan de verzorging der achterpooten met gevoels- en bewegingszenuwen deelnemen, elk teeken van reflectorische reactie op prikkels, aangebracht in het geïsoleerde dermatoom, steeds uitbleef. Was daarentegen een segment uit het thoracale of hoogere lumbaalgebied geïsoleerd geworden, dan was het gewoonlijk mogelijk eenige uiting van behouden reflexfunctie waar te nemen. Op lichte mechanische prikkeling der huid binnen het van te voren gevoelig gevonden geïsoleerde dermatoom, bleek dan regelmatig eene korte samentrekking op te treden in bepaalde spieren. Bij isolatie van het 13^{de} thoracale of van een der eerste lumbaalsegmenten trad deze samentrekking op in een min of meer wel omschreven mootje van den *M. longissimus dorsi* en *M. ileocostalis*. De plaats waar deze samentrekking optrad, scheen af te hangen van het reeksnummer van het geïsoleerde segment. Was een der hoogere thoracale segmenten geïsoleerd geworden, dan trad naast samentrekking in den *M. longissimus dorsi* nog eene in de tussenribspieren van hetzelfde segment op, waardoor twee ribben naar elkander toe werden bewogen.

De genoemde reflectorische spierschokken konden het gemakkelijkst opgewekt worden door een uiterst zachte mechanische prikkel die op een niet al te erg omschreven huidoppervlak aangebracht werd, als bijv. door met een vingertop licht tegen de kort geknipte haren op te wrijven. Echter scheen de prikkel, hoe dan ook aangebracht, slechts uitwerking te hebben wanneer zij in het dorsale huidgebied van het dermatoom werd aangewend. Slechts eenmaal scheen het, dat op prikkeling van het ventrale gebied van *L I* samentrekkingen optraden in een ongeveer onder 't geïsoleerde dermatoom gelegen gedeelte van den *obliquus abdominis*.

Nog duidelijker vond ik deze reflexverschijnselen, wanneer ik mij bediende van de door mijn assistent *DUSSER DE BARENNE* uitgewerkte methode¹⁾ der reflexverhooging door streng plaatselijke aanwending van strychninezouten in oplossing, op het dorsale oppervlak van het ruggemerg. Werd b.v. strychninenitrat in 1% oplossing op het geïsoleerde ruggemergssegment aangebracht, dan bleek geregeld de reflexprikkelbaarheid van het segment zeer verhoogd. Op de lichtste mechanische aanraking volgden dan samentrekking in de genoemde spieren, veel duidelijker en intenser dan te voren. Bovendien trad, bij prikkeling der huidzone aan eene zijde, niet oogenschijnlijk de zelfde intensiteit, samentrekking op in de symmetrische spieren van de andere lichaamsheft, de uiting dus van een gekruist reflex.

¹⁾ Vglk. *Folia Neurologica* V. 1, Haarlem 1911.

De hier medegedeelde verschijnselen zijn, mits men bij de ingrepen op wervelkolom en ruggemerg voorzichtig te werk ga, altijd waar te nemen. Ook bij zoogdieren schijnt dus althans in 't borst- en hoogere lendengebied elk ruggemergssegment afzonderlijk en onafhankelijk van het overige centrale zenuwstelsel tot het verrichten der reflexfunctie in staat te zijn.

Physiologie. — De Heer PEKELHARING biedt eene mededeeling aan van den Heer J. R. KATZ: „*Onderzoekingen over de analogie tusschen opzwellen en mengen. 2e Mededeeling: Opzwellbare kristallen en mengkristallen.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. ZWAARDEMAKER).

Proeven met opzwellbare kristallen.

De vraag, hoe het imbibitie-water in opzwellbare kristallen gebonden is, heeft langen tijd de aandacht getrokken ¹⁾, maar een helder inzicht is nog niet verkregen. Opdat er wat meer licht in deze kwestie zou kunnen komen, leek het vóór alles noodig, dat nieuwe proeven genomen werden. Want de tot nu toe verrichte zijn te gering in aantal om tot basis eener vruchtbare discussie over de waarde der verschillende theorieën te kunnen strekken.

In de eerste plaats komt dan voor bepaling in aanmerking de vorm der lijn volgens welke de waterdampspanning van een opgezwollen kristal van den imbibitie-graad afhangt.

Bij een aantal opzwellbare kristallen heb ik daarom deze lijn bepaald. De waterdampspanning werd evenals in de vorige verhandeling uitgedrukt als fractie (h) van de maximumspanning van water bij dezelfde temperatuur (hygrometrische lijn).

In de eerste plaats heb ik proeven genomen met zuiver kooloxyd-haemoglobine uit paardebloed en uit hondebloed, dat ik op de door Prof. PEKELHARING beschrevene methode ²⁾ in zijn laboratorium en onder zijn leiding bereid heb. De onderzochte stof bestond uit fraaie rhombische kristalletjes, werd tusschen twee ongeglazuurde porse-

¹⁾ Literatuuroverzichten over opzwellbare kristallen vindt men bij:

O. LEHMANN, *Molekularphysik* II, p. 550—553 (1888).

L. MAILLARD, *Revue Générale des Sciences* 9, p. 608—614 (1898).

FR. N. SCHULZ, *Die Krystallisation von Eiweisstoffen*, Jena, GUSTAV FISCHER.

²⁾ Voordrachten over Weefselleer, p. 271.

leinen plaatjes afgeperst en daarna in gewogen glazen schaaltes boven zwavelzuur-watermengsels van bekende dampspanning geplaatst tot er evenwicht was gekomen; steeds werd er voor gezorgd dat de glazen klokjes, waarin deze proeven genomen werden, genoeg kooloxyde bevatten om de dissociatie der verbinding te beletten. De in evenwicht gekomen stof bleek bij spectroscopisch onderzoek uit zuivere kooloxydhaemoglobine te bestaan; geen spoor methaemoglobine was aantoonbaar. Door drogen bij 115° C. in een droogstoofje werd bij elk dezer porties kooloxydhaemoglobine het watergehalte bepaald. De proef werd eenmaal genomen met kooloxydhaemoglobine uit hondenbloed, tweemaal met die uit paardbloed. De uitkomsten dezer beide laatste proefreeksen stemden onderling zeer goed overeen, een nieuwe aanwijzing dat het zuivere haemoglobine een samenstelling van betrekkelijk groote standvastigheid heeft ¹⁾.

De verkregen hygrometrische lijnen heb ik op de plaat laten reproduceeren. Zij vertoonen een continu beloop, geheel verschillend van dat der kristalwaterhoudende zouten. Daar heeft bij toenemend watergehalte de dampspanning een constante grootte totdat alle zout in hydraat is overgegaan; neemt de stof dan nog meer water op, dan begint zich een ander hydraat te vormen, de dampspanning neemt met een sprong in grootte toe en blijft op die grootte constant tot alle zout in het tweede hydraat is omgezet. Dergelijke sprongen treden op als zich een derde of een vierde hydraat vormen. Geheel anders is nu het beloop der dampspanningslijn bij kooloxydhaemoglobine; geen dergelijke discontinuïten komen voor, de lijn begint met een bijna horizontaal stukje, keert in den beginne de bolle zij naar onderen, krijgt een buigpunt en keert bij nog grooteren imbibitiegraad den hollen kant naar beneden ²⁾.

¹⁾ Analoge proeven waren eerst genomen met oxyhaemoglobine, maar voerden niet tot volwaardige resultaten daar bij het in evenwicht komen een deel dezer stof in zijn isomeer het methaemoglobine overging. Prof. PEKELHARING raadde mij toen, de proeven met kooloxydhaemoglobine voortzetten.

²⁾ HOPPE SEYLER e. a. (cf. Schäfer's Textbook of Physiology I, p. 205) meenen, dat er een principiëel onderscheid gemaakt mag worden tusschen het imbibitiewater dat bij drogen op kamertemperatuur wordt afgegeven en het water dat eerst bij verhitting op 115° C. wordt losgelaten. Dit laatste — in de hygrometrische lijn voorgesteld door het bijna horizontale stukje — noemen zij het „kristalwater” der stof. Tot een zóo principiële onderscheiding der beide vloeiend in elkaar overgaande deelen eener zelfde continue lijn bestaat — dunkt mij — geen voldoende grond. Bovendien, *hetzelfde* verschil vindt men bij amorfe opzwellbare stoffen (ook bij onbepert opzwellbare zooals serumalbumine en gummi arabicum) die vermoedelijk vloeistoffen van zeer groote viscositeit zijn, waar dus van „kristalwater” geen sprake kan zijn. Ook daar verliest de op kamertemperatuur gedroogde stof bij verhitting tot 110° C. nog eenig water.

Vervolgens heb ik het kristalliseerende eiwit uit kalabaszaden onderzocht, een globuline dat Dr. G. GRÜBLER door uittrekken met warme keukenzout-oplossingen in groote hoeveelheden heeft leeren bereiden.¹⁾ Ik kon daarbij gebruik maken van een hoeveelheid stof, die Dr. GRÜBLER zelf gemaakt had; zij bestond uit fraai gevormde octaëdrische kristallen en kwam ook overigens geheel overeen met de beschrijving die deze onderzoeker er van gegeven heeft. De techniek der dampspanningsbepalingen bij deze en bij de verder te bespreken stoffen was dezelfde als die welke bij de amorfe stoffen gebruikt werd. De verkregen hygrometrische lijn is op de plaat afgebeeld; zij stemt in vorm met die der kooloxydhaemoglobinen overeen.

Als derde voorbeeld onderzocht ik de kristalliseerende Bence Jones'sche albumose, die Mej. A. GRUTTERINK en Mej. WEEVERS DE GRAAFF uit pathologische menschelijke urine bereid hebben²⁾. De voor het onderzoek gebruikte stof werd mij op welwillende wijze door Mej. GRUTTERINK afgestaan: zij had haar door uitwasschen met water en dekanteeren zooveel mogelijk van ammoniumsulfaat bevrijd. De onderzochte stof bestond uit fraaie prismatische, vermoedelijk hexagonale, kristalletjes. Ook hier werd een continu verloopende, S-vormige lijn verkregen (zie de plaat).

Naast deze drie eiwitachtige stoffen onderzocht ik nog een kristalliseerend polysaccharide, het amyloextrine, en wel twee op verschillende wijzen bereide monsters. Het eerste was op de methode van NÄGELI³⁾ gemaakt en kwam overeen met de beschrijving die deze geleerde er van geeft; dat ik deze stof onderzoeken kon, ben ik aan Prof. H. P. WIJSMAN verschuldigd, die haar door één zijner laboranten onder zijn toezicht voor mij bereiden liet. Het andere was gemaakt volgens het door Prof. ARTHUR MEYER uit Marburg gegeven voorschrift⁴⁾ en was mij door dezen geleerde welwillend voor deze proeven afgestaan. Het bevatte nog een spoor dextrine, maar dit was te weinig om storingen van beteekenis in den vorm der hygrometrische lijn te kunnen geven. Gelijk op de plaat is afgebeeld, werd bij beide monsters amyloextrine een continu verloopende lijn van S-vormige gedaante gevonden⁵⁾.

1) Journ. f. prakt. Ch. **23**, p. 97—137.

2) Zeitschr. f. physiol. Chem. **34**, p. 393—407.

3) Lieb. Ann. **173**, p. 218—227 (1874); voor de beschrijving der kristalletjes zie in het bijzonder p. 223. Zie ook BROWN en MORRIS, Journ. Chem. Soc. **55**, p. 449 (1889).

4) Untersuchungen über die Stärkekörner, Jena 1895.

5) Met een kristalliseerend lipoide, het protagon, en een kristalliseerend globuline, het edestine uit hennipzaden, ben ik nog bezig proeven te nemen. De uitkomsten zullen in de uitvoerige publicatie worden medegedeeld.

Resumeerende : bij drie kristallijne eiwitachtige lichamen en bij een kristalliseerend polysaccharide werd de vorm der hygrometrische lijn bepaald. Deze had overal een continu beloop, vertoonde nergens discontinuïteit zooals bij de kristalwaterhoudende anorganische zouten en had overal een S-vormige gedaante; de lijnen der verschillende stoffen leken sterk op elkaar.

De vergelijking van opzwellbare kristallen met mengkristallen.

Vragen wij ons thans af of dit gedrag in overeenstemming is met de in de vorige mededeeling ¹⁾ ontwikkelde hypothese, dat het opzwellen zou berusten op de vorming eener vaste oplossing van water in het opzwellbare lichaam.

Vaste oplossingen in den kristallijnen toestand noemt men *mengkristallen*. De genoemde theorie, op de opzwellbare kristallen toegepast, luidt dus : *kristallen die opzwellen vormen mengkristallen met water*.

De kennis der mengkristallen danken wij voornamelijk aan de onderzoekingen der physico-chemici gedurende de laatste vijfentwintig jaren; het zijn vooral O. LEHMANN, RETGERS, VAN 'T HOFF en BAKHUIS ROOZEBOOM geweest die hier baanbrekend werk hebben verricht. En zóó talrijk is het aantal voorbeelden van stoffen geworden, die onderling mengkristallen geven, dat men er toe gedwongen wordt, het gedrag der „gewone” stoffen, gelijk kwarts, anorganische zouten, metalen ten opzichte van water — waar deze mengbaarheid in den vasten toestand weinig schijnt voor te komen — als gevallen op te vatten waar deze zóó klein is, dat ze gemakkelijk aan de waarneeming ontsnapt.

Karakteristiek voor een mengkristal is, dat het kristal een zekere hoeveelheid van één der componenten (in casu water) kan opnemen of verliezen, terwijl het kristal homogeen blijft. En voorts (wat hiermee nauw samenhangt), dat de dampspanning van die component daarbij volgens een continue lijn van de samenstelling afhangt. ²⁾

Gelijk men ziet, gedragen de opzwellbare kristallen zich inderdaad als mengkristallen; zij vallen zelfs onder de definitie „mengkristal” — dunkt mij. Kan de theorie echter ook het „opzwellen”,

¹⁾ Deze zittingsverslagen, p. 649—666. Op pag. 663 is een zinstorende drukfout blijven staan; op den onderste regel dier pagina leest men: holle kant, dit moet zijn: holle kant.

²⁾ Gewoonlijk drukt men dit criterium in eigenschappen der smeltlijn uit; deze hangt echter nauw met de dampspanningslijn samen, zoodat dit geen principiëel verschil maakt.

het grooter worden bij wateropname verklaren? RETGERS¹⁾ toonde reeds in 1889 aan, dat bij mengkristallen het volume van het mengsel bij eerste benadering gelijk is aan de som van de volumina der componenten. Toegepast op de imbibitie leert deze regel, dat als een opzwellbaar kristal met een volume van één mM³ één mM³ water opneemt — gelijk bij de kristallijne Bence Jones'sche albumose voorkomt — het volume van het opgezwollen kristal twee mM³ groot moet zijn; en waar het kristal daarbij homogeen blijft, kan het niet anders of alle lengteafmetingen moeten aanmerkelijk in grootte toenemen.

Ten slotte rijst de vraag: maar, zijn er nu ook nog andere stoffen bekend, ook b.v. met minder hoog moleculairgewicht, die mengkristallen met water vormen? Het zijn vooral TAMMANN en zijn leerling LÖWENSTEIN, die een reeks voorbeelden daarvan gevonden hebben. TAMMANN²⁾ vond de eerste gevallen in 1896 bij het magnesiumplatina-cyanaur en bij een heele groep silicaten, de z.g. zeoliethen. LÖWENSTEIN³⁾ vond in 1909 een reeks nieuwe voorbeelden: eenige neutrale oxalaten zooals die van cerium, thorium, erbium en lanthanium, het strychninesulfaat en het basisch zirkoniumoxalaat ($Zr(C_2O_4)_2 \cdot 2 Zr(OH)_4 \cdot aq.$). Ik zelf heb in den loop mijner onderzoekingen over opzwellbaarheid in 1907 nieuwe voorbeelden gevonden bij het flavonol-derivaat quereetine en de daarvan afgeleide glucosiden sophorine en quercitrine⁴⁾. Er is dus een heele reeks voorbeelden bekend en bij systematisch zoeken zal dit aantal zeker nog snel toenemen⁵⁾.

1) Zie NERNST, Theoretische Chemie, 2e dr., p. 121.

2) Wiedemann's Ann. N. F. **63**, p. 16—22 en Zeitschr. f. physikal. Chem. **27**, p. 323—336. TAMMANN vat deze kristallen op als vaste mengsels van een water-vrije zeolieth-rest met een chemische verbinding van dezen rest met water (een hydraat). Deze verklaring is niet principiëel verschillend van de hier gegevene, slechts minder algemeen. Immers, elke verbinding is ten deele gedissociëerd en anderzijds hebben wij ernstige reden te vermoeden dat de meeste mengsels van water met een andere stof hydraatmolekulen bevatten. Het bewijs dat *alle* water als hydraatmolekulen gebonden zou zijn is zeer moeilijk te leveren en door TAMMANN ook niet geleverd. Noemt men deze kristallen mengkristallen met water, dan laat men die vraag in het midden en neemt dan — dunkt mij — een veiliger standpunt in.

3) Zeitschr. f. anorgan. Chemie **63**, p. 69—139.

4) Deze proeven werden tot nu toe niet gepubliceerd; dit zal binnenkort geschieden.

5) Zulke vondsten hebben — dunkt mij — een groote beteekenis voor de beoordeeling der waterbepalingen in de preparatieve, en in het bijzonder de organische scheikunde. Immers de gewoonte, de analyse-cijfers bij de kristalwaterbepalingen tot geheele getallen af te ronden, blijkt niet langer geoorloofd. Dat het onderzochte kristal een hydraat van constante samenstelling is, kan niet bewezen worden door het feit dat het gevonden analyse-cijfer ongeveer een geheel getal is, maar alleen door het bepalen van den vorm der hygrometrische lijn of van dien der smeltlijn.

Op de plaat heb ik de hygrometrische lijnen van vier dezer stoffen : het quereitrine, het zeoeth calciumhabasiet, het thoriumoxalaat en het basisch zirkoniumoxalaat laten reproduceeren, om hun vorm met dien der opzwellbare kristallen te vergelijken. Het rechte horizontale beginstuk is bij sommige dezer stoffen aanmerkelijk langer, bij andere, zooals quereitrine van bijna dezelfde grootte-orde als bij de opzwellbare kristallen ; maar principieel hebben zij dezelfde gedaante : een S-vormige lijn, die begint met een bijna horizontaal stuk, de bolle zijde naar onderen keert, vervolgens een buigpunt krijgt en bij nog grooter watergehalte den hollen kant naar onderen wendt ¹⁾.

Bijzonder interessant is eindelijk het gedrag van het basisch zirkoniumoxalaat, dat LÖWENSTEIN onderzocht heeft ²⁾. Deze stof bestaat uit pyramideachtige dubbelbrekende kristallen, die mengkristallen met water zijn en tot de dubbele grootte opzwellen, als zij boven een 5% zwavelzuuroplossing onder een glazen klok gebracht worden. Een kristal b.v. dat, met een 30% zwavelzuuroplossing ($h = 0.75$) in evenwicht gekomen, 17 schaaldeelen lang was, had na 3 dagen boven een 5% zwavelzuuroplossing ($h = 0.96$) gestaan te hebben, een lengte van 32 schaaldeelen ³⁾. Evenals SCHIMPER ⁴⁾ dit voor de opzwellbare eiwitkristallen gevonden had, geschiedt het opzwellen ook hier gelijkmatig in alle richtingen, zoodat de kristalvorm bewaard blijft.

Resumeerende zien wij, dat tusschen opzwellbare kristallen en mengkristallen een zóó groote gelijkenis bestaat, dat een grens niet goed te trekken is. Neemt een kristal een andere component tot een mengkristal op, dan zal het daarbij -- volgens den regel van RETGERS -- in grootte moeten toenemen ; is de opgenomen hoeveelheid klein, dan ontsnapt dat toenemen in grootte gemakkelijk aan de aandacht van den waarnemer, is de opgenomen hoeveelheid groot, dan *ziet* men het kristal „opzwellen”.

De opzwellbaarheid van kristallen wordt dus door de theorie, die

¹⁾ Om ruimte bij de reproductie te sparen is in de op de plaat afgebeelde lijnen voor calciumhabasiet en thoriumoxalaat de lijn alleen geteekend voor waarden van i die grooter dan 0.20 zijn.

²⁾ Loc. cit. p. 117.

³⁾ LÖWENSTEIN nam waar, dat de kristallen daarbij veel weker, teaslotte zelfs vloeïend worden. Hetzelfde heb ik bij de haemoglobinekristallen en bij de edestine kristallen gevonden ; bij het imbibitie-maximum zijn zij zoo week, dat men ze door druk tusschen twee porseleinen plaatjes kan doen samenvloeiën, terwijl ze in drogen toestand hard en bros zijn en niet meer vloeien. Dit feit is interessant met het oog op de vraag naar het wezen der vloeibare kristallen ; hier zien wij hoe niet vloeïende kristallen door opname eener tweede component *continu* in vloeïende kristallen overgaan.

⁴⁾ Zeitschr. f. Krystallographie, 1880.

leert dat het opzwellen berust op de vorming eener vaste oplossing, ongedwongen en zonder de invoering van hulphypothesen verklaard. De andere theorieën der opzwellbaarheid vonden juist hier groote moeilijkheden.

Eindelijk wil ik nog even de aandacht vestigen op een feit dat uit een physisch-chemisch oogpunt bijzonder merkwaardig schijnt, maar waarvan de uitvoerige beschouwing buiten het kader dezer mededeeling valt, zoodat ik er de voorkeur aan geef er een afzonderlijk stuk aan te wijden. Ik bedoel de sprekende gelijkenis in de kwantitatieve wetten der mengbaarheid in den vloeibaren en in den kristallijnen toestand, althans wat de hygrometrische lijnen betreft. Men vergelijke b.v. den vorm dezer lijn bij vloeibaar zwavelzuur, met dien bij kristallijn basisch zirkoniumoxalaat en bij kristallijn quercitrine (zie de plaat); de vorm stemt op verrassende wijze overeen.

De proeven met haemoglobine werden verricht in het Physiologisch-Chemisch Laboratorium der Rijksuniversiteit te Utrecht (dir.: prof. C. A. PEKELHARING), die met de andere stoffen in het Physisch-Chemisch Laboratorium der Universiteit van Amsterdam (dir.: prof. H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM, later prof. A. SMITS).

Kristallographie. — De Heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. SCHMUTZER: „*Over de oriëntteering van mikroskopische kristaldoorsneden.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. CARDINAAL).

Wanneer in een preparaat een kristal de traces van 3 niet evenwijdige vlakken vertoont, kan men zonder gebruik te maken van de optische uitdooving de richting van het snijvlak bepalen. Zijn bij een dubbelbrekend mineraal de optische constanten bekend, dan is daartoe de kennis van den uitdoovingshoek en de schijnbare hoek tusschen 2 vlakken (kristal-, slijt- of tweelingsvlakken) voldoende, zooals in eene volgende mededeeling nader zal worden uiteengezet.

In fig. 1 worden de kristalvlakken E , V_1 en V_2 , waarvan het eerste als projektievlak is aangenomen, gesneden door het snijvlak S , dat daarmede de snijlijnen OB , OA_1 en OA_2 levert. Inplaats van de twee hoeken α_1 en α_2 meet men in het snijvlak, dus in het preparaat, tusschen de vlakken $V_1 : E$ en $V_2 : E$ de schijnbare hoeken $A_1OB = h_1$ en $A_2OB = h_2$.

Zij het snijvlak S gegeven door zijn pool P , waarbij de hoogte $PQ = \sigma$ positief gemeten wordt boven en negatief onder het equator-

vlak, terwijl het azimuth $C_1BQ = \varrho$ positief gemeten wordt tegengesteld aan de wijzers van een uurwerk. Worden verder de hoeken

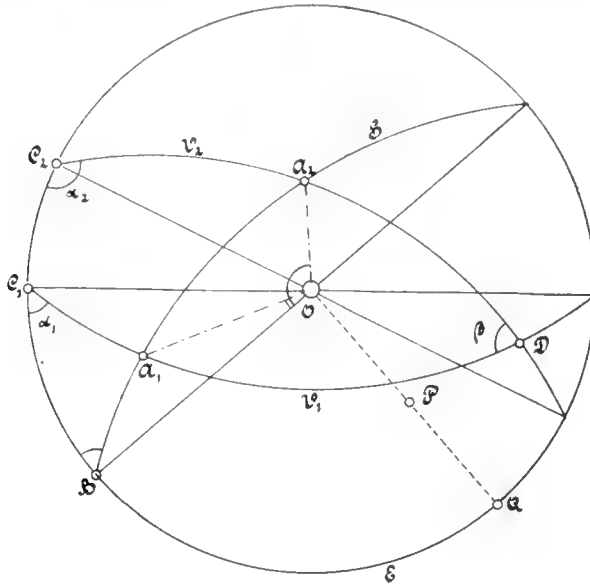


Fig. 1.

α_1, α_2, h_1 en h_2 eveneens gemeten van af het equatorvlak positief in een richting tegengesteld aan de wijzers van een uurwerk, dan geldt voor ΔBA_1C_1 :

$$\cot A_1B = \frac{\sin A_1BC_1 \cot A_1C_1B + \cos A_1BC_1 \cos BC_1}{\sin BC_1}$$

$$- \cot h_1 = \frac{\sin (90-\sigma) \cot \alpha_1 + \cos (90-\sigma) \cos (\varrho-90)}{\sin (\varrho-90)}$$

of

$$\cot h_1 \cos \varrho = \cos \sigma \cot \alpha_1 + \sin \sigma \sin \varrho (1)$$

Nu is $C_1C_2 = \gamma$ eene constante, die met behulp der gegeven hoeken α_1, α_2 en β uit ΔC_1C_2D berekend kan worden en die van C_1 af wordt gemeten positief in een richting tegengesteld aan de wijzers van een uurwerk. In ΔBA_2C_2 is dan:

$$\cot A_2B = \frac{\sin A_2BC_2 \cot A_2C_2B + \cos A_2BC_2 \cos BC_2}{\sin BC_2}$$

$$- \cot h_2 = \frac{\sin (90-\sigma) \cot \alpha_2 + \cos (90-\sigma) \cos (\varrho-90-\gamma)}{\sin (\varrho-90-\gamma)}$$

$$- \cot h_2 = \frac{\cos \sigma \cot \alpha_2 + \sin \sigma \sin (\varrho-\gamma)}{-\cos (\varrho-\gamma)}$$

$$\begin{aligned} \cot h_2 (\cos \varrho \cos \gamma + \sin \varrho \sin \gamma) &= \cos \sigma \cot \alpha_2 + \sin \sigma \sin (\varrho - \gamma) \\ \cot h_2 \cos \varrho \cos \gamma &= \cos \sigma \cot \alpha_2 + \sin \sigma \sin (\varrho - \gamma) - \cot h_2 \sin \varrho \sin \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

Deelt men (1) en (2) op elkaar, dan wordt :

$$\begin{aligned} \cot h_2 \cos \gamma (\cos \sigma \cot \alpha_1 + \sin \sigma \sin \varrho) &= \\ &= \cot h_1 \{ \cos \sigma \cot \alpha_2 + \sin \sigma \sin (\varrho - \gamma) - \cot h_2 \sin \varrho \sin \gamma \} \\ \cos \sigma (\cot \alpha_1 \cot h_2 \cos \gamma - \cot \alpha_2 \cot h_1) &+ \sin \sigma \{ \sin \varrho (\cot h_2 - \cot h_1) \cos \gamma + \\ &+ \cot h_1 \cos \varrho \sin \gamma \} + \cot h_1 \cot h_2 \sin \varrho \sin \gamma = 0. \end{aligned}$$

Stelt men

$$\left. \begin{aligned} \cot \alpha_1 \cot h_2 \cos \gamma - \cot \alpha_2 \cot h_1 &= a \\ (\cot h_2 - \cot h_1) \cos \gamma &= b \\ \cot h_1 \sin \gamma &= c \\ \cot h_1 \cot h_2 \sin \gamma &= d \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

dan gaat de vorm over in

$$\begin{aligned} a \cos \sigma + \sin \sigma (b \sin \varrho + c \cos \varrho) + d \sin \varrho &= 0 \\ \cos \sigma &= - \frac{b \sin \varrho + c \cos \varrho}{a} \sin \sigma - \frac{d}{a} \sin \varrho \end{aligned} \quad (4)$$

Substitueert men deze waarde van $\cos \sigma$ in (1), dan krijgt men :

$$\begin{aligned} a \cot h_1 \cos \varrho &= - \cot \alpha_1 \{ (b \sin \varrho + c \cos \varrho) \sin \sigma + d \sin \varrho \} + a \sin \sigma \sin \varrho \\ &= \sin \sigma \{ - (b \sin \varrho + c \cos \varrho) \cot \alpha_1 + a \sin \varrho \} - d \cot \alpha_1 \sin \varrho \end{aligned}$$

waaruit volgt :

$$\sin \sigma = \frac{a \cot h_1 \cos \varrho + d \cot \alpha_1 \sin \varrho}{(a - b \cot \alpha_1) \sin \varrho - c \cot \alpha_1 \sin \varrho}$$

Uitgewerkt geeft deze vorm

$$\sin \sigma = - \frac{a \cos \varrho + \cot \alpha_1 \cot h_2 \sin \gamma \sin \varrho}{\cot \alpha_1 \sin \gamma \cos \varrho + (\cot \alpha_2 - \cot \alpha_1 \cos \gamma) \cos \varrho}$$

Stelt men hierin weer

$$\left. \begin{aligned} \cot \alpha_1 \cot h_2 \sin \gamma &= e \\ \cot \alpha_2 - \cot \alpha_1 \cos \gamma &= f \\ \cot \alpha_1 \sin \gamma &= g \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

dan wordt :

$$\sin \sigma = - \frac{a \cos \varrho + e \sin \varrho}{g \cos \varrho + f \sin \varrho} \quad (6)$$

Wij vonden boven (4)

$$\cos \sigma = - \frac{b \sin \varrho + c \cos \varrho}{a} \sin \sigma - \frac{d}{a} \sin \varrho$$

$$\begin{aligned}
\cos \sigma &= \left(\frac{b \sin \varrho + c \cos \varrho}{a} \right) \left(\frac{a \cos \varrho + e \sin \varrho}{g \cos \varrho + f \sin \varrho} \right) - \frac{d}{a} \sin \varrho = \\
&= \frac{(b \sin \varrho + c \cos \varrho)(a \cos \varrho + e \sin \varrho) - d(g \cos \varrho + f \sin \varrho) \sin \varrho}{a(g \cos \varrho + f \sin \varrho)} = \\
&= \frac{\sin^2 \varrho (eb - fd) + \sin \varrho \cos \varrho (ab + ec - gd) + ac \cos^2 \varrho}{a(g \cos \varrho + f \sin \varrho)} = \\
&= \frac{h \sin^2 \varrho + b \sin \varrho \cos \varrho + c \cos^2 \varrho}{g \cos \varrho + f \sin \varrho} \dots \dots \dots (7)
\end{aligned}$$

waarin

$$h = \cot h_1 \sin \gamma \dots \dots \dots (8)$$

De variabelen ϱ en σ zijn dus gescheiden; de betrekking

$$\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma = 1$$

levert

$$\begin{aligned}
(a \cos \varrho + e \sin \varrho)^2 + (h \sin^2 \varrho + b \sin \varrho \cos \varrho + c \cos^2 \varrho)^2 &= (g \cos \varrho + f \sin \varrho)^2 \\
\cos^2 \varrho (a^2 - e^2) + 2 \sin \varrho \cos \varrho (ae - fg) + \sin^2 \varrho (e^2 - f^2) + \\
+ (h \sin^2 \varrho + b \sin \varrho \cos \varrho + c \cos^2 \varrho)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Voert men in:

$$\cos^2 \varrho = \frac{1 + \cos 2\varrho}{2}; \quad \sin^2 \varrho = \frac{1 - \cos 2\varrho}{2}; \quad 2 \sin \varrho \cos \varrho = \sin 2\varrho.$$

dan gaat de laatste betrekking over in:

$$\begin{aligned}
\cos^2 2\varrho \{(c-h)^2 - b^2\} + 2 \cos 2\varrho (a^2 + c^2 + f^2 - e^2 - g^2 - h^2) + \\
+ \{b^2 + (h+c)^2 + 2(a^2 + e^2 - g^2 - f^2)\} + \\
+ 2 \sin 2\varrho \{2(ae - fg) + b(h+c) + b(c-h) \cos 2\varrho\} = 0
\end{aligned}$$

Stelt men

$$\begin{aligned}
\frac{2(a^2 + c^2 + f^2 - e^2 - g^2 - h^2)}{(c-h)^2 - b^2} &= p \\
\frac{b^2 - (h+c)^2 - 2(a^2 + e^2 - g^2 - f^2)}{(c-h)^2 - b^2} &= q \left\{ \dots \dots \dots (9) \right. \\
\frac{4(ae - fg) + 2b(h+c)}{(c-h)^2 - b^2} &= r \\
\frac{2b(c-h)}{(c-h)^2 - b^2} &= s
\end{aligned}$$

dan wordt

$$\cos^2 2\varrho + p \cos 2\varrho + q = -(r + s \cos 2\varrho) \sin 2\varrho \dots \dots (10)$$

en

$$\cos^4 2\varrho + \frac{2(p + rs)}{1 + s^2} \cos^3 2\varrho + \frac{p^2 + 2q + r^2 - s^2}{1 + s^2} \cos^2 2\varrho +$$

$$r \frac{2(pq-rs)}{1+s^2} \cos 2\varrho + \frac{q^2-r^2}{1+s^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Deze 4^{de} machtsvergelijking kan nu worden opgelost, de gevonden waarde van ϱ , in (6) ingevoerd, levert σ .

Wanneer intusschen in de uitdrukking (6)

$$a \cos \varrho + e \sin \varrho = g \cos \varrho + f \sin \varrho = 0,$$

dan wordt $\sin \sigma$ onbepaald. In dat geval is

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varrho &= -\frac{a}{e} = -\frac{g}{f} \\ af &= eg \end{aligned}$$

dus:

$$\begin{aligned} (\cot \alpha_1 \cot h_2 \cos \gamma - \cot \alpha_2 \cot h_1) (\cot \alpha_2 - \cot \alpha_1 \cos \gamma) &= \\ &= \cot^2 \alpha_1 \cot h_2 \sin^2 \gamma = \cot^2 \alpha_1 \cot h_2 (1 - \cos^2 \gamma) \\ \cot \alpha_1 \cot h_2 (\cot \alpha_2 \cos \gamma - \cot \alpha_1) + \cot \alpha_2 \cot h_1 (\cot \alpha_1 \cos \gamma - \cot \alpha_2) &= 0 \\ \cot \alpha_1 \cot h_2 &= \frac{\cot \alpha_1 \cos \gamma - \cot \alpha_2}{\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2 \cos \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad (12) \end{aligned}$$

Men vindt dan σ door invoering der waarde van ϱ in (1).

Het hier gezegde vindt eene toepassing bij de bepaling van het vlak, dat de oktaëdervlakken $(\bar{1}\bar{1}1)$, (111) en $(\bar{1}11)$ zoodanig snijdt, dat de traces der vlakken $(\bar{1}\bar{1}1) : (111)$ en $(\bar{1}11) : (111)$ rechte hoeken insluiten. Neemt men (111) als equatorvlak aan, dan wordt $\alpha_1 = 180^\circ - 70^\circ 31' 43''$, $\{V_1 = (\bar{1}\bar{1}1)\}$; $\alpha_2 = 70^\circ 31' 43''$, $\{V_2 = (\bar{1}11)\}$; $\gamma = -60^\circ$; $h_1 = h_2 = 90^\circ$; $\varrho = -30^\circ$.

De vergelijking (12) gaat over in $0 = 0$; in (6) wordt niet alleen de teller $= 0$, doordat $a = e = 0$, maar ook de noemer:

$$\begin{aligned} g \cos \varrho + f \sin \varrho &= \\ &= \cot \alpha_1 \sin \gamma \cos \varrho + (\cot \alpha_2 - \cot \alpha_1 \cos \gamma) \sin \varrho = \\ &= \cot \alpha_1 \{ \sin \gamma \cos \varrho - (1 + \cos \gamma) \sin \varrho \} = \\ &= \cot \alpha_1 \left\{ -\sin^2 60^\circ + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \sin 30^\circ \right\} = \\ &= \cot \alpha_1 \left(-\left(\frac{1}{2} \sqrt{3}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Uit (1) vindt men daarentegen

$$\begin{aligned} \cot h_1 \cos \varrho = 0 &= \cos \sigma \cot \alpha_1 + \sin \sigma \sin \varrho \\ \operatorname{tg} \sigma &= -\frac{\cot \alpha_1}{\sin \varrho} = -\frac{\cot 70^\circ 31' 43''}{\sin 30^\circ} \end{aligned}$$

waaruit: $\sigma = -35^\circ 15' 53''$, de standhoek tusschen $(001) : (111) = \frac{\pi}{2}$.

Het snijvlak is bijgevolg (001) .

Aan een enkel voorbeeld moge de bruikbaarheid der hierboven afgeleide formules worden gedemonstreerd; ik kies daartoe een

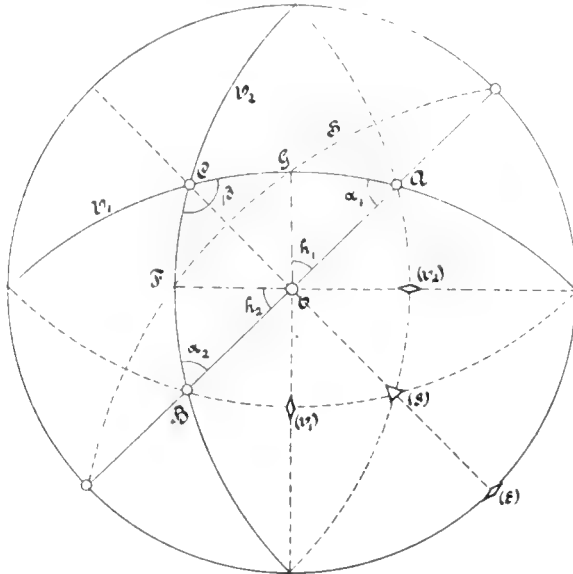


Fig. 2.

vraagstuk, waarbij de verkregen uitkomst gemakkelijk kan worden gecontroleerd.

De drie rhombendodekaëdervlakken (101), (110) en (011) worden zoodanig door een vlak gesneden, dat hunne traces hoeken van 60° insluiten. Wat is de richting van het snijvlak?

Neem E (110) als equatorvlak; $V_1: E = \alpha_1 = -60^\circ$;
 $V_2: E = \alpha_2 = 60^\circ$; $h_1 = \angle GOA = 60^\circ$; $h_2 = \angle FOB = -60^\circ$;

$$\gamma = \sphericalangle AB = (1\bar{1}1) : (\bar{1}11) = -109^\circ 28' 17''.$$

$$\cot \alpha_1 = -\cot \alpha_2 = -\cot h_1 = \cot h_2.$$

Dus wordt volgens (3), (5) en (8):

$$\begin{aligned} a &= \cot^2 \alpha_1 (\cos \gamma - 1) & e &= \cot^2 \alpha_1 \sin \gamma \\ b &= 2 \cot \alpha_1 \cos \gamma & f &= -\cot \alpha_1 (1 + \cos \gamma) \\ c &= -\cot \alpha_1 \sin \gamma & g &= \cot \alpha_1 \sin \gamma \\ d &= -\cot^2 \alpha_1 \sin \gamma & h &= \cot \alpha_1 \sin \gamma. \end{aligned}$$

Hier is

$$\begin{aligned} \cot \alpha_1 &= -\frac{1}{3} \sqrt{3} & \cot^2 \alpha_1 &= \frac{1}{3} \\ \cos \gamma &= -\frac{1}{3} & \sin \gamma &= -\frac{2}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

zoodat (9):

$$p = \frac{2(a^2 + c^2 + f^2 - e^2 - g^2 - h^2)}{(c-h)^2 - b^2} = -\frac{2}{21}$$

$$q = \frac{b^2 + (h+c)^2 - 2(a^2 - e^2 - g^2 - f^2)}{(c-h)^2 - b^2} = -\frac{1}{7}$$

$$r = 2 \frac{2(ae - fg) + b(h+c)}{(c-h)^2 - b^2} = -\frac{4}{21} \sqrt{2}$$

$$s = \frac{2b(c-h)}{(c-h)^2 - b^2} = -\frac{4}{7} \sqrt{2}$$

verder is in vergelijking (11):

$$l = \frac{2(p+rs)}{1-s^2} = \frac{4}{27} = \frac{4}{3^3}$$

$$m = \frac{p^2 + 2q + r^2 - s^2}{1+s^2} = -\frac{14}{27} = -\frac{14}{3^3}$$

$$n = \frac{2(pq - rs)}{1+s^2} = -\frac{20}{81} = -\frac{20}{3^4}$$

$$o = \frac{q^2 - r^2}{1+s^2} = -\frac{23}{729} = -\frac{23}{3^6}$$

Wij hebben dus op te lossen de vergelijking:

$$\cos^4 2\theta + \frac{4}{3^3} \cos^3 2\theta - \frac{14}{3^3} \cos^2 2\theta - \frac{20}{3^4} \cos 2\theta - \frac{23}{3^6} = 0 \quad (13)$$

Stel $\cos 2\theta = x - \frac{1}{4}l = x - \frac{1}{3^3}$, dan kan (13) worden omgewerkt tot:

$$x^4 + \lambda x^2 + \mu x + \nu = 0 \quad (14)$$

waarin

$$\lambda = m - \frac{3}{8} l^2 = \frac{2^7}{3^5}$$

$$\mu = n - \frac{1}{2} lm + \frac{1}{8} l^3 = -\frac{2^{12}}{3^9}$$

$$\nu = o - \frac{1}{4} ln + \frac{1}{16} l^2 m - \frac{3}{256} l^4 = -\frac{2^{12}}{3^{11}}$$

Stelt men nu op de vergelijking

$$y^3 + a'y^2 + b'y + c = 0 \quad (15)$$

waarin

$$a' = \frac{\lambda}{2} = -\frac{2^6}{3^5}$$

$$b' = \frac{\lambda^2 - 4\nu}{16} = \frac{2^{12}}{3^{11}}$$

$$c' = -\frac{\mu^2}{64} = -\frac{2^{18}}{3^{18}}$$

dan worden de wortels van (14) gegeven door:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{y_1} \pm \sqrt{y_2} \pm \sqrt{y_3},$$

waarbij

$$\sqrt{y_1} \sqrt{y_2} \sqrt{y_3} = -\frac{a}{8} = \frac{2^6}{3^9} > 0.$$

Om (15) op te lossen stelt men $y = z - \frac{1}{3} a'$, waardoor de vergelijking den vorm aanneemt:

$$z^3 + cz - w = 0. \dots \dots \dots (16)$$

Hierin is

$$c = b' - \frac{1}{3} a'^2 = \frac{2^{12}}{3^{11}} - \frac{1}{3} \left(\frac{2^6}{3^5} \right)^2 = 0$$

$$w = c' - \frac{1}{3} a'b' = \frac{2}{27} a'^3 = -\frac{2^{18}}{3^{18}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2^6 \cdot 2^{12}}{3^5 \cdot 3^{11}} - \frac{2}{3^3} \cdot \frac{2^{18}}{3^{15}} =$$

$$= -\frac{2^{18} + 3 \cdot 2^{18} - 2 \cdot 2^{18}}{3^{18}} = 0.$$

(16) levert bijgevolg 3 gelijke wortels $z = 0$.

(15) lever gelijke wortels $y = z - \frac{1}{3} a' = \frac{2^6}{3^6}$.

Aan (14) voldoen de waarden

$$x_1 = +\sqrt{y} + \sqrt{y} + \sqrt{y} = 3\sqrt{y} = \frac{2^3}{3^2}$$

$$x_2 = \sqrt{y} - \sqrt{y} - \sqrt{y} = -\sqrt{y} = -\frac{2^3}{3^2}.$$

De wortels van (13) worden dus gegeven door:

$$\cos 2\varrho_1 = x_1 = \frac{1}{3^2} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{1}{3^3} = \frac{2^3}{3^3}$$

$$2\varrho_1 = \pm 31^{\circ}35'8''; \quad \varrho_1 = \pm 15^{\circ}47'34''$$

$$\cos 2\varrho_2 = x_2 = -\frac{1}{3^2} = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{1}{3^3}$$

$$2\varrho_2 = \pm 109^{\circ}28'16''; \quad \varrho_2 = \pm 54^{\circ}44'8''.$$

De bijbehorende waarden van σ worden berekend uit (6):

$$\sin \varrho = -\frac{a \cos \varrho + e \sin \varrho}{g \cos \varrho + f \sin \varrho} = -\frac{\cot^2 \alpha_1 (\cos \gamma - 1) \cos \varrho + \cot^2 \alpha_1 \sin \gamma \sin \varrho}{\cot \alpha_1 \sin \gamma \cos \varrho - \cot \alpha_1 (1 + \cos \gamma) \sin \varrho}$$

$$= -\cot \alpha_1 \frac{(\cos \gamma - 1) \cos \varrho + \sin \gamma \sin \varrho}{\sin \gamma \cos \varrho - (1 + \cos \gamma) \sin \varrho} = -\cot \alpha_1 \frac{-\frac{4}{3} \cos \varrho - \frac{2}{3} \sqrt{2} \sin \varrho}{-\frac{2}{3} \sqrt{2} \cos \varrho - \frac{2}{3} \sin \varrho}$$

$$= -\cot \alpha_1 \cdot \frac{2 \cos \varrho + \sin \varrho \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \cos \varrho + \sin \varrho} = -\cot \alpha_1 \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3} \sqrt{6} \dots \dots (17)$$

waarbij intusschen de term $\sin \varrho + \sqrt{2} \cdot \cos \varrho$ in teller en noemer wegvallt.

Uit

$$\sin \varrho + \sqrt{2} \cdot \cos \varrho = 0$$

vindt men

$$\operatorname{tg} \varrho = -\sqrt{2},$$

waaraan beantwoordt

$$\varrho = -54^{\circ}44'88'' \text{ (of } 180^{\circ} - 54^{\circ}44'88'')$$

en dit is een der beide waarden ϱ_2 . Terwijl uit (17) voor σ de waarde $\sigma = +54^{\circ}44'8''$ (of $180^{\circ} - 54^{\circ}44'8''$) volgt, moet de bij $\varrho = -54^{\circ}44'8''$ behorende waarde van σ berekend worden uit (1).

$$\begin{aligned} \cot h_1 &= \frac{\cos \sigma \cot \alpha_1 + \sin \sigma \sin \varrho}{\cos \varrho} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} &= \frac{-\frac{1}{3}\sqrt{3} \cos \sigma - \frac{1}{3}\sqrt{6} \sin \sigma}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} &= -\cos \sigma - \sqrt{2} \sin \sigma \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$$\cos^2 \sigma + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cos \sigma + \frac{1}{3} = 2(1 - \cos^2 \sigma)$$

$$\cos^2 \sigma + \frac{2}{9}\sqrt{3} \cos \sigma - \frac{5}{9} = 0$$

$$\cos \sigma = -\frac{1}{9}\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{3+45}{81}} = -\frac{1}{9}\sqrt{3} \pm \frac{4}{9}\sqrt{3} = +\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ of } -\frac{5}{9}\sqrt{3}.$$

Aan $\cos \sigma = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ beantwoordt nu

$$\varrho = \pm 54^{\circ}44'8''$$

van welke twee waarden alleen $\sigma = -54^{\circ}44'8''$ aan (18) voldoet. Een nader onderzoek leert, dat de pool van het snijvlak S gegeven wordt door

$$\varrho = -54^{\circ}44'8'', \quad \sigma = -54^{\circ}44'8''.$$

aangezien de overige waarden van ϱ en σ niet voldoen. Het snijvlak is het oktaëdervlak (111), zooals uit fig. 2 duidelijk blijkt; σ komt overeen met den standhoek tusschen (001) : (111), waarvan de cosinus gegeven wordt door

$$\cos \theta = \frac{h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2} \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Wanneer nu E , V_1 en V_2 (zie fig. 1) in één zone liggen, nemen

de formules (10) en (6) een veel eenvoudiger vorm aan. Doordat $\gamma = 0$ wordt, gaan de coëfficiënten (3), (5) en (8) over in:

$$\left. \begin{aligned} a &= \cot \alpha_1 \cot h_2 - \cot \alpha_2 \cot h_1 \\ b &= \cot h_2 - \cot h_1 \\ f &= \cot \alpha_2 - \cot \alpha_1 \\ c &= d = e = g = h = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

zoodat:

$$\cos^2 2\varrho - \frac{2(a^2 + f^2)}{b^2} \cos 2\varrho - \frac{b^2 + 2(a^2 - f^2)}{b^2} = 0 \dots \dots (20)$$

$$\sin \sigma = -\frac{a}{f} \cot \varrho \dots \dots \dots (21)$$

Bij een amfiboolkristal liggen de vlakken ($\bar{1}10$), 110 en (010) in een zone; (110) moge als equatorvlak dienst doen. Terwijl de ware hoeken tusschen ($\bar{1}10$): (110) en (010) : (110) resp. $\alpha_1 = 55^\circ 50'$ en $\alpha_2 = -62^\circ 55'$ zijn, bedroegen de schijnbare hoeken, in een gesteente-preparaat gemeten, resp. $h_1 = 43^\circ$ en $h_2 = -79^\circ$.

(19) levert:

$$\begin{aligned} a &= 0,43625 & ; & & a^2 &= 0,19032 \\ b &= -1,26674 & ; & & b^2 &= 1,60454 \\ f &= -1,20858 & ; & & f^2 &= 1,46070 \end{aligned}$$

waaruit:

$$\frac{a^2 + f^2}{b^2} = 1,02875 \quad ; \quad \frac{b^2 + 2(a^2 - f^2)}{b^2} = -0,58074$$

dus:

$$\begin{aligned} \cos^2 2\varrho - 2(1,02875) \cos 2\varrho + 0,58074 &= 0 \\ \cos 2\varrho &= 1,02875 \pm \sqrt{(1,02875)^2 - 0,58074} = \\ &= 1,02875 \pm 0,68948 = 1,71823 \text{ of } 0,33927. \end{aligned}$$

Alleen de tweede waarde voldoet, zoodat:

$$\begin{aligned} 2\varrho &= 70^\circ 10' \text{ of } -70^\circ 10' \\ \varrho &= 35^\circ 5' \text{ of } -35^\circ 5' . \end{aligned}$$

$$\sin \sigma = -\frac{a}{f} \cot \varrho = -\frac{0,43625}{-1,20858} \cot \varrho = 0,36096 \cot \varrho$$

waaruit

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 35^\circ 5' , \sigma_1 = 30^\circ 55' \\ \varrho_2 &= -35^\circ 5' , \sigma_2 = -30^\circ 55' . \end{aligned}$$

Zooals nog nader zal blijken, doet de optische uitdooving een hulpmiddel aan de hand, om in een gegeven geval te beslissen of men met het snijvlak $(\varrho_1 \sigma_1)$ dan wel met $(\varrho_2 \sigma_2)$ te maken heeft.

Langs grafischen weg kan het vraagstuk van de oriëntering van

kristaldoorsneden belangrijk eenvoudiger worden opgelost. Men kan daartoe gebruik maken van diagrammen, die voor elken willekeurigen

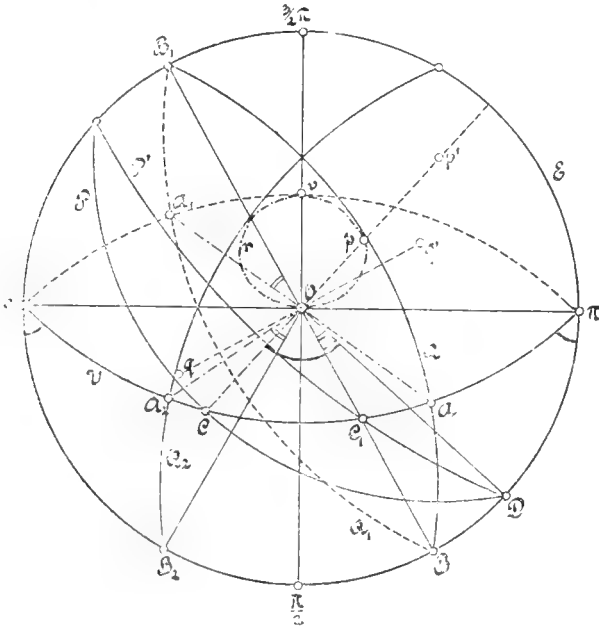


Fig. 3.

standhoek α tusschen 2 vlakken, den schijnbaren hoek h geven als functie van φ en σ .

In fig. 3 zij E weer het projectievlak, V het kristalvlak, dat met E een hoek α insluit, $(0)O(\pi)$ de snijlijn tusschen E en V ; het azimuth van een snijvlak (P,Q) worde gemeten van (0) af positief tegengesteld aan de richting van de wijzers van een uurwerk. Geeft men de boloktanten $(0)\left(\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}\right)(\pi), (\pi)\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ en $\left(\frac{3}{2}\pi\right)(0)$ achtereenvolgens met de nummers 1, 2, 3 en 4 aan, voor zoover ze boven het equatorvlak, met 5, 6, 7 en 8 voor zoover ze daar beneden liggen, dan kan men uit de figuur omtrent het teeken van h in de verschillende oktanten het volgende afleiden.

Is $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, en ligt de pool q van het snijvlak Q in het eerste oktant, dan wordt $h = \angle AOB > 0$. In het daar tegenoverliggende, 7^e oktant vindt men voor het snijvlak (q',Q) een negatieven schijnbaren hoek; vallen Q en Q' samen, zoodat de afstand der polen $q:q' = \pi$ is, dan wordt $h_1 = -h$.

Ligt de pool van het snijvlak in het 2^e oktant, dan wordt $h < 0$;

brengt men Q_2 ten opzichte van het vlak $O\left(\frac{\pi}{2}\right)$ symmetrisch met Q aan, dan wordt weer $h_2 = \angle A_2OB_2 = -h(\angle AOB)$. Ligt eindelijk de pool in het vlak $O\left(\frac{\pi}{2}\right)$, dan is $h = 0$ onafhankelijk van de waarde van σ .

In de oktanten 3 en 4 beweegt zich de pool van het snijvlak nitshnrend binnen den stompen hoek $E:V$. Laten wij de pool (p) van het vlak (P) bij eene constante waarde van ϱ achtereenvolgens alle waarden van σ tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$ doorloopen, dan blijkt, dat voor $\sigma = 0$, $h = 0$; wordt $\sigma > 0$, zooals bij het vlak ($p'P'$), dan wordt $h = \angle C_1OD < 0$; deze negatieve hoek groeit bij toenemende σ aan, tot de pool bij p ligt en $h = \angle COD = -\frac{\pi}{2}$ is geworden. Nu overschrijdt de negatieve hoek de waarde $-\frac{\pi}{2}$ en wordt dus tot in O positief gemeten $\left(h < \frac{\pi}{2}\right)$.

Constructief is het punt p gemakkelijk te vinden, doordat $\sphericalangle Cp = \frac{\pi}{2}$. Uit formule (1) volgt, dat hier

$$\begin{aligned} \cot h \cos \varrho &= 0 = \cos \sigma \cot \alpha + \sin \sigma \sin \varrho \\ \operatorname{tg} \sigma &= -\frac{\cot \alpha}{\sin \varrho}. \end{aligned}$$

Uit deze betrekking is het verloop van de curve rpO af te leiden, welke de meetkundige plaats is van alle polen van snijvlakken, die den tweevlakkenhoek $V:E$ volgens den schijnbaren hoek $h = \frac{\pi}{2}$ snijden. Voor $\varrho = \pi$ vindt men $\sigma = \frac{\pi}{2}$; $\varrho = \frac{3}{2}\pi$ geeft $\operatorname{tg} \sigma = \cot \alpha$, of $\sigma = \frac{\pi}{2} - \alpha$; terwijl voor $\varrho = 2\pi$ weer $\sigma = \frac{\pi}{2}$ wordt. Het is gemakkelijk in te zien, dat de velden $O(\pi)\left(\frac{3}{2}\pi\right)rpO$ en Ovr eene negatieve, $O(0)\left(\frac{3}{2}\pi\right)vrO$ en Ovp daarentegen eene positieve waarde voor h leveren. Voor de oktanten 5 en 6 geldt hetzelfde als voor 3 en 4, alleen neemt h hier een tegengesteld teeken aan.

In de figuren 4 en 5 vindt men het schema van het h -diagram

voor $\alpha = 60^\circ$ met de hier besproken veldverdeling; de snijvlakken, waarvan de polen in de geharceerde velden liggen, leveren een

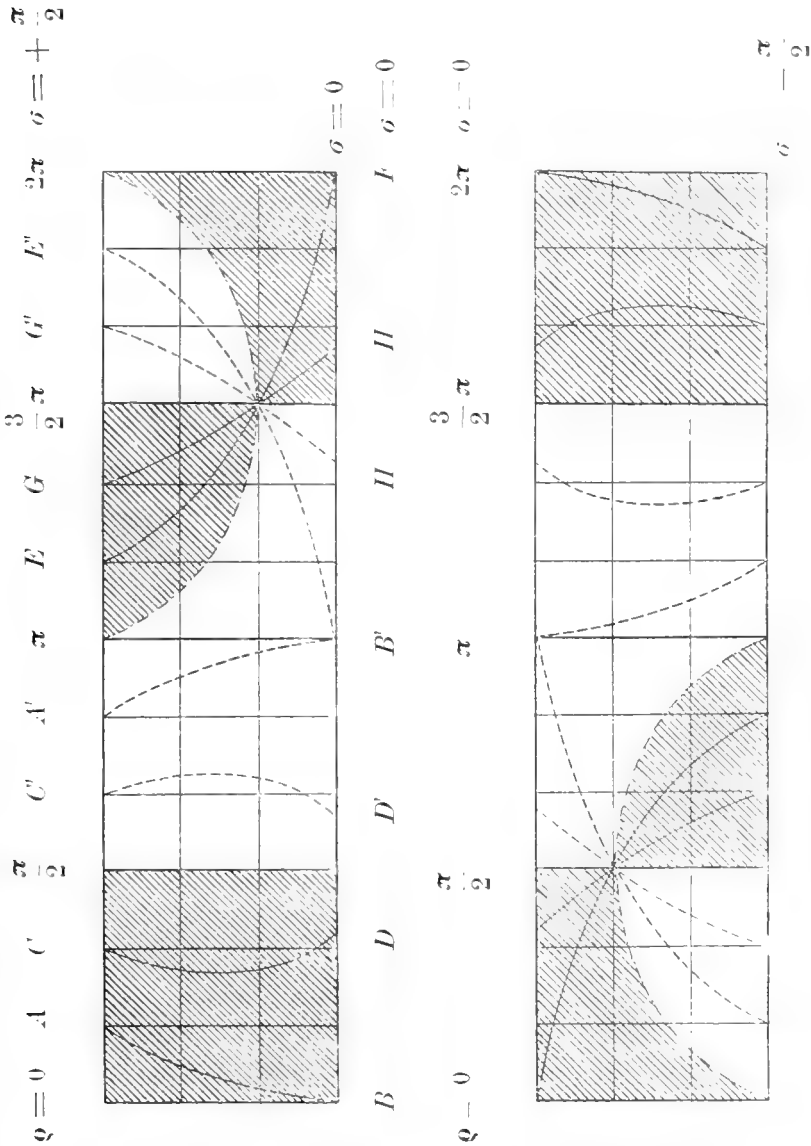


Fig. 4 en 5.

positieven hoek h , de blanke velden leveren een negatieven hoek. De vakken, waarin de figuren zijn verdeeld, zijn 30° op 30° ; de meridiaancirkels, waarop σ wordt afgemeten, zijn als evenwijdige lijnen geteekend, zoodat voor de pool Q een lijn van gelijke lengte als de equator in de plaats treedt. In fig. 4 zijn de oktanten 1—4, in fig. 5 de oktanten 5—8 voorgesteld.

In het 1^{ste} oktant geeft de curve AB de meetkundige plaats der

polen van alle snijvlakken, die $h = 60^\circ$ leveren; de curve CD geeft $h = 30^\circ$; symmetrisch ten opzichte van de lijn $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)\left(\sigma = \frac{\pi}{2}\right)$. $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)\left(\sigma = 0\right)$, waaraan $h = 0$ beantwoordt, liggen in het 2^{de} oktant de curven $C'D'$ met $h = -30^\circ$ en $A'B'$ met $h = -60^\circ$.

Variëert voor $\varphi = \pi$, σ van 0° tot $\frac{\pi}{2}$, dan doorloopt h achtereenvolgens alle waarden van -60° tot -90° ; hier begint de curve Opv van fig. 3 die over het punt $\left(\varphi = \frac{3}{2}\pi, \sigma = \frac{\pi}{2} - \alpha = 30^\circ\right)$ naar $\left(\varphi = 2\pi, \sigma = \frac{\pi}{2}\right)$ gaat. De curven EF en GH leveren hier weer waarden $h = 60^\circ$ en $h = 30^\circ$, de curven $G'H'$ en $E'B'$ resp. -30° en -60° .

Het diagram voor $-\frac{\pi}{2} < \sigma < 0^\circ$ behoeft geen nadere toelichting; het brengt de boven vermelde identiteit van den hoek h voor vlakken met polen $+\varphi, \pm\sigma$ en $-\varphi, \mp\sigma$ duidelijk tot uitdrukking. De oktanten 1:2, 3:4, 5:6, 7:8 zijn dus, op het teeken na, symmetrisch ten opzichte van het vlak $\left(\frac{\pi}{2}\right): \left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\right)$, cf. fig. 3, terwijl de oktantenparen (1,2):(7,8) en (5,6):(3,4), op het teeken van σ na, symmetrisch zijn ten opzichte van het vlak $(0):(\pi)$.

Zooals verder uit fig. 3 blijkt, geldt het diagram voor $\alpha = 60^\circ$ ook voor $\alpha = -60^\circ$, wanneer men voor φ de waarde $\varphi \pm \pi$ substitueert, dus de oktantenparen (1,2) en (7,8) resp. met (3,4) en (5,6) verwisselt.

De diagrammen, waarvan ik mij voor de grafische oplossing van de hierboven besproken vraagstukken heb bediend, en die elders zullen verschijnen, geven voor hoeken α , variërend tusschen 0 en $\pm\frac{\pi}{2}$, en opklimmend met 10° , de waarden van h voor snijvlakken, waarvan azimuth en hoogte der polen, eveneens met 10° opklimmend, variëeren tusschen $\varphi = 0$ en 2π , $\sigma = 0$ en $\pm\frac{\pi}{2}$. Door interpolatie kan hieruit voor elke waarde van α de waarde van h voor een willekeurig snijvlak met voldoende nauwkeurigheid gevonden worden.

De werkwijze moge aan een enkel der hierboven analytisch behandelde vraagstukken worden duidelijk gemaakt. Beschouwt men fig. 1, dan is het duidelijk, dat men bij de grafische behandeling

$\angle A_1OB = h_1$ zal kunnen vinden in het diagram voor $\alpha = \alpha_1$ en wel bij $\varrho = \frown C_1BQ_1$, $\sigma = PQ$; op dezelfde wijze $\angle A_2OB = h_2$ in het diagram voor $\alpha = \alpha_2$ bij $\varrho_1 = \frown C_2BQ = \varrho - \gamma$ en $\sigma = PQ$. Wil men, omgekeerd, uit de gegeven hoeken α_1 , h_1 en α_2 , h_2 de plaats van het snijvlak $P(\varrho, \sigma)$ bepalen, dan legt men de diagrammen voor α_2 en α_1 op elkaar, dit laatste ten opzichte van het eerste over een hoek $-\gamma$ verschoven, en gaat na, waar de curven h_1 van α_1 en h_2 van α_2 elkaar snijden. Het snijpunt geeft de pool $P(\varrho, \sigma)$ van het gezochte snijvlak.

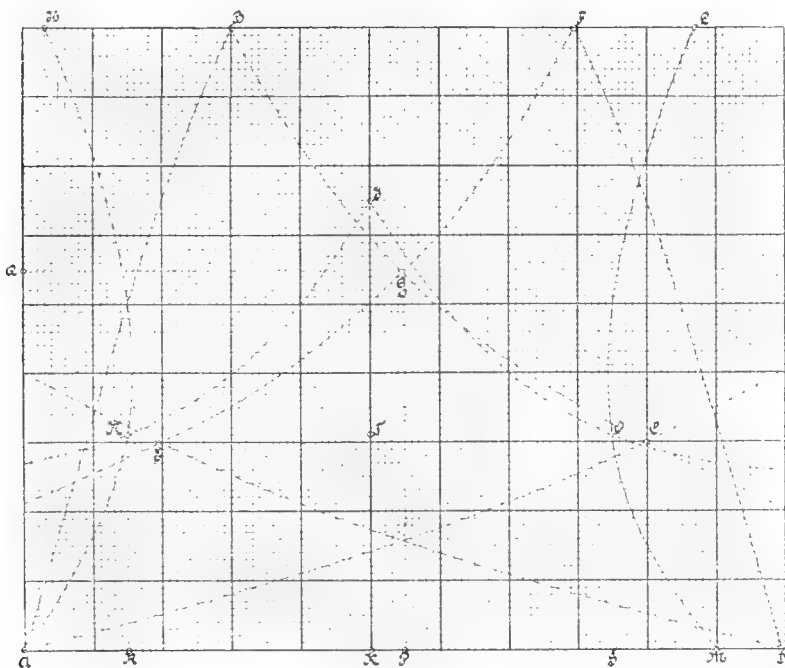


Fig. 6.

In fig. 6 is de grafische oplossing van twee der boven behandelde vraagstukken weergegeven. Neemt men (cf. fig. 2) het rhombendodekaëdervlak (110) als equatorvlak, dan maken de vlakken (101) en (011) daarmede hoeken $\alpha_1 = -60^\circ$ en $\alpha_2 = 60^\circ$. Het snijvlak S geeft $h_1 = 60^\circ$, $h_2 = -60^\circ$; $\gamma = -109^\circ 28' 17''$. Vershuift men nu het diagram voor α_1 $109^\circ \frac{1}{2}$ ten opzichte van het diagram voor α_2 , en legt men beide op elkaar, dan blijkt, dat de curven $h_1(60^\circ)$ en $h_2(-60^\circ)$ elkaar alleen snijden in het 5^e oktant. In de figuur zijn de curven voor $\sigma > 0$ en $\sigma < 0$ naast elkaar geteekend en door de stippeling onderscheiden. Is het azimuth van $A, Q = 0$, dan geeft de curve AB ($\alpha_2 = 60^\circ$) de polen voor $h_2 = 60^\circ$ bij $\sigma > 0$; BC de

polen voor $h_2 = -60^\circ$ bij $\sigma < 0$, AC die voor $h_2 = 60^\circ$ bij $\sigma < 0$. Het azimuth van $D = 109^{21}/_2$; FD geeft de polen voor $h_1 = -60^\circ$ bij $\sigma > 0$; FE en DE geven die voor $h_1 = 60^\circ$ resp. $h_1 = -60^\circ$ bij $\sigma < 0$. Het snijpunt der curven BC en FE levert de pool van het gezochte snijvlak bij $\varrho = 54^{c3}/_4$ ten opzichte van A , of $\varrho = -54^{c3}/_4$ ten opzichte van D , en $\sigma = -54^{c3}/_4$.

Het tweede vraagstuk betreft het op pag. 13 besproken amfiboolkristal, dat zoodanig door het preparaatvlak wordt gesneden, dat de schijnbare hoeken tusschen de vlakken $(\bar{1}10):(110)$ en $(010):(110)$ resp. bedragen $h_1 = 43^\circ$ en $h_2 = -79^\circ$.

In fig. 6 treedt de zone-as ($\varrho = 0$) uit bij K ; de curven LOM en $HN A$ geven de meetkundige plaats der polen voor $h_1 = 43^\circ$ bij $\sigma > 0$ (1^{ste} oktant) en $\sigma < 0$ (8^{ste} oktant); de curven IO en LN de meetkundige plaats der polen voor $h_2 = -79^\circ$ bij $\sigma > 0$ (1^{ste} oktant) en $\sigma < 0$ (8^{ste} oktant). De doorsnijding der curven $LM:IO$ en $HA:LN$ geeft de punten O ($\varrho = 35^\circ$, $\sigma = 31^\circ$) en N ($\varrho = -35^\circ$, $\sigma = -31^\circ$) welke waarden eveneens geheel beantwoorden aan die, welke boven langs analytischen weg worden gevonden.

Scheikunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van de Heeren A. SMITS en H. L. DE LEEUW.: „*Berestigingen van de nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie.*” I.

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN).

Zooals reeds vroeger ¹⁾ werd uiteengezet doet bovengenoemde theorie verwachten, dat bij elke stof, die het verschijnsel van *heterogene* allotropie, dus *monotropie* of *enantiotropie* vertoont, ook het verschijnsel van *homogene* allotropie zal voorkomen, omdat beide verschijnselen ten nauwste met elkaar samenhangen.

Bij de monotrope en enantiotrope stoffen kunnen wij dus op grond van deze theorie verwachten, dat elke damp-, vloeistof- of vaste-phase in stabielen toestand uit een innerlijk evenwicht tusschen verschillende moleeuuloorten bestaat. Een gevolg hiervan is dan, dat, wanneer men de temperatuur zóó snel laat veranderen, dat het innerlijk evenwicht de temperatuur niet kan volgen, het meer samengestelde karakter van de stof voor den dag moet komen, hetgeen zich o.a. uiten zal in een kook- of smelt-traject, waarbij dan het eindkookpunt resp. eindsmeltpunt hooger of lager dan het unaire stabiele kookpunt resp. smeltpunt liggen zal, afhankelijk van het

¹⁾ Koninkl. Akad. 26 Maart 1910 p. 808.

type van het pseudo-stelsel en van de richting van de lijn, die het innerlijke evenwicht in de damp-, resp. vloeistof-phase aangeeft.

Zooals in de vorige mededeeling ¹⁾ over dit onderwerp werd aange- toond, is dit inderdaad bij de smeltpuntsbepaling der rhombische zwavel reeds waargenomen.

De eerste stof, die in deze richting uitvoerig door ons werd be- studeerd, was de *witte fosforus*.

De theorie heeft er op gewezen, dat niet alleen de *violette* maar ook de *witte* fosforus uit verschillende molecuulsoorten is opgebouwd, zoodat de mogelijkheid bestond, dat men van deze metastabiele mo- dificatie de complexiteit zou kunnen bewijzen.

Het onderzoek heeft dit vermoeden bevestigd en wel zóó over- tuigend, dat er voorloopig geen stof genoemd kan worden, door middel waarvan de juistheid van de theorie op zóó eenvoudige en duidelijke wijze gedemonstreerd kan worden als door den *witten fos- forus*.

Voor dat dit resultaat verkregen werd, moest echter een moei- lijkhed overwonnen worden, die bestond uit de bereiding van zeer zuiveren fosforus.

Het bleek n. l. dat geen van de bekende methoden een product leverde, dat ook bij zéér langzamen warmtetoever unair smolt, dwz. steeds werd een stof verkregen die een smelttraject vertoonde.

Daar de smeltwarmte van witten fosforus zoo klein is (5 cal) kan een uiterst geringe hoeveelheid van een tweede stof reeds een merk- baar smelttraject veroorzaken, en het was daarom van te voren reeds in te zien, dat het bereiden van een bij één en dezelfde tempe- ratuur smeltend product eigenaardige moeilijkheden zou opleveren.

Daar ons nu bleek, dat de laatste verontreinigingen hoofdzakelijk uit de oxyden van den fosforus moesten bestaan, die zich bij de gebrui- kelijke reinigings-methoden (behandeling met kaliumbichromaat en zwavelzuur, distillatie met stoom, enz.) niet voldoende van den fosforus laten scheiden, werd een toestelletje vervaardigd, (Fig. 1) waarin de fosforus in vacuo werd gedistilleerd, en vervolgens aan een herhaalde partieele kristallisatie kon worden onderworpen, waarop zij, aldus gezuiverd, in een smeltvat met ingesmolten weer- standsthermometer kon worden overgebracht.

In deze fig. 1 is *A* het zoeven genoemde smeltvat met ingesmol- ten weerstandsthermometer; dit vat is verbonden met drie bollen *B*, *C* en *D*, waarvan de laatste (inhoud 500 ccm) aanvankelijk van water voorzien voor driekwart met stukjes, zoogenaamd zuivere witte fosforus uit den handel, werd gevuld.

²⁾ l. c.

Nadat deze fosforus onder water gesmolten en daarna weer vast geworden was werd het water op een klein laagje na afgeschonken, en vervolgens de buis *d* dicht gesmolten.

Het buisje *c*. werd daarop verbonden met twee achter elkaar geschakelde U-vormige buizen, die anderzijds op de *Gaede-pomp* waren aangesloten.

De eerste U-vormige buis werd geplaatst in een vat met vast koolzuur en alcohol om allen waterdamp te condenseeren, terwijl de tweede in een vat met vloeibare lucht werd gedompeld om de laatste spoortjes fosforus vast te leggen, zoodat een hoog vacuum kon worden verkregen.

Allereerst werd nu de toestel luchtledig gepompt en de kolf *D* voorzichtig met de vlam verwarmd om het water af te distilleeren.

Wanneer van water niets meer was te bespeuren werd het koken in vacuo toch nog een half uur voortgezet, om zeker te zijn dat ook het in den fosforus opgeloste water volkomen was verwijderd.

Nadat nu de verbinding van den toestel met den pomp door afsmelting bij *b* was verbroken, werd de fosforus voor drievierde in *B* overgedistilleerd, waarbij een vloeistof werd verkregen, die aanvankelijk eenigszins opaliscerde maar later volkomen helder en kleurloos was.

Deze fosforus nu, die, zooals ons bleek, even zuiver of nog zuiverder was dan het zuiverste product langs anderen weg verkregen, was voor ons doel nog niet zuiver genoeg, evenmin het product dat na herhaalde distillatie verkregen werd, daar het experiment liet zien, dat deze fosforus op geenerlei wijze tot scherpe smelting te brengen was.

Om de zuivering nu verder te drijven werd de fosforus in *B* bijna geheel gesmolten en daarop door langzame afkoeling weer tot kristallisatie gebracht; wanneer nu de massa voor drievierde was vastgeworden, werd de resteerende vloeistof door kanteling van den toestel in *C* overgebracht en daar door plaatselijke sterke afkoeling der onderkoelde vloeistof (door middel van vast koolzuur en alcohol) tot stolling gebracht.

Deze manipulatie werd een groot aantal malen herhaald, waarbij de in *B* terugblijvende massa niet alleen voortdurend in smeltpunt steeg, maar ook steeds grover en mooier kristallijn werd.

Toen door deze herhaalde partieele kristallisatie en verwijdering van de vloeistof viervijfde van de oorspronkelijk in *B* aanwezige hoeveelheid in *C* was overgebracht, werd het vat *A* met den in *B* teruggebleven fosforus gevuld, door dezen in *B* te smelten en vervolgens door kanteling van den toestel in *A* te laten vloeien.

Door afsmelting bij *a* werd nu de verbinding van het smeltvat

met het overige deel van den toestel verbroken en kon tot de proefneming worden overgegaan.

De op deze wijze verkregen volkomen kleurlooze grof kristallijne fosforus bleek nu zóó zuiver te zijn, dat bij dompeling van het smeltvat in een thermostaat, waarvan de temperatuur langzaam varieerde een smelttraject gevonden werd kleiner dan $0,02^\circ$, zoodat wij kunnen zeggen de unaire smelttemperatuur van den witten fosforus te hebben bepaald, waarvoor wij $44,0^\circ$ vonden. Hierbij moet echter opgemerkt worden, dat hoewel de temperatuursverschillen tot op $0,01^\circ$ nauwkeurig zijn, de absolute waarde wellicht later een kleine wijziging zal behoeven, daar juist een bad, dat volgens een gecontroleerden normaal-thermometer de temperatuur van 44° bezat door ons voorloopig als ijkpunt is gebruikt.

Toen aldus was aangetoond, dat de door ons verkregen fosforus het vermogen bezit *unair* te smelten resp. te stollen, werd nagegaan in hoeverre bij snel werken de complexiteit van den fosforus voor den dag komt.

Daar het resultaat het duidelijkst door afkoelings- resp. verhitingskrommen kan worden gedemonstreerd, zullen wij achtereenvolgens de Fig. 2, 3, 4 en 5 bespreken, die ons een hoogst interessanten kijk in het innerlijk wezen van den witten fosforus geven.¹⁾

Fig. 2 heeft betrekking op de volgende proef: Het smeltvat met witten fosforus werd een dag lang in een thermostaat van 40° gehouden en daarop plotseling overgebracht in een bad van 50° , waarna om de 10 seconden de temperatuur (door middel van den galvanometer in een brug van WHEATSTONE geplaatst) werd afgelezen. Uit de kromme in Fig. 2 die de temperatuur als functie van den tijd aangeeft volgt nu, dat de smelting bij $43,92^\circ$ aanving en bij $43,96^\circ$ voltooid was.

Het kleine smelttraject van $0,04^\circ$ laat zien, dat de stof zich bijna unair gedroeg, doch niet volkomen, hetgeen daaraan moet worden toegeschreven, dat het innerlijk evenwicht zich 4° onder het unaire smeltpunt had ingesteld.

1) In Fig. 2 begint de kromme bij 42° langzamer te stijgen, omdat in de buitenste lagen van den fosforus, die warmer zijn dan de laag die met den thermometer in contact is, reeds smelting optreedt. Was dit niet het geval, dan zou de stippellijn gevolgd zijn en bij $43,92^\circ$ voor het eerst smelting zijn opgetreden.

Bij *c* begint de kromme sneller te stijgen, omdat door de geringe hoeveelheid vaste stof het heterogene evenwicht zich niet zóó snel meer instelt, dat de toegevoerde warmte door de smelting van de vaste stof geheel wordt verbruikt. Was dit wel het geval, dan zou ook hier het verloop geweest zijn, zooals de stippellijn aangeeft en de smelting bij $48,96^\circ$ geëindigd geweest zijn.

Bij een tweede proef werd anders te werk gegaan. Het smeltvat werd eenigen tijd in een bad van $\pm 46^\circ$ gehouden en daarop uit dit bad genomen om de afkoeling aan de lucht te doen plaats hebben.

Daar de fosforus zéér gemakkelijk wordt onderkoeld, moest de kristallisatie door enting worden ingeleid. Daartoe werd, toen de temperatuur van den fosforus beneden 44° was gedaald, het kapillaire buisje ρ van het smeltvat een oogenblikje met vast koolzuur en alcohol in contact gebracht, waardoor zich in de kapillair direct vaste fosforus vormde, die de kristallisatie van de groote massa inleidde, waarbij dan de temperatuur, tengevolge van de stollingswarmte, steeg.

De kromme die het resultaat van deze proef weergeeft is in Fig. 3 geteekend. In deze Fig. geeft a het punt aan waar geënt werd; de temperatuur daalde daarna tot b om vervolgens tot c te stijgen en daarop eerst zéér langzaam en dan plotseling snel te dalen. Het resultaat is weer, dat de fosforus ook op deze wijze van werken bijna unair stolt, want het stoltraject bedraagt slechts $0,05^\circ$, maar tengevolge van het betrekkelijk groote temperatuurverschil met de omgeving was de unaire smelttemperatuur niet meer te bereiken.

Bij de derde proef, die een zéér belangrijk resultaat opleverde, werd het smeltvat eerst eenigen tijd in kokend water geplaatst en daarop plotseling overgebracht in een bad van 15° om de afkoeling zóó snel te doen plaats hebben, dat het innerlijke evenwicht de temperatuur stellig niet kon volgen. Toen daarop, na verwijdering uit het bad, bij ongeveer $43,5^\circ$ werd geënt steeg de temperatuur boven 44° , waaruit dus volgde, dat, *wanneer men snel afkoelt, de vloeibare fosforus reeds boven 44° onderkoeld is.*

Daarom werd een volgende keer geënt *boven 44°* , waarbij de temperatuur tot $45,5^\circ$ steeg, en het gelukte bij nog vroegere enting een temperatuurstijging tot 46° te verkrijgen, hetgeen echter stellig nog niet de hoogste temperatuur is, waartoe de stollende massa op deze wijze kan stijgen.

De afkoelingskromme die bij een van deze proeven verkregen werd is in Fig. 4 weergegeven, en het is opvallend hoe zeer deze kromme, die afgezien van de voorgeschiedenis van den fosforus, het resultaat is van een volkomen analoge proefneming als waarop Fig. 3 betrekking heeft, van de kromme in deze laatste figuur verschilt. Boven 44° , ongeveer $44,5^\circ$, werd geënt, waarop de temperatuur, na aanvankelijk nog gedaald te zijn, tot $45,05^\circ$ steeg, om daarop eerst snel, vervolgens iets minder snel, en ten slotte zéér snel te dalen.

De geheele lijn vertoont het type van een stollijn van een mengsel, het stoltraject bedraagt hier ongeveer $1,8^\circ$ maar kan nog aanmer-

kelijk grooter zijn, hetgeen reeds hieruit volgt, dat bij één proef een temperatuur maximum van 46° werd waargenomen.

Dat de fosforus, die op deze wijze is *mishandeld* en aanvankelijk tot een *duidelijk zichtbaar conglomeraat* stolt, zich in den vasten toestand met vrij groote snelheid in innerlijk evenwicht traecht te stellen volgt uit *Fig. 5*. De kromme in deze *Fig.* geteekend is n.l. een verhittingskromme, die laat zien wat waargenomen is toen de bij de vorige proef verkregen vaste stof snel in een bad van 50° werd gebracht. De verhittingskromme toont aan, dat na verloop van enkele minuten een groote nadering tot den innerlijken evenwichtstoestand heeft plaatsgegrepen doch bereikt is deze nog niet, want het smelttraject bedraagt nog $0,13^\circ$ en het eind-smeltpunt ligt *boven* de unaire smeltpuntstemperatuur.

Vóór nu tot een verklaring van de waargenomen verschijnselen over te gaan, zij er hier aan herinnerd, dat, daar CHAPMAN ¹⁾ vond, dat roode P tot een volkomen kleurlooze vloeistof smelt, reeds in de vorige mededeeling is aangenomen, dat de lijn voor het innerlijke vloeistof evenwicht bij temperatuursvertooging naar den kant van α P loopt ²⁾. Doen wij dat hier weer, dan zijn wij gedwongen, in afwijking met de vroeger gegeven T. X-figuur, in het pseudobinaire stelsel een eutecticum te teekenen, zooals in *Fig. 6* is aangegeven, omdat alleen dan de waargenomen verschijnselen te verklaren zijn ³⁾.

De lijn kl_2l_1 geeft de innerlijke evenwichten in de vloeistoffen aan, terwijl s_1n betrekking heeft op de innerlijke evenwichten in den vasten witten fosforus, zoodat s_1 en l_1 de zich in innerlijk evenwicht bevindende vaste en vloeibare fasen aangeven, die bij het unaire smeltpunt van den witten fosforus koëxisteeeren.

Uit den loop der genoemde evenwichtslijnen volgt nu, dat wanneer wij de vloeistof l_0 zéér snel afkoelen de kristallisatie reeds bij l_1 zal kunnen optreden, waarbij dan bij uitblijven van innerlijke transformaties tevens een stoltraject $l'_1l''_1$ gevonden zou worden, terwijl bij snelle verhitting van de vaste phase n de smelting reeds bij s'_2 zal beginnen om bij l''_2 volkomen te zijn, wanneer n.l. innerlijke omzettingen weer volkomen achterwege blijven. De innerlijke omzettingen verlopen echter, vooral wanneer de twee fasen S en L met elkaar in contact zijn, met vrij groote snelheid, en dat is de reden, waarom een overschrijding van de unaire smelt-temperatuur altijd veel kleiner is dan de lijnen l'_1 , l''_2 en s'_2 , l''_2 doen verwachten.

¹⁾ Journ. chem. Soc **75**, 743 (1899).

²⁾ z P is een stof die wij niet kennen, maar waarvan wij met hoogen graad van waarschijnlijkheid kunnen aannemen, dat zij kleurloos is.

³⁾ Tevens volgt hier dan uit, dat wij bij den fosforus niet met het verschijnsel polymerie te doen hebben (zie vorige mededeeling).

Verder zegt de figuur, dat de begin-stolling resp. de begin-smelting eerder zal optreden naarmate van een hogere resp. lagere temperatuur wordt uitgegaan en zoo zien wij dus, dat de nieuwe theorie der allotropie, in de vorige mededeeling uiteengezet, van de waargenomen verschijnselen een ongedwongen verklaring geeft.¹⁾

Ten slotte zij hier nog opgemerkt, dat JOLIBOIS²⁾ met zekerheid meent aangetoond te hebben, dat er niet *twee* maar *drie* vaste modificaties van den fosforus bestaan, *witte*, *roode* en *pyromorfische* fosforus, welken laatste wij, zooals rationeeler is, met *violetten* fosforus zullen aangeven.

Uit het onderzoek van JOLIBOIS zou, zooals hij zelf opmerkt, tevens volgen, dat de violette *P* onder 460° stabiel is, daarboven echter de roode modificatie, die bij 610° tot een kleurlooze vloeistof smelt.

Wanneer wij deze resultaten aanvaardden, dan is het de vraag, hoe wij dan het gedrag van den fosforus in het licht van de nieuwe theorie kunnen verklaren.

Men zou kunnen meenen, dat, wanneer van een stof drie verschillende vaste modificaties bestaan, deze drie vormen zullen moeten worden toegeschreven aan het bestaan van drie verschillende molecuulsoorten.

In de eerste mededeeling is deze meening dan ook genit, doch denken wij aan stoffen met drie, vier of meer overgangspunten, dan is deze onderstelling wel eenigermate onwaarschijnlijk, en daar zij bij nader inzien hier niet noodzakelijk is, geven wij voorloopig de voorkeur aan een andere onderstelling, die eenvoudiger en plausibeler schijnt.

Ook voor het geval dat een stof in drie gekristalliseerde modificaties voorkomt kan het bestaan van twee molecuulsoorten de verschijnselen in sommige gevallen verklaren, wanneer men n.l. nog een tweede discontinuïteit in de mengkristallen-reeks aanneemt.

Dit nu is in fig. 6 voor den fosforus gedaan; wij zien, dat de vloeistoffen *bl* koëxisteeën met de mengkristallen *bs'*, terwijl de vloeistoffen *lc* met de mengkristallen *sc* in evenwicht zijn.

In deze figuur stelt s_2 den rooden fosforus bij de unaire smelttemperatuur voor. Beneden deze temperatuur, die volgens JOLIBOIS bij 610° gelegen is, blijft de roode fosforus tot 460° stabiel, waar den roode modificatie, die door s_3 wordt voorgesteld, zich omzet in den violetten vorm S_4 , welke beneden 460° stabiel is.

Verder kunnen wij nog opmerken, dat, daar in de techniek roode

¹⁾ Snel opwarmen, van lagere temperatuur afkomende, geeft weinig verandering waaruit volgt dat de lijn ms_1 vrij steil loopt.

²⁾ Comptes Rendus **149**, 287 (1909)

151, 382 (1910).

P uit gele P wordt verkregen door verhitting op 280° , van de lijn l_2l_1 op de lijn $s_3s'_3$ wordt overgesprongen, die echter ook nog meta-stabiel is, en dat dan, zooals JOLIBOIS vond, door middel van den katalysator *Jodium*, de bij die temperatuur stabiele toestand, de violette P wordt verkregen, die op de lijn s_4q gelegen is.

De tweede stof, die op haar complexiteit werd onderzocht was kwik. Daar van deze stof slechts één gekristalliseerde toestand bekend is, en geen enkele eigenschap op een samengesteld karakter van kwik wijst, werd vermoed, dat deze stof zich altijd unair zou gedragen. Het experiment heeft dit vermoeden volkomen bevestigd. Of kwik in het luchtledig van af $\pm 300^\circ$ plotseling door water, en daarna door vast koolzuur en alcohol werd afgekoeld, of van af -80° snel werd opgewarmd, steeds bleef het stolpunt, resp smeltpunt hetzelfde en gedroeg de stof zich volkomen unair, waaruit wij dus de conclusie mogen trekken, dat, *wanneer* de stof samengesteld is, de inwendige transformaties met buitengewoon groote snelheid moeten verlopen, of hetgeen waarschijnlijker is, dat de stof kwik werkelijk uit één molecuulsoort bestaat.

De derde door ons onderzochte stof, waarbij, in verband met haar overgangspunten hetzelfde verwacht werd als bij den fosforus, was *tin*.

Ofschoon het thans verrichte onderzoek nog een orienteerend karakter draagt, toch kunnen wij hier reeds mededeelen, dat tin van bijzonder groote zuiverheid scherp unair stollen *kan*, doch bij snel werken haar samengesteld karakter verraadt, evenals de fosforus dat doet. In een volgende mededeeling hopen wij het resultaat van het definitieve onderzoek in het kort mede te deelen.

Amsterdam, 23 December 1910. Anorg. Chem. Lab der Universiteit.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt aan eene mededeeling van den Heer L. S. ORNSTEIN: „*Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer*. I.

(Mede aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES).

Voor de afleiding van de tweede hoofdwet der thermodynamica bedient men zich vaak van de theorie der verzamelingen (ensembles) van systemen. Deze theorie is door J. W. GIBBS zeer uitvoerig uiteengezet in zijn bekende „*Elementary Principles of Statistical Mechanics*”. Daarin treden twee soorten van ensembles, de kanonische en de microkanonische, bijzonder op den voorgrond. Over deze laatste ensembles zijn nu door Dr. P. HERTZ ¹⁾ beschouwingen ontwikkeld, die mij aanleiding geven tot eenige opmerkingen.

¹⁾ Ann der Phys. Bd. 33, p. 236, 1910.

§ 1. In den aanvang van zijne mededeeling zet HERTZ uiteen, dat het rationeel is bij de studie der verschijnselen, die een gegeven systeem vertoonen zal, gebruik te maken van het ensemble der toestanden, die een systeem dat aan zich zelf is overgelaten doorloopen zal. Een dergelijk ensemble wordt gewoonlijk tijdsensemble genoemd.

Daar nu hetgeen bij onze waarnemingen tot onze kennis komt ongetwijfeld moet worden opgevat als het gevolg van talrijke achtereenvolgens gedurende den tijd van waarneming doorloopen toestanden, heeft men goeden grond om voorop te stellen, dat onze waarnemingen ons gemiddelden in een dergelijk ensemble doen kennen.

Wij kunnen de volgende beschouwingen meetkundig inkleeden door gebruik te maken van de terminologie der meerdimensionale meetkunde. De toestand van een gegeven systeem met n graden van vrijheid is door n algemeene coördinaten $q_1 \dots q_\nu \dots q_n$ en door de n overeenkomstige momenten $p_1 \dots p_\nu \dots p_n$ bepaald. Kiezen wij nu deze $2n$ veranderlijken tot coördinaten van een punt in eene ruimte E_{2n} (phasen-uitgebreidheid), dan kan dit punt (systeempunt) den toestand van een systeem voorstellen.

Al de plaatsen, die het systeempunt dat met een aan zichzelf overgelaten systeem correspondeert achtereenvolgens doorloopt, zullen liggen in eene $(2n-1)$ -dimensionale ruimte E_{2n-1} , waarvan de vergelijking luidt

$$\varepsilon(p_1 \dots p_\nu \dots p_n, q_1 \dots q_\nu \dots q_n) = C \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De vorm der functie ε , die de energie van het systeem voorstelt, hangt samen met de geartheid van het gegeven stelsel. De beweging van het systeempunt in de ruimte E_{2n-1} is bepaald door $2n$ differentiaal vergelijkingen van den vorm

$$\dot{p}_\nu = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\nu}$$

(ν van 1 tot n)

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_\nu},$$

en door de $2n$ aanvangswaarden der p_ν 's en der q_ν 's. Het punt beschrijft een lijn die in de ruimte E_{2n-1} gelegen is, die ik als de baan L zal aanduiden. Evenals EINSTEIN¹⁾ gaat HERTZ van de onderstelling uit, dat de baan van een systeem de geheele ruimte E_{2n-1} dicht vult. Van deze onderstelling gebruik makende, betoogen zij dan vervolgens dat het gemiddelde in een tijdsensemble identiek is met dat over de ruimte E_{2n-1} en dat men dus de studie van de eigenschappen van een willekeurig systeem kan terugbrengen tot die van een microkanonisch ensemble. In een dergelijk ensemble is een

¹⁾ A. EINSTEIN, Ann. d. Phys. Bd. 11, p. 170, 1903.

schil der ruimte R_{2n} , waarin de energie der systemen tusschen ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ ligt, met eene uniforme dichtheid q_{2n} met systemen gevuld. Laat men $d\varepsilon$ tot 0 naderen en tegelijk q_{2n} op zoodanige wijze oneindig worden dat $q_{2n} d\varepsilon$ eindig blijft, dan ontstaat in de ruimte E_{2n-1} een ruimte dichtheid q_{2n-1} ; het op deze wijze ontstane ensemble zal ik energie-vlak ensemble noemen. Wij dienen de begrippen van „gemiddelde in een ensemble” en van „waarschijnlijkheid van een toestand” nader te preciseeren. Voor ik daartoe over ga zal ik de genoemde onderstelling van HERTZ en EINSTEIN onderzoeken.

Het is uitgesloten dat in eindigen tijd hoe lang ook (en bij het opmaken van een tijdgemiddelde moet men zich zulk een tijd voorstellen) *streng* alle fasen doorloopen worden.

POINCARÉ en ZERMELO hebben waarschijnlijk gemaakt dat de systeembanen gesloten zijn, en er bestaan gevallen waarin er gesloten banen voorkomen, die zeker niet alle punten van de ruimte E_{2n-1} doorloopen. Ik zal daarvan eenige voorbeelden geven.

Indien de kinetische energie eene homogene quadratische functie der momenten is, waarvan de coëfficiënten van de coördinaten afhangen, wordt het systeem dat men verkrijgt door alle momenten om te keeren in dezelfde ruimte E_{2n-1} voorgesteld. Is nu een zekere baan L van het systeem punt gegeven, dan kan men een andere eveneens mogelijke baan L' krijgen door op alle standen a, b, c die bij L voorkomen, de genoemde omkeering toe te passen, en wel kan de baan L' zoo doorloopen worden, dat het tijdsverloop tusschen de oogenblikken waarop twee standen b' en a' bereikt worden, gelijk is aan het interval tusschen de tijdstippen waarop eerst a en b bereikt worden. Ik zal ter bekorting dergelijke systemen gespiegelde systemen, hun banen gespiegelde banen noemen. Het is nu niet noodzakelijk dat de baan en zijn gespiegelde te zamen één baan vormen en als zij dat niet doen, zijn er minstens twee geheel van elkaar gescheiden banen in de ruimte E_{2n-1} en kan onmogelijk een daarvan alle standen in E_{2n-1} bereiken. Om hiervan een eenvoudig voorbeeld te geven beschouw ik het volgende geval. Binnen een bol bewegen zich twee materiele punten met gelijke snelheid, die door den bolwand en door elkaar als volkomen veerkrachtige lichamen worden teruggeslaat. Onder alle mogelijke bewegingen kiezen wij nu die uit, waarbij de beide punten zich langs de zijden van een vierkant bewegen. Men kan nu tweeeërlei onderstellen:

1°. De punten bewegen zich in gelijken zin; de gespiegelde baan zal dan nooit door het systeem punt bereikt worden.

2°. De punten bewegen zich in tegengestelden zin; dan vallen de gespiegelde baan en de baan zelf samen.

Plaatst men meerdere punten binnen den bol, dan kan men zelfs als men de punten uitgebreidheid toekent, zoodat de snelheidsverdeling door hun onderlinge botsingen gewijzigd kan worden, toch steeds een aanvangstoestand zoo geven dat in het eene geval de gespiegelde baan wel, in het andere geval niet met de baan te samen valt, terwijl al deze banen toch in dezelfde ruimte E'_{2n-1} liggen ¹⁾.

Men kan nu de vraag stellen: als de systeembaan niet streng door elk punt der ruimte E'_{2n-1} gaat, komt zij dan niet in den loop van een zoo noodig zeer lang te kiezen tijd zoo dicht in de buurt van elk willekeurig punt als men maar wil? Indien men eenvoudige systemen heeft, waarin een zekere regelmaat bestaat, is iets dergelijks uitgesloten; wat het geval zal zijn voor gecompliceerde systemen met een groot aantal graden van vrijheid, kan men moeilijk in het algemeen zeggen, doch het komt mij voor dat in elk geval een systeem van ongeordenden aanvangstoestand niet licht in den loop van een eindig tijdsverloop in geordenden toestand zal overgaan.

Intusschen doet zich toch een omstandigheid voor, die voor de handelwijze van EINSTEIN en HERTZ pleit. Het mag al zijn dat er talrijke toestanden bestaan, die niet achtereenvolgens doorloopen kunnen worden, deze toestanden kunnen desondanks voor onze waarneming niet te onderscheiden zijn, daar wij in wijde grenzen bij verschillende inwendigen toestand toch nog dezelfde waarneembare eigenschappen zullen aantreffen. Door nu al dergelijke „equivalente” toestanden en banen samen te vatten, krijgen wij een belangrijke uitbreiding van het ensemble dat wij gebruiken kunnen, om iets over de waargenomen grootheden af te leiden. Al bestaat er strikt genomen, geen direct verband tusschen de in rekening gebrachte systemen, onze uitkomsten zullen ons toch iets omtrent de systemen der waarneming kunnen leeren.

Een andere gunstige omstandigheid is vervolgens deze, dat een belangrijk deel der systemen van een microkanonisch ensemble onderling weinig verschillen. Hetzelfde geldt evenzeer voor de toestanden, die een systeem achtereenvolgens doorloopt. Het systeem waarmede de meerderheid der systemen op een baan equivalent is, kan hetzelfde zijn als dat waarmede de meerderheid der systemen in het overeenkomstige microkanonische ensemble equivalent is.

Toch moet men voorzichtig zijn te generaliseeren. Heeft men bijv. het geval dat een groot aantal volkomen gladde en starre bolvormige molekulen besloten zijn in een bolvormig vat, waarvan de wand tegenover de molekulen als volkomen veerkrachtig en glad kan worden beschouwd. Het resulterende moment van de hoeveel-

¹⁾ Vergelijk ook KELVIN Baltimore Lectures p. 486.

heid van beweging ten opzichte van het middelpunt (M) is nu constant.

Geven wij dus een zekeren aanvangstoestand dan gelden voor de coördinaten van het systeempunt de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = C \\ M = M_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

waarin M een bekende functie van de coördinaten en de momenten is. De systeembaan zal dus liggen in een $2(n-1)$ -dimensionale ruimte (2), punten van E_{2n-1} buiten deze ruimte gelegen worden door de baan L nooit bereikt.

Intusschen zal echter de meerderheid van alle bij zekere energie mogelijke toestanden weder een bepaald moment hebben dat van nul weinig afwijkt. Denkt men zich de ruimte E_{2n-1} door ruimten $M = 0$, $M = \sigma \dots$ in strooken gesneden, dan verdeelen deze de ruimte E_{2n-1} dusdanig, dat de meerderheid der systemen in de strook tusschen $M = 0$ en $M = \sigma$ (σ zeer klein) ligt. De systemen van een bepaalde strook zullen weder voor het overgrootste deel aequivalent zijn. Gaat dus de baan van een systeem dat in een gebied (2) ligt al niet door alle punten van dit gebied, bij berekeningen komt men tot goede resultaten als men het geheele gebied in aanmerking neemt.¹⁾

§ 2. Alvorens ik de theorie der ensembles op de beschouwing van werkelijke systemen toepas, zal ik de begrippen van gemiddelde en waarschijnlijkheid nader omlijnen.

Zij φ eene grootheid die betrekking heeft op een gegeven systeem en die op elk tijdstip een bepaalde waarde heeft. Onder het gemiddelde van φ in het deel van het tijdsensemble dat tusschen de tijden t_1 en t_2 ligt zal ik de grootheid verstaan die door de formule

$$\overline{\varphi}_t = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi dt. \dots \dots \dots (3)$$

gegeven is.

¹⁾ Het feit dat in het boven beschouwde geval de grootheid M voor de overgrootste meerderheid der systemen van een microkanonisch ensemble nul is, heeft tengevolge dat dit ensemble geen dienst kan doen in gevallen waarin het moment van nul afwijkt. Men kan dan een ensemble in de ruimte (2) geconstrueerd gebruiken, doch beter zal het zijn een uitbreiding der kanonische ensembles toe te passen die GIBBS (pg. 38) aangaf. In een dergelijk ensemble is het aantal der systemen, die in een element $dp_1 \dots dq_n$ van R_{2n} liggen voor te stellen door

$$N e^{-A - \frac{\varepsilon}{\Theta} - \frac{M}{M_0}} dp_1 \dots dq_n,$$

de grootheden Θ , M_0 en A zijn constanten. Zonder voor het oogenblik nader op een dergelijk ensemble in te gaan, wil ik slechts opmerken, dat in het deel der ruimte R_{2n} , dat in de nabijheid van ($\varepsilon = 0$, $M = M_0$) ligt, het aantal systemen per volume eenheid dat in andere gebieden ver overtreft.

Wanneer wij door waarnemingen de waarde van een grootheid φ (bijv. een druk, temperatuur of dichtheid etc.) bepalen, is het niet de waarde op een bepaald oogenblik die in onze metingen tot uitdrukking komt, doch een grootheid die met de waarden die φ gedurende een langer tijdsverloop aanneemt, in verband staat. Het ligt voor de hand te onderstellen, dat het de gemiddelde waarde van φ , zooals die door (3) gegeven wordt, is, die door onze waarnemingen gegeven wordt.¹⁾

Maken wij van deze onderstelling gebruik, dan doet zich de vraag voor in welk der tijdsensembles die in de ruimte $E_{2,1}$ denkbaar zijn, wij (3) hebben toe te passen en voor welk interval in het te kiezen tijdsensemble. Deze vraag is uiteraard niet te beantwoorden. Alleen kunnen wij opmerken, dat zoowel voor de meerderheid der intervallen in hetzelfde tijdsensemble als voor de meerderheid der mogelijke tijdsensembles de grootheid (3) dezelfde waarde heeft. Deze waarde is dan die van de grootheid φ zooals die voor het stationaire systeem wordt waargenomen.

In plaats van te letten op de toestanden die een gegeven systeem achtereenvolgens doorloopt en deze tot een tijdsensemble te vereenigen, kan men de baan L door de een of andere verdeling met systeempunten gevuld denken.

Een dergelijk ensemble zal ik lijnensemble noemen. Het aantal systemen dat op een element ds van de systeembaan ligt zal ik door $\varrho_1 ds$ voorstellen. Een lijnensemble is stationair als het als het aantal punten op elk deel der lijn door de beweging der systeempunten niet gewijzigd wordt. Het is gemakkelijk de voorwaarde aan te geven waaraan de dichtheid ϱ_1 in een stationair lijnensemble heeft te voldoen.

Zijn P en P' twee punten van de baan L , en zij v en v' de snelheid van het systeempunt in zijn baan in deze punten, terwijl ϱ_1 en

¹⁾ In het algemeen te bewijzen, dat het juist deze grootheid is, die de waargenomen waarde van φ geeft zal bezwaarlijk gaan; voor den druk is het bewijs te leveren.

Indien wij met een grootheid te doen hebben, die met den tijd veranderlijk is, zal (3) toch gebruikt kunnen worden om de waarde voor een tijdsinterval te definiëren, dat klein genoeg is om van de verandering der waargenomen grootheid gedurende dit interval te mogen afzien. De formule (3) is slechts bruikbaar bij de bepaling van een waargenomen grootheid, indien $\overline{\varphi}_t$ niet van den duur $t_2 - t_1$, afhankelijk is. De afwijkingen, die φ van $\overline{\varphi}_t$ vertoont, moeten elkaar kunnen compenseren. In het geval dat $\overline{\varphi}_t$ met den tijd verandert, moet het interval waarin $\overline{\varphi}_t$ constant geacht kan worden, groot genoeg zijn om een compensatie der positieve en negatieve afwijkingen $\overline{\varphi}_t - \varphi$ toe te laten.

ϱ'_1 de dichtheid in hun onmiddellijke omgeving voorstellen. Het aantal systemen dat zich op het stuk PP' van L bevindt, zal gedurende een tijd dt niet veranderen tengevolge van de beweging der systemen als

$$v \varrho_1 = v' \varrho'_1$$

is. Het lijnensemble is dus stationair als ϱ_1 door

$$\varrho_1 = \frac{C}{v} \dots \dots \dots (4)$$

gegeven wordt.

Onder het gemiddelde van een grootheid q , die voor elk systeem van het ensemble een bepaalde waarde heeft, zal ik verstaan

$$\overline{q}_s = \frac{\int_{s_1}^{s_2} q \varrho ds}{\int_{s_1}^{s_2} \varrho ds} \dots \dots \dots (5)$$

In deze formule is onder s_1 en s_2 te verstaan de langs de baan L gemeten afstand der punten P_1 en P_2 tot een vast punt der baan. Voor het stationaire lijnensemble levert dit

$$\overline{q}_s = \frac{\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{v} q ds}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{v} ds} \dots \dots \dots (6)$$

De waarde, die dit voor \overline{q}_s levert, is gelijk aan \overline{q}_t voor het overeenkomstige interval, hetgeen men gemakkelijk inziet als men bedenkt dat $\frac{ds}{v}$ den tijd voorstelt die noodig is om den weg ds te doorloopen.

Het stationaire lijnensemble kan dus ook gebruikt worden om de waarde van waargenomen grootheden te bepalen.

Ik zal nu een andere soort ensembles beschouwen. Wij verdeelen de ruimte E_{2n-1} op de volgende wijze in volume elementen. Zij P een punt van deze ruimte, L de systeembaan door dit punt. Breng door P een vlakke $(2n-1)$ -dimensionale ruimte R_{2n-1} loodrecht op L , en kies in de doorsnijding van E_{2n-1} en R_{2n-1} een $(2n-2)$ -dimensionaal volume element do dat P omvat (bijv. een bol of een maat-polytoop). Trek door de begrenzing van do de systeembanen en construeer vervolgens in een punt P' dat zich op L op een afstand

ds van P bevindt, een ruimte R'_{2n-1} loodrecht op L ; deze snijdt de uit do getrokken banen, waardoor in de ruimte (E_{2n-1}, R'_{2n-1}) een volume element wordt uitgesneden, dat tot op grootheden van de orde ds gelijk aan do is.

De inhoud van het door de systeembanen en de elementen do begrensde element der ruimte E_{2n-1} bedraagt $do ds$. Wij denken ons dit element zoo klein dat de snelheid v in alle punten gelijk gesteld kan worden, en vullen het met een dichtheid $\frac{A}{v}$ met systemen; het aantal der systemen in $do ds$ bedraagt dus

$$do ds \frac{A}{v},$$

of als wij $do ds = d\omega$ stellen

$$d\omega \frac{A}{v}.$$

Onder de gemiddelde waarde van φ in een dergelijk ensemble zal ik verstaan

$$\overline{\varphi} = \frac{\int_{\varepsilon} \frac{\varphi}{v} d\omega}{\int_{\varepsilon} \frac{d\omega}{v}} \dots \dots \dots (7)$$

de integralen moeten over de geheele ruimte E_{2n-1} uitgestrekt worden. Deze definitie is aldus gekozen omdat de bijdrage tot het gemiddelde van een strook van de breedte do tusschen P en P' (s_1 en s_2 zie pg. 815) bedraagt

$$\frac{do \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varphi}{v} ds}{do \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v}}$$

hetgeen als do tot 0 nadert, gelijk aan $\overline{\varphi}$ is ¹⁾. Wij hadden de constante A voor de verschillende strooken waarin E_{2n-1} te verdeelen is, verschillend kunnen kiezen; het zoo verkregen ensemble is evengoed als het boven beschouwde stationair ²⁾. Ik zal bewijzen dat het ensemble met constante A , dat ik energie-vlak ensemble zal

¹⁾ Ik zal hieronder bewijzen dat do voor een strook streng constant is.

²⁾ Een ensemble, waarin de constante A voor de verschillende strooken verschillend is krijgt men als men uit het ensemble dat op pg. 813 beschouwd is door de ruimte E_{2n-1} een laag uitsnijdt.

noemen de grens is waartoe een microkanonisch ensemble nadert. Daartoe moet ik eerst de snelheid v in de systeembaan nader onderzoeken. Indien wij ons in een punt $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$ der baan bevinden, kunnen wij de componenten der snelheid v gemakkelijk aangeven, deze zijn nml.

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_r &= - \frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \\ \dot{q}_r &= \frac{\partial \epsilon}{\partial p_r} \end{aligned} \right\} r \text{ van } 1 \text{ tot } n$$

zoodat dus

$$v^2 = \sum_1^n \left\{ \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Men kan deze snelheid in verband brengen met een meetkundige grootte, die op de ruimte E_{2n-1} in het punt p, q betrekking heeft.

De richtingcoëfficiënten van de normaal aan deze ruimte in het beschouwde punt α_r, β_r (r van 1 tot n) zijn namelijk

$$\alpha_r = \frac{\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r}}{\sqrt{\sum_1^n \left\{ \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_r} \right)^2 \right\}}}$$

en

$$\beta_r = \frac{\frac{\partial \epsilon}{\partial p_r}}{\sqrt{\sum_1^n \left\{ \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_r} \right)^2 \right\}}}$$

Gaat men nu over een afstand Δ op deze normaal, zoo komt men in een ruimte E'_{2n-1} , $(\epsilon + d\epsilon)$, waarbij dus

$$d\epsilon = \Delta \sum_1^n \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \alpha_r + \frac{\partial \epsilon}{\partial p_r} \beta_r \right\} = \Delta v$$

is. Laat men Δ tot 0 naderen dan krijgt men dus voor $\frac{\partial \epsilon}{\partial N}$ het differentiaal quotient van ϵ naar den normaal aan de ruimte E_{2n-1} hieruit volgt

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial N} = v \dots \dots \dots (9)$$

Wij beschouwen nu de schil tusschen de ruimten E_{2n-1} voor ϵ en E'_{2n-1} voor $\epsilon + d\epsilon$ als waarden der energie, en verdeelen deze op de volgende wijze in elementen. Beschouw een punt P in de ruimte E_{2n-1} , L de systeembaan door dit punt, wij nemen R_{2n-1}

door P' loodrecht op L en een element do om P in de doorsnijding van E_{2n-1} en R_{2n-1} , door de grenspunten van do trekken wij de systeembanen. Deze snijden een ruimte R'_{2n-1} door het punt P' dat op L ligt loodrecht op deze baan gebracht in een element do' . Vervolgens construeeren wij door de punten van do en do' de normalen aan E_{2n-1} , deze snijden E'_{2n-1} waardoor er $(2n-1)$ -dimensionale ruimteelementen met de volumina Δdo en $\Delta' do'$ gevormd worden, onder Δ en Δ' is de afstand van E_{2n-1} en E'_{2n-1} in P en P' te verstaan. In den tijd dt stroomen door deze elementen de systemen die in de volumina $v do \Delta dt$ en $v' do' \Delta' dt$ liggen. Volgens het theorema van LIOUVILLE zijn echter deze volumina gelijk, dus is

$$do \Delta v = do' \Delta' v'.$$

Doch volgens (9) kan hiervoor geschreven worden

$$do d\varepsilon = do' d\varepsilon$$

$$do = do'$$

Denken wij ons vervolgens de ruimte tusschen E_{2n-1} en E'_{2n-1} met de overal gelijke dichtheid q_{2n} met systemen gevuld, dan hebben wij wat GIBBS een mikrokanonisch ensemble noemt. In een element $do \Delta ds$ dezer schil liggen $q_{2n} do \Delta ds$ systemen, ds is een lengteelement op een systeembaan L . Hiervoor kan men schrijven

$$q_{2n} d\varepsilon = \frac{do ds}{v}$$

Laat men nu $d\varepsilon$ tot 0 en q_{2n} tot oneindig naderen, doch zoodanig dat $q_{2n} d\varepsilon = A$ een eindige constante wordt, zoo komt er in de ruimte E'_{2n-1} een verdeling waarvan de dichtheid q_{2n-1} door

$$q_{2n-1} = \frac{A}{v}$$

wordt uitgedrukt. Het mikrokanonische ensemble nadert dus tot het pag. 817 beschouwde ensemble.

Onder waarschijnlijkheid van een systeem in een ensemble zal ik verstaan het aantal der systemen dat zich in dat ensemble per volumeeneheid bevindt in een element, dat het punt waar het beschouwde systeem is voorgesteld omvat, gedeeld door het totale aantal der systemen van het ensemble.

Stelt men deze waarschijnlijkheid door w voor, en zijn w_1 en w_2 de waarschijnlijkheden van twee toestanden, dan is in het lijnensemble

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{v_2}{v_1} \dots \dots \dots (10);$$

in het vlakensemble

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{v_2}{v_1} \dots \dots \dots (11);$$

in het mikrokanonische en in het tijdsensemble

$$w_1 = w_2 \dots \dots \dots (12).$$

Men kan de waarschijnlijkheid van een bepaald systeem voorstellen door

$$w = \frac{C_1}{v}$$

voor het lijnensemble,

$$w = \frac{C_2}{v}$$

voor het vlakensemble; en

$$w = C_3$$

voor het mikrokanonisch ensemble ¹⁾.

¹⁾ Ter bepaling van de constanten C_2 C_3 kan men als volgt te werk gaan. Het aantal systemen in een element $d\omega$ van het vlakensemble en in een element $dp_1 \dots dq_n$ van het mikrokanonisch ensemble bedraagt resp. $\frac{NC_2}{v} d\omega$ en $N^1 C_3 dp_1 \dots dq_n$, als N en N^1 de totale aantallen systemen der ensembles zijn. Hieruit volgt gelijk men gemakkelijk ziet

$$C_2^{-1} = \int_E \frac{d\omega}{v} = \int_E \frac{d\epsilon}{\partial \bar{N}}$$

waarbij de integratie over de geheele ruimte E_{2n-1} is uit te strekken. En verder

$$\begin{aligned} C_3^{-1} &= \int dp_1 \dots dq_n = \\ &= \int d\omega \Delta = d\epsilon \int_E \frac{d\omega}{v}, \end{aligned}$$

de integraal \int moet over deshil tusschen E_{2n-1} en E'_{2n-1} uitgestrekt worden, ter-

wijl de integraal \int_E weder over de ruimte E_{2n-1} is te nemen.

Bij de bepaling der constante C_1 moet men twee gevallen onderscheiden. De systeembaan L kan in de eerste plaats gesloten zijn, dan is

$$\int w ds = 1 = C_1 \int \frac{ds}{v} = C_1 T$$

of

$$C_1^{-1} = T$$

de integratie is langs de systeembaan uit te voeren, T is de tijd waarin de baan éénmaal doorloopen wordt.

In de tweede plaats kan de systeembaan open zijn, dan wordt T oneindig groot,

Is er iets natuurlijks in het gebruik der lijnensembles bij het bepalen van de waarschijnlijkheid van een werkelijk systeem, dan volgt uit het vorige dat ook de vlakensembles niet onnatuurlijk zijn voor dit doel.

Opgemerkt kan nog worden dat in al de beschouwde ensembles de overgrootte meerderheid der systemen voor de waarneming equivalent is. Stelt men deze equivalente systemen even waarschijnlijk, dan krijgt men een grootte groep systemen die veel waarschijnlijker zijn, dan alle andere systemen van het ensemble.

§ 3. Ik zal voor enkele bijzondere gevallen de snelheid in de systemenbaan nog wat nader beschouwen. Wij vonden voor de snelheid

$$v^2 = \sum_1^n (\dot{p}_r^2 + \dot{q}_r^2).$$

Stel dat de kinetische energie in den vorm

$$\epsilon_p = \frac{m}{2} \sum_1^n \dot{q}_r^2 \dots \dots \dots (13)$$

gebracht kan worden, dan is

$$v^2 = \frac{2}{m} \epsilon_p + \sum_1^n \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \right)^2 \dots \dots \dots (14)$$

Laten wij beginnen met het geval dat $\frac{n}{3}$ materiele punten binnen een gegeven volume besloten zijn. Wij onderstellen dat de punten geen werking op elkaar uitoefenen, dat zij echter van de wanden afstootende krachten ondervinden die oneindig groot worden, als een punt tot op den afstand σ (zeer klein) in den wand is doorgedrongen, buiten den wand zij de kracht nul. De punten zullen dus zoover in den wand voortbewegen dat hun kinetische energie is uitgeput, zij bezitten dan een eindige potentieele energie. Bij een botsing is echter $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \right)^2$ zeer groot t. o. z. v. de potentieele energie.

Wij brengen de uitdrukking voor v in den vorm

$$v^2 = \frac{2}{m} \epsilon - \frac{2}{m} \epsilon_p + \sum_1^n \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \right)^2$$

men moet zich dan tot (10) bepalen. Keert echter de baan telkens na een tijd T zeer dicht tot den uitgangsstand terug zonder dezen streng te bereiken, dan is het mogelijk dat in de achtereenvolgende perioden T' ongeveer dezelfde fasen doorloopen worden. In dat geval zou men onder

$$w = \frac{1}{v T'}$$

de waarschijnlijkheid van een bepaalden toestand kunnen verstaan.

Men ziet hieraan gemakkelijk dat v constant is (gelijk $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$) zoolang er geen punten met den wand botsen. Gedurende de tijden waarin er een of meer botsingen met den wand plaats grijpen, is v zeer veel grooter dan $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$, daar de derde (positieve) term den tweeden (negatieven) in grootte verre overtreft. Wij zullen onderstellen dat de botsingen zeer kort duren. De weg $\int v dt$ gedurende een botsing door het systeempunt in de baan L afgelegd blijft eindig (ook als wij δ tot ν laten naderen). Het systeempunt beschrijft een baan, waarin gedurende de tijden dat er geen botsingen plaats hebben de p_v 's constant zijn en de q_v 's lineair met den tijd veranderen, terwijl door een botsing het systeempunt in zeer korten tijd springt naar een nieuwe plaats waarvoor alle q_v 's en de p_v 's behalve die van het botsende materiele punt hetzelfde zijn. Bij beide wijze van beweging kan de baan zich zelf niet doorsnijden, keert zij in hetzelfde punt terug dan is zij gesloten, en wordt zij opnieuw doorlopen.

Men kan nu twee uiterste gevallen onderscheiden: ten eerste de botsing duurt kort ten opzichte van den tijd die tusschen twee op eenvolgende botsingen gemiddeld verloopt; en een tweede waarin juist het omgekeerde het geval is.

In het eerste geval zal gedurende tijden, die van de orde zijn van den gemiddelden tijd, die tusschen twee botsingen verloopt, v de waarde

$\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$ hebben, en er verder slechts gedurende korte tijden sterk

van afwijken. Stelt men v als functie van den tijd door een kromme voor dan zal deze bestaan uit aan de t -as evenwijdige stukken (voor de aangegeven intervallen van den tijd), afgewisseld door zeer steile toppen, waarvan de maximum ordinaat met de grootste waarde van

$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_v}\right)^2$ te samen hangt. Let men nu op de beweging gedurende tijden

die zeer lang ten opzichte van den tijd tusschen twee botsingen zijn, dan zullen in de beschouwde kromme zeer veel toppen van verschillende hoogte voorkomen. Is de beschouwde tijd lang genoeg dan zal voor verschillende gelijke tijdperken elke bepaalde soort der toppen in alle deelen der baan gelijkelijk voorkomen en zal ook de fractie

der baan die met de snelheid $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$ doorlopen wordt, voor beide

gevallen gelijk zijn tot op afwijkingen na die klein zijn ten opzichte van de beschouwde grootheden zelf. Is bijv. in de tijdseenheid het

aantal toppen van zekere soort N_b dan zullen voorkomen afwijkingen van de orde $\sqrt{N_b}$ als men het aantal der toppen b voor verschillende intervallen van den duur één vergelijkt. Laat men nu den duur der botsing en (door vergrooing van n) den gemiddelden tijd verloopend tusschen twee botsingen tot nul naderen, doch op dusdanige wijze dat de eerste tijd oneindig klein ten opzichte van den tweeden blijft, zoo komt er een r - t -kromme die in een eindig bereik oneindig veel maxima en minima heeft.

In het tweede grensgeval zullen er steeds een groot aantal deeltjes met den wand in botsing zijn terwijl hunne phase aanmerkelijk verschilt. Is het aantal botsingen van gegeven phase per tijdseenheid N dan zullen daarvan afwijkingen voorkomen die van de orde van \sqrt{N} zijn (zoowel positief als negatief). De weg die per tijdseenheid door het systeempunt in de baan L per tijdseenheid wordt afgelegd zal voor de overgrootste meerderheid dezer tijdsintervallen gelijk zijn. De voorkomende afwijkingen zijn dusdanig dat de wortel uit hun gemiddelde kwadraat klein is ten opzichte van den weg zelf.

Laat ons nu vervolgens een systeem beschouwen waarin n volkomen veerkrachtige en starre molekulen van de middellijn σ in een volume V bevat zijn. Wij beschouwen een lijnensemble. De punten van de lijn stellen de phasen van het systeem voor. In enkele daarvan is het aantal der molekulen in elk der k gelijke elementen waarin men het volume V verdeelen kan, precies $\frac{n}{k} = r$; in andere bestaan afwijkingen die ik voor het element V_k door τ_k zal voorstellen. De getallen τ_k voldoen aan de voorwaarde $\sum_1^k \tau_k = 0$. Ik neem aan dat de beschouwde volume-elementen groot zijn in vergelijking met de gemiddelde weglengte. Dan zal een verdeling met bepaalde waarden der getallen τ_k zich eenigen tijd handhaven. Wij kunnen dus op de lijn L tamelijk lange stukken aangeven, zoodanig dat op elk dezer stukken de waarden τ_k kunnen geacht worden constant te blijven. Zij l een stuk waarop géén afwijkingen voorkomen en l' een waarop zekere waarden der afwijkingen τ_k bestaan.

Wij moeten nu op deze stukken

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial q_r} \right)^2$$

bepalen. Deze som zal van oogenblik tot oogenblik door toevallige afwijkingen in het aantal botsingen onregelmatige schommelingen vertoonen. De gemiddelde waarde waarom de waarde zich beweegt, is echter gemakkelijk aan te geven; zij zal blijken voor l en l' ver-

schillend te zijn. De bijdrage tot de gemiddelde waarde der beschouwde som van elk der elementen V , afkomstig zal met het gemiddeld aantal botsingen te samen hangen dat per tijdseenheid plaats heeft. Volgens de bekende elementaire theorie der gemiddelde weglengte zal dit aantal evenredig zijn met $(r + \tau)^2$. Stelt men dat alle configuraties bij deze botsingen nog in talrijke mate voorkomen, dan zal men kunnen aannemen dat de bijdragen van de botsing in het κ^o element tot de snelheid v^2 in den vorm

$$\alpha (r + \tau)^2$$

te brengen is. De coëfficiënt α hangt te samen met den aard der krachten bij de botsing. Wij krijgen dus voor $\sum_1^n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_r} \right)^2$ in het beschouwde systeem

$$\alpha \sum_1^k (r + \tau_r)^2$$

en voor de snelheid v_τ

$$v_\tau^2 = \frac{2\varepsilon_p}{m} - \alpha \sum_1^k (r + \tau_r)^2$$

en voor het systeem waarin gelijke doch tegengestelde afwijkingen voorkomen

$$v_{-\tau}^2 = \frac{2\varepsilon_p}{m} + \alpha \sum_1^k (r - \tau_r)^2.$$

Bedenkt men dat $\sum \tau_r = 0$ is, dan vindt men

$$v_\tau^2 = v_{-\tau}^2 - \frac{2\varepsilon_p}{m} + \alpha \sum_1^k r^2 + \alpha \sum_1^k \tau_r^2 = v_0^2 + \alpha \sum_1^k \tau_r^2,$$

waarin v_0 de gemiddelde snelheid voor het homogene systeem is. De gemiddelde waarde der snelheid voor het afwijkende systeem is dus steeds grooter dan die voor het homogene systeem. Van de botsingen met den wand is afgezien en dit is geoorloofd daar hun aantal veel kleiner is dan dat der onderlinge botsingen, en de bijdrage die er van afkomstig is, bovendien voor een langeren tijd voor de drie systemen vrijwel gelijk is. De weg die in een langen tijd T wordt afgelegd is voor het homogene systeem $v_0 T$, voor de beide afwijkende systemen $\left(v_0 + \alpha \sum_1^k \tau_r^2 \right) T$; terwijl de voorkomende afwijkingen van deze waarden klein zijn t. o. z. van de waarden zelf. De weg is dus het kleinst voor het meest voorkomende systeem en gelijk voor afwijkende doch even waarschijnlijke systemen.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van Dr. PAUL HERTZ te Heidelberg: „*Ueber die kanonische Gesamtheit*“.

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

Herr Dr. L. S. ORNSTEIN war so liebenswürdig, mir brieflich den wesentlichen Inhalt der vorstehenden Arbeit mitzuteilen; ich möchte mir nun erlauben, an sie einige Bemerkungen anzuschliessen, die vielleicht zu ihrer Ergänzung dienen könnten.

Herr ORNSTEIN hat den Versuch gemacht, für die kanonische Gesamtheit eine physikalische Deutung zu geben. Nun ist es wohl sicher, dass der Begriff der mikrokanonischen Gesamtheit zunächst dem Verständnisse näher liegt und darum habe ich in einer früheren Arbeit ihn an die Spitze der Entwicklungen gestellt.¹⁾ Doch auch den Begriff der virtuellen Gesamtheit habe ich dort als unvermeidlich bezeichnet. Aber nachdem ich die ORNSTEIN'sche Dissertation²⁾ gelesen habe, die mir bei Abfassung meiner Arbeit unbekannt war, und ich gesehen habe, wie viele anderweitig als richtig erwiesene Ergebnisse aus der Theorie der kanonischen Gesamtheit gewonnen werden können, habe ich noch mehr die Zweckmässigkeit der virtuellen Gesamtheit erkannt und mich bemüht, auch für die kanonische Gesamtheit eine wirklich befriedigende Deutung zu finden. Das Ergebnis dieser Untersuchung, das, wie mir scheint, der ORNSTEIN'schen Auffassung recht nahe kommt, soll im folgenden mitgeteilt werden; dabei soll eine kurze Zusammenstellung aller der Auffassungsweisen vorausgeschickt werden, die überhaupt von diesem Begriffe möglich sind oder wenigstens zunächst möglich scheinen; eine ausführliche Kritik und genauere mathematische Nachprüfung aller hier angedeuteten Gedankengänge muss einer anderen Darstellung vorbehalten bleiben.

§ 1. Das erste Ergebnis, zu dem statistisch-mechanische Untersuchungen führten, bestand in dem MAXWELL'schen Geschwindigkeits-

1) Annalen der Physik Bd. 33, 1910, p. 225—274, 537—552. Ueber das Argument auf Seite 228 jener Arbeit vergl. Seite 830, 831, 833, 834, 835 der gegenwärtigen Mitteilung. Ich benutze ferner die Gelegenheit festzustellen, dass ich bei meinem Widerspruch (p. 260) gegen einen EINSTEIN'schen Beweis die Meinung dieses Forschers missverstanden habe, wie sich durch mündliche Aussprache ergeben hat. An einer andern Stelle werde ich den zu Unrecht angegriffenen Gedankengang ausführlich erläutern. — endlich bemerke ich noch, dass für die an sich richtige letzte Gleichung auf Seite 547 eine unrichtige Ableitung gegeben wurde. Hier hätte der Begriff der äusseren Kraft eingeführt werden müssen.

2) L. S. ORNSTEIN, Toepassing der Statistische Mechanica van GIBBS op molekulair-theoretische vraagstukken, Proefschrift Leiden 1908.

gesetz. Die Wahrscheinlichkeit für die Annahme jeder Geschwindigkeit wird durch eine Exponentialfunktion gegeben. Eine solche Verteilung der Wahrscheinlichkeit bezeichnet GIBBS als kanonisch. Das MAXWELL'sche Gesetz lässt sich aber erweitern; ein Molekül ist nichts anderes als ein Teilsystem, das mit einem sehr viel grösseren Mechanismus verbunden ist; und nun lässt sich der allgemeine Satz beweisen, dass die Phasen, die von einem System zeitlich nacheinander angenommen werden, wenn dieses mit einem sehr viel grösseren verbunden ist, mit Rücksicht auf ihre Häufigkeit angenähert eine kanonische Gesamtheit darstellen ¹⁾, als deren erstes Beispiel eben das MAXWELL'sche Gesetz aufgefunden wurde. Es ist also verständlich, dass GIBBS diesen Begriff in den Vordergrund seiner Betrachtung stellt und auch die Wahl der Exponentialfunktion begreift sich historisch.

Noch eine andere Deutung liegt nahe. Denken wir uns einen homogenen Körper in sehr viele, nur physikalisch unendlich kleine, Volumenelemente geteilt (deren jedes noch sehr viel Moleküle enthält), so wird die Häufigkeit der im Raum nebeneinander befindlichen Phasen in den meisten Fällen ebenfalls angenähert durch eine kanonische Gesamtheit gegeben. Die kanonische Gesamtheit kommt also sowohl als *Zeitgesamtheit* wie auch als *Raumgesamtheit* vor.

Somit kann dieser Begriff zu Bedenken keinen Anlass geben, solange er nur auf unvollständige Systeme oder Teilsysteme angewandt wird. Aber beim Studium des Werkes von GIBBS wird man, trotzdem gelegentlich diese Deutung hervorgehoben wird, ²⁾ kaum zu dem Eindruck gelangen, dass sich der Verfasser ausschliesslich auf sie beschränkt hat, sondern muss annehmen, dass es nach seiner Ansicht auch von *kanonischen Gesamtheiten vollständiger Systeme* zu reden gestattet ist.

Wie ist das möglich? Man kann sich zunächst darauf berufen, dass die in der Natur vorkommenden Systeme, auch wenn sie abgeschlossen scheinen, in Wirklichkeit unvollständig sind, z. B. durch die Wände hindurch mit der Aussenwelt in Verbindung stehen ³⁾. Man kann sich also jedes scheinbar vollständige System mit einem unendlich grossen Wärmereservoir verbunden denken ⁴⁾.

¹⁾ GIBBS, Elementary principles in statistical mechanics, New York und London 1902. Übersetzt von ZERMELO, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, Leipzig 1905. (Beim Zitieren werden die Seitenzahlen der deutschen Ausgabe in Klammern beigefügt). S. 183 (188),

A. EINSTEIN, Annalen der Physik Bd. 9, 1902, p. 417 § 3; Bd. 11, 1903, p. 170 § 3; vgl. auch diese Mitteilung § 4.

²⁾ GIBBS, l. c.

³⁾ Siehe z. B. M. PLANCK, Acht Vorlesungen über theoretische Physik.

⁴⁾ GIBBS, l. c.

Aber dann würden das betrachtete System und das Bad thermisch eine Einheit bilden, und es ist ohne weitere Untersuchung nicht einzusehen, was berechtigt, in der Betrachtung eine Trennung vorzunehmen. Die thermische Vereinigung zweier solcher nur scheinbar abgeschlossener Systeme würde im letzten Grunde doch (indem man die Reservoirs oder das gemeinschaftliche Reservoir hinzurechnet) auf die Vereinigung zweier mikrokanonischer Gesamtheiten hinauslaufen oder auf eine neue Koppelung innerhalb ein und derselben mikrokanonischen Gesamtheit.¹⁾

Wir wollen diese Frage nicht weiter verfolgen, sondern eine kurze Zusammenstellung geben von den möglichen oder möglich erscheinenden, den naheliegenden und auch wirklich aufgestellten Methoden, den Begriff der kanonischen Gesamtheit auf *streng vollständige* Systeme anzuwenden.

Jedenfalls kan sie nicht als Raumesamtheit gedacht werden, da diese schon eine Zerteilung des Körpers voraussetzt; aber auch ihre Deutung als Zeitesamtheit ist nunmehr unzulässig; denn die kanonische Gesamtheit enthält Phasen verschiedenster Energien, während die Energie eines wirklichen Körpers keine Veränderung erleiden kann. Also müssen die kanonischen Gesamtheiten, die wir jetzt betrachten wollen, von ganz anderer Art sein, dürfen gar keinen Bezug auf zeitlich nacheinander oder räumlich nebeneinander angenommene Zustände haben, sondern können nur ideell vorgestellte Zustände bedeuten. Solche Gesamtheiten nennen wir *virtuelle* und teilen die überhaupt möglichen Gesamtheiten ein in *Zeitesamtheiten*, *Raumesamtheiten* und *virtuelle Gesamtheiten*.

Da nun die virtuelle Gesamtheit doch irgend eine Beziehung auf das vorliegende System haben muss, so kann die Häufigkeit einer Phase in ihr nur die Wahrscheinlichkeit dafür bedeuten, dass das reale System jene Phase wirklich einnimmt. Aber eine solche Begriffsbildung erscheint zunächst widerspruchsvoll, zum mindesten unklar. Denn ein gegebenes System besitzt eben immer eine bestimmte Phase und diese wirklich, nicht nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Es kann sich also nur darum handeln, dass das System nicht vollständig gegeben ist; denn es ist allerdings zulässig von Wahrscheinlichkeit da zu reden, wo nicht alle Einzelheiten bekannt sind. So entsteht die Frage: Was soll bei dem mechanischen System

1) Damit sollen nur Schwierigkeiten angedeutet werden, die dieser Betrachtungsweise zunächst entgegenstehen, die aber keineswegs als unüberwindlich hingestellt werden sollen. Vielleicht hilft hier der Begriff der verschieden engen Koppelung, der mir von Herrn EINSTEIN in mündlicher Unterredung mitgeteilt wurde.

als bekannt, was als unbekannt gelten und in welcher Weise wird daraus die Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt?

Nun scheint ein mögliches Verfahren darin zu bestehen, dass man die ersten zwei Fragen unbeantwortet lässt und, statt die dritte Frage durch eine theoretische Ableitung zu lösen, eine willkürliche Hypothese über die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten zu Grunde legt ¹⁾, die nur der Bedingung des statistischen Gleichgewichtes genügen muss. GIBBS wählt als einfachste unter diesen Einschränkungen mögliche Verteilung, offenbar auch in Erinnerung an die Gastheorie, die *kinomische* Gesamtheit: Dafür, dass die Koordinaten $q_1 \dots q_n$ und die Impulse $p_1 \dots p_n$, für die zusammen wir auch $x_1 \dots x_m$ schreiben, in dem Volumenelement $dx_1 \dots dx_m$ des m -dimensionalen Raumes sich befinden, soll eine Wahrscheinlichkeit $P dx_1 \dots dx_m$ bestehen, und es soll

$$P = e^{-\frac{\psi - \varepsilon}{\vartheta}} \dots \dots \dots (1)$$

sein.

Hier sind ψ und ϑ Konstanten und ε die Energie, welche der Phase $x_1 \dots x_m$ entspricht.

Es braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden, wie unbefriedigend eine solche Auffassung ist. Denn abgesehen davon, dass die obige Formel eine willkürliche durch nichts begründete Annahme darstellt, die höchstens durch ihre Folgerungen bestätigt wird ²⁾, ist auch ihr Inhalt ganz unbestimmt, solange nicht angegeben wird, was an dem Systeme gegeben, was als unbekannt betrachtet wird.

Nun kann man aber in vielen Fällen plausibel machen, dass bei einer solchen Gesamtheit die Zustände der Systeme in der überwiegenden Mehrzahl sich nur verschwindend wenig von einem bestimmten Zustande unterscheiden ³⁾. Darum könnte es scheinen, als sei die kanonische Gesamtheit geeignet ein einziges System, nämlich gerade das reale vorzustellen. Aber dann müssen wir fragen: Weshalb

¹⁾ Er wird sich also von diesem Standpunkt aus um eine Hypothese handeln, d. h. um wirkliche, allerdings nicht mit voller Sicherheit ausgesprochene *Behauptungen*, die sich auf das tatsächlich Gechehene beziehen, nicht aber um eine *definitions-gemäss* angenommene Verteilung für ideelle fingierte Systeme (wie im folgenden §). Auch im Falle der unvollständigen Systeme und der Gastheorie handelt es sich um Aussagen über Verteilungen, nicht um Definitionen.

²⁾ Wenn wir in andern Teilen der Physik Hypothesen gern gelten lassen, die durch ihre Folgerungen bewiesen werden, müssen wir in derjenigen Theorie, die das Gegebene aus einem Prinzip zu erklären wünscht, darauf bedacht sein, ausser diesen möglichst wenig Hypothesen heranzuziehen.

³⁾ L. S. ORNSTEIN, Dissertation S. 11. Hier muss unter Zustand der Inbegriff aller äquivalenter Phasen, d. h. der durch Molekülvertauschungen aus einander hervorgehenden Anordnungen verstanden werden.

der Umweg? Die Antwort ist leicht gegeben: GIBBS definiert die thermodynamischen Grössen gar nicht durch die den einzelnen Systemen zukommenden Werte, auch nicht durch Mittelwerte, sondern durch Beziehungen, die *zwischen* den einzelnen Systemen bestehen, genauer gesagt, mit Hilfe der Häufigkeitsverteilung selbst. Und gerade das scheint, solange wir noch auf dem bis jetzt dargestellten Standpunkt stehen, durchaus unzulässig. Wenn auch zwischen den so definierten Grössen Gleichungen gelten, wie die aus der Thermodynamik bekannten, so bleibt eine solche Analogie „rein äusserlich und kann uns keine Aufklärung über den mechanischen Charakter der thermodynamischen Gleichung bieten. Denn . . . der Durchschnittswert der Wahrscheinlichkeitsexponenten ist gar keine Eigenschaft der einzelnen mechanischen Systeme, auch keine durchschnittliche Eigenschaft, welche das allen Gemeinsame oder Vorwiegende zum Ausdruck bringen könnte, sondern . . . hängt, wie der Wahrscheinlichkeitsexponent selbst, ausschliesslich von der willkürlichen anfänglichen Phasenverteilung ab, während die Entropie eines Systems doch immer durch die Natur dieses einzelnen Systems selbst bestimmt sein muss.“¹⁾

Ausserdem ist es natürlich unbefriedigend eine so willkürliche Annahme über die Häufigkeitsverteilung zu machen, anstatt sie aus der Natur des Problems selbst zu gewinnen. Das kann nur geschehen, wenn genau angegeben wird was als bekannt, was als unbekannt zu gelten hat. Nun ist es wohl am einfachsten die Energie des Systemes als bekannt zu betrachten. Die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Phasen ergibt sich dann sofort aus der Forderung des statistischen Gleichgewichtes oder aus der EINSTEIN'schen Annahme, dass die Phasen gleicher Energie immer wieder zyklisch durchlaufen werden; bei dieser letzten Auffassung wird die virtuelle Gesamtheit zu einer Zeitgesamtheit. Damit sind wir zur mikrokanonischen Gesamtheit gelangt, in der alle Systeme gleiche Energie besitzen. Eine solche mikrokanonische Gesamtheit ist vollständig bestimmt durch den Wert ihrer Energie; jeder Energie kommt eine andere Gesamtheit zu und somit gibt es eine einparametrische Schar von mikrokanonischen Gesamtheiten. Da in jeder derselben die Systeme über eine $(m-1)$ -dimensionale Fläche des m -dimensionalen Raumes ausgebreitet sind, so nennen wir sie auch Flächengesamtheiten im Gegensatz zu Mannigfaltigkeiten, welche wie die eben betrachteten m -dimensionale Gebiete erfüllen und Stereogesamtheiten heissen mögen.²⁾

¹⁾ E. ZERMELO, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XV. 1906 Seite 237.

²⁾ Mit dem Worte „Raumgesamtheit“ bezeichneten wir schon etwas anderes. Die Gesamtheiten zerfallen also nach ihrer Bedeutung in Zeitgesamtheiten, Raumgesamtheiten und virtuelle Gesamtheiten, nach ihrer Form in Stereogesamtheiten und Flächengesamtheiten.

Bei dieser Auffassung bleibt es aber zunächst noch unverständlich, wie man zu Gesamtheiten von verschiedener Energie, zu Stereogesamtheiten gelangen kann. Wieder suchen wir uns darauf zu stützen, dass die meisten Systeme einer kanonischen Gesamtheit in die Fläche der häufigsten Energie fallen mit einer Verteilung, die der mikrokanonischen Gesamtheit entspricht, und dass man daher die mikrokanonische mit genügender Annäherung durch eine kanonische ersetzen kann. Andererseits scheint diese zunächst der analytischen Behandlung leichter zugänglich ¹⁾ aus demselben Grund, aus dem in der gewöhnlichen Geometrie Volumenelemente einfachere Invarianten als Flächenelemente darstellen.

Bei einer Stereogesamtheit kommt es also sowohl auf die Verteilung längs der Energiefläche als auch senkrecht dazu an. Für jene braucht keine besondere Annahme gemacht zu werden, da sie aus der Bedingung des statistischen Gleichgewichtes oder dem EINSTEIN'schen Prinzipie ermittelt werden kann. Anders verhält es sich mit der Verteilung senkrecht zu den Energieflächen. Für sie können wir nach unserem jetzigen Standpunkt keine theoretische Ableitung geben, auch nicht eine Hypothese als Vermutung über eine Tatsächlichkeit aufstellen, sondern können nur eine willkürliche mathematische Annahme machen, über ergänzende, fingierte oder ideelle Systeme. Dann werden wir aber wieder mit ZERMELO sagen: Wenn die Systeme der kanonischen Gesamtheit *wirklich* nur unwesentlich von denen der mikrokanonischen abweichen, so ist es zwar zulässig, die thermodynamischen Grössen durch Mittelwertbildung über die Stereogesamtheit zu gewinnen, nicht aber von der Beziehung der Systeme zu einander Gebrauch zu machen. Oder: Eine räumliche Gesamtheit kann zwar im Grenzfall eine Flächengesamtheit liefern und sie auch ersetzen; in der Flächengesamtheit findet sich dann die Verteilung der Systeme über die Energiefläche wieder, wie sie in der Stereogesamtheit geherrscht hat. Dagegen das Gesetz des Abfalles senkrecht zu der Fläche ist durch Grenzübergang hinausgefallen und wird daher nicht eine Beziehung auf den realen Zustand des Körpers haben können. ²⁾

Dieser Schluss ist nicht ganz stichhaltig. Er ist nur insoweit berechtigt, als wir allein Häufigkeitsverteilung im Phasenraum untersuchen, ohne irgendwie auf die den Phasen zugehörige Energie zu achten. Nun lassen sich die thermodynamischen Grössen gar nicht aus den Phasen allein gewinnen, sondern es muss noch ihre Energie

¹⁾ Dennoch glaube ich, dass bei geeigneter Behandlung sich alle Schlüsse mit derselben Leichtigkeit auch an der mikrokanonischen Gesamtheit vornehmen lassen.

²⁾ P. HERTZ. l.c. S. 228.

gegeben sein und ein Gesetz über die Energie der sämtlichen möglichen benachbarten Phasen¹⁾.

Das Wesentliche dieses Gesetzes wird durch eine Konstante, den Modul gegeben, und nun zeigt sich, dass dieser Modul andererseits auch als Konstante in derjenigen virtuellen Gesamtheit auftritt, welche die reale Energie am häufigsten besitzt. Daher kann die Stereogsamtheit zur Temperaturdefinition verwandt werden. Es kann aber nicht die Rede davon sein, dass die kanonische Gesamtheit die Flächengesamtheit darum ersetze, weil die Individuen von beiden zum grössten Teil mit einander übereinstimmen; es handelt sich überhaupt gar nicht um eine Ersetzung der einen durch die andere. Sondern eine Konstante, die die Häufigkeit der virtuellen Gesamtheit regelt, hängt mit dem Mechanismus des realen Systems und der Energie der Flächengesamtheit in derselben Weise zusammen, wie eine thermodynamische Grösse.

Für diese Betrachtung besitzt die Verteilungsfunktion senkrecht zu den Energieflächen nur mehr mathematische Bedeutung. Die Verteilung längs der Flächen kann zwar noch als echte Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden; es ist aber nur folgerichtig, auch diese Beziehung fallen zu lassen und sich ganz auf den Standpunkt zu stellen, der im folgenden Paragraphen entwickelt werden soll.

§ 2. *) Es sei ein Körper gegeben, der zur Unterscheidung von den gleich einzuführenden fingierten Systemen der reale Körper heissen und dessen Energie ϵ^* als reale Energie bezeichnet werden möge. Wir wollen mit EINSTEIN²⁾ annehmen, dass der Zustand des Körpers durch ϵ^* vollständig bestimmt ist. Jetzt wollen wir eine Funktion $\mathfrak{D}(\epsilon^*)$ definieren, und lediglich zur *Definition dieser funktionalen Abhängigkeit* führen wir fingierte Systeme ein. Ihre Zahl N soll ausserordentlich gross sein und sie sollen so über den Phasenraum verteilt sein, dass im Volumenelement $dx_1 \dots dx_m$ von ihnen $P N dx_1 \dots dx_m$ liegen. Natürlich muss

$$\int P dx_1 \dots dx_m = 1 \quad (2)$$

sein. P soll aber gegeben werden durch

$$P = e^{\frac{\psi - \epsilon}{kT}}, \quad (1)$$

¹⁾ Der Begriff der Temperatur lässt sich nur erklären durch die Vorstellung der Vereinigung mit einem zweiten Körper. Bei dieser wird aber der gegebene Körper aus seiner ursprünglichen Zeitgesamtheit herausgebracht und wird — auch im Falle des Gleichgewichtes — sämtliche ihm möglichen benachbarten Phasen durchlaufen.

²⁾ Vergl. hierzu die Dissertation von L. S. ORNSTEIN, bes. den Anhang S. 120 ff.

³⁾ Annalen der Physik, Bd. 11, 1903, § 2.

oder auch durch

$$P = A e^{-\frac{\mathfrak{G}}{\varepsilon}} \dots \dots \dots (3)$$

Dabei hängen \mathfrak{G} und \mathfrak{p} bzw. \mathfrak{G} und A durch die Bedingungen

$$\int e^{-\frac{\mathfrak{G}}{\varepsilon}} dx_1 \dots dx_m = 1, \dots \dots \dots (4)$$

oder

$$A \int e^{\frac{\mathfrak{G}}{\varepsilon}} dx_1 \dots dx_m = 1 \dots \dots \dots (5)$$

zusammen, \mathfrak{G} heisst der Modul der fingierten Gesamtheit.

Solche Gesamtheiten nennen wir kanonische. Ihrer gibt es nun sehr viele. Wir stellen aber noch die Forderung auf, dass die häufigste ¹⁾ in ihr vorkommende Energie ε_m gleich der realen Energie ε^* sein möge,

$$\varepsilon_m = \varepsilon^* \dots \dots \dots (6)$$

Dadurch wird aus einer einparametrischen Schar kanonischer Gesamtheiten eine einzige hervorgehoben. Für diese Auswahl ist, abgesehen von dem mechanischen Charakter des realen Systemes auch der Wert der realen Energie ε^* massgebend, d. h. durch (2), (4), (6) wird jedem Wert ε^* ein Wert \mathfrak{G} zugeordnet, und somit eine Funktion $\mathfrak{G}(\varepsilon^*)$ definiert. Jetzt schreiben wir also der kanonischen Gesamtheit keine physikalische Bedeutung mehr zu; ihre Systeme haben an sich keine Beziehung zur Wirklichkeit mehr, sondern sind nur das mathematische Hilfsmittel, eine physikalisch wichtige Funktion darzustellen.

Es ist leicht, die Abhängigkeit des Moduls \mathfrak{G} von ε^* noch klarer hervortreten zu lassen. Dazu müssen wir den Begriff der Energiehäufigkeit (energetische Dichte) näher präzisieren. Die thermischen Eigenschaften eines Körpers sind vollständig definiert durch die von GIBBS eingeführte Funktion V , worunter das Volumen des Phasenraumes verstanden ist, in welchem die Energie unterhalb eines bestimmten Wertes ε liegt,

$$\int \int e^{-\frac{\varepsilon}{\varepsilon}} dx_1 \dots dx_m = V \dots \dots \dots (7)$$

Ferner setzen wir nach GIBBS und EINSTEIN

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \omega, \dots \dots \dots (8)$$

$$\omega = e^{\frac{\mathfrak{G}}{\varepsilon}} \dots \dots \dots (9)$$

¹⁾ Man kann auch fordern, dass die mittlere Energie $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^*$ ist.

Versteht man dann unter $N_g d\varepsilon$ die Anzahl der Systeme, deren Energie zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, so ist

$$g = P\omega = e^{-\frac{\varepsilon}{\vartheta}} \omega = Ae^{-\frac{\varepsilon}{\vartheta}} \omega, \dots \dots \dots (10)$$

oder

$$g = e^{-\frac{\varepsilon}{\vartheta} + \gamma} = Ae^{-\frac{\varepsilon}{\vartheta} + \gamma} \dots \dots \dots (11)$$

Natürlich muss sein

$$\int_0^{\infty} g d\varepsilon = 1. \dots \dots \dots (12)$$

Da g aber für $\varepsilon = \varepsilon^*$ ein Maximum besitzen soll, so ist nach (11)

$$\left. \frac{dg}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon^*} = 0 \dots \dots \dots (13)$$

oder wenn Ableitungen nach der Energie durch Akzente bezeichnet werden ¹⁾

$$\vartheta = \frac{\omega(\varepsilon^*)}{\omega'(\varepsilon^*)} \dots \dots \dots (14)$$

Aber auch A ist als Funktion von ε^* durch (5) oder (12) bestimmt. Für diese Gleichungen können wir nach (10) auch schreiben

$$A \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{\vartheta}} \omega d\varepsilon = 1 \dots \dots \dots (15)$$

Da nun bei gegebenem ε^* durch (13) ϑ bekannt ist, lässt sich auch A aus (15) gewinnen: In der kanonischen Gesamtheit sind A und ϑ Funktionen von ε^* .

Als Beispiel wollen wir den Fall eines idealen Gases behandeln. Hierfür ist

$$V = C\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \dots \dots \dots (16)$$

wobei C mit dem Volumen v des Gases, der Masse m der Moleküle und der Zahl der Freiheitsgrade n durch die Beziehung

$$C = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{V \sqrt{\pi n}} \left(\frac{4\pi m}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (17)$$

zusammenhängt. Nach (8) ist

$$\omega = C \cdot \frac{n}{2} \varepsilon^{\frac{n}{2} - 1} \dots \dots \dots (18)$$

¹⁾ GIBBS, Formel 319 A. EINSTEIN, l. c. S. 176. L. S. ORNSTEIN l. c. Anhang. Die im Text gegebene Betrachtung stammt von GIBBS.

Nach (10)

$$g = B e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon^*} + \binom{n}{2} - 1} h^{\epsilon^*} \dots \dots \dots (19)$$

$$B = A C \frac{e^{\frac{n}{2}}}{2} \dots \dots \dots (20)$$

Ferner folgt aus (14)

$$\epsilon^* = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \vartheta \dots \dots \dots (21)^1$$

Für B ergibt sich nun aus (19) und (12)

$$B = \frac{1}{V \pi \cdot 2 \epsilon^*} \left(\frac{e}{\epsilon^*}\right)^{\frac{n}{2} - 1} \dots \dots \dots (22)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Energie zwischen den Grenzen ϵ und $\epsilon + d\epsilon$ sich befindet, beträgt also

$$g d\epsilon = \frac{d\epsilon}{2 V A \epsilon^*} e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon^*} + \binom{n}{2} - 1} \left[\frac{e}{\epsilon^*} - 1\right] + \frac{1}{2} h^{\epsilon^*} \dots \dots \dots (23)$$

Man sieht, dass bei grossem n der Faktor von dε für $\epsilon = \epsilon^*$ sehr gross, aber schon in geringer Entfernung von $\epsilon = \epsilon^*$ äusserst klein wird. Wir merken noch die aus (20) folgende Beziehung an:

$$A C = \frac{1}{V \pi n} \left(\frac{e}{\epsilon^*}\right)^{\frac{n}{2}} \dots \dots \dots (24)$$

Die Formel (23) lässt also erkennen, dass wirklich im Falle der idealen Gase die überwiegende Mehrzahl der Systeme nur ganz wenig von ϵ^* verschiedene Energien besitzt. Wenn wir nun annehmen, dass eine kanonische Gesamtheit immer ein entsprechendes Verhalten zeigt, so können wir beweisen, dass dem Modul Eigenschaften zukommen, die erfahrungsgemäss für die Temperatur gelten.

Es seien zwei Mechanismen Σ_1 und Σ_2 gegeben. Aus ihrer Vereinigung entsteht ein Mechanismus Σ_{12} . Zu $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_{12}$ gehören die Funktionen $\vartheta_1(\epsilon^*_{11}), \vartheta_2(\epsilon^*_{12}), \vartheta_{12}(\epsilon^*_{12})$. Versteht man nun unter ϵ_1^* und ϵ_2^* die realen Energien, die Σ_1 und Σ_2 vor der Vereinigung haben, so ist die reale Energie ϵ_{12}^* von Σ_{12} nach der Vereinigung gegeben durch

$$\epsilon_{12}^* = \epsilon_1^* + \epsilon_2^* \dots \dots \dots (25)$$

1) Wenn die Gesamtheit statt durch $\epsilon_n = \dots$ durch \dots^* definiert ist, so erhält man $\epsilon^* = \frac{n}{2} \vartheta$.

Der Vereinigungssatz behauptet, dass wenn

$$\mathfrak{D}_1(\epsilon_1^*) = \mathfrak{D}_2(\epsilon_2^*) \dots \dots \dots (26)$$

gilt, immer auch

$$\mathfrak{D}_{12}(\epsilon_{12}^*) = \mathfrak{D}_1(\epsilon_1^*) = \mathfrak{D}_2(\epsilon_2^*) \dots \dots \dots (27)$$

sein muss.

Zum Beweise denken wir uns die kanonischen Gesamtheiten von Mechanismen Σ_1 und Σ_2 , die zu den Energien ϵ_1^* und ϵ_2^* gehören. Durch Vereinigung von jedem virtuellen System Σ_1 mit jedem virtuellen System Σ_2 erhält man eine Gesamtheit vom Mechanismus Σ_{12} , die nach (26) kanonisch ist und einen Modul $\mathfrak{D}_1(\epsilon_1^*) = \mathfrak{D}_2(\epsilon_2^*)$ besitzt. Da in den ursprünglichen Gesamtheiten ϵ_1^* und ϵ_2^* bei weitem überwiegend waren ¹⁾, so wird in der kombinierten virtuellen Gesamtheit $\epsilon_1^* + \epsilon_2^*$ am häufigsten vorkommen. Daraus folgt, dass die virtuelle Gesamtheit von Systemen Σ_{12} mit dem Modul $\mathfrak{D}_1(\epsilon_1^*) = \mathfrak{D}_2(\epsilon_2^*)$ diejenige ist, die zu $\epsilon_1^* + \epsilon_2^*$ gehört; mithin ist

$$\mathfrak{D}_{12}(\epsilon_1^* + \epsilon_2^*) = \mathfrak{D}_1(\epsilon_1^*) = \mathfrak{D}_2(\epsilon_2^*).$$

Nun besitzt aber nach (25) das vereinigte reale System die Energie $\epsilon_1^* + \epsilon_2^*$, also nach dem eben Bewiesenen den Modul $\mathfrak{D}_1(\epsilon_1^*) = \mathfrak{D}_2(\epsilon_2^*)$. Durch Vereinigung zweier Systeme von gleichem Modul entsteht ein neues System von demselben Modul ²⁾.

Den Trennungssatz, dass durch Zerteilung eines Systems zwei neue Systeme von dem gleichen Modul entstehen, können wir nicht nach diesen Prinzipien beweisen. Vereinigungssatz und Trennungssatz lassen sich aber beide noch auf folgendem Wege begründen.

Man zieht die Theorie der mikrokanonischen Gesamtheiten heran und führt demgemäss die Funktion

$$\frac{\Gamma}{\omega} = t \dots \dots \dots (28)$$

ein. Für diese Grösse kann man Trennungssatz und Vereinigungssatz plausibel machen, ³⁾ und wird daher auch die Temperatureigenschaft der Grösse \mathfrak{D} nachgewiesen haben, sobald die Identität von t und \mathfrak{D} gezeigt ist. Durch Differentiation van (28) erhält man

1) Es ist für den Schluss nötig vorauszusetzen, dass Energien, die von den häufigsten abweichen, verschwindend selten vorkommen.

2) Der Beweis ist in zwei Schritten geführt. Im ersten beschäftigt man sich mit dem Modul als *Funktion*, und sucht eine Funktionalgleichung zwischen ζ_1 , \mathfrak{D}_2 und \mathfrak{D}_{12} . Der zweite benutzt die Tatsache, dass bei der Vereinigung die Energien sich addieren und vergleicht, gestützt darauf, die bestimmten *Werthe*, die der Modul vor und nach der Vereinigung hat. Der Beweis findet sich bei GIBBS p. 35 (34) ff. wo jedoch ein wichtiges Glied der Schlusskette fehlt.

3) P. HERTZ, Annalen der Physik 33. 1910. S. 249—273.

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \omega^2 - V\omega' \right\} = 1 - \frac{V\omega'}{\omega \omega}$$

das ist nach (14) und (28)

$$1 - \frac{t}{\vartheta}$$

Somit folgt

$$\vartheta = \frac{t}{1 - \frac{dt}{d\varepsilon}} = \frac{t}{1 - \frac{dt}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon}}$$

unter ε_p die kinetische Energie verstanden. Nun ist

$$\varepsilon_p = \frac{n}{2} t, \quad (29)$$

also

$$\vartheta = \frac{t}{1 - \frac{2}{n} \frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon}}$$

Falls nun die „spezifische Wärme“ $\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon_p}$ als von 0 verschieden vorausgesetzt werden kann ¹⁾ (auch bei noch so grossem Wachsen der Zahl der Freiheitsgrade), so bleibt bei zunehmendem n der Ausdruck $\frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon}$ endlich und es gilt immer genauer die Beziehung:

$$\vartheta = t \quad (30)$$

Ueberblicken wir nun noch einmal die bis jetzt angestellten Ueberlegungen, so finden wir, dass es für sie vollkommen unwesentlich war, die virtuelle Gesamtheit durch eine Exponentialfunktion zu charakterisieren. In der Tat genügt es eine Gesamtheit zu fingieren, von der nur bekannt ist, dass sie in der Nähe von $\varepsilon = \varepsilon^*$ durch die Formel

$$P = L \left\{ 1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{\vartheta} \right\} \quad (31)$$

dargestellt wird und die ausserdem die Bedingung

$$\varepsilon_m = \varepsilon$$

befriedigt. Es lässt sich dann genau wie bisher zeigen, dass ϑ nur von ε^* abhängt. Damit nämlich die häufigste Energie der virtuellen Gesamtheit gleich der realen sei, muss der Ausdruck $P\omega$ ein Maximum, d. h.

¹⁾ GIBBS, Formel 377; P. HERTZ l. c.

²⁾ GIBBS, S. 73 (73).

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \omega \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{\vartheta} \right) \right\}_{\varepsilon^*} = 0$$

sein, woraus sich

$$\vartheta = \frac{\omega(\varepsilon^*)}{\omega'(\varepsilon^*)}$$

ergibt. Mit Hilfe von (31) lassen sich nun alle bisher angestellten Schlüsse wiederholen. Durch genau die gleiche Ueberlegung lässt sich z.B. zeigen, dass aus der Vereinigung zweier Systeme von gleichem Modul ein System von demselben Modul entsteht. Zum Beweis wird der Produktsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwandt und bei der Multiplikation von zwei Produkten P werden Glieder der zweiten Ordnung in $(\varepsilon - \varepsilon^*)$ fortgelassen.

Da P aber nur in der Umgebung von ε^* definiert ist, ist es unmöglich L aus (2) zu bestimmen.

Die unsere Gesamtheit definierende Formel enthält zwei von einander unabhängige Parameter, von denen der eine durch ε^* gegeben ist, während der andere vollkommen willkürlich ist. Da aber auch in den früheren Betrachtungen von dem Koeffizienten A und der Gleichung (2) gar kein Gebrauch gemacht wurde, scheint es ganz zweckmässig, sich auf Gesamtheiten von der Form (31) zu beschränken. Dabei können wir uns vorstellen, dass P in grösserer Entfernung von ε^* durch ein anderes nicht weiter bekanntes Gesetz gegeben ist, aber so doch, dass Gleichung (2) befriedigt wird. Doch ist es am Ende gar nicht nötig, diese Einschränkung zu machen, man kann auch, indem man die Deutung von P als Wahrscheinlichkeit fallen lässt, Gesamtheiten zulassen, die (2) nicht befriedigen, oder auch die Gesamtheit überhaupt nur für die Nähe von ε^* erklärt ansehen. Wie dem auch sei, eine in der Nähe von ε^* durch (31) dargestellte Gesamtheit möge quasikanonisch heissen. Zur Temperatur-Definition und zum Beweis des Vereinigungssatzes reicht die quasikanonische Gesamtheit sicher aus. Ob nicht durch echte kanonische Gesamtheiten Grössen definiert werden können, die sich durch die quasikanonische Gesamtheit nicht so einfach darstellen lassen, soll hier nicht untersucht werden.

§ 3¹⁾). Somit scheinen die kanonischen Gesamtheiten zu einem rein mathematischen Gebilde herabgesunken zu sein. Dennoch ist es möglich sie in eine engere Beziehung zur Wirklichkeit zu setzen.

Alles wissenschaftliche Denken ist begrifflich. Urteile wie: „Diese Blume ist gelb“ sind für die Wissenschaft unbrauchbar, da es unmöglich ist, dem Leser oder Hörer eine erschöpfende Vorstellung

¹⁾ Diese Betrachtungen scheinen mir nach brieflichen Mitteilungen des Herrn ORNSTEIN zu urteilen seiner vorstehenden Arbeit nahe zu kommen.

von dem zu verschaffen. was mit „dieser Blume“ gemeint ist. Dagegen Sätze wie: „Alle Sonnenblumen sind gelb“ sind verständlich. Es wird sich stets darum handeln, durch Definition eine Regel aufzustellen, der das Subjekt des Urteils genügen muss, damit das Prädikat mit Recht von ihm ausgesagt werden kann.

Nun kann das in der Wärmelehre in doppelter Weise geschehen. Einmal kann man einen idealen Beschauer voraussetzen, der imstande wäre, das ganze Getriebe der Moleküle vollständig zu überblicken. Von diesem Standpunkt aus wird man alle quantitativen Daten genau angeben müssen und danach ein Urteil fällen. Man wird z. B. sagen: ein Körper, bei dem alle Moleküle die gleiche Geschwindigkeit haben und gleich dicht angeordnet sind, wird im nächsten Augenblick . . . usw. Obwohl es sich um eine Begriffsbildung handelt, sind doch alle unter den Begriff fallende Individuen vom molekular-theoretischen Standpunkt identisch. Auf diese Weise können zugleich Regeln gegeben werden, durch die der ideale Beobachter zu jedem *konkreten* Zustand, den er anschaut, den folgenden konkreten Zustand finden kann. Man braucht einen solchen konkreten Zustand nicht wirklich zu geben oder vorzustellen; man kann sich auch vorstellen er *wäre* gegeben, damit macht man sich eine *allgemeine* Vorstellung von einem konkreten Zustand.

Aber wir können die Begriffe auch durch das von der Erfahrung Gelieferte festlegen. Da können wir nun durch einmalige Betrachtung des Körpers in einem Zeitpunkt keine Kenntnis über seinen thermischen Zustand erlangen; wir müssen ihn längere Zeit verfolgen. Wir schreiben einem Körper z. B. dann die Temperatur 0° Celsius zu, wenn wir ihn mit schmelzendem Eis in Berührung bringen können, ohne eine Veränderung an ihm wahrzunehmen. Oder auch ein Körper, der mit schmelzendem Eis in Berührung gewesen ist, wird als ein Körper von der Temperatur 0° bezeichnet.

Es ist also ein naheliegender Standpunkt, die Geschichte eines Körpers zu seiner Definition zu verwenden. Freilich ist dann nicht mehr die Rede von einem Körper, den der ideale molekular-theoretische Beobachter konkret anschaut, auch fragen wir uns nicht mehr, wie wir urteilen würden, wenn wir einmal konkrete Zustände anschauen würden (machen also uns keine allgemeine Vorstellung von konkreten Zuständen), sondern sagen nur etwas über *denjenigen* Körper aus, der ein ganz bestimmtes Schicksal erlebt hat (z. B. mit schmelzendem Eis in Verbindung gewesen ist).

Diese Erwägungen führen zu folgenden Festsetzungen: Sind sämtliche Koordinaten q und Impulse p eines Mechanismus bekannt, so sagen wir, wir kennen die *Phase*. Die Phase wird durch bestimmt

gegebene Zahlen charakterisiert. Freilich können wir uns auch nur vorstellen, wir kennen die Phase, um eine Regel anzugeben, die Phasen im nächsten Augenblick aufzufinden. Dann handelt es sich um die allgemeine Vorstellung einer bestimmten Phase.

Kennen wir die Mannigfaltigkeit der Phasen, die immer wieder zyklisch durchlaufen werden, so wollen wir sagen, wir kennen den *co-Zustand*. Diese Bezeichnung soll an die Wörter konkret und ontologisch erinnern. Wir wollen annehmen die Energie sei für ihn massgebend und demnach auch von der Kenntnis des *co-Zustandes* sprechen, wenn die Energie exakt gegeben ist.

Ist eine Körpermenge gegeben, die nachher bestimmten Veränderungen unterworfen ist und ist vor diesen Änderungen in jedem die Energie genau bekannt, so wollen wir sagen, wir kennen den *Anfangszustand* der Menge.

Es sollen jetzt von den Körpern der Menge einige miteinander in Verbindung gesetzt werden, andere vorher zusammenhängende sollen zerlegt werden. Wenn genau angegeben wird, welche Koppelungen und Trennungen vorgenommen sind und in welcher Reihenfolge diese erfolgt sind, so wollen wir sagen, wir kennen die *Geschichte* der Menge.

Von einem Körper, der zu einer Menge gehört, wollen wir sagen, wir kennen seinen *ag-Zustand*, wenn wir von der Menge, zu der er gehört, Anfangszustand und Geschichte kennen. Die Buchstaben *ag* sollen an die Wörter abstrakt und genetisch erinnern.

Geben wir ein Beispiel. Wenn wir zwei chemisch gleiche Gase von derselben Dichte und demselben Drucke vorfinden, so wissen wir, dass sie die gleiche Temperatur besitzen, d. h. sie werden nach ihrer Berührung ihre Zustände nicht ändern. Dieser Satz stellt natürlich auch eine Verbindung von Begriffen dar; aber er ist doch eine Zusammenfassung vieler besonderer Sätze, die sofort aus ihm gewonnen werden können: wie z. B.: wenn zwei Wasserstoffgasmengen von der Dichte $9 \cdot 10^{-5}$ und dem Druck 1 Atmosphäre vorgefunden werden, so werden sie bei der Berührung im Wärmegleichgewicht sein. Solche Sätze geben uns eine Vorstellung von einem ganz konkreten, nur durch Angabe des Seienden charakterisierten Zustande, wir wollen sagen von einem *co-Zustand*.

Nun wollen wir zweitens den Satz aussprechen, dass diejenigen Körper, die aus Zerlegung eines Körpers entstehen, gleiche Temperatur besitzen. Das Subjekt unseres Urteils ist derjenige Körper, der aus einem gegebenen durch Trennung entsteht. So lautet der ganze Satz: A wird zerlegt in die Teilsysteme A_1, A_2 mit den Energien ϵ_1', ϵ_2' . A_1, A_2 werden zu A vereinigt, dann abermals in die Teilsysteme A_1, A_2

zerlegt, die jetzt die Energien ε_1'' , ε_2'' besitzen mögen. Es wird behauptet $\varepsilon_1' = \varepsilon_1''$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2''$. Offenbar sind die Paare A_1 , A_2 nur begrifflich als die aus A hervorgehenden Systeme zu definieren. Wie sie im einzelnen beschaffen sind, kann zwar, wenn A bekannt ist, nachträglich ermittelt werden, aber erst auf Grund besonderer Sätze. Die Definition sagt darüber nichts aus. Kennen wir die Energie von A und wissen wir, dass A_1 , A_2 durch Teilung aus A entsteht, so werden wir sagen, wir kennen den ag-Zustand von A_1 und A_2 .

Sobald wir nun Aussagen über Körper machen wollen, deren ag-Zustand allein bekannt ist, wird es unvermeidlich sein, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung aufzustellen. Denn es wird sich zeigen lassen, dass ein Körper von einem bestimmten ag-Zustand keine bestimmte Energie besitzt, auch keinen co-Zustand, sondern nur für jede Phase eine gewisse Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Phasen unter Zugrundelegung eines ag-Zustandes heisse die dem ag-Zustand zugehörige *virtuelle Gesamtheit*.

Für diese *virtuelle Gesamtheit* wird eine Konstante besonders charakteristisch sein. Wir werden sie den Modul der virtuellen Gesamtheit oder des ag-Zustandes nennen.

Ferner ist in der virtuellen Gesamtheit eines ag-Zustandes ein co-Zustand der wahrscheinlichste. Wir nennen ihn den zum ag-Zustand zugehörigen co-Zustand. Umgekehrt nennen wir ag-Zustände, die einen gegebenen co-Zustand als häufigsten Zustand in der virtuellen Gesamtheit besitzen, die dem co-Zustande zugehörigen ag-Zustände. Es kann nun sehr gut zu einem co-Zustande mehrere ag-Zustände geben. Z. B. es sei gegeben ein Körper Σ_1 von der Masse m_1 und einer Energie ε_1 . Dieser werde mit einem Körper von gleichem Stoff und von der Masse m_2 und der Energie ε_2 verbunden. Hernach findet Trennung statt. Nach ihr besitzt Σ_2 höchstwahrscheinlich einen co-Zustand mit einer Energie $m_2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m_1 + m_2}$. Lässt man nun m_2 konstant, wählt aber für m_1 , ε_1 , ε_2 solche Kombinationen, dass $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m_1 + m_2}$ invariant bleibt, so bekommt man lauter verschiedene ag-Zustände, denen doch der gleiche co-Zustand entspricht. Also: zu jedem ag-Zustand gehört ein co-Zustand aber zu einem co-Zustand können mehrere ag-Zustände gehören.

Trotzdem kann es sein, dass diejenigen ag-Zustände, die demselben co-Zustande entsprechen, wenigstens etwas Gemeinsames haben.

*Es lässt sich zeigen, dass alle einem co-Zustand entsprechenden ag-Zustände denselben Modul haben.*¹⁾ Diesen nennen wir den Modul des co-Zustandes.

¹⁾ Abgesehen von denjenigen, die mit dem co-Zustande identische mikrokanonische Gesamtheiten darstellen.

Ein Beweis für diesen Satz soll sogleich gegeben werden. Durch ihn wird die Definition des vorigen Paragraphen mit einem physikalischen Inhalte gefüllt. Für die folgerichtige Ausbildung des in diesem Paragraphen angenommenen Standpunktes ist ein solcher Beweis wohl nicht nötig, denn wenn der ag-Zustand allein als das Gegebene betrachtet wird, besitzt auch schon deshalb sein Modul eine physikalische Bedeutung. Nur wenn man einzig co-Zustände zulässt, ist es zur physikalischen Deutung des Moduls erforderlich, von der Tatsache Gebrauch zu machen, dass alle einem co-Zustand entsprechenden ag-Zustände denselben Modul haben. Aber diese Betrachtungsweise ist durchaus nicht nötig; es ist wohl möglich einzig mit virtuellen Gesamtheiten zu arbeiten.¹⁾

§ 4. Es handelt sich also um den Beweis, dass ag-Zustände, die gleichen co-Zuständen entsprechen, denselben Modul besitzen, falls sie nicht mit den co-Zuständen übereinstimmende mikrokanonische Gesamtheiten darstellen. Wir wollen uns aber auf den Fall beschränken, dass in der Geschichte nur reversible Prozesse vorkommen.

Zu Anfang sollen sämtliche Systeme gleiche Energie haben. Ihre Zustände werden somit durch mikrokanonische Gesamtheiten dargestellt. Durch die Trennung erhalten wir virtuelle Gesamtheiten, bei

¹⁾ Vgl. P. HERTZ l.c. p. 254. Manchmal führt die Theorie der Zeitgesamtheit auf Schwierigkeiten. In den meisten Fällen ist die Zeit, die zum zyklischen Durchlaufen der Phase einer ϵ -Fläche nötig ist, überaus gross (worauf mich Herr BORN aufmerksam gemacht hat). Man wird aber beim Beweise des Trennungssatzes die mikrokanonische Gesamtheit als virtuelle Gesamtheit auffassen können (vgl. die eben zitierte Stelle meiner Arbeit). Für den Vereinigungssatz, der kein eigentlicher mechanischer Satz ist, ist eine solche Umdeutung nicht erforderlich. Man kann sich aber auch anders helfen, indem man den ORNSTEIN'schen Begriff der äquivalenten Phasen heranzieht und nur die Zeit von einer Phase bis zur äquivalenten betrachtet. Es ist unzulässig, die ag-Gesamtheiten als den abstrakten Begriff von denjenigen konkreten Zuständen zu betrachten, die durch eine bestimmte Geschichte erzeugt sind. Denn ein Begriff enthält alle ihm subsumierten Individuen in gleicher Weise ohne etwas über die Wahrscheinlichkeit festzusetzen. Dagegen kommt jeder individuelle Zustand in jeder virtuellen Gesamtheit vor, und zwar mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten. Nur wenn man sich auf den Standpunkt der Wahrnehmung stellt, kann man begrifflich zusammenfassen. Denn für die Wahrnehmung besitzen alle Zustände, die durch dieselbe Geschichte erzeugt werden, allerdings etwas Gemeinsames, ja sind sogar identisch. Sobald man sich aber auf den Standpunkt der Molekularphysik stellt, wird eine solche begriffliche Zusammenfassung unmöglich. An ihre Stelle tritt die Wahrscheinlichkeitsverteilung, und dem Umstand, dass in der Wahrnehmung durch gleiche Prozesse gleiche Zustände erzeugt werden, entspricht jetzt die Tatsache, dass bei jeder Geschichte ein Zustand überwiegend wahrscheinlich ist. Es sei gestattet, den vom molekulartheoretischen Standpunkt unberechtigten Ausdruck ag-Zustand zu gebrauchen und mit ihm den Inbegriff von Anfangszustand und Geschichte zu bezeichnen.

denen verschiedene Energien möglich sind, also Stereogesamtheiten. Wir können nun zeigen, dass die Operationen der Trennung und Vereinigung, vorgenommen an mikrokanonischen und quasi-kanonischen Gesamtheiten, immer wieder mikrokanonische und quasi-kanonische Gesamtheiten erzeugen und zwar dass die entstehenden quasi-kanonischen Gesamtheiten einen Modul besitzen, der nur durch den zugehörigen co-Zustand bestimmt ist. Damit ist dann der gewünschte Beweis nach dem Prinzip der vollständigen Induktion erbracht.

Durch Vereinigung zweier mikrokanonischer Gesamtheiten entsteht wieder eine mikrokanonische Gesamtheit. Durch Trennung einer mikrokanonischen Gesamtheit entsteht eine quasi-kanonische, deren Modul von dem zugeordneten co-Zustand abhängt. Wird ein System zerlegt, dessen Zustand durch eine quasi-kanonische Gesamtheit gegeben ist, so ist es erlaubt alle andern Zustände mit Ausnahme des häufigsten, weil dieser so sehr überwiegt, zu vernachlässigen. Man wird also auf den vorigen Fall zurückgeführt. Ähnliches gilt für die Vereinigung von mikrokanonischer und quasi-kanonischer Gesamtheit. Dass unsere Behauptung für die Vereinigung von quasi-kanonischen Gesamtheiten gültig ist, folgt sofort aus dem Produktsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es bleibt also nur übrig, folgenden Satz zu beweisen: Wenn ein System mit fest gegebener Energie in zwei Teilsysteme zerlegt wird, so lässt sich für die Zustände jedes Teilsystemes eine Wahrscheinlichkeitsfunktion angeben, deren charakteristischer Koeffizient (Modul) nur bestimmt ist durch den Mechanismus des betreffenden Teilsystems und durch die Energie seines häufigsten Zustandes, *unabhängig von dem Mechanismus des andern früher mit ihm verbundenen Teilsystemes und der früher vorhandenen Gesamtenergie*, oder auch: durch Zerlegung eines mikrokanonisch verteilten Systemes entsteht ein ag-Zustand, dessen Modul nur durch den entsprechenden co-Zustand bestimmt ist.

Zur Vorbereitung denken wir uns einen Körper von bestimmter Energie. Die Wahrscheinlichkeit, dass seine Phase sich in einem Gebiete G befindet, beträgt

$$W_G = \frac{1}{\omega \cdot d\varepsilon^*} \iint_G dx_1 \dots dx_n, \dots \dots (32)^1$$

wo die Integration über den Zylinder zwischen $\varepsilon = \varepsilon^*$ und $\varepsilon = \varepsilon^* + d\varepsilon^*$ mit G zur Basis erstreckt wird. Wir betrachten jetzt ein System $\Sigma_{1,2}$, das aus zwei Systemen Σ_1, Σ_2 zusammengesetzt ist. Die Zustandsvariablen mögen $y_1 \dots y_r$ und $z_1 \dots z_s$ heissen, die ω -Funktionen

1) EINSTEIN, l. c. S. 174.

von Σ_1 und Σ_2 seien ω_1 und ω_2 . Aus ihnen berechnet sich, wie (7) und (8) zeigen, die Funktion ω_{12} des vereinigten Systemes nach der Formel

$$\omega_{12} = \int_0^\epsilon \omega_1(\epsilon - a) \omega_2(a) da = \int_0^\epsilon \omega_1(a) \omega_2(\epsilon - a) da \quad (33)^1)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das zweite System sich in einem Phasenelement $dz_1 \dots dz_r$ befindet, beträgt nach (32), wenn mit a die zu $z_1 \dots z_r$ gehörige Energie des zweiten Teilsystemes bezeichnet wird,

$$\frac{1}{\omega_{12} \cdot d\epsilon^*} dz_1 \dots dz_r \int_{z^*-\epsilon}^{z^*-\epsilon+dz^*} dy_1 \dots dy_s,$$

oder

$$P dz_1 \dots dz_r,$$

wobei

$$P = \frac{1}{\omega_{12} \cdot d\epsilon^*} \int_{z^*-\epsilon}^{z^*-\epsilon+dz^*} dy_1 \dots dy_s$$

ist, oder nach (8)

$$P = \frac{1}{\omega_{12}} \omega_1(\epsilon - a) \dots \dots \dots (34)$$

Durch Integration ergibt sich als Wahrscheinlichkeit dafür, dass Σ_2 eine Energie zwischen a und $a + da$ besitzt, $g da$, wo

$$g = \frac{\omega_2(a)\omega_1(\epsilon - a)}{\omega_{12}(\epsilon)} \dots \dots \dots (35)$$

ist. Nach (33) ist

$$\int_0^\epsilon g \cdot da = 1 \dots \dots \dots (36)$$

oder

$$\int P dz_1 \dots dz_r = 1, \dots \dots \dots (37)$$

in Uebereinstimmung mit (12) und (2).

Als häufigste Energie des zweiten Systems können wir diejenige α_m bezeichnen, bei der g ein Maximum ist. Sie wird gegeben durch

$$\frac{\omega_2(\alpha_m)}{\omega_2'(\alpha_m)} = \frac{\omega_1(\epsilon - \alpha_m)}{\omega_1'(\epsilon - \alpha_m)}, \dots \dots \dots (38)$$

¹⁾ GIBBS, Formel 316.

oder wenn

$$\frac{\omega}{\omega'} = \vartheta \dots \dots \dots (39)$$

gesetzt wird, durch

$$\vartheta_2(\alpha_m) = \vartheta_1(\varepsilon - \alpha_m) \dots \dots \dots (40)$$

Es soll nun das System Σ_{12} in die beiden Teilsysteme Σ_1 und Σ_2 zerlegt werden. Ein solches Teilsystem, z. B. Σ_2 wird diejenige Energie behalten, die es im Augenblick der Trennung besass. Die Phase, die damals vorhanden war, kann nicht mit Sicherheit angegeben werden, sondern es kann nur für das Eintreten einer jeden Phase eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden, dieselbe Wahrscheinlichkeit, die auch im noch vereinigten System für die Annahme dieser Phase bestand. Da in die Formel (34) die Phase nur vermöge der Energie α eingeht, so stellt sie eine im statistischen Gleichgewicht befindliche Gesamtheit dar. Also zu jeder beliebigen Zeit nach der Trennung wird immer noch für das zweite System die Wahrscheinlichkeit einer jeden Phase durch (34) gegeben. Die Formel (34) stellt die virtuelle Gesamtheit dar, die zu dem ag-Zustand des abgetrennten Systemes gehört.

Nun scheint es, als ob sie noch von dem Mechanismus des ersten Systems und der früher vorhandenen Energie ε abhängt. Nimmt man aber an, dass g für alle von α_m erheblich verschiedenen Werte α ausserordentlich klein ist, so kann man für die weitere Betrachtung $\alpha - \alpha_m$ sehr klein annehmen. Dann ist ¹⁾

$$P = \frac{1}{\omega_{12}} \omega_1 [(\varepsilon - \alpha_m) - (\varepsilon - \alpha_m)] = \frac{1}{\omega_{12}} \left\{ \omega_1(\varepsilon - \alpha_m) - (\alpha - \alpha_m) \omega_1'(\varepsilon - \alpha_m) \right\} \\ = \frac{\omega_1(\varepsilon - \alpha_m)}{\omega_{12}} \left\{ 1 - (\alpha - \alpha_m) \frac{\omega_1'(\varepsilon - \alpha_m)}{\omega_1(\varepsilon - \alpha_m)} \right\}.$$

Auch hier scheint der Koeffizient von $\alpha - \alpha_m$ durch Σ_1 bestimmt zu sein. Indem man aber von (38) Gebrauch macht, erhält man

$$\frac{\omega_1(\varepsilon - \alpha_m)}{\omega_{12}} \left\{ 1 - (\alpha - \alpha_m) \frac{\omega_2'(\alpha_m)}{\omega_2(\alpha_m)} \right\}, \dots \dots (41)$$

oder auch nach (39)

$$\frac{\omega_1(\varepsilon - \alpha_m)}{\omega_{12}} \left\{ 1 - \frac{\alpha - \alpha_m}{\vartheta_2(\alpha_m)} \right\} \dots \dots \dots (42) \text{ } ^2)$$

¹⁾ EINSTEIN, l. c. S. 175. Dort wird das eine System unendlich klein vorausgesetzt.

²⁾ GIBBS, Formel (394).

Hier hängt nun der Koeffizient der Differenz nicht mehr von Σ_1 ab. Er ist lediglich durch die Natur des betreffenden Systemes selbst und diejenige Energie bestimmt, die wir mit grösster Wahrscheinlichkeit zu erwarten haben. Die Grösse heisse der Modul der virtuellen Gesamtheit oder des ag-Zustandes. Da der co-Zustand von Σ_2 durch den Mechanismus von Σ_2 und die wahrscheinlichste Energie α_m als bestimmt angesehen werden kann, so können wir auch sagen: Der Modul des ag-Zustandes hängt nur vom co-Zustande ab. Damit ist der im vorigen Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

Wenn nun α_m vorgeschrieben ist, die Geschichte aber nicht weiter bekannt, so lässt sich der ag-Zustand nur durch die Formel

$$P = L \left\{ 1 - \frac{\epsilon - \alpha_m}{\vartheta} \right\} \dots \dots \dots (43)^1$$

ausdrücken, wodurch eine quasikanonische Gesamtheit charakterisiert wird. Dabei ist der Faktor von $\epsilon - \alpha_m$ durch α_m bestimmt, während L je nach der Art der Vorgeschichte verschiedene Werte annehmen kann. Wir sehen, dass wir zunächst nur auf eine zweiparametrische Schar quasikanonischer Gesamtheiten geführt werden und nichts zur Annahme von echten kanonischen Gesamtheiten nötig. Allerdings kann (43) auch in der Form geschrieben werden

$$P = L e^{-\frac{\epsilon - \alpha_m}{\vartheta}} \dots \dots \dots (44)$$

oder auch

$$P = A e^{-\frac{\epsilon}{\vartheta}} \dots \dots \dots (45)$$

wo

$$A = \frac{\omega_1 (\epsilon - \alpha_m)}{\omega_{12} (\epsilon)} e^{\frac{\alpha_m}{\vartheta}} \dots \dots \dots (46)$$

ist.

Gleich (43) wird auch (45) nur für die unmittelbare Nähe von α_m gelten. Wäre es gestattet (45) als allgemeingültig anzunehmen, d. h. dürften wir uns auf die Theorie der echten kanonischen Gesamtheit stützen, so könnte A aus (37) ermittelt werden. Wir hätten dann an Stelle einer zweiparametrischen eine einparametrische Schar von Gesamtheiten. Wir wollen den unter dieser Voraussetzung aus (45) und (37) gewonnenen Wert von A mit \hat{A} bezeichnen, und damit den wahren

1) Diese Gleichung hätte man auch einfacher erhalten können. Sie ist eine unmittelbare Folge der Schlussbetrachtungen von § 2 (Seite 835 und 836). Die obigen Betrachtungen waren nötig zur Gewinnung der Gleichung (46).

Wert A , der durch (46) gegeben ist, vergleichen. Aus dieser Vergleichung wird sich ein Anhaltspunkt dafür ergeben, ob die virtuelle Gesamtheit des abgetrennten Systemes durch eine echte kanonische Gesamtheit dargestellt wird. Doch sei es gestattet, die Betrachtung auf den Fall der idealen Gase zu beschränken.

Verstehen wir unter C_2 die in (17) eingeführte Konstante des Systemes Σ_2 , nämlich den Ausdruck

$$C_2 = \frac{1}{v_2^3} \frac{n_2}{\sqrt{\pi n_2}} \left(\frac{4\pi e m_2}{n_2} \right)^{n_2} \dots \dots \dots (47)$$

so ist nach (24)

$$\hat{A} C_2 = \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{\pi n_2}} \left(\frac{e}{\alpha_m} \right)^{n_2} \dots \dots \dots (48)$$

A dagegen muss aus (46) berechnet werden. Hier kommt nun die Energie ε des früher vorhandenen Systemes Σ_{12} vor. Aber diese lässt sich durch α_m und die Zahl der Freiheitsgrade von Σ_1 ausdrücken. Es ist nämlich

$$\frac{\alpha_m}{\varepsilon - \alpha_m} = \frac{n_2}{n_1} \dots \dots \dots (49)$$

Unter Benutzung von dieser Beziehung und von (18), (21) und (33) gelangt man, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{n_2}{n_1} = \mu \dots \dots \dots (50)$$

setzt, nach einigen einfachen Rechnungen zu dem Ergebnis

$$A C_2 = \frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{\pi n_2}} \left(\frac{e}{\alpha_m} \right)^{\frac{n_2}{\mu}} \sqrt{1 + \mu} \dots \dots \dots (51)$$

Wir sehen, dass wenn Σ_1 ausserordentlich viel mehr Freiheitsgrade als Σ_2 besitzt, tatsächlich

$$\hat{A} = A \dots \dots \dots (52)$$

ist.

Allgemein lässt sich das nicht behaupten, vielmehr ist

$$A = \hat{A} \sqrt{1 + \mu} \dots \dots \dots (53)$$

aber da μ eine endliche Grösse ist, stimmen wenigstens die Grössenordnungen von A und \hat{A} überein. Auf diese allein dürfte es aber nur ankommen. Handelt es sich doch darum, A als Funktion von α_m aufzufassen. Ändert sich nun diese letztere Grösse, um einen endlichen Betrag, so multiplizieren sich A und \hat{A} mit Faktoren, die ausserordentlich viel grösser als $\sqrt{1 + \mu}$ sind. Es ist also berechtigt

Werte von A , die sich nur durch endliche Faktoren unterscheiden, als identisch anzusehen und von diesem Standpunkte aus zu behaupten, die Konstante der virtuellen Gesamtheit bestimmt sich so, im Falle der Gastheorie, wie es nach der Theorie der kanonischen Gesamtheit sein muss.

Bilden wir den natürlichen Logarithmus von A . Aus (48) und (51) erhalten wir

$$\ln A = \frac{n}{2} [1 - \ln \alpha_m] - \ln C,$$

wobei die gegen $\frac{n}{2}$ kleinen Beträge, unter diesen auch $\ln \sqrt{1+\mu}$ fortgelassen sind. Multipliziert man mit ϑ , so ergeben die vernachlässigten Glieder tatsächlich sehr kleine Werte, während man für $\vartheta \frac{n}{2}$ etwas endliches erhält. Es ist somit

$$\vartheta \ln A = \alpha_m [1 - \ln \alpha_m] - \vartheta \ln C.$$

Der Ausdruck $\vartheta \ln A$, den GIBBS mit ψ bezeichnet und der der freien Energie entspricht, ergibt sich in gleicher Weise aus (48) und (51).¹⁾

In einer gewissen Hinsicht können wir also wohl sagen, dass wir tatsächlich denjenigen Wert von A erhalten, der durch die Theorie der kanonischen Gesamtheit gefordert wird. Wir können uns aber auch auf den berechtigten Standpunkt stellen, die Zahl der Freiheitsgrade zwar als sehr gross anzusehen, ohne doch mit ihnen zur Grenze ∞ überzugehen. Dann liegt keine Veranlassung vor, Werte von A als identisch anzusehen, wenn sie sich durch endliche Faktoren unterscheiden. Man muss dann sagen, dass aus der Kenntnis allein von α_m nichts über A ausgemacht werden kann und kann die den ag-Zustand darstellende Gesamtheit nur als quasikanonisch betrachten. Unter diesen Umständen sind zwei Grenzfälle besonders wichtig. Erstens sei das System Σ_1 ausserordentlich viel grösser als Σ_2 , dann wird nach (53)

$$A = \hat{A},$$

d. h. (43) stellt eine echte kanonische Gesamtheit dar²⁾.

War ein (gasförmiger) Körper mit einem sehr viel grösseren Körper verbunden, so wird nach der Trennung sein Zustand durch eine kanonische Gesamtheit dargestellt. Die Energieverteilung wird in diesem Falle nach (23) gegeben durch

¹⁾ Durch Benutzung von (17) gelangt man zu dem aus der Thermodynamik bekannten Ausdruck für die freie Energie.

²⁾ Auch jetzt kann noch nicht gesagt werden, dass (43) exakt für alle Phasen gelte, aber wenigstens berechnet sich A so, als ob dies der Fall wäre.

$$\hat{g} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha \varepsilon^*}} e^{-\left(\frac{r_2}{2}-1\right)\left[\frac{\alpha}{z_m} - \ln \frac{\alpha}{z_m} - 1\right] + \frac{1}{2} \ln n_2} \quad \dots \quad (54)$$

Zweitens nehmen wir an, Σ_1 sei sehr viel kleiner als Σ_2 , dann wird

$$A = \hat{A} \sqrt[1 + \frac{n_2}{n_1}]{} = \hat{A} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}},$$

oder auch

$$g = \hat{g} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \quad \dots \quad (55)$$

Wenn nun auch schon \hat{g} in der Nähe von α_m ausserordentlich steil verläuft, so wird doch an dieser Stelle g sich noch mehr erheben und dafür wegen

$$\int_0^\infty \hat{g} d\varepsilon = 1,$$

$$\int_0^\infty g d\varepsilon = 1$$

an den andern Stellen noch mehr sinken, d.h. g wird einen noch viel steileren Verlauf als \hat{g} zeigen. Indem wir uns den Prozess der Vermehrung von μ ideal in der Weise vollzogen denken, dass n_2 endlich bleibt, n_1 aber immer mehr abnimmt, erhalten wir g -Kurven, die immer steiler werden, sodass im Grenzfall nur die Energie ε^* in Betracht kommt. Wir gelangen also zur mikrokanonischen Gesamtheit. War also das System früher mit einem sehr viel kleineren verbunden, so besitzt der ag -Zustand von Σ_2 eine mikrokanonische Gesamtheit. Das ist auch unmittelbar einleuchtend. Denn will man es einrichten, dass mit grösster Wahrscheinlichkeit nach der Trennung Σ_2 die Energie α_m erhält, so muss man dem vereinigten System eine nur wenig grössere Energie erteilen, die nun wieder fast ganz auf Σ_2 übergehen wird.

Es ordnen sich also die mikrokanonischen und kanonischen Gesamtheiten dem allgemeineren Begriff der quasikanonischen Gesamtheiten unter. Das spricht auch für die Bedeutung dieses letzteren Begriffes, denn unter den ag -Zuständen kommen sowohl Flächen- als Stereogemaisheiten vor. In dem Begriff der quasikanonischen Gesamtheit haben wir einen beide umfassenden Begriff.

Diese Betrachtungen sind hier nur für Gase durchgeführt, doch dürften im allgemeinen Fall die Verhältnisse wohl nicht wesentlich anders liegen. Jedenfalls werden wir auch im allgemeinen Fall durch diese Erwägungen zu einer physikalischen Deutung der virtuellen

Gesamtheit geführt. Nun fragt es sich noch, ob man sich auf diese wirklich bei der Ableitung der thermodynamischen Gesetze stützt oder ob es dazu ausreicht, die kanonische Gesamtheit als mathematische Konstruktion aufzufassen. Es scheint mir doch dass das erste zutrifft und es gar nicht möglich ist, den Satz vom Wärmegleichgewicht zu beweisen, ohne virtuelle Gesamtheiten und ag-Zustände einzuführen. Auf die Beziehung zum Entropiesatz hoffe ich ein andermal eingehen zu können.

Heidelberg, den 21. November 1910.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van de Heeren PH. KOHNSTAMM en L. S. ORNSTEIN: „*Over het warmtetheorema van NERNST*”.

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

1. In een onlangs gehouden redevoering ¹⁾ vestigde Dr. F. E. C. SCHEFFER de aandacht op het „warmtetheorema” van NERNST. Dit „warmtetheorema” bestaat in het „vermoeden” dat bij het absolute nulpunt de grootheden A en E d. w. z. de maximale arbeid en de energieverandering bij een chemische omzetting in gecondenseerde systemen, niet alleen gelijk zouden zijn, maar ook gelijk differentiaalquotient naar de temperatuur zouden bezitten. Er wordt niet bij gezegd „bij constant volume”, maar dat dit de bedoeling is zal wel mogen worden verondersteld. Dit warmtetheorema stelt dan in staat, om de integratieconstante van de vergelijking van VAN 'T HOFF:

$$\frac{d \ln K}{dT} = \frac{q}{RT^2}$$

uit te drukken in de integratieconstante van de vergelijking van CLAPEYRON, toegepast op den verzadigden damp:

$$\frac{T dp}{p dT} = \frac{\lambda}{RT}$$

waarin voor λ een empirische reeksontwikkeling wordt gekozen. Op die manier vindt NERNST, dat de integratieconstante van de vergelijking van VAN 'T HOFF, C , (wanneer de K in partiaaldrukken is uitgedrukt) samenhangt met de integratieconstante van de dampdruk-kromme, c , volgens de vergelijking:

¹⁾ Zie Chemisch Weekblad 1910, N^o. 43.

$$C = \sum r c \dots \dots \dots (1)$$

waarin r het verhoudingsgetal is van het aantal moleculen van elke stof, die aan de reactie deelnemen, en het Σ -teeken over alle stoffen is uit te strekken, waarbij de verdwijnende stoffen negatief worden geteld.

Voor een aantal stoffen bepaalt NERNST de waarde van c uit de door de empirische reeksontwikkeling voor λ gevonden formule voor de dampdruklijn, met behulp van onderstellingen omtrent de soortelijke warmten, waarop wij hier niet behoeven in te gaan, en de experimenteele gegevens der dampdruklijn dier stoffen. Het blijkt nu, dat voor eenige dier stoffen deze c ongeveer dezelfde waarde bezit, en wel ongeveer $1.1 f'$, waarin f' de factor uit de bekende empirische dampdrukformule van VAN DER WAALS is. Daardoor gelukt het, ook van stoffen, waarvan de dampdruklijn niet behoorlijk bekend is een waarde van c te vinden en met de aldus gevonden waarden wordt dan uit verg. (1) voor een aantal reacties de C en dus de K berekend. Deze waarden komen dan soms merkwaardig mooi met de experimenteel gevonden waarden overeen.

2. Inderdaad is die overeenstemming van dien aard, dat men haar moeilijk aan „toeval” kan toeschrijven. Aan den anderen kant rijzen de ernstigste bezwaren tegen den gedachtengang, waarop de berekening is gebaseerd. Immers de maximale arbeid A is niets anders dan het verschil in vrije energie vóór en na de reactie $A = \psi_2 - \psi_1$; evenzoo is $E = \epsilon_2 - \epsilon_1$, en die grootheden hangen dan ook samen door de vergelijking:

$$A - E = T \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_v$$

of, in de door GIBBS gebruikte terminologie:

$$(\psi_2 - \psi_1) - (\epsilon_2 - \epsilon_1) = - T (\nu_2 - \nu_1).$$

Het „warmtetheorema” van NERNST zegt dus dat bij het absolute nulpunt voor gecondenseerde systemen niet alleen het tweede lid nul wordt, maar ook het differentiaalquotient daarvan naar T bij constant volume, d. w. z.

$$\nu_2 - \nu_1 + T \left(\frac{\partial (\nu_2 - \nu_1)}{\partial T} \right)_v = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Nu is de entropie van een mengsel van n componenten, waarvan resp. $r_1 r_2 \dots r_n$ moleculaire hoeveelheden aanwezig zijn, bij een temperatuur T en een volume v , waarin wij het mengsel als een verdund gas mogen beschouwen:

$$v_1 = \sum r MR \log v + \int_1^T \frac{\sum r c_{v\infty}}{T} dT + \sum r H$$

waarin H de entropieconstante is voor elke stof bij de temperatuur 1 en het volume 1. Dit laatste moet dan ook zoo groot worden gedacht, dat de gaswetten geldig zijn.

Perst men dit mengsel samen tot een volume v_1 , dan zal de entropie bedragen:

$$v_1 = \int_1^{v_1} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dr + \int_1^T \frac{\sum r c_{v\infty}}{T} dT + \sum r H \quad , \quad (3)$$

Zoolang de toestandsvergelijking van het mengsel niet bekend is, kunnen wij de waarde van de eerste integraal niet nader bepalen. Wij zullen daarom beginnen met een fictief geval te stellen, zoo eenvoudig mogelijk gekozen, en aantoonen, dat althans voor dit geval het „warmtetheorama” niet kan gelden. En dit niet zoozeer omdat wij dit geval zelf als beslissend tegen het warmtetheorema beschouwen (immers wij zouden dan nog moeten aantoonen, dat zulk een geval inderdaad in de natuur voorkomt), dan wel omdat dit geval ons in het hart der quaestie zal voeren, en ons daardoor zal veroorloven ons vrij te maken van de beperkende veronderstellingen, waarvan wij uitgingen. Voor het bedoelde geval nu kiezen wij een reactie tusschen een aantal stoffen, die verloopt zonder wijziging van het totaal aantal moleculen, en waarbij als toestandsvergelijking van het mengsel der reageerende stoffen, zoowel als der reactieproducten, de vergelijking van VAN DER WAALS in haar eenvoudigsten vorm, met constante a en b mag worden aangenomen.

In dit geval wordt de entropie van het mengsel der reageerende stoffen

$$v_{11} = (\sum r MR) \log (v_1 - b_1) + \int_1^T \frac{\sum r c_{v\infty}}{T} dT + \sum r H$$

en die van de reactieproducten;

$$v_{12} = (\sum r MR) \log (v_2 - b_2) + \int_1^T \frac{\sum r c_{v\infty}}{T} dT + \sum r H$$

Wij krijgen dus voor het entropieverschil:

$$v_{12} - v_{11} = \sum r MR \log (v_2 - b_2) - \sum r MR \log (v_1 - b_1) + \\ + \int_1^T \frac{\sum r c_{v\infty}}{T} dT - \int_1^T \frac{\sum r c_{v\infty}}{T} dT + \sum r H.$$

3. Welke waarde verkrijgt nu deze uitdrukking in het absolute nulpunt? Het is duidelijk, dat daarop in 't algemeen geen antwoord te geven valt, omdat die waarde af zal hangen, van de wijze, waarop wij tot het absolute nulpunt naderen. Immers daar voor $T=0$ noodzakelijk steeds $v=b$ ¹⁾ moet worden, hebben wij hier een aantal termen die tot oneindig naderen, maar onafhankelijk van elkander. Eerst wanneer wij nauwkeurig aangeven op welke wijze wij v tot b laten naderen bij het afnemen der temperatuur kunnen wij een bepaalde waarde voor $\eta_2-\eta_1$ vinden, en heeft dus de gestelde vraag zin.

NERNST heeft zichzelf het inzicht hierin ontnomen door de wijze, waarop hij den maximalen arbeid bepaalt. Hij laat alle reageerende stoffen reversibel verdampen, dan de reactie plaats grijpen en ten slotte de reactieproducten reversibel condenseeren. Hij verwaarloost overal de volumina der gecondenseerde phase tegenover die der gasphase. Maar gelijk reeds door Dr. SCHEFFER is opgemerkt, is dit hier niet geoorloofd, omdat de groote termen tegen elkander wegvallen en het entropieverschil dus juist gaat afhangen van de verhouding der volumina in het gecondenseerde systeem.

Daarom blijkt natuurlijk ook niet uit de opstellen van NERNST, welke wijze van naderen in het „warmtetheorema” eigenlijk bedoeld is, maar gelijk nog nader in de noot wordt betoogd, kan toch niets anders worden aangenomen, dan dat de nadering tot het absolute nulpunt zoodanig is bedoeld, dat de stoffen voor en na de reactie staan onder den druk van hun verzadigden damp, of m. a. w. dat men het punt $T=0$, $v=b$ zoowel voor de reageerende stoffen als voor de reactieproducten nadert langs de grenslijn.

4. Dan echter zal de uitkomst ervan afhangen, hoe de volumina

¹⁾ Streng genomen weliswaar zou men aldus moeten redeneeren. De waarde $\varepsilon_2-\varepsilon_1$ voor de bedoelde reactie wordt door NERNST gelijk gesteld aan de energie-omzetting in de formule van VAN 'T HOFF, en deze geldt voor reacties bij constant volume; het volume voor en na de reactie wordt dus constant gehouden. Maar behalve in het hoogst onwaarschijnlijke geval, dat juist $b_2=b_1$, wordt dan één der beide volumina (dat van het mengsel met de kleinste b) niet gelijk aan het grensvolume. En dit leidt tot klaarblijkelijke absurditeit, zoowel omdat dan noodzakelijk een der beide systemen labiel is, als om de gevolgtrekkingen, die men dan verder uit de gelijkheid der differentiaalquotienten zou moeten maken. Wil men zin hechten aan de onderstellingen van NERNST, dan zal men moeten aannemen, zooals stilzwijgend in den tekst is geschied, dat volgens zijn bedoeling voor en na de reactie de stoffen onder den druk van hun verzadigden damp staan, en dat men voor de substitutie in de vergelijking van VAN 'T HOFF af mag zien van het volumeverschil, dat daardoor noodzakelijk met de reactie gepaard gaat. Met die opvatting is ook alleen te rijmen de in den tekst genoemde wijze, waarop NERNST den maximalen arbeid bepaalt (door verdampen en condenseeren, zonder verdere bewerkingen met het gecondenseerde systeem).

langs de grenslijn van de temperatuur afhangen. Neemt men aan, dat $v_1 - b_1 = \alpha_1 f(T)$ en $v_2 - b_2 = \alpha_2 f(T)$ dan wordt de som der eerste twee termen eindig, en die der laatste oneindig, daar in 't algemeen voor gasmengsels de soortelijke warmten der reactieproducten en der reageerende stoffen zeker niet gelijk zijn. $\left(\frac{\partial(\eta_2 - \eta_1)}{\partial T}\right)_r$ krijgt een eindige waarde, nl. het verschil der soortelijke warmten, en de uitdrukking (2) wordt dus niet nul, maar oneindig. Aan deze conclusie kan men alleen ontkomen, door een zoodanige hypothese te maken omtrent de afhankelijkheid van $v_2 - b_2$ en $v_1 - b_1$ van de temperatuur, dat die oneindigheid juist verdwijnt, d. w. z. door te stellen:

$$v_1 - b_1 = \alpha_1 T^{\frac{\sum v c_{1r}}{\sum v MR}} f(T) \text{ en } v_2 - b_2 = \alpha_2 T^{\frac{\sum v c_{2r}}{\sum v MR}} f(T)$$

Afgezien van het feit, dat men daardoor in strijd komt met de wet der overeenstemmende toestanden ¹⁾, die toch in dit geval zeker moet gelden, is dan het warmtetheorema nog niet vervuld; immers we krijgen dan in de nabijheid van $T=0$

$$\eta_2 - \eta_1 = \sum r MR \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \sum v H \dots \dots (4)$$

$\left(\frac{\partial(\eta_2 - \eta_1)}{\partial T}\right)_r$ voor $T=0$ en a fortiori $T\left(\frac{\partial(\eta_2 - \eta_1)}{\partial T}\right)_r$ worden dus nul, en het warmtetheorema stelt den verderen eisch, dat de uitdrukking (4) nul wordt, of dat

$$\sum r H = \sum v MR \log \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \dots \dots \dots (5)$$

En thans laat zich overzien, waarom wij boven konden zeggen, dat onze uitkomst onafhankelijk is van den specialen vorm der toestandsvergelijking. Immers, zelfs al zou men ook bereid zijn om aan te nemen dat de afwijkingen, die de werkelijke stoffen vertoonen van de hier gemaakte eenvoudige onderstellingen, altijd juist zoo groot zijn dat het entropieverschil (2) niet oneindig wordt, dan zal dit verschil toch nooit nul worden, gelijk het warmtetheorema vereischt, tenzij een betrekking als (5) vervuld is.

Volgens deze uitdrukking nu zou men het verschil der entropieconstanten der reageerende stoffen voor en na de omzetting kunnen berekenen uit grootheden, die volkomen door de toestandsvergelijking zijn bepaald. Bedenkt men nu echter op welke wijze die entropie-

¹⁾ In overeenstemmende toestanden worden immers de c_v niet gelijk. Verg. VAN DER WAALS-KÖHNSTAMM Lehrbuch der Thermodynamik p. 66.

constanten zijn ingevoerd in verg. (3), dan wordt dit resultaat ten eenen male ongerijmd.

5. Daarmede is, naar het ons voorkomt, het „warmtetheorema” afdoende weerlegd, voor zoover men daaronder verstaat de meening, dat in het absolute nulpunt $\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_v$ en $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v$ aan elkaar gelijk moeten worden. Evenmin blijkt de daaruit getrokken conclusie, verg. (1) te handhaven. Dit zou NERNST waarschijnlijk zelf ingezien hebben, wanneer hij in stede van uit te gaan van de differentiaalvergelijking voor $\frac{d \ln K}{dT}$ die VAN 'T HOFF heeft gegeven, was uitgegaan van de integraalbetrekking voor $\ln K$, die reeds door GIBBS in zijn bekende verhandeling is opgesteld. Immers dan zou hij geweten hebben, wat de physische beteekenis is van de in verg. (1) optredende integratieconstante, dat deze nl. naast de soortelijke warmten de entropieconstanten der reageerende stoffen omvat, en dat dus tegen verg. (1) juist hetzelfde fundamenteele bezwaar bestaat, dat wij zooeven tegen verg. (5) hebben aangevoerd. Maar dan zou hij tevens ingezien hebben, dat, zoo hij de chemische evenwichten wilde berekenen, hij zich niet de vraag moest stellen: Hoe gedragen zich de stoffen bij het absolute nulpunt? maar dat hij had moeten vragen: Hoe kan ik omtrent die entropieconstanten iets te weten komen?

Of met andere woorden: De door NERNST ontdekte regelmatigheden bewijzen niets omtrent het absolute nulpunt, laat staan omtrent de gelijkheid van $\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_v$ en $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v$ in dat punt, maar zij toonen aan, dat er een zeker verband moet bestaan in de door NERNST onderzochte gevallen tusschen de entropieconstanten der reageerende stoffen en andere voor die stoffen karakteristieke grootheden, in dien zin dat het verschil van de som der entropieconstanten voor en na de reactie zich laat berekenen uit grootheden, die voor de zuivere, ongemengde stoffen karakteristiek zijn.

6. Op welke wijze kunnen wij er ons nu rekenschap van geven, dat zulk een verband blijkt te bestaan, en van welken aard zijn de voor de zuivere stoffen karakteristieke grootheden, die erin optreden? Het is duidelijk, dat wij ons om tot een beantwoording dier vragen te geraken, niet tot zuiver thermodynamische beschouwingen kunnen beperken. Immers de wijze, waarop de thermodynamica de entropie definiëert, $d\eta = \frac{dQ}{T}$, brengt vanzelf mede, dat de entropieconstante een onbepaalde en onbepaalbare grootheid is. Alleen wanneer het gelukt

een andere, integrale definitie van de entropie te geven, is het denkbaar, dat men omtrent die constante nader inzicht zou verkrijgen. Wij zien ons dus verwezen naar de kinetische methoden van BOLTZMANN en GIBBS, met wier behulp inderdaad integraal-definities voor de entropie zijn opgesteld, zoodat het mogelijk is de door hen gedefiniëerde grootheden althans voor den verdunnen gastoestand, in een bepaald eenhedenstelsel geheel te bepalen. Voor een eenatomig gas vindt men de volgens de methode van GIBBS gedefiniëerde entropie berekend in de dissertatie van een onzer (*O.*) p. 56:

$$\eta = \frac{3}{2} n + \frac{3}{2} n \log 2 \pi \theta m + \log v$$

Het ligt nu voor de hand te meenen, dat het door NERNST ontdekte verband beteekent, dat de zoo gedefiniëerde entropie-constanten de grootheden zijn, die de waarde van het constante lid der evenwichtsvergelijking bepalen. Maar nadere overweging leert, dat die onderstelling onhoudbaar is, althans voor zoover zij betreft die entropie-constanten in hun geheel. Niet slechts omdat de definitie van GIBBS, ook al neemt men de η_{gen} ¹⁾, tot een andere constante voert, dan de *H* van BOLTZMANN bevat, die zelf trouwens slechts op een constante na aan de entropie behoeft gelijk te zijn; op veel afdoender wijze blijkt, wat wij zeiden, hieruit, dat de waarden dier constanten afhangen van het gebruikte eenhedenstelsel, en wel zoodanig dat er bij een verandering dier eenheden nieuwe additieve constanten optreden. Vergroot men bijv. de tijdseenheid c_t maal, dan wordt de constante met $n \log c_t$ vermeerderd²⁾. Daarentegen kunnen klaarblijkelijk de door NERNST bepaalde getallen niet veranderen door verandering der tijdseenheid³⁾; die getallen kunnen dus nooit de, hoe ook kinetisch gedefiniëerde entropieconstanten in hun geheel zijn. Wij dienen dus de entropieconstanten der reageerende stoffen te splitsen in twee deelen, één stuk, dat bij de reactie constant blijft en dat tenslotte uit de evenwichtsvergelijking uitvalt, en een deel, dat zich daarbij wijzigt. Of om een concreet voorbeeld te nemen, de entropieconstante van een bepaalde hoeveelheid waterstof moet bestaan uit een stuk, dat op de atomen *H* betrekking heeft, en dat voor hetzelfde aantal atomen altijd even groot blijft, in welken toestand die

1) Verg. POSTMA. Deze Verslagen October 1908. p. 338.

2) Zie GIBBS p. 19. De *H* van BOLTZMANN hangt op andere wijze van de eenheden af, maar toch ook zoo, dat zij met een additieve constante wordt vermeerderd als de tijdseenheid wordt vergroot en de andere eenheden constant blijven.

3) Daar $\ln K$ wel afhankelijk kan zijn van de volume-eenheid, als n.l. het molecuulgetal verandert bij de reactie, kunnen de door NERNST gevonden getallen wel wijziging ondergaan als wij de volume-eenheid wijzigen.

atomen zich ook bevinden voor en na de reactie, en uit een stuk dat bepaald wordt door de configuratie waarin zich die atomen bevinden, en dat dus bij de reactie varieert. Het eerste stuk zal o.a. van de tijdseenheid op de door GIBBS of BOLZMANN aangegeven wijze afhankelijk moeten zijn; maar het zal, omdat het bij elke chemische reactie constant is, uit het entropieverschil voor en na de reactie noodwendig wegvallen. Het tweede stuk daarentegen bepaalt de evenwichtsvergelijking en kan dus omgekeerd uit deze gevonden worden. De getallen, die door NERNST gevonden zijn moeten ons aanwijzingen omtrent deze grootheid geven. Wat zal nu de fysische beteekenis van deze grootheid zijn? De eenige aanwijzing, die de thermodynamica daaromtrent kan geven, ligt opgesloten in de opmerking in de noot ³⁾ op de vorige pagina. Immers wanneer het getal moleculen verandert wordt $\log K$ afhankelijk van de volume-eenheid in dien zin, dat een additieve constante $r \log c$ optreedt waarin c_e de verhouding tusschen de oude en nieuwe eenheid is en r de wijziging van het molecuulgetal door de reactie. Ook het entropieverschil moet dus voor een reactie met constant aantal moleculen niet van de volume-eenheid afhangen, en voor een andere reactie evenzeer met een additieve constante verhoogd worden bij wijziging der volume-eenheid. De onderstelling ligt dus voor de hand, dat de voor het entropieverschil karakteristieke grootheden logaritmen moeten zijn van voor de zuivere stoffen karakteristieke volumegrootheden. Een nadere bevestiging dier onderstelling en karakteriseering dier grootheden kan alleen een kinetische theorie der chemische verschijnselen geven. Zulk een theorie ligt reeds voor ons in BOLZMANN's Gastheorie, en wij zullen zien, dat de uitkomsten van NERNST daarin eigenlijk reeds in principe zijn neergelegd.¹⁾

7. In deze mededeeling zullen wij ons tot de kinetische behandeling van twee eenvoudige gevallen bepalen. Wij bedienen ons daarbij van de statistische methode van GIBBS die ons gemakkelijk zoowel de evenwichtsvoorwaarden als de entropie van een gedeeltelijk gedissocieerd gas leert kennen.

Het eerste geval van dissociatie dat wij beschouwen is een van het type van de dissociatie van Jodiumdamp ($J_2 \rightleftharpoons J + J$).

BOLZMANN ²⁾ beschrijft voor dit geval de wisselwerking der atomen op de volgende wijze. De atomen worden ondersteld volkomen

¹⁾ Dit is zeker des te merkwaardiger, omdat NERNST in zijn eerste verhandeling Gött. Nachrichten 1906 p. 7 wel over het werk van BOLZMANN spreekt, maar erbij voegt: „doch haben sich neue praktisch. verwendbare Resultate auf diesem Wege bisher nicht ergeben“.

²⁾ Gastheorie II, p. 177.

starre veerkrachtige en gladde bollen van de middellijn σ te zijn, die de massa m , homogeen over het volume verdeeld, bezitten. De chemische krachten zijn niet in alle richtingen rondom de atomen werkzaam, doch zij zijn tot zekere gebieden aan den omtrek beperkt. Zij zijn echter steeds volgens de verbindingslijn der middelpunten van de gebonden atomen gericht. Om de werking der krachten vollediger te beschrijven diene het volgende. Zij A (fig. 1) het middelpunt van een atoom; het middelpunt B van een tweede atoom moet dan liggen buiten den bol S_A die met σ tot straal om A beschreven is. Opdat het tweede atoom met het atoom A verbonden zij, is het noodzakelijk dat B ligt in een volume ω_A dat vast verbonden is met S_A en daaraan grenst, terwijl A in het overeenkomstige volume ω_B aan S_B (bol met straal σ om B) liggen moet. Wij zullen de lijn die A met het zwaartepunt van ω_A verbindt de as van het atoom A noemen. (AZ_A).

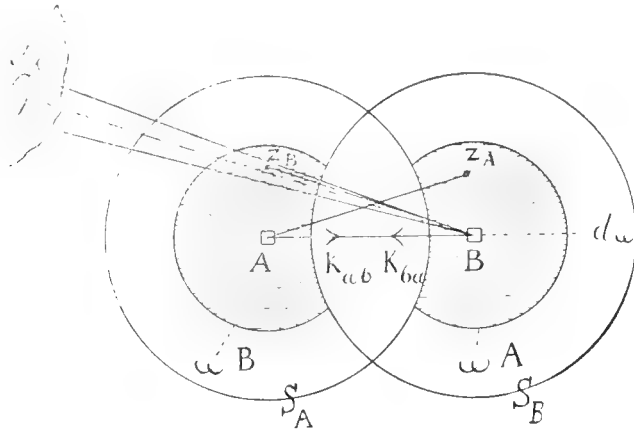


Fig. 1.

Door van de grootheden die de ligging van de as bepalen, gebruik te maken, kunnen wij de voorwaarde waaronder twee atomen gebonden zijn nog iets eenvoudiger uitdrukken, nml.: Twee atomen wier middelpunten A en B zijn, zijn gebonden indien B in een element $d\omega$ van het gebied ω_A ligt, terwijl de as van B binnen een kegel van de opening A gelegen is. De configuratie van het atoom B t. o. z. v. het atoom A is bekend als wij het element $d\omega$ waar zijn middelpunt ligt en het kegelvormige element $d\lambda$, dat de richting der as van het atoom bevat, kennen. De krachten zijn steeds volgens de verbindingslijn der middelpunten gericht; de wederkeerige energie der chemische attractie $-\chi_{11}$ hangt niet af van de hoeken, die de richting der assen bepalen. Ligt BZ_B buiten A dan is $\chi_{11} = 0$. De chemische krachten

hebben bij deze onderstelling geen invloed op de rotaties der molekulen om assen door het middelpunt, de krachten bij de botsing evenmin (vergelijk de onderstellingen van pag. 856¹⁾). De kinetische energie der genoemde rotaties is dus onveranderlijk, wij zullen haar nul stellen.

8. Wij beschouwen nu een kanonisch ensemble van den modulus Θ , dat is opgebouwd uit systemen, waarin n atomen van de beschreven soort zich in een volume V bevinden. In dit ensemble zullen wij nu het aantal der systemen, waarin n_1 atomen vrij en $2n_2$ atomen tot n_2 molekulen gebonden zijn, nagaan. Daarbij zullen wij echter de vereenvoudiging invoeren dat de dichtheid in het beschouwde stelsel zoo klein is, dat bij de bepaling van het genoemde aantal van de uitgebreidheid der atomen kan worden afgezien. Allereerst zullen wij het aantal ζ' der systemen opschrijven waarin n_1 bepaalde atomen vrij zijn en $2n_2$ bepaalde atomen in bepaalde combinatie tot molekulen zijn verbonden.

De coördinaten der middelpunten stellen wij door $x_1 \dots z_n$ voor, de kegelvormige elementen waarin hunne assen liggen door $d\lambda_1 \dots d\lambda_n$. De potentieele energie hangt uitsluitend van de coördinaten $x_1 \dots z_n$ af, terwijl de kinetische energie door de overeenkomstige momenten bepaald is. Volgens de definitie van GIBBS is het aantal ζ'' der systemen waarin de genoemde momenten alle mogelijke waarden hebben, doch de coördinaten tusschen x_1 en $x_1 + dx_1 \dots z_n$ en $z_n + dz_n$ liggen, terwijl voor de assen de speelruimte $d\lambda_1 \dots d\lambda_n$ is gelaten, gegeven door:

$$\zeta'' = N e^{\Theta} (2\pi \Theta m)^{\frac{3}{2} n_2} e^{-\frac{\Psi}{\Theta}} dx_1 \dots dz_n d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

V is een constante, die met de vrije energie overeenkomt, Ψ stelt de potentieele energie voor, die hier geheel chemische energie is, daar wij van de attractie krachten van VAN DER WAALS zullen afzien.

Om nu ζ' te vinden moeten wij ζ'' sommeeren naar de coördinaten en kegelopeningen voor alle gevallen waarin n_1 atomen vrij en de overige tot bepaalde paren gebonden zijn. Daarbij kunnen wegens de ingevoerde vereenvoudiging de coördinaten der n_1 vrije atomen en van n_2 der gebonden atomen het geheele volume V doorloopen, terwijl voor elk hunner de speelruimte voor $d\lambda$, 4π bedraagt. Berekenen we deze som, dan vinden we voor de bijdrage van al de beschouwde systemen tot het aantal ζ' .

¹⁾ Stelt men dat ωA geheel binnen S_B valt dan kan er slechts één atoom tegelijk met A door de krachten in de sfeer ωA gebonden zijn.

$$N e^{\Theta} (2\pi \Theta m)^{\frac{3}{2}n} (4\pi V)^{n_1+n_2} e^{-\Theta} dx_{n_1+n_2+1} \dots dz_n d\lambda_{n_1+n_2+1} \dots d\lambda_n.$$

Vervolgens moeten de overige n_2 atomen zoodanig geplaatst worden, dat zij met de aangewezenen der n_2 atomen verbonden zijn; neemt men alle configuraties waarin dit het geval is in aanmerking, dan ziet men gemakkelijk in dat voor ζ' gevonden wordt

$$\zeta' = N e^{\Theta} (2\pi \Theta m)^{\frac{3}{2}n} (4\pi)^n V^{n_1+n_2} \left\{ \int \frac{d\lambda d\omega}{4\pi} e^{\frac{\chi_{11}}{\Theta}} \right\}^{n_2}.$$

De integraal in het tweede lid moet bij vastgehouden $d\omega$ naar λ (pag. 2) uitgestrekt worden, terwijl men vervolgens aan $d\omega$ alle standen van het gebied ω moet toekennen. Wij zullen deze integraal door k_{11} voorstellen; daar χ_{11} en Θ de dimensie van een energie hebben, heeft k_{11} die van een volume.

9. Om nu het totale aantal der systemen te vinden die n_1 vrije atomen en n_2 molekulen bevatten, moet men bedenken dat uit n atomen op

$$\frac{n!}{n_1! (2n_2)!}$$

wijzen, groepen van n_1 en $2n_2$ atomen te vormen zijn, terwijl verder de $2n_2$ atomen op

$$(2n_2 - 1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{(2n_2)!}{2^{n_2} n_2!}$$

wijzen tot paren vereenigd kunnen worden.

Het totale aantal der beschouwde systemen in het ensemble bedraagt dus

$$\zeta = N e^{\Theta} (2\pi \Theta m)^{\frac{3}{2}n} \frac{n!}{n_1! n_2! 2^{n_2}} (4\pi)^n V^{n_1+n_2} k_{11}^{n_2},$$

terwijl men bedenken moet dat $n_1 + 2n_2 = n$ is. Dit aantal zal maximum zijn als

$$\delta \log \zeta = 0$$

terwijl

$$\delta n_1 + 2\delta n_2 = 0.$$

Men vindt als voorwaarde waaronder ζ maximum is,

$$\frac{2n_2}{n_1^2} = \frac{k_{11}}{V}.$$

Bovendien moet

$$-\frac{1}{n_1} \delta n_1^2 - \frac{1}{n_2} \delta n_2^2 < 0$$

zijn, waaraan identiek is voldaan. De „ware” evenwichtstoestand voor een gedissocieerd gas is dus stabiel.

10. Om Ψ te berekenen hebben wij slechts te overwegen dat $\sum \zeta_\tau$, genomen voor alle mogelijke waarden van n_1 en n_2 , het totale aantal der systemen van het ensemble, dat is N , oplevert. Wij zullen verder onder n_1 en n_2 de aantallen vrije atomen en molekulen in den evenwichtstoestand verstaan; een afwijkenden toestand kunnen wij dan door de getallen $n_1 - 2\tau$ en $n_2 + \tau$ karakteriseeren. Het aantal ζ_τ der op de aldus aangeduide wijze afwijkende systemen bedraagt

$$\zeta_\tau = \frac{N e^{\frac{\Psi}{\Theta}} (2\pi\Theta m)^{\frac{3}{2}n} (4\pi n)^n V^{n_1+n_2} e^{-n_2} k_{11}^{n_2}}{n_1^{n_1} n_2^{n_2}} \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi n_1 2\pi n_2}} e^{-\tau^2 \frac{n+2n_2}{n_1 2n_2}}$$

Hierbij is $n!$ volgens de formule van STIRLING ontwikkeld. Stelt men n_2 klein t. o. z. van n dan vindt men door naar τ van $-\infty$ tot $+\infty$ te sommeren,

$$N = \frac{N e^{\frac{\Psi}{\Theta}} (2\pi\Theta m)^{\frac{3}{2}n} (4\pi n)^n V^{n_1+n_2} e^{-n_2} k_{11}^{n_2}}{n_1^{n_1} n_2^{n_2}}$$

Ook als n_2 niet klein is t. o. z. van n levert de som een factor van de orde van de eenheid, die op de waarde van Ψ zonder invloed is; feitelijk zijn als grenzen voor τ te nemen, $-n_2$ en $n-n_2$ doch men kan hiervoor $-\infty$ en $+\infty$ in de plaats zetten daar voor eenigszins groote waarden van τ zeer kleine bijdragen worden gevonden.

Voor Ψ hebben wij dus

$$-\frac{\Psi}{\Theta} = n \log 4\pi n + \frac{3}{2} n \log (2\pi\Theta m) + (n_1 + n_2) \log V + \\ + n_2 \log k_{11} - n_1 \log n_1 - n_2 \log n_2 - n_2 \log 2 - n_2.$$

Hieruit volgt voor den druk van het gedissocieerde gas

$$\frac{p}{\Theta} = \frac{n_1 + n_2}{V} + (\log V + \log k_{11} - \log n_2 - \log 2 - 2) \frac{\partial n_2}{\partial V} + \\ + (\log V - \log n_1 - 1) \frac{\partial n_1}{\partial V}.$$

Met behulp van de evenwichtconditie en de voorwaarde $n_1 + 2n_2 = 0$ ziet men gemakkelijk in, dat de som der beide laatste termen 0 is, zoodat men vindt

$$\frac{p}{\Theta} = \frac{n_1 + n_2}{V}.$$

Wij voeren nu de bijzondere onderstelling in, dat χ_{11} voor het

geheele gebied ω hetzelfde is, dan heeft men

$$k_{11} = \int \frac{d\lambda}{4\pi} d\omega e^{\Theta} = e^{\Theta} \int \frac{d\lambda}{4\pi} d\omega = e^{\Theta} w_{11}.$$

Wij zullen de grootheid w_{11} , die een volume voorstelt, het gereduceerde volume van het chemische attractiegebied, of korter, het chemische volume van het atoom noemen.

Voor Ψ vinden wij nu

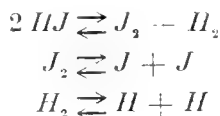
$$\begin{aligned} \Psi &= n \log 4\pi n + \frac{3}{2} n \log (2\pi \Theta m) + (n_1 + n_2) \log V - \\ &\quad - n_1 \log n_1 - n_2 \log n_2 - n_2 - n_2 \log 2 + \frac{n_2 \chi_{11}}{\Theta} + n_2 \log w_{11}. \end{aligned}$$

De kinetische energie gemiddeld voor het ensemble bedraagt $\frac{3}{2} n \Theta$, de potentieele energie die gelijk is aan die van het meest voorkomende systeem, bedraagt dus $-n_2 \chi_{11}$, diengevolge wordt de statistische entropie $\eta = \frac{\bar{\epsilon} - \Psi}{\Theta}$ gegeven door

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{3}{2} n + n \log 4\pi n + \frac{3}{2} n \log (2\pi \Theta m) + (n_1 + n_2) \log V - \\ &\quad - n_1 \log n_1 - n_2 \log n_2 - n_2 \log 2 - n_2 + n_2 \log w_{11}, \end{aligned}$$

een formule die voor het beschouwde geval de geschikte generalisatie van de geciteerde formule levert.

11. Wij zullen in deze mededeeling nu nog kort het geval der dissociatie van het type



behandelen. Omtrent de werking der chemische krachten maken wij analoge onderstellingen als in het vorige geval. De werking van J op J en H op H , zoowel als die van J op H wordt beschreven met behulp van aantrekkingsgebieden ω_{11} , ω_{22} en ω_{12} , terwijl de wederkeerige potentieele energie die weder onafhankelijk van de door de kegelelementen $d\lambda_{11}$, $d\lambda_{22}$ en $d\lambda_{12}$ gekarakteriseerde assenrichting wordt gesteld door $-\chi_{11}$, $-\chi_{22}$ en $-\chi_{12}$ wordt aangeduid. De onderstaande integralen worden voorgesteld door

$$\int \frac{d\lambda_{11}}{4\pi} d\omega_{11} e^{\Theta} = k_{11}.$$

$$\int \frac{d\lambda_{22}}{4\pi} d\omega_{22} e^{\frac{\lambda_{22}}{\Theta}} = k_{22},$$

$$\int \frac{d\lambda_{12}}{4\pi} d\omega_{12} e^{\frac{\lambda_{12}}{\Theta}} = k_{12}.$$

Beschouw nu weer een kanonisch ensemble van den modulus Θ dat uit een systeem waarin zich n_1 atomen J en n_2 atomen H in het volume V bevinden, is opgebouwd. Men ziet nu, op analoge wijze als in het vorige geval redeneerend, gemakkelijk in dat het aantal der systemen waarin n_{10} bepaalde J atomen vrij, $2n_{11}$ bepaalde J atomen tot bepaalde paren gebonden, n_{12} bepaalde J atomen met bepaalde H atomen, $2n_{22}$ bepaalde H atomen tot paren gebonden en n_{20} H atomen vrij zijn, bedraagt ζ'

$$\zeta' = N e^{\frac{\Psi}{\Theta}} (2\pi\Theta m_1)^{\frac{3}{2}n_1} (2\pi\Theta m_2)^{\frac{3}{2}n_2} (4\pi)^{n_1+n_2} V^{n_1+n_2-n_{11}-n_{12}-n_{22}} k_{11}^{n_{11}} k_{22}^{n_{22}} k_{12}^{n_{12}},$$

waarin m_1 en m_2 de massa van een J en een H atoom voorstellen.

Daar uit n_1 atomen J en n_2 atomen H op

$$\frac{n_1!}{(2n_{11})! n_{10}! n_{12}!} \text{ resp. } \frac{n_2!}{2n_{22}! n_{20}! n_{12}!}$$

wijzen, groepen van $2n_{11}$ etc. atomen te vormen zijn en de $2n_{11}$ atomen J en $2n_{22}$ atomen H op resp.

$$\frac{(2n_{11})!}{2^{n_{11}} n_{11}!} \text{ en } \frac{(2n_{22})!}{2^{n_{22}} n_{22}!}$$

wijzen tot paren te combineeren zijn, terwijl er op $n_{12}!$ wijzen n_{12} molekulen HJ uit de gekozen aantallen H en J atomen gevormd kunnen worden, vindt men voor het aantal der beschouwde systemen in het ensemble

$$\zeta = N e^{\frac{\Psi}{\Theta}} (2\pi\Theta m_1)^{\frac{3}{2}n_1} (2\pi\Theta m_2)^{\frac{3}{2}n_2} (4\pi)^{n_1+n_2} V^{n_{10}+n_{11}+n_{12}+n_{22}+n_{20}} \frac{n_1! n_2!}{n_{10}! n_{11}! n_{12}! n_{22}! n_{20}! 2^{n_{11}} 2^{n_{22}}} k_{11}^{n_{11}} k_{22}^{n_{22}} k_{12}^{n_{12}}.$$

Wij moeten nu nagaan onder welke voorwaarden ζ maximum is, terwijl geldt

$$\begin{aligned} n_1 &= n_{10} + 2n_{11} + n_{12} \\ n_2 &= n_{20} + 2n_{22} + n_{12}. \end{aligned}$$

Voor deze voorwaarden vindt men

$$\frac{2n_{11}}{n_{10}^2} = \frac{k_{11}}{V},$$

$$\frac{2n_{22}}{n_{20}^2} = \frac{k_{22}}{V},$$

$$\frac{k_{11}k_{22}}{k_{12}^2} = \frac{4n_{11}n_{22}}{n_{12}^2}.$$

Hetgeen dus met de twee bovengenoemde voorwaarden een voldoende aantal vergelijkingen levert. Stelt men de grootheden χ over het geheele gebied ω gelijk, zoo heeft men

$$\begin{aligned} k_{11} &= e^{\frac{\chi_{11}}{\Theta}} w_{11} \\ k_{22} &= e^{\frac{\chi_{22}}{\Theta}} w_{22} \\ k_{12} &= e^{\frac{\chi_{12}}{\Theta}} w_{12}. \end{aligned}$$

De grootheden w_{11} , w_{22} en w_{12} hebben weer de dimensie van een volume. De evenwichtscondities zijn dus ook te brengen in den vorm

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{\chi_{11}}{\Theta}} w_{11}}{v} &= \frac{2n_{11}}{n_{10}^2} \\ \frac{e^{\frac{\chi_{22}}{\Theta}} w_{22}}{v} &= \frac{2n_{22}}{n_{20}^2} \\ e^{\frac{-2\chi_{12} + \chi_{11} + \chi_{22}}{\Theta}} \frac{w_{11}w_{22}}{w_{12}^2} &= \frac{4n_{11}n_{22}}{n_{12}^2} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

De grootheid $\chi_{22} + \chi_{11} - 2\chi_{12}$ stelt de energieverandering bij de omzetting $J_2 + H_2 \rightarrow 2JH$ voor.

Voor de vrije energie vindt men

$$e^{-\frac{\Psi}{\Theta}} = (2\pi\Theta m_1)^{\frac{3}{2}n_1} (2\pi\Theta m_2)^{\frac{3}{2}n_2} (4\pi)^{n_1+n_2} \frac{n_1^{n_1} n_2^{n_2} v^{n_1+n_2}}{n_{10}^{n_{10}} n_{11}^{n_{11}} n_{12}^{n_{12}} n_{22}^{n_{22}} n_{20}^{n_{20}} 2^{n_{11}} 2^{n_{22}}}$$

$$V^{n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{22} + n_{20}} k_{11}^{n_{11}} k_{22}^{n_{22}} k_{12}^{-n_{12}}$$

Voor den druk

$$p = \frac{n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{22} + n_{20}}{V}.$$

En voor de entropie $\bar{\eta}$,

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{3}{2} n_1 + \frac{3}{2} n_2 + \frac{3}{2} n_1 \log (2\pi\Theta m_1) + \frac{3}{2} n_2 \log (2\pi\Theta m_2) \\ &\quad + n_1 \log 4\pi n_1 + n_2 \log 4\pi n_2 \\ &- n_{10} \log n_{10} - n_{11} \log n_{11} - n_{12} \log n_{12} - n_{22} \log n_{22} - n_{20} \log n_{20} \\ &\quad - n_{11} - n_{12} - n_{22} - n_{11} \log 2 - n_{22} \log 2 \\ &\quad + (n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{22} + n_{20}) \log V \\ &\quad + n_{11} \log w_{11} + n_{22} \log w_{22} + n_{12} \log w_{12}. \end{aligned}$$

12. Vergelijkt men nu verg. (6) met de thermodynamisch afgeleide vergelijking van GIBBS, dan vindt men de boven (pag. 855) genoemde onderstelling geheel bevestigd. Immers afgezien van de veranderlijkheid der soortelijke warmten, die wij door onze onderstellingen ($\chi = \text{constant}$; aard der binding) uitgesloten hebben, komen beide vergelijkingen geheel overeen, alleen treedt in de thermodynamische de onbepaalde grootheid ΣrH , hier $\Sigma r \log w$ op. Het „warmtetheorema” reduceert zich dus tot deze, bij de onderstellingen van BOLTZMANN vanzelf sprekende stelling: dat het „chemische volume” w van een bepaalde chemische stof een voor die stof karakteristieke grootte is, waarmede zij optreedt in elke van de reacties, waaraan zij deelneemt. Het zijn dus ook deze volumina wier grootte uit de evenwichtsvergelijking kan worden bepaald. En wel is het duidelijk uit het boven (pag. 855) gezegde, dat uit reacties, waarbij het aantal moleculen niet verandert, alleen relatieve waarden van die volumina met verschillende stoffen kunnen gevonden worden; verandert het aantal moleculen wel, dan kan men ook absolute waarden daarvan berekenen, gelijk trouwens dan ook reeds door BOLTZMANN is geschied¹⁾.

Vraagt men ten slotte of de numerieke berekeningen van NERNST ons nieuwe gegevens verschaft hebben voor de kennis der „chemische volumina”, dan durven wij niet bevestigend te antwoorden. Voor eerst n.l. is reeds uit berekeningen van Dr. SCHEFFER gebleken, dat de willekeur die er over blijft in de keuze der soortelijke warmten zoo groot is dat zelfs bij de best bestudeerde reacties de waarde van ΣrH binnen zeer wijde grenzen veranderd kan worden, zonder dat men met de experimenten in strijd komt. Het mag dus met recht betwijfeld worden of niet ook andere dan de door NERNST aangegeven waarden met de experimenteele gegevens zouden overeenstemmen. Bovendien echter bevatten de getallen van NERNST niet alleen de ΣrH maar ook de Σrc_v . Een berekening van de genoemde volumina, die meer dan de orde van grootte wil geven, is dus alleen mogelijk wanneer men met het verschil in soortelijke warmte der verschillende stoffen rekening houdt, wat in het bovenstaande nog niet is geschied.

Ten slotte willen wij er nog op wijzen, dat door het bovenstaande ook inzicht verkregen wordt in de beteekenis van de door HABER in zijn: Thermodynamik technischer Gasreaktionen opgestelde theorie der „chemodynamische temperatuurschaal.” HABER meent, dat voor alle gasreacties, waarbij het aantal moleculen niet verandert, eenzelfde eenheid van temperatuur is aan te wijzen, die de constante der evenwichtsvergelijking nul maakt. Daar gelijk wij zeiden in die

¹⁾ Gastheorie II § 66.

constante zoowel ΣrH als Σrc_p optreden is het thans duidelijk, dat dit hierop neerkomt, dat er bij de temperatuur $T=1$ van die schaal voor alle stoffen dezelfde betrekking zou gelden tusschen de grootte van hun chemisch volume en van hun soortelijke warmte. A priori schijnt voor het aannemen van zulk een betrekking weinig te pleiten. Maar ook hier zal men alleen met behulp van een kinetische theorie, die rekenschap geeft van de veranderlijkheid der soortelijke warmten, en een zeer nauwkeurige kennis der experimenteële gegevens, tot een beslissing in staat zijn.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Over „osmotische temperaturen” en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal.”

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

1. Het mag, althans in Nederland, als bekend voorondersteld worden, hoe gemakkelijk zich uit de algemeene differentiaalvergelijking van VAN DER WAALS voor coëxisterende fasen:

$$V_{21} dp = \frac{W_{21}}{T} dT + (x_2 - x_1) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right)_{p,T} dx_1 \dots \dots (1)$$

de wetten der verdunde oplossingen laten afleiden. Alleen de wet voor den osmotischen druk volgt niet onmiddellijk uit de vergelijking in bovenstaanden vorm, om de eenvoudige reden, dat bij de afleiding dier vergelijking ondersteld is, dat de druk in de beide coëxisterende fasen gelijk is. Gaat men echter tot de wijze van afleiding van verg. (1) terug, dan ziet men aanstonds hoe de wet van VAN 'T HOFF met die vergelijking samenhangt. Immers die afleiding loopt aldus. Daar in twee coëxisterende fasen 1 en 2 de thermodynamische potentiaal bijv. van de eerste stof gelijk moet zijn, en eveneens in twee andere coëxisterende fasen 1' en 2', moet ook de verandering van den thermodynamischen potentiaal tusschen 1 en 1' en 2 en 2' gelijk zijn. En dus als we 1 en 1' dicht bij elkaar nemen en den moleculairen thermodynamischen potentiaal der eerste stof door μ_1 voorstellen, geldt de vergelijking:

$$[d\mu_1]_1 = [d\mu_1]_2$$

Nu volgt uit:

$$\mu_1 = \zeta - x \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{p,T}$$

$$d\mu_1 = d\zeta - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{p,T} dx - x d \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{p,T}$$

En daar

$$d\zeta = v dp - \eta dT - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{pT} dx$$

en

$$d \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{pT} = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{pT} dx + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial T} \right) dT = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{pT} dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{pT} dp - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{pT} dT,$$

krijgen wij

$$d\mu_1 = \left\{ v - x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{pT} \right\} dp - \left\{ \eta - x \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{pT} \right\} dT - x \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{pT} dx \quad (2)$$

Gelijkstelling van deze uitdrukking voor de eerste en tweede phase, en samentrekking van de termen met dp , dT en dx geeft dan verg. (1). Wanneer we nu echter deze bewerkingen niet verrichten, maar ons aan verg. (2) houden, vinden wij onmiddellijk de wet van VAN 'T HOFF. Immers wij redeneeren nu aldus. De samengeperste verdunde oplossing staat in evenwicht met het oplosmiddel onder normalen druk, dus moet de thermodynamische potentiaal van het oplosmiddel, dat zich vrij door de membraan bewegen kan, in de oplossing en het zuivere oplosmiddel gelijk zijn. En dus moet de wijziging in den thermodynamischen potentiaal teweeggebracht eenerzijds door de drukverhooging, anderzijds door de toevoeging van de opgeloste stof, gelijk nul zijn, en dus volgt uit (2), daar $dT = 0$:

$$\left\{ v - x \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{pT} \right\} dp = x \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{pT} dx.$$

Voor een uiterst verdunde oplossing is $x \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{pT} = \frac{RT}{1-x}$; in het eerste lid kunnen wij den term met x verwaarloozen, en behoeven wij geen verschil te maken tusschen de v van de oplossing en die van het oplosmiddel, en we krijgen dus:

$$v dp = \frac{RT}{1-x} dx,$$

de wet van VAN 'T HOFF.

2. Nu ligt het bij een beschouwing van het osmotische verschijnsel voor de hand om als analogie van den osmotischen druk het begrip „osmotische temperatuur” in te voeren, en dit is dan ook herhaaldelijk geschied²⁾. Men redeneert dan aldus. Het evenwicht door de semi-permeabele membraan wordt verbroken, wanneer ik aan den eenen

¹⁾ Verg. Théorie Moléculaire § 18

²⁾ Zie bijv. VAN LAAR in Deze Verslagen van April 1906 p. 856.

kant een stof oplos, omdat dan het aantal deeltjes van het oplosmiddel per volume-eenheid vermindert. Wil ik dus een toestand bereiken, waarbij evenveel deeltjes van links naar rechts als van rechts naar links gaan, dan moet ik of den druk van de oplossing verhoogen, waardoor nu meer oplosmiddelmoleculen naar buiten geperst worden, of ik moet de temperatuur er van verhoogen, zoodat door de grootere snelheid het aantal uittredende moleculen zal worden vergroot. De temperatuursverhooging nu, die ik aan de oplossing boven het oplosmiddel moet geven, opdat er evenveel deeltjes door de membraan naar binnen als naar buiten gaan, noem ik de „osmotische temperatuur” dier oplossing. Het ligt nu verder voor de hand te veronderstellen, dat deze toestand bereikt is, wanneer de thermodynamische potentialen der diosmeerende stof in oplossing en oplosmiddel weer gelijk geworden zijn. Deze stelling zou ongetwijfeld juist zijn, wanneer de beschouwingen omtrent de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal, die ik heb gegeven in deze Verslagen van April 1905, geheel juist waren. Ik heb getracht daar aan te toonen dat „de physische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal van een homogene phase waarop geen uitwendige krachten werken, geen andere is, dan het aantal moleculen, dat per secunde een wand bereikt, die te midden dier homogene phase wordt aangebracht, als die wand de moleculen niet aantrekt en dik is ten opzichte van hun werkingssfeer.” Ik heb toen die definitie uitgedrukt door de formule:

$$M\mu = F(N) \cdot C \dots \dots \dots (3)$$

waarin N het bedoelde aantal deeltjes en C een constante is. Het is duidelijk, dat uit deze formule het bovenstaande volgt; immers de aantallen moleculen, die door de membraan oplossing en oplosmiddel verlaten, worden dan geheel bepaald door den thermodynamischen potentiaal.

Trachten wij nu echter op dien grond uit verg. (2) te bepalen, hoe groot voor een bepaalde oplossing de „osmotische temperatuur” zal zijn, dan komen wij tot een absurditeit. Immers wij krijgen dan bij constanten druk voor de osmotische temperatuur, als wij weer de termen met x verwaarloozen:

$$\eta dT = RT dx \dots \dots \dots (4)$$

Dat wil dus zeggen, dat wij door de experimenteele bepaling van $\frac{dT}{dx}$ het totaal bedrag aan entropie van het oplosmiddel zouden kunnen bepalen. En dit nu is een ongerijmdheid. Want zoolang wij zuiver thermodynamisch redeneeren en dus de entropie definiereen door

$d\eta = \frac{dQ}{T}$ — en een andere definitie der entropie ligt niet aan verg. (4)

ten grondslag — heeft de entropie geen bepaalde waarde, maar treedt daarin een onbepaalde en uit den aard der zaak onbepaalbare additieve constante op; alleen entropieverschillen bezitten een bepaalde waarde¹⁾.

3. Het valt niet moeilijk in te zien, waar de fout in de redeneering zit, die ons tot deze ongerijmdheid heeft geleid. Wij hebben als conditie gesteld, dat de thermodynamische potentiaal der diosmeerende stof aan beide zijden gelijk zou zijn, en tot die gelijkstelling hadden wij geen recht. Immers wel is in evenwichtstoestanden in elke phase de thermodynamische potentiaal van een bestanddeel even groot, maar wij hebben hier geen evenwichtstoestand, omdat er temperatuurverschil tussehen oplossing en oplosmiddel, en dus een warmtestroom, blijft bestaan. Daardoor onderscheidt de „osmotische temperatuur” zich juist van den „osmotischen druk”, dat de laatstgenoemde wel een toestand van evenwicht aangeeft, zij het dan ook onder speciale beperkende bepalingen (de membraan).

Toch is het duidelijk, dat het mogelijk moet zijn door temperatuursverhooging op de aangegeven wijze een stationairen toestand te bereiken, maar de conditie daarvoor mag, blijkens het voorafgaande niet zoo geformuleerd worden, dat de thermodynamische potentialen gelijk worden. Daar het nu van zelf sprekend is, dat die conditie wèl zal moeten luiden, dat het totaal aantal diosmeerende deeltjes nul is, volgt hieruit verder, dat formule (3) niet gehandhaafd kan blijven, en vervangen zal moeten worden door een betrekking van den vorm:

$$N = F(\mu, T). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Andere grootheden dan de temperatuur (en constanten) kunnen in deze betrekking niet voorkomen, omdat de eigenschappen van den thermodynamischen potentiaal bij evenwicht, d. w. z. bij één bepaalde temperatuur in alle phasen, eischen dat voor constante temperatuur verg. (5) overgaat in (3). Het komt er nu voor beide vraagstukken op aan, den vorm van verg. (5) nader te bepalen. Het is duidelijk, dat zuiver thermodynamische redeneering daartoe niet in staat is, omdat het vraagstuk, dat wij willen oplossen, als betrekking hebbende op niet-evenwichtstoestanden, buiten de thermodynamica valt. De thermodynamica kan slechts aanwijzingen, zij het dan ook waar-

¹⁾ Slechts door uit te gaan van een andere, kinetische definitie van de entropie, kan men er toe komen aan de entropie, in een bepaald stelsel van eenheden, een bepaalde waarde toe te kennen. Ik kom daarop in een andere mededeeling in een ander verband terug. Zie dit Verslag p. 854.

devolle, geven omtrent de oplossing, die zelf alleen kinetisch kan worden verkregen. Een van die aanwijzingen is deze, dat de functie van verg. (5) van dien aard zal moeten zijn, dat de conditie $N_1 = N_2$ niet leidt tot de absurde uitkomst (4). Die absurditeit verdwijnt nu reeds wanneer men verg. (5) brengt in den vorm

$$N = C \frac{\mu}{RT} \dots \dots \dots (6)$$

waarin de factor R geciseerd wordt door de overweging dat N een aantal moleculen is, dat in de tijdseenheid zeker oppervlak bereikt. Daar μ van de dimensie van een energie is, zal ook de noemer van die dimensie moeten zijn, terwijl de factor C op zekere wijze met tijd- en oppervlakte-eenheid samenhangt. Stelt men met behulp van 6) de evenwichtsvoorwaarde op, dan luidt zij natuurlijk :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu}{RT} \right)_{\rho, T} dx + \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{\mu}{RT} \right)_{\rho, x} dT = 0$$

of

$$x \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right)_{\rho, T} dx = - \frac{T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, x} - \mu}{RT^2} dT$$

of

$$\frac{dx}{1-x} = \frac{-T\eta + xT \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\rho, T} - \varepsilon + T\eta - px + x \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)_{\rho, T} - xT \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\rho, T} + px \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)_{\rho, T}}{RT^2} dT$$

waaruit juist de termen met η wegvallen. Evenwel blijkt nu, dat ook nog deze uitdrukking te eenvoudig is, want thans komt in de uitkomst ε voor, waarin om de potentieele energie eveneens een onbepaalde constante optreedt. Wij zullen dus in stede van (6) een uitdrukking moeten hebben van den vorm

$$N = C \frac{\mu - f(T)}{RT} \dots \dots \dots (7)$$

waarin $f(T)$ hetzij een constante, hetzij een nader te bepalen functie van T is. Maar stellen wij thans nog den eisch, dat voor zeer groote volumina N gelijk nul wordt, en anders altijd positief blijft, dan zien wij, dat (7) daaraan niet kan voldoen, omdat bij zeer groot volume de entropie oneindig en dus de thermodynamische potentiaal negatief oneindig wordt. Deze overweging eischt een afhankelijkheid van den vorm :

$$N = C e^{-\frac{\mu - f(T)}{RT}} \dots \dots \dots (8)$$

waarbij het onverschillig is of wij C als een constante, dan wel als een functie van T opvatten, zoolang $f(T)$ geheel willekeurig blijft.

4. Verder dan verg. (8) kan de thermodynamische theorie niet komen. Wij moeten dus thans zien of wij langs kinetischen weg het tot nu toe niet meer dan plausible resultaat kunnen bevestigen, en nader inzicht in den aard van $f(T)$ kunnen verkrijgen. Langs den weg, aangegeven door VAN DER WAALS SR. in zijn mededeeling over de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal¹⁾ wordt beide gemakkelijk verkregen. Daartoe behoeft men slechts den gedachtingang in zooverre te wijzigen, dat men niet let op gelijkheid van het aantal moleculen, dat uit de vloeistof in de gasphase overgaat en omgekeerd, maar dat men onafhankelijk van de tweede phase het aantal deeltjes bepaalt, die zich uit de omringende homogene phase kunnen vrij maken, d. w. z. die in staat zijn de aantrekkingskracht der phase, waarin zij zich bevinden, geheel te overwinnen, dus een ruimte te bereiken waar de potentieele energie, zonder dat uitwendige krachten werken, maximaal is en de kinetische druk derhalve gelijk nul mag gesteld worden²⁾.

Evenwel laten zich eenige bezwaren inbrengen tegen de l.c. gevolgde methode, speciaal wat betreft de wijze waarop het verlies van energie bij het uittreden van een molecuul uit de homogene phase berekend wordt. Ik dank aan Prof. VAN DER WAALS JR. het volgende bewijs, waarbij die bezwaren vermeden zijn.

Zij N' het aantal moleculen van één grammolecule, $\frac{a}{r}$ de potentieele energie daarvan, dan is de potentieele energie, die één molecuul verliest wanneer het van uit de phase verwijderd wordt naar een plaats, waar de potentiaal nul is, $\frac{2a}{N'r}$. De invloed van de botsingen, die een molecuul tegen de andere ondergaat, kan teruggebracht worden tot een druk op de afstandssfeer, zooals dit veelal gedaan wordt bij de afleiding der toestandsvergelijking met de viriaal-methode.

1) Deze Verslagen III, 205—219.

2) Prof. VAN DER WAALS JR. maakt er mij attent op, dat deze voorwaarden niet altijd vervuld behoeven te zijn in de nabijheid van een wand als waarvan in mijn vroegere verhandeling wordt gesproken, zooals men gemakkelijk inziet als men denkt aan vloeistofphases in de nabijheid van hun kritische temperatuur. Wil men dus in 't algemeen den thermodynamischen potentiaal in een bepaalde phase kinetisch definiëren alleen met behulp van eigenschappen dier phase zelf en niet van coëxisterende phases — en dit schijnt mij in vele opzichten gewenscht — dan dient men de aanschouwelijke definitie met behulp van een niet attraheerenden wand te vervangen door de zuiver mathematische, in den tekst gegeven.

Die druk, dien wij P zullen noemen, is gelijk aan $p + \frac{a}{r^2}$ of $\frac{MRT}{r-b}$.

Willen wij de kans nagaan, dat een molecuul door de capillaire laag heen aan de phase ontsnapt, dan zullen wij dezen druk in aanmerking moeten nemen. Immers hij is niet door de capillaire laag heen constant, maar zal geleidelijk afnemen als wij van de vloeistof de capillaire laag doorloopen in de richting naar den damp toe.

Kiezen wij de z -as loodrecht op de capillaire laag, en denken wij σ (den straal van de afstandssfeer) zoo klein vergeleken bij de dikte der capillaire laag, dat wij over een afstand 2σ den druk P als een lineaire functie van z mogen beschouwen, dan zal de kracht waarmee een molecuul door de kracht P naar buiten wordt gedrongen, gelijk zijn aan $-\frac{4}{3} \pi \sigma^3 \frac{dP}{dz}$. De totale arbeid, die dus door P op een uittredend molecuul wordt verricht, is:

$$-\frac{4}{3} \pi \sigma^3 \int dz \frac{dP}{dz} = \frac{4}{3} \pi \sigma^3 (P_{cl} - P_d) = \frac{2b_f}{N} (P_{cl} - P_d)$$

Wanneer dus een molecuul in de richting van vloeistof naar damp in de capillaire laag indringt, zal het deze alleen dan geheel kunnen doorloopen, wanneer de z -component (u) van de snelheid zoo groot is, dat:

$$\frac{1}{2} m u^2 > \left(\frac{2a}{Nv} \right)_{cl} - \left(\frac{2a}{Nv} \right)_d - \frac{2b_f}{N} (P_{cl} - P_d).$$

Noem de kleinste waarde van u , die hieraan voldoet, u_m , dan vinden wij het aantal deeltjes, dat per seconde aan de vloeistof ontsnapt, als volgt: Zij n het aantal deeltjes per cm^3 , dus $n = \frac{N'}{v}$ ($v =$ het volume van 1 grammolecuul), dan is het aantal dat een snelheidscomponent u in de z -richting heeft $\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} d\frac{u}{\alpha}$, en het aantal, dat een oppervlak van 1 cm^2 met die snelheid passeert

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} d\frac{u}{\alpha}$$

Het aantal, dat van vloeistof naar damp overgaat, is dus

$$\frac{n\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{u=u_m}^{u=\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} d\frac{u}{\alpha} = \frac{n\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u_m^2}{\alpha^2}}$$

Hebben wij niet met een enkelvoudige stof, maar met een mengsel te doen van $(1-x)$ moleculen 1^e soort en x moleculen 2^e soort, en

willen wij het evenwicht voor moleculen 1^e soort nagaan, dan krijgen wij zooals gemakkelijk is in te zien, dezelfde uitdrukking waarin echter $n = \frac{N'(1-x)}{v}$ ($v =$ volume van 1 grammolecuul mengsel) en

$${}_{1/2}m_1 u^2_m = \left[\frac{2 \{ (1-x) a_1 + x a_{12} \}}{N'v} \right]_{rl} - \left[\frac{2 \{ (1-x) a_1 + x a_{12} \}}{N'v} \right]_d \\ - \frac{2RT}{N'} \left(\left[\frac{b_1(1-x) + b_{12}x}{v-b} \right]_{rl} - \left[\frac{b_1(1-x) + b_{12}x}{v-b} \right]_d \right)$$

De uitdrukkingen $\frac{(1-x)RT}{v-b}$ en $\frac{xRT}{v-b}$ stellen hierin de partiaal-drukken voor resp. door moleculen van de 1^e en van de 2^e soort op de afstandsferen om die der 1^e soort uitgeoefend. Daar de beschikbare ruimten voor de moleculen van verschillende soort ook verschillend zijn, zouden de noemers $v-b$ eigenlijk ook verschillende waarde moeten hebben. Daar het ons er hier echter slechts om te doen is, na te gaan welke functie μ van N is, kunnen wij van deze verschillen afzien.

Het aantal deeltjes dat uit de vloeistof overgaat naar een ruimte, waar de potentieele energie maximaal en de kinetische druk $= 0$ is, bedraagt dus, als men in aanmerking neemt dat $\frac{1}{2} m_1 N' \alpha^2 = M'RT$:

$$N = \frac{N'(1-x) \alpha}{v \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2 \left\{ \frac{(1-x) a_1 + x a_{12}}{v} \right\} + 2 RT \left\{ \frac{b_1(1-x) + b_{12}x}{v-b} \right\}}{RT}}$$

of

$$N = C \sqrt{T} e^{-\frac{2 \left\{ \frac{(1-x) a_1 + x a_{12}}{v} \right\} + 2 RT \left\{ \frac{b_1(1-x) + b_{12}x}{v-b} \right\} + RT l \frac{1-x}{v}}{RT}} \quad (9)$$

waar

$$C = \sqrt{\frac{R N'}{2 \pi m}}$$

5. Wij moeten thans nog aantonen, dat de uitdrukking in den exponent overeenkomt met $\mu - f(T)$ van verg. (8).

Nu wordt de thermodynamische potentiaal, wanneer wij afzien van de zuivere temperatuurfuncties,

$$pv - RT l(v-b) - \frac{a_x}{V} - x \left\{ \frac{RT}{v-b} \frac{db}{dx} - \frac{da}{v} \right\} + RT l(1-x) \quad (10)$$

wanneer b als een constante mag beschouwd worden. Dit is natuurlijk in den vloeistofoestand niet het geval, en wij kunnen dus ook alleen

verwachten, dat wij tusschen (9) en (10) overeenstemming zullen verkrijgen wanneer van termen met hoogere machten van $\frac{b}{v}$ wordt afgezien.

Schrijven wij $p^r = RT \frac{r}{v-b} - \frac{a}{v}$, dan worden de termen met a uit verg. (10)

$$\frac{2a - x \frac{da}{dx}}{v} = \frac{2a_1(1-x) + 2a_{12}x}{v}$$

en deze termen komen dus met die uit (9) volkomen overeen.

De termen met b uit verg. (10) kunnen als volgt worden herleid, met verwaarloozing van hoogere machten van $\frac{b}{v}$

$$\begin{aligned} -l(v-b) - \frac{x \frac{db}{dx}}{r-b} + \frac{r}{v-b} &= -l(v) - l\left(1 - \frac{b}{v}\right) - \frac{x \frac{db}{dx}}{v-b} + \frac{v}{v-b} \\ &= -l(v) + \frac{b}{v} - \frac{x \frac{db}{dx}}{r} \left(1 + \frac{b}{r}\right) + 1 + \frac{b}{v} = -l(v) + 1 + \frac{2b-x \frac{db}{dx}}{v} \\ &= 1 - l(v) + \frac{2b_1(1-x) + 2b_{12}x}{v} \end{aligned}$$

Ook deze termen komen dus met die van verg. (9) overeen, mits men afziet van de hoogere machten van $\frac{b}{v}$. De $f(T)$ van verg. (8) dient dus zóó gekozen te worden dat de zuivere temperatuurfuncties uit den thermodynamischen potentiaal verdwijnen, en de geheele uitdrukking met \sqrt{T} wordt vermenigvuldigd. De beide methoden, de kinetische en de thermodynamische, vullen dus elkander aan. Thermodynamisch kan men aantoonen dat de grootheid die in den exponent van verg. (8) voorkomt, althans wat haar afhankelijkheid van v en x betreft, geen andere zijn kan dan de thermodynamische potentiaal; maar omtrent de zuivere temperatuurfuncties daarvan kan de thermodynamica geen beslissing geven, en zij kan evenmin aantoonen dat juist dit, en niet een ander verband moet bestaan tusschen ΔV en μ . De kinetische theorie daarentegen kan wél doen zien, dat men een verg. van den vorm van verg. (8) voor ΔV moet krijgen en zij is wel in staat om de $f(T)$ te bepalen; maar zij kan slechts met een zeer ruwe benadering laten zien, — zoolang geen behoorlijke reeksontwikkeling voor b bekend is — dat de optredende volume-

en concentratiefunctie dezelfde is, als die in den thermodynamischen potentiaal optreedt. Combineert men beide methoden, dan mag men echter m. i. met zekerheid concludeeren, dat het gezochte aantal deeltjes inderdaad wordt voorgesteld door de formule

$$N = C \sqrt{T} e^{\frac{\mu'}{RT}} \dots \dots \dots (11)$$

waarin thans μ' den thermodynamischen potentiaal voorstelt, ontdaan van zijn zuivere temperatuurfuncties.

6. Met behulp van formule (11) is het thans gemakkelijk, de vergelijking voor de „osmotische temperatuur” op te maken: Immers er zal dan een stationaire toestand optreden, wanneer het aantal diosmeerende moleculen aan de eene zijde der membraan door temperatuursverhooging evenveel gestegen is als het door toevoeging van opgeloste stof is verminderd, of m. a. w. als:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_{p,T} dx + \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{p,x} dT = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Schrijven wij $\mu' = \mu + F(T)$, waarin thans

$$F(T) = - \int_0^T c_{v,\infty} dT - E + T \int_1^T \frac{c_{v,\infty}}{T} dT + TH$$

en μ de gewone thermodynamische potentiaal is, dan volgt uit verg. 11 en 12 onmiddellijk door uitvoeren der differentiaties:

$$- \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_{p,T} dx = \frac{dT}{T} \left\{ T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,x} + TF'(T) - \mu - F(T) + \frac{RT}{2} \right\}.$$

En met de waarden voor $\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_{p,T}$ en $\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,x}$ uit verg. (2)

$$x \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}\right)_{p,T} dx = \frac{dT}{T} \left\{ TF'(T) - \epsilon - pv - F(T) + \frac{RT}{2} \right\} \dots (13)$$

zoolang wij de termen met x als klein mogen beschouwen.

Met $\epsilon = -\frac{a}{v} + \int_0^T c_{v,\infty} dT + E$ en de boven genoemde waarde van

$F(T)$ wordt het rechter lid dan:

$$\frac{dT}{T} \left\{ \frac{a}{v} - pv + \frac{RT}{2} \right\}$$

Nu is bij lage temperatuur pv te verwaarloozen tegen $\frac{a}{v}$, en voor laatstgenoemde uitdrukking kunnen wij schrijven $\frac{RTv}{v-b}$. In de onder-

stelling, waarvan wij reeds gebruik gemaakt hebben, dat x klein is, gaat $\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)_{p,T}$ over in $\frac{RT}{x(1-x)}$, zoodat ten slotte de differentiaalvergelijking der „osmotische temperatuur” wordt:

$$1-x = \frac{dx}{dT} \left\{ \frac{r}{r-b} + \frac{1}{2} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Uit den aard der zaak is het tweede lid positief, en deze uitkomst was natuurlijk reeds van te voren zeker.

7. Naar aanleiding der uitkomst wil ik mij nog een enkele opmerking veroorloven. Men zou kunnen meenen, dat experimenteele bepaling der „osmotische temperatuur” een nieuw middel zou geven ter bepaling van de grootheid b in den vloeistooftoestand; dit is evenwel niet het geval. Dit blijkt, wanneer men de vereenvoudiging, dat p^v te verwaarloozen is tegen $\frac{a}{r}$, niet eerst in (13) maar dadelijk in (11) invoert.

Schrijven we deze verg. in den vorm

$$l(N) = lC + \frac{1}{2} lT + \frac{\mu'}{RT}$$

dan vinden we als voorwaarde voor den stationairen toestand

$$\left(\frac{\partial \frac{\mu'}{RT}}{\partial x}\right)_{p,T} dx = \frac{dT}{2T} + \left(\frac{\partial \frac{\mu'}{RT}}{\partial T}\right)_{p,x} dT \dots \dots (15)$$

Nu is in de genoemde onderstelling en als we weer de termen met x verwaarloozen:

$$\frac{\mu'}{RT} = \frac{a}{RT} - l(r-b) + l(1-x) = -\frac{r}{r-b} - l(r-b) + l(1-x)$$

en dus

$$\left(\frac{\partial \frac{\mu'}{RT}}{\partial x}\right)_{p,T} = -\frac{dx}{1-x} \cdot \left(\frac{\partial \frac{\mu'}{RT}}{\partial T}\right)_{x,p=0} = \frac{2b-r}{(r-b)^2} \left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)_{p=0} \dots (16)$$

$\left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)_{p=0}$ vinden wij uit de vergelijking

$$\frac{a}{v^2} = \frac{RT}{r-b}$$

door differentiëren; de uitkomst wordt na eenige herleiding

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=0} = \frac{v(r-b)}{T(2b-r)} \dots \dots \dots (17)$$

Substitueeren wij deze uitkomst en die van (16) in (15), dan komen

wij weer op (14). Wij zien dus thans, dat (14) geen onafhankelijke bepaling van $\frac{c}{r-b}$ geeft, maar dat we die grootheid even goed uit (17) kunnen bepalen. En daar de in (17) optredende grootheden experimenteel ongetwijfeld veel nauwkeuriger te bepalen zijn, dan de „osmotische temperatuur”, bestaat er geen grond te verwachten, dat verg. (14) ons omtrent de b in den vloeistoofstand iets nieuws zal kunnen leeren. Daarmede vervalt m.i., althans voorloopig, alle reden om te trachten de ongetwijfeld zeer aanzienlijke moeilijkheden te overwinnen, die een experimenteel onderzoek van „osmotische temperaturen” in den weg zullen staan.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan namens de Heeren PH. KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER: „*Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheden*”.

(Zal in het Verslag der volgende vergadering verschijnen.)

Natuurkunde. — De Heer H. KAMERLINGH ONNES doet eene mededeeling over „*Verdere proeven met vloeibaar helium*”.

(Zal in het Verslag der volgende vergadering worden opgenomen),

Voor de bibliotheek worden aangeboden.

1°. door den Heer G. C. J. VOSMAER een exemplaar van zijn „*Leerboek van de grondbeginselen der Dierkunde*”. Stuk 1 -3.

2°. door den Heer S. HOOGWERFF de dissertatie van den Heer P. CALAND: „*Quantitatief onderzoek over de sulfoneering van toluol*”.

3°. door den Heer H. J. HAMBURGER, namens den Heer Dr. C. FLEIG te Montpellier, een exemplaar van diens werk: „*Les eaux minérales milieux vitaux*”, benevens eenige overdrukjes van tijdschriftsartikelen van denzelfden schrijver.

4°. door den Heer H. KAMERLINGH ONNES de dissertatie van den Heer C. A. CROMMELIN: „*Metingen betreffende de toestandsvergelijking van argon*”.

5°. door den Heer C. E. A. WICHMANN: a. „*Ueber den Vulkan Soputan in der Minahassa*” (Sonderabdruck aus den Monatsberichten der deutschen geologischen Gesellschaft, Band 62); b. „*Adolf Bernhard Meyers Reise nach Neu-Guinea im Jahre 1873*”. (Overdruk uit „*Nova Guinea*” Vol. II Partie I).

De vergadering wordt gesloten.

E R R A T A.

In de mededeeling van H. HAGA en J. BOEREMA: „*De electromotorische kracht van het WESTON-normaal element.*”

bl. 625 regel 6 v. o. leze voor 20×10^{-6} ; 38×10^{-6} .

bl. 626 tabel 2: de laatste twee kolommen moeten zijn:

2.00002 ₅	1.01829
2.00002 ₀	1.01834
2.00000 ₉	1.01830
2.00001 ₅	1.01833
2.00002 ₀	1.01832
2.00002 ₅	1.01841
2.00014 ₁	1.01836
2.00014 ₁	1.01838
2.00006 ₈	1.01838
2.00006 ₂	1.01842

Gemiddeld 1.01835

bl. 628 regel 2 v. o. leze men voor: 1.0183₃; 1.0183₅.

bl. 663 o. r. staat: Bij andere, b.v. bij propionzuur en azijnzuur, is van het begin af aan de *bolle zij* naar onderen gekeerd. Dit moet zijn: de *holle zij*.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 28 Januari 1911.



Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 878.
- PH. KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER: „Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheid”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 878.
- II J. HAMBURGER, J. DE HAAN en T. BUBANOVIC: „Over den invloed van jodoform, chloroform en andere in vet oploskende stoffen op de Phagocytose”, p. 894.
- C. WINKLER: „Een tumor in het pulvinar thalami optici. Een bijdrage tot de kennis van het zien van vormen”, p. 914. (Met één plaat).
- J. C. KLUYVER: „Over het termsgewijze integreeren van reeksen”, p. 924.
- W. KAPTEYN: „Over de integraalvergelijking van FREDHOLM”, p. 932.
- E. H. BÜCHNER: „Onderzoekingen over het radiumgehalte van gesteenten” II. (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 939.
- LUCIEN GOBEAUX: „Sur un système de coniques de l'espace”. (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORIEWEG), p. 942.
- L. S. ORNSTEIN: „Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer”. II. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 947.
- P. VAN ROMBURGH: „Over de inwerking van salpeterigzuur op dinitrodialkylaniline”, p. 955.
- P. ZEEMAN: „Beschouwingen over lichtstraling onder den gelijktijdigen invloed van elektrische en magnetische krachten en eenige naar aanleiding daarvan genomen proeven” (1ste gedeelte), p. 957.
- J. H. F. KOHLBRÜGGE: „Zuurvormende licht- en rijstbacteriën, de oorzaak der kippen-beriberi”. (Aangeboden door de Heeren C. H. H. STROCK en C. A. PEKELHARING), p. 968.
- W. G. HUFET: „Aanteekeningen over de trochlearis- en oculomotorius-kern en den trochlearis-wortel bij lagere vertebraten”. (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en C. WINKLER), p. 981. (Met één plaat).
- J. J. L. D. BARON VAN HOEVELL: „Aanteekeningen over de reticulaire cellen bij eenige verschillende vertebraten”. (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en C. WINKLER), p. 988. (Met één plaat).
- W. H. JULIUS: „Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmassa's”, p. 1007.
- PH. KOHNSTAMM en J. TIMMERMANS: „Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 1022.
- E. MATHIAS en H. KAMERLINGH ONNES: „De rechtlijnige diameter van zuurstof”, p. 1039. (Met 3 platen).
- F. E. C. SCHEFFER: „Over de bepaling van driefasendrukkingen in het stelsel zwavelwaterstof—water”. (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 1057.
- Aanbieding van een Boekgeschenk, p. 1065.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Kennisgevingen van de Heeren S. HOOGWERFF, P. ZEEMAN en H. KAMERLINGH ONNES, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. E. den Minister van Binnenlandse Zaken, dd. 9 Januari 1911 met verzoek om advies betreffende de inrichting en plaatsing van bliksemalleiders op de St. Janskerk te Gouda, welk advies door den Minister gevraagd is op verzoek van de Commissie voor de restauratie dier kerk.

De Voorzitter verzoekt de Commissie, bestaande uit de Heeren H. A. LORENTZ, H. HAGA, P. ZEEMAN en W. H. JULIUS, welke vroeger de Regeering inzake het aanbrengen van bliksemalleiders op het Rijksmuseum reeds van advies diende, ook nu weer haar advies te willen geven.

Aan den Minister zal geantwoord worden dat die Heeren zich daartoe bereid verklaren en dat zij zich voor deze aangelegenheid in verbinding zullen stellen met de Commissie voor de restauratie der St. Janskerk te Gouda.

3°. Brief van den Heer A. P. L. VAN LANGERAAD, Chem.-Ingen. Bacterioloog te Scheveningen dd. 6 Januari 1911, ter begeleiding van een gesloten manuscript, volgens het opschrift behelzende „een overzicht van zijn studiën en experimenten op het gebied van den kanker”, welk manuscript door hem in handen van den algemeenen Secretaris der Akademie is gesteld met verzoek het als „*pli cacheté*” te deponeren in het Archief der Akademie om of te worden geopend zonder machtiging, bij den dood van den schrijver, dan wel op zijn verzoek, bij eigenhandig geteekende aanvraag, of ongeopend te worden teruggezonden na opvordering.

Hiertegen bestaat geen bezwaar bij de Vergadering, zoodat aan het verzoek van den Heer LANGERAAD zal worden voldaan.

Scheikunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan namens de Heeren PH. KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER :
„*Thermodynamische potential en reactiesnelheid*”.

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

(Aangeboden in de vergadering van 24 December 1910).

1. In een voorafgaande verhandeling¹⁾ van een onzer (K.) werd aangetoond, dat het aantal moleculen van een stof in een homogene phase, dat in de tijdseenheid in staat is zich aan de aantrekking dier phase te onttrekken, wordt aangegeven door de uitdrukking

¹⁾ Deze Verslagen van Dec. 1910, p. 864.

$$N = C \sqrt{T} e^{\frac{\mu'}{RT}}, \dots \dots \dots (1)$$

waarin μ' den thermodynamischen potentiaal van die stof in die phase voorstelt, ontdaan van zijn zuivere temperatuurfuncties en R de moleculaire gasconstante. Die formule is daar toegepast om de conditie voor den stationairen toestand te vinden, waarbij evenveel deeltjes door een semipermeabele membraan een oplossing binnen komen als haar verlaten, maar er is nog een ander gebruik dier formule denkbaar. Men kan zich nl. afvragen: Wanneer er geen uitwisselingsevenwicht is tusschen oplossing en oplosmiddel door de membraan heen, hoeveel deeltjes zullen dan per tijdseenheid de oplossing meer verlaten dan binnenkomen, of m. a. w. hoe groot zal bij zekeren toestand de snelheid zijn, waarmede het geheele systeem naar het evenwicht streeft? Men zal verwachten, dat in het genoemde geval de snelheid voorgesteld zal mogen worden door het verschil van twee uitdrukkingen van den vorm (I), waarbij de eerste het aantal deeltjes voorstelt, dat zich uit de oplossing vrij maakt, en de tweede het aantal moleculen, dat het oplosmiddel verlaat en dus de oplossing binnen dringt. Men krijgt dan voor die snelheid de uitdrukking:

$$N = C \left\{ \sqrt{T_1} e^{\frac{\mu'_1}{RT_1}} - \sqrt{T_2} e^{\frac{\mu'_2}{RT_2}} \right\}$$

Een gelijke formule zou natuurlijk voor alle analoge gevallen moeten gelden: bijv. voor dat van den osmotischen druk, en voor de verdamping van een vloeistof. Deze snelheden spelen echter in de physica geen zeer belangrijke rol, en toepassing der formule op deze gevallen schijnt niet tot nieuwe inzichten te kunnen voeren, te minder daar er nauwelijks experimenteel materiaal ter toetsing aanwezig zou zijn. Daarentegen speelt het vraagstuk der reactiesnelheden in de scheikunde een hoogst belangrijke rol en is op dat gebied een zeer rijk experimenteel materiaal voorradig. Wanneer wij nu bedenken, dat bij deze chemische snelheden eveneens een aantal deeltjes zich aan het reactiemengsel onttrekt onder vorming van nieuwe stoffen, dan ligt zeker de vraag voor de hand, of de gevonden uitdrukking op dit gebied niet enig nieuw licht zal kunnen werpen.

Wij zullen dus moeten onderzoeken, of de reactiesnelheid kan worden uitgedrukt in de volgende gedaante

$$-\frac{dc}{dt} = C \left(e^{\frac{\mu_{I+K_1}}{RT}} - e^{\frac{\mu_{II+K_2}}{RT}} \right) \dots \dots \dots (2)$$

waarin μ_1 en μ_{11} de som der moleculaire thermodynamische potentiaal zijn resp. voor het verdwijnende en ontstaande systeem en F_1 en F_2 functies van de temperatuur en voorts van constanten, die betrekking hebben op de reageerende stoffen en eventueel op de bij de reactie optredende tusschentoestanden ¹⁾. De beide functies F_1 en F_2 hebben hierin de dimensie eener energie, en de waarde van de constante C geeft rekenschap van de keuze onzer concentratie- en tijdseenheid; hare dimensie is immers c/t en mag derhalve voor beide deelreacties gelijk genomen worden.

2. Wij zullen nu in de eerste plaats aantoonen, dat zoowel voor verdunde gassen als voor verdunde oplossingen verg. (2) leidt tot de bekende uitdrukking voor de wet der massawerking. Substitueeren wij eerst in (2) de waarde van μ voor een mengsel van verdunde gassen:

$$\mu_1 = \sum v_1 \epsilon_{v_1} - T \sum r_1 \eta_{v_1} + \sum r_1 \int c_{v_1} dT - T \sum r_1 \int \frac{c_{v_1}}{T} dT + RT \sum r_1 \ln c_1 + RT \sum v_1$$

en

$$\mu_{11} = \sum r_{11} \epsilon_{v_{11}} - T \sum r_{11} \eta_{v_{11}} + \sum r_{11} \int c_{v_{11}} dT - T \sum r_{11} \int \frac{c_{v_{11}}}{T} dT + RT \sum r_{11} \ln c_{11} + RT \sum v_{11}$$

dan krijgen wij:

$$\left. \begin{aligned} & \sum r_1 \epsilon_{v_1} - T \sum r_1 \eta_{v_1} + \sum r_1 \int c_{v_1} dT - T \sum r_1 \int \frac{c_{v_1}}{T} dT + F_1 + RT \sum r_1 \\ & - \frac{dc}{dt} = C \left\{ \begin{array}{l} RT \\ Hc_1^{v_1} \end{array} \right. \\ & \frac{\sum r_{11} \epsilon_{v_{11}} - T \sum r_{11} \eta_{v_{11}} + \sum r_{11} \int c_{v_{11}} dT - T \sum v_{11} \int \frac{c_{v_{11}}}{T} dT + F_2 + RT \sum r_{11}}{RT} \\ & - e \left\{ \begin{array}{l} RT \\ Hc_{11}^{v_{11}} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} (3)$$

waarin $Hc_1^{v_1}$ en $Hc_{11}^{v_{11}}$ het gedurig product voorstellen van de con-

¹⁾ Volgens verg. (2) zou dus niet de thermodynamische potentiaal zelf, doch eene exponentieele functie hiervan, de voor de reactie karakteristieke functie zijn. Zie ook Chem. Weekblad 7, p. 920 (1910).

concentraties van het eerste, resp. het tweede lid der reactievergelijking, het molecuulgetal in aanmerking genomen. Noemen wij:

$$\sum r_{I} \epsilon_{0I} - T \sum r_{I} \eta_{0I} + \sum r_{I} \int_{T_0}^T \frac{c_{vI}}{T} dT - T \sum r_{I} \int_{T_0}^T \frac{c_{rI}}{T^2} dT + F_1 + RT \sum r_{I} \ln n_1$$

$= k_1$.

en

$$\sum r_{II} \epsilon_{0II} - T \sum r_{II} \eta_{0II} + \sum r_{II} \int_{T_0}^T \frac{c_{vII}}{T} dT - T \sum r_{II} \int_{T_0}^T \frac{c_{rII}}{T^2} dT + F_2 + RT \sum r_{II} \ln n_2$$

$= k_2$.

dan gaat (3) over in:

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 H_1^{z_1} - k_2 H_2^{z_2} \dots \dots \dots (4)$$

In de tweede plaats moeten wij de geldigheid dezer formule voor reacties in verdunde oplossing bewijzen. Wij voeren daartoe een nieuwe grootheid in, μ_1 , gedefinieerd door de betrekking:

$$\mu_1 = \mu'_1 + RT \log n_1 \dots \dots \dots (5)$$

$RT \log n_1$ is dus dat deel van den thermodynamischen potentiaal, dat afkomstig is van het paradox van GIBBS, en μ'_1 het overige deel. Nu blijft, gelijk bekend is, het differentiaalquotient van μ'_1 naar de concentraties ¹⁾ eindig, terwijl dat van het tweede deel oneindig wordt voor uiterst verdunde oplossingen. Voor de (natuurlijk ook zeer kleine) veranderingen, die de concentraties in een uiterst verdunde oplossing kunnen ondergaan, mogen wij dus μ'_1, μ'_2 enz. als onveranderlijk, niet van de concentraties afhankelijk, beschouwen, wanneer wij de veranderingen van $RT \log n_1$ enz. met de concentraties in rekening brengen. Substitueeren wij nu de waarde (5) voor μ_1 en brengen wij den term $RT \log n_1$ uit den exponent naar beneden, dan krijgen wij wederom:

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 H n_1 - k_2 H n'_1 \dots \dots \dots (4a)$$

waar:

$$k_1 = e^{\frac{\sum \mu'_1 + F_1}{RT}} \quad \text{en} \quad k_2 = e^{\frac{\sum \mu'_2 + F_2}{RT}} \dots \dots \dots (6)$$

¹⁾ In afwijking van wat bij de behandeling der reactiesnelheden gebruik is, definiëren wij hier de concentraties als de „molenbreuk” van een zekere stof in een bepaald mengsel, en niet als deze grootheid, gedeeld door het totale volume. Maar het is duidelijk, dat dit op de conclusies omtrent de constantheid van k_1 en k_2 geen invloed heeft, daar bij elke reactie in verdunde oplossing wordt afgezien van de volumeverandering gedurende de reactie.

volgens het bovenstaande als constanten mogen beschouwd worden, gelijk de wet der massawerking eischt.

Uit vergelijking (4) en (4a) concludeeren wij nu, dat verg. (2) inderdaad in staat is op behoorlijke wijze van een hoogst belangrijke eigenschap van het reactieverloop rekenschap te geven. Die uitkomst was in geen en deele van te voren als vaststaand te beschouwen. Want wij hebben die vergelijking bij analogie opgesteld en daarbij wel gewezen op de groote overeenkomst met het gebruik van verg. (1) in deze en de vroegere mededeeling, maar niet op de bestaande verschillen. Het is hier de plaats om die verschillen in 't licht te stellen. Weliswaar is in het geval der „osmotische temperaturen” de eindtoestand geen evenwichtstoestand, maar men mag toch elk der beide homogene fasen, als men afziet van de naaste omgeving der membraan, als in evenwicht beschouwen. Wij zijn dus ongetwijfeld gerechtigd in elk dier fasen van grootheden als temperatuur, entropie, thermodynamische potentiaal te spreken, en alleen op dien eindtoestand van „uitwisselingsevenwicht” werd daar de formule toegepast. Maar men zou niet ten onrechte kunnen betwijfelen, of hetzelfde geoorloofd is voor toestanden, waarin het uitwisselingsevenwicht nog niet is ingetreden, en a fortiori geldt dit ten opzichte van het thaus besproken geval. Immers de homogene fase, waarin de reactie plaats grijpt, is in zichzelf niet in evenwicht, het is niet zeker, dat de Maxwell'sche snelheidsverdeling daar geldt, en ook al wil men met BOLTZMANN een definitie voor de entropie van een niet-evenwichtstoestand invoeren, dan zal deze in 't algemeen toch natuurlijk een andere waarde bezitten dan de \bar{r} uit verg. (2).

Uit verg. (4) nu blijkt, dat deze ongetwijfeld gewichtige bezwaren toch niet behoeven te leiden tot een verwerping van verg. (2). Immers het zeer uitgebreide feitenmateriaal omtrent de reactiesnelheden bewijst afdoende, dat verg. (4) op zeer vele met meetbare snelheden alloopende reacties toepasselijk is, met name is het door talloze metingen vastgesteld, dat k_1 en k_2 inderdaad bij normaal verloopende reacties¹⁾ constanten, dus niet van den tijd afhankelijke grootheden zijn. Wanneer nu de invloeden, die wij noemden, zich zoodanig zouden doen gevoelen, dat verg. (2) moest verworpen worden, zou dit resultaat onmogelijk zijn. Immers daar gedurende de reactie het mengsel meer en meer den evenwichtstoestand nadert en dien eindelijk bereikt, zal het verschil tusschen de op elk oogenblik werkelijk bestaande entropie (H functie van BOLTZMANN) en de

¹⁾ Wij bedoelen hier met „abnormale” reacties natuurlijk reacties, waarbij nader onderzoek plausibel maakt, dat de inconstantheid van de k 's is toe te schrijven aan volgreacties, nevenreacties, katalyse of te groote concentraties.

entropie van den evenwichtstoestand voortdurend afnemen en ten slotte nul worden; en een dergelijke opmerking geldt omtrent de andere middenwaarden, in verg. (2) optredende. Maar dan zouden noodzakelijk ook de k_1 en k_2 van den tijd afhankelijk worden en niet de Hc_1^{-1} en Hc_{II}^{-1} alleen, zooals toch het experiment leert. Wij moeten dus concludeeren, dat de systemen met meetbare reactiesnelheden als quasi-stationaire systemen mogen worden beschouwd, voor welke niet alleen een entropie, thermodynamische potentiaal enz. bestaat, maar voor welke deze grootheden zelfs (afgezien van den concentratie-invloed natuurlijk) onmeetbaar weinig verschillen van de overeenkomstige grootheden in den evenwichtstoestand. Daarmede is een experimenteel vaste basis gegeven, waarop wij ons voor verdere toetsing en ontwikkeling van verg. (2) kunnen plaatsen. Met name is thans bewezen, dat F_1 en F_2 werkelijk alleen van bij de reactie constante grootheden kunnen afhangen gelijk wij in § 1 onderstelden. Evenwel ligt in die onderstelling meer opgesloten, dan thans reeds is bewezen. Wij komen daarop in § 5 terug.

3. Onze tweede stap is thans, dat wij laten zien, dat verg. (2) hierin verschilt van de voor de osmotische temperatuur geldende verg. (11) der vroegere verhandeling, dat hier F_1 niet zooals daar de zuivere temperatuurfuncties van den thermodynamischen potentiaal met negatief teeken omvat. Immers de vergelijking van het evenwicht eischt de gelijkheid van de sommen der thermodynamische potentialen der beide systemen, en dus voor verdunde gassen:

$$\begin{aligned} \Sigma r_I \epsilon_{0I} - T \Sigma r_I n_{0I} + \Sigma r_I \int c_{rI} dT - T \Sigma r_I \int \frac{c_{rI}}{T} dT + RT \Sigma v_I \ln c_I + RT \Sigma r_I = \\ = \Sigma r_{II} \epsilon_{0II} - T \Sigma r_{II} n_{0II} + \Sigma r_{II} \int c_{rII} dT - T \Sigma r_{II} \int \frac{c_{rII}}{T} dT + RT \Sigma r_{II} \ln c_{II} + \\ + RT \Sigma r_{II} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

aan den anderen kant eischt verg. (2) dat bij het evenwicht, waar de snelheid = 0 wordt:

$$u_I + F_1 = u_{II} + F_2 \dots \dots \dots (8)$$

Ware F_1 dezelfde functie als in verg. (11) der in den aanhet geciteerde verhandeling, dan zou dit voeren tot

$$\Sigma r_I \epsilon_{0I} + RT \Sigma r_I + RT \Sigma r_I \ln c_I - \Sigma r_{II} \epsilon_{0II} + RT \Sigma r_{II} + RT \Sigma r_{II} \ln c_{II} \quad (9)$$

en deze verg. is in strijd met de ongetwijfeld geldige verg. (7), daar in 't algemeen de soortelijke warmten der reactieproducten en der

reageerende stoffen niet gelijk zijn en bovendien in verg. (9) de entropieconstanten ontbreken. Deze opmerking is niet nieuw. Immers zij is in den grond identiek met de bewijsvoering op pag. 45-51 in de dissertatie van den Heer DE LANGEN¹⁾, dat het weglaten van de zuivere temperatuurfuncties uit de formule voor den thermodynamischen potentiaal bij chemische omzettingen leidt tot strijd met de verg. van VAN 'T HOFF. Deze toch wordt onmiddellijk uit (7) door differentieeren verkregen, terwijl differentiatie van (9) de daarmee strijdige vergelijking van pag. 46 van de dissertatie van de Heer DE LANGEN oplevert. De Heer DE LANGEN concludeert daaruit tot een strijd tusschen de kinetische gastheorie en de thermodynamica. Maar die conclusie kan niet gehandhaafd blijven. Immers daarbij is over het hoofd gezien, dat men voor de kinetische afleiding van den thermodynamischen potentiaal van een mengsel van chemisch op elkaar werkende stoffen, rekening zal moeten houden met de „kritische Räume” van BOLTZMANN²⁾, en dat, als de reactiewarmte met de temperatuur varieert, termen moeten optreden, die met het verschil der soortelijke warmten in verband staan³⁾. Hoe die termen met de temperatuur en de soortelijke warmten moeten samenhangen, zou alleen een volledig ontwikkelde kinetische theorie kunnen leeren, die tevens rekenschap zou kunnen geven van de grootte der soortelijke warmten der verschillende stoffen. In dit opzicht voert ons dus voor 't oogenblik de thermodynamica verder, al moet zij uit den aard der zaak het antwoord schuldig blijven op de vraag, waarom en hoe de soortelijke warmte met de temperatuur en van stof tot stof varieert.

4. Vergelijken wij thans verg. (7) en (8), dan blijkt dat

$$F_1 = F_2 \dots \dots \dots \quad (10)$$

en daar volgens § 2 noch F_1 , noch F_2 gedurende de reactie van den tijd afhankelijk kunnen zijn, is verg. (10) gedurende de geheele reactie vervuld. Dezelfde redeneering geldt natuurlijk ook met zeer geringe wijziging voor verdunde oplossingen, en voert dan eveneens tot verg. (10). Er blijkt dus, dat wij in § 1 deze functies nog te wijd gedefinieerd hebben, toen wij ze invoerden als functies van de temperatuur en van constanten, karakteristiek voor de reageerende stoffen en eventueel voor de optredende tusschentoestanden. Immers met deze definitie zou overeenkomen de onderstelling:

$$F_1 = F_1(T, a_1, b_1, c_1 \dots)$$

$$F_2 = F_2(T, a_2, b_2, c_2 \dots)$$

¹⁾ Groningen 1907.

²⁾ Gastheorie II Abschnitt VI.

³⁾ I.e. p. 199.

waarin a_1, b_1, c_1 voor het systeem vòòr de reactie, a_2, b_2, c_2 voor het systeem na de reactie karakteristiek zijn, en onderling onafhankelijk. Ja, deze onderstelling zou zelfs het meest voor de hand liggen. Verg. (10) echter toont, dat zij verworpen moet worden. De constanten in F_1 kunnen niet onafhankelijk zijn van die in F_2 ; het moeten grootheden zijn, die op de een of andere wijze met beide systemen, vòòr en na de reactie gelijkelijk in verband staan.¹⁾

De meest eenvoudige onderstelling zou dan zijn, dat al die constanten $= 0$ waren, en F dus een zuivere algemeene temperatuurfunctie zou zijn, gelijk de $\frac{1}{2} RT \ln T$ uit verg. (11) der vorige verhandeling²⁾, of dat wellicht ook deze zou ontbreken en $F = 0$ gesteld zou mogen worden. Evenwel in die onderstelling komen wij tot een soortgelijke ongerijmdheid, als die in de vroegere verhandeling verg. (4) deed verwerpen. Immers uit experimenteële bepalingen van

$$\sum r_I \epsilon_{oI} - T \sum r_I \eta_{oI} = \sum r_I \int c_{vI} dT - T \sum r_I \int \frac{c_{vI}}{T} dT - RT \sum r_I$$

$$k_1 = C v \quad RT$$

en

$$\sum r_{II} \epsilon_{oII} - T \sum r_{II} \eta_{oII} = \sum r_{II} \int c_{vII} dT - T \sum r_{II} \int \frac{c_{vII}}{T} dT + RT \sum r_{II}$$

$$k_2 = C v \quad RT$$

bij twee temperaturen (of de overeenkomstige uitdrukkingen voor verdunde oplossingen), zouden wij $\epsilon_{oI}, \epsilon_{oII}, \eta_{oI}$ en η_{oII} kunnen bepalen, m.a.w. wij zouden experimenteël de absolute waarden der energie en der entropie kunnen vinden, terwijl toch beide volgens onze definitie onbepaalde additieve constanten bevatten, zoodat slechts energie- en entropieverschillen voor meting vatbaar zijn.

Wij weten dus zeker, dat F energie- en entropiegrootheden moet bevatten, die de energie- en entropiewaarden in den exponent tot energie- en entropieverschillen terugbrengen. En wel moet, om ons voorloopig tot het energieverschil te bepalen, het eene energieverschil de eene reactiesnelheid, het andere de andere bepalen, terwijl hun algebraïsche som het geheele energieverschil bij de omzetting, dus de reactiewarmte is, zoodat het niet mogelijk is, dat de *geheele* reactie-

¹⁾ Bovenstaande beschouwingen leiden dus tot de aanname van twee tegengestelde reacties, welke echter niet „onafhankelijk“ van elkaar zijn. De functie F immers treedt in beide snelheden op, d. w. z. beide deelsnelheden hangen van dezelfde „tusschentoestanden“ af.

²⁾ Als men \sqrt{T} in den exponent brengt.

Warmte in de *beide* reactiesnelheden optreedt, gelijk men geneigd zou zijn te veronderstellen. Of m. a. w. de geheele reactiewarmte moet in twee deelen gesplitst worden, waarvan het eerste de eene snelheid, het tweede de andere snelheid bepaalt. Welke is nu de „tusschentoestand”, die die splitsing der reactiewarmte bepaalt? Allereerst denkt men allicht aan den toestand, waarbij de reageerende verbindingen geheel in hun atomen gesplitst zijn, zoodat de eene snelheid bepaald wordt door de dissociatie-energie der reageerende stoffen, de andere door die der reactieproducten. Maar die onderstelling heeft dan toch alleen dan zin, wanneer men aanneemt, dat de reactie werkelijk over de vrije atomen verloopt. Hoe in het tegengestelde geval het werkelijk plaats grijpende proces geheel bepaald zou worden door de dan geheel fictieve dissociatiewarmte in de atomen, is niet wel in te zien ¹⁾. En nu moge voor de kinetische theorie de onderstelling van dissociatie eenige aantrekkelijkheid hebben, omdat zij een analogon is van de stelling, dat elke stof een dampdruk heeft, hoe gering ook, en continue overgangen toelaat, het valt gemakkelijk in te zien, dat het aannemen van zulk een reactieverloop „over de atomen” de vraag niet beantwoordt, maar integendeel de moeilijkheid slechts verschuift en compliceert.

Immers wanneer de reactie verloopt over in merkbare hoeveelheid aanwezige tusschenlichamen, welke ook, dan zal de totaalreactie niet meer uit twee, maar uit vier deelreacties bestaan, daar ook deze intermediair gevormde lichamen zich met bepaalde snelheden in de oorspronkelijke en zich vormende stoffen zullen omzetten. Het reactieverloop wordt dan gecompliceerder, en kan door de volgende vergelijkingen worden uitgedrukt:

$$\frac{-dc_1}{dt} = k_1 \mathbf{H}c_1 - k_{a_1} \mathbf{H}c_a$$

en

$$\frac{dc_{11}}{dt} = k_{a_2} \mathbf{H}c_a - k_2 \mathbf{H}c_{11}$$

waarbij de concentratieverandering van de tusschenproducten wordt aangegeven door:

$$\frac{dc_a}{dt} = -\frac{dc_1}{dt} - \frac{dc_{11}}{dt} = k_1 \mathbf{H}c_1 - k_{a_1} \mathbf{H}c_a - k_{a_2} \mathbf{H}c_a - k_2 \mathbf{H}c_{11}.$$

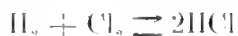
In het algemeen zal dus de snelheid niet door de eenvoudige uit-

¹⁾ TRAUTZ voert voor reacties zonder tusschenproducten o. i. geheel willekeurig de splitsingswarmte van de reageerende stoffen in atomen, bevrijd van hun kinetische energie en een deel der potentieele energie (absolute nulpunt, vaste toestand) als bepalend in. Zie TRAUTZ, Zeitschr. phys. Chem. **64** en volg.

drukking van verg. (4) worden weergegeven¹⁾; dit is alleen dan het geval, wanneer k_{a_1} en k_{a_2} beide zeer groot zijn t. o. v. k_1 en k_2 , d. w. z. wanneer geen merkbare hoeveelheden van de tusschenproducten in het reactiemengsel voorkomen²⁾.

Een voorbeeld hiervan levert de reactie $\text{Ni} + 4\text{CO} \rightleftharpoons \text{Ni}(\text{CO})_4$, waarbij de snelheidsmetingen uitmaken, dat de reactie van links naar rechts plaats grijpt over $\text{Ni}(\text{CO})_2$, dat zich echter zoo snel ontleedt en met overmaat CO verbindt (k_{a_1} en k_{a_2} groot), dat het niet in het reactiemengsel kan worden aangetoond.

Er is echter weinig reden om aan te nemen, dat elke reactie zoo zou moeten worden gedacht, dat de reageerende stoffen in stukken (hetzij atomen of atoomgroepen) uiteenvallen, die zich dan weer als vrije bestanddeelen op andere wijze vereenigen; integendeel moet er ruimte gelaten worden voor de mogelijkheid, dat er gedurende de geheele reactie geen andere zich vrij bewegende deeltjes voorkomen, dan de moleculen der begin- en eindproducten. Deze onderstelling wordt ongetwijfeld in hooge mate ondersteund door het feit, dat op zich zelf uiterst stabiele stoffen, die in zuiveren toestand bij een bepaalde temperatuur niet het geringste spoor van dissociatie vertoonen, toch in staat zijn door middel van een toegevoegde stof ontleed te worden. Denkt men zich dus om een concreet voorbeeld te nemen, de reactie

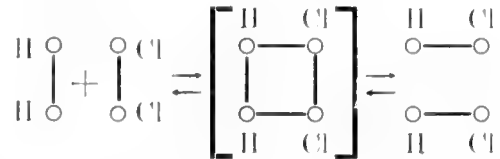


dan zal toch op zijn minst de mogelijkheid niet geloofend kunnen worden, dat de reactie niet zóó verloopt, dat H_2 en Cl_2 in atomen H en Cl zijn gedissocieerd, en deze atomen elkaar ontmoeten onder vorming van HCl, maar zóó, dat een molecuul H_2 een molecuul Cl_2 ontmoet, en bij een geschikten stand dier moleculen, eerst tengevolge van de onderlinge attractie der H en Cl atomen de verbinding tusschen de H atomen en Cl atomen onderling wordt verbroken, en direkt in de nieuwe binding overgaat. Stelt men zich aldus den gang der reactie voor, dan is er een energiewaarde aan te wijzen, waarvan men ongetwijfeld met meer recht mag verwachten, dat zij de reactiesnelheid bepaalt, dan de hier alle chemische beteekenis missende dissociatiewarmte in de atomen. Door de nadering van de beide H

¹⁾ Dat in dit geval de reactiewarmte in twee gedeelten gesplitst moet worden, waarvan het ééne deel de omzettingswarmte van de ontleedende stoffen in het tusschenprodukt, het andere deel die van de zich vormende stoffen in het intermediaire lichaam voorstelt, is o. i. niet twijfelachtig; dit betreft echter de splitsing van een evenwichtsconstante in twee andere *evenwichts*constantep, die elk dan weer n twee snelheidsconstanten moeten gesplitst worden.

²⁾ Zie SCHREINEMAKERS Chem. Weekblad I. 625 (1904).

en Cl moleculen toch treedt een zeker verlies van potentiële energie op door den arbeid der aantrekkende krachten: zijn de beide moleculen elkaar op een bepaalden afstand genaderd, dan zal de potentiële energie een minimumwaarde bereiken, een toestand, die in de hier volgende symbolische voorstelling



door het tusschen haakjes staande wordt aangegeven. Gaan daarna de moleculen zoutzuur weer uit elkaar, dan zal de potentiële energie weer, door den arbeid tegen de aantrekkende krachten verricht, stijgen.

Het mag nu o. i. zeker niet voor onmogelijk worden gehouden, dat deze toestand van minimale potentiële energie, als de bovenbedoelde „tusschentoestand” te beschouwen is. In de waarde van F van vergelijking (10) zullen dan de daarbij behoorende potentiële energie en entropie, althans de daarbij behoorende constanten, dienen op te treden.

Het zij nogmaals herhaald, dat wij geenszins bedoelen te zeggen, dat in de genoemde reactie, of welke andere ook, het verloop nu juist zóó moet zijn als wij schetsten. Wij wilden slechts doen uitkomen, vooreerst, dat er noodzakelijk uit de waarde voor k volgt, dat „tusschentoestanden” een rol spelen, vervolgens, dat die tusschentoestanden van velerlei aard kunnen zijn, en in de eene reactie geheel anders kunnen zijn dan in de andere. Een algemeen geldige splitsing der reactiewarmte van reacties, waarbij geen tusschenproducten optreden, in twee deelen, zooals zij in den laatsten tijd door TRAUTZ is beproefd, zal dus waarschijnlijk niet te vinden zijn. Nog minder kans is er, thans reeds te beslissen, of er behalve de door den „tusschentoestand” bepaalde grootheden nog een algemeene temperatuurfunctie, zooals bijv. $1/2RT \ln T$ in F voorkomt¹⁾. Alleen een verdere ontwikkeling der kinetische theorie en een nauwkeurige analyse van het experimenteele materiaal aan de hand van zulk een theorie, kan hier verder voeren.

§ 5. Wij moeten thans terugkomen op het slot van § 2. Wij hebben daar gezegd, dat in onze onderstellingen omtrent F_1 en F_2 meer opgesloten ligt, dan door de daar genoemde feiten bewezen kon

¹⁾ Zie de verhandelingen van TRAUTZ Zschr. f. phys. Ch. 64 e. v. en de daarop verschenen kritiek van SACKUR Zeitsch. f. Elektroch. 15 (1909).

worden. Immers deze bewijzen, dat F alleen kan afhangen van bij de reactie constante grootheden. Denken wij ons nu een reactie in verdunnen gastoestand, waarbij het totale aantal moleculen verandert, dan veranderen gedurende de reactie de concentraties, de druk en het spec. volume. Deze grootheden kunnen dus in dit geval in F niet voorkomen. Maar verreweg het belangrijkste gedeelte van het feitenmateriaal omtrent de wet der massawerking heeft betrekking op reacties in verdunde oplossingen, en gedurende die reacties verandert de druk niet. Willen wij onze onderstelling, dat F niet van den druk afhangt voor deze reacties met het experiment vergelijken, dan moeten wij den invloed van den druk op de reactiesnelheid nagaan. Daarbij dienen wij echter een omstandigheid in aanmerking te nemen, waarover wij in het voorgaande nog niet opzettelijk behoefden te spreken; den invloed van katalysatoren¹⁾ en wel, omdat in het algemeen de mogelijkheid bestaat, dat het oplosmiddel zelf als katalysator werkt, d. w. z. dat het oplosmiddel aan de „gunstige” botsingen deelneemt, en daarbij voor de uitwisseling der opgenomen resp. ontwikkelde warmte zorg draagt. We zullen dus de mogelijkheid in het oog moeten houden, dat de aanwezigheid van het oplosmiddel, of van andere opgeloste stoffen, wier hoeveelheid onveranderd blijft (katalysatoren), toch van grooten invloed op de reactiesnelheid is. Al naarmate die invloed in dezen zin al of niet bestaat, zal de thermodynamische potentiaal dier stoffen bij de andere thermodynamische potentialen in verg. (6) al of niet moeten worden opgeteld.

Denken wij nu eerst het geval, dat aan de voor de reactie gunstige botsingen noch het oplosmiddel, noch een katalysator deelneemt, dan zullen wij in verg. (6) onder het Σ teeken de μ'_1 van de verschillende reageerende stoffen moeten sommeeren, terwijl F volgens onze onderstellingen alleen van de temperatuur en van voor de verschillende stoffen karakteristieke grootheden afhankelijk is. Derhalve is

$$\frac{dk}{dp} = \frac{1}{RT} \frac{\Sigma d\mu'_1}{dp}$$

of daar volgens verg. (5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu'_1}{\partial p} &= \frac{\partial \mu}{\partial p} \\ \frac{\partial k}{\partial p} &= \frac{1}{RT} \left(\frac{\partial \Sigma \mu'_1}{\partial p} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (11) \end{aligned}$$

¹⁾ We bedoelen, zooals trouwens uit den tekst blijkt, homogene katalyse. Ook elders in deze mededeeling hebben wij afgezien van heterogene katalyse, speciaal bij de in § 2 besproken gasreacties, waarvan wij aannemen, dat zij in de homogene phase verlopen, daarbij in 't midden latende, of zulke reacties inderdaad voorkomen, dan wel dat elke gasreactie een geval van heterogene katalyse voorstelt.

Nu geldt voor een mengsel van n componenten, waarvan resp. n_1, n_2, \dots, n_n gram moleculen aanwezig zijn

$$d\varepsilon = Tdn_1 - pdv + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2 + \dots + \mu_n dn_n$$

waar μ de moleculaire thermodynamische potentiaal is.

Of

$$d\varepsilon = -\mu dT + v dp + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2 + \dots + \mu_n dn_n$$

en dus

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial p}\right)_{T, n_1, n_2, \dots, n_n} = \left(\frac{\partial v}{\partial n_1}\right)_{p, T, n_2, \dots, n_n}$$

waardoor verg. (11) overgaat in

$$RT \frac{d\ln k}{dp} = \sum \left(\frac{\partial v}{\partial n_i}\right)_{p, T, n_1, n_2, \dots, n_i, n_m, \dots, n_n} = \left(\frac{\partial v}{\partial n_1}\right)_{p, T, n_2, \dots, n_n} + \left(\frac{\partial v}{\partial n_2}\right)_{p, T, n_1, n_3, \dots, n_n} + \text{enz.} \quad (12)$$

Om dus de verandering van de reactiesnelheid met den druk na te gaan, dient men voor elke stof van het verdwijnende stelsel (resp. het zich vormende stelsel) de volumeverandering te bepalen, die optreedt, wanneer we één gram molecuul toevoegen aan het geheele systeem (reageerende stoffen, reactieproducten, oplosmiddel), terwijl de hoeveelheid van dit laatste zoo groot wordt gedacht, dat de concentraties daardoor niet veranderen. De som van deze veranderingen

geeft $\frac{d\ln k}{dp}$.

Het is duidelijk, dat het een zeer hooge uitzondering zal zijn, dat één der grootheden $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)$ negatief wordt. Immers dit zou beteekenen, dat er een zoo groote contractie was, dat het mengsel na de menging kleiner volume inneemt dan het oplosmiddel alléén. Toch mag het a priori niet voor onmogelijk worden gehouden; en bij enkele waterige oplossingen schijnt zelfs een negatieve waarden van $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)$

voor te komen. Voor een negatieve waarde van $\frac{d\ln k}{dp}$ is echter noodig,

dat de som van $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)$ voor alle stoffen van het systeem negatief wordt, en dit is natuurlijk nog minder waarschijnlijk. Veilig mag derhalve worden aangenomen, dat een negatieve waarde van $\frac{d\ln k}{dp}$, in het tot

nu toe beschouwde geval niet zal voorkomen. Wanneer het oplosmiddel aan de reactie deelneemt (in den boven bedoelden zin, dat

alleen die botsingen gunstige zijn, waaraan ook het oplosmiddel deelneemt, dus zonder dat zijn hoeveelheid bij de reactie verandert) zal onder het Σ teeken in onze vergelijking ook de thermodynamische potentiaal van het oplosmiddel moeten worden opgenomen; in verg. (12) zal dus rechts nog een term $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)$ meer optreden, die op het oplosmiddel betrekking heeft. Daardoor zal aan onze conclusie omtrent het teeken van $\frac{dlk}{dp}$ niet licht iets veranderen. Dit wordt anders, wanneer ook een katalysator een rol speelt. Denken wij ons bijv. de H-ionen van een toegevoegd zuur als katalysator werkzaam, dan zal de verandering van den thermodynamischen potentiaal dier H-Ionen bij verandering van den druk niet voorgesteld worden door een term als $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)$, omdat daarbij niet rekenschap is gehouden met de mogelijke wijziging der dissociatie door de drukverhooging, noch met het optreden van hydrataionen. Het feit, dat ROTHMUND bij de inversie van rietsuiker onder invloed van HCl een negatieve waarde van $\frac{dlk}{dp}$ vond, behoeft dus niet in strijd te zijn met verg. (2) en de daaruit afgeleide verg. (12). In de weinige andere ons bekende gevallen, waar de drukinvloed op de reactiesnelheid is nagegaan, vindt men dan ook een positieve waarde, maar dit experimenteele materiaal is zeker nog te gering om een conclusie omtrent verg. (2) te rechtvaardigen. Vollediger feitenkennis, liefst ten opzichte van reacties, waar de laatst bedoelde complicaties niet optreden, zou wellicht in staat stellen te beslissen over de onderstellingen, die tot verg. (2) leiden.

Andere aan de ervaring te toetsen gevolgen van verg. (2) zal men vinden bij de geconcentreerde oplossingen. Want het is duidelijk, dat dan de waarden μ' niet meer als onafhankelijk van de concentraties mogen beschouwd worden m. a. w. dat de k_1 en k_2 niet meer constant kunnen zijn, zoodat zich afwijkingen van de wet der massawerking voordoen gelijk dan ook inderdaad bijv. bij de inversie van rietsuiker gevonden is. Wij hopen bij een volgende gelegenheid op dit punt terug te komen.

§ 6. Hier willen wij nog slechts eenige algemeene opmerkingen maken, waartoe het bovenstaande aanleiding geeft. Immers al leggen wij er den vollen nadruk op, dat wij omtrent den aard van de voor elke reactie geldige „tusschentoestanden” nog geheel in het gebied der gissingen verkeeren, dat zulke „tusschen-toestanden”

voor elke reactie¹⁾ wat haar snelheid betreft een reële beteekenis moeten bezitten, achten wij door de overwegingen van § 4 bewezen. En wij meenen ten gevolge daarvan, mede in verband met de andere beschouwingen, die wij in deze mededeeling hebben gegeven, in staat te zijn tot een poging om een meer algemeene en overzichtelijke classificatie te geven van het begrip katalyse en aanverwante verschijnselen, dan tot nog toe mogelijk was. Men zal daarbij — gelijk reeds VAN 'T HOFF in zijn Vorlesungen Heft I p. 210 vlg. doet — streng dienen te onderscheiden tusschen invloeden, die alleen op de snelheid werken, de eigenlijke katalysatoren, en „evenwichtsverschuivers“. Wij onderscheiden derhalve de volgende gevallen:

1°. Een reactie, die tusschen de zuivere stoffen niet of langzaam verloopt, wordt ingeleid of versneld door een in kleine hoeveelheid aanwezige en niet aan de reactie deelnemende stof of een geringe hoeveelheid vreemde energie. Het zich instellende evenwicht is echter onafhankelijk van den aard van den katalysator. Men denke bijv. aan het evenwicht acetaldehyde, paraldehyde, metaldehyde of aan de omzetting van knalgas. In elk dezer gevallen heeft men ongetwijfeld te doen met vertragsingsverschijnselen, valsehe evenwichten; de toestand zonder katalysator is wel een lokaal maximum van entropie bij gegeven energie en volume, maar geen absoluut maximum; de katalysator verandert niets aan de specifieke energie of entropie der stoffen, maar stelt deze slechts in staat door verandering der concentratie het absolute entropiemaximum te bereiken; hij is dus vergelijkbaar met een entkristal in een onderkoelde vloeistof. Maar door het gezegde in § 4 kunnen wij ons die werking eenigszins verduidelijken. Die werking bestaat in het scheppen van een tusschen-toestand, of zoo deze reeds aanwezig was in het veranderen van de potentieele energie daarvan, waardoor het energieverval, dat de snelheid bepaalt, wordt vergroot. Verschillende katalysatoren werken in dit opzicht verschillend en hebben dus ook een andere snelheid ten gevolge.

2°. Een stof, die in nusterst geringe hoeveelheid wordt toegevoegd, verandert niet alleen de reactiesnelheid, maar verschuift ook het evenwicht. Zulk een invloed²⁾ zou zich voordoen wanneer de specifieke

¹⁾ Misschien zal men alleen zuivere dissociaties bijv. $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$ moeten uitzonderen.

²⁾ Wij willen de vraag onbeslist laten of de als zoodanig in de literatuur geciteerde gevallen niet inderdaad onder 3°. gerangschikt moeten worden, maar meenen deze mogelijkheid in elk geval volledigheidshalve te moeten opnemen, omdat de overwegingen bij VAN 'T HOFF l.c. p. 211, die trouwens blijkbaar alleen voor heterogene katalyse bedoeld zijn, o. i. niet aantonen, dat het geval toegepast op homogene katalyse in strijd zou zijn met de tweede hoofdwet.

entropie van de deelen van het reactiemengsel door den katalysator veranderd zou worden, maar niet de specifieke energie. In verdunden gastoestand zou de wederkeerige entropie van het systeem katalysator + reactiemengsel een andere zijn dan het paradox van GIBBS aangeeft, terwijl, als gewoonlijk, in verdunden gastoestand geen wederkeerige energie zou bestaan. Men zou dan ter verklaring een verandering van de chemische volumina („kritische Räume" van BOLTZMANN) der stoffen van het reactiemengsel door den katalysator moeten aannemen. Natuurlijk zal ook hier een veranderde tusschentoestand optreden, vandaar dat de nieuwe evenwichtstoestand met een andere snelheid bereikt zal worden.

3°. Door het bijbrengen van een niet aan de reactie deelnemende stof wordt ook de spec. energie der reageerende stoffen veranderd, hetzij doordat alleen de onderlinge attractie in het mengsel een andere wordt — nieuwe a 's treden in de toestandsvergelijking op — hetzij doordat sterker werkende oorzaken optreden (associatie van het oplosmiddel met een der reageerende stoffen). Natuurlijk zal ook de reactiesnelheid veranderen in beide gevallen. Tot deze categorie behooren natuurlijk alle „milieu"invloeden (bijv. veranderingen van electrolytische dissociatie bij verandering van oplosmiddel). Er kunnen ook toe behooren de verschuivingen van het evenwicht onder invloed van licht of elektrische ontladingen, bijv. het licht-evenwicht van zwavel in CS_2 , dat zich bij zekere intensiteit van bestraling instelt, en dat weer tot den ouden toestand terugkeert als de oude belichtingstoestand wordt hersteld. Ook hier moet worden aangenomen, dat ten gevolge van de belichting de energie der reageerende stoffen is gewijzigd.¹⁾

4°. De laatstgenoemde gevallen kunnen echter ook alle, of gedeeltelijk, tot een andere categorie behooren. Immers het is mogelijk, dat zij geen werkelijke evenwichten zijn, maar zich tot deze verhouden als het geval der osmotische temperaturen tot dat van werkelijk evenwicht, of m.a.w. dat de gewijzigde toestand steeds gepaard moet gaan met een „energiestroom" een opname van licht of elektrische energie en uitstraling van warmte. De verschuiving zou dan niet gehandhaafd blijven, als men het systeem tusschen absoluut spiegelende wanden in den nieuwen toestand kon opsluiten en dus denzelfden stralingstoestand kon handhaven, maar zonder opname van nieuwe energie. Zulk een systeem zou niet meer aan de wetten der thermodynamica beantwoorden, ook wanneer men daarin de thermodynamica der straling opnam, op dezelfde wijze als wij vroeger vonden, dat voor

¹⁾ Verg. SMITS, Deze Verslagen XVIII p. 386. Natuurlijk behooren niet tot deze categorie de valsche evenwichten, die door licht of elektrische vonk in den absoluut stabielen toestand worden overgebracht; deze behooren onder 1°.

de osmotische temperatuur de thermodynamische wet van gelijkheid van den thermodynamischen potentiaal niet is vervuld. Of de photochemische en elektrische „evenwichten” tot deze of de voorgaande categorie behooren laat onze experimenteële en theoretische kennis niet toe te beslissen.¹⁾

Physiologie. — De Heer HAMBURGER, doet mede uit naam van de Heeren J. DE HAAN en F. BUBANOVIC een mededeeling: „*Over den invloed van Jodoform, Chloroform en andere in vet oplossende stoffen op de phagocytose.*”²⁾

Sedert een dertigtal jaren reeds wordt Jodoform toegepast bij de behandeling van wonden en bij chronische ontstekingen. Aanvankelijk meende men, dat de gunstige invloed berustte op een antiseptische werking, doch men kwam daarvan terug toen het bleek, dat lagere organismen zich in een Jodiumhoudend milieu welig ontwikkelen.

Toen werden andere hypothesen opgesteld, waarover wij hier niet verder zullen uitweiden.³⁾ In hoofdzaak hebben deze het oog gericht op de afsplitsing van Jodium.

Geen der hypothesen echter heeft algemeene bevrediging geschonken.

Om redenen, waarvan hier de vermelding achterwege kan blijven, hebben wij ons de vraag voorgelegd, of die gunstige werking van Jodoform op plaatselijke infectieuse processen, voor een deel althans, wellicht zou kunnen berusten op een opwekkenden invloed van deze stof op de Phagocytose.

De hierbij gebruikte methode van onderzoek was geheel overeenkomstig aan die, welke ook bij de studie van andere stoffen op de Phagocytose in ons laboratorium was gevolgd.⁴⁾

1) Wij willen er nog op wijzen, dat het soms nog onmogelijk is aan een verschijnsel op het gebied der katalyse een plaats aan te wijzen in deze classificatie. In welk verband bijv. met de hier genoemde gevallen het feit staat, dat de thermodynamische potentiaal van volkomen droog vast NH_4Cl door de toevoeging van het geringste spoortje vocht zoo aanmerkelijk gewijzigd wordt, als blijkt uit den totaal gewijzigden partiëelen dampdruk der NH_4Cl moleculen, laat zich niet wel aanwijzen. Misschien zal dit geval tot 2^o. moeten worden gerekend.

2) Uitvoerige mededeelingen zullen elders verschijnen.

3) Een bespreking hiervan vindt men o.a. in STOKVIS—ZEEHUIZEN's Voordrachten over Geneesmiddelleer. 3e Druk, 1906, Dl. 1, blz. 399 ff.

4) HAMBURGER en HEKMA. Zittingsverslag van 29 Juni 1907; HAMBURGER u. DE HAAN. Biochem. Zeitschr. 24, 470, 1910; Vergel. ook Zittingsverslag van 9 Juni 1910.

I. INVLOED VAN JODOFORM OP DE PHAGOCYTOSE.

Zoo werd dan NaCl-oplossing van 0,9 % geschud met Jodoformpoeder. Van de aldus verkregen verzadigde Jodoformoplossing werden 3 c.M³. gevoegd bij 0,2 c.M³. eener suspensie van paardeleucocyten in NaCl-oplossing 0,9 %.

Daarnaast werd een mengsel bereid van 3 c.M³. Jodoform-vrije NaCl-oplossing en 0,2 c.M³. van dezelfde leukocyten suspensie.

Beide mengsels werden 1½ uur aan zich overgelaten en na toevoeging van koolpartikeltjes, gedurende 10 minuten aan den invloed van 37° blootgesteld, en vervolgens afgekoeld. Eindelijk werden mikroskopische praeparaten vervaardigd en werd onderzocht hoeveel procent van de totale hoeveelheid witte bloedlichaampjes kool hadden opgenomen. Hetzelfde werd gedaan met suspensies, die in plaats van 10 minuten, 20 minuten, 30 minuten, 1 uur en 1½ uur bij 37° met koolpartikeltjes waren samen geweest. Van de vele reeksen van proeven, die genomen werden, laten we hier enkele volgen.

TABEL I.

Invloed van Jodoform op de Phagocytose.

Tijd gedurende welke de phagocyten kooldeeltjes konden opnemen	Procentgehalte der leukocyten, die kool hebben opgenomen.	
	De leucocyten liggen in Na Cl 0,9%	De leucocyten liggen in een verzadigde oplossing van Jodoform in NaCl 0,9% (1 op 100.000) ¹⁾
10 minuten	$\frac{173^2)}{424} \times 100 = 40,8\%$	$\frac{256}{450} \times 100 = 56,8\%$
20 "	$\frac{185}{342} \times 100 = 54$ "	$\frac{205}{496} \times 100 = 61,4$ "
30 "	$\frac{236}{438} \times 100 = 53,8$ "	$\frac{286}{412} \times 100 = 69,4$ "
1 uur	$\frac{304}{520} \times 100 = 58,5$ "	$\frac{356}{511} \times 100 = 69,9$ "
1½ "	$\frac{402}{597} \times 100 = 67,3$ "	$\frac{381}{543} \times 100 = 70,1$ "

Uit deze tabel blijkt, dat na 10 minuten in de zuivere NaCl-oplos-

¹⁾ Zie blz.

²⁾ Dit beteekent, dat van de 424 leucocyten, die geteld werden, 173 kool hadden opgenomen.

sing van 0,9 %_o. 40,8 %_o der leucocyten kool hebben opgenomen, maar in de met Jodoform bedeelde NaCl-oplossing 56,8 %_o.

Na 20 minuten zijn de cijfers resp. 54 %_o en 61,4 %_o. *Het blijkt dus dat door Jodoform de phagocytose in aanzienlijke mate wordt bevorderd.* Na 1½ uur zijn de cijfers 67,3 %_o en 70,1 %_o.

Hieruit volgt dus, dat na dien tijd de omvang der phagocytose ongeveer gelijk geworden is.

Dezelfde verschijnselen werden vroeger waargenomen bij de studie van den invloed van het Calcium op de Phagocytose. Evenals daar,³⁾ mogen wij ook hier concludeeren, dat de invloed van Jodoform berust op een versnelling van de amoëboïde beweging, en *niet* bestaat in een grootere krachtontwikkeling der phagocyten, die zou maken, dat cellen, welke onder normale omstandigheden te zwak zijn om partikeltjes op te nemen, door de aanwezigheid van Jodoform daartoe in staat werden gesteld. Immers ware dit het geval, dan zou in de zuivere NaCl-oplossing de phagocytose aanmerkelijk lager moeten blijven, dan in een Jodoform-houdende NaCl-oplossing. Doch na 1½ uur is zij ongeveer gelijk geworden. Het is dus alleen een kwestie van versnelling.

Evenals vroeger werd ook hier nagegaan, in hoeverre de phagocyten, die ± 18 uur bij wat lage kamertemperatuur aan zich zelven waren overgelaten geweest en daardoor hun phagocytair vermogen grootendeels schenen verloren te hebben, onder den invloed van Jodoform wederom tot het opnemen van kool konden opgewekt worden.

De volgende proef geeft daarop een antwoord.

TABEL II.

Invloed van Jodoform op verlamde phagocyten.

Tijd gedurende welke de phagocyten kooldeeltjes konden opnemen.	Procentgehalte der leukocyten, die kool hebben opgenomen.	De leukocyten zijn overgebracht in een oplossing van Jodoform in NaCl 0,9% _o (1 : 100.000)
½ uur	$\frac{12}{313} \times 100 = 3,8\%$	$\frac{202}{440} \times 100 = 45,9\%$

Men ziet, dat in een NaCl-oplossing van 0,9 %_o het phagocytair vermogen gedaald is tot 3,8 %_o, doch door vervanging van de zuivere NaCl oplossing door eene die Jodoform bevat, wederom stijgt tot 45 %_o.

³⁾ Zittingverslag 9 Juni 1910.

In welke concentratie oefent Jodoform nog een waarneembaren invloed uit?

Om deze vraag te beantwoorden, werden Jodoform-oplossingen van verschillende concentratie bereid. Tot dit doel werd uitgegaan van een verzadigde Jodoform-oplossing¹⁾ en deze verdund met de 5-, 10-, 20- en 50-voudige hoeveelheid NaCl-oplossing.

In die oplossingen werd op de gewone wijze de graad der phagocytose bepaald. Slechts zij vermeld, dat aan de witte bloedcellen 35 minuten werden toegestaan om kool op te nemen.

De volgende tabel III zal zonder nadere verklaring duidelijk zijn.

T A B E L III.

Concentratie der Jodoformoplossing, waarbij de invloed op de phagocytose nog waarneembaar is.

Vloeistoffen.	Procentgehalte der leukocyten, die kool hebben opgenomen.
NaCl 0,9% ²⁾	$\frac{171}{388} \times 100 = 44 \%$
	$\frac{151}{345} \times 100 = 43,7 \%$
1 Jodoform op 100,000 NaCl 0,9%	$\frac{221}{374} \times 100 = 58,6 \%$
	$\frac{226}{377} \times 100 = 59,9 \%$
1 Jodoform op 500,000 NaCl 0,9%	$\frac{228}{371} \times 100 = 61,4 \%$
	$\frac{21}{205} \times 100 = 10,2 \%$?
1 Jodoform op 2,000,000 NaCl 0,9%	$\frac{208}{398} \times 100 = 52,2 \%$
	$\frac{231}{445} \times 100 = 51,9 \%$
1 Jodoform op 5,000,000 NaCl 0,9% of 1 gr. molecuul CHI ₃ op 1.900,000 Liter NaCl 0,9%	$\frac{292}{621} \times 100 = 46,9 \%$
	$\frac{176}{372} \times 100 = 47,3 \%$

¹⁾ Een verzadigde oplossing van Jodoform in NaCl-opl. 0,9% bevat circa 0,001% CHI₃. Wij komen hierop nog terug op blz. 899.

²⁾ Wij geven hier parallelproeven, om een indruk te geven van de nauwkeurigheid der methode van onderzoek. Voor de andere experimenten zijn gelijk van zelf spreekt, ook steeds parallelproeven verricht: doch hiervan is meermalen eenvoudigheidshalve het gemiddelde opgegeven.

Deze tabel leert, dat terwijl in NaCl van 0,9 % de phagocytose 44 % bedroeg, deze in de verzadigde Jodoform-oplossing (0.001 % Jodoform of 1 op 100.000) tot 59 % geklommen is. Dit is alvast een bevestiging van de resultaten, in de vorige tabellen vermeld.

Doeh ook in de 20 maal zwakkere Jodoform-oplossing is nog een aanmerkelijke stijging zichtbaar; ja zelfs is deze nog te onderkennen in de 50-voudige verdunning. *In deze oplossing kan men het Jodoform met het reukorgaan niet meer waarnemen.*

Deze uitkomsten werden geheel bevestigd door proeven met leucocyten-suspensies, die gedurende ongeveer 18 uur aan zich zelf waren overgelaten geweest. Dit leert ons de volgende tabel.

T A B E L. IV.

Concentratie der Jodoformoplossing, waarbij de invloed op de phagocytose nog waarneembaar is.
De gebruikte leukocyten hadden + 18 uren in een NaCl-opl. van 0,9 % gelegen.

Vloeistoffen.	Procentgehalte der leucocyten, die kool hebben opgenomen.
Na Cl 0,9%	$\frac{55}{485} \times 100 = 11,3\%$
1 Jodoform op 100.000 Na Cl 0,9%(verzadigde Jodof.-opl.)	$\frac{231}{522} \times 100 = 44,2$ „
1 Jodoform op 500.000 Na Cl 0,9%	$\frac{293}{709} \times 100 = 41,3$
1 Jodoform op 1000.000 Na Cl 0,9%	$\frac{85}{488} \times 100 = 17,4$ „?
1 Jodoform op 2000.000 Na Cl 0,9%	$\frac{225}{480} \times 100 = 46,8$ „
1 Jodof. op 500.000 Na Cl 0,9% (verzad. Jodof.-opl., 50 maal verdund)	$\frac{156}{488} \times 100 = 31,9$ „

Men ziet, dat in een NaCl-oplossing van 0,9 % de phagocytose 11,3 % bedraagt; in de verzadigde Jodoformoplossing 44,2 % en in de 50-voudig verdunde nog 31,9 %.

Hieruit blijkt dus, dat in die sterke verdunning het Jodoform nog in staat is om de phagocyten uit hun geringe beweeglijkheid weer op te wekken.

Hoeveel Jodoform bevindt zich in deze vloeistof?

Gegevens omtrent de oplosbaarheid van Jodoform in water of NaCl-oplossing zijn, voor zoover ons bekend, niet voorhanden. Daarom waren wij genoodzaakt zelf eenige proeven te verrichten. Dit geschiedde volgens 2 methoden.

In de eerste plaats werd de heldere goed gefiltreerde Jodoformoplossing geruimen tijd aan het licht blootgesteld, tot dat geen Jodoform-reuk meer was waar te nemen en vervolgens met sterk salpeterzuur behandeld. Dan werd de aldus verkregen vloeistof met Chloroform geschud, waardoor het Jodium in deze vloeistof overging en haar rood kleurde. Daarnaast werden NaI-oplossingen van bekende concentratie met HNO_3 en daarna met Chloroform behandeld.

Eindelijk werd dan nagegaan, welke concentratie van NaI-oplossing dezelfde kleurintensiteit aan het Chloroform gaf als de onderzochte Jodoformoplossing.

Uit deze experimenten bleek, dat in de verzadigde oplossing van Jodoform in NaCl 0.9%, 0.001% Jodoform aanwezig was.

De andere methode, die daarin bestond, dat het onder den invloed van HNO_3 nitgescheiden Jodoform getitreed werd met behulp van $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ en kaliumpermanganaat, leverde een nagenoeg gelijkloidend resultaat: een concentratie van 0.00109%.

Zoodat we kunnen zeggen, dat het Jodoform nog in een concentratie van 1 op 5.000.000 of anders gezegd: in een oplossing van 1 grammolecuul CHI_3 op 4.905000 liter water in aanzienlijke mate versnellend werkt op de Phagocytose.

De proeven in tabel IV laten geen twijfel, dat men de verduunning nog verder kan doorvoeren.

Waardoor bewerkt Jodoform versnelling der Phagocytose?

In de eerste plaats stelden wij ons de vraag, of het wellicht sporen van Jodium waren, die, al was het dan ook in ionentoestand, de prikkelende werking uitoefenden. Daartegen pleitten reeds vroegere experimenten over de vergelijkende werking van NaCl, NaBr en NaI, waaruit gebleken was, dat het I-ion de Phagocytose in aanzienlijke mate verzwakt¹⁾.

In de tweede plaats pleitten er tegen proeven met een Jodoform-oplossing, die korten tijd aan het licht was blootgesteld geweest. Vrij I was daarin niet aanwezig, maar wel I in ionenvorm, waarschijnlijk als HI. Immers I als zoodanig was niet zonder meer met behulp van Chloroform uit te schudden: wel daarentegen, wanneer tevens HNO_3 was toegevoegd.

Welnu, deze door licht beschenen Jodoform-oplossing was niet alleen niet in staat om de Phagocytose te bevorderen, doch werkte haar krachtig tegen.

¹⁾ HAMBURGER en DE HAAN Biochem. Zeitschrift 24, 304, 1910.

Dit moge blijken uit de volgende tabel:

TABEL V.

Jodoform oplossing, waarvan de samenstelling is gewijzigd door den invloed van diffuus daglicht.

Tijd, gedurende welke de phagocyten kooldeeltjes konden opnemen.	Procentgehalte der leukocyten, die kooldeeltjes hebben opgenomen.	
	De leukocyten liggen in NaCl 0,9 ^o / _o	De leukocyten liggen in een verzadigde oplossing van Jodoform
10 minuten	$\frac{115}{430} \times 100 = 26,7\%$	$\frac{73}{430} \times 100 = 15,4\%$
20 "	$\frac{121}{474} \times 100 = 27\%$	$\frac{128}{512} \times 100 = 25\%$
30 "	$\frac{189}{465} \times 100 = 40,6\%$	$\frac{128}{512} \times 100 = 34,7\%$
1 uur	$\frac{287}{465} \times 100 = 61,7\%$	$\frac{163}{447} \times 100 = 36,4\%$
1 1/2 "	$\frac{329}{578} \times 100 = 56,9\%$	$\frac{125}{314} \times 100 = 39,8\%$

Men ziet, dat in de Jodoform-houdende NaCl-oplossing de Phagocytose steeds geringer blijft, dan in de zuivere NaCl-oplossing. Zoo neemt men b.v. waar, dat na 10 minuten de Phagocytose in een zuivere NaCl-solutie 26,7% bedraagt, doch in een Jodoform houdende NaCl-oplossing slechts 15,4%; na 1 1/2 uur zijn deze getallen resp. 56,9% en 39,8%.

De volgende proef, waarin naast (oude) Jodoform-oplossing, die aan het licht blootgesteld was geweest, ook nog een versehe was genomen, bevestigt het resultaat.

Een verdere bevestiging ondervond onze voorstelling door een proef, waarbij nagegaan werd, in hoeverre in een 18 uur oude leukocyten-suspensie, de Phagocytose door de belichte Jodoform-oplossing weder kon worden opgewekt. Bij diezelfde proef werd ook nog de invloed der versehe Jodoform-oplossing opgenomen en ook de invloed van Chloorealcium.

Tevens werd daarbij nog de invloed onderzocht van een NaCl oplossing, die een geringere hoeveelheid van het oude Jodoform bevatte, en die verkregen was door de oude verzadigde oplossing van Jodoform te verdunnen met de 2-voudige hoeveelheid van een

T A B E L. VI.

Vergelijking van versche en oude (een weinig door het licht ontlede) Jodoform-oplossing.

Tijd gedurende welke de leucocyten kooldeeltjes konden opnemen.	Procentgehalte der leucocyten, die kooldeeltjes hebben opgenomen.	
	De leucocyten liggen in NaCl 0,90%	De leucocyten liggen in een verzadigde oplossing van Jodoform
10 minuten	$\frac{108}{407} \times 100 = 26,5\%$	$\frac{126}{362} \times 100 = 34,8\%$
20 "	$\frac{129}{365} \times 100 = 35,3\%$	$\frac{219}{442} \times 100 = 49,7\%$
30 "	$\frac{268}{732} \times 100 = 36,6\%$	$\frac{444}{845} \times 100 = 52,5\%$
		$\frac{91}{342} \times 100 = 26,2\%$ (oude Jodoformopl.)
1 uur	$\frac{230}{424} \times 100 = 54,2\%$	$\frac{278}{498} \times 100 = 55,8\%$
1½ "	$\frac{248}{488} \times 100 = 50,8\%$	$\frac{214}{373} \times 100 = 57,3\%$

NaCl-oplossing. Tot deze proef werd besloten op grond van de overweging, dat indien de oude Jodoform-oplossing een schadelijke stof bevatte, deze zich in geringe mate zou doen gevoelen, indien die oplossing verdund werd. Onder die omstandigheden zou de gunstige werking van het ook aanwezige ontlede Jodoform wat meer naar voren kunnen treden.

Men ziet uit deze proef: (zie tabel VII,

1°. dat de Phagoctose in de 18 uur oude leucocytensuspensie gedaald is tot ongeveer 4%;

2°. dat de versche Jodoform-oplossing het phagoctair vermogen weer opheft tot 15,6%, maar dat:

3°. in de oude Jodoform-oplossing de Phagoctose *nul* bedraagt, terwijl deze in een oplossing, waarin slechts *een derde* van de oude Jodoform oplossing gevonden wordt, het phagoctair vermogen is geklommen tot 12,7%.

Uit deze experimenten mag men het besluit trekken, *dat niet het I-ion doch de Jodoform als zoodanig de oorzaak is van de verhooying van het phagoctair vermogen.*

TABEL VII.

Invloud van versche en oude Jodoform oplossing en van CaCl_2 op de bijna verlamde leukocyten.

Vloclistoffen	Procentgehalte der leukocyten, die kool hebben opgenomen.
NaCl 0,9%	$\frac{49}{461} \times 100 = 4,1\%$
Versche verzadigde oplossing van Jodoform in NaCl 0,9% (0,001% CHJ_3)	$\frac{153}{976} \times 100 = 15,6\%$
Oude verzadigde oplossing van Jodoform in NaCl 0,9%	$\frac{0}{624} \times 100 = 0\%$
1 vol. oude verzadigde oplossing van Jodoform in NaCl 0,9% en 2 vol. NaCl 0,9% (0,0003% CHJ_3)	$\frac{76}{594} \times 100 = 12,7\%$
NaCl oplossing 0,9% + 0,05% CaCl_2	$\frac{83}{505} \times 100 = 16,4\%$

En zoo komen wij dan nu voor de vraag te staan: op welke wijze laat zich de gunstige werking van het Jodoform op de snelheid van het phagocytair proces verklaren?

Het ligt voor de hand, hier te denken aan een *vermindering van oppervlaktetenspanning*, waardoor de amoëboïde bewegingen van het protoplasma gemakkelijker tot stand komen.

De vermindering van oppervlaktetenspanning laat zich niet moeilijk begrijpen, wanneer men bedenkt, dat Jodoform in vettige stoffen oplosbaar is en zooals uit tal van ervaringen nu wel mag aangenomen worden, de uitwendige begrenzing van cellen uit een vettige substantie bestaat, een z. g. lipoïede membraan vormt.

Het ligt nu verder voor de hand, dat zulk een lipoïed-membraan na opneming van Jodoform lossen zal worden: m. a. w. dat de oppervlaktetenspanning er door verminderen zal en daardoor de amoëboïde beweging vergemakkelijkt zal worden.

Was deze voorstelling juist, dan liet zich verwachten, dat ook andere stoffen, die in vet oplosbaar zijn, als: Chloroform, Benzol, Kampfer, hetzelfde effect op de Phagocytose zouden hebben.

Gelijk uit de thans volgende proeven zal blijken, was dit inderdaad het geval.

2. INVLOED VAN CHLOROFORM OP DE PHAGOCYTOSE.

Het was te verwachten, dat Chloroform in eenigszins hooge concentratie, behalve een eventueel versnellenden invloed door verweking der uitwendige lipoïede begrenzing, ook nog een tegengestelden, verlamrenden invloed zou uitoefenen en wèl op het protoplasma der phagocyten.

Daarom moesten verschillende verdunningen beproefd worden.

Weldra bleek, dat verdunningen 1 op 2000, 1 op 6000 en ook 1 op 10000 de Phagocytose benadeelden. De volgende tabel VIII bevat eenige proeven met zwakkere verdunning.

T A B E L VIII.

Concentratie der chloroformoplossing, waarin de invloed op de phagocyten waarneembaar is.

Vloeistoffen.	Procentgehalte der leucocyten, die kool hebben opgenomen.
Na Cl 0,9	$\frac{174}{428} \times 100 = 40,6\%$
	$\frac{238}{562} \times 100 = 41,9\%$
chloroform 1 : 20.000	$\frac{244}{480} \times 100 = 50,8\%$
	$\frac{225}{451} \times 100 = 49,8\%$
chloroform 1 : 100.000	$\frac{254}{519} \times 100 = 60,6\%$
	$\frac{382}{455} \times 100 = 60,1\%$
chloroform 1 : 500.000	$\frac{332}{582} \times 100 = 57\%$
	$\frac{219}{370} \times 100 = 59,1\%$
chloroform 1 : 5000.000	$\frac{379}{868} \times 100 = 43,6\%$
	$\frac{298}{661} \times 100 = 45\%$

Uit deze tabel blijkt, dat Chloroform 1 op 20.000 het phagocytair vermogen doet stijgen van 40,9% tot 50,4%, verder, dat door

Chloroform 1 op 100,000 de Phagocytose een aanzienlijke vermeerdering ondergaat; daar stijgt zij tot 60,5 %.

Blijkbaar doet zich in de Chloroform-oplossing 1 op 20,000 ook nog de genoemde *verlammende* factor gelden.

Door een verdunning 1 op 500,000 blijft de gunstige werking nog in ongeveer dezelfde mate bestaan als bij 1 op 100,000 en ten slotte in een oplossing van 1 Chloroform op 5.000,000 NaCl-oplossing is de gunstige werking nog weliswaar zichtbaar, doch zwak.

Het volgende experiment, genomen alleen met oplossingen van Chloroform van 1 op 500,000, doch nu met *verschillende* aanrakings-tijden van kool met leukocyten-suspensies, brengt van het voorgaande een bevestiging.

T A B E L IX.

Invloed van Chloroform op de Phagocytose.

Tijd gedu- rendewelken de phagocy- ten kooldeel- tjes konden opnemen.	Procentgehalte der leukocyten, die kool hebben opgenomen.	De leukocyten liggen in NaCl 0,9 %.	De leukocyten liggen in een oplossing van 1 vol. chlorof op 500,000 NaCl 0,9 %.
10 minuten	$\frac{64}{335} \times 100 = 19$ %		$\frac{100}{386} \times 100 = 25,9$ %
20 "	$\frac{166}{465} \times 100 = 35,7$ "		$\frac{180}{457} \times 100 = 39,3$ "
30 "	$\frac{215}{535} \times 100 = 40,2$ "		$\frac{269}{521} \times 100 = 51,6$ "
45 "	$\frac{330}{722} \times 100 = 45,6$ "		$\frac{106}{385} \times 100 = 27,5$ "
1 uur	$\frac{345}{639} \times 100 = 53,9$ "		$\frac{323}{563} \times 100 = 57,3$ "

Gelijk men ziet, is de door het Chloroform bewerkte versnelling der Phagocytose reeds na 30 minuten in haar maximale waarde tot uiting gekomen. Na een uur bestaat ze nog, doch is zwak. Het met een vraagteken aangegeven cijfer 27,5 moet aan een fout in de concentratie der oplossing toegeschreven worden. Andere praeparaten toch van dezelfde suspensie gaven bij 45 minuten inwerking eveneens een veel te laag cijfer. Aan een fout in de telling kan dus niet gedacht worden.

We komen thans weer tot de vraag, in hoeverre de leucocyten,

die des nachts in een oplossing van NaCl van 0,9 % hebben gestaan en daardoor hun phagocytair vermogen geheel of gedeeltelijk hebben verloren, door toevoeging van Chloroform wederom kunnen worden opgewekt.

T A B E L X.

Invloed van Chloroform op de Phagocytose.

De leukocyten hebben \pm 18 uur vertoefd in een NaCl-oplossing van 0,9%.

Tijd gedurende welken de phagocyten kooldeeltjes konden opnemen.	Vloeistoffen.	Procentgehalte der leukocyten, die kooldeeltjes hebben opgenomen.
15 minuten	Na Cl opl. 0,9%	$\frac{45}{514} \times 100 = 8,7\%$
	1 vol. Chlorof. op 500.000 Na Cl opl. 0,9%	$\frac{60}{540} \times 100 = 11,1\%$
30 "	Na Cl opl. 0,9%	$\frac{108}{538} \times 100 = 20\%$
	1 Chlorof. op 500.000 Na Cl opl. 0,9%	$\frac{213}{620} \times 100 = 34,2\%$
	Na Cl 0,9% + 0,001% Jodof.	$\frac{144}{460} \times 100 = 31,4\%$
	Na Cl 0,9% + 0,05% CaCl ₂	$\frac{117}{252} \times 100 = 46,4\%$
45 "	Na Cl 0,9%	$\frac{179}{609} \times 100 = 29,3\%$
	1 Chlorof. op 500.000 NaCl oplossing van 0,9%	$\frac{57}{228} \times 100 = 25\%$

In deze proevenreeks is nog opgenomen een experiment met Jodoform en met CaCl₂, om te zien in hoeverre het opwekkend vermogen van die beide stoffen met die van Chloroform overeenkomen.

De tabel leert, dat wanneer men phagocyten, die gedurende een nacht bij lage kamertemperatuur aan zich zelf zijn overgelaten geweest, 1½ uur bloot stelt aan de inwerking van Chloroform in de concentratie 1 op 500,000 en vervolgens de suspensie gedurende 15 min. bij 37° met kool in aanraking laat, de Phagocytose stijgt van 8,7 tot 11,1 %. *Gunst men de suspensies meer tijd, n. l. 30 min., om kool op te nemen, dan doet de gunstige invloed van Chloroform zich krachtiger gelden, het percentage stijgt namelijk van 20 tot 34,2 %.* Nadeelig echter blijkt de Chloroform te werken bij de aanraking der phagocyten met kool gedurende 45 minuten; misschien ondergaan de toch reeds verzwakte cellen gedurende die langere verwarming bij 37° met

Chloroform nadeelige gevolgen. Voor deze veronderstelling bestaat veel grond, omdat men ziet, dat een voortzetting van de verwarming bij 37° , zelfs in een zuivere NaCl-oplossing een nadeeligen invloed gaat uitoefenen.

Gelijk men uit de tabel waarneemt, heeft Jodoform een ongeveer even sterke opwekking uitgeoefend als Chloroform.

In veel aanzienlijker mate echter dan deze beide, wekt hier het Calcium de phagocyten op.

3. INVLOED VAN BENZOL OP DE PHAGOCYTOSE.

Van Benzol werden de volgende concentraties in NaCl-oplossing van 0,9% vervaardigd:

1 Vol. op 5000, 1 op 10,000, 1 op 500,000 en 1 op 5,000,000. De vloeistof werkte gedurende een uur op de suspensies in; daarna werden zij gedurende 30 min. bij 37° . in aanraking gelaten met kool.

TABEL XI.

Concentratie der Benzoloplossing, waarin de invloed op de Phagocytose nog waarneembaar is.

Vloeistoffen.	Procentgehalte van de leukocyten, die kool hebben opgenomen.
NaCl 0,9%	$\frac{266}{642} \times 100 = 41,4\%$
	$\frac{164}{405} \times 100 = 40,5\%$
Benzol 1:5000	$\frac{349}{694} \times 100 = 50,2\%$
	$\frac{282}{576} \times 100 = 48,9\%$
Benzol 1:100,000	$\frac{305}{602} \times 100 = 50,6\%$
	$\frac{373}{758} \times 100 = 49,2\%$
Benzol 1:500,000	$\frac{276}{478} \times 100 = 57,7\%$
	$\frac{282}{466} \times 100 = 60,5\%$
Benzol 1:5000000	$\frac{356}{807} \times 100 = 44,1\%$
	$\frac{168}{412} \times 100 = 40,7\%$

Deze tabel laat geen twijfel, of ook Benzol verlevendigt de Phagocytose. Dit is zichtbaar bij een verdunning van 1 op 5000, doch de invloed blijkt veel grooter te zijn bij een verdunning van 1 op 500,000.

De oorzaak van het verschil zal wel weer moeten gezocht worden in den narcotiseerenden invloed van het benzol. Trouwens in een verdunning 1 op 5000 zag OVERTON kikvorscharven in narcose overgaan.

Deze proeven werden herhaald met leucocyten die gedurende een nacht in NaCl-oplossing 0,9% hadden vertoefd.

T A B E L XII.

Invloed van Benzol op de Phagocytose bij leukocyten, die \pm 18 uren in NaCl-oplossing van 0,9% vertoefd hebben.

Vloeistoffen.	Procentgehalte der leukocyten, die kool hebben opgenomen.
NaCl 0,9%	$\frac{83}{465} \times 100 = 17,8\%$
	$\frac{75}{440} \times 100 = 18,3\%$
Benzol 1:5000	$\frac{106}{257} \times 100 = 29,7\%$
	$\frac{195}{622} \times 100 = 31,3\%$
Benzol 1:100,000	$\frac{141}{495} \times 100 = 28,4\%$
	$\frac{198}{854} \times 100 = 25,2\%$
Benzol 1:500,000	$\frac{447}{449} \times 100 = 32,7\%$
	$\frac{55}{452} \times 100 = 35,5\%$
Benzol 1:5,000,000	$\frac{92}{479} \times 100 = 19,2\%$
	$\frac{46}{222} \times 100 = 20,7\%$
CaCl ₂ 0,05%	$\frac{153}{410} \times 100 = 37,3\%$

Nog duidelijker dan in de vorige tabel neemt men hier de opwekkende werking van het Benzol waar. Het gunstigst is weer 1 op 500,000, maar nog gunstiger werkt CaCl_2 , althans in de aangegeven concentratie.

4. INVLOED VAN KAMFER OP DE PHAGOCYTOSE.

Onderzocht werden een verzadigde oplossing van Kamfer in NaCl 0,9 % en verder verdunningen dier gesatureerde oplossing tot het 5- en 25-voudige. Al deze vloeistoffen rieken nog zeer duidelijk naar de stof.

Na gedurende een uur bij gewone temperatuur met deze vloeistoffen in aanraking te zijn geweest, werden de leucocyten met kool vermengd en zooals gewoonlijk gedurende 30 min. bij 37 % aan zich zelf overgelaten.

De volgende tabel geeft de resultaten van de eerste proeve reeks.

T A B E L. XIII.

Invloed van Kamfer op de Phagocytose.

Vloeistoffen.	Procentgehalte der leucocyten, die kool hebben opgenomen.
Na Cl 0,9%	$\frac{273}{672} \times 100 = 40,6\%$
Verzadigde Kamfer-oplossing in Na Cl 0,9%	$\frac{284}{540} \times 100 = 52,5\%$
Verzadigde Kamfer-oplossing 5 maal verdund	$\frac{278}{550} \times 100 = 50,4\%$
Verzadigde Kamfer-oplossing 25 maal verdund	$\frac{287}{643} \times 100 = 44,6\%$

Hieruit blijkt, dat in een verzadigde oplossing van Kamfer de Phagocytose is toegenomen, evenzoo in de 5- en 25-voudig verdunde vloeistof.

Evenals bij de voorgaande proeven werd ook thans getracht om leucocyten, waarvan het opnemingsvermogen door een 18-urig verblijf in NaCl-oplossing van 0,9 was verminderd, te doen herleven door toevoeging van Kamfer aan de vloeistof.

Uit deze proeven blijkt, dat de verzadigde Kamfer-oplossing het phagocytair vermogen in plaats van verlevendigd, geheel heeft vernietigd. Trouwens het microscopisch beeld leert, dat de roode bloedlichaampjes hun kleurstof hebben verloren en ook, dat uit een aantal witte de inhoud is uitgetreden. Dit is weliswaar niet op te merken

TABEL XIV.

Invloed van Kamfer op de Phagocytose bij leukocyten, die \pm 18 uren in NaCl oplossing 0,9% vertoefd hebben.

Vloeistoffen.	Procentgehalte der leukocyten die kool hebben opgenomen.
NaCl 0,9%	$\frac{38}{321} \times 100 = 11,8^{0,0}$
Verzadigde Kamfer-oplossing	$\frac{0}{285} \times 100 = 0, "$
Verzadigde Kamfer-oplossing, 5 maal verdund.	$\frac{4}{242} \times 100 = 1,7, "$
Verzadigde Kamfer-oplossing, 25 maal verdund.	$\frac{13}{292} \times 100 = 4,5, "$
NaCl 0,9% + 0,05% CaCl ₂	$\frac{132}{308} \times 100 = 42,8, "$

bij de zwakkere Kamfer-oplossingen, maar het is toch niet bezwaarlijk om aan te nemen dat ook daarin de phagocyten hebben geleden en daar dus geen verlevendiging van de Phagocytose werd waargenomen.

Waarom nu in de vorige proevenreeks de Phagocytose wél door Kamfer werd bevorderd, zal moeten worden toegeschreven aan het feit, dat wij in het eerste geval te doen hadden met versche cellen en in het tweede geval met phagocyten, die door hun langdurig verblijf in een NaCl-oplossing van 0,9% verzwakt waren. Zij moeten immers Ca ionen en waarschijnlijk ook andere ionen door uitwisseling met Na verloren hebben.

Dat hun leven echter niet voor goed vernietigd is, blijkt uit het feit, dat toevoeging van een weinig CaCl₂ het phagocytair vermogen weer opheft tot 42,8%.

Het lag nu voor de hand de proef te herhalen, ook met *zwakkere* Kamfer-oplossingen. Zoo werd genomen een verzadigde Kamfer-oplossing in NaCl van 0,9% „ verdund met de 10-, 50-, 100- en 500-voudige hoeveelheid NaCl van 0,9%. Overigens was de wijze van proefneming volkomen gelijk aan die van de vorige proefreeksen.

Uit deze proevenreeks mag men het besluit trekken, dat een verzadigde Kamfer-oplossing nog in 500-voudige verduunning de Phagocytose verlevendigt.

T A B E L. XV.

Concentratie der oplossing van Kamfer in NaCl 0,9%
 waarbij nog invloed op de Phagocytose wordt waargenomen.

Vloeistoffen.	Procentgehalte der leucocyten, die kool hebben opgenomen.
Na Cl 0,9%	$\frac{146}{350} \times 100 = 41,7 \%$
Kamfer 1 : 10	$\frac{188}{367} \times 100 = 51,2 \%$
Kamfer 1 : 50	$\frac{132}{328} \times 100 = 40,2 \%$
Kamfer 1 : 100	$\frac{246}{444} \times 100 = 55,4 \%$
Kamfer 1 : 500	$\frac{196}{399} \times 100 = 49,1 \%$

5. NOG ENKELE OPMERKINGEN:

Overziet men de uitkomsten van de verschillende proeven, die boven werden beschreven, dan blijkt, dat alle tot dusverre onderzochte stoffen, die in vet oplossen of in vet oplosbaar zijn, de Phagocytose in aanzienlijke mate bevorderen. En wij kunnen daaraan nog toevoegen, *dat hetzelfde ook met chloralhydraat (1 op 20.000 en zwakker) en met terpentijn (1 : 50.000) het geval was; welke laatste resultaat men, — het zij in het voorbijgaan gezegd — geneigd zal zijn, in verband te brengen met het vermogen van terpentijn om plaatselijk exsudaten op te wekken en ook met de therapeutische inhalatie van terpentijndamp bij tuberculeuse processen in de adembalingsorganen en den opwekkenden invloed van hartlucht.*

Onze bij phagocyten verkregen resultaten vertoonen een merkwaardige overeenkomst met hetgeen J. LOEB en later R. S. LILLIE hebben waargenomen bij de kunstmatige parthenogesis van eieren.¹⁾

LOEB vond n.l., *dat vetoplossende stoffen het vermogen bezitten om de parthenogetische ontwikkeling van eieren mogelijk te maken.*

Hoe kan nu dit verschijnsel verklaard worden? Men kan zich met LOEB voorstellen, dat de lipoid-oplossende stof de eimembraan verweekt en aldus aanleiding geeft tot de vorming van een bevruchtingsmembraan. Het schijnt ons nu niet gewaagd een stap verder te gaan en aan te nemen, dat het aan de met de verwekking gepaard

¹⁾ Vergelijk o.a. J. LOEB. Die künstliche Parthenogese. Handbuch der Biochemie des Menschen und der Tiere. Band I 1910. p. 101 en 102.

gaande vermindering van oppervlaktespanning te danken is, dat de beweging van het protoplasma, die aan het deelingsproces ten grondslag ligt, tot niting komt. Dit wordt bevestigd door de waarneming van R. S. LILLIE,¹⁾ dat men ook door een *kortdurende voorbijgaande temperatuurerhoging*, bij eieren van zeesterren een typische bevruchtingsmembraan kan te voorschijn roepen, welke membraanvorming gevolgd wordt door een ontwikkeling van een deel der eieren tot larven. J. LOEB kon dit voor het zeeëgelei bevestigen.

Er is nog meer analogie tusschen hetgeen men ziet gebeuren bij de phagocyten en bij eieren. Liefen wij toch sterkere oplossingen van Chloroform, Benzol, Kamfer, enz. op de phagocyten inwerken, dan nam de Phagocytose af. Welnu LOEB heeft gevonden, dat een eenigszins langdurige inwerking van vetoplossende substanties op eieren aanleiding geeft tot uiteenvallen dier cellen, tot z.g. cytolyse.

Men kan dus den gunstigen invloed, die genoemde vetoplossende stoffen op de bewegelijkheid der phagocyten en op de ontwikkeling van eieren uitoefenen, onder het zelfde gezichtspunt vereenigen.

Doch er is nog meer, wat door de bovengenoemde onderzoekingen duidelijk wordt. Het is namelijk een bekend feit, dat verschillende *narcotica*, in kleinere dosis aangewend oprekkend werken en in grootere dosis verlammen. ENGELMANN heeft dit reeds voor een aantal jaren waargenomen met trilhaarbeweging, en ook voor het zenuwstelsel weet men van Chloroform, Alcohol, Aether dat deze bij het begin der toediening, wanneer zij n.l. in kleine hoeveelheid in de zenuwcellen zijn binnengedrongen, excitatie-verschijnselen teweeg brengen, om dan later, wanneer de stof in groote hoeveelheid in de cellen aanwezig is, gevoelloosheid te veroorzaken. Men heeft, voor zoover ons bekend is, deze tegenstelling nooit kunnen verklaren doch aan de hand van onze proeven wordt het verschijnsel duidelijk.

Bij de werking van het narcoticum zijn 2 factoren in het spel, in de eerste plaats moet het door de lipoïedmembraan heendringen; in de tweede plaats zal het, in het protoplasma aangekomen en in genoegzame hoeveelheid daarin voorhanden, den narcotiseerenden invloed uitoefenen. Maar reeds voordat het laatste geschied is, heeft de lipoïedmembraan een vermindering van oppervlaktespanning ondergaan en treedt de exciteerende werking op. Deze verdwijnt natuurlijk, wanneer het protoplasma verlamd is²⁾.

¹⁾ R. S. LILLIE. *Journal of experim. Zoology* 5. 1908 375 (geciteerd naar LOEB l.c.)

²⁾ De verlamming van het protoplasma door narcotica van de vetzuurreeks is MANSFELD geneigd toe te schrijven aan zuurstofgebrek, veroorzaakt door verminderde permeabiliteit der cellipoiden voor dit gas (*Pflüger's Archiv*, 131, 1910, 461).

Zoo verdient dus hetgeen aan de phagocyten werd waargenomen, ook uit een algemeen oogpunt onze belangstelling, en bedenkt men dan nog dat Kamfer niet alleen de Phagocytose verlevendigt maar ook als excitans voor het hart geldt, dat Chloroform in kleine hoeveelheid eveneens een versnelling van den hartslag teweeg brengt¹⁾, dan zal men geneigd zijn te onderzoeken, in hoeverre men hier met een verschijnsel te doen heeft, dat voor alle vetoplossende stoffen en ook voor andere dan de reeds genoemde soorten van cellen geldt.

Wij zijn dan ook met een voortzetting van het onderzoek in die richting bezig.

RÉSUMÉ.

De voorgaande onderzoekingen hebben in hoofdzaak tot de volgende resultaten geleid :

1. *Een verzadigde oplossing (0.001 %/o) van Jodoform in een NaCl-oplossing van 0,9 %/o bezit het vermogen om de Phagocytose in zeer aanzienlijke mate te versnellen.* Deze gunstige werking van Jodoform komt niet alleen tot uiting bij de phagocyten, die korten tijd tevoren uit het bloed zijn verkregen, maar ook bij die, welke door geruimen tijd, b. v. 18 uur, te hebben vertoefd in NaCl-oplossing van 0,9 %/o hun phagocytair vermogen grootendeels hebben ingeboet,
2. De Jodoform-werking is nog duidelijk zichtbaar in een vloeistof, die 1 gram CHI_3 op 5.000000 cm^3 . NaCl-oplossing van 0,9 %/o bevat of 1 gram-molecuul CHI_3 op 1.900000 Liter der keukenzout-solutie.
Zonder twijfel zal het verschijnsel nog bij sterker verdunning zichtbaar zijn (Vergel. tabel IV).
3. Genoemde invloed van Jodoform-oplossing kan niet toegeschreven worden aan J-ionen, want het is gebleken dat deze de Phagocytose tegengaan. *Men moet hier denken aan het vermogen van Jodoform om in de vetachtige begrenzing (z. g. n. lipoïd membraan) der phagocyten op te lossen; daardoor wordt de membraan verweekt, de opperelaktespanning geringer en de beweeglijkheid der phagocyten vergemakkelijkt. Een snellere opneming van koolpartikeltjes moet hiervan het gevolg zijn.*
4. *Is deze voorstelling juist, dan moeten ook andere stoffen, die in vet kunnen oplossen, versnelling der Phagocytose kunnen teweeg*

1) ARLOING. Artikel: Chloroforme, in Richet's Dictionaire de Physiologie.

*brenge*n. Inderdaad kon dit ook bij alle in die richting onderzochte en in samenstelling uiteenlopende stoffen, n.l. Chloroform, Chloralhydraat, Benzol, Kampfer en Terpentijn geconstateerd worden.

5. *Chloroform* in een concentratie van 1 op 5.000.000 bleek de phagocytose nog duidelijk te bevorderen. In een concentratie 1 vol. op 500.000 bedroeg de vermeerdering der phagocytose 43 %. Bij sterkere oplossingen was die waarde geringer en hoe sterker de solutie, des te meer neemt de versnellende invloed af. Dit is toe te schrijven aan een tweeden factor, die hierbij een rol gaat spelen, n.l. verlamming van de protoplasma-beweging, welke factor bij zeer zwakke oplossing weinig tot zijn recht komt.
6. Zoo bleek *Benzol* het gunstigste op de *Phagocytose* te werken in een verdunning 1 op 100.000.
7. Een verzadigde oplossing van *Kampfer* in NaCl-oplossing van 0.9% deed de Phagocytose in vrij aanzienlijke mate stijgen. Doeh verdunde men deze verzadigde solutie met het 100 voudige volume keukenzoutoplossing, dan was de verlevendiging der Phagocytose wederom aanzienlijker, n.l. 32 %.
8. *Terpentijn* veroorzaakte in een verdunning van 1 : 100,000 een vermeerdering der phagocytose van 24.7 %, doch in een verdunning van 1 op 25.000 inplaats van een vermeerdering, een *vermindering* en wel van ruim 80 %! Bij *Chloral* volkomen gelijklopende uitkomsten.
9. *De sub 1—8 genoemde verschijnselen verdienen nog de aandacht uit een tweeledig oogpunt :*

a. Ze komen geheel overeen met die, welke J. LOEB heeft waargenomen bij de *kunstmatige bevruchting van eieren* van de zeester en zeeëgel. Hij kon n.l. door, gedurende een korten tijd vet-oplossende stoffen op deze eieren te laten inwerken, de ontwikkeling van deze tot larven te voorschijn roepen. De verklaring van dit verschijnsel schijnt ons gezocht te moeten worden in de omstandigheid dat door de verweking der lipoïde eimembraan, de protoplasma-bewegingen, welke aan het deelingsproces ten grondslag liggen, worden vergemakkelijkt resp. mogelijk gemaakt. Dit stemt overeen met de waarneming van R. S. LILLIE, dat alleen reeds na verwarming der eieren gedurende een korten tijd, de deeling eveneens kan tot stand komen, een verschijnsel dat door J. LOEB werd bevestigd.

De analogie tusschen den invloed van vet-oplossende stoffen op

de ontwikkeling van eieren aan de eene zijde en op de versneling der Phagoocytose aan de andere zijde laat zich nog verder doortrekken, wanneer men overweegt, dat een ruime inwerking van genoemde vet-oplossende middelen bij de phagoocyten aanleiding geeft tot verlamming (of vernieling, zooals bij kamfer) en bij de eieren tot cytolyse.

b. Het is een bekend verschijnsel, dat narcotica, in geringe hoeveelheid aangewend, exciteren en eerst in grootere hoeveelheid verlammen. In het licht van de door ons bij de phagoocyten waargenomen verschijnselen is de verklaring daarvan gemakkelijk te vinden.

Eerst wordt n.l. de lipoïde membraan der cellen verweekt, daardoor de oppervlaktespanning geringer en de snelheid van beweging, de activiteit, grooter. Is er meer van het narcoticum doorgedrongen, dan komt de verlamrende invloed op het protoplasma tot uiting.

Voor eenige algemeene beschouwingen vergelijkte men p. 1910 volg. *Groningen, Januari 1911.*

Physiologie. — De heer WINKLER biedt een mededeeling aan over: *„Een tumor in het pulvinar thalami optici. Een bijdrage tot de kennis van het zien van vormen”.*

De waarneming, die tot uitgangspunt van dit opstel gediend heeft is de volgende:

F. t. B., 22 jaren oud, op 25 Februari 1909 opgenomen op mijn afdeling, is geboren uit gezonde ouders en was te voren niet ziek. Geen traumata, geen venerische infecties. Matig gebruiker van alcohol en tabak.

Sedert Dec. 1908 werd het rechter been stijf, daarna onzekerheid bij de beweging der rechter hand. Ook ging de rechter mondhoek hangen. Vervolgens nam patiënt een eigenaardige sensatie in de rechter lichaamshelft waar, alsof zij doffer was en begon hij te stotteren. Dit alles verergerde zonder hoofdpijn of pijn in de ledematen, zonder duizeligheid, zonder hem opvallende stoornis bij het zien of hooren. Zijn geheugen werd slechter.

In Maart wordt genoteerd. De zeer intelligente patiënt neemt deel aan de omgeving, is goed georiënteerd in tijd en ruimte; de pols is klein, 92 p. minuut, regelmatig. De adembaling 22 p. minuut. Geen afwijkingen in borst- en buikorganen. Urine zonder eiwit of glycese.

De spraak is langzaam, monotoon, stotterend en scandeerend. Geen aphatische en ook geen articulatie-stoornis. Hij kan lezen en begrijpt, wat hij leest. Het schrijven is slecht (ataxië der rechter hand). De druk op 't papier is ongelijk. Het potlood schiet buiten de richting. Toch is het schrift, voor iedere letter en voor ieder woord afzonderlijk, leesbaar. Geen spoor van agraphie. Het hoofd 53 c.M. in omvang, is nergens pijnlijk bij druk.

De reuk is intact. Het gehoor is beiderzijds iets afgenomen, hoort fluisterstem op 1 M. rechts, op 2 M. links. De smaak is afgenomen, De pupillen ongelijk, rechts iets wijder dan links, reageeren goed op licht en bij convergentie. De oogbewegingen, behoudens nystagmus, vooral bij het zien naar rechts, in vollen omvang mogelijk. Convergentie goed.

De rechter mondhoek hangt; de rechter oogspleet is wijder dan de linker. Op de rechter gelaatshelft zijn nauwelijks plooien aanwezig. Bij de actieve bewegingen worden de spieren rondom den rechter mondhoek nagenoeg niet bewogen. Geen ontardingsreactie in de facialis-musculatuur.

De tong wordt naar rechts tremuleerend uitgestoken. Het hoofd houdt de patiënt naar rechts.

De rechter schouder hangt. De rechter arm is oedemateus, geen rigiditeit, geen hypotonie. Alle actieve bewegingen kunnen rechts verricht worden, maar zij geschieden onzeker. Het brengen der twee wijsvingers tegen elkander is onmogelijk. Het meest onzeker zijn de vingerbewegingen. Knoopen vast of losmaken, lucifers uit een doosje nemen etc.; dat alles geschiedt zeer onbeholpen.

De reflexen aan den rechter arm zijn verhoogd.

Het rechter been sleept, bij het gaan, na. Hij kan er niet op hinken. Het is niet rigide, ook niet hypotonisch. Onderbeen en voet zijn sterker paretisch en ataetisch dan het bovenbeen. Hij kan met den rechter voet geen pantoffel aantrekken, geen hak-knieproef doen.

De buik- en cremaster-reflexen zijn rechts opgeheven. Knie- en achillespees-reflexen zijn verhoogd, zonder cloni. Voetzool-reflex rechts: buiging der kleine toonen en extensie van den grooten.

De sensibiliteit is rechts gestoord over de geheele lichaams helft.

De tastzin is weinig afgenomen. Overal wordt grove aanraking waargenomen, zachte wel eens niet.

De pijnzin is sterker gestoord. Rechts wordt de punt eener speld niet als scherp waargenomen. Deze hypalgesie overschrijdt de middel-lijn ongeveer 1 c.M. Subjectief geeft de patient aan, dat het gevoel bij aanraking en bij pijnlijke prikkels rechts geheel anders is dan links.

Koude en warmte worden rechts minder goed dan links gevoeld.

Het sterkst is rechts het diepe gevoel gestoord, en distaal sterker dan proximaal.

Passieve bewegingen worden aan de vingers en toonen in 't geheel niet waargenomen. De tastkringen van Weber zijn rechts veel grooter dan links.

Hij lokaliseert op de rechter lichaamshelft slecht.

Hij is rechts astereognostisch, bijv.: een sleutel wordt rechts na lang aarzelen een hamertje, een klein lucifersdoosje wordt een kurk geheeten, een ring wordt een kwartje genoemd. Deze voorwerpen worden links onmiddellijk herkend.

De patient zegt goed te zien.

Houdt men hem echter bij gesloten linkeroog, terwijl hij met het rechter een bepaald punt fixeert, een sleutel voor, zoo herkent patient dien in de linkerhelft van het rechter gezichtsveld onmiddellijk, in de rechterhelft niet. Evenzoo wordt bij gesloten rechteroog een sleutel in de rechterhelft van het linker gezichtsveld, niet herkend.

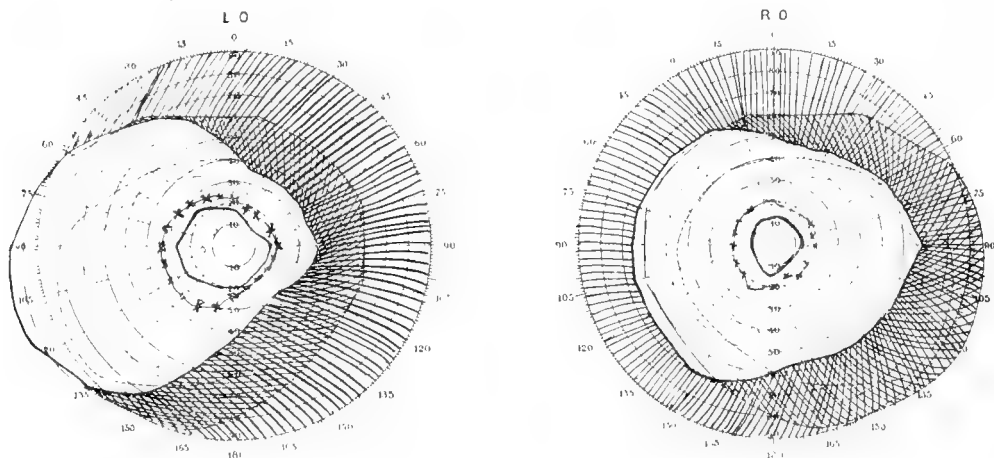
Wegens vermoeden op hemianopsie wordt dus de patient naar den ophthalmoloog verwezen (Dr. SCHMIDT), wiens meedeeling luidt:

Visus O. D. $\frac{6}{s}$, Visus O. S. $\frac{6}{s}$, voor beide oogen $\frac{6}{s}$.

Geringe gezichtsveldbeperking voor beide oogen, zoowel voor bewegingen als voor kleuren, zonder dat er van hemianopsie mag gesproken worden. De fundus is zonder afwijkingen.

Dit gaf aanleiding tot een meer nauwkeurig onderzoek en herhaaldelijke gezichtsveldopnemingen, van welke die wordt overgelegd, welke op 20 April 1909 door Dr. SCHMIDT is opgenomen, waarin de buitenste het gezichtsveld voor beweging, de met kruisjes gemerkte dat voor blauw, en de binnenste dat voor rood aangeeft.

Datum 20, 4. 1910.



*Gezichtsvel*d voor beweging, blauw en rood op 20, 4. 1910.

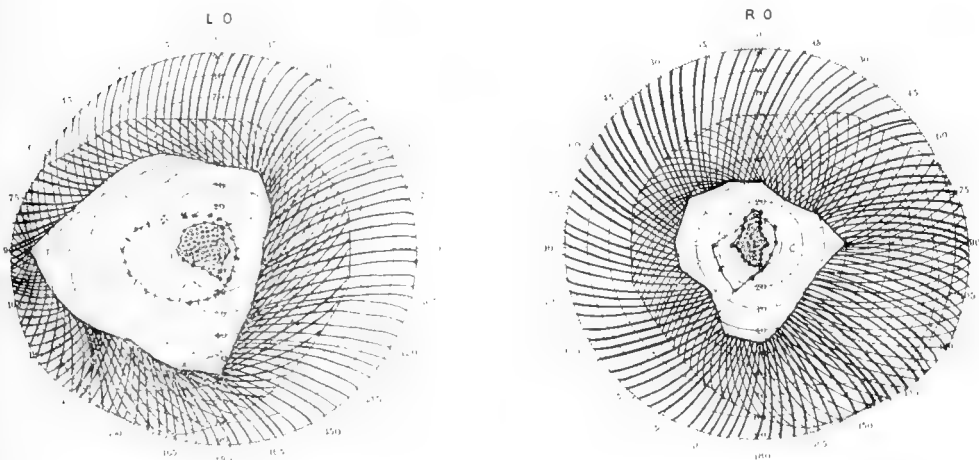
Te gelijktijd eeliter werden er uit wit carton meerdere figuren van 2 c.M. doorsnede geknipt, harten, cirkels, ruiten, driehoeken enz.

Worden deze vormen van den linkerkant uit, in de linkerhelften der gezichtsvelden gevoerd, zoo worden zij regelmatig door den patient op 30° — 15° van het fixeerpunt juist herkend.

Worden zij echter van de rechterzijde uit, in de rechter helften der gezichtsvelden ter observatie aangeboden, zoo worden zij, ofschoon de patient hen ziet naderen nimmer herkend, voordat het fixeerpunt is bereikt of voordat zij de middellijn hebben overschreden.

Het op 20 April 1909 daarvan opgemaakt schema is hier tevens bijgegeven.

Datum 20. 4. 1910.



Gezichtsveld voor beweging, blauw en voor vormen van 2 c.M. doorsnede. Het vormen ziende veld is met kringen opgevuld.

De buitenste grens geeft het gezichtsveld voor beweging aan, de met kruisjes voorziene lijn dat voor blauw. *Het met kringen opgevuld veld is het gezichtsveld, waarin de vormen van 2 c.M. doorsnede worden waargenomen. In de rechter gezichtsveldhelften worden de vormen dus niet herkend, in de linker wel.*

Ofschoon duizeligheid, hoofdpijn en neuritis optica hebben ontbroken werd toch de diagnose op tumor thalami optici gesteld, waartoe overigens alle redenen bestond.

De toestand van den lijder is langzaam verergerd,

Bepaaldelijk nam de ataxie van de hand toe. Bij omvangrijke beweging vertoonden zich zeer heftige nevenbewegingen. Zij nam in rust een eigenaardigen stand in. Hand in hand nam ook de

stoornis in het diepe gevoel toe; hij localiseerde slechter, het oordeel over den stand van de hand was zeer slecht en de astereognosie werd volkomen. Ook de spraak werd moeilijker.

Neuritis optica werd echter niet waargenomen en de oogverschijnselen bleven stationair, totdat op 15 Mei plotselinge dood intrad.

Bij de autopsie werd links een tumor cerebri gevonden, die dank zij de welwillendheid van prof. DE VRIES mij in toto werd afgestaan en bij onderzoek een glioma blijkt te zijn. De hersenen werden in frontale serie gesneden.

De doorsneden, deels met WEIGERT-PAL, deels met carmijn behandeld, leerden de volgende uitbreiding van den tumor kennen, die een infiltrerend glioma bleek te zijn.

Doorsnede 1. Zij treft de linker hemisfeer door het proximale gedeelte der stamganglia. Zij raakt tevens het proximale tumoreinde, die hier onscherp begrensd, de capsula interna doorbreekt, lenskern en commissura anterior infiltreert.

Doorsnede 2. Zij treft de linker hemisfeer in het midden van den, door den tumor, vergrooten thalamus, de rechter door het distale einde van den thalamus. De mediale en ventrale thalamuskernen zijn door tumorweefsel vervangen. De regio subthalamica is met roode kern en fasc. retroflexus ventraal gedrongen. Het WERNICKE'sche veld en de retrolenticulaire capsula interna worden door den tumor niet geraakt en naar voren gedrongen.

Doorsnede 3. Zij treft rechts het distale eind van het pulvinar. De linker thalamus, door den tumor vergroot, is meer proximaal-waarts geraakt. De tumor neemt hier de plaats in van het pulvinar thalami, vernielt tevens de ventrale kerngroepen met de stralingen van den lemniscus en het c. geniculatum internum.

Op zijde gedrongen maar intact vindt men het c. gen. laterale. Daarin staan de cellen op de gewone wijze geplaatst. En (zooals tusschen 2 en 3 gelegen doorsneden leeren) ontspringt de intacte straling van WERNICKE uit dit intacte ganglion. Toch vindt men in de retro-lenticulaire capsula-straling omvangrijke vezeldegeneratie.

Opzijde gedrongen, maar niet gelaedeerd is het corp. quadr. anticum. De tumor dringt de daarheen loopende tractus-straling ter zijde, maar gelijk doorsneden tusschen 3 en 4 leeren is het c. quadr. anticum niet geïnfilteerd, al zijn er vezels uit het oppervlakkige merg weggevallen.

Doorsnede 4. Zij treft de linker hemisfeer even voor het splenium corporis callosi. Het reusachtige, door tumorweefsel vervangen pulvinar, dringt het splenium en de kamer op zijde zonder het weefsel zelf te

laeleeren. De tumor vergroeit met het achterste deel van den Ammons-hoorn, zoodat hij door den alveus bedekt in den kamerwand ligt.

Doorsnede 5. Zij treft het distale tumor-einde. Met den Ammons-hoorn vergroeid, drukt hij de kamer samen, maar beledigt haar wand niet.

Doorsnede 6. Zij treft de achtershoofskwab distaal van den tumor.

De vergelijking dezer doorsneden geven het recht om aan te nemen; *dat een tumor van het linker pulvinar uitgegaan, naar achteren groeiend de kamer samendrukte, naar voren de ventrale en mediale thalamus kernen vernietigde, en eindelijk de meer naar voren gelegen capsula interna bedreigde.*

Corpus geniculatum laterale en Wernicke's straling zijn echter zoo al niet volkomen, dan toch nagenoeg volkomen intact, evenals het corp. quadrigeminum anticum!

In de retro-lenticulaire afdeeling der capsula interna zijn vezels gedegeneerd, die van daaruit deels in het stratum sagittale internum uitstralen, deels direct naar het merg der onderste parietaalhersenen, naar den gyrus supra-marginalis, gaan (fig. 3, 4, 5).

In het stratum sagittale internum ligt de gedegeneerde vezelmasse lateraal van de kamer en dringt geleidelijk, door het stratum sagittale externum, in de mergkegels van den gyrus angularis en van de occipitale windingen door.

In de mergkegels (zie doorsnede 6) van de windingen rondom de fissura calcarina is de degeneratie het geringst. Zij vertoonen zich als zwarte stevige bundels.

In beide, zoowel in dien van den gyrus cuneus als van den gyrus lingualis is er desniettemin een degeneratie-striem.

In den mergkegel van den g. cuneus ligt die striem dorsaal, wendt zich naar de dorsaal gelegen cuneus-afdeeling. De naar de f. calcarina toegekeerde windingslip is vrij van degeneratie.

In den mergkegel van den g. lingualis ligt de degeneratie-striem ventraal, wendt zich in de ventrale afdeelingen er van en hangt samen met de degeneratievlekken in de mergkegels der occipitale windingen. Ook in deze winding is de naar de f. calcarina toegekeerde windingslip van degeneratie vrij.

De gevonden tumor in den linker thalamus kan het beschreven ziektebeeld begrijpelijk maken.

Van de verwoesting der ventrale en mediale kernen mag men, bij het tegenwoordig standpunt onzer kennis, de hypalgesie der rechter lichaams helft, het verlies van het diepe gevoel aan die zijde,

de slechte orientatie, de meebewegingen en de ataxie in de rechter hand, alsmede *de astereognosie in de rechter hand* afhankelijk stellen.

De toenemende zwakte der rechterzijde, de monotone, stotterende spraak wijzen op een voortschrijden naar voren toe, met doorbreking der *capsula interna*.

De verwoesting van het linker *corpus geniculatum internum* kan desnoods de dubbelzijdige afnemng van het gehoor verklaren.

Merkwaardig echter blijft de stoornis bij het zien van den lijder, die in den fundus geenerlei veranderingen heeft. Bij ruw onderzoek voor hemianopsie gehouden, leert nauwkeuriger waarneming dat, afgezien van een geringe rechtszijdige gezichtsveldbeperking, de lijder beweging en kleur in beide gezichtsveldhelften, goed waarneemt. *Vormen worden daarentegen in de rechter gezichtsveldhelften volstrekt niet waargenomen. Wel worden zij in het fixatiepunt en in de linker gezichtsveldhelften tot ver in de peripherie herkend.*

Aan deze stoornissen beantwoordt dus *een tumor, die uitgegaan van het linker pulvinar, dit ganglion met de centrale en mediale kernen, vernielt, maar corpus geniculatum laterale, Wernicke's veld en corpus quadrigeminum anticum vrijlaat.*

De vorm der voorwerpen wordt door normale personen het best in het fixatiepunt herkend. Kleine en zeer gedetailleerde vormen, de letters en woorden die wij lezen, worden zelfs uitsluitend daar, dus met de fovea centralis waargenomen. Ieder kan echter bij zich zelf vaststellen, dat vormen die 2 c.M. doorsnede hebben, temporaalwaarts tot op 40° in de periferie herkend worden, wanneer zij op blikpuntsafstand gegeven worden.

Bij slecht licht neemt het herkennen der vormen in de periferie bij normalen snel af. Hetzelfde geldt, als er, bij lijden van den N. opticus, belangrijke gezichtsveldbeperking is ontstaan.

Onze lijder, zonder fundusafwijking, zonder stoornis in de licht-perceptie, zonder letter- of schriftblindheid, zonder optische aphasia, zonder andere stoornis in de orientatie met de oogen, als nystagmus bij het instellen der oogen naar rechts, herkent rechts de vormen niet, hoe groot zij ook zijn. Op deze stoornis, die hem weinig hindert, maakt eerst de geneesheer hem opmerkzaam, al is hij er dan ook van overtuigd, dat zij reeds van het begin van zijn lijden heeft bestaan.

Om deze stoornis te begrijpen is het noodig om rekening te houden met de studies, die door NISSL VON MAYENDORFF over letter- en schriftblindheid zijn verricht¹⁾

¹⁾ ERWIN NISSL VON MAYENDORFF, Das Rindencentrum der optischen Wortbilder Arch für Psychiatrie. Bd. 43 S. 633. 1908 en vorige studies o.a.

Ueber eine directe Leitung etc. Wien Kl. Wochenschrift Nov. 1906.

Het uitgangspunt van dezen onderzoeker zijn twee feiten.

1e. Letters en woorden worden alleen in de omgeving der fovea centralis herkend.

2e. Wanneer dubbelzijdige achterhoofdshaarden dubbelzijdige hemianopsie in het leven roepen, blijft er een centraal gezichtsveld over, waarmee de lijder kleine vormen en kleuren herkent en lezen kan.

Op grond van anatomische overwegingen bouwt hij daarop de twee stellingen.

1e de fovea centralis, door een eigen straling op de schors geprojecteerd, is in een afzonderlijk schorsveld gelocaliseerd,

2e de vernietiging dezer straling of van dit schorsveld roept alexie (letter- en schriftblindheid) subcorticaal of corticaal te voorschijn.

Het eerste deel van dezen gedachtengang is niet nieuw, het tweede deel wel.

Door alle zelfstandige onderzoekers wordt toegegeven, dat de fovea centralis een bijzondere vertegenwoordiging op de schors moet bezitten. Daartoe dwingt hen het feit, dat de hemianopsie bij achterhoofdshaarden, altijd onvolledig is, d. w. z. er blijft dan een niet blinde gezichtsveldrest, waartoe de fovea behoort.

Deze moet dus op bijzondere wijze in de schors vertegenwoordigd zijn.

Groot meeningsverschil is er echter over de wijze waarop die bijzondere vertegenwoordiging plaats vindt.

Sommigen eischen voor de fovea centralis een eigen schorsveld op (bijv. in den bodem der fissura calcarina gelegen, HENSCHEN, SACHS, WILBRANDT).

Anderen denken zich de fovea centralis op diffuse wijze in een zeer omvangrijk schorsveld gelocaliseerd (waartoe dan niet alleen de omgeving der fissura calcarina, maar nog minstens de occipitale windingen behooren, von MONAKOW).

Dit meeningsverschil is begrijpelijk. Nu het vaststaat, (FORSTER, e.a.) dat de lijder met dubbelzijdige hemianopsie nog een centrale gezichtsveldrest heeft, is er slechts tweeërlei mogelijk.

Of er blijft, in die gevallen, beiderzijds een fovea-schorsveld gespaard. Of de diffuse uitbreiding der fovea-vezels in een omvangrijk optisch schorsveld, laat, ook bij relatief omvangrijke verwoesting van schors en straling, de mogelijkheid open van behoud van een aantal dier vezels, en dus van centraal zien.

Daar echter, tot nu toe, centrale hemianoptische skotomen als gevolg van precies beschreven occipitaal-haarden, niet met zekerheid bekend zijn, zijn zij, die de diffuse localisatie der fovea-vezels verdedigen, beslist in het voordeel.

De tweede en nieuwe van NIESSL's stellingen, grijpt nu op bijzondere wijze in dien strijd in.

NIESSL's fovea-veld is niet meer het fovea-veld in de fiss. calcarina, zooals HENSCHEN e.a. zich dat hebben gedacht. NIESSL's fovea-bundel straalt in de dorso-laterale massa der strata sagittalia, naar de basale occipitale windingen en in den cuneus, rondom het calcarina-veld. De onderbreking van dien bundel (bijv. haarden in den g. angularis) of de vernietiging van zijn schorsveld, geeft als verschijnsel niet langer het centraal hemianoptisch skotom, maar, als het links plaats vindt, het niet herkennen van diegene der met de fovea waargenomen vormen, welke wij met de linker hemisfeer verwerken. Daar de linker hemisfeer nu eenmaal dient voor het herkennen van gehoorde woorden en het spreken, is subcorticale of corticale alexie er het gevolg van.

Voor hem is de calcarina-streek, de lichtpercipieerende schors-zone geworden. De omliggende zone, de fovea-zone, herkent in samenhang met de eerste, de vormen.

Deze inderdaad geestvolle gedachte van NIESSL VON MAYENDORFF wordt m. i. volstrekt niet geraakt door den strijd of er nu bovendien al of niet een gesloten fovea-bundel in de optische straling ligt. Aan het door NIESSL opgeworpen vraagstuk raakt het hier beschreven geval.

Vormen worden niet alleen met het oog herkend, ook met de hand. Meermalen is de z. g. astereognosie, de onmogelijkheid om de vorm met de hand waar te nemen, ofschoon de tastwaarneming relatief weinig is gestoord, vastgesteld.

Haarden in de onderste wandkwab, (WERNICKE), in de ventrale thalamus-kern of in haar straling naar dien wandkwab, roepen dit verschijnsel te voorschijn.

Ook in dit geval bestond astereognosie in de rechter hand, beantwoordend aan de verwoesting van de ventro-mediale thalamuskern en aan degeneratie van hun straling naar de parietale hersenen.

Het ligt voor de hand om naar een analogie te zoeken tusschen die astereognosie en de hier beschreven stoornis in het herkennen der optische vormen.

Als in de ventrale thalamus-kernen impulsen uit het algemeen gevoel (diepe lichaamsdeelen) en uit het tastgebied bijeenkomen, en daar verwerkt worden tot een geheel, dat door verderen schorsarbeid, als een tastvormbeeld bewust wordt, dan mag voor de optische impulsen iets dergelijks gelden.

In het pulvinar toch straalt een stevige tractus-bundel. Optische impulsen komen in onmiddellijken samenhang met de kinaesthetische

VERKLARING DER FIGUREN.

—

a.l. = ansa lenticularis. *AM* = Ammonshoorn. *aq* = Aquaeductus Sylvii. *ANG* = gyrus angularis. *br.c.* = brachium conjunctivum cerebelli. *c.* = sulcus centralis. *c.a.* = commissura anterior. *C.A.* = gyrus centralis anterior. *c.a.f.* = columna ascendens fornicis. *calc.* = fissura calcarina. *c.c.* = corpus callosum. *c.ext.* = capsula externa. *c.extr.* = capsula extrema. *c.g.e.* of *c.g.l.* = corpus geniculatum externum sive laterale. *c.i.* = capsula interna. *cl.* = claustrum. *c.m.* = sulcus calloso-marginalis. *C.M.* = gyrus calloso-marginalis. *C.P.* = gyrus centralis posterior. *c.q.a.* = corpus quadrigeminum anticum. *C.R.* = corona radiata. *C.U.N.* = gyrus cuneus. *f.* = fornix. *f₁* = sulcus frontalis primus. *F₁* = gyrus frontalis superior. *f₂* = sulcus frontalis secundus. *F_{II}* = gyrus frontalis secundus. *F_{III}* = gyrus frontalis inferior. *f.o.* = fasciculus fronto-occipitalis. *f.r.* = fasciculus retroflexus. *FUS* = gyrus fusiformis. *h* = sulcus Hippocampi. *H* = gyrus Hippocampi. *hab.* = habenula. *INS.* = insula *Reylüi*. *i.p.* = sulcus interparietalis. *l* = lemniscus *L₁* = globus pallidus nuclei lentiformis. *L₂*, *L₃* = putamen nuclei lentiformis. *LI* = gyrus Lingualis. *n.c.* = nucleus caudatus. *n.ant.* = nucleus anterior thalami. *n.l.* = nucleus lentiformis. *n.lat.* = nucleus lateralis thalami. *n.med.* = nucleus medialis thalami. *n.ventr.* = nucleus ventralis thalami. *n.ret.* = nucleus reticularis (Gitterschicht) thalami. *n.r.* = nucleus ruber. *o₁* = sulcus occipitalis primus. *O₁* = gyrus occipitalis primus. *o₂* = sulcus occipitalis secundus. *O_{II}* = gyrus occipitalis secundus. *o₃* = sulcus occipitalis tertius. *O_{III}* = gyrus occipitalis tertius. *o.p.* = sulcus occipitoparietalis. *ot* = sulcus occipito-temporalis. *OT* = gyrus occipito-temporalis. *P₁* = gyrus parietalis superior. *PAR* = gyrus paracentralis. *p.c.* = sulcus post-centralis. *p.P.* = pes pedunculi *p.o.* = sulcus parieto-occipitalis. *p.r.* = sulcus praecentralis. *PRC.* = gyrus praecuneus. *p.s.* = sulcus parietalis superior. *S* = fissura Sylvii. *S.M.* = gyrus supramarginalis. *s.n.* = substantia nigra. *s.olf.l.* = stria olfactoria lateralis. *s.s.i.* = stratum sagittale internum. *s.s.e.* = stratum sagittale externum. *t₁* = sulcus temporalis superior. *T₁* = gyrus temporalis superior. *t₂* = sulcus temporalis secundus. *T_{II}* = gyrus temporalis secundus. *t₃* = sulcus temporalis tertius. *T_{III}* = gyrus temporalis tertius. *tap.* = tapetum. *tr.o.* = tractus opticus *V* = ventriculus lateralis. *v. d'Az.* = fasciculus *Vicq-d'Azur*. *W* = Wernicke's veld.

impulsen, die in de ventrale kernen verwerkt werden. De straling uit de achterste afdeelingen van den thalamus ligt echter meer dorsaal, richt zich naar den gyrus angularis, de basale occipitale windingen en cuneus. In die straling is een belangrijke mate van degeneratie aantoonbaar. De degeneratie-striem dringt niet in de windingslippen, die naar de fissura calcarina zijn toegekeerd, maar straalt in het door NIESSL aangeduide fovea-velde.

Ofschoon er dus langs het corpus geniculatum laterale en de daaruit ontspringende straling nog voldoende optische impulsen de schors bereiken, herkent de schors, die geen meêdeeling ontvangt van het in den thalamus voorbereide verwerkingsresultaat van meerdere andere impulsen, voor de gekruiste gezichtsvelden de vormen niet.

Deze analogie geldt slechts voor zoover het optisch zintuig te samen met het tastzintuig en de kinaesthesie vormenopvatting mogelijk maakt.

Het oog kan ook onafhankelijk van den tastzin vormen herkennen, dieptezien enz.

Onlangs heeft VAN VALKENBURG, de spaarzaam in de literatuur verspreide waarnemingen van gestoord dieptezien met één vermeerderd. Diep doordringende; beiderzijds in den gyrus angularis gelegen haarden hadden die stoornis in het leven geroepen naast andere verschijnselen, waaronder alexie.

Al mag nu dieptezien met het herkennen van vormen verwant zijn, het is daarvan toch zoo goed, als van stereoscopisch zien, onderscheiden.

Na VALKENBURG's uiteenzetting behoef ik hierop niet in te gaan.

Wel moet ik memoreeren een gedachtenwisseling, die zich tusschen NIESSL en VALKENBURG naar aanleiding van dit geval, heeft ontsponnen, nam. of de dorso-laterale afdeeling der strata sagittalia de fovea-vezels en uitsluitend deze zou bevatten. Ik merkte reeds op dat dit mij niet hoofdzaak voorkomt. Hoofdzaak schijnt mij de vraag of er een scheiding mag worden gemaakt tusschen een licht-percipieerend veld rondom de f. calcarina en een daaromheen gelegen veld waarin, zoo noodig met behulp van het eerste, vormen worden herkend.

Indien mijn opvatting juist is, dat de degeneraties, die de calcarina lippen vrij laten, afhankelijk zijn van de thalamus-verwoesting

1) C. T. VAN VALKENBURG. Zur Kenntnis der gestörten Tiefen Wahrnehmung. Deutsche Ztschr. für Nervenhe. Bd. 34. S. 322.

NIESSL VON MAYENDORFF. Einige Bemerkungen zu dem Aufsätze des Herrn Valkenburg. Ibidem Bd. 35. S. 165.

VAN VALKENBURG. Kurze Erwiderung auf die Bemerkungen etc. Ibidem Bd. 35. S. 472

en niet van de drukking van den zeer grooten tumor op het dorso-laterale deel der strata sagitalia, dan heb ik daarvoor goede gronden. Immers de patient heeft geen alexie vertoond en er is continuïteit tusschen den tumor in den thalamus en de daar beginnende degeneraties.

Maar is die meening juist, dan zou dit geval er eer voor pleiten, dat in NIESSL's fovea-zone ook vezels van de netvlies-periferie terecht kwamen. Want in het hier beschreven geval werden in de fovea de vormen herkend.

Laat men gelden, dat dit geval voldoet aan den eisch, dat bij behouden lichtzin, vormen hemianoptisch niet kunnen worden herkend, dan moet men ook toegeven, dat NIESSL's fovea-zone, ook voor het vormen zien met de netvlies-periferie bijdraagt.

Dan echter moet men ook toegeven, dat de lichtimpulsen zonder meer onvoldoende zijn voor het vormen-herkennen, dat eerst de vereeniging dezer impulsen met andere, *welke in den thalamus wordt voorbereid*, aan bepaalde schorsgedeelten de gegevens verschaft, waardoor zij tot de herkenning der vormen komt.

Wiskunde. — De Heer J. C. KLUYVER doet eene mededeeling:
„Over het termsgewijze integreeren van reeksen.”

Wanneer de functie $F(x)$ is ontwikkeld in eene reeks, die gelijkmatig convergeert voor $a \leq x < b$, kan er termsgewijze worden geïntegreerd, dat wil zeggen, uit de vergelijking

$$F(x) = \sum_0^{\infty} u_n(x)$$

volgt

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_0^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Tot deze laatste vergelijking mag men niet besluiten, zoodra een der beide grenzen van het integratievak juist van het interval der gelijkmatige convergentie is uitgesloten.

Bekende voorbeelden hebben geleerd, dat alsdan de regel van de termsgewijze integratie kan doorgaan of niet doorgaan.

Voorbeelden. De reeks $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ convergeert gelijkmatig voor $0 \leq x < 1$.

$$1. \quad \sum_0^{\infty} u_n(x) \text{ convergeert voor } x = 1.$$

$$u_n(x) = (n+1)(1-x)x^n - (n+2)(1-x)x^{n+1},$$

$$F(x) = (1-x) \quad , \quad \int_0^1 F(x) dx = \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_0^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \frac{1}{2} .$$

$$u_n(x) = n(1-x)e^{-n(1-x)^2} - (n+1)(1-x)e^{-n+1(1-x)^2} .$$

$$F(x) = 0 \quad , \quad \int_0^1 F(x) dx = 0 \quad , \quad \sum_0^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \frac{1}{2} .$$

$$u_n(x) = \frac{(1-x)n^2}{1+(1-x)^2n^2} - \frac{(1-x)(n+1)^2}{1+(1-x)^2(n+1)^2} .$$

$$F(x) = 0 \quad , \quad \int_0^1 F(x) dx = 0 \quad , \quad \sum_0^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx \text{ divergeert.}$$

II. $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ divergeert voor $x = -1$.

$$u_n(x) = (-1)^n x^n .$$

$$F(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad \int_0^1 F(x) dx = \log 2 \quad , \quad \sum_0^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \log 2 .$$

$$u_n(x) = (n+1)x^n - (n+2)x^{n+1} .$$

$$F(x) = 1 \quad , \quad \int_0^1 F(x) dx = 1 \quad , \quad \sum_0^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = 0 .$$

$$u_n(x) = (-1)^n (n+1)x^n .$$

$$F(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad , \quad \int_0^1 F(x) dx = \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_0^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx \text{ divergeert.}$$

Wanneer de bovengrens b van het integratievak niet meer tot het interval der gelijkmatige convergentie behoort, kan men in sommige onderstellingen nog vrij eenvoudig bewijzen, dat het termgewijze integreren eene juiste uitkomst levert.

Men is daarvan zeker, als de reeks $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ gelijkmatig convergeert voor $a < x < b$, als de reeks der integralen absoluut convergeert, en als bovendien iedere term $u_n(x)$ in het geheele integratievak een standvastig teeken heeft.

Immers nu is vooreerst voor $a \leq t < b$

$$\int_a^t F(x) dx = \sum_0^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx .$$

Van deze laatste reeks is de volstrekte waarde van iederen term kleiner dan de overeenkomstige term der convergente reeks

$$\sum_0^{\infty} \left| \int_a^b u_n(x) dx \right|,$$

en daarmede volgt, dat ten opzichte van t de reeks

$$\sum_0^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx$$

gelijkmatig convergeert in het vak $a \leq t \leq b$.

De hoofdeigenschap der gelijkmatig convergente reeksen geeft dan onmiddellijk

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \sum_0^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx = \sum_0^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Zeer dikwijls heeft men aan deze stelling genoeg. Zoo geldt bijv. voor $0 < x < 1$ de vergelijking.

$$F(x) = \frac{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1}}{1+x} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} x^n,$$

en de ontwikkeling rechts is in dit interval gelijkmatig convergent.

De reeks der integralen

$$\Gamma(s) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

convergeert absoluut, mits $s > 1$ is, en onder deze voorwaarde zal dus de vergelijking

$$\int_0^1 \frac{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1}}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^{s-1}}{e^y+1} dy = \Gamma(s) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

gelden.

Niet echter strekt de besproken stelling om aan te toonen, dat bovenstaande vergelijking juist blijft voor $0 < s \leq 1$. Hier en in andere gevallen behoeft deze stelling eene aanvulling en als zoodanig kan soms de volgende stelling dienen.

Wanneer $F(x)$ ontwikkeld is in eene reeks van continue functies, zal uit

$$F(x) = \sum_0^{\infty} u_n(x)$$

kunnen worden afgeleid

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_0^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx,$$

zoodra gegeven is:

1°. $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ is convergent voor $a < x < b$

2°. $\sum_0^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$ convergeert.

3°. De functie $u_n(x)$ wisselt in het vak $a \leq x < b$ niet van teeken.

4°. $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$ is monotoon ten opzichte van x , en wel voor alle n in denzelfden zin.

Ten einde deze stelling te bewijzen, moet in de eerste plaats worden aangetoond, dat de te integreeren reeks gelijkmatig convergeert voor $a \leq x < b$. In hoofdzaak volgt dit uit het vierde gegeven, hetwelk zegt, dat voor alle waarden van n de ongelijkheid

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \leq \frac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)}$$

zal bestaan als $x < y$, of wel dat voor alle waarden van n die ongelijkheid zal gelden als $x > y$ is.

Ik onderstel eerst, dat de ongelijkheid geldt voor $x < y$. Op grond van het derde gegeven zijn

$$\alpha_n = \frac{u_n(x)}{u_n(y)} \text{ en } \alpha_{n+1} = \frac{u_{n+1}(x)}{u_{n+1}(y)}$$

positieve getallen, en de ongelijkheid drukt uit, dat $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ is.

In de rij

$$\alpha_p, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots$$

zijn dus de getallen niet stijgende, en daar volgens het eerste gegeven de reeks $\sum_0^{\infty} u_n(y)$ convergeert, besluit men uit de bekende hulpstelling van ABEL, dat

$$\sum_p^{\infty} u_n(y) \alpha_n = \sum_p^{\infty} u_n(x)$$

gelegen is tusschen $G\alpha_p$, en $K\alpha_p$, waarbij G en K achtereenvolgens de boven- en de benedengrens beteekenen van de sommen

$$u_p(y), u_p(y) + u_{p+1}(y), \dots, u_p(y) + u_{p+1}(y) + u_{p+2}(y) + \dots$$

Wanneer men p groot genoeg neemt, blijven G en K beneden

eene willekeurig kleine grootheid ε , zoodat men heeft voor p groot genoeg

$$\sum_p^{\infty} u_n(x) < \varepsilon \varepsilon_p.$$

In de hier beschouwde onderstelling betreffende het vierde gegeven volgt dus uit de convergentie van $\sum_0^{\infty} u_n(y)$ de gelijkmatige convergentie der reeks $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ voor alle x , voldoende aan $a \leq x < y$, en daar men y kan laten naderen tot b , is bewezen de gelijkmatige convergentie voor $a < x < b$.

Op dezelfde wijze zou men uit

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \leq \left| \frac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)} \right|$$

$$(x > y)$$

hebben besloten tot de gelijkmatige convergentie van $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ in het vak $y < x \leq b$, en daar deze reeks voor $x = a$ convergeert, zou men in het geheele integratievak $a \leq x \leq b$ gelijkmatige convergentie hebben, waaruit onmiddellijk het gestelde zou volgen. Er blijft dus alleen verder na te gaan de onderstelling

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \leq \left| \frac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)} \right|,$$

$$(x < y)$$

waarbij de reeks gelijkmatig convergeert in het vak $a \leq x < b$, en waarbij divergentie voor $x = b$ mogelijk blijft.

Wanneer men stelt

$$\beta_n = \frac{\int_a^b u_n(x) dx}{\int_a^b u_n(y) dy},$$

dan is dit getal, omdat in het integratievak $u_n(x)$ een bepaald teeken heeft, positief en kleiner dan één.

De getallen

$$\beta_p, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots$$

zijn niet stijgende, want men heeft

$$\beta_n - \beta_{n+1} = \frac{\int_a^t |u_n(x)| dx}{\int_a^b |u_n(y)| dy} - \frac{\int_a^t |u_{n+1}(x)| dx}{\int_a^b |u_{n+1}(y)| dy},$$

of

$$\beta_n - \beta_{n+1} = \frac{\int_a^t dx \int_a^b dy |u_n(x)| |u_n(y)| \left\{ \left| \frac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)} \right| - \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \right\}}{\int_a^b u_n(y) dy \cdot \int_a^b u_{n+1}(y) dy},$$

en aangezien in de dubbele integraal y steeds grooter blijft dan x , kan in verband met de gemaakte onderstelling betreffende het vierde gegeven de dubbele integraal nooit negatief zijn.

Opnieuw kan de hulpstelling van ABEL worden toegepast, en uit die toepassing blijkt, dat

$$\sum_p^{\infty} \beta_p \int_a^b u_n(y) dy = \sum_p^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx$$

gelegen is tusschen $\beta_p G'$ en $\beta_p K'$, waarbij G' en K' achtereenvolgens de boven- en de benedengrens beteekenen van de sommen

$$\int_a^b u_p(y) dy, \int_a^b u_p(y) dy + \int_a^b u_{p+1}(y) dy, \dots, \\ \int_a^b u_p(y) dy + \int_a^b u_{p+1}(y) dy + \int_a^b u_{p+2}(y) dy + \dots$$

Door p groot genoeg te nemen, kan men $|G'|$ en $|K'|$ volgens het tweede gegeven kleiner maken dan eene willekeurig kleine grootheid ε , en voor p groot genoeg heeft men dus te gelijker tijd

$$\left| \sum_p^{\infty} \int_a^b u_n(y) dy \right| < \varepsilon, \\ \left| \sum_p^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx \right| < i^2 \beta_p \varepsilon < \varepsilon.$$

Door deze ongelijkheden wordt uitgedrukt, dat de reeks

$$\sum_0^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx$$

ten opzichte van t gelijkmatig convergeert in het vak $a < t < b$.
Bewezen is reeds, dat in het vak $a < x < b$ de reeks $\sum_0^{\infty} u_n(x)$ gelijkmatig convergeert, zoodat zeker de vergelijking

$$\int_a^t F(x) dx = \sum_0^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx$$

geldt, en wanneer men nu ten slotte de hoofdeigenschap der gelijkmatig convergente reeksen toepast, komt er wanneer t tot b nadert

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \sum_0^{\infty} \int_a^t u_n(x) dx = \sum_0^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Hiermede is het bewijs van het gestelde geleverd, en het is duidelijk, dat het bewijs blijft doorgaan, zoo het derde en het vierde gegeven slechts gelden voor alle rangnummers n , die een bepaald rangnummer overtreffen.

Bij de berekening der integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1}}{1+x} dx$$

(waarin $s > 0$ is) kan de stelling worden toegepast.

Men heeft

$$\left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} - \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} = \sum_1^{\infty} (-1)^n \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} x^n,$$

en de reeksontwikkeling is convergent voor $0 \leq x < 1$. De termen wisselen voor $0 < x < 1$ niet van teeken, het quotient

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = x$$

neemt toe, als x aangroeit. De reeks der integralen

$$\Gamma(s) \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

convergeert voor $s > 0$. De stelling is derhalve van kracht, en men heeft voor alle positieve s

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{s-1}}{e^y + 1} dy = \Gamma(s) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

In het algemeen zal de stelling dikwijls gebruikt kunnen worden bij de berekening van eene integraal van de gedaante

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Stel dat voor $f(x)$ eene machtreeks $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ wordt ingevoerd, dat de reeks $\sum_0^{\infty} a_n x^n g(x)$ voor $x = 1$ gaat divergeeren, maar dat de reeks der integralen

$$\sum_0^{\infty} a_n \int_0^1 x^n g(x) dx$$

nog convergent is. Dan zal deze reeks zeker gelijk zijn aan de gezochte integraal, mits $g(x)$ in het integratievak niet van teeken verandert, omdat nu aan alle voorwaarden, waaronder de stelling geldt, is voldaan.

Evenzeer zal men, indien de ontwikkeling

$$f(x) = \sum_0^x a_n x^n$$

geldt voor alle eindige waarden van x , op grond van de stelling mogen besluiten tot

$$\int_0^x f(x) e^{-x} dx = \sum_0^x n! a_n,$$

zoo deze laatste ontwikkeling convergeert.

Wiskunde. -- De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan:

„Over de Integraalvergelijking van FREDHOLM.”

1. Schrijven we de integraalvergelijking van FREDHOLM

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) g(s) ds \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

daarbij aannemende dat de constanten a , b en λ en de functien $f(x)$ en $K(xy)$ gegeven zijn terwijl de functie $g(x)$ gevraagd wordt. Voorts onderstellen we dat $f(x)$ in het interval $a < x < b$ continu is en dat $K(xy)$ in het vierkant $a < x < b$, $a < y < b$ eene eindige waarde bezit.

Volgens de methode van NEUMANN vindt men dan terstond de gevraagde oplossing in den vorm

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,s,\lambda) f(s) ds$$

waarin

$$\Gamma(x,y,\lambda) = K(xy) + \lambda K_2(xy) + \lambda^2 K_3(xy) + \dots \quad (2)$$

en

$$K_n(xy) = \int_a^b K(xs) K_{n-1}(sy) ds .$$

Deze oplossing is echter alleen geldig voor behoorlijk kleine waarden van λ .

Wij willen nu trachten de beroemde oplossing van FREDHOLM, die de onbekende functie $\Gamma(x,y,\lambda)$ geeft als het quotient van twee voor alle waarden van λ convergeerende reeksen uit de eenvoudige oplossing (2) af te leiden.

Nemen we daartoe aan dat de eindige functie $K(xy)$ geschreven kan worden in den vorm

$$K(xy) = X_1(x) Y_1(y) + X_2(x) Y_2(y) + \dots X_n(x) Y_n(x) \quad . \quad (3)$$

waarin de functies X alleen van x en de functies Y alleen van y afhangen, en onderstellen we voorts dat deze functie in het vierkant $a < x < b$, $a < y < b$ eindig is.

Wij kunnen dan aantoonen dat er een lineaire betrekking met constante coëfficiënten tusschen $n + 1$ opvolgende functies $K_i(xy)$ bestaat:

$$\alpha_n K_{p+1}(xy) - \alpha_{n-1} K_{p+2}(xy) + \dots + (-1)^{p-1} \alpha_1 K_{p+n}(xy) + (-1)^n K_{p+n+1}(xy) = 0 \quad . \quad (4)$$

waarin $p = 0, 1, 2, \dots$ en $K_1(xy) = K(xy)$.

Hieruit volgt dan dat de reeks (2) eene wederkeerige reeks is, zoodat zij in den vorm van een gebroken geschreven kan worden.

Men heeft dus

$$\Gamma(xy\lambda) = \frac{B_0 - B_1\lambda + B_2\lambda^2 - \dots + (-1)^{n-1} B_{n-1} \lambda^{n-1}}{1 - \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 - \dots + (-1)^n \alpha_n \lambda^n} \quad (5)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= K_1 \\ B_1 &= \alpha_1 K_1 - K_2 \\ B_2 &= \alpha_2 K_1 - \alpha_1 K_2 + K_3 \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= \alpha_{n-1} K_1 - \alpha_{n-2} K_2 + \dots + (-1)^{n-2} \alpha_1 K_{n-1} + (-1)^{n-1} K_n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

en het is deze vergelijking (5) die door overgang tot de limiet voor $n = \infty$ juist het resultaat van FREDHOLM geeft.

2. Om de betrekking (4) te bewijzen schrijven we

$$\begin{vmatrix} K(xy) & K(x, x_1) & \dots & K(x, x_n) \\ K(x_1 y) & K(x_1, x_1) & \dots & K(x_1, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n y) & K(x_n, x_1) & \dots & K(x_n, x_n) \end{vmatrix} = K \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_n \\ y, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

dan is door ontbinding van dezen determinant naar de elementen van de eerste rij, gemakkelijk aan te toonen, zooals ook reeds door FREDHOLM is geschied, dat

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_n \\ y, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n = K(xy) \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} x, x_1, \dots, x_n \\ x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n \\ &\quad - n \int_a^b K(x, \tau_1) d\tau_1 \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} \tau_1, x_1, \dots, x_{n+1} \\ y, x_1, \dots, x_{n+1} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Herhalen we deze bewerking voor de laatste $n - 1$ -voudige integraal, dan komt

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} \tau_1, x_1, \dots, x_{n-1} \\ y, x_1, \dots, x_{n-1} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_{n-1} &= K(\tau_1, y) \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_{n-1} \\ x_1, \dots, x_{n-1} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &\quad - (n-1) \int_a^b K(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \int_a^b \int_a^b K \begin{pmatrix} \tau_2, x_1, \dots, x_{n-2} \\ y, x_1, \dots, x_{n-2} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_{n-2}. \end{aligned}$$

Gaan we zoo voort, dan verkrijgen we, invoerende

$$k! \alpha_k \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_k$$

na p bewerkingen

$$I_n = n! \alpha_n K(xy) - n! \alpha_{n-1} K_2(xy) + n! \alpha_{n-2} K_3(xy) - \dots + (-1)^{p-1} n! K_p(xy) +$$

$$+ (-1)^p n(n-1) \dots (n-p+1) \int_a^b \dots \int_a^b K(x_1 x_2) \dots K(x_{p-1} x_p) / x_1 \dots dx_p \times$$

$$\times \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_{n-p} \\ y_1 \dots y_{n-p} \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_{n-p}.$$

Stelt men nu $p = n - 1$, dan vindt men

$$I_n = n! [\alpha_n K(xy) - \alpha_{n-1} K_2(xy) + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_1 K_n(xy) + (-1)^n K_{n+1}(xy)] \quad (7)$$

waaruit terstond de waarden B_p in (6) zijn af te leiden

$$B_p = \frac{I_p}{p!} = \frac{1}{p!} \int_a^b \dots \int_a^b K \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_p \\ y_1 \dots y_p \end{matrix} \right) dx_1 \dots dx_p. \quad (8)$$

Heeft nu $K(xy)$ den vorm (3) dan kan men schrijven

$$K \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) & \dots & X_n(x) & 1 \\ X_1(y) & X_2(y) & \dots & X_n(y) & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & \dots & Y_n(x_1) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1(x_n) & X_2(x_n) & \dots & X_n(x_n) & 1 \\ Y_1(x_n) & Y_2(x_n) & \dots & Y_n(x_n) & 0 \end{vmatrix}$$

waaruit blijkt dat $I_n = 0$. Uit de vergelijking (7) volgt dus de vergelijking (4) voor het geval $p = 0$. Schrijft men deze laatste

$$\alpha_n K_1(xs) - \alpha_{n-1} K_2(xs) + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_1 K_n(xs) + (-1)^n K_{n+1}(xs) = 0$$

en integreert tusschen a en b , na vooraf met $K(sy) ds$ vermenigvuldigd te hebben, dan vindt men

$$\alpha_n K_2(xy) - \alpha_{n-1} K_3(xy) + \dots + (-1)^{n-1} \alpha_1 K_{n-1}(xy) + (-1)^n K_{n+2}(xy) = 0.$$

Bij herhaling dezer bewerking blijkt dat de vergelijking (4) voor alle waarden van p blijft gelden.

3. Laat men nu n oneindig worden dan ziet men gemakkelijk dat de vergelijking (5) overgaat in

$$F(xy\lambda) = \frac{D(xy\lambda)}{D(\lambda)}$$

waarin

$$D(xy\lambda) = K(xy) + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda^p}{p!} \int_a^b \int_a^b K \left(\frac{x^{x_1 \dots x_p}}{y^{y_1 \dots y_p}} \right) dx_1 \dots dx_p. \quad (9)$$

en

$$D(\lambda) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda^p}{p!} \int_a^b \int_a^b K \left(\frac{x_1^{x_1 \dots x_p}}{x_1 \dots x_p} \right) dx_1 \dots dx_p. \quad (10)$$

Voor het bewijs dat de eerste reeks voor alle waarden van λ en voor xy in het bovengenoemde vierkant gelijkmatig convergent is en de laatste reeks voor alle waarden van λ absoluut convergent is verwijzen we naar de oorspronkelijke verhandeling van FREDHOLM.

4. Uit het voorgaande kan men ook gemakkelijk den vorm der coëfficiënten afleiden die door PLEMELJ gevonden is.

Ontbindt men nl. op dezelfde wijze als in Art. 2 is geschied, dan vindt men

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K \left(\frac{x_1^{x_1 \dots x_p}}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_p^{x_p}} \right) dx_2 \dots dx_p &= K(x_1, x_1) \int_a^b \int_a^b K \left(\frac{x_2 \dots x_p}{x_2 \dots x_p} \right) dx_2 \dots dx_p \\ &- (p-1) \int_a^b K(x_1, \tau_1) d\tau_1 \int_a^b \int_a^b K \left(\frac{\tau_1^{x_2 \dots x_{p-1}}}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_{p-1}^{x_{p-1}}} \right) dx_2 \dots dx_{p-1} \\ &\int_a^b \int_a^b K \left(\frac{\tau_1^{x_2 \dots x_{p-1}}}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_{p-1}^{x_{p-1}}} \right) dx_2 \dots dx_{p-1} - K(\tau_1, x_1) \int_a^b \int_a^b K \left(\frac{x_2 \dots x_{p-1}}{x_2 \dots x_{p-1}} \right) dx_2 \dots dx_{p-1} \\ &- (p-2) \int_a^b K(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \int_a^b \int_a^b K \left(\frac{\tau_2^{x_2 \dots x_{p-2}}}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_{p-2}^{x_{p-2}}} \right) dx_2 \dots dx_{p-2} \end{aligned}$$

enz.

Schrijft men nu

$$\int_a^b K_k(x, x) dx = a_k$$

dan blijkt uit het voorgaande, als men nog over x_1 tusschen a en b integreert

$$p! \alpha_p = (p-1)! a_1 \alpha_{p-1} - (p-1)! a_2 \alpha_{p-2} + \dots + (-1)^p (p-1)! a_{p-1} \alpha_1 + (-1)^{p+1} (p-1)! a_p. \quad (11)$$

of

$$a_p = a_{p-1} \alpha_1 - a_{p-2} \alpha_2 + a_{p-3} \alpha_3 - \dots + (-1)^p a_1 \alpha_{p-1} + (-1)^{p+1} p \alpha_p.$$

Voor $p = 1, 2, 3 \dots p-1$, p is dus

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 \\ a_2 &= a_1 \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ a_3 &= a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$a_{p-1} = a_{p-2} \alpha_1 - a_{p-3} \alpha_2 + a_{p-4} \alpha_3 - \dots + (-1)^p (p-1) \alpha_{p-1} \\ (-1)^p p \alpha_p + a_p = a_{p-1} \alpha_1 - a_{p-2} \alpha_2 + a_{p-3} \alpha_3 - \dots + (-1)^p a_1 \alpha_{p-1}$$

Elimineert men hieruit $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}$ dan komt

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & p-1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 2 & \dots & 0 & a_2 & a_1 & p-2 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p! \alpha_p & a_{p-1} & a_{p-2} & a_{p-3} & \dots & p-1 & a_{p-1} & a_{p-2} & a_{p-3} & \dots & 1 \\ & a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & a_1 & a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & a_1 \end{array} \quad (12)$$

Elimineert men evenzoo $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 \\ a_2 &= a_1 \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ a_3 &= a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$a_{p-1} = a_{p-2} \alpha_1 - a_{p-3} \alpha_2 + a_{p-4} \alpha_3 - \dots + (-1)^p (p-1) \alpha_{p-1} \\ a_p = a_{p-1} \alpha_1 - a_{p-2} \alpha_2 + a_{p-3} \alpha_3 - \dots + (-1)^p a_1 \alpha_{p-1} + (-1)^{p+1} p \alpha_p \\ (-1)^{p-1} B_p + K_{p+1} = K_p \alpha_1 - K_{p-1} \alpha_2 + K_{p-2} \alpha_3 - \dots + (-1)^p K_2 \alpha_{p-1} + (-1)^{p+1} K_1 \alpha_p$$

waarvan de laatste is ontleend aan (6), dan komt na eene kleine herleiding:

$$\begin{array}{cccc|cccc} K_1 & p & 0 & \dots & 0 \\ K_2 & a_1 & p-1 & \dots & 0 \\ p! B_p & K_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ & K_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & 1 \\ & K_{p+1} & a_p & a_{p-1} & \dots & a_1 \end{array} \quad (13)$$

De formules (12) en (13) stemmen juist overeen met die van PLEMELJ.

5. Onderstelt men nu dat de kern $K(xy)$ den vorm heeft

$$K(xy) = \frac{I(xy)}{(x-y)^2}$$

waarin $I(xy)$ in het bovengenoemde vierkant eindig is terwijl

$\alpha < \frac{n-1}{n}$, dan worden de kern $K(xy)$ en de daaruit door iteratie afgeleide kernen $K_2 K_3 \dots K_{n-1}$ oneindig voor $x = y$, terwijl alle volgende

$$K_n, K_{n+1}, K_{n+2} \dots$$

overall in het vierkant eindig blijven. Verder blijven alle integralen

$$\int_a^b K_m(xs) f(s) ds \quad (m = 1, 2, 3 \dots \infty)$$

eindig in het geheele vierkant.

Voor dit geval heeft POINCARÉ¹⁾ aangetoond dat de oplossing van FREDHOLM nog doorgaat wanneer men in de ontwikkeling van de determinanten

$$K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$$

en

$$K \begin{pmatrix} x & x_1 & \dots & x_p \\ y & x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix}$$

die bestaan uit de som van produkten van telkens p of $p + 1$ factoren, die produkten weglaat waarin cykels van minder dan n letters voorkomen. Onder een cykel van k letters wordt verstaan een produkt

$$K(\alpha\beta) K(\beta\gamma) K(\gamma\delta) \dots K(\mu\alpha)$$

waarin het aantal letters $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \mu$ gelijk is aan k .

Wij zullen nu aantoonen dat deze gewijzigde coëfficiënten uit die van PLEMELJ terstond kunnen worden afgeleid door in deze $a_1 = a_2 = \dots a_{n-1} = 0$ te stellen.

Merkt men op dat uit de betrekking (4) volgt als men $y = x$ stelt en dan tusschen a en b integreert

$$\alpha_n a_{p+1} - \alpha_{n-1} a_{p+2} + \dots + (-1)^n a_{p+n+1} = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

dan ziet men dat de reeks $a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^2 + \dots$ eene wederkeerige is, zoodat

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^2 + \dots = \frac{b_0 - b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 - \dots + (-1)^{n-1} b_{n-1} \lambda^{n-1}}{1 - \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 - \dots + (-1)^n \alpha_n \lambda^n}$$

waarin

$$b_p = \alpha_p a_1 - \alpha_{p-1} a_2 + \alpha_{p-2} a_3 - \dots + (-1)^{p-1} \alpha_{p+1} \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

of volgens (11)

$$b_p = (p+1) \alpha_{p+1}.$$

¹⁾ Act. Math. Bd. 33.

Laat men nu n oneindig worden dan is dus

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \lambda^2 + \dots = \frac{a_1 - 2a_2 \lambda + 3a_3 \lambda^2 - \dots}{1 - a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda^3 + \dots} = - \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$$

of

$$D(\lambda) = e^{-a_1 \lambda - \frac{a_2}{2} \lambda^2 - \frac{a_3}{2} \lambda^3 - \dots}$$

Schrijft men deze vergelijking

$$D(\lambda) e^{a_1 \lambda + \frac{a_2}{2} \lambda^2 + \frac{a_3}{2} \lambda^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n-1} \lambda^{n-1}} = e^{-\frac{a_n}{n} \lambda^n - \frac{a_{n+1}}{n+1} \lambda^{n+1} - \dots} = 1 + (-1)^n \left\{ \mathcal{L}_n^0 \frac{\lambda^n}{n!} - \mathcal{L}_{n+1}^0 \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right\}$$

dan blijkt dat het eerste lid onafhankelijk is van $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$. Is dus

$$D(\lambda) = 1 - \mathcal{L}_1 \lambda - \mathcal{L}_2 \frac{\lambda^2}{2!} - \mathcal{L}_3 \frac{\lambda^3}{3!} + \dots$$

dan is

$$\left(1 - \mathcal{L}_1 \lambda + \mathcal{L}_2 \frac{\lambda^2}{2!} - \mathcal{L}_3 \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right)_{a_1=a_2=\dots=a_{n-1}=0} = 1 + (-1)^n \left\{ \mathcal{L}_n^0 \frac{\lambda^n}{n!} - \mathcal{L}_{n+1}^0 \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} - \dots \right\}$$

waaruit volgt

$$\mathcal{L}_p^0 = (\mathcal{L}_p)_{a_1=a_2=\dots=a_{n-1}=0} \dots \dots \dots (14)$$

en

$$\mathcal{L}_1^0 = \mathcal{L}_2^0 = \dots = \mathcal{L}_{n-1}^0 = 0.$$

Evenzoo heeft men

$$D(x\lambda) = D(\lambda) \{K_1 + \lambda K_2 + \lambda^2 K_3 + \dots\}$$

of

$$D(x\lambda) e^{a_1 \lambda + \frac{a_2}{2} \lambda^2 - \frac{a_3}{3} \lambda^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n-1} \lambda^{n-1}} = e^{-\frac{a_n}{n} \lambda^n - \frac{a_{n+1}}{n+1} \lambda^{n+1} - \dots} \{K_1 + \lambda K_2 + \lambda^2 K_3 + \dots\}$$

dus is ook hier het eerste lid onafhankelijk van $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$.

Schrijft men dus

$$D(x\lambda) = E_0 + E_1 \lambda + E_2 \frac{\lambda^2}{2!} - E_3 \frac{\lambda^3}{3!} + \dots$$

en

$$D(xy\lambda)e = a_1\lambda + \frac{a_2}{2}\lambda^2 + \frac{a_3}{3}\lambda^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n-1}\lambda^{n-1} \\ = E_0^0 - E_1^0\lambda + E_2^0\frac{\lambda^2}{2!} - E_3^0\frac{\lambda^3}{3!} + \dots$$

dan is, als men $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ stelt

$$\left(E_0^0 - E_1^0\lambda + E_2^0\frac{\lambda^2}{2!} - E_3^0\frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right)_{a_1=a_2=\dots=a_{n-1}=1} = E_0^0 - E_1^0\frac{\lambda^2}{2!} - E_3^0\frac{\lambda^3}{3!} + \dots$$

zoodat

$$E_p^0 = (E_p)_{a_1=a_2=\dots=a_{n-1}=0} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (15)$$

Uit het voorgaande blijkt dat de formules voor $D(xy\lambda)$ en $D(\lambda)$ ingeval $K(xy) = \frac{I(xy)}{(x-y)^2} \left(\alpha < \frac{n-1}{n} \right)$ nog kunnen toegepast worden mits men deze schrijft in den vorm van PLEMELJ en daarin stelt

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1.$$

Uit den regel van POINCARÉ kan men dit resultaat ook terstond afleiden. Denkt men toch de coëfficiënten van FREDHOLM door die van PLEMELJ vervangen en merkt men op dat de integratie van een cykel bestaande uit k letters $\alpha \beta \gamma \dots \mu$ oplevert

$$\int_a^b \dots \int_a^b K(\alpha\beta) K(\beta\gamma) \dots K(\mu\alpha) d\alpha \dots d\mu = \int_a^b K_k(\alpha\alpha) d\alpha = a_k$$

dan ziet men dat men uit de coëfficiënten van PLEMELJ die termen moet weglaten waarin

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1}$$

voorkomen, of dat men daarin moet stellen

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0.$$

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van Dr. E. H. BÜCHNER: „Onderzoekingen over het radiumgehalte van gesteenten”. II.

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

In voortzetting mijner studiën over het radiumgehalte van de aardkorst¹⁾ heb ik eenige sedimentaire gesteenten in onderzoek genomen; de resultaten mijner bepalingen worden in het volgende medegedeeld. Voor de wijze van onderzoek kan in hoofdzaak naar

¹⁾ Zie deze Verslagen **19**, 210 (25 Juni 1910).

mijne eerste mededeeling worden verwezen; slechts over het in oplossing brengen der stof moet ik even uitweiden. Aangezien ik mij bepaald heb tot kalkgesteenten, die op kleine resten na, in verdund zoutzuur oplossen, was de gang van zaken veel eenvoudiger dan bij de eruptieve gesteenten het geval was. Ik nam, als steeds, 25 gram van het fijngespoederde gesteente en loste onder zachte verwarming in 250 c. c. verdund zoutzuur op. Een meestal kleine rest bleef achter, die, na door filtratie van de oplossing gescheiden te zijn, met een weinig natriumcarbonaat werd omgesmolten. Uittrekken met water gaf dan eene oplossing, waarin ik steeds zwavelzuur kon aantoonen; aangezien de aanwezigheid van radium hierdoor uitgesloten is, wierp ik deze vloeistof weg. Het gewoonlijk zeer kleine residu van carbonaten werd in enkele druppels zoutzuur opgelost en bij de hoofdmassa gevoegd; deze werd dan verder geheel op de vroeger beschreven wijze onderzocht. Voor alle zekerheid heb ik tijdens deze metingen mijn electroscop nog eens met de radiumoplossing van Professor RUTHERFORD geijkt; ik verkreeg daarbij precies hetzelfde cijfer als in de vorige mededeeling.

Het onderzoek heeft geloopt over vier soorten marmer, zes kalksteenen, die ik uit verschillende geologische formaties koos, en één krijtsoort. Alle deze gesteenten werden mij door de firma Dr. F. KRANTZ in Bonn, in verse exemplaren, geleverd.

De uitkomsten zijn in onderstaande tabel vereenigd, waarin de cijfers aangeven de hoeveelheid radium per gram gesteente, uitgedrukt in 10^{-12} grammen.

Marmer	Carrara	1,3
„	Piasco, Valle del Po	1,6
„	Auerbach, Bergstrasse	1,7
„	Villmar, Nassau	0,8
Kalksteen, siluur	Kuchelbad, Prag	0,7
„ carbon	Ratingen, Düsseldorf	4,3
„ trias	Jena	0,4
„ lias	Vaihingen, Württemberg	2,1
„ ond. krijtform.	Egestorf, Hannover	0,3
„ eocaen	Parijs	0,8
Krijt, diluvium	Pietersberg, Maastricht	1,5

Wij zien hieruit, dat, als we het ééne gesteente uit de steenkoolformatie buiten rekening laten, de overige cijfers weinig uiteenloopen; en zeker minder, dan bij de eruptiefgesteenten gevonden wordt. Wij nemen dan ook geen verband waar tusschen het radiumgehalte en

den ouderdom der formatie, waaruit de onderzochte specimina afkomstig zijn; de getallen liggen willekeurig door elkaar. Voor de verschillende soorten marmer geldt hetzelfde: de beide eerste zijn geologisch veel jonger (Jura) dan de twee andere, doch een overeenkomstig verschil in de hoeveelheid aangetroffen radium vinden wij niet.

Het algemeen gemiddelde der bovengegeven cijfers is 1,4 en stemt vrijwel overeen met het gemiddelde, dat ik uit verschillende (in het geheel 9) getallen, door STRUTT ¹⁾, EVE ²⁾, COLERIDGE FARR en FLORENCE ³⁾ voor kalksteen opgegeven, berekend heb, en dat 1,1 bedraagt. Daarentegen volgt uit de opgaven van JOLY ⁴⁾, die op een twaalfal dergelijke gesteenten betrekking hebben, het veel hooger gemiddelde 3,3. Of dit verschil aan toeval toe te schrijven is, dan wel aan de kleine afwijkingen tusschen de verschillende methoden van bepaling, is thans nog niet uit te maken. In dit verband wijs ik er echter op, dat JOLY bij zijne proeven ook een kalksteen van Vaihingen onderzocht heeft, en als uitkomst 3,0 vond, terwijl men in mijn tabel 2,1 leest; dit zou eerder invloed der wijze van werken doen onderstellen.

Ten slotte wil ik nog eene opmerking maken naar aanleiding van de meermalen geuite meening, dat sedimentaire gesteenten in het algemeen minder radium bevatten dan eruptieve. Inderdaad is het gemiddelde van alle onderzochte sedimentaire lager dan dat van alle eruptieve gesteenten, doch, als men de laatste in groepen indeelt, blijkt terstond, dat dit bijna uitsluitend veroorzaakt wordt door het hooge radiumgehalte, dat granieten kenmerkt, terwijl het feit, dat er juist van dit gesteente zoo bijzonder veel stukken onderzocht zijn, nog meewerkt, om het algemeen gemiddelde hooger te maken. Bepaalt men bijv. het gemiddelde van de 10 uitkomsten, door FARR en FLORENCE en door FLETCHER ⁵⁾ met trachyt verkregen, dan vindt men 1,0; dus nog iets minder dan boven voor kalksteen opgegeven. Een dergelijke uitkomst schijnt ook bij andere eruptiefgesteenten verkregen te zullen worden; ik zal daarop later terugkomen, als er eerst nog meer afzonderlijke stukken van die gesteenten onderzocht zijn.

Anorg. Chem. Laboratorium Universiteit van Amsterdam.

¹⁾ Proc. Roy. Soc. A **78**, 150 (1906).

²⁾ Phil. Mag. [6] **14**, 231 (1907).

³⁾ Phil. Mag. [6] **18**, 812 (1909).

⁴⁾ Radioactivity and geology, Londen 1909, p. 60.

⁵⁾ Phil. Mag. [6] **20**, 36 (1910).

Wiskunde. — De Heer P. H. SCHOUTE biedt eene mededeeling aan van den Heer LUCIEN GODEAUX te Luik : „*Sur un système de coniques de l'espace*”.

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

Dans cette note, j'étudie un système cinq fois infini formé par des coniques de l'espace et qui est lié à six connexes (point-plan) d'ordre un. Ce système de coniques est en correspondance birationnelle avec l'ensemble des éléments de l'espace constitués par une droite et un plan passant par cette droite. La conique qui correspond à l'ensemble d'une droite d et d'un plan π passant par cette droite, est située dans le plan π et une certaine transformation quadratique de ce plan en lui-même lui substitue la droite d . C'est dans la définition de cette correspondance quadratique qu'interviennent les connexes donnés.

1. Soient dans l'espace deux ternes de connexes indépendants et du premier ordre : $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$. Les équations de ces connexes sont respectivement

$$\begin{aligned} g_1(x, u) &= x_1 g_{11}(u) + \dots + x_4 g_{14}(u) = 0, \\ g_2(x, u) &= x_1 g_{21}(u) + \dots + x_4 g_{24}(u) = 0, \\ g_3(x, u) &= x_1 g_{31}(u) + \dots = 0, \\ \psi_1(x, u) &= x_1 \psi_{11}(u) + \dots + x_4 \psi_{14}(u) = 0, \\ \psi_2(x, u) &= x_1 \psi_{21}(u) + \dots + x_4 \psi_{24}(u) = 0, \\ \psi_3(x, u) &= x_1 \psi_{31}(u) + \dots = 0, \end{aligned}$$

les coordonnées ponctuelles étant (x_1, x_2, x_3, x_4) et les coordonnées tangentielles (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Soient m, n les classes respectives des trois premiers et des trois derniers connexes, de sorte que les fonctions $g_{ik}(u)$ sont de degré m et les fonctions $\psi_{ik}(u)$ de degré n par rapport aux coordonnées (u_1, u_2, u_3, u_4) .

Considérons le plan générique

$$u^x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \quad (u)$$

Les points qui avec ce plan satisfont à l'équation du connexe Φ_1 , forment un plan qui rencontre (u) en une droite α_1 . De même, les connexes $\Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ déterminent dans le plan (u) des droites $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Imaginons une transformation quadratique du plan (u) en lui-même, qui fait correspondre à une droite de ce plan une conique circonscrite au triangle formé par les droites $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Pour déterminer

complètement cette transformation, nous supposons qu'aux droites $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ correspondent des coniques dégénérées formées respectivement par les droites α_2 et α_3, α_3 et α_1, α_1 et α_2 .

Cherchons à former l'équation de la conique ε qui correspond à la droite d représentée par les équations

$$u_r = 0, u_s = 0 \dots \dots \dots d$$

Effectuons sur tout l'espace la transformation (T) , birationnelle, définie par

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u_1 y_1 : u_2 y_2 : u_3 y_3 : y_4 \quad u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = T$$

Le plan $u_r = 0$ devient le plan $y_1 = 0$, et l'équation de la droite α'_1 qui correspond à α_1 s'écrit

$$[\alpha'_1] = y_1(u_1 f_{11} - u_1 f_{14}) + y_2(u_4 f_{12} - u_2 f_{14}) + y_3(u_1 f_{13} - u_3 f_{14}) = 0, (\alpha'_1).$$

Les droites $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ se transforment en des droites $\alpha'_2, \alpha'_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ ayant des équations analogues.

L'équation de la droite d' , transformée de d , est

$$y_1(u_4 a_1 - u_1 a_4) + y_2(u_4 a_2 - u_2 a_4) + y_3(u_4 a_3 - u_3 a_4) = 0. (d')$$

La transformation quadratique du plan (u) en lui-même devient une transformation analogue du plan $y_4 = 0$ en lui-même. Une droite

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 = 0. \dots \dots \dots (b)$$

est transformée en une conique d'équation

$$(k_{11} b_1 - k_{12} b_2 + k_{13} b_3) [\alpha'_2] [\alpha'_3] + \dots + (k_{31} b_1 + k_{32} b_2 + k_{33} b_3) [\alpha'_1] [\alpha'_2] = 0. (1)$$

Les indéterminées k seront éliminées en tenant compte de ce que, si la droite (b) coïncide avec β'_1 ou β'_2 ou β'_3 , la conique correspondante représentée par (1) dégénère en α'_2 et α'_3 , ou α'_3 et α'_1 , ou α'_1 et α'_2 . Un calcul simple montre que la conique (ε') , transformée de d' , a pour équation :

$$\Delta_{23} [\alpha'_2] [\alpha'_3] + \Delta_{31} [\alpha'_3] [\alpha'_1] + \Delta_{12} [\alpha'_1] [\alpha'_2] = 0, \dots (2)$$

où l'on a posé pour abrégier

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \end{vmatrix}, \Delta_{31} \dots, \Delta_{12} \dots$$

La conique (ε') correspond évidemment à la conique (ε) , transformée de d , dans le plan (u) ; les équations de cette conique s'obtiennent donc en opérant sur (2) la transformation (T^{-1})

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = u_1 : u_2 : u_3 : u_r \dots \dots \dots (T^{-1})$$

Tous calculs faits, on trouve

$$\Delta_{22} \psi_2 \psi_3 + \Delta_{31} \psi_3 \psi_1 + \Delta_{12} \psi_1 \psi_2 = 0, \left\{ \begin{array}{l} u_r = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. (\varepsilon)$$

Nous voyons ainsi qu'à l'ensemble d'un plan et d'une droite de ce plan correspond une conique de ce plan, et inversement, car des équations (ε) on peut passer aux équations

$$u_x = 0, a_x = 0.$$

Les coniques ε forment par suite un système quintuplement infini E.

2. A une droite d

$$a_x = 0, b_x = 0, (d)$$

correspondent évidemment une infinité simple de coniques de E et ces coniques engendrent une surface F dont nous allons rechercher l'ordre.

Posons

$$u_i = a_i + \lambda b_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Effectuons cette substitution sur la première des équations (ε). En soustrayant la première ligne de la seconde dans les déterminants $\Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}$, ceux-ci seront du degré 2m en λ; par suite on obtiendra une équation de degré 2(m+n) en λ. En remplaçant dans cette équation λ par la valeur tirée de

$$a_x + \lambda b_x = 0,$$

on obtiendra l'équation de la surface F.

Remarquons qu'un plan passant par d rencontre F en une seule conique; on a donc le théorème suivant:

Les coniques correspondantes à une droite engendrent une surface d'ordre 2(m+n+1) passant 2(m+n) fois par cette droite.

3. Nous allons maintenant rechercher le lieu des droites de l'espace auxquelles correspondent des coniques de F passant par un point fixe P. Ce lieu est visiblement un complexe II. Comme nous avons pris pour les équations des connexes Φ, Ψ des relations tout à fait générales, il nous suffira pour trouver le degré de II de chercher le nombre des droites du plan $x_4 = 0$, passant par le point $x_2 = x_3 = v = 0$, auxquelles correspondent des coniques de E passant par le point P ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Cela introduit les hypothèses $u_1 = u_4 = 0, a_2 = 0$ dans les équations (ε) du § 1. Nous pouvons encore supposer sans aucune restriction, que a_4 est nul, car dans les équations (ε) les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4 se réduisent à trois paramètres homogènes effectifs.

Pour que les plans

$$u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \quad a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

se rencontrent en une droite du plan $x_3 = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$a_2 u_3 - a_3 u_2 = 0 (3)$$

Posant $k = \frac{u_2}{u_3}$ et tenant compte de (3), la première équation (ϵ), où les x représentent les coordonnées du point fixe P , est de degré $2(m + n + 1)$ en k et, par suite, le complexe \mathbf{II} est de degré $2(m + n + 1)$.

Les droites dont les coniques correspondantes dans E , passent par un point fixe P , forment un complexe \mathbf{II} de degré $2(m + n + 1)$.

3. Considérons maintenant un point P et une droite p passant par ce point. Les coniques de E qui passent par P et dont le plan passe par p sont les transformées des droites d'une congruence π contenue dans le complexe \mathbf{II} .

On peut voir immédiatement que la congruence π est du premier ordre. Si l'on veut en effet chercher le nombre de droites de cette congruence passant par un point quelconque Q , on voit que le plan (u) est complètement déterminé par la condition de passer par la droite p et par le point Q . Dans ce plan, les droites auxquelles correspondent des coniques passant par P forment un faisceau, et il y a une seule droite de ce faisceau passant par Q , ce qui démontre notre assertion. On voit aussi que la droite p est singulière pour la congruence π .

Soient $x_1 = x_2 = 0$ les équations de la droite p , $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ les coordonnées du point P . Posons $k = \frac{u_2}{u_1}$ et écrivons les équations d'une conique de E passant par P et dont le plan contient p ; soient

$$f(k, a) = 0, \quad x_1 + kx_2 = 0,$$

les équations obtenues. L'équation $f = 0$, provenant de la première des équations (ϵ) du § 1, est de degré $2(m + n) + 1$ en k et linéaire en (a_1, a_2, a_3, a_4) .

Supposons $x_2 = 0$ et introduisons encore l'hypothèse $a_1 = 0$ dans l'équation $f = 0$. Le centre du faisceau formé par les droites du plan

$$x_1 + kx_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

($k \geq 0$) auxquelles correspondent des coniques passant par P , est défini par l'équation (4) et les équations

$$b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \quad c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0,$$

moyennant

$$f(k, b) = 0, \quad f(k, c) = 0.$$

On en conclut que la seconde ligne singulière de π est une courbe d'ordre $4(m + n + 1) + 1$ s'appuyant évidemment $4(m + n + 1)$ fois sur la droite p (Cette courbe sera définie dans le voisinage de $x_2 = 0$ par continuité).

Le lieu des droites auxquelles correspondent des coniques de E passant par un point P et dont les plans passent par une droite p issue de P , est une congruence π d'ordre un et de classe $4(m+n+1)+1$, dont la droite p et une courbe d'ordre $4(m+n+1)+1$ sont les lignes singulières.

On remarquera encore que deux droites du complexe H , n'appartenant pas à un même faisceau de rayons dont le plan passe par P , appartiennent à une et à une seule congruence π , donc :

Le complexe H possède un réseau de congruences π .

5. Il peut arriver que la droite que nous avons désigné par α_1 (§ 1) cesse, pour des positions particulières du plan (u) , d'être définie d'une manière univoque; cela a lieu pour les plans (u) satisfaisant aux équations

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{11}(u) & \varphi_{12}(u) & \varphi_{13}(u) & \varphi_{14}(u) \\ u_1 & u_3 & u_2 & u_4 \end{array} = 0. \quad (5)$$

Alors en effet le plan défini par le complexe Φ_1 coïncide avec le plan (u) , et on peut prendre toute droite de ce plan pour la droite α_1 . La transformation quadratique du plan (u) en lui-même présente dans ce cas deux degrés d'indétermination, et l'on peut dire que: *A toute droite d'un plan u , donné par les équations (5), correspondent ∞^2 coniques du plan.*

Les équations (5) sont vérifiées par $m^3 + m^2 + m + 1$ plans. Répétant le même raisonnement pour les complexes Φ_2, Φ_3 , on voit que :

Il existe $3(m+1)(m^2+1)$ plans tels qu'à toute droite de ce plan corresponde une double infinité de coniques de ce plan.

Tout plan de l'espace contient généralement un réseau de coniques de E ; si ce plan vérifie les équations

$$\begin{array}{cccc} \psi_{i1}(u) & \psi_{i2}(u) & \psi_{i3}(u) & \psi_{i4}(u) \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

On voit que chacune des coniques qu'il contient peut être considérée comme correspondant à une droite arbitraire de ce plan, donc :

Il existe $3(n+1)(n^2+1)$ plans tels qu'à toute droite de ce plan correspondent les coniques d'un réseau de ce plan, ce réseau étant le même pour toutes les droites d'un des plans.

Tout plan satisfaisant soit aux équations (5) ou à leurs analogues relatives à Φ_2, Φ_3 , soit aux équations (6), est évidemment principal pour tout complexe H relatif à un point P de ce plan.

Morlanvalz, décembre 1910.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer L. S. ORNSTEIN: „*Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer*” II.

(Mede aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES).

§ 4. In § 2 heb ik verschillende ensembles besproken en daarbij is gebleken dat zij eenerzijds wegens verwantschap met het tijdsensemble en anderzijds ten gevolge van het feit dat de overgrootste meerderheid hunner systemen aequivalent zijn, niet ongeëigend zijn om er de eigenschappen van een werkelijk systeem uit af te leiden. Ik zal in deze paragraaf een andere redeneering aangeven die het belang der energie-vlak (en der microkanonische ensembles) voor de bestudeering van werkelijke stelsels in het licht kan stellen.

Wanneer wij in de werkelijkheid een systeem van bepaalde energie wenschen te verkrijgen, gaan wij uit van een systeem van dezelfde soort en voeren daaraan energie toe of onttrekken die eraan, terwijl wij de uitwendige coördinaten op de vereischte grootte brengen. Laten wij nu onderstellen, dat het ons mogelijk is een systeem van juist de gevraagde energie te construeeren. Indien wij nu geen bijzondere voorzorgen in acht nemen om een systeem van bepaalde inwendige gesteldheid te krijgen, zal het systeem dat door onze bewerking ontstaat, één der vele de beschouwde energie bezittende stelsels zijn, doch het zal ons onmogelijk zijn aan te geven welk systeem precies ontstaat. Eigenlijk hebben wij het zelfs niet in onze hand den inwendigen toestand naar willekeur te regelen, daar het ons onmogelijk is direct op elk der vrijheidsgraden (bijv. op de phase der molekulen) in te grijpen, doch wij kunnen slechts enkele grootheden als den energie-inhoud, de dichtheid, de concentratie enz. in groote gebieden, en deze grootheden nog met matige nauwkeurigheid, naar onze willekeur regelen. Wanneer wij dus in tallooze gevallen de energie ε aan een systeem geven zullen er telkens andere toestanden ontstaan, hetzelfde zal het geval zijn als wij een groot aantal gelijksoortige systemen gelijktijdig op de energie ε brengen ²⁾.

¹⁾ De waarschijnlijkheid van het homogene systeem w_0 stellend heeft men voor die van een systeem dat door de getallen τ_j gespecificeerd is

$$w = w_0 e^{-\beta \sum_k \tau_k^2 \varepsilon}$$

β is een functie van het volume, de middellijn der molekulen en de temperatuur. Zie deze Verslagen p. 823.

²⁾ Waarbij zich nog de omstandigheid voor kan doen, dat de systemen waarvan wij uitgaan verschillen vertoonen.

Op deze wijze ontstaat een ensemble dat wij gevoeglijk een „werkelijk“ energievlak ensemble kunnen noemen.

In plaats van aan N systemen de energie ε te geven kunnen wij ook N systemen van deze energie in de natuur uitgekozen denken, het aldus ontstaande ensemble zal ik natuur-energie-vlak ensemble noemen. Hoewel de natuur- en de werkelijke energie-vlak ensembles niet identiek zijn kunnen de volgende beschouwingen m. m. op beide toegepast. Ik zal daarom verder slechts de werkelijke energie-vlak ensembles beschouwen. Indien wij herhaalde malen een werkelijk ensemble construeeren zal het aantal systemen dat in een bepaald element der ruimte E_{2n-1} ligt van geval tot geval verschillend zijn. Hoe groot dit aantal is kan niet gezegd worden als men niets naders weet over de wijze waarop de energie aan de systemen wordt toegevoerd of onttrokken. Gaat men echter volkomen planloos te werk, dan zal in de overgrootste meerderheid der mogelijke gevallen de verdeeling der systemen over de ruimte E_{2n-1} weinig uiteenloopen. De verdeeling die in de meerderheid der gevallen ontstaat moet stationair zijn, het eenvoudigste stationaire ensemble in E_{2n-1} is het in § 2 beschouwde energie-vlak ensemble ¹⁾.

Ik zal nu de hypothese invoeren dat het werkelijke ensemble een energie-vlak ensemble is.

Was men van de onderstelling uitgegaan dat de energie van de beschouwde systemen tusschen ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ ligt, dan zou men een andere soort werkelijke ensembles verkregen hebben, die met den naam werkelijk-microkanonisch aan te duiden zijn. Het meest voorkomende en stationaire ensemble is dan een waarbij de schil tusschen de ruimten E_{2n-1} van de energiën ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ met constante dichtheid met systemen gevuld is. (Vergelijk GIBBS Chap XI en XII).²⁾

¹⁾ Ook stationair zijn de ensembles, waarin de constante A voor verschillende strooken verschillend is. Deze komen in aanmerking als men iets naders omtrent andere integratie-constanten weet.

²⁾ De verdeeling in een werkelijk ensemble zal door de beweging der systeempunten kunnen veranderen als het niet met een energievlak ensemble overeenstemt. Door de beweging kan een willekeurig werkelijk ensemble niet tot een energievlak ensemble overgaan als de verdeeling over de strooken van § 3 afwijkt van die in het energievlak ensemble. Dergelijke ensembles zijn echter zeer zeldzaam onder al de ensembles die in E_{2n-1} uit een gegeven aantal systemen opgebouwd kunnen worden. Ensembles, waarin de verdeeling over de verschillende strooken met die in het energievlak ensemble overeenstemt, doch er binnen de strooken zelf van afwijkt, kunnen door de beweging der systeempunten in toestanden komen, waarin zij zeer weinig van het energievlak ensemble verschillen, doch zij zullen er dan periodiek weder sterker van afwijken; ook deze afwijkende ensembles zijn zeldzaam. In een werkelijk microkanonisch ensemble, dat eene van de homogene verdeeling afwijkende verdeeling der systemen bezit zal in vastgestelde niet te kleine volumelementen een oncindig weinig van de homogene afwijkende verdeling ontstaan. (Vergelijk GIBBS Chap XII).

De ingevoerde hypothese maakt het mogelijk de eigenschappen van een werkelijk systeem uit die van het overeenkomstige gemiddelde in een energie-vlak of een mikrokanonisch ensemble af te leiden. Een willekeurig systeem toch kan men krijgen door uit een werkelijk ensemble een systeem te kiezen, dit werkelijk ensemble is of een energie-vlak of een mikrokanonisch ensemble, de eigenschappen van een werkelijk systeem zijn dus die van een willekeurig gekozen systeem in een dezer beide ensembles.

Weten wij dat de toestand van een systeem stationair is, dan zal het systeem in eigenschappen met het meest voorkomende systeem overeenstemmen: in een dergelijken toestand zal op den duur een willekeurig systeem overgaan juist omdat het tot het werkelijke ensemble gerekend kan worden zou men kunnen zeggen. Het begrip van waarschijnlijkheid van een werkelijk systeem, dat strikt genomen alleen in betrekking tot systemen die met het systeem op dezelfde baan liggen zin heeft, kunnen wij nu aldus uitbreiden: het systeem komt voort uit eene constructie die als zij tallooze malen herhaald wordt, tot een werkelijk ensemble voert, wij stellen dit identiek met een energie-vlak (of mikrokanonisch) ensemble; de waarschijnlijkheid dat een systeem in gegeven toestand is, wordt dus gelijk aan de waarschijnlijkheid van dezen toestand in het energie-vlak (mikrokanonisch) ensemble. ¹⁾

§ 5. Thans zal ik het een en ander over de kanonische ensembles opmerken. Men vindt algemeen uitgesproken, en ook HERTZ sluit zich bij deze meening aan, dat aan de kanonische ensembles geen physische beteekenis toekomt en dat hunne invoering hoogstens te rechtvaardigen is door de vereenvoudiging die zij toelaten aan vele

¹⁾ Wil men de genoemde hypothese vermijden dan kan men aldus redeneeren. Wij denken ons het werkelijk ensemble \mathfrak{N} maal geconstrueerd, en nemen aan dat elk werkelijk ensemble verkregen kan worden door N maal blindelings een punt in de ruimte E_{2n-1} te kiezen en de verkregen punten tot een ensemble te vereenigen (of het zelfde in de schil tusschen E_{2n-1} voor de energie ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ te doen). Elk werkelijk ensemble komt een zeker aantal malen voor onder de \mathfrak{N} ontstaande ensembles. De waarschijnlijkheid W_ν van een gegeven werkelijk ensemble stel ik evenredig met dit aantal gedeeld door \mathfrak{N} . Zij de waarschijnlijkheid van een bepaalden toestand in een gegeven werkelijk ensemble w : dan zal ik $\sum_{\nu} w_\nu W_\nu$ de waarschijnlijkheid van den toestand noemen, de som is over alle ensembles uit te strekken. De hypothese die wij in den text gebruiken, komt hierop neer dat wij W voor het energie-vlak (mikrokanonisch) ensemble 1 stellen en onder w de waarschijnlijkheid in dit ensemble verstaan.

berekeningen aan te brengen.¹⁾ Ik geloof dat een kleine wijziging der redeneering die wij gebruikten om de physische beteekenis der microkanonische ensembles toe te lichten, door hen n.l. met de werkelijke ensembles in verband te brengen, ons in staat stelt ook aan de kanonische *in denzelfden zin* physische beteekenis toe te kennen. Wanneer wij weten dat door de samenwerking van nauwkeurig bepaalde oorzaken in de natuur een systeem van juist de energie ϵ_0 zou ontstaan, dan ligt het voor de hand te onderstellen dat tengevolge van de kleine toevallige afwijkingen die de verschillende werkingen zullen vertoonen, niet een systeem van juist de energie ϵ_0 doch een van de energie ϵ zal ontstaan; daarbij zal in den regel $\epsilon_0 - \epsilon$ klein zijn t.o.z.v. ϵ_0 . Positieve zoowel als negatieve afwijkingen zullen voorkomen.

Wij bouwen nu een werkelijk ensemble op door te pogen aan N systemen de energie ϵ_0 te geven of door N dergelijke systemen in de natuur uit te zoeken; en wij zullen onderstellen dat daarbij de kans evengroot is, dat een systeem met de energie $\epsilon_0 + \epsilon'$, als een met de energie $\epsilon_0 - \epsilon'$ ontstaat of gekozen wordt; een hypothese die plausibel is zoolang ϵ' klein is. Is nu de genoemde hypothese juist dan is het gemakkelijk te doen zien, dat de kanonische ensembles een rol zullen spelen bij de bepaling van de waarschijnlijkheid van een systeem.

Naar analogie met andere gevallen (men denke bijv. aan de foutenwet) schijnt het wel aannemelijk te onderstellen, dat in een werkelijk ensemble het aantal systemen wier energie tusschen ϵ en $\epsilon + d\epsilon$ ligt, is voor te stellen door

$$N \cdot A e^{-\epsilon/\epsilon_0} \cdot \epsilon_0^{-k} d\epsilon \dots \dots \dots (15)$$

Het is niet mogelijk deze formule te bewijzen, als men niets naders weet over de wijze waarop de energie aan het systeem wordt toegevoerd of waarop de energie (ϵ_0) der systemen die in de natuur uitgezocht worden wordt gemeten²⁾.

Maakt men hieromtrent bepaalde onderstellingen zoo kan men (15)

¹⁾ Deze vereenvoudiging is vaak niet zoo groot, de meeste kwesties die men met de kanonische ensembles uitwerken kan, kunnen op dezelfde wijze met geringe wijziging ook met behulp der microkanonische ensembles opgelost.

²⁾ Neemt men aan dat wij het ensemble door keuze uit de in de natuur voorkomende systemen opbouwen, dan zal het bepalen der energie aan een meetfout onderhevig zijn, en is dus de analogie met de foutenwet nog iets voor de hand liggender. Alleen zit hier dan een moeilijkheid in de vraag: hoe zal de geaardheid der systemen van zekere energie in de natuur zijn?

afleiden, doch aan die afleiding is niet veel beteekenis te hechten ¹⁾.

Verder analoog als bij de werkelijke mikrokanonische ensembles redeneerend, vindt men dat het aantal der systemen in het werkelijk ensemble, waarvoor de coördinaten en momenten tusschen p_1 en $p_1 + dp_1 \dots q_n$ en $q_n + dq_n$ liggen, wordt voorgesteld door

$$NA e^{-k(\varepsilon - \varepsilon_0)^2} dp_1 \dots dp_n.$$

Wanneer wij de grootte van het gebied der $2n$ -dimensionale ruimte waar de energie der systemen tusschen ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ ligt, door $e^{g(\varepsilon)} d\varepsilon$ voorstellen waarbij $g(\varepsilon)$ een functie van ε is, en wij ons een ensemble denken waarin $f(\varepsilon)$ systemen in dit gebied liggen, zoo zal dit ensemble met het werkelijk ensemble (15) identiek zijn, als

$$\frac{f(\varepsilon) e^{g(\varepsilon)}}{f(\varepsilon_0) e^{g(\varepsilon_0)}} = e^{-k\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0)^2} \dots \dots \dots (16)$$

Uit (16) volgt

$$\log f(\varepsilon) - \log f(\varepsilon_0) + g(\varepsilon) - g(\varepsilon_0) = -k(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$$

ontwikkelend voor kleine waarden van $\varepsilon - \varepsilon_0$ heeft men

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \varepsilon_0) \left\{ \left(\frac{d \log f(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} + \left(\frac{dg(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} \right\} + \\ + \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \left\{ \left(\frac{d^2 \log f(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} + \left(\frac{d^2 g(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} \right\} = -k(\varepsilon - \varepsilon_0)^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\left(\frac{d \log f(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} = - \left(\frac{dg(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0}$$

en

$$\left(\frac{d^2 \log f(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} = - \left(\frac{d^2 g(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0} - 2k.$$

¹⁾ Om hier een voorbeeld van te hebben beschouwe men het volgende geval. Uit een reservoir van een oneindig groote energie wordt aan N systemen energie toegevoerd.

Dat geschiedt bij gelijke porties z zoodat totaal Nz porties worden afgegeven aan de systemen wier aanvankelijke energie nul is. De toevoering geschiedt in Nz verdeelingen. Bij elke verdeeling wordt blindelings een der systemen uit de N uitgekozen, de energie z er aan toegevoerd en het systeem weer bij de andere geplaatst. Dat wordt Nz maal herhaald. In een bepaald geval zal natuurlijk niet juist elk der systemen de energie $n := \varepsilon_0$ krijgen, men zal echter kunnen aangeven voor hoeveel systemen bij de beschouwde verdeeling de energie tusschen $n'z$ en $(n'-1)z$ ligt. Herhaalt men het bovenbeschreven proces vele malen, zoo zal onder al de verdeelingen der energie over de N systemen die verdeeling de waarschijnlijkste zijn, waarin het aantal der systemen dat eene energie tusschen ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ bezit, door (15) wordt gegeven. Neemt men z oneindig klein zoo kan men er met groote stelligheid op rekenen dat het ontstaande werkelijk ensemble door (15) gekarakteriseerd wordt.

Bij eerste benadering is dus

$$f(\epsilon) = f(\epsilon_0) e^{-\left(\frac{d\psi(\epsilon)}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_0} (\epsilon-\epsilon_0)} \dots \dots \dots (17)$$

Neemt men aan dat deze formule voor alle waarden van ϵ geldt, zoodat dus $\frac{d^2 \log f(\epsilon)}{d\epsilon^2} = 0$ wordt gesteld, dan levert dit voor het aantal der systemen wier energie tusschen ϵ en $\epsilon + d\epsilon$ ligt

$$f(\epsilon_0) e^{-\left(\frac{d\psi(\epsilon)}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_0} (\epsilon-\epsilon_0)} e^{-\left(\frac{d\psi(\epsilon)}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_0} d\epsilon}$$

Stelt men $\left(\frac{d f(\epsilon)}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_0} = \Theta$ en $f(\epsilon_0) e^{-\left(\frac{d\psi(\epsilon)}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_0} (\epsilon-\epsilon_0)} = N e^{-\Psi}$, dan krijgt men voor dit aantal

$$N e^{-\Psi} \frac{1}{\Theta} e^{-\left(\frac{d\psi(\epsilon)}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_0} d\epsilon} \dots \dots \dots (18)$$

dat is, de verdeling is kanonisch. Het verband dat tusschen k en $\left(\frac{d^2 p(\epsilon)}{d\epsilon^2}\right)_{\epsilon=\epsilon_0}$ moet worden aangenomen, volgt voorzooover ik thans zie niet uit hunne physische beteekenis¹⁾.

Door GIBBS is bewezen dat de grootheid $\left(\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_0}^{-1}$ eigenschappen heeft die met die van de temperatuur overeenstemmen. Deze grootheid heeft echter bij gegeven ϵ_0 een bepaalde waarde, deze waarde is dan gelijk te stellen aan die van den modulus van het ensemble dat wij hebben te gebruiken. Het ensemble dat door (15) gedefinieerd is en het kanonische ensemble (18) wijken eenigszins van elkaar af, doch deze afwijking heeft des te minder beteekenis naarmate het aantal vrijheidsgraden van het beschouwde systeem grooter is.

De afwijkingen doen zich het sterkste voelen voor die systemen waarvoor $\epsilon - \epsilon_0$ eenigszins aanmerkelijk is t. o. z. van ϵ_0 , doch systemen waarvoor dit het geval is, komen in beide ensembles in uiterst geringe mate voor. Wij kunnen dus zonder fouten in onze uitkomsten te vreezen het werkelijke ensemble kanonisch onderstellen. En wanneer wij ons dan voorstellen dat in het werkelijke voor elke schil ϵ , $\epsilon + d\epsilon$ geldt dat de systemen er in een homogene verdeling voorkomen, zoo krijgen wij dat de waarschijnlijkheid van een systeem

1) GIBBS Chap IX (350) heeft bewezen dat hij benadering in een kanonisch ensemble geldt:

$$-\left(\frac{d^2 p}{d\epsilon^2}\right)_{\epsilon=\epsilon_0} = \frac{1}{(\epsilon - \epsilon_0)^2}$$

in een werkelijk ensemble bedraagt:

$$e^{\frac{\Psi - \varepsilon}{\Theta}} dp_1 \dots dq_n \dots \dots \dots (19)$$

De overeenstemming van de kanonische met de werkelijke ensembles is dus evenmin volledig bewezen (of te bewijzen) als die van de microkanonische of energie-vlak ensembles. Zij bestaat in dien zin dat het aantal der systemen in de laag $\varepsilon \dots \varepsilon + d\varepsilon$ door $j(\varepsilon)d\varepsilon$ kan worden voorgesteld, waarbij in de kanonische zoowel als in de werkelijke ensembles $j(\varepsilon)$ maximum is voor $\varepsilon = \varepsilon_0$; in de microkanonische is zij er buiten nul, tot zekere hoogte hebben deze dus *minder* physischen zin dan de kanonische, mits men niet het enkele systeem en daarmede het tijd-ensemble als uitgangspunt kiest doch overweegt dat een gegeven systeem eene binnen zekere grenzen onvolledig bekende energie heeft.

§ 6. HERTZ geeft in het geciteerde artikel een beschouwing naar aanleiding van de stelling dat twee stelsels wier temperatuur gelijk is na hunne vereeniging een stelsel van dezelfde temperatuur opleveren.

Hij denkt zich deze vereeniging zoo bewerkstelligd dat de systemen tot één nieuw systeem verbonden worden, waarbij de wederkeerige energie der verbinding klein is t. o. z. v. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Terwijl door de vereeniging de mededeeling van arbeidsvermogen wordt mogelijk gemaakt ¹⁾.

Feitelijk is de grootheid, die hij bij zijne beschouwingen temperatuur noemt niet de thermodynamische temperatuur. Deze heeft alleen zin voor een stelsel in evenwicht. De grootheid τ van HERTZ staat met de gemiddelde kinetische energie in het ensemble in verband deze is nml.

$$\frac{1}{\varepsilon_p} = \frac{n}{2} \frac{V}{\omega} = \frac{n}{2} \tau,$$

waarin n het aantal vrijheidsgraden en V het volume der phasenuitgebreidheid waar de energie der systemen kleiner dan ε is, voor-

stelt, terwijl $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \omega$ is gesteld

Op zeer elegante wijze gaat HERTZ na aan welke voorwaarden voldaan moet zijn opdat voor twee microkanonische ensembles van de energie ε_1 en ε_2 en waarvoor $\tau_1(\varepsilon_1) = \tau_2(\varepsilon_2)$ is, zal gelden dat het

¹⁾ P. HERTZ loc. cit. p. 243.

ensemble dat door hunne vereeniging ontstaat en waarvoor de energie $\epsilon_1 + \epsilon_2$ is, de temperatuur $\tau_{12}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ gegeven is door

$$\tau_{12}(\epsilon_1 + \epsilon_2) = \tau_1(\epsilon_1) = \tau_2(\epsilon_2).$$

Doch zal nu deze stelling ons iets leeren omtrent het temperatuur-evenwicht van stationaire stelsels dan moet nog bewezen worden dat de gemiddelde kinetische energie per vrijheidsgraad in het ensemble gelijk is aan die in het meest voorkomende (d. i. stationaire) systeem voor het geval dat de voorwaarden van HERTZ gelden ¹⁾.

Neemt men dit als bewezen aan en vereenigt men dus twee ensembles van de energie ϵ_1 en ϵ_2 en gelijke τ waarde, dan zal een ensemble van dezelfde τ waarde ontstaan. Dus de gemiddelde kinetische energie in de ensembles is dus ook gelijk, daarmede dus de kinetische energie van het meest voorkomende systeem, en dus ook de temperatuur der stationaire systemen. Uit twee systemen van oorspronkelijk gelijke temperatuur zal dus een systeem van dezelfde temperatuur ontstaan.

Zelfs als men systemen in niet stationairen toestand vereenigt kan men iets afleiden: zou de temperatuur der beschouwde systemen nadat ze in stationairen toestand gekomen zijn, gelijk worden, dan behooren zij dus tot ensembles met gelijke τ . Het systeem dat door hunne vereeniging ontstaat behoort tot een ensemble met dezelfde τ -waarde, de temperatuur die dus het systeem dat uit de vereeniging der niet stationaire systemen ontstaat, aanneemt als het stationair geworden is, zal dezelfde zijn als de temperaturen die de systemen elk voor zich in dezen toestand verkrijgen.

Ook voor kanonische ensembles geldt iets dergelijks. GIBBS bewees dat de modulus Θ in alle opzichten de eigenschappen der temperatuur heeft; daar echter de gemiddelde energie in het ensemble gelijk $\frac{n}{2} \Theta$ is en dit gemiddelde gelijk is aan de overeenkomstige grootheid in het meest voorkomende systeem, kan dus Θ dienst doen om de temperatuur van een stationair stelsel te definiëren.

Groningen, Dec. 1910.

¹⁾ Voor gassen heb ik dit in mijn dissertatie aangetoond.

Scheikunde. — De Heer P. VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan: „*Over de inwerking van salpeterigzuur op dinitrodialkylanilinen.*”

Volgens HANTZSCH (B. 43, 1674 [1910]) zoude door de inwerking van salpeterzuur van het S. G. 1.3 op dimethylaniline het 3.4 dinitrodimeethylaniline ontstaan, dat door hem als eene nieuwe verbinding wordt voorgesteld. Daargelaten nu, dat ik deze stof reeds vele jaren geleden verkreeg (Rec. VI 253 [1887]) en de structuur ervan bewees in 1895¹⁾, trok de mededeeling van HANTZSCH mijn aandacht, omdat ik bij mijne onderzoekingen over de inwerking van salpeterzuur van zeer uiteenlopende concentraties op dimethylaniline, behalve het tetranitrotetramethylbenzidine²⁾, steeds, afhankelijk van de omstandigheden, derivaten van mono- en dimethylaniline verkreeg, waarin de nitrogroepen ten opzichte van de aminogroep de *ortho* of *paraplaats* echter nimmer de *metaplaats* innamen. Derivaten met een nitrogroep op de *metaplaats* konden slechts verkregen worden door te nitreeren in eene oplossing van dimethylaniline in een groote overmaat van sterk zwavelzuur.

Ik heb daarom door een mijner leerlingen, den Heer J. D. JANSEN, chem. cand., de inwerking van salpeterzuur van 1.3 S. G. op dimethylaniline doen herhalen. Als een van de producten der reactie ontstaat inderdaad eene bij 175°—176° smeltende gele stof, die echter niets anders is dan het reeds lang bekende 2.4 dinitromonomethylaniline, zooals bleek uit de analyseresultaten alsmede door vergelijking met een door oxydatie van 2.4 dinitrodimeethylaniline en met een uit methylamine en broomdinitrobenzol verkregen praeparaat, waarmede het geen smeltpuntsverlaging gaf. Daarentegen geeft het met 't bij 176° smeltende, vroeger door mij verkregen 3.4 dinitrodimeethylaniline gemengd eene sterke verlaging van het smeltpunt.

Daar nu bij de beschreven reactie salpeterigzuur optreedt, ligt het voor de hand aan te nemen, dat door de inwerking daarvan op de dimethylaminogroep één methylgroep afgesplitst is geworden, een reactie waarvan trouwens vele voorbeelden bekend zijn.

Voegt men bij het salpeterzuur van 1.3 S. G. van te voren eenig ureum, om ev. optredend salpeterigzuur weg te nemen, dan ontstaat het monomethylderivaat niet, maar verkrijgt men als hoofdproduct het bij 87° smeltende 2.4 dinitrodimeethylaniline.

Bij een proef waarbij een oplossing van dimethylaniline in het

¹⁾ Deze Verslagen 23 Febr. 1895.

²⁾ Rec. 5, 211 [1886].

10 voudig volume salpeterzuur van 1.3 S. G. over nacht gestaan had, werd behalve het monomethyl derivaat ook nog eene hoeveelheid 2.4 dinitrophenylmethylnitrosamine verkregen.

Of men nu, in verband met de uitkomsten van de nitreeringsproef in tegenwoordigheid van ureum, het verloop der reactie zoo zal kunnen verklaren, dat eerst de genitreerde dimethyl-verbinding ontstaat en deze dan door salpeterigzuur (dat door de oxydeerende werking van het salpeterzuur gevormd wordt) in de monomethyl-verbinding (resp. het nitrosoderivaat) overgaat is wel waarschijnlijk, echter nog niet zeker; om dit uit te maken zijn nog proeven in gang. Intusschen heb ik bij eenige dialkylderivaten van dinitroanilinen de inwerking van salpeterigzuur nagegaan.

Lost men 2.4 dinitrodimethylaniline in verdund salpeterzuur (1.3 S. G.) op en voegt men bij die oplossing natriumnitriet, zoodat zij duidelijk naar salpeterigzuur riekt dan kristalliseert er eene bleekgele verbinding uit, die bij 86° smelt ¹⁾ en identisch is met het volgens STOERMER ²⁾ bereide 2.4 dinitrophenylmethylnitrosamine. Bij koken met azijnzuur wordt de nitrosogroep door waterstof vervangen en verkrijgt men het bij 176° smeltende 2.4 dinitromonomethylaniline. Met 2.4 dinitrodiaethylaniline verloopt de reactie geheel analoog. Er wordt bij 52° smeltend 2.4 dinitrophenylaethylnitrosamine ³⁾ gevormd, dat eveneens door kokend azijnzuur gemakkelijk de NO-groep verliest en het bij 114° smeltende 2.4 dinitroaethylaniline geeft.

Eveneens wordt 2.4 dinitrodipropylaniline ⁴⁾ door salpeterigzuur in een bij 75° smeltende nitrosoverbinding omgezet, waaruit door kokend azijnzuur weer het bij 97° smeltend dinitromonopropylaniline verkregen kan worden.

Bij de dialkylderivaten van 3.4 dinitroaniline wordt ook door salpeterigzuur een alkylgroep weggenomen. Doet men hier echter de reactie in eene salpeterzure oplossing (1.3 S. G.) dan gaat zij met eene verdere nitreering gepaard, omdat dan, naar 't schijnt, het salpeterig zuur de nitreerende werking van het verdunde salpeterzuur versnelt.

Werkt men evenwel in eene zwavelzure oplossing (1 vol. zwavelzuur op 1 vol. water) dan wordt ook bij deze derivaten een nitroso-monoalkylverbinding gevormd.

¹⁾ Zij is soms verontreinigd met de niet-genitroseerde monomethylverbinding. Nagegaan zal nog worden of deze primair ontstaat, dan wel door de inwerking van het salpeterzuur op de nitrosoverbinding. Zie STOERMER loc. cit.

²⁾ B. 31, 2530 [1898].

³⁾ STOERMER loc. cit. S. 2531.

⁴⁾ Deze verbinding, die ik reeds meer dan twintig jaar geleden beschreef (Rec. 8, 252 [1889]), wordt in de verhandeling van HANTZSCH loc. cit. S. 1675 als nieuw beschreven.

Met 3.4 dinitrodiaethylaniline bijv. ontstaat een fraai lichtgeel, bij 79°—80° smeltend nitrosoderivaat, waaruit door koken met phenol of azijnzuur de nitrosogroep wordt afgesplitst. Ook het 3.4 dimethyl-derivaat reageert in zwavelzure oplossing gemakkelijk met salpeterig-zuur; de ontstane verbinding wordt nog onderzocht.

Eindelijk heb ik ook nog salpeterigzuur laten inwerken op het donkerroode bij 76° smeltende 3.6 dinitrodiaethylaniline. Er wordt een fraaie lichtgele, bij 69° smeltende nitrosoverbinding gevormd, die even met azijnzuur gekookt, na verdunning met water, fraaie roode naalden geeft van het vroeger door mij beschreven bij 120° smeltende 3.6 dinitromonoaethylaniline, zoodat ook in dit geval één van de aethylgroepen is uitgetreden. De 3.6 dinitrodimethylverbinding gedraagt zich op geheel overeenkomstige wijze, evenzoo μ . mononitrodiaethylaniline.

Deze onderzoekingen worden met andere genitreerde tertiaire aminen voortgezet.

Utrecht. *Org. Chem. Lab. d. Univ.*

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt eene mededeeling aan: „*Beschouwingen over lichtstraling onder den gelijktijdigen invloed van electrische en magnetische krachten, en eenige naar aanleiding daarvan genomen proeven.*” (1^{ste} gedeelte).

1. Theoretische beschouwingen.

1. Nadat in 1896 de invloed van magnetische krachten op de lichtemissie was aangetoond, is bij vele natuurkundigen ongetwijfeld de vraag opgekomen of ook een electrisch veld op de lichtstraling eene werking uitoefent. Men denke zich een atoom of molecuul met een enkel electron, dat bij eene verplaatsing uit den evenwichtsstand met de componenten x, y, z , quasi-elastiche krachten $-kx, -ky, -kz$ ondervindt, evenals in LORENTZ's elementaire theorie der magnetische splitsing. Laat dit molecuul geplaatst zijn in een homogeen *electrisch* veld met de krachtlijnen evenwijdig aan de X -as. Laat in het veld de kracht op het electron werkend, door X worden voorgesteld, dan is de verplaatsing x_0 die het electron verkrijgt bepaald door

$$X = -kx_0.$$

In den nieuwen stand is er *evenwicht*. Indien het electron in den nieuwen stand trillingen uitvoert kan men de coördinaten voorstellen door

$$x = \xi \cos \nu t + \zeta$$

waarbij ξ, η, ζ oneindig klein worden ondersteld. De componenten X', Y', Z' der quasi-elastische kracht worden

$$-k(x_0 + \xi), -k\eta, -k\zeta$$

en dus de componenten der totale kracht ($X + X'$ enz.)

$$k\xi, -k\eta, -k\zeta \dots \dots \dots (1)$$

In den nieuwen stand werken dus op het electron oneindig kleine krachten, die echter niet van de richting der verplaatsing afhangen. De frequentie der trillingen die het electron kan uitvoeren, die immers door k wordt bepaald, is dezelfde gebleven, als vóór de aanwezigheid van het veld.

2. VOIGT heeft de consequenties ontwikkeld van de hypothese, waartoe men komt, indien de in § 1 gebezigde eenvoudige wet voor de quasi-elastische kracht niet meer doorgaat.

De potentiële energie van een verplaatsing (x, y, z) zal bij de onderstelling van § 1 de waarde hebben

$$q = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} kr^2 \dots \dots \dots (2)$$

waarin k eene constante.

Indien de verplaatsing van het electron niet meer als oneindig klein mag beschouwd worden, kan men de waarde der potentiële energie ontwikkelen naar de opklimmende machten van x, y, z . In een volkomen isotroop molecuul wordt dan bij beperking tot den eersten correctieterm

$$q = \frac{1}{2} kr^2 + \frac{1}{4} k'r^4 \dots \dots \dots (3)$$

waarin k' eene nieuwe constante is.

Voert het electron thans trillingen (ξ, η, ζ) uit om den nieuwen evenwichtsstand, die het onder den invloed der kracht X in een electrisch veld evenwijdig aan de X -as zal aannemen, dan vindt men gemakkelijk met VOIGT ¹⁾ voor de componenten der totale kracht ($X + X'$ enz.)

$$-(k + 3k'x_0^2)\xi, -(k + k'x_0^2)\eta, -(k + k'x_0^2)\zeta \dots \dots (4)$$

De factor waarmede nu de verplaatsing moet worden vermenigvuldigd om de kracht te vinden, is bij eene verplaatsing evenwijdig aan de krachtlijnen anders dan bij eene verplaatsing loodrecht daarop. De frequenties van trillingen in die beide hoofdrichtingen zijn dus verschillend.

¹⁾ VOIGT, Zur Theorie der Einwirkung eines elektrostatischen Feldes auf die optischen Eigenschaften der Körper. Ann. d. Phys. 69 S. 297. 1899, Ueber das electrische Analogon des ZEEMAN-effektes. LORENTZ-bundel. Archiv. Néerl. 1900, Magneto- und Elektrooptik. Kapitel IX u. X. 1908.

Past men deze beschouwingwijze toe op al de electronen in de atomen van een stof als lichtende natriumdamp dan komt VOIGT tot de volgende theoretische uitkomst.

In de richting van het elektrische veld waarnemende, zal men met een spectroscop een verschuiving der spectraallijn uit den oorspronkelijken stand zien optreden. In een richting loodrecht op het veld is een transversaal electrisch effect te verwachten, bestaande in een splitsing in twee gepolariseerde componenten. De component met trillingen evenwijdig aan het veld ondergaat eene verplaatsing, welke driemaal zoo groot is als die van de component met trillingen loodrecht op het veld.

Zoals men gemakkelijk ziet is de verandering der frequentie door het elektrische veld evenredig aan het kwadraat der electrische kracht.

VOIGT merkt nog op dat indien de negatief geladen electronen zich bewegen binnen een positief geladen bol met van het middelpunt af naar buiten *afnemende* ruimtedichtheid de verplaatsing der spectraallijnen naar den kant van het *rood* moet worden verwacht.

Ik zal in het vervolg, om de gedachten te bepalen, een verschuiving der spectraallijnen in den genoemden zin aannemen, maar wezenlijk is dat niet.

3. Neemt men voor de potentiële energie van een electron in plaats van (3) eene uitdrukking als

$$q = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{4} k'' x^4$$

dan is de isotropie vervallen.

De eene component van het electrisch doublet valt dan met de oorspronkelijke lijn samen.

Wij zullen daarom niet te veel gewicht hechten aan de eenvoudige verhouding tusschen de verplaatsingen der componenten van het doublet, die uit de beschouwing in §2 volgt. Bij volgende overwegingen nemen we een doublet aan, dat ten opzichte van de oorspronkelijke lijn nog allerlei standen kan hebben.

4. Reeds tien jaren zijn sedert VOIGT's eerste verhandeling over een electrisch analogon van het magnetisch spectraaleffect verlopen, zonder dat het aan de natuurkundigen gelukt is, het waar te nemen. Twee redenen kan men al dadelijk daarvoor aangeven.

Uit waarnemingen over den invloed van een electrisch veld op den brekingsindex kan men eenig denkbeeld over de waarschijnlijke orde van grootte van het electrisch effect bekomen. Deze schatting

voert tot buitengewoon kleine waarden voor de elektrische verandering der frequentie.

In een veld van 30.000 Volt per cm. zou volgens Voigt's schatting nog nauwelijks eene verandering van den trillingsduur, die aan $\frac{1}{1000}$ van den afstand der *D*-lijnen beantwoordt, worden verkregen. Bij 3000 Volt per cm weer 100 maal kleiner.

Zelfs indien men een lichtbron met fijne spectraallijnen in zulke sterke elektrische velden, als daareven genoemd, kon plaatsen zou de waarneming van het elektrisch doublet moeilijkheden opleveren.

Een grooter moeilijkheid dan in de kleinheid van het effect ligt in de bezwaren die men ondervindt indien men metaaldampen aan sterke elektrische velden wil blootstellen. Plaatst men bijv. een natriumvlam tusschen 2 condensatorplaten met groot potentiaalverschil dan volgt onmiddellijke ontleding der platen.

Gunstiger liggen de omstandigheden bij snelle elektrische ontledingen. Gedurende een deel van de periode der ontleding van een condensator in een vonk mag men verwachten dat de van de elektroden weggeslingerde lichtende metaaldamp aan sterke elektrische krachten is blootgesteld.

Een eventueele verplaatsing van de spectraallijnen van de vonk ten opzichte van die van een boog- of vlam-spectrum zou echter nog niet aan den invloed van elektrische krachten, dien wij hier op het oog hebben, mogen worden toegeschreven. Toch zou een verplaatsing van spectraallijnen het eerste en eenige zijn wat men kan verwachten waar te nemen. Het hangt van de omstandigheden der splitsing af of eene polarisatie der randen van een verschoven lijn kan worden waargenomen. Ten slotte komt dit echter ook neer op het constateeren van eene uiterst kleine verplaatsing onder niet zeer gunstige voorwaarden.

Bij de vruchteloosheid van alle tot dusver genomen proeven om een elektrisch spectraal effect waar te nemen ¹⁾ scheen het mij van eenig gewicht te trachten een anderen weg in te slaan. Ik heb eene methode bedacht, waardoor een werking van het elektrische veld zich in eene asymmetrische wijziging van een magnetisch triplet moet openbaren.

Wij zullen bewijzen dat de bedoelde asymmetrie van teeken omkeert indien de richting van het elektrische veld over een hoek van 90° wordt gedraaid. Het elektrische veld bij mijne proeven is bijv. het veld dat bij een vonkontleding tusschen de elektroden bestaat. De vonk springt over in een magnetisch veld, eenmaal loodrecht, een ander maal evenwijdig aan de magnetische krachtlijnen.

¹⁾ Verg. HULL. Proc. R. S. p. 80. Vol. 78. 1907.

De aanwezigheid van het magnetische veld zal nog de hoogte der bereikbare potentialen doen stijgen.

Behalve de bovengenoemde asymmetrie zijn er nog verscheidene, fijne bijzonderheden aan te geven, die triplekken moeten vertoonen indien ze onder den invloed van magnetische en elektrische krachten beide ontstaan.

Indien die bijzonderheden samen worden waargenomen vormen ze een even zeker bewijs voor het bestaan van een electrisch effect als een proef zou doen, waarin alleen met electrische krachten gewerkt wordt.

Eén bijzonderheid is er, die mocht zij kunnen worden waargenomen, reeds op zichzelf het bestaan van een electrisch spectraaleffect zou bewijzen. Zooals ik zal aantoonen (zie § 10) moeten de componenten van het magnetisch doublet, dat in de richting van horizontale magnetische krachtlijnen wordt waargenomen, niet meer *volkomen* circulair, maar iets elliptisch, gepolariseerd worden, indien tevens een verticaal electrisch veld op de trillende electronen inwerkt. De bedoelde ellipticiteit moet veel gemakkelijker waarneembaar zijn dan de verandering eener spectraallijn onder electrische krachten alleen.

Ik heb een tijd lang gemeend dat de asymmetrie der magnetische triplekken, welke door mij en later door GMELIN, DUFOUR, NAGAOKA en anderen is bestudeerd, reeds aan samenwerking van electrische en magnetische velden zou kunnen worden toegeschreven.

Intusschen zal ik experimenteel aantoonen dat dit niet het geval kan zijn, zooals in het vervolg dezer mededeeling zal blijken.

Ik heb gemeend dat eene beschrijving der genomen proeven van nut zal zijn, al kan op het oogenblik het antwoord op de vraag of er een specifieke werking van een electrisch veld op de lichtstraling bestaat nog niet met zekerheid worden gegeven.

Sporen der verwachte verschijnselen schijnen echter aanwezig te zijn. De proeven zijn niet zonder beteekenis voor onze kennis van de asymmetrie van triplekken, buitendien kunnen ze misschien den weg naar betere methoden wijzen.

De beschrijving der proeven zal in een tweede gedeelte dezer mededeeling volgen; in dit gedeelte geef ik de theoretische ontwikkelingen waarop de proeven steunen en een criterium voor eene asymmetrie, die van electrische werkingen afhangt, en waardoor tenminste een grens voor de grootte van het electrisch effect kan worden vastgesteld.

5. Het eerste vraagstuk, dat ik wil behandelen betreft de trillingen van een electron onder den gelijktijdigen invloed van *evenwijdige* electrische en magnetische velden.

Wij kiezen een rechthoekig coördinatensysteem en laten de elec-

trische en de magnetische kracht in de richting van de *Z*-as loopen.

Zijn ξ , η , ζ de componenten der verplaatsing van een electron, dan zijn de bewegingsvergelijkingen

$$\ddot{\xi} = -b^2 \xi + r \dot{\eta} \qquad \ddot{\eta} = -b^2 \eta - r \dot{\xi} \quad . . . \quad (6)$$

$$\ddot{\zeta} = a^2 \zeta \quad . . . \quad (7)$$

Het verschil van *a* en *b* bepaalt het electrisch effect, het magnetische wordt bepaald door *r*. Stel $b - a = s$ en zij $b > a$, dus *s* positief.

Uit (7) volgt de frequentie *a*; de trillingen die aan deze vergelijking beantwoorden hebben steeds de richting van de *Z*-as.

Wij stellen in (6)

$$\xi = e^{int} \qquad \eta = q e^{int},$$

q is een in het algemeen complexe constante. De werkelijke beweging van het electron krijgt men door voor ξ en η de reële deelen dezer uitdrukkingen te nemen. Men vindt nu:

$$-n^2 = -b^2 + i n r q \qquad , \qquad -n^2 q = -b^2 q - i r n \quad . \quad (8)$$
$$(n^2 - b^2)^2 = + n^2 r^2$$

waaruit volgt

$$n = b \pm \frac{r}{2} = a + s \pm \frac{r}{2} \quad . . . \quad (9)$$

Uit (8) volgen hiermede twee waarden voor *q*, nl.

$$q = \pm i \quad . . . \quad (10)$$

6. We zullen nu 3 bijzondere gevallen beschouwen.

Geval I. Electrisch veld = 0, dan is *s* = 0. Bovenste teekens in (9) en (10). Voor de beweging in het *XY*-vlak geldt dan

$$n = a + \frac{1}{2} r \quad , \quad q = + i.$$

De onderste teekens in (9) en (10) geven

$$n = a - \frac{1}{2} r \quad , \quad q = - i.$$

We krijgen dus cirkelvormige trillingen in het *XY*-vlak rechtsom met de frequentie $a + \frac{1}{2} r$, linksom met de frequentie $a - \frac{1}{2} r$. Evenwijdig aan de *Z*-as trillingen met de frequentie *a*. Kortom wij hebben met de elementaire theorie der magnetische splitsing van LORENTZ te doen.

Dit alles geldt onafhankelijk daarvan, welk teeken *r*, d. i. welke richting het magnetische veld heeft. Is *r* negatief, dan behooren de rechtse cirkelbewegingen bij een frequentie, die kleiner dan *a* is.

Geval II. Magnetisch veld = 0, dus $r = 0$.

We krijgen dan trillingen van willekeurigen vorm in het XY -vlak, frequentie b . Evenwijdig aan de Z -as echter trillingen met de frequentie a .

Geval III. Magnetisch en elektrisch veld gelijktijdig. Zij r positief. Volgens (9) en (10) krijgen we dan voor de bovenste teekens

$$u = b + \frac{r}{2} = a + s + \frac{1}{2}r \quad q = +i$$

en dus cirkelvormige trillingen rechtsom in het XY -vlak met de frequentie $a + s + \frac{1}{2}r$.

De onderste teekens geven:

$$u = b - \frac{1}{2}r = a + s - \frac{1}{2}r \quad q = -i$$

of linksom gaande cirkelvormige trillingen in het XY -vlak met de frequentie $a + s - \frac{1}{2}r$.

Voor r negatief, worden de cirkels weer in tegengestelden zin doorlopen.

In de richting der Z -as blijven de trillingen steeds de frequentie a behouden.

In geval III krijgt men dus bij waarneming loodrecht op de velden een asymmetrisch triplet, waarvan nu de relatieve stand der componenten als volgt wordt bepaald.

Ik zal stellen dat rechts het violet licht, dus de groote frequenties.

Laten A en B de lijnen met de frequenties a en b zijn, als alleen het elektrische veld er is.

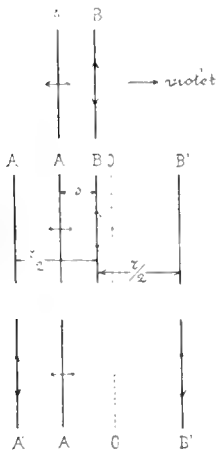


Fig. 1.

Laat het elektrische veld horizontaal loopen.

Komt nu de horizontale magnetische kracht er bij, dan blijft A behouden.

Er komen echter bij, twee componenten die uit B ontstaan door verschuiving over een afstand $\frac{r}{2}$. Het resultaat is het triplet $A'B'$.

Het elektrische doublet AB kan nu nog allerlei standen ten opzichte van de oorspronkelijke lijn O hebben. In de onderstelling van § 3 valt de lijn B met de lijn O samen. In de onderstelling van § 1 ligt de oorspronkelijke lijn op een afstand $\frac{1}{2}s$ rechts van B .

7. We zullen nu onderstellen dat we met een wisselend electrisch veld te doen hebben. Laat B met de oorspronkelijke lijn samenvallen. Schommelt de electrische kracht volgens de formule $a \cos nt$ heen en weer, dan kan s worden voorgesteld door $\beta^2 \cos^2 nt = \frac{\beta^2}{2} (1 + \cos 2nt)$.

De lijnen A' en B' blijven steeds op hun plaats. De middelste lijn van het asymmetrische triplet zal echter breeder moeten zijn dan de zij-componenten en in het midden het donkerst. Dit alles blijft met een kleine wijziging gelden ook indien B niet op de plaats van de oorspronkelijke lijn komt.

8. In het tweede vraagstuk, dat wij zullen beschouwen, is een trillend electron aan een *horizontaal* magnetisch en aan een *verticaal* electrisch veld onderworpen. Laat de magnetische kracht met de Z -as, de electrische met de X -as samenvallen.

De bewegingsvergelijkingen zijn nu:

$$\ddot{\xi} = -a^2 \xi + \dot{\eta} \quad \ddot{\eta} = -b^2 \eta - r \dot{\xi} \quad (11)$$

$$\ddot{\zeta} = -b^2 \zeta. \quad (12)$$

Zij weer $b > a$ en $b - a = s$. s bepaalt weer het electrisch, r het magnetisch effect.

De frequentie der trillingen evenwijdig aan de Z -as is steeds b . Evenals in § 5 nemen we

$$\xi = e^{int}, \quad \eta = q e^{int}$$

Uit (11) vindt men vooreerst

$$-n^2 = -a^2 + inrq \quad -n^2 q = -b^2 q - in \quad . . . (13)$$

of

$$(n^2 - a^2)(n^2 - b^2) = n^2 r^2.$$

Hieruit volgt

$$n^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - r^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (a^2 + b^2 - r^2)^2 - a^2 b^2}.$$

Vervangt men nu b door $a + s$ dan volgt bij benadering

$$n^2 = a^2 \left(1 + \frac{s \pm \sqrt{r^2 + s^2}}{a} \right)$$

of

$$n = a \frac{1}{2} (s \pm \sqrt{r^2 + s^2}) \quad (14)$$

Volgens (13) beantwoorden hieraan twee waarden voor de complexe amplitude q

$$q = i \frac{s \pm \sqrt{r^2 \pm s^2}}{r} \dots \dots \dots (15)$$

9. We beschouwen weer drie bijzondere gevallen.

Geval I. Electricch veld nul, dus $s = 0$.

Uit (14) en (15) volgt dan voor de beweging in het XY -vlak

$$n = a \pm \frac{1}{2} r \quad q = \pm i,$$

vergelijkingen waarvan de beteekenis in § 6 werd aangegeven.

Geval II. Magnetisch veld afwezig, $r = 0$.

Thans volgt uit (14) en (15) indien men de bovenste teekens neemt

$$n = a + \frac{1}{2} s = b \quad q = \infty,$$

rechtlijnige trillingen volgens de Y -as.

Voor de onderste teekens wordt

$$n = a \quad q = 0,$$

rechtlijnige trillingen volgens de X -as.

10. *Geval III.* Electricch veld *verticaal* en magnetisch veld *horizontaal*. Dit geval is iets meer samengesteld.

Wij stellen $\sigma = \frac{1}{2} (\sqrt{r^2 + s^2} - s)$. Zij r *positief*.

In verg. (14) en (15) nemen we het bovenste teeken, dan is

$$n = a + \frac{1}{2} (s + \sqrt{r^2 + s^2}) = b + \frac{1}{2} (\sqrt{r^2 + s^2} - s) = b + \sigma,$$

σ is eene positieve grootheid. De coëfficiënt van i in

$$q = i \frac{s + \sqrt{r^2 + s^2}}{r}$$

is positief en > 1 . Wij hebben hier eene elliptische trilling in 't XY -vlak, met de assen volgens de X - en de Y -as en de grootste as volgens de Y -as. De beweging van het electron is rechtsom.

We nemen nu de onderste teekens in (14) en (15).

Dan wordt $n = a + \frac{1}{2} (s - \sqrt{r^2 + s^2}) = a - \sigma$, terwijl

$$q = i \frac{s - \sqrt{r^2 + s^2}}{r} = -i \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2} + s}.$$

De breuk achter i is positief en < 1 . Het electron voert eene elliptische trilling, linksom in 't XY -vlak uit; alweer met de assen volgens de X - en de Y -as, maar de grootste volgens de X -as.

We krijgen dus een asymmetrisch triplet.

Laten A en B de beide lijnen zijn van het electricch doublet, als er alleen een electricch veld is.

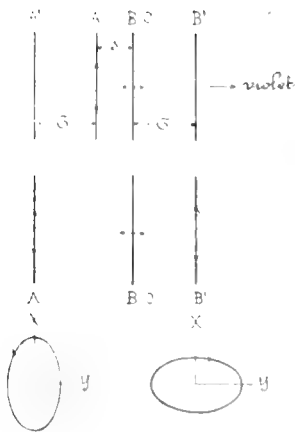


Fig. 2

Dan zal als de magnetische kracht er bij komt B blijven bestaan met trillingen evenwijdig aan de magnetische kracht. Er komen dan twee nieuwe componenten bij die men kan opvatten als te ontstaan uit A en B door een verschuiving over den afstand σ .

Indien r het *negatieve* teeken heeft, dus de magnetische kracht wordt omgekeerd dan verandert slechts weinig aan het voorgaande. Aan $n = b + \sigma$ beantwoordt dan

$$q = i \frac{s + \sqrt{r^2 + s^2}}{r}.$$

De coëfficiënt van i is in absolute maat > 1 , maar negatief.

Ook voor de waarde van den coëfficiënt van i met het onderste teeken, vindt men hetzelfde als boven, alleen met omgekeerd teeken.

Alles blijft als in de figuur aangegeven, maar de ellipsen worden in tegengestelden zin doorloopen.

Het produkt der twee waarden van q in verg. (15) is gelijk aan de eenheid. Daaraan is dus steeds gelijk het produkt zoowel der horizontale, als der verticale assen der twee trillingsellipsen.

Het is interessant nog op te merken dat de lijnen van het in deze § beschouwde triplet op elkaar als het ware eene „afstooting” uitoefenen, wat zooals LORENTZ ¹⁾ heeft bewezen in het algemeen tusschen twee lijnen het geval moet zijn.

11. Indien we met een wisselend electrisch veld (verg. § 7) te doen hebben worden de lijnen van het triplet verbreed. In de onderstelling van § 1 over de relatieve plaats van A en B t. o. v. O wordt de breedte van de middelste component $\frac{s}{2}$, maar die van de buitenste s . In het midden zijn de componenten het donkerst.

12. De verhouding van de assen der ellipsen in § 10 is $1:1 + \frac{s}{r}$ en $1:1 - \frac{s}{r}$ indien het electrisch effect klein t. o. v. het magnetische is.

De intensiteiten beantwoordende aan trillingen volgens de X -as en volgens de Y -as, verschillen dus met een bedraag evenredig aan $\frac{2s}{r}$.

¹⁾ LORENTZ. Encyclopädie d. math. W. V. 3. Heft 2. Magneto-optische Phänomene No. 36 u. No. 53.

Wanneer dus in de richting der magnetische krachtlijnen wordt waargenomen en de splitsing van het magnetisch doublet 100 maal den afstand s bedraagt, dan zou het intensiteitsverschil beantwoordende aan de trillingen volgens de assen $1/50$ bedragen. Buitendien zou het intensiteitsverschil bij de beide componenten een tegengesteld teken hebben.

Hierin schijnt dan een methode gevonden te zijn, om in het zoeken naar een electrisch effect belangrijke diensten te bewijzen. Immers intensiteitsverschillen van 2% kunnen langs photographisch-photometrischen weg ¹⁾ in ons geval met zekerheid worden vastgesteld. Wij kunnen dan echter een electrisch effect vinden honderd maal kleiner dan het magnetische effect dat nog juist met een spectroscop van zoo groot mogelijk oplossend vermogen kan worden onderscheiden. Het is dus nu wel niet meer geheel onmogelijk een electrisch effect van de orde van grootte, die de theorie doet voorzien, onder gunstige omstandigheden tot waarneming te brengen.

13. Is het electrische veld niet homogeen, maar wordt het naar

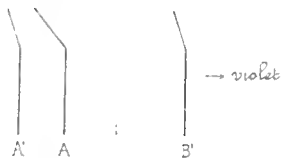


Fig. 3.

boven toe sterker dan buigen de componenten meer en meer naar rood. (Fig. 3). De middelste component A kromt zich in hooger mate dan de andere, voor het geval dat wij met het in § 5 behandelde geval (electrisch en magnetisch veld parallel) te doen hebben.

Is echter de electrische kracht verticaal en de magnetische horizontaal, dan worden de componenten als hieronder; de middelste wijkt dan minder snel van de oorspronkelijke lijn af dan de uiterste componenten.

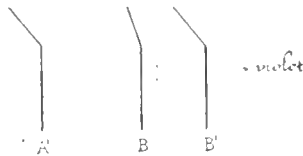


Fig. 4.

¹⁾ Verg. P. P. KOCH, Ann. d. Phys. Bd. 30. S. 841. 1909.

Bacteriologie. — De Heer C. H. H. SPRONCK biedt eene mededeeling aan van den Heer J. H. F. KOHLBRUGGE: „*Zuurvormende licht- en rijstbacterien de oorzaak der Kippen-Beri-beri.*”

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING.)

Bovenstaande titel is tevens eene stelling, die ik in de navolgende bladzijden gedenk te bewijzen.

Het is een algemeen bekend en erkend feit, dat de ontdekking der Kippenberi-beri door ELKMAN de zoo raadselachtige Beri-beri in 't algemeen bracht tot die verschijnselen, die door experimenteel onderzoek kunnen worden toegelicht. Dat Kippenberi-beri tot dezelfde groep van ziekten behoort, die ook de Beri-beri van den mensch omsluit, werd tevens door bijna alle onderzoekers erkend: men experimenteerde dus op kippen om de menschelijke ziekte te leeren bestrijden.

Volgende den door ELKMAN ingeslagen weg zijn door vele onderzoekers tal van feiten aan het licht gebracht en toch bleef de causa movens der ziekte even duister als voorheen; wie ze gevonden meende te hebben kon er zeker van zijn, dat een volgend onderzoeker ze als onschadelijk definieerde.

In 1901 werkte ik op het laboratorium van Prof. ELKMAN over de autosterilisatie van den dundarm en daar ELKMAN gelijktijdig met Beri-beri proeven bezig was, zoo gaf dit aanleiding, dat ik, om de darmflora der kip te leeren kennen, zuinigheidshalve, ook de darmen van die kippen onderzocht, die aan Beri-beri waren bezweken. Daar ik evenwel ook eenige geslachte kippen onder handen nam, zoo viel mij spoedig op, dat de darmflora en de darmsapreactie van beide groepen duidelijke verschillen toonde. Sedert vestigde zich bij mij de overtuiging: dat het Beri-beri vraagstuk van uit den darm der kip benaderd worden moest. Verschillende onderzoekers hebben er trouwens op gewezen¹⁾, dat Beri-beri vermoedelijk wordt veroorzaakt door vergiften, die tijdens de digestie in het darmkanaal door microorganismen uit zetmeel worden gevormd. Verwonderlijk was het evenwel, dat niemand dientengevolge den darm en zijne flora als uitgangspunt koos en dat, waar dit voorbijgaande wel eens geschiedde (DUBRUEL WRIGHT), dit tot geen resultaat leidde.

Ik kon mijne onderzoekingen wegens terugkeer naar Java niet vervolgen, maar steeds bleef daar en later in Europa de wensch bij mij levendig deze werkhypothese in toepassing te brengen. Aan

1) ELKMAN, LAOH, MAURER, DUBRUEL, WRIGHT, HERZOG, JEANSELME, VAN GORKOM.

dien wensch kon ik eerst in October 1910 gevolg geven, doordien Prof. SPRONCK de goedheid had, eene kamer als laboratorium te mijner beschikking te stellen, voorzien van alles, wat voor een dergelijk onderzoek onmisbaar is. Ik stel het ten zeerste op prijs hier aan toe te mogen voegen, dat Prof. SPRONCK gaarne bereid is te verklaren, dat de aard en gang mijner onderzoekingen hem volkomen onbekend bleef.

Om aan Beri-beri lijdende kippen te onderzoeken moest ik eerst gezonde kippen ziek maken en bereikte dit volgens den door EIJKMAN aangewezen weg: namelijk gedwongen voeding met witte, geheel afgewerkte rijst¹⁾. Na 18 of 19 dagen werd elke zoo gevoede kip ziek met de bekende verschijnselen van Beri-beri²⁾.

Bij deze proeven viel mij in de eerste plaats op, dat gedurende November en de eerste helft van December de na sterilisatie neutrale rijst³⁾ binnen eenige uren zuur werd, zoo zij aan de lucht was bloot gesteld. Ik wenschte nu in de eerste plaats te weten: waarom verzuurt rijst?⁴⁾ Op die vraag wist niemand een antwoord te geven, zelfs Prof. BEYERINCK te Delft niet, die mij welwillend te woord stond, maar zelfs geneigd was het feit in twijfel te trekken. Ik mocht evenwel niet twijfelen, want ik zag, dat de rijst neutraal bleef, die na sterilisatie in goed gesloten vaatwerk werd bewaard en ik zag ze spoedig zuur worden, zoo zij in de verschillende kamers van dit nieuwe laboratorium, waar nog nooit over zure gisting was gewerkt, aan de lucht werd bloot gesteld. Evenzeer werd de rijst zuur in den krop en in de darmen van de kip. Door eenvoudige chemische omzetting werd rijst dus niet zuur, zooals uit het bovenstaande blijkt. Dus moest rijst zuur worden of door darmbacteriën of door bacteriën uit de lucht of door beide. De obligate darmbacteriën der kip werden door eene reeks proefnemingen spoedig buitengesloten, dus moest het zuur worden door luchtbacteriën ver-

1) Om evenwel elke gedachte aan bedorven rijst buiten te sluiten werd de rijst voor zij gebruikt werd bij 120° gesteriliseerd. Hierdoor verkreeg ik ook meerdere overeenstemming met de veelal gesteriliseerde voedingsmiddelen der zeilschepen, die zoo dikwijls beschuldigd werden Beri-beri op te wekken.

2) Frequente dunne ontlasting, vermagering, verlamming, cyanose, dyspnoe (EIJKMAN).

3) Niet gekookte, niet gesteriliseerde rijst heeft steeds eene zwakzure reactie.

4) Daar de zure gisting toen voor mij nog een klank was, waaraan ik geen gedachten wist te verbinden, zoo wendde ik mij in de eerste plaats tot de azijnfabriek de Roos te Amsterdam waar de heer O. WIXFORTH mij op de vriendelijkste wijze inlichtte en de literatuur over azijnfabricage te mijner beschikking stelde: de heer H. VLAANDEREN, wel bekend grutter allier, leerde mij de rijstsoorten, de bewaring enz. enz. kennen. Aan beiden mijn hartelijken dank.

klaard worden. In die richting werd nu gezocht, maar het was alles behalve gemakkelijk in het mengsel van schimmels, slijtzwammen en bacteriën, die uit de lucht op natte, gesteriliseerde rijst neerdalen, die microörganismen te isoleeren, die rijst doen verzuren ¹⁾.

Dit microörganisme werd evenwel gevonden: Het is een klein kort staafje, veel gelijkende op den Colibacillus der darmen. Het isoleeren werd niet weinig bemoeielijkt doordien dit staafje zeer polymorph is en omdat het om goed te slagen speciale voedingsbodems en speciale broedtemperatuur vereischt ²⁾.

Deze bacillus doet neutrale gesteriliseerde rijst, die zonder den bacillus steeds neutraal blijft, binnen 24 uur verzuren.

Vergeleek ik hem zoeven met den Colibacillus, zoo herinnert hij anderzijds aan de azijnbacterien door zijn polymorphie. Verder ook doordien hij de door BELJERINCK aangewezen eigenaardigheid van sommige azijnbacterien bezit om spoedig op speciale voedingsbodems afwijkende en erflijke eigenschappen te vertoonen. Zoo valt het niet moeielijk hem zijn vermogen om gisting op te wekken te ontneemen. Ook volgens BELJERINCK zijn er azijnbacterien, die geen zuur meer vormen en uit de zuur-vormende moeten zijn ontstaan. Slechts door op geschikten voedingsbodem en bij geschikte temperatuur te kweken en door hem telkens weer in de gelegenheid te stellen rijst te verzuren behoudt men hem in goede conditie. Te bewaren is hij op rijst niet, daar hij in zijn zelf geproduceerd zuur afsterft. Groeien, zich vermenigvuldigen doet de bacillus overigens op nagenoeg elken niet al te zuren voedingsbodem, al sterft hij op vele later af of wijzigt zich. Hij kan na domesticatie zich aan veranderde omstandigheden accomodeeren, zoo aan eene eerst niet gewilde voeding of aan eene eerst doodelijke temperatuur. Wij hebben hier dus met een buitengewoon

1) Thans kost dit weinig moeite meer, sedert ik leerde, dat schimmels en slijtzwammen zich eerst dan op rijst vermenigvuldigen als deze door de rijst-verzurende-bacterie eene zure reactie verkregen heeft. Men heeft dus het moment goed waar te nemen, waarop de eerst neutrale rijst begint eene zwak zure reactie te vertoonen, dan zal men meestal door overenting op speciaal hiertoe geprepareerde gist, reinculturen van den rijst-verzurenden-bacillus verkrijgen. Nog gemakkelijker valt dit in den winter, in de door verwarming zoo droog geworden kamerlucht, waarin schimmels en slijtzwammen zeldzaam zijn.

2) De eerste overentingen uit rijst slaagden slecht op de gewone alk. en zure voedingsbodems bij 37°; zij komen dikwijls wel op, maar verliezen hun gistend vermogen. Van rijst, de meest aangewezen voedingsbodem, is geen doorschijnende kweekstof te maken. Het best slaagt hij op gist en mout bij kamertemperatuur tot 22° toe. Op gist slaagt hij zelfs bij 40°; op mout niet. Het mout-recept heb ik aan Prof. BELJERINCK te danken, het gistrecept werd op dit laboratorium gebruikt en toevallig beproefd. Alleen op mout en rijst wordt zuur gevormd.

resistenten bacillus te maken, die in November en begin December in het geheele laboratorium verkregen kon worden. Nadat in December de temperatuur evenwel tijdelijk en meermalen het vriespunt bereikte verdween de bacillus bijna uit de lucht. Hij werd zoo zeldzaam, dat gekookte witte rijst van 5 tot 8 dagen aan de lucht kon geexposeerd blijven alvorens te verzuren¹⁾. Verzuurde zij eindelijk toch, dan werden steeds dezelfde korte staafjes uit de rijst geïsoleerd.

Van wege zijne polymorphie en spoedig verzwakte werking op kunstmatige voedingsbodems was het evenwel gewenscht om over eene bron te beschikken, waaruit dagelijks nieuwe stammen konden worden geïsoleerd. De lucht leverde die in December en Januari niet meer. Daar deze bacillus nu eene speciale affiniteit voor rijst bleek te bezitten, zoo werd de gedachte bij mij opgewekt, dat hij wellicht ook op de droge rijstkorrels te vinden zou zijn.

Daarom werden droge rijstkorrels op gester. neutr. rijst uitgezaaid en, ziedaar, elke rijstkorrel²⁾ bleek een zuurbron, waarin de meer vermelde bacillus teruggevonden werd. Het scheen vreemd, dat deze bacillus in zulk een volkomen drogen korrel bestaan kan. Daarom zou men hebben kunnen aannemen, dat hij er wellicht als luchtbacillus slechts toevallig buiten op kleeft? Verder herinnerde het vinden van bacteriën op of in alle volkomen afgewerkte rijstkorrels ten zeerste aan de opvatting van diegenen (v. DIEREN enz.), die allerlei slechte gevolgen aan het eten van lang bewaarde, gepelde korrels toeschrijven. Beide gedachtereeksen leidden er toe de niet gepelde rijst (gaba) te onderzoeken en wel op de volgende wijze. Om alle luchtbacteriën buiten te sluiten, werd elke rijst- (gaba) korrel afzonderlijk meermalen door de gasvlam gehaald; dan verkoolt de grove geele en de onderliggende fijne witte omhullende huid en slechts het binnenste gedeelte van het zetmeel blijft wit. Men wrijft de korrels nu in een sterielen mortier fijn en ent dit mengsel van kool en wit zetmeel in neutrale gesteriliseerde rijst. Dan blijkt, dat de zuurvormende bacillus ook binnen in den niet gepelden rijstkorrel leeft en in leven

1) Ware dit onderzoek eerst in December begonnen, dan zou ik nimmer het spoedig zuur worden van de rijst hebben opgemerkt, en dus ook de thans verkregen resultaten niet bereikt hebben. Uit de buitenlucht heb ik den bacillus tot nu toe niet kunnen opvangen en het is volstrekt niet onmogelijk, dat hij juist als een muur-bacillus is op te vatten, die wellicht binnenshuis op de muren leeft en van daar in de kamers verstuift.

2) Gewone kippenrijst, witte niet geglansde rijst van Java, Moulmein, Rangoen en Bassein herbergt dezen bacillus, de laatste meer dan de andere of eene krachtiger variëteit dan de andere.

blijft bij bovengenoemde behandeling. Immers wordt de neutrale rijst verzuurd en de bacillus treedt op ¹⁾).

Ik volgde den gang van eigen onderzoek door steeds slechts één bacillus aan te wijzen, toch is dit minder juist. Bedoeld kort staafje had toevallig het eerst mijne aandacht getrokken, en daar elk bacterioloog met reïnculturen wenscht te werken, werd het overal geïsoleerd, waarbij ik dikwijls gehinderd werd door zeker langerekt staafje, dat in de culturen bleek voor te komen en ter wille waarvan tal van culturen werden afgekeurd. Later bleek, dat in elke portie zuur geworden rijst en in elke drooge rijstkorrel beide bacillen voorkomen, die beiden de rijst verzuren: zij schijnen dus als in symbiose te leven of elkander te ondersteunen. Sedert werkte ik veelal met dit door de natuur aangewezen mengsel, dat veel levenskrachtiger blijkt te zijn. ²⁾

Bewaart men de rijst van de middagtafel in Indië tot den avond, dan is deze ook licht zuur geworden, waaruit blijkt dat deze rijstverzurende bacillen ook in de tropen gevonden worden; of hun optreden ook daar aan jaargetijden of weertoestanden gebonden is, dient onderzocht te worden. ³⁾

Gaarne zoude ik hier mededeelen welk zuur bij deze gisting gevormd wordt. Dr. STAAL was zoo vriendelijk mij aan te bieden het zuur te isoleeren en te bepalen: dit onderzoek is evenwel nog niet afgeloopen. ⁴⁾ Aan Dr. STAAL dank ik ook de inlichting, dat, om het uit 20 gram droge rijstkorrels in 7 dagen door bacillen geproduceerde zuur te neutraliseeren noodig was 12.6 cub. em. $\frac{10}{10}$ NaOH.

¹⁾ Het is een interessant vraagstuk wanneer deze bacillus in de rijst komt, of reeds op het veld of eerst na opschuring. Die vraag moet in Indië of Italië beantwoord worden. Kan rijst wellicht zonder bacteriën niet rijp worden? Welke rol spelen deze bacteriën? Dat zouden vragen van even groot landbouwkundig belang kunnen zijn als de bekende stikstof-bindende-bacteriën voor de wortels der peulvuchten (BEIJERINCK). Daar beri-beri in Suriname niet voorkomt zal ik trachten van daar rijst tot onderzoek te verkrijgen.

²⁾ De vraag rijst thans bij mij op hoevele der met voedingsbodems en broedtemperaturen ondervonden bezwaren niet aan mijne handelwijze zijn toe te schrijven, dat ik slechts het korte staafje kweeken wilde. Of zijn het toch twee groeivormen van denzelfden bacillus? De azijnfabrikant WIXFORTH deelde mij mede, dat hij voor fabricage reïnculturen niet geschikt acht.

³⁾ Een rijst verzurende bacillus werd door MAURER (Medan) geïsoleerd. Ik ben overtuigd dat zijn bacterium A, nauw verwant (wellicht identisch is met den te Utrecht door mij geïsoleerden). Helaas ging de cultuur van MAURER te niet. Ik zal de door MAURER beschreven proeven herhalen om vast te stellen hoe ver de overeenstemming gaat. Ook ROST schijnt in 1900 dergelijke bacillen gevonden te hebben.

⁴⁾ Het is geen melkzuur (contra EDKMAN) en geen oxaalzuur (contra MAURER). Ook is het niet vluchtig, want het vermindert niet bij sterilisatie (120°).

Dit onderzoek naar rijstgist was hiermede afgelopen en afgaande op de berichten van EYKMAN en anderen, dat rijst in den krop van de kip verzuurt, ging ik nu over tot de volgende werkhypothese: Het zuur makende agens in den krop en darm der kip zijn niet de gewone darmbacterien maar de boven beschreven rijst-verzurende-lucht-bacterien. Eene reeks van proefnemingen volgde, waaruit bleek 1o. dat de obligate darmbacterien rijst niet verzuren 2o. dat men in krop en darm der aan Beri-beri overleden kippen de rijst verzurende luchtbacterie kan aantoonen, 3o. dat bij acute gevallen van beri-beri de luchtbacterie de darmbacterien bijna verdringen kan.

Eene andere werkhypothese volgde: Daar Beri-beri bij rijstvoeding in Indië zoowel als in Europa ontstaat, ¹⁾ vermoedelijk door vergiften, die zich uit dit zetmeelhoudende voedsel bij de digestie ontwikkelen (EYKMAN), daar rijst bijzondere affiniteit bezit voor de boven beschrevene zuur-verwekkende luchtbacillen, zoodat zij zelfs in elken drogen korrel gevonden worden, zoo is aan te nemen, dat deze bacillen de verwekkers der Beri-beri zijn niet in den gewonen infectieusen zin, maar doordien zij bij de verzuring van de rijst (in de darmen) door het zuur zelf of door bijprodukten het lichaam benadeelen. Is deze veronderstelling juist, dan moeten deze bacillen bij onderhuidsche inspuiting onschadelijk zijn, met het eten in den darm gebracht echter Beri-beri veroorzaken.

Dat deze bacillen en wel geheele culturen tegelijk ingespoten in de borstspieren en in het peritoneum geen beri-beri verwekken was spoedig aangetoond²⁾. Er bleef dus nog de laatste gewichtigste proef over.

Nu deelde ik boven reeds mede, dat mijne kippen gevoed met gesteriliseerde rijst³⁾ na 18—19 dagen de bekende verschijnselen der Beri-beri toonen; EYKMAN, die eenigszins anders te werk gaat⁴⁾,

1) Eene Europeesche Beri-beri epidemie was die in het RICHMOND-asylum te Dublin. De voeding daar gebruikt is mij onbekend.

2) Dat kippen hun eetlust verliezen en ongesteld worden, zoo men hen dagen achtereen 10—12 platinalussen van deze bacteriën in het peritoneum spuit, zal niemand verwonderen, physiologische keukenzoutoplossing alleen zou hen reeds ziek maken. Maar zij krijgen geen beri-beri en sterven niet. Later spoot ik in de borstspier, wat beter verdragen wordt.

3) De eerste week ontvangen zij rijstkorrels, die in het hok gestrooid worden, spoedig weigeren zij dit voedsel, waarom den 6en of 7en dag tot het stoppen met gester. rijstbrij moet worden overgegaan.

4) EYKMAN steriliseert de rijst niet, laat de korrels slechts vijfmalen en met water aanlengen; de kippen krijgen dan dus de in de rijstkorrel levende bacteriën nog levend in haar krop. Dit is vermoedelijk de oorzaak, dat EYKMAN dikwijls stagnatie van voedsel in den krop krijgt door uitzetting en gisting. Ik zag die nooit. Heeft de vermalen rijst lang gestaan, dan zou zij aanleiding kunnen geven tot de plotselinge sterfgevallen, die EYKMAN meermalen waarnam.

kwam tot hetzelfde resultaat. Is de rijstverzurende bacillus nu de ziekteverwekker, dan moeten kippen gevoed met gesteriliseerde rijst en bovendien met culturen dezer bacteriën veel sneller Beri-beri krijgen dan de eerstgenoemde. Immers ontvangen deze slechts die bacillen, die toevallig bij de kunstmatige voeding uit de lucht in den krop komen ¹⁾, terwijl gene met de gester. rijst geheele cultures van deze bacteriën naar binnen krijgen.

Het bleek nu: dat kippen gevoed met gester. rijst en op gist gekweekte cultures van den zuur-vormenden-rijstbacillus reeds den 3den dag de eerste symptomen van verlamming en cyanose vertoonen. Den vierden dag zitten zij met verlamde pooten, opgerichte veeren, blauwe kammen in het hok, vertoonen spoedig dyspnoe en sterven den vijfden dag. Eene enorme diarhoë deed zich vooraf bemerken en de dieren zijn in die 5 dagen enorm vermagerd, zoodat zelfs de borstspieren nagenoeg verdwenen zijn. Alle verschijnselen beantwoorden volkomen aan die, welke de alleen met rijst gevoedde kippen eerst den 24 of 25ste dag vertoonen, maar hier zijn zij op foudroyante wijze te samengetrokken ²⁾.

Daarmede was het zekere bewijs geleverd, dat de door mij geïsoleerde „zure-gisting-verwekkende lucht- en rijstbacillus” in den darm gebracht Beri-beri bij kippen kan doen ontstaan.

De bewuste bacteriën, het schuim der gisting, zijn post mortem overal in het darmkanaal waar te nemen, de bacteriën zelf schijnen sub finem vitae steeds in het bloed over te gaan, waardoor het verklaarbaar wordt, dat vroeger zoo dikwijls bacteriën uit het bloed bij Beri-beri lijders en kippen geïsoleerd werden. Wellicht vond men toen reeds denzelfden bacillus, die evenwel steeds als ziekteoorzaak verworpen werd, omdat men van het ziekteverwekkende organisme meende te moeten verwachten, dat hij in het bloed gebracht Beri-beri moest opwekken. Men wist niet, dat Beri-beri tot eene eigenaardige groep van ziekten schijnt te behooren die wel op micro-organismen berusten en toch geen infectie-ziekten in den gewonen zin des woords zijn, en die men het best als gistingsziekten kenmerkt. Het ziekteverwekkend micro-organisme is daar alleen schadelijk in de darmen en onschadelijk in het bloed ³⁾. Vooreerst blijft dit eene theoretisch

1) Of de eigen bacteriën der rijst bij de methode van ELLKMAN. Bij den mensch geschiedt dit natuurlijk niet, daar deze nooit rauwe rijst eet. Toch zag ik het eens een fanatiek vegetariaan doen en begrijp nu waarom deze aan profuse diarhoën te gronde ging.

2) Door minder bacteriën bij de rijst te voegen kan men het proces langzamer doen verloop.

3) Daarom zochten DE HAAN en GRIJNS tevergeefs in het serum van herstelde Beri-beri lijders, of in het serum en hydropericardiale vocht van zieken naar complementsbinding. Ook bij kippen vonden zij niets.

geconstrueerde groep, waartoe ik de *Aphthae tropicae*¹⁾, de ziekte van BARLOW, en Scheurbuik²⁾ reken. Moge zij niet lang eene theoretisch geconstrueerde groep blijven. Onderzoekingen betreffende scheurbuik zijn reeds ter hand genomen. Gaarne zouden wij nu nog weten: welke gistingen de ziekteverschijnselen opwekken; dit is evenwel meer de taak van den chemicus dan van mij. Allereerst hebben wij af te wachten wat de onderzoekingen van STAAL betreffende het gevormde zuur zullen leeren.

Eene andere reeks proefnemingen had betrekking op de door mijne voorgangers aangebrachte feiten, dat kippen gevoerd met ongepelde rijst of rijst en rauw vleesch of met rijst en Kadjang hidjoe enz. niet of later ziek worden.

Bij het kweeken der zuurverwekkende bacteriën bleek, dat deze zich alleen ontwikkelen in dat gedeelte van de rijst, dat zich door koken afscheidt als een geleachtige stof, die in Holland stijfsel in Indië tadjen wordt genoemd.³⁾ Deze stijfsel wordt door de bacteriën ontleed in water, gas en zuur en misschien onbekende producten. Hoe meer stijfsel er bij het koken uit rijst ontstaat te weelderiger groeien de bacteriën in zulk een rijst, hoe minder stijfsel te minder voeding voor de bacteriën, te minder gas en zuurvorming.

Ook bij herhaald koken van rijst blijven de korrels behouden, die evenwel de stijfsel hebben afgegeven, die nu de korrels aaneenplakt en in deze stijfsel-tusschenruimten ziet men de bacteriën voortwoekeren en deze in water omzetten, waarin eindelijk de korrels drijven.

Witte, afgewerkte rijst levert veel stijfsel, gekookte gaba (ongepelde rijst) levert bijna geen stijfsel, gesteriliseerde gaba levert weer iets meer op. Hoe langer men kookt te meer stijfsel men verkrijgt en zoo is het begrijpelijk, dat (GRUUS, MATSUSHITA) padi niet volkomen voor beri-beri beschermen kan. Voegt men bij de geheel afgewerkte rijst ferrihydroxyd, eieren⁴⁾, spiritus, beenderenkool⁵⁾, versch vleesch dan vormt zich veel minder stijfsel bij het koken⁶⁾. Per analogiam

1) Volgens eigen onderzoek en dat van Dr. MAURER.

2) NOCHT en HOLST.

3) Aan de rijststijfsel-fabriek van J. DUYVIS dank ik de mededeeling: dat een niet gering deel van de rijst niet in stijfsel om te zetten is, er blijft een belangrijk residu over, dat als beestvoer verkocht wordt, het bevat 87,74 % organische stof (STAAL). Het stijfsel gehalte van de verschillende rijstsoorten is zeer verschillend.

4) MATSUSHITA beweert dat ei bij rijst gevoegd Beri-beri voorkomt.

5) Deze het minst.

6) Toevoeging dezer stoffen belemmert nooit den groei der bacteriën en de gisting, al is zij geringer wegens de geringere hoeveelheid stijfsel.

sluit ik, dat Katjang hidjoe¹⁾ gelijke belemmerende werking op de stijfselvorming zal uitoefenen²⁾.

Daarbij is het lang niet hetzelfde of men deze stoffen reeds voor het te kook zetten met de rijst mengt of eerst na het koken. De reeds gevormde stijfsel kan niet meer worden neergeslagen,³⁾ wel wordt òf de zich vormende stijfsel neergeslagen òf de ontwikkeling daarvan belemmert.

Het is zeer belangrijk, dat inlanders aan zich zelf overgelaten de rijst niet koken maar stoomen, waarbij het stoomen afgewisseld wordt met uitwasschen, wat tengevolge moet hebben, dat de stijfsel verdwijnt, weggespoeld wordt. Rijst voor gevangenen en soldaten wordt daarentegen gekookt, en al tracht men door verdamping daarna aan de rijstkorrel den drogen vorm te geven, die gestoomde rijst heeft, zoo blijft de stijfsel toch in het voedsel. De eerste groep is dientengevolge gevrijwaard voor Beri-beri, de andere er aan blootgesteld. Het gevaar neemt belangrijk toe, zoo men bij voorkeur gekookte of gestoomde rijst eet nadat die volkomen afgekoeld is. Op zulk een rijst zijn de zuurvormende bacteriën uit de lucht neergestreken, zij ruikt nu niet alleen zuur maar krijgt dien aangenamen aan fruit herinnerenden geur, een gevolg der gisting, die door fijnproevers geprezen wordt.⁴⁾ Zetmeel houdend voedsel, dat weinig stijfselvormende stoffen bevat, vrijwaart voor beri-beri en bovendien bestaat er een stijfsel uit zetmeel, dat wel gist, maar waarbij slechts zeer weinig zuur gevormd wordt. Zoo doet onze bacillus (stijfsel uit aardappelmeel zeer gemakkelijk vervloeien, maar er wordt hierbij slechts een zeer geringe hoeveelheid zuur gevormd⁵⁾. Het is dus niet vreemd, dat ELJKMAN met aardappelmeel geen Beri-beri kan opwekken⁶⁾.

Er ontstond een strijd tusschen ELJKMAN eenerzijds en GRIJNS met HOLST anderzijds of Beri-beri bij voeding met gesteriliseerd vleesch ontstaan kan. Ik heb deze proeven niet herhaald, wil er evenwel op

1) ROELFMA, GRIJNS, HULSHOFF-POL.

2) De werking van Kadjang hidjoe en rijstzemelen kan evenwel ook een geheel andere zijn, zie beneden.

3) Daarom zal het extract van dedek, of de in dedek voorkomende zouten gevoegd bij de reeds gekookte rijst de beri-beri niet tegenhouden (GRIJNS contra ELJKMAN).

4) Tamilrijst daarentegen, die tegen beri-beri beschermt (FRASER, STANTON) stinkt. Hij ondergaat eene behandeling, waardoor vermoedelijk de stijfsel-stoffen uitgeloozd worden; de aangenaam ruikende gisting wordt hierdoor onmogelijk gemaakt.

5) Gesteriliseerd aardappelmeel gist iets sneller.

6) Het is evenmin vreemd, dat noch dit meel noch gaba absoluut tegen beri-beri beschermen kan (GRIJNS).

wijzen, dat onze bacillus krachtig op gesteriliseerd vleesch groeit, zonder dat men er iets aan behoeft toe te voegen¹).

In plaats van voedingsproeven nam ik gistingproeven. Al erken ik, dat deze zich niet volkomen behoeven te dekken, zoo leverden zij tot nu toe toch ook niets op, wat in strijd is met de bij voeding waargenomen feiten, zoodat zij deze feiten wellicht verklaren en tevens krachtig er voor pleiten, dat Beri-beri uitsluitend berust op gistings-processen²).

Van het grootste belang acht ik het verder, dat bedoelde bacillen veel meer voorkomen binnen's huis dan buiten's huis en dat zij aan bepaalde jaargetijden althans in Europa gebonden zijn, en dat zeer droge lucht ze doet verdwijnen. Zoo wordt het duidelijk, waarom Beri-beri meer aan het zeestrand (VORDERMAN), bij slechte ventilatie (VORDERMAN), in Europeesch gebouwde huizen (v. d. BURG) voorkomt, dat expedities in boschrijke, moerassige streken berucht zijn wegens het groote aantal Beri-beri lijders (Djambi). Waar de locale condities hiertoe gunstig zijn kan eene zoog. Beri-beri-epidemie ontstaan, of een zoog. Beri-beri-huis of schip. Is een huis sterk met die bacteriën geïnfecteerd, dan zullen de bewoners Beri-beri kunnen krijgen door inademing, droogslikken of waterdrinken, al genieten zij hun voedsel (rijst) buiten dit gebouw³).

Daar het kweken op verschillende voedingsbodems en bij verschillende temperatuur mij leerde hoe gemakkelijk variëteiten ontstaan, dat het gistingproces buitendien door symbiose bevorderd wordt, zoo acht ik het waarschijnlijk, dat er variëteiten van dezen bacillus bestaan, die bijzonder kwaadaardig zijn. Deze eigenschap verkrijgen

¹) Er vormt zich een dicht bacteriënvlies aan de oppervlakte van het vocht, dat op het steriele vleesch drijft zonder zuurvorming.

²) Toch is het geenszins mijne bedoeling om alle bij eentonige voeding waargenomen ziekteverschijnselen met de door den bacillus opgewekte gisting te willen verklaren. Het gebrek aan nucleoproteïden of nucleïne (JEBBINK, NOCHT, SCHAUMANS) moge óf praedisponeren óf de ziekte verergeren, óf zelfstandig ziekten opwekken. Deze nucleïne-theorie wordt door mijn onderzoek niet aangevallen. Tusschen beide ware eene brug te leggen, zoo aangetoond kon worden, dat nucleoproteïden door gisting ontleed worden. De gisting zou dan geen actieve doodelijke stoffen produceren maar den dood veroorzaken door het lichaam het noodige voedsel te ontnemen. Ik acht deze veronderstelling zelfs zeer aannemelijk, daar ik er tot nu toe niet in slaagde om kippen ziek te maken met intramuskuleuse inspuitingen van het zure gistingvocht.

³) Zoo werden in het gebouw der dokter-djawaschool te Batavia (1900) 30⁰ der leerlingen, die buiten de school hun maaltijden nemen, ziek. Zouden wellicht nieuwe muren een geschikten voedingsbodem opleveren, waarom wellicht ook de rijst in dit laboratorium eerst zoo snel verzuurde. Ook BENTLEY meende, dat de verwekker der Beri-beri een muurbacillus zijn moest.

zij vermoedelijk langs den volgenden weg. De bacillus moet zich eerst aan de lichaamstemperatuur en den voedingsbodem onzer darmen aanpassen; is hij daarin geslaagd en verlaat hij nu het lichaam met de faeces (VAN GORKOM), dan zal hij voor een tweede keer in het lichaam komende, veel krachtiger werken (WRIGHT). Zoo meen ik ook te mogen verklaren, waarom de ziekte zich zelden plotseling ontwikkelt en toch in andere zeldzame gevallen zeer acuut optreden kan (Djambi). In zulke buitengewone gevallen spot zij met alle nog zoo rationeële prophylactische maatregelen (HULSHOFF POL)¹⁾.

Zoo ver over de aetiologie der Beri-beri. Nog een enkel woord over de therapie. Deze is te scheiden in eene prophylactische en eene causale.

Van de prophylactische weten wij reeds zeer veel. Wij weten, dat Tamirijst en roode rijst meestal tegen beri-beri beschermt; wij weten, dat eene meer volgens Europeesch voorbeeld geregelde voeding de Beri-beri in de Nederl. Indische marine (VAN LEENT) en in de Japanse marine onderdrukte. Hoe groot het verschil tusschen beide voedingswijzen is heeft ook JEBBINK in zijne dissertatie getoond. Ik wil er hier slechts den nadruk op leggen, dat de inlandsehe soldaat, die veel meer aan de Beri-beri onderworpen is dan de Europeesche, meer van de aan gisting onderworpen zetmeelstoffen bij zijne voeding ontvangt dan de laatste. Verder wisten wij reeds, en het voorliggende onderzoek bevestigt dit, dat ter bestrijding der gisting, de wijze van toebereiding van de rijst van groot gewicht is. Steeds zal men die methode moeten trachten te volgen, waarbij de stijfsel weggespoeld wordt. Men zal er verder naar moeten zoeken of niet uit de padi, voor opschuring en pelling, de stijfselstoffen te verwijderen zijn. De toebereiding speelt vermoedelijk een veel grooter rol dan de onderdom na volledige decorticatie, of het opschuren van geheel afgewerkte rijst (VAN DIEREN contra ELJKMAN en GRIJNS).

Verder hebben voedingsproeven geleerd, dat enkele stoffen gevoegd bij de gekookte rijst het ontstaan der ziekte tegengaan. LAOH noemt de door den inlander bij de rijst genoten toespizzen in 't algemeen, anderen roemen vooral de kadjang hidjoe (HULSHOFF POL),

¹⁾ Ik vind het dan ook volstrekt niet vreemd zoo WRIGHT bij apen Beri-beri kon opwekken, door die te voeden met rijst en pisang, die in de ziekenzalen, waar Beri-beri lijders werden verpleegd, over den grond waren gewreven, terwijl inspuitingen onderhuidsche geen resultaat hadden (HUNTER, KOCH). Ook vindt transport der ziekte door schepen en menschen naar tot daartoe Beri-beri-vrije streken zijn verklaring, zoo men mag aannemen, dat de rijst in die streken niet dezelfde gistings-verschijnselen vertoonde, of in mindere mate, of dat eene bijzonder virulente variëteit werd ingevoerd, zeer actief geworden door passage door het menschlijk lichaam.

ELKMAN de rijstzemelen, SCHAUMANN de gist. Direct met de rijst gekookt zouden zulke stoffen, zooals ik boven aangaf de stijfselvorming kunnen tegengaan, maar, zoo ik de onderzoekers wel begrijp, deden zij dit meestal niet, zoodat deze verklaring niet past. Verder zouden zij den groei der bacillen kunnen belemmeren, of de gisting kunnen tegengaan. Dat doen rijstzemelen en gist evenwel zeker niet, naar ik kon aantoonen, en wordt het derhalve van de andere stoffen per analogiam onwaarschijnlijk.

Neemt men evenwel aan, dat de ziekteverschijnselen daarop berusten, dat de gisting in de darmen geen actieve vergiften vormt, maar aan het lichaam voedingsstoffen ontnaemt (NOCHT, SCHAUMANN), zonder welke het niet bestaan kan, dan zoude het mogelijk zijn, dat deze door katjang lidjoe, gist enz. enz. weer aan het lichaam worden toegevoegd. Dit punt eischt nader onderzoek.

De causale therapie zal trachten de bacillen¹⁾ en de gevormde gisting en haar producten in het darmkanaal te bestrijden. In dien zin werden wel nog geen proeven genomen, behalve met bovengenoemde voedingsmiddelen. Een anderen weg kan de causale therapie betreden door eventueel in het bloed overgetreden stoffen te bestrijden of daaraan onttrokken stoffen toe te voegen. Het is mij bekend dat door Prof. ELKMAN in die richting wordt geëxperimenteerd.

²⁾ Lettende op de waarnemingen mijner voorgangers, op eigen onderzoek en op het feit, dat, zoover ik tot heden heb kunnen nagaan, noch het inspuiten der bacteriën, noch van het filtraat van verzuurde rijst (intraperitonaal en intramusculair) bij kippen Beri-beri opwekt, moet ik aannemen, dat de gistingverwekkende bacillen, van uit het darmkanaal, aan het lichaam stoffen onttrekken, waardoor het schielijke vermageren (500 gram in 4 dagen) verklaard moet worden. Langzamer werkende ontstaan eerst alleen de symptomen der verlamming, maar in elk geval wordt door het onttrekken dezer stoffen eindelijk het leven onmogelijk en treedt de dood in.³⁾

¹⁾ MAURER meent dit te kunnen bereiken door zuren (melkzuur, zoutzuur, phosphorzuur). Daar de bacillus in zure voedingsbodems spoedig afsterft, zoo zou in de eerste plaats het door hem zelf geproduceerde zuur in overmaat gegeven wellicht genezend kunnen werken.

²⁾ Bij alle therapeutische proefnemingen zal men met HULSHOFF POE scherp moeten onderscheiden tusschen de eigenlijke Beri-beri symptomen en de latere gevolgen ten gevolge van gedegeneerde zenuwen. Slechts voor de eerste mogen wij een actief geneesmiddel verwachten. Verder is niet alles, wat men bij kippen waarneemt, toepasselijk op het zoogdier, naar de proeven van HOLST met rijstvoeding bij Cavyas getoond hebben.

³⁾ YAMAGIWA meent, dat de regressieve metamorphose van het weefsel een gevolg is van anaemie.

Zijn werkelijk, zooals thans vrij algemeen aangenomen wordt, menschen- en kippenberi-beri aan dezelfde oorzaak toe te schrijven, dan moeten bij acute Beri-beri soortgelijke bacteriën uit de faeces der lijders te isoleeren zijn. Mogelijk is het evenwel, dat zij in het rectum te gronde gaan, evenals men bij Beri-beri-kippen, waar men in het geheele darmkanaal dikwijls nitsluitend de gistingverwekkers vindt, ze toch in de beide blinddarmen moeielijk kan aanwijzen. Dan zal men een gunstig geval moeten afwachten, waarbij men post mortem in een versch geval maag en dundarm onderzoeken kan.¹⁾ Mochten zij, ook onder de daartoe gunstigste condities (acuut sterfgeval in het beginstadium), niet gevonden worden, dan is óf menschen- en kippenberi-beri niet hetzelfde, óf er zijn verschillende verwekkers van de vele ziekten, die men tot de groep „Beri-beri” gebracht heeft. Toch hoop ik, dat ook in dit geval de voorliggende resultaten dienstig zullen kunnen zijn om de aetiologie dezer, met kippenberi-beri in elk geval verwante ziekten, vast te stellen.

Alhoewel eene voorloopige mededeeling niet vereischt, dat men er de literatuur van het onderwerp in weergeeft, zoo heb ik toch rekening gehouden met de literatuur, om te vermijden, dat ik anderen in hun prioriteitsrechten benadeelde en om eigen resultaten te controleeren. Prof. EYKMAN was zoo vriendelijk mij zijne verzameling separata ter beschikking te stellen, waarvoor ik hem ten zeerste mijnen dank betuig. Veel literatuur vindt men ook in het werk van DÜRCK.

Ik voorzie, dat bij controle mijner resultaten de meeste kritiek hierdoor zal worden uitgelokt, dat de door mij aangewezen bacillus zoo uiterst moeielijk, met behoud van volle virulentie, te kweeken is. Proeven met bacillen, die reeds gewijzigd zijn, zullen natuurlijk andere resultaten geven. Ik hoop er in te slagen eene methode te vinden, waardoor men te allen tijde over vol-werkzame bacillen zal kunnen beschikken. De grilligheid of variabiliteit van den bacillus herinnert ons er aan, dat ook het zichtbaar worden der Beri-berisymptomen na rijstvoeding, zoo uiterst grillig is, in zijn vroeger of later optreden, naar de door EYKMAN en HOLST gegeven protocollen toonen (verschillen van 3 weken). Deze verschillen werden tot daartoe alleen aan de verschillende resistentie der dieren toegeschreven, wat juist kan zijn, maar niet bewezen is.

Ik geef hier deze voorloopige resultaten daar mijne persoonlijke middelen mij niet veroorloven, de gewenschte proefnemingen met

¹⁾ Volgens VAN GORKOM begint Beri-beri bij menschen steeds met ontsteking van maag- en darmslijmvlies.

verschillende voedingsmiddelen en de verschillende methoden van rijstbereiding in alle details door te voeren. Wellicht zullen anderen, die over ruimer middelen beschikken, bereid zijn deze onderzoekingen te herhalen en ze hier en in Indië tot een gewenscht einde te voeren

Utrecht, 27 Januari 1911.

Anatomie. — De Heer L. Bolk biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. W. G. Huet: „*Aanteekeningen over de trochlearis- en oculomotorius-kern en den trochlearis-wortel bij lagere vertebraten*”.

(Mede aangeboden door den Heer C. Winkler).

In den loop van het vorige jaar heb ik eenige waarnemingen gedaan aangaande de oculomotorius- en trochleariskern en de wortel(s) daarvan, bij *Petromyzon*, *Lophius*, *Gadus*, *Hippoglossus*, *Rhombus*, *Pleuronectes* en *Seyllium Canicula*. De resultaten van mijn onderzoek zijn het best te demonstreeren door een vergelijking van de genoemde kern verhoudingen bij *Petromyzon*, *Seyllium* en *Lophius*, die ik hierbij geef.

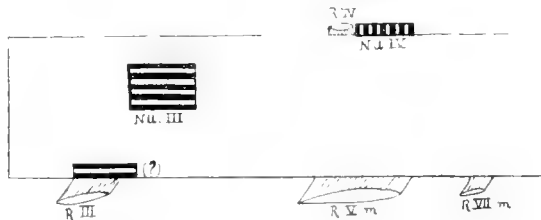


Fig. 1. *Petromyzon*.

In Fig. 1 is weergegeven de topographische verhouding v. d. oculomotorius-kern en -worteluittrede, de trochlearis-kern en -worteluittrede en de motorische V en VII-wortel uittrede in *Petromyzon*. Zooals hiernit blijkt ligt de oculomotoriuskern bij dit dier gedeeltelijk op het niveau van zijn wortel-intrede, gedeeltelijk daarachter. De (fig. 7) hoofdkern, volgens sommige onderzoekers de eenige III-kern ligt met zijn dorsalen rand niet ver van den aquaeduct. Of de z.g. „ventrale III-kern” een III-kern is, wil ik niet positief verzekeren. Zijn topografie pleit er zeer voor, zooals Fig. 1 en 6 toonen. Het celtipe is echter iets kleiner dan dat van de dorsale

kern. Ik heb omtrent het verloop harer aseylinders niet voldoende zekerheid kunnen krijgen om dit punt te kunnen uitmaken. ¹⁾

Aan de trochlearis-kern is het opvallend dat deze zeer dorsaal ligt, *boren* den aquaeduct in het velum (Fig. 8) gelijk ook door SCHILLING ²⁾ werd beschreven en door TRETJAKOFF ³⁾ bij *Ammocoetes* werd waargenomen.

De verdere topografie van deze kern toont dat zij dicht bij den trigeminus-wortel ligt en dicht bij de trigeminus-kern dan bij de kern van de III^{de} zenuw. Bovendien ligt de trochlearis-kern in toto *achter* haar wortel uitrede (Fig. 1 en TRETJAKOFF l. c.).

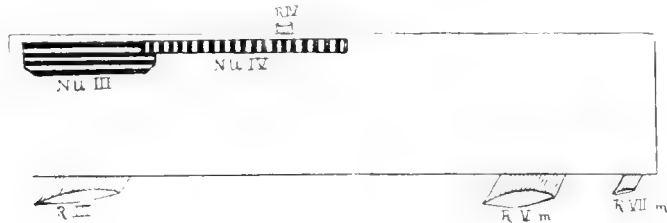


Fig. 2. Scyllium.

Vergelijken wij deze verhoudingen met Fig. 2, die de topographische verhoudingen bij *Scyllium* weergeeft, dan vinden we reeds dadelijk in de ligging van de oculomotorius-kern een verschil, de kern toch reikt iets verder naar voren dan in *Petromyzon* en overschrijft de voorgrens van zijn wortel (zie ook fig. 9). Een ventrale III-kern komt hier niet voor; alle cellen liggen in het bovenste derde deel der midden hersenbasis (fig. 10). Grooter zijn de topographische verschillen, die de trochleariskern en haar wortel toonen in vergelijking met *Petromyzon*. De trochlearis-kern ligt niet meer *dorsaal* van den aquaeduct *in* het velum, maar zijdelings v. d. aquaeduct, grootendeels er onder, fig. 9. Zij is zeer in de lengte uitgerekt: Een gedeelte van de kern ligt nog achter de wortel-intrede, een ander, grooter deel ligt ervoor.

De afstand van de kern tot de V-wortel is sterk vergroot, en de verschuiving in de richting van de III-kern zóó aanzienlijk dat de III en IV-kern elkaar voor een gedeelte bedekken, resp. in elkaar overgaan (Fig. 2 en 9).

¹⁾ Zooals bekend is wordt deze kern door SCHILLING beschouwd als deel uitmakende van de III-kern, door TRETJAKOFF daarentegen als een v. d. oculomotorius onafhankelijke celgroep.

²⁾ SCHILLING: Das Gehirn von *Petromyzon fluviatilis*. Abhandl. der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft, Bnd. 30 S. 441 1907.

³⁾ TRETJAKOFF: Das Centralnervensystem von *Ammocoetes*. II. Das Gehirn. Archiv. f. Mikrosk. Anatomie Bnd. 74 S. 713 1909.

Ik wil er direct op wijzen dat de groote afstand tusschen IV-kern en quintus-wortel niet *uitsluitend* is toe te schrijven aan de voorwaartsche verschuiving van de eerstgenoemde kern. De isthmus is bij de Selachiers veel meer uitgerekt dan bij de in elkaar gedrongen hersenen van *Petromyzon*¹⁾ en ook meer dan bij de aanstonds te beschrijven Teleostiers. Dat er echter een aanzienlijke frontale verschuiving van de trochlearis-kern heeft plaats gevonden blijkt ook uit het feit dat een groot deel van die kern thans *voor* zijn wortelintrede ligt en daaruit dat III en IV-kern elkaar voor een gedeelte bedekken, terwijl bij *Petromyzon* tusschen beide een groote afstand bestond.

Wij vinden dus bij dezen Selachier een sterke frontale verschuiving van de IV-kern, vergeleken bij *Petromyzon*.

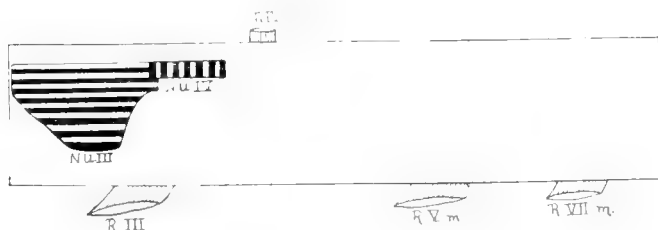


Fig. 3. *Lophius*.

Overgaande tot de verhouding bij Teleostiers, verwijs ik naar Fig. 3, waarin de topographische verhoudingen van *Lophius* zijn waargegeven. Hier doet zich aan den oculomotorius een groot verschil voor in vergelijking met *Scyllium*, doordat een gedeelte van de III-kern een sterk ventrale verschuiving heeft ondergaan. (Fig. 3, 11 en 12).

Deze ventrale verschuiving kan ons niet verbazen daar het bekend is, dat ook de abducenskern dezer dieren een ventrale ligging inneemt²⁾. Het is meer dan waarschijnlijk dat ook hier de machtige ontwikkeling der ventrale tecto-bulbaire (optische) reflexbaan de oorzaak dier verplaatsing is, wat voor de gekruiste reflexen misschien ook daarin een steun kan vinden dat de plaats van het onderste punt van de kern overeenkomt met het ventrale kruisings-niveau der genoemde reflexbaan, die juist ligt (zooals we door DE LANGE's³⁾

¹⁾ De in elkaar dringing der *Petromyzon*-hersenen is ook opvallend aan de voorhersenen, waarop SCOTT reeds gewezen heeft. (*Journal of Morphologie* Vol. I, p. 253).

²⁾ KAPPERS. The migrations of the V, VI and VII nuclei etc. *Verhand. der Kon. Akad. v. Wetensch.* Bnd. 16, 2de Sectie.

³⁾ DE LANGE. The descending tracts of the corpora quadrigemina. *Folia Neurobiologica*, Bnd III, pag. 644.

onderzoekingen weten) voorn. vóór, gedeeltelijk op de hoogte der III wortel-uitrede en daar een reeks van vezelen afgeeft aan de III-kern. (vergelijk ook EDINGER en WALLENBERG ¹⁾).

In verband met de meer frontale uitbreiding van de dorsale kern mag hier herinnerd worden aan het feit dat DE LANGE de kruising der dorsale tecto-bulbaire vezelen eveneens frontaler vond.

Aangaande den III-wortel wil ik vermelden dat een groot aantal kruisende vezelen uit het achterste, aan de trochlearis-kern grenzende gedeelte van de III-kern te voorschijn komen, hetgeen interessant is ten aanzien van het feit dat ook de IV vezelen een kruisend karakter hebben.

De trochlearis-kern toont ons op zeer duidelijke wijze een verder stadium van het proces reeds aangeduid bij den haai, n.l. de voorwaartsche verschuiving zijner cellen, die hier *in toto voor* hun wortel-uitrede liggen. Dat dit niet een gevolg is van een achterwaartsche verplaatsing van den wortel, maar van een meerdere opschuiving van de IV cellen blijkt daaruit dat de IV wortel bij *Lophius* en *Seyllium* ongeveer dezelfde positie inneemt ten opzichte van de III en V wortel en dus ook ten opzichte van deze punten de verschuiving van de IV kern geconstateerd kan worden. (Fig. 3 en 11).

De ligging, die de IV kern ten opzichte van haar wortel-uitrede inneemt bij de beenvisschen doet sterk denken aan die bij den mensch (verg. MARBURG ²⁾), waar de kern ook in toto frontaal daarvan ligt. Bij menschenlijke embryonen werd door VAN VALKENBURG ³⁾ geconstateerd, dat deze secundair ontstane verhouding zich soms door een caudaal achtergebleven rest, door hem „nuel. IV posterior” genoemd, laat aantoonen (vergelijk ook JACOBSON ⁴⁾).

Betreffende den trochleariswortel zij nog de volgende bijzonderheid vermeld.

Reeds door vroegere onderzoekers was waargenomen dat de trochlearis bij sommige beenvisschen (*Salmo*, *Haller*; *Gadus*, *Kappers*) den hersenstam met twee wortels doorloopt in tegenstelling met andere beenvisschen (b.v. *Lophius*). Het nauwkeurige verloop een dezer beide wortels was echter te voren nooit volkomen duidelijk.

Daar ik beschikte over eenige frontale en horizontale seriën van *Gadus* en andere visschen ben ik in staat geweest het geheele systeem

¹⁾ Vorlesungen 1^{te} Auflage. — Beiträge zur Kenntnis des Gehirns der Teleostier und Selachier. Anat. Anzeiger, Bnd. 31, P. 369.

²⁾ MARBURG, Mikroskopisch-topographischer Atlas des menschlichen Zentralnervensystems.

³⁾ C. T. VAN TALKENBURG: Verslag der Kon. Acad. v. Wet. 25 Juni 1910.

⁴⁾ JACOBSON, Verhandl. Preuss. Akad. 1909.

met vrij groote nauwkeurigheid te vervolgen en kwam ik tot de volgende conclusie:

Bij *Lophius piscatorius* vindt de kruising van de trochlearis-wortelvezelen op vrij eenvoudige wijze plaats. Na hun oorsprong uit de trochlearis-kern begeven de vezelen zich als één compacte bundel dicht langs den aquaeduct naar boven en kruisen in toto op één verticaal niveau: de kruising omvat ongeveer 6 coupes van 25μ , niet meer; slechts in zooverre kan men een verschil tusschen de vezels onderling waarnemen als sommige dichter bij den aquaeduct, andere dichter aan de oppervlakte van het velum kruisen (ongeveer als in schema *b* figuur 4; de kruisjes geven het niveau der kruising aan).



Fig. 4.

Bij *Hippoglossus* wordt deze verhouding iets gecompliceerder, doordat een gedeelte der vezelen een weg volgt gescheiden van de anderen. Alvorens tot de kruising over te gaan begeven deze vezelen, ongeveer de helft van het geheel, zich frontaalwaarts in de valvula cerebelli, eerst dan kruisen ze, en na de kruising wenden ze zich lateraal, loopen weer caudaalwaarts tusschen de valvula cerebelli en de deze omgevende verbinding met het tectum om dan op de hoogte van het oorspronkelijke velum uit de groeve tusschen mesencephalon en cerebellum te voorschijn te treden tegelijkertijd met het andere, ter plaatse kruisende wortelbundeltje (ongeveer als in schema *c*, fig. 4).

Men krijgt den indruk als ware het voorste deel van den trochlearis-wortel en zijn kruising door den groei van de valvula in den optischen ventrikel meegetrokken onder fixatie van het nittredingspunt.

Het meest opvallend is deze dislocatie van de voorste wortelhelft bij *Gadus*, waar de valvula ook iets verder naar voren onder het tectum dringt. (Vergl. schema *d*, Fig. 4).

Behalve door de eigenaardige dispersie van de kruisingen onderscheidt het voorste deel van den trochlearis van dit dier zich ook nog daardoor v. h. achterste, dat het van zijn oorsprongsgebied niet direct om den aquaeduct mediaal v. d. tr. cerebello-mesencephalicus verloopt, maar buiten dien tractus om omloopt. (Fig. 5).

Dat de frontale verschuiving van een gedeelte der kruising in den frontalen groei van de valvula haar oorzaak vindt, is duidelijk. Bij

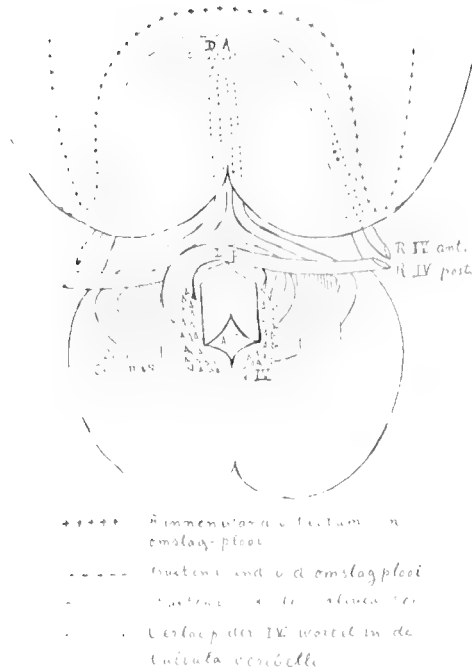


Fig. 5. Gadus.

dieren zonder valvula komt het niet voor (haaien b.v.) en ook bij *Lophius*, waar de valvula cerebelli slechts uiterst klein is, is van een frontale verschuiving van een deel der trochlearis-vezels geen sprake. Toch geeft de toestand bij dit dier ons de verklaring aan de hand.

De hierbij gegeven teekeningen maken duidelijk hoe de genoemde wortel-dispersie uit den eenvoudigen toestand is af te leiden. Bij (*a*), type haai, neemt de kruising der vezelen slechts een kleine ruimte in. Daar het velum zeer dun is, is er ook maar één decussatie aanwezig. Bij (*b*) is het velum aanzienlijk verdikt, voornamelijk door den groei van de moleculaire- en Purkinjelaag daarover. (Type *Lophius*).

Alhoewel de kruising nog in één vertikaal niveau blijft kan men toch onderscheid maken tusschen de vezelen, die dicht bij den aquaeduct kruisen en zulke die meer of geheel a. d. oppervlakte van de moleculaire laag kruisen.

Bij (*c*) is de moleculaire- en Purkinje-laag nog aanzienlijk verder gegroeid onder het tectum opticum en vertoont zij meer plooiing: een gevolg daarvan is de vergrooting van den afstand tusschen de meer bij de oppervlakte en in de diepte kruisende vezelen, die in (*d*) zijn maximum vindt, hetwelk ongeveer overeenkomt met den toestand zooals *Gadus* dien vertoont.

Deze teekening demonstreert meteen duidelijk dat de ruimte, waarin de frontale wortel kruist en naar achteren terugloopt niet *in* het

cerebellum, maar tusschen zijn plooiën en den verbindingsplooi met het tectum ligt.

Resumieërend wat de bovengemelde ervaringen leeren, kan ik het volgende constateeren:

Oculomotorius.

De III-kern neemt in de lagere vertebraten in de lengte-as der hersenen een meer constante plaats in dan de IV-kern. Toch ondergaat zij een geringe frontale verschuiving. In dorsoventrale richting ondergaat de oculomotorius-kern der Teleostiers een aanzienlijke verplaatsing, die overeenkomt met de ventrale verplaatsing van de abducens-kern bij deze dieren. Het ventraalste punt v. d. kern komt ongeveer overeen met de kruising der tecto-bulbaire banen, die er vezelen aan afgeven.

Van de kruisende III wortelvezelen komen bij *Lophius* vele uit het achterste, a. d. IV kern aansluitende deel der III kern.

Trochlearis.

De trochlearis-kern toont bij de lagere vertebraten groote verschillen in haar ligging ten opzichte van de lengte-as der hersenen. Bij *Petromyzon* ligt zij op grooten afstand achter de III-kern, achter haar wortel intrede, bijna in het trigemines-gebied, gelijk door TRETJAKOFF ook voor *Ammocoetes* werd vastgesteld.

Daarbij ligt zij meer dorsaal, boven den aquaeduct in het velum.

Bij de *Selachiers* ligt de kern op grooten afstand v. h. trigemines-gebied en dicht bij de III kern, in de laatste overgaand. Zij is sterk uitgerekt en strekt zich gedeeltelijk achter, doch reeds grootendeels vóór de IV wortel-intrede uit. Daarbij is zij zijdelings v. d. aquaeduct en onder dezen gekomen. Bij *Lophius* bereikt de voorwaarts-verschuiving haar maximum. De kern is meer compact geworden en ligt in toto vóór de IV wortel-intrede.

Bij sommige Teleostiers ondergaat de trochlearis-wortel een eigenaardige verspreiding in bundels, o.a. bij *Gadidae* en *Pleuronectidae*, door dat: 1o. de wortel vóór hij kruist in tweeën gesplitst wordt door den doortredenden tr. cerebello-mesencephalicus; 2o. het buiten dien bundel om verloopende deel door den frontalen groei v. h. velum, dat tot valvula cerebelli uitgroeit, naar voren meegenomen wordt en eerst meer frontaal kruist, daarna tusschen valvula en haar verbinding met het tectum caudaal loopende.

Dit uit elkaar rukken der kruisings-niveaux verklaart ook de splitsing van den trochlearis-wortel in twee wortels bij de uittrekking, die niet te vinden is bij visschen zonder valvula (haaien) of bij zulke beenvisschen, waar de valvula zeer klein blijft (*Lophius*).

Anatomic. — De Heer L. BOLK biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. L. D. BARON VAN HOEVELL: „*Aanteekeningen over de reticulaire cellen bij eenige verschillende vertebraten*”.

(Mede aangeboden door den Heer C. WINKLER).

De reticulaire cellen zijn bij eenige zoogdieren onderzocht en beschreven, en voor enkele vogels beschikken wij over nauwkeurige aangiften van CAJAL¹⁾, terwijl ook MESDAG²⁾ verschillende goede beschrijvingen en afbeeldingen geeft van de groote reticulaire cellen bij een vogelsoort (kip).

Bij de reptiliën echter zijn de daar toch zeer opvallende en typisch gerangschikte reticulaire cellen nooit beschreven, en ook voor de amphibien en verschillende vischsoorten bestaan geen aangiften van beteekenis³⁾.

Een vergelijkend onderzoek der reticulaire cellen is nog nooit verricht, terwijl deze elementen toch lang niet bij alle dieren gelijk worden gevonden. Naast punten van overeenkomst komen duidelijke verschillen voor. Ja zelfs bij dieren van éénzelfde klasse kan men opvallende verschillen vinden.

Het valt niet te ontkennen, dat zoolang van den aard en de beteekenis der reticulaire cellen nog zoo weinig vast staat, het maken van vergelijkingen wel eenigszins gewaagd is, daar de mogelijkheid niet is uitgesloten, dat ongelijksoortige grootheden met elkaar vergeleken worden. Ik heb bij mijn onderzoek mijn aandacht hoofdzakelijk bepaald tot de grootste reticulaire elementen, omdat deze nog het meest een vergelijking veroorloven. Van de kleine reticulaire cellen weten we nog minder af dan van de grootste. Een scherpe afgrenzing der grootste reticulaire cellen van de kleinere is echter voorloopig niet altijd mogelijk. Ik heb daarom naast de groote reticulaire cellen ook de kleinere zooveel mogelijk nagegaan; hoofddoel van mijn onderzoek bleef echter de rangschikking der grootere

¹⁾ Contribucion al Estudio de los ganglios de la substantia reticular del bulbo. Trabajos del laboratorio de Investigaciones biologicas Tomo VII fasc. 4º. 1909.

²⁾ Bijdrage tot de ontwikkelingsgeschiedenis van de structuur der hersenen bij het kippenembryo. Inaug. Dissertatie. Groningen, 1909.

³⁾ Een afzonderlijke vermelding verdienen de grootcellige elementen der obiongata bij de Cyclostomen, onlangs door TRETJAKOFF beschreven. Of de groote Mullersche cellen der Cyclostomen op een lijn zijn te stellen met de groote reticulaire cellen van den bulbus van andere dieren is niet zeker, doch er is veel wat voor een homologie pleit. (Vergelijk: TRETJAKOFF: Das Nervensystem von Ammonoetes. II. Gehirn. Archiv für mikroskopische Anatomie und Entwicklungsgeschichte Bnd. 74, 1909.)

elementen. Ik onderzoek series van frontale coupes, gekleurd volgens VAN GIESON of met karmijn.

De dieren, die ik onderzoek, zijn :
 een kraakbeenvisch: *Raja*,
 een amphibie: *Rana*,
 twee reptiliën: *Alligator Sklerops* en *Chelone midas*,
 een vogel: *Ciconia alba*,
 en eenige zoogdieren; n.l.
 twee buideldieren: *Macropus robustus* en *Didelphys*,
 twee knaagdieren: *cavia* en konijn,
 een hoefdier: *equus caballus*,
 en een cetacae: *phocaena communis*.

Raja.

Wanneer men een serie van frontale coupes door de oblongata van *Raja* doorziet, vindt men overal op vrij eenvormige wijze de groote reticulaire cellen gerangschikt langs den lateralen en ventrolateralen rand van den fasciculus longitudinalis posterior. Alleen in het caudale deel van de oblongata, ter hoogte van de intredende X-wortels vindt men een afwijkend beeld, doordat hier de reticulaire cellen ook sterk in de raphe zijn opgehoopt.

De reticulaire cellen van den bulbus van *Raja* vormen een doorloopende reeks. Ze zijn echter niet gelijkmatig over den bulbus verdeeld: op enkele niveaux vindt men ze sterker opgehoopt, zoodat men daar van reticulaire kernen zou kunnen spreken. Men kan de reticulaire cellen bij *Raja* indeelen — op beschrijvend anatomische gronden — in drie groepen: 1e. een caudale groep, voorkomende op de hoogte der intredende X-wortels, 2e. een groep voorkomende ter hoogte van de intredende VIII-wortels, en een 3e. groep, die de reeks reticulaire cellen omvat frontaal van de VIII-intrede. Men kan deze gemakshalve ne. *reticularis inferior*, *medius* en *superior* noemen.

Fig. 1. geeft een caudaler niveau weer, Fig. 2 een frontaler niveau van het vagusgebied van *Raja*¹⁾. Men ziet de ophooping van cellen tusschen den fasc. long. post. en de basis, met een sterke raphekern (fig. 1 en 2: *a*) en zijvleugels, die zich guirlandevormig onder langs den rand van den fasc. long. post. zijwaarts uitstrekken. Een deel der cellen hiervan ligt vrij dorsaal, lateraal van den fasc. long. post. (Fig. 1 en 2: *b*). Andere cellen liggen meer ventraal in de *formatio reticularis* (Fig. 1 en 2: *c*). Enkele kleinere reticulaire cellen liggen vrij ver lateraal (Fig. 1 en 2: *d*). De reticulaire kern van het X-gebied is zoowel caudaalwaarts als frontaalwaarts af te grenzen. Caudaalwaarts vermindert

¹⁾ De reticulaire cellen zijn op de rechter helft der photo's zwart gemaakt.

het aantal cellen zoowel in de raphe als in de formatio reticularis geleidelijk, terwijl het celype tevens kleiner wordt. Frontaal van de intrede der X-wortels vermindert het aantal reticulaire cellen eveneens, zoodat men tussehen de X- en VIII-wortel-intrede een bepaald gebied vindt in de oblongata waar slechts weinig reticulaire cellen voorkomen. Op de hoogte van den intredenden octavus vindt men weer een ophooping van reticulaire cellen (Fig. 3). Men vindt daar per coupe 6—8 groote cellen in elke bulbushelft, om den ventro-lateralen rand van den fasc. long. post. gerangschikt; de meest dorsale liggen ongeveer in het midden van de dorso-ventrale bulbusafmeting (fig. 3: *b*) en de andere medioventraal daarvan meer tegen den onderrand van den fasc. long. post. (Fig. 3: *c*). Enkele kleinere cellen hebben een meer ventro-laterale ligging. — In de raphe komen slechts enkele kleinere cellen voor. —

Frontaal van de VIII-intrede neemt het aantal groote reticulaire cellen weer af, men vindt er een 3—5 tal per coupe (Fig. 4, *b* en Fig. 5, *b* en *c*). De ligging is ongeveer dezelfde als op het VIII-niveau. Ook de kleine ventro-lateraal gelegen cellen vindt men frontaal van de VIII-intrede terug, het duidelijkst even achter de V-wortel-intrede. Fig. 4 geeft een coupe door de mot. V-kern, Fig. 5 een coupe frontaal daarvan. Met kleine schommelingen in het aantal der cellen zet de reeks van reticulaire elementen zich voort tot onder de voorgrens der Brachia cerebelli, om daar, waar de Brachia uit de coupes verdwijnen, sporadisch te worden. In de raphe komen frontaal van de VIII-intrede slechts enkele kleinere cellen voor.

Van een eigenlijke raphe-kern is noch op het VIII niveau noch frontaal daarvan sprake.

Bij de *amphibiën*, waar de rangschikking van alle cellen periependimaal blijft, is een onderscheiding van reticulaire cellen van andere cellulaire elementen te moeielijk om met mijne methode van onderzoek iets over de topographie daarvan te weten te komen,

Alligator Sklerops.

De groote reticulaire cellen in de oblongata van Alligator kunnen ingedeeld worden in twee hoofdgroepen. De caudaalste groep ligt op de hoogte der intredende X-wortels en omvat een vrij scherp af te grenzen reticulaire kern. Deze kern begint caudaal in de oblongata als geringe ophooping van kleine reticulaire cellen in de raphe en onder den fasciculus longitudinalis posterior, terwijl tevens reeds op caudale coupes ventro-lateraal in de formatio reticu-

laris een groepje cellen te zien is, deels van polygonale, deels van meer spoelvormige gedaante. Al naarmate men frontalere coupes beziet, vindt men meer en grootere reticulaire cellen. Op de hoogte



Fig. 6. Alligator sklerops.

door Fig. 6 aangegeven ¹⁾ heeft de reticulaire kern een flinken omvang bereikt. Ook de laterale kern (L_1) is op dit niveau flink ontwikkeld.

Een weinig caudaler dan Fig. 6 aangeeft, hebben de hypoglossus-cellen (of de motorische voorhoorn cellen; een scherpe grens tusschen deze is met mijn methode niet te maken) een ventraler ligging en zijn moeilijk af te grenzen van de reticulaire cellen, die in den lateralen rand van den fasc. long. post. zijn gelegen.

Fig. 7 geeft een coupe weer, gaande door de intredende X wortels. Dezelfde groot-cellige reticulaire kern is hier getroffen als op Fig. 6, doch op een frontaler niveau. Men ziet de groote cellen liggen, deels in de raphe, deels guirlandevormig in ventro-laterale richting verspreid in de formatio reticularis, terwijl een klein groepje min of meer afgezonderd iets ventraler ligt (fig. 7, *c.*). Lateraal in de peripherie ziet men een kern (Fig. 7, L_2) waarvan ik niet met zekerheid kan uitmaken of die de voortzetting vormt van de laterale kern (L_1) van Fig. 6, omdat kern L_1 frontaler afneemt, zoodat op een niveau, tusschen Fig. 6 en Fig. 7, daar ter plaatse slechts enkele cellen liggen, die niet af

¹⁾ Men moet bij het beoordeelen der teekeningen in aanmerking nemen, dat de oblongata van alligator een sterke kromming heeft, en dat de couperichting is gekozen loodrecht op de basis ter hoogte van den VII wortel, zoodat de caudalere coupes niet zuiver loodrecht op de lengteas der oblongata gericht zijn. In Fig. 6, 7 en 8, stelt de dorsale helft een caudaler niveau voor dan de ventrale helft.

te grenzen zijn van de overige verspreide cellen der formatio reticularis.
De groote reticulaire cellen ter hoogte van de VIII-wortelintrede

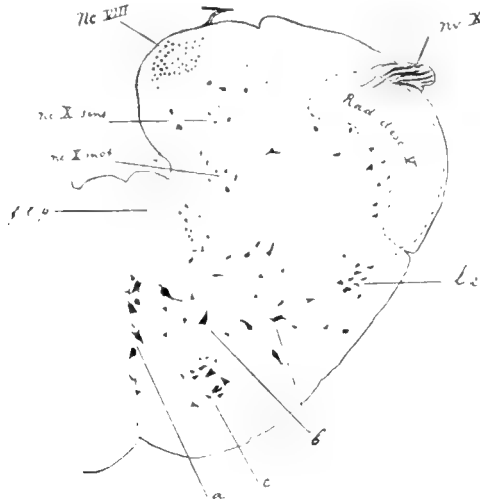


Fig. 7. Alligator sklerops.

zijn met de meer frontaal voorkomende in één groep samen te vatten.
Deze groep is duidelijk af te grenzen van de caudalere reticulaire kern van het vagusgebied.

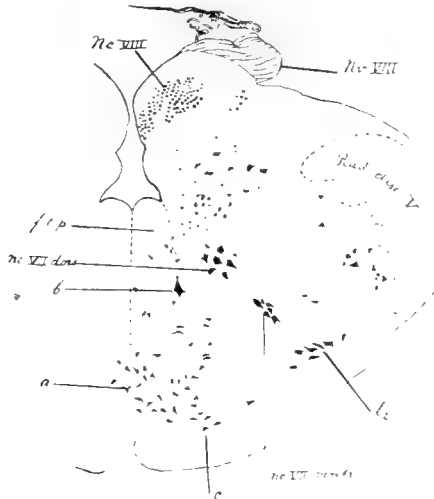


Fig. 8. Alligator sklerops.

Fig. 8 geeft een coupe weer door dat deel der oblongata dat als overgangs- of grensgebied beschouwd kan worden tusschen vagus- en octavusgebied. Op meerdere coupes ziet men op deze hoogte slechts een enkele groote reticulaire cel voorkomen; in Fig. 8 ziet men er ééne in den rand van den fase. longit. post. (b) Ventraal in de raphe (a) en

daarnaast (c), tusschen den fasc. longit. post. en de basis, ziet men een groot aantal kleinere reticulaire cellen. Ventro-lateraal aan de peripherie gelegen vindt men een groep polygonale cellen (fig. 8, l_2) die met twee andere groepen dorso-mediaal daarvan in een rechte lijn ligt. De dorsaalste van de drie groepen bevat motorische VII-wortel cellen, de middelste is met groote waarschijnlijkheid een ventrale VII kern, doch van de ventraalste der drie (l_2) is het onwaarschijnlijk dat het een VII kern zou zijn¹⁾. Deze laatste groep vormt de voortzetting van groep l_2 van fig. 7. Ik beschouw ze als reticulaire cellen.

Op een weinig frontaler niveau dan fig. 8 aangeeft, treft men weer meer groote reticulaire cellen aan. Fig. 9 geeft een coupe weer, gaande door de VIII wortel-intrede. In de raphe ziet men nergens



Fig. 9. Alligator sklerops.

op coupes, frontaler dan fig. 8 genomen, groote cellen (wel ziet men op fig. 9 enkele kleinere cellen in de raphe) Ook door dit feit is de reticulaire kern van het vagusgebied afgegrensd van de reticulaire cellen van frontaler gebieden der oblongata. De rangschikking der groote cellen naast den onderrand van den fasc. longit. post. (b) en meer ventraal (c) mediaal van de groote oliva superior blijkt uit de figuur.

Ik wil nog wijzen op eenige zeer groote polygonale cellen voorkomende in de grijze stof van den radix descendens nv. V, en op het feit, dat enkele daarvan zeer peripheer of lateraal in die grijze

¹⁾ Zie verhandel. Kon. Acad. v. Wet. 2e de Sectie, deel 16 No. 4. (Map. E en pag. 64).

stof liggen. Vlak boven de punt van de oliva superior en lateraal van de olijf liggen enkele kleinere cellen.

De reeks groote reticulaire cellen van het octavusgebied zet zich



Fig. 10. Alligator sklerops.

zonder onderbreking frontaalwaarts voort. Op fig. 10, die een coupe weergeeft, gaande door het caudale deel van de motorische V kern, liggen de groote reticulaire cellen als een circumscribe groep in het midden van de bulbushelft. Lateraal daarvan vindt men een langgerekte kern, die waarschijnlijk een ventrale motorische trigemimuskern is ¹⁾.

Fig. 11 geeft een coupe weer door den intredenden V wortel. De groote reticulaire cellen hebben deels hun ligging meer in het midden van de formatio reticularis behouden; deels liggen zij echter ventrolateraler, zich uitstrekkende tot den bovenkant van de olijffrest, die zich op dit niveau evenals op fig. 10 toont als een hoopje grijze stof (door mij in de figuur aangegeven door stippeling) waarin een enkele kleine cel. Mediaal van de olijffrest komt een groepje kleine polygonale cellen voor, waarvan ik niet durf beslissen of ze tot de reticulaire cellen te rekenen zijn dan wel tot het laterale-lintsysteem behooren (fig. 11, *x*).

In de raphe komt een kern voor van kleine cellen die geen samenhang toont met de overige cellen der formatio reticularis

¹⁾ Vooral vergelijking met *chelone midas* maakt dit waarschijnlijk; bij *chelone* komt daar ter plaatse een dergelijke kern voor, die frontaalwaarts samenhangt met de mot. V kern. Zie Verhandl. der Kon. Akad. v. Wetensch. 2de sectie, Deel XVI, No. 4, pag. 39 en 40 en Map. E.

(fig. 11, ne. parvoc. sup. raph.); ik zou die kern, nucleus parvo-cellularis superior raphes willen noemen, in tegenstelling met de ophooping van groote raphecellen, die deel uitmaken van de reticulaire

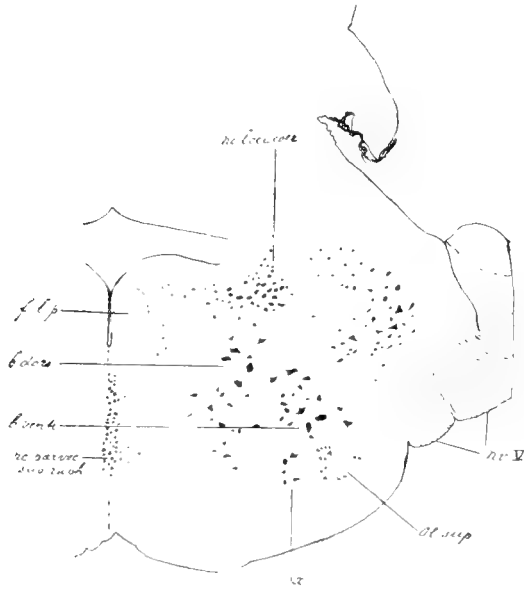


Fig. 11. Alligator sklerops.

kern van het vagus-gebied. In fig. 11 ziet men nog onder den hoek van den ventriculus quartus een groep cellen, die in ligging overeenkomt met de bij zoogdieren iets meer frontaal beginnende nucleus loci coerulei¹⁾.

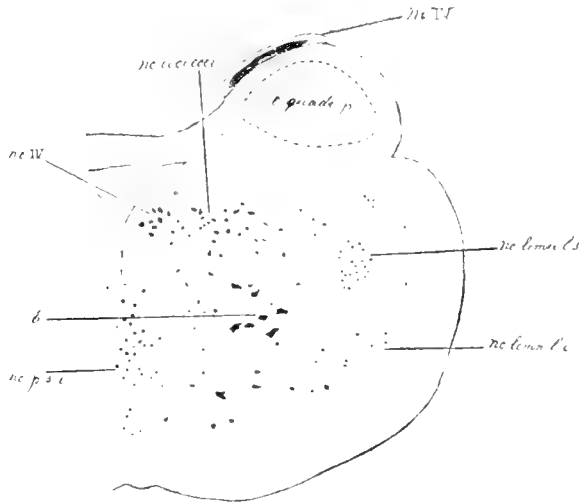


Fig. 12. Alligator sklerops.

¹⁾ Evenals bij de lagere zoogdieren is deze kern ook hier ongepigmenteerd.

Al naar mate men meer frontaal van Fig. 11 komt vindt men een weer minder laterale rangschikking der groote reticulaire cellen en wordt ook het aantal, dat men per coupe aantreft, geringer. Fig. 12 geeft een coupe weer door het praetrigeminale gebied der oblongata van Alligator. De weergegeven coupe gaat door den achterpool van het tuberculum quadrigeminum posticum en doorsnijdt ook de IV kern. De rangschikking der groote cellen, zooals die hier voorkomt, in het midden van de bulbus-helft, wordt frontaalwaarts behouden tot het einde der reticulaire celreeks, d.w.z. tot achter de III kern, waar de groote reticulaire cellen sporadisch zijn.

De kleincellige raphekern, die ook op Fig. 12 te zien is (nc. p. s. r.), houdt ongeveer op dezelfde hoogte op waar de groote reticulaire cellen sporadisch worden. Genoemde raphekern blijft overal ten opzichte van de overige reticulaire cellen een meer afzonderlijk karakter behouden.

Chelone Midas.

Chelone wijkt in menig opzicht af van Alligator. In het caudale deel der oblongata vertoont Chelone nog overeenkomst met Alligator, wat 't voorkomen van reticulaire cellen betreft. Ook wijkt het praetrigeminale gebied niet sterk af van dat van Alligator. Ter hoogte der intredende VIII- en V-wortels vindt men echter een geheel afwijkend beeld. In dezelfde volgorde onderzoekend als die welke bij de andere dieren gebruikt is, kan ik van de reticulaire elementen van Chelone het volgende zeggen: Ter hoogte der intredende X-wortels vindt men een reticulaire kern, die in zooverre overeenkomt met de kern bij Alligator in dat gebied, dat de groote reticulaire cellen op dezelfde wijze gelegen zijn in de raphe en langs den onder- en zijrand van den fasc. long. post. Er liggen echter bij Chelone geen reticulaire cellen zoo ver lateraal verspreid in de formatio reticulairis. Ook de groepen l_1 en l_2 van Alligator (Pl. 6, 7 en 8) mis ik bij Chelone. De reticulaire groep van het vagusgebied is bij Chelone oraalwaarts scherp afgegrensd, doordat ter hoogte van de VIII-intrede slechts sporadisch groote reticulaire cellen voorkomen en daar ook slechts weinig kleinere reticulaire cellen aanwezig zijn ¹⁾. Op de hoogte van de motorische trigeminuskern daarentegen vindt men weer een ophooping van groote reticulaire cellen, en dat niet alleen langs den onder- en buitenrand van den fasciculus longitudinalis posterior, doch ook in de raphe, wat ik bij andere dieren op dit niveau niet vond. (Zie Fig. 13).

¹⁾ De nc. Deiters is goed ontwikkeld. Een oliva superior heb ik niet gevonden.

Op de hoogte van de caudale helft van de motorische V kern vindt men de groote cellen zelfs voornamelijk in de raphe, ter hoogte



Fig. 13. *Chelone midas*.

van de frontale helft van die kern vindt men er evenveel lateraal in den bulbus als in de raphe. Frontaal van de motorische V-kern vindt men de groote reticulaire cellen ongeveer in het midden van de bulbushelft liggen; terwijl ook bij *Chelone* — evenals bij *Alligator* — in het frontale deel van de oblongata een kleincellige raphekern (nc. parvocell. sup. raphes) voorkomt, die nergens duidelijke samenhang vertoont met de overige reticulaire cellen.

Ciconia alba.

Van de vogels onderzocht ik er slechts één: *Ciconia alba*; een serie van frontaalcoupes, volgens VAN GIESSEN gekleurd, stond mij ten dienste.

Ik vond daar de reticulaire cellen in hoofdzaak overeenkomstig de beschrijvingen, die CAJAL geeft van die elementen bij vogels. Ik kan daarom voor de detailbeschrijving verwijzen naar zijn beschrijving. Slechts de volgende punten wil ik releveeren:

De groote reticulaire cellen strekken zich bij *Ciconia* niet zoover caudaal uit in de oblongata, als zij dat bij de door mij beschreven lagere dieren doen. Volgt men de coupes van caudale in frontale richting, dan ziet men eerst slechts kleinere reticulaire cellen langs den onderrand van den fasc. longit. post. en meer lateraal in de formatio reticularis. Weldra treden ook enkele zeer kleine cellen in de raphe

op. Al naar mate men meer frontaal komt, worden de reticulaire cellen talrijker en vindt men er grootere cellen bij. De cellen in de raphe blijven iets achter in grootte bij de meer lateraal in dezelfde coupe gelegen cellen; deze verhouding blijft zoo tot de hoogte der VIII-wortel intrede, waar ook in de raphe reuzencellen voorkomen. Aangezien de overgang echter een geleidelijke is, is de grens, waar die reuzencellen in de raphe beginnen, niet scherp aan te geven.

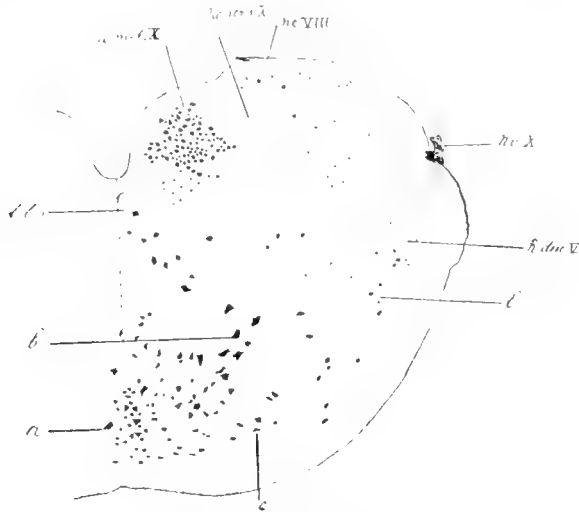


Fig. 14. *Ciconia alba*

Fig. 14 geeft een coupe weer, gaande door de oblongata van *Ciconia*, even frontaal van de XII-kern of door de frontale pool van die kern¹⁾. Men ziet in deze coupe den samenhang van de zijdelings gelegen reuzencellen met de raphecellen, die iets kleiner zijn.

CAJAL beschrijft op het niveau der vaguswortels slechts de reuzencellen meer zijwaarts in de formatio reticularis gelegen, van raphecellen op dit niveau zegt of teekent hij niets. De groote zijwaarts gelegen cellen van het vagus-gebied worden door hem in een afzonderlijke kern samengevat en gescheiden van de overige meer frontaal gelegen cellen op grond van een bijzonderheid in het verloop der ascynders²⁾.

1) Of de dorsale groep cellen in den rand van den fascic. longitud. posterior nog motorische XII wortelcellen zijn durf ik niet beslissen.

2) De cellen van zijt nucleo magnocellular inf., d.z. de op het vaguswortel-gebied gelegen reticulair cellen, zenden haar ascynders meerendeels naar de contralaterale bulbushelft, na kruising dorsaal in de raphe, terwijl alle overige meer frontaal gelegen reticulair cellen de ascynders meerendeels in de via homolateral (in of naast den fasciculus longitudinalis post.) caudaalwaarts zenden of onder bifurcatie caudaal en frontaalwaarts.

Met mijne methode van onderzoek kon ik een dergelijke of overeenkomstige scheiding niet vaststellen: volgens VAN GIESON praeparaten zet de reticulaire celophooping van het vagusgebied der oblongata zich ongemerkt voort in die van het octavusgebied.

In fig. 14 ziet men onder de Rad. spinalis nv. V een klein groepje kleine cellen (*l*) die de frontale pool vormen van een circumscripte groep kleine en middelgrootte cellen, waarvan ik de beteekenis niet gissen kan.

De celophooping in het caudale deel der oblongata van *Ciconia*, die in ligging overeenkomen met de olivae inferiores der zoogdieren en in welker lateraal gedeelte polygonale cellen gevonden worden, die samenhangen met de reticulaire elementen, zijn niet meer aanwezig in Fig. 14.

Voor de verdere beschrijving der vogels verwijs ik naar CAJALS werk. De basale ligging van een groot deel der reticulaire elementen op het VII- en V-niveau is in zijn teekeningen bijzonder opvallend. Ik vond het ook zoo bij *Ciconia* en wil nog slechts vermelden dat de ne. parvocellul. sup. raphes ook bij *Ciconia* voorkomt.

Zoogdieren.

Bij de door mij onderzochte zoogdieren vond ik de grootte reticulaire cellen in de oblongata gerangschikt op een wijze, die bij alle in principe dezelfde is. Slechts vond ik gradueele verschillen en verder verschillen in detailverhoudingen. De kleinere reticulaire cellen vormen allerlei groepen en groepjes, die meest niet scherp af te grenzen zijn, doch voor zoover mij dit wél mogelijk was kreeg ik den indruk, dat ook de groepen van kleinere reticulaire cellen bij die zoogdieren in principe met elkaar overeenkomen. In hoeverre de voorkomende verschillen verband houden met overige bouwverschillen der oblongata, heb ik niet kunnen nagaan; om al die bijzonderheden tot hun recht te doen komen zou ik daarom van elk dier een volledige serie teekeningen moeten geven, wat mij te ver zou voeren. Ik wil daarom volstaan met de beschrijving van twee dieren, bij welke ik de eigenaardigheden der grootte reticulaire cellen het duidelijkst gevonden heb: de reuzen-kangeroe (*Macropus robustus*), waarvan ik het caudale deel beschrijven zal, en het paard, waarvan ik, wegens de daar sterker uitgesproken eigenaardigheden in het frontale deel, dit laatste zal afbeelden.

De grootte reticulaire cellen vindt men bij *Macropus* en bij het paard op twee plaatsen bijzonder sterk opgehoopt: één ophooping ligt in het vagus- en octavusgebied en bereikt haar sterkste ontwik-

keling op de caudale grens van de VIII-wortelintrede; de andere ligt op de hoogte van de mot. V-kern.

Fig. 15 geeft een coupe weer gaande door een caudaal niveau der oblongata van *Macropus*; een der X-wortels is in de figuur zicht-

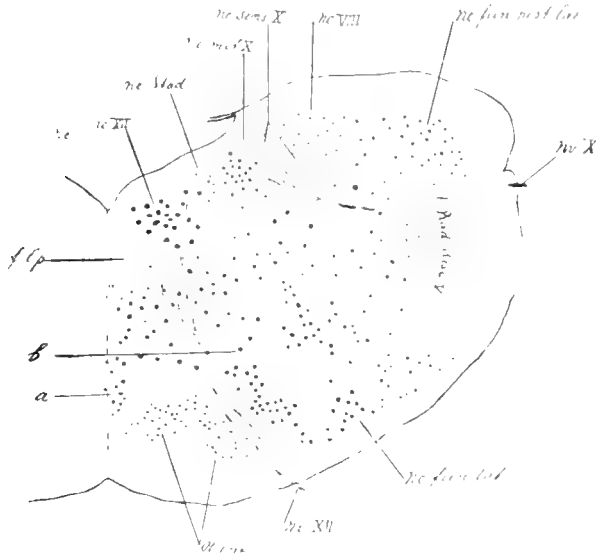


Fig. 15. *Macropus*.

baar. Fig. 16 geeft een coupe weer door de caudale grens der VIII-wortelintrede bij hetzelfde dier.



Fig. 16. *Macropus*.

Op het VIII-niveau vindt men bepaald reuzencellen, zoowel in de raphe als meer lateraal in de formatio reticularis. Al naar mate men echter caudaler komt, wordt het celtype kleiner, in de raphe iets eerder dan in de formatio reticularis.

Tot vrij ver caudaal blijft er duidelijke samenhang bestaan tusschen de raphecellen en de meer laeraal gelegen reticulaire elementen.

Op Fig. 15 blijkt die samenhang nog duidelijk. De grootste reticulaire cellen die hier voorkomen, zijn echter geen reuzencellen meer.

Op Fig. 15 ziet men nog een deel van de *nc. funiculi lateralis*, welke kern bij *Macropus* flink ontwikkeld is en haar grootsten omvang heeft op een niveau caudaal van Fig. 15. In hoeverre er verband bestaat tusschen de elementen van deze kern en de overige reticulaire cellen ¹⁾, kan ik niet uitmaken. Hetzelfde geldt van de reeks cellen, lateraal tegen de *oliva inferior* aanliggend; en evenzoo kan twijfel bestaan over het groepje cellen ventraal tegen den *radix descendens V* gelegen en over de smalle reeksen cellen medio-dorsaal daarvan eveneens in Fig. 15 zichtbaar; over deze laatste reeds daarom, omdat zij voor een deel ventrale motorische X-wortelcellen kunnen bevatten. Al naar gelang deze groepjes cellen (ook de *nc. funic. lat.*) met de overige reticulaire cellen samen gevat zullen kunnen worden, krijgt men natuurlijk een verschillend beeld van de uitbreiding en rangschikking van deze elementen.

Eigenaardig is in elk geval de wijze, waarop de reticulaire cellen, zich min of meer in rijen scharend, van de raphe uit in golvende lijnen lateraalwaarts en ventro-lateraalwaarts door de formatio reticularis verspreid liggen. Over de *oliva inf.* vormen ze een boog en waar de *nc. facialis* in de coupes verschijnt, (Fig. 16) reiken ze tot aan die kern: misschien liggen zelfs tusschen de mot. VII-wortelcellen ook enkele reticulaire cellen. Waar de VII-kern ophoudt ziet men een meer laterale uitbreiding.

Zoolang van den aard en de beteekenis der reticulaire cellen zoo weinig bekend is, is een rationeele indeeling in groepen onmogelijk. Dat verschillende schrijvers van elkaar afwijken in hun indeeling en nomenclatuur der reticulaire cellen lijkt mij zeer begrijpelijk ²⁾. Het komt mij wenschelijk voor om voorloopig geen indeelingen te maken in groepen, die niet scherp van elkaar te scheiden zijn.

¹⁾ MARBURG noemt in zijn atlas de *nc. funic. lat.* ook wel *nc. reticularis lateralis*. (Zie: *Microscopisch-topographischer Atlas des menschlichen Zentralnervensystems*).

²⁾ De om de XII wortels liggende reticulaire cellen werden door KÖLLIKER samengevat als *nc. reticularis diffusus*; lateraal laat hij ze „bis weit in die formatio reticularis” reiken, mediaal „bis gegen die Raphe hin”.

De mediaal van de XII-wortels liggende cellen worden samengevat als *nc.*

Zelfs de samenvatting van de reuzencellen van het octavus- en iets caudaler gebied in een afzonderlijke kern, ook al zijn deze cellen duidelijk grooter dan de grootste reticulaire cellen, die op het vagus-hypoglossusgebied voorkomen, komt mij voorloopig niet wenschelijk voor. De overgang in celgrootte toch is een geleidelijke, en of hier evenals bij de vogels op grond van een verschillend ascylinderverloop de cellen van het vagusgebied der oblongata met meer of minder recht kunnen onderscheiden worden van die van het octavusgebied, zou nog door nadere histologische onderzoekingen uitgemaakt moeten worden. Onderscheidingen der cellen, gebaseerd op celstructuurverschillen kon ik met mijne methode van onderzoek niet maken; van een oordeel daarover moet ik mij onthouden ¹⁾.

Wanneer wij alle reticulaire cellen van de caudale helft der oblongata — gerekend tot ongeveer de frontale grens der VIII-wortelintrede — in één kern samenvatten, zouden we die kunnen noemen: *nucleus reticularis inferior*, en om aan te geven dat de cellen zich tot de raphe uitstrekken en zich gedeeltelijk daarin ophoopen, zouden we kunnen onderscheiden een *pars raphe* en een *pars lateralis*; eventueel daar toe ook te rekenen de *nc. reticularis funiculi lateralis*.

Op een niveau een weinig frontaal van de VIII-wortelintrede neemt het aantal reticulaire cellen af om op de hoogte van de motorische V-kern weer toe te nemen. Op de hoogte van de mot. V-kern en in meer frontale deelen van de oblongata vond ik geen reuzencellen meer in de raphe, dan soms (*Macropus*) nog een heel enkele op de hoogte van het caudaalste deel van de mot. V-kern. Wel vindt men in de raphe cellen, die met de *nc. pontis* samenhangen, en nog meer frontaal, vlak achter de *corpora quadrigemina*, een kleine cellige raphekern. Over al deze cellen, die waarschijnlijk een anderen oorsprong en beteekenis hebben, later meer.

funiculi anterioris door OBERSTEINER, als *nc. respiratorius* door MISSLAWSKI en v. BECHTEREW.

De groote cellen ter hoogte van de VIII intrede en caudaal daarvan voorkomende werden door ROLLER beschreven en door de meeste auteurs genoemd *nc. centralis inferior* ROLLER.

¹⁾ De groote reticulaire cellen die op het caudale deel van de VIII-wortelintrede bij den mensch voorkomen, worden door JACOBSON gerekend tot twee reticulaire kernen te behooren, die grootendeels door elkaar heen liggen; zijn *nc. gigantocellularis formationis reticularis* en zijn *nc. motorius dissipatus formationis reticularis*. De onderscheiding maakt hij enkel op grond van celstructuurverschillen, terwijl hij aangeeft dat de cellen van de *nc. mot. dissip. f. r.* over het algemeen kleiner zijn dan die van de *nc. gig. f. r.*, doch dat ze soms ook de grootte van de laatste bereiken.

De groote reticulaire cellen in het trigeminale en praetrigeminale gebied der oblongata van de door mij onderzochte zoogdieren — uitgezonderd phocaena — vertoonen een eigenaardigheid in hare rangschikking, die niet bij alle even sterk voor den dag komt. De cellen scheiden zich n.l. min of meer duidelijk in twee groepen, waarvan de eene meer dorsaal in den bulbos blijft liggen, terwijl de andere in ventro-laterale richting verschuivend, zich tegen het laterale lint legt. Bij het paard vond ik deze verschuiving het duidelijkst; daar komen de reticulaire cellen zelfs gedeeltelijk tusschen de vezels van het laterale lint te liggen.

Bij *Macropus* hangen de twee groepen nog duidelijk samen; bij andere dieren, o.a. het konijn, vond ik een verhouding die het gemiddelde houdt tusschen paard en *Macropus*.

Fig. 17. 18 en 19 geven coupes weer door de oblongata van het paard. Het niveau der coupes blijkt uit de teekening voldoende. — Men ziet er de groote reticulaire cellen in twee groepen gesplitst. De ventro-laterale groep behoudt haar ligging tegen en in den medialen



Fig. 17. Equus

rand van het laterale lint; waar op meer frontaal niveau de doorsnede van het laterale lint iets dorsaler in de coupe voorkomt, liggen de reticulaire cellen eveneens dorsaler in de coupe; vergelijk Fig. 18 en 19.

Ik heb in Fig. 18 en 19 de uitbreidingsgrens van de nucleï pontis door een stippellijn aangegeven. In de nabijheid van de raphe ziet

men op Fig. 18 een uitstulping der nucleï pontis door de stippellijn aangegeven. Bij het paard zijn de cellen van deze groep niet scherp

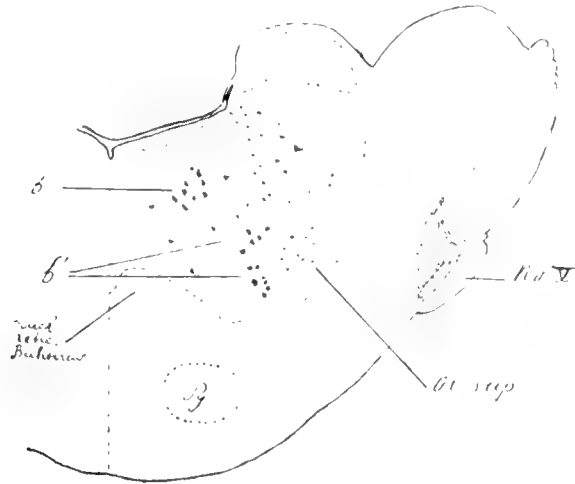


Fig. 18. Equus.

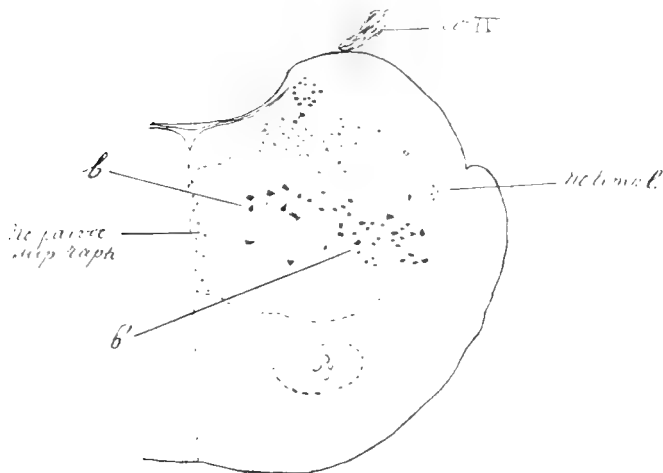


Fig. 19. Equus.

te scheiden van de overige cellen der *nc. pontis*. Bij sommige dieren echter, b.v. konijn, en vooral *Phocaena*, zijn de cellen van deze dorsale groep zoo duidelijk verschillend van de overige *nc. pontis*, en gaan daarvan zulke eigenaardige uitloopers uit in laterale en dorso-laterale richting, dat die celgroep waarschijnlijk een bijzondere beteekenis heeft en een afzonderlijken naam verdient. De naam: *nc. reticularis tegmenti* door v. BECHTEREW gegeven lijkt mij niet gelukkig wegens mogelijke verwarring met de overige reticulaire cellen in het tegmentum op hetzelfde niveau. Ik zou willen voorstellen

deze groep eenvoudig te noemen naar dengeen, die deze cellen 't eerst beschreef: *nc. reticularis Bechterew* om daarmee een regionale indeeling voorloopig te ontgaan. Of het groepje cellen in de raphe op Fig. 17 tot den *nc. retic. BECHTEREW* te rekenen is, durf ik niet met zekerheid te zeggen. Zij zijn caudaalwaarts gescheiden van de *pars raphes nuclei reticularis inferioris*, doch hangen frontaalwaarts samen met de *nc. pontis* en de *nc. retic. BECHTEREW*. Haar dorsale ligging in de raphe maakt een verband met de *nc. BECHTEREW* aannemelijker, terwijl de uitbreiding caudaal van de pons het niet waarschijnlijk maakt, dat ze tot de *nuclei pontis* behooren.

Frontaalwaarts van de *nc. retic. BECHTEREW* vindt men in de raphe een kleincellige kern, (Fig. 19) die vermoedelijk van de overige reticulaire cellen gescheiden moet worden en waarschijnlijk homolog is aan de *nc. parvoc. sup. raphes* der reptilien, althans aan het frontale deel van die kern. v. *BECHTEREW* beschreef ook deze het eerst bij den mensch als *nc. centralis superior* later door hem herdoopt in *nc. centralis superior medialis s. internus* of eenvoudig *nc. medialis* ter onderscheiding van de groote cellen zijwaarts in de *formatio reticularis* voorkomende, door hem *nc. centralis superior lateralis* genoemd.

Keeren wij terug tot de groote reticulaire cellen. Frontaalwaarts van Fig. 19 zien wij al spoedig de groote reticulaire elementen een meer circumscrippte ligging innemen ongeveer in het midden van de bulbus-helft, doordat de ventro-laterale cellen uit de coupes verdwijnen. Nog iets verder frontaalwaarts zien we ook de dorsalere groote reticulaire cellen zeldzamer worden.

De geheele reeks dezer groote elementen van het trigeminale en praetrigeminale gebied der oblongata zou ik willen samenvatten onder één naam: *nucleus reticularis superior*, welke dan verder bestaan kan uit een *nc. superior centralis s. dorsalis (b)* en een *nc. superior ventro-lateralis. (b¹)*

Deze *nc. sup. dorsalis s. centralis* komt dus overeen met de *nc. centralis sup. lat.* (*BECHTEREW*) terwijl met mijn *nc. sup. ventro-lateralis* overeen zou kunnen komen de *nc. tegmenti lat.* door *KÖLLIKER* bij den mensch beschreven als voorkomende tusschen de *Lemniscus lat.* en de *Brachia anteriora.*¹⁾

Hiermede heb ik de beschrijving van de voor de zoogdieren in 't algemeen eigenaardige rangschikking geëindigd. Ik vond toch bij *cavia*, konijn, kat en mensch een verhouding die principieel hiervan niet zeer afwijkend is.

¹⁾ Ik vermoed, dat de door *KÖHNSTAMM* bij het konijn beschreven *nucl. paramiscalis inferior* (mediaal tegen de *Lemb. lat.* gelegen cellen), gedeeltelijk met mijn *nc. sup. ventro-lateralis* overeenkomt (*Journal f. Psychologie u. Neurologie*, 1910).

Slechts bij *Phocaena* vond ik een meer primitief beeld, daar ik hier een splitsing van den *nucleus reticularis superior* in een dorsale- en ventro-laterale groep (resp. *b* en *b*¹) niet heb gevonden. De cellen liggen hier meer gelijkmatig verspreid door de *formatio reticularis*, in hoofdzaak meer dorsaal in den *bulbus*. Of er van de tussehen de bundels van het laterale lint liggende eellen ook sommige opgevat moeten worden als zeer ventraal liggende reticulaire cellen, die bij de genoemde *nc. reticularis sup.* behooren, durf ik niet beslissen; ik houd dit echter niet voor waarschijnlijk.

Bij de groote difuusheid in de rangschikking der reticulaire elementen der verschillende vertebraten en de niet zelden groote moeilijkheden om deze af te grenzen van niet reticulaire celgroepen is het lastig het resultaat van mijn arbeid in korte trekken samen te vatten. Toch meen ik de volgende punten als sterk sprekende feiten daaruit op den voorgrond te mogen stellen.

1. In het laterale veld der *oblongata* komen, voor zoover mij bekend, bij alle vertebraten, uitgezonderd bij *cyclostomen* en *amphiëën*, meer of minder sterke ophooping van groote reticulaire cellen voor.

2. Bij alle dieren komen in het *caudale deel* der *oblongata* bovendien groote cellen in de *raphe* voor; in het frontale deel der *oblongata* ontbreken in de *raphe* groote cellen, met uitzondering van *chelone*, waar ze ook op de hoogte van de *trigeminus kern*-voorkomen, als aparte groep, gescheiden van de *vagusgroep*.

3. Bij de reptilien, vogels en zoogdieren vindt men een klein-cellige *raphekern* in het voorste gedeelte der *oblongata* ongeveer op de achtergrens van de *corpora quadrigemina posteriora*.

4. De frontale groep der laterale reticulaire cellen ondergaat in de *phylogenese* een sterke vermeerdering en een splitsing in dien zin, dat een gedeelte dezer cellen de dorsale plaats blijft behouden, terwijl een ander bijna evengroot gedeelte (het aantal verschilt bij verschillende dieren) een meer ventro-laterale ligging inneemt op een mediaal van den lateralen *lemniscus*.

5. *Phocaena* toont een afwijking van het algemeene zoogdiertype door een geringere differentiatie van de groote reticulaire elementen, in het voorste gedeelte der *oblongata*.

Natuurkunde. — De Heer W. H. JULIUS biedt eene mededeeling aan: „*Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmassa's*”.

§ 1. *Resonantie en demping.* — Men verklaart de dispersie van het licht door aan te nemen dat in de moleculen van de middenstof electronen aanwezig zijn, door quasi-elastische krachten aan evenwichtsstanden gebonden. Zulke electronen bezitten een eigen trillingsperiode T ; hun beweging zal door resonantie voortdurend versterkt worden als in den doorvallenden lichtbundel golven van dezelfde periode aanwezig zijn. Daar licht uit het zichtbare spectrum aan een resoneerend electron 500 biljoen impulsen per secunde geeft, is het begrijpelijk dat in uiterst korten tijd het electron reeds een groote amplitude krijgen kan, zelfs al zijn de impulsen ^vzwak.

Golven van een eenigszins afwijkende periode T' brengen de bedoelde electronen óók in beweging; zij dringen hun de periode T' op, doch de amplitude der opgedrongen trilling is des te kleiner naarmate $\pm (T - T')$ grooter is. Bij de verklaring van verschijnselen die de spectra van gassen betreffen, schijnt het alsof wij daarmee intuschen nauwelijks rekening behoeven te houden. HELMHOLTZ heeft namelijk onderzocht, hoe in het algemeen de intensiteit van opgedrongen trillingen afhangt van het periodeverschil $T - T'$ en van de demping die de eigentrillingen ondergaan¹⁾. Is de demping gering, dan heeft merkbaar meetrillen slechts plaats indien T' zeer weinig van T verschilt. Passen wij zijne formule toe op trillende electronen, wier beweging blijkens interferentie-verschijnselen bij groote gangverschillen zóó weinig aan demping onderhevig is, dat na 300.000 trillingen de amplitude zeker niet beneden $\frac{1}{10}$ is gedaald, dan vinden wij dat de energie der opgedrongen trillingen van periode T' reeds kleiner is dan $\frac{1}{10}$ van de energie der resoneerende trillingen van periode T , indien tusschen de golflengten welke met die beide perioden corresponderen een verschil van slechts 0.01 Å bestaat. Breeder dan een paar honderste deelen van een Å is dus het gebied van duidelijk merkbaar meetrillen niet.

Van een resoneerend electron kan natuurlijk de amplitude niet onbepaald toenemen, en ongetwijfeld zal de quasi-elastische kracht ophouden evenredig aan de uitwijking te zijn, wanneer deze laatste zeer groot wordt. Overschrijdt de amplitude een zekere grenswaarde, dan is het electron uit het moleculaire verband losgerukt en gaat zich zelfstandig voortbewegen: de bestraling heeft tot ionisatie geleid.

¹⁾ HELMHOLTZ. Die Lehre von den Töempfindungen (1877), S. 233 und 642.

Licht-absorptie gaat intusschen niet *steeds* met ionisatie gepaard; de bovengenoemde grens wordt blijkbaar in de meeste gevallen *niet* overschreden, d. w. z. er moet een oorzaak bestaan waardoor de amplitude-vermeerdering beperkt wordt. Formeel brengt men zulk een oorzaak in rekening door een „weerstand” in te voeren die zich verzet tegen de beweging van het electron en evenredig gesteld wordt aan zijn snelheid. De bewegingsvergelijkingen van een electron onder den invloed van een (periodieke) elektrische veldsterkte (X / Z) hebben dus de gedaante:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = eX, \text{ enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin m de massa, e de lading van het electron voorstelt, terwijl k de grootte van de quasi-elastische kracht, h die van den weerstand bepaalt.

Wij stellen ons voor, den aard van den dempingsparameter h nader te bestudeeren, en te onderzoeken welken invloed de dempings-oorzaken hebben op de intensiteit van licht dat zich voortplant door gasvormige middenstoffen van groote uitgestrektheid, zooals de atmosfeeren van zon en sterren.

§ 2. *Herinnering aan enkele uitkomsten der dispersietheorie.* — Men weet dat de dispersietheorie de vraag beantwoordt, hoe een gegeven periodieke elektrische kracht wordt voortgeplant door een middenstof, waarin zich een groot aantal electronen bevinden, wier beweging wordt voorgesteld door een stel vergelijkingen van den boven aangeduiden vorm¹⁾.

Bevat de middenstof per cm^3 \mathfrak{N} gelijksoortige moleculen, ieder voorzien van eenige verschillend gebonden electronen, zoodat een beperkt aantal eigen-perioden wordt aangetroffen, dan heeft men slechts de algemeene vergelijkingen van het electromagnetische veld op dat stelsel toe te passen en vindt als oplossing, in de voor ons doel geschikte notatie van W. VOIGT²⁾,

$$n^2 = n^2(1 - iz)^2 = 1 + \sum_k \frac{4\pi\mathfrak{N} \frac{e^2}{m}}{k^2 - \frac{h}{m}k - \nu^2} = 1 + \sum \frac{q}{r_0^2 + i r' r - r^2} \quad . \quad (2)$$

1) De bewegingsvergelijkingen van het electron die LORENTZ als uitgangspunt neemt (The Theory of Electrons, p. 139) bevatten twee termen meer en zijn daardoor algemeener dan het stel (1). In het vraagstuk dat ons zal bezighouden mogen wij die termen weglaten omdat wij 1o geen uitwendig magnetisch veld behoeven in aanmerking te nemen, en 2o de uitkomsten slechts op middenstoffen van geringe dichtheid wenschen toe te passen.

2) W. VOIGT, Magneto- und Electro-optik., (1908) S. 107.

Hierin beteekent n den complexen brekingsindex, n den reëlen brekingsindex, z den verzwakkingsindex, terwijl r voorstelt het aantal trillingen van de beschouwde lichtsoort in den tijd 2π . De beteekenis van q , r_0 en r' ziet men uit de formule. Dat $\sqrt{\frac{k}{m}} = r_0$ de frequentie is van de eigen-trilling van een electron bij afwezigheid van damping en van wisselende veldsterkte blijkt, als men in vergelijking (1) $h = 0$ en $X = 0$ stelt. Iedere electronensoort levert een term in de som.

Scheiding van de reëele en imaginaire termen in (2) voert tot de betrekkingen

$$\left. \begin{aligned} n^2 (1 - z) &= 1 + \sum \frac{q(r_0^2 - r^2)}{(r_0^2 - r^2)^2 + r'^2 r^2} \\ 2n^2 z &= \sum \frac{qr'r}{(r_0^2 - r^2)^2 + r'^2 r^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

waaruit n en z moeten worden opgelost. Dit vraagstuk wordt veel eenvoudiger en toch weinig minder algemeen, als wij de aandacht beperken tot de omgeving van één der eigen-frequenties r_0 . Wij plaatsen dan in (2) den term die op de gekozen r_0 betrekking heeft afzonderlijk en duiden de overige termen van de som door een wisselenden index h aan :

$$n^2 = 1 + \sum \frac{q_h}{r_h^2 + ir'_h r - r^2} + \frac{q}{r_0^2 - ir' r - r^2} \dots \dots (4)$$

Omdat wij slechts waarden van r beschouwen die dicht bij r_0 gelegen zijn, mag onder het \sum -teeken r_0 voor r geschreven worden, terwijl de termen $ir'_h r_0$ tegenover $r_h^2 - r_0^2$ kunnen worden verwaarloosd. Schrijven wij nog $r - r_0 = u$, dus $r^2 - r_0^2 = 2r_0 u$, dan gaat (4) over in

$$n^2 = 1 + \sum \frac{q_h}{r_h^2 - r_0^2} - \frac{q}{r_0(2u - ir')}$$

of

$$n^2 = n_0^2 - \frac{q}{r_0(2u - ir')} \dots \dots (5)$$

waarbij n_0 den brekingsindex voorstelt die in het door ons beschouwde kleine spektraalgebied heerschen zou, indien daar geen eigen-frequentie r_0 gelegen was.

Wanneer men in deze vereenvoudigde vergelijking het reëele van het imaginaire deel scheidt en daarna n en z oplost, is de loop der functies nog niet zeer overzichtelijk. Wij willen dus eerst nog het speciale geval beschouwen dat de modulus van den complexentwee-

den term voor alle waarden van μ binnen het beschouwde gebied klein is vergeleken met n_0^2 . Dan kan $n^2 - n_0^2$ door $2n_0(n - n_0)$ worden vervangen, en men vindt door scheiding van het reële en het imaginaire deel

$$n = n_0 - \frac{Q\mu}{n_0 r_0 (4\mu^2 + r^2)} \dots \dots \dots (6)$$

$$nz = \frac{Qr'}{2n_0 r_0 (4\mu^2 + r^2)} \dots \dots \dots (6a)$$

waaruit de symmetrische loop van n en nz als functies van μ gemakkelijk is af te leiden.

Men ziet namelijk dat $n = n_0$ is voor $\mu = 0$; dat voor een willekeurige positieve waarde van μ (dus aan den violetten kant t.o.v. r_0) n een zeker bedrag kleiner is dan n_0 , terwijl voor een evengroote negatieve waarde van μ (aan den rooden kant) n evenveel grooter is dan n_0 . Bij $\mu = -\frac{1}{2} r'$ bereikt n een maximum:

$$n = n_0 - \frac{Q}{4 n_0 r_0 r'}$$

bij $\mu = +\frac{1}{2} r'$ een minimum:

$$n = n_0 + \frac{Q}{4 n_0 r_0 r'}$$

De verzwakkingcoëfficiënt nz heeft bij $\mu = 0$ een maximum, ten bedrage van $\frac{Q}{2 n_0 r_0 r'}$, passeert de half-zoo-groote waarde $\frac{Q}{4 n_0 r_0 r'}$ bij $\mu = \pm \frac{1}{2} r'$, d.w.z. juist daar waar het maximum en het minimum

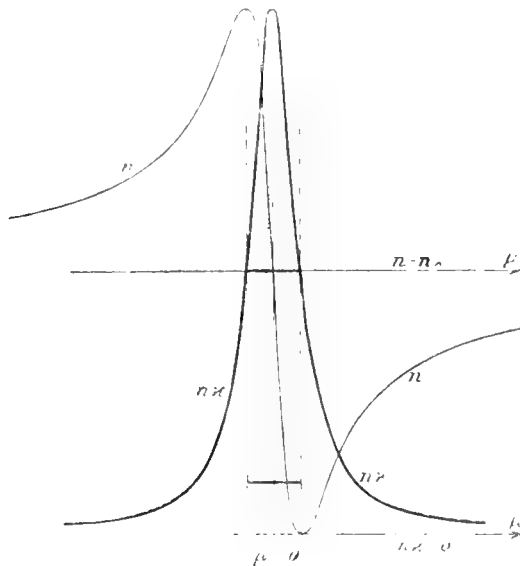


Fig. 1.

van n worden gevonden, en nadert bij verder aangroeiende μ aan beide kanten tot nul. Fig. 1 (ontleend aan VOIGT l.c. S. 115) toont van de twee functies den loop. Men kan r' beschouwen als een maat voor de breedte van de donkere lijn die in het spectrum ontstaat. De duisterheid neemt namelijk veel steiler af dan de waarde van nz , omdat de sterkte van het doorgelaten licht (mits de laag niet te dik is, zie

§ 5) bedraagt: $I = I_0 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} nz}$, als z den in het gas afgelegden weg beduidt. De gestippelde kromme lijn stelt den loop voor dien de reciproke waarde van de intensiteit neemt, wanneer men onderstelt dat in 't midden $I = \frac{1}{100} I_0$ is, zoodat bij $\mu = \pm \frac{1}{2} r'$, waar nz half zoo groot is als in 't midden, $I = \frac{1}{10} I_0$ wordt. Bijna de geheele donkere lijn valt dus tusschen $\mu = -\frac{1}{2} r'$ en $\mu = +\frac{1}{2} r'$.

§ 3. *Gevalen van sterkere anomalie der dispersiekromme.* — Waar het ons doel is, de uitkomsten der theorie op de verklaring van het zonnenspectrum toe te passen, en daarbij misschien niet in alle gevallen mag worden aangenomen dat de modulus van $r_0(2\mu - i r')$

klein is vergeleken met n_0^2 (bijv. waar het zeer sterke lijnen geldt, als de calciumlijnen H en K), keeren wij terug tot de vergelijking (5). Het reële van het imaginaire deel scheidende verkrijgen wij

$$n^2 - n^2 z^2 - n_0^2 = \frac{-2qu}{r_0(4u^2 + r'^2)} \quad \text{en} \quad n^2 z = \frac{\frac{1}{2} r' z}{r_0(4u^2 + r'^2)}$$

Substitutie van de tweede vergelijking in de eerste geeft

$$n^2 - n_0^2 = \frac{-2qu - \frac{1}{2} q r' z}{r_0(4u^2 + r'^2)} \quad \text{of} \quad n - n_0 = \frac{-qu + \frac{1}{4} q r' z}{\frac{1}{2}(n + n_0) r_0(4u^2 + r'^2)} \quad (7)$$

waaruit

$$n = n_0 + \frac{\frac{1}{4} q r' z}{\frac{1}{2}(n + n_0) r_0(4u^2 + r'^2)} - \frac{qu}{\frac{1}{2}(n + n_0) r_0(4u^2 + r'^2)} \quad (8)$$

Een dergelijken loop als volgens (6) n heeft ten opzichte van n_0 , vertoont volgens (8) n ten opzichte van $n_0 + \delta$, waarin δ den tweeden term voorstelt en dus veranderlijk is met n en z . Door dien term δ wordt echter het karakter van de kromme lijn nauwelijks merkbaar veranderd, omdat $\frac{1}{4} r' z$ klein is vergeleken met u . Zelfs binnen het verzwakkingsgebied is de invloed van δ gering. Vestigen wij bijvoorbeeld de aandacht op de plaats van het spectrum waar

1) Wij zullen later zien dat in het licht, dat de *zonneatmosfeer* doorloopen heeft de schijnbare breedte der ware absorptielijnen nog geringer zijn moet, omdat een deel van de verzwakking van het licht op verstrooiing berust, en dit deel een andere dan de exponentiële wet volgt.

$\mu = \frac{1}{2} r'$ is. Daar wordt de verhouding van den tweeden tot den derden term

$$\frac{1}{2} r'z : \mu = \frac{1}{2} r'z : \frac{1}{2} r' = \frac{1}{2} z.$$

Experimenteële gegevens waaruit men voor calcium de waarde van z zou kunnen berekenen, zijn mij niet bekend; maar bij natriumdamp heeft men voor de maximale waarde van nz gevonden 10^{-3} 1), zoodat op de beschouwde plaats $nz = 5 \times 10^{-4}$, dus $\frac{1}{2} z = \frac{1}{n} \times 2,5 \times 10^{-4}$ is. Voor grootere waarden van $\pm \mu$ neemt de bedoelde verhouding snel af. Men mag dus den tweeden term in het tweede lid van (8) verwaarloozen.

Maar in den noemer van den derden term komt de veranderlijke factor $\frac{1}{2}(n + n_0)$ voor, waar in (6) de constante factor n_0 staat. Daaruit volgt dat de dispersiekromme de volmaakte symmetrie van die welke door (6) wordt voorgesteld mist. Het karakter van de afwijking blijkt als wij vergelijking (7), met weglating van den term $\frac{1}{2} r'z$, aldus schrijven:

$$n^2 = n_0^2 \frac{2\mu a}{r_0(4\mu^2 + r'^2)}.$$

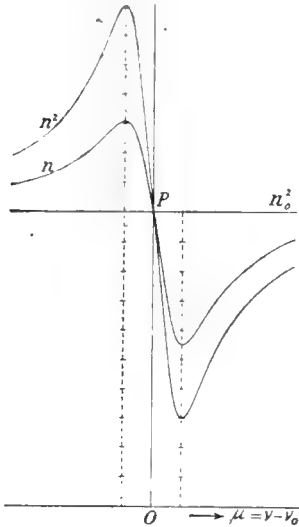


Fig. 2.

Ten opzichte van het snijpunt P der horizontale lijn n_0^2 (fig. 2) met de vertikale lijn $\mu = 0$ is de kromme die n^2 voorstelt symmetrisch. Onderstellen wij nu dat $n_0 = 1$ is, dan valt de lijn n_0 met de lijn n_0^2 samen. Teekenen wij in dezelfde figuur de kromme wier ordinaten de wortels van die der eerste kromme zijn, dan zien wij dat de „anomalie” van den brekingsindex n grooter is aan den violetten dan aan den rooden kant. Het is de vraag of zich bij gassen gevallen voordoen, waarin dit verschil groot genoeg is om uit de waarnemingen te blijken.

§ 4. *Over de beteekenis van den dempingsparameter.* — Een steeds aanwezige oorzaak voor demping is gelegen in het feit dat een trillend electron een deel van zijn arbeidsvermogen van beweging uitstraalt naar alle kanten en dus verliest door „verstrooiing”. Heeft het een veranderlijke snelheid v , dan ondervindt het van zijn eigen veld een kracht die bij eerste benadering evenredig is aan zijn versnelling $\frac{dr}{dt}$ en zich dus als inertie openbaart, doch waarin ook

1) W. Voigt, l. c. S. 142.

een term voorkomt, evenredig aan $\frac{d^2 r}{dt^2}$, namelijk ¹⁾:

$$r = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Is nu de beweging periodiek, $r = b \cos \nu t$, dan heeft men $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\nu^2 r$, derhalve

$$r = \frac{2}{3} \frac{r^2 \nu^2}{c^3} \cdot \frac{dr}{dt}$$

als x de uitwijking is op het tijdstip t .

Deze term van de kracht kan dus beschouwd worden als de uitdrukking van een „weerstand”, evenredig aan de snelheid en tegengesteld van richting. De getalwaarde van den coëfficiënt is klein; en dat de daaruit voortvloeiende demping inderdaad zeer gering is, blijkt ook wel uit de bekende interferentieverschijnselen bij groote gangverschillen die ons toonen dat na een 100.000 tal trillingen de amplitude van een electron maar weinig is afgenomen. De *absorptie* van het invallende licht, die o.a. blijkt uit temperatuursverhooving van het bestraalde gas, kan uit de genoemde dempingsoorzaak niet worden verklaard. De verstrooide energie blijft stralingsenergie van de perioden, voorkomende in den oorspronkelijken lichtbundel.

Ter verklaring van de eigenlijke absorptie neemt LORENTZ aan, dat de trillingen van een electron slechts gedurende een beperkten tijd τ ongestoord voortduren, en dat dan, bijv. bij botsingen, hun energie aan andere stelsels wordt overgedragen ²⁾. Dit denkbeeld brengt hij in de formules door voor den dempingsparameter h te schrijven: $\frac{2m}{\tau}$. Het is intusschen niet noodig, onder τ te verstaan den tijd die gemiddeld tusschen twee botsingen verloopt; reeds na een veel korter tijdsverloop τ zou de amplitude van een resoneerend (of nagenoeg resoneerend) electron zoo groot geworden kunnen zijn, dat ook de overige bestanddeelen van het molecuul waartoe het behoort hun bewegingstoestand zeer merkbaar hebben veranderd en een deel van zijn energie hebben overgenomen. In dat geval kan men reeds van „absorptie” spreken: bij de botsingen komt dan ver-

¹⁾ LORENTZ, The theory of electrons, p. 49; Encyklopädie der math. Wiss. V. 2, 188; ABRAHAM, Theorie der Electricität II, S. 72, 123. In de bovenstaande formule is e uitgedrukt in de eenheid van het C. G. S.-stelsel die op de wet van COULOMB berust.

²⁾ LORENTZ, The theory of electrons, p. 141.

der een uitwisseling tot stand die zich o.a. als temperatuursverhoging openbaart.

Volgens deze voorstelling vindt dus *absorptie* van stralings-energie slechts dan plaats, wanneer door resonantie zekere electronen zóó sterk in beweging worden gebracht dat zij op onomkeerbare wijze arbeidsvermogen overdragen aan andere deelen van de stelsels waartoe zij behooren. Omtrent de nadere voorwaarden van dit proces kan men slechts gissingen doen. LORENTZ heeft aangetoond ¹⁾ dat de dempende invloed van *botsingen* bij benadering kan worden uitgedrukt door een term in de bewegings-vergelijking te brengen die evenredig is aan de snelheid van het electron. Maar indien het absorptieproces reeds begint binnen de moleculen, vóór zij opnieuw hebben gebotst (hetgeen LORENTZ waarschijnlijk acht, l.c. p. 142), dan is het ook zeer wel denkbaar dat een zekere grenswaarde van de snelheid, dus een zekere grenswaarde van de amplitude, door den resonator overschreden moet zijn, alvorens een blijvende energie-overdracht op andere deelen van het stelsel waartoe het behoort plaats vindt. Is de samenhang werkelijk van dien aard, dan zullen golven die aan het electron wegens gebrekkige resonantie slechts *kleine* gemiddelde snelheden geven, *in het geheel niet* worden geabsorbeerd: het aan absorptie toe te schrijven deel van den dempingsparameter zou op zekeren afstand ter weerszijden van het midden der absorptielijn absoluut nul worden. Dit is natuurlijk een hypothese, waaraan wij zonder diepere kennis van den bouw der moleculen geen vasten grondslag kunnen geven, maar die aan de bruikbaarheid der gevolgtrekkingen kan worden getoetst.

Straalt wit licht door een ijl gas welks eigen-perioden vrij scherp afgebakend zijn ²⁾, dan is volgens § 1 het spectraalgebied waarin krachtig meetrillen plaats vindt voor elke electronensoort slechts weinig breder dan het gebied der eigen-trillingen, maar streng genomen strekt het meetrillen zich, met afnemende intensiteit, onbepaald ver naar beide kanten van de lijn uit. Volgens de onderstelling geldt dit laatste nu niet voor de absorptie; die is beperkt tot een deel van het resonantiegebied.

Anders is het met het aandeel dat de *verstrooïing* aan de demping heeft. Binnen het gebied van sterkste absorptie treedt het op den achtergrond, want de factor $\frac{2r^2v^2}{3c^3}$ bedraagt bijv. voor natriumlicht

1) LORENTZ, The theory of electrons, Note 57.

2) Volkomen scherp is die afbakening nooit, wegens storing bij botsingen en wegens DOPPLER-effect.

ongeveer 2×10^{-20} , terwijl voor de waarde van den geheelen dempingsparameter in natriumdamp gevonden wordt: $h = m\nu' = = 7 \times 10^{-28} \times 11.2 \times 10^{10} = 7.8 \times 10^{-17}$ ³⁾). Daartegenover staat dat er niet, zooals in het geval van absorptie, aanleiding is om te twijfelen aan de evenredigheid van dit dempingseffect met de snelheid, ook wanneer deze klein wordt. De verstrooiing strekt zich uit over het geheele spectrum, welke ook de eigen-perioden zijn van de electronen.

Onafhankelijk van de theorie der absorptie en dispersie heeft dan ook RAYLEIGH bewezen dat een lichtbundel van de intensiteit J_0 en met de golflengte λ , na een weg x te hebben afgelegd door een gasmassa, wier brekingsindex n bedraagt en waarin per cm^3 N verstrooiende moleculen aanwezig zijn, gedaald is op de intensiteit

$$J = J_0 e^{-\frac{32 \pi^3 (n-1)^2}{3 \lambda^4 N} x} \dots \dots \dots (9)$$

De grootheid $s = \frac{32 \pi^3 (n-1)^2}{3 \lambda^4 N}$ is de *verstrooiingscoëfficiënt*. Zij Δ de dichtheid van het gas, dan mag men $\frac{n-1}{\Delta} = R$ wel constant rekenen voor een gegeven stralensoort. Daar Δ evenredig aan N gesteld kan worden, bijv. $\Delta = f \cdot N$, is ook $\frac{n-1}{N} = f \cdot R$ een constante voor elke bepaalde lichtsoort. Deze invoerende, wordt

$$s = \frac{32 \pi^3 N f^2 R^2}{3 \lambda^4} = \frac{32 \pi^3 \Delta \cdot f \cdot R^2}{3 \lambda^4} \dots \dots \dots (10)$$

waarin R de *refractieconstante* van de middenstof voorstelt.

De verstrooiingscoëfficiënt is dus omgekeerd evenredig met de vierde macht van de golflengte, evenredig met de dichtheid, met de frage massa die gemiddeld per verstrooiend deeltje in het medium aanwezig is, en met de tweede macht van de refractieconstante. Daar deze laatste sterk varieert in de omgeving van een eigen-periode, ook wanneer de dempingsparameter zeer klein is of zelfs $= 0$ gesteld wordt (VOIGT, l.c. S. 118), heeft de verstrooiing in zulk een gebied van het spectrum zeer uiteenlopende en betrekkelijk groote waarden; zij verdwijnt slechts voor golven die zich in de middenstof met gelijke snelheid als in den vrijen ether voortplanten, d.w.z. als $R = 0$, $n = 1$ is.

De uitwerking van absorptie en verstrooiing kan uit twee oog-

³⁾ Uit waarnemingen van HALLO betreffende magnetische draaiing van het polarisatievlak in natriumdamp berekende VOIGT: $\nu' = 11,2 \times 10^{10}$. Zie VOIGT, l.c. S. 142.

punten worden beschouwd. Ten eerste kan men zich afvragen welken invloed die beide dempingsoorzaken op de beweging van de electronen en daardoor op de optische eigenschappen (gekenmerkt door n en κ) van de middenstof hebben. Het tweede gezichtspunt is dat waarbij men, als het invallende licht gegeven is, de sterkte en de samenstelling bestudeert van het licht dat de absorbeerende middenstof verlaat.

Tot hertoe hielden wij ons slechts met de eerste vraag bezig. Wij kwamen tot het besluit dat voor golven, behoorende tot de allernaaste omgeving der eigen-perioden van een gas, de dempingsparameter h kan worden opgevat als de som van twee termen :

$$h = \frac{2m}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{r^2 \nu^2}{c^3 m} ; \dots \dots \dots (11)$$

dat in het middelste deel van dat enge gebied de eerste term groot is vergeleken met den tweeden ; dat echter hoogstwaarschijnlijk de waarde van dien eersten term op korten afstand van elke der eigen-perioden snel daalt tot nul, zoodat in de overige deelen van het spectrum slechts de invloed van den tweeden term blijft bestaan.

De parameter h is dus niet constant, zelfs al bepalen wij onze aandacht tot een zoo klein deel van het spectrum dat de verandering van den factor r^2 buiten aanmerking kan blijven. Maar dat neemt niet weg dat fig. 1 (blz. 1010) toch den gang van den brekingsindex als functie van het trillingsgetal in hoofdzaak juist weergeeft, daar voor alle waarden van h die in aanmerking komen het karakter der dispersiekromme hetzelfde is.

§ 5. *Straling door een atmosfeer van groote uitgestrektheid.*

Gaan wij thans over tot de behandeling van de tweede vraag, namelijk hoe de samenstelling zijn zal van een lichtbundel die een zeer dikke gaslaag, de atmosfeer van een hemellichaam, verlaat, als aangenomen wordt dat de emissiekromme van de oorspronkelijke lichtbron een continu verloop heeft.

Blijkbaar kan het antwoord niet gevonden worden door eenvoudig voor elke stralensoort de waarde van nz , die uit de formules (3) of (6a) zou voortvloeien als daarin overeenkomstig (11)

$$r' = \frac{h}{m} = \frac{2}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{r^2 \nu^2}{c^3 m}$$

gesteld werd, over te brengen in een vergelijking van den vorm

$$l = I_0 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} nz} \dots \dots \dots (12)$$

(waarin z den geheelen in de gaslaag afgelegden weg voorstelt). Zelfs indien de gaslaag volmaakt homogeen was, zou deze handelwijze tot een geheel verkeerde uitkomst leiden. Immers terwijl het deel der lichtverzwakking dat door *absorptie* veroorzaakt wordt, voortschrijdt in een geometrische reeks wanneer de dikte der laag in arithmetische reeks toeneemt, geldt dit voor het deel dat van de *verstrooiing* afhangt niet. Als de gaslaag zeer uitgestrekt is, moet men in aanmerking nemen dat van elk electron een zekere hoeveelheid verstrooid licht van de beschouwde golflengte uitgaat, die het aan zijn geheele omgeving ontleent en die zich gedeeltelijk voegt bij den direct doorgelaten bundel. De verzwakking van den bundel moet dus langzamer gaan dan volgens de wet (12) die het intensiteitsverlies door absorptie beheerscht ¹⁾.

SCHUSTER ²⁾ was de eerste die den invloed der verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmassa's met dien der absorptie en emissie uitvoerig vergeleek. Op grond van de wet van KIRCHHOFF onderzocht hij voor verschillende verhoudingen tusschen den absorptie-coëfficiënt en den verstrooiing-coëfficiënt, onder welke omstandigheden een atmosfeer van gegeven dikte donkere dan wel heldere spectraallijnen zou moeten vertoonen.

Het vraagstuk werd als volgt aangevat. Een atmosfeer van de dikte t moge bestraald worden door een oppervlakte S_1S_2 (fig. 3) die

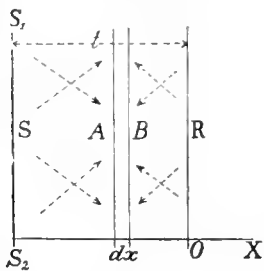


Fig. 3.

per cm^2 een hoeveelheid energie S uitzendt, begrepen tusschen de golflengten λ en $\lambda + d\lambda$ en over alle richtingen gelijkmatig verdeeld. Nu begint SCHUSTER met de verandering te berekenen die het totale bedrag van den energiestroom ondergaat in een dunne laag dx van die atmosfeer. Van links ontvangt de laag een hoeveelheid A per cm^2 . (die in 't algemeen kleiner zal zijn dan S , hoewel zij behalve de van S_1S_2 komende straling ook nog de eigen-straling van het tusschen S_1S_2 en de laag dx gelegen deel der atmosfeer omvat). Daarvan absorbeert onze laag $zAdx$ ³⁾, terwijl door verstrooiing de energie

¹⁾ RAYLEIGH heeft bij de afleiding der formule (9) daarmede geen rekening gehouden; zijn uitkomst geeft slechts de verzwakking die de oorspronkelijke bundel door verstrooiing ondergaat, en omvat niet het verstrooide licht zelf.

²⁾ SCHUSTER, Radiation through a foggy atmosphere. *Astroph. Journ.* **21**, p. 1, (1905).

³⁾ Ik heb de notatie van SCHUSTER onveranderd overgenomen, en moet er daarom de aandacht op vestigen dat de hier gebezigde coëfficiënt z niet dezelfde is als die van § 2, § 3 en § 4, doch de beteekenis heeft die in formule (12) aan $\frac{4\pi}{\lambda} \cdot n z$ toekomt.

verminderd wordt met $sAdx$, maar dit deel is niet verloren doch wordt voor de helft naar rechts, voor de helft naar links gezonden. Verder ontvangt de laag van rechts een hoeveelheid energie B per cm^2 . (opgebouwd uit verstrooide straling en eigenstraling van het buitenste deel der atmosfeer); daaraan onttrekt zij door absorptie $zBdx$ en door verstrooiing $sBdx$, waarvan echter weer $\frac{1}{2}sBdx$ naar links, $\frac{1}{2}sBdx$ naar rechts gaat. En eindelijk straalt de laag zelve naar beide kanten de energie $zEdx$ uit, als E het emissievermogen van een zwart lichaam is bij de temperatuur der laag.

Dit alles laat zich samenvatten in de twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} &= z(E - A) + \frac{1}{2}s(B - A) \\ \frac{dB}{dx} &= z(B - E) + \frac{1}{2}s(B - A) \quad . \quad . \quad . \quad (13) \end{aligned}$$

Wordt nu ondersteld dat de temperatuur en de samenstelling der atmosfeer overal dezelfde zijn, zoodat men E , z en s als constant mag beschouwen, dan kunnen A en B als functies van x worden bepaald. Zij x positief gerekend naar rechts, en het nulpunt gekozen in de *buitenste* grens der atmosfeer, dan is de energie R die naar buiten uitgestraald wordt gelijk aan de waarde van A voor $x = 0$, terwijl bovendien aan die grens $B = 0$ is. Verder heeft men de conditie, dat voor $x = -t$, $A = S$ moet zijn.

Deze gegevens zijn voldoende om voor de waarde van R te geraken tot de uitdrukking

$$R = 2\alpha \frac{[(1 + \alpha)e^{z \cdot t + s \cdot t} + (1 - \alpha)e^{-z \cdot t + s \cdot t}]E + 2(S - E)}{(1 + \alpha)^2 e^{z \cdot t + s \cdot t} - (1 - \alpha)^2 e^{-z \cdot t + s \cdot t}} \quad . \quad . \quad (14)$$

waarin α de beteekenis heeft: $\sqrt{\frac{z}{z + s}}$.

Om den aard van deze ingewikkelde betrekking eenigermate te overzien, heeft SCHUSTER een aantal eenvoudige getalwaarden gekozen voor de verhouding $\frac{z}{s} = \beta$ en voor het product $s \cdot t$, en in al die

gevallen $\frac{R}{S}$ als functie van $\frac{E}{S}$ in teekening gebracht.

Wat de daarbij verkregen uitkomsten en nog vele verdere gevolgtrekkingen betreft, verwijzen wij naar het oorspronkelijke stuk.

Als functies van de golflengte heeft SCHUSTER z en s niet nader beschouwd.

Op onzen weg ligt het nu, juist het selectieve karakter van die

grootheden op den voorgrond te brengen; en met het oog daarop is voor ons van groote beteekenis de eenvoudige betrekking waarin (14) overgaat wanneer wij den absorptie-coëfficiënt κ gelijk nul stellen. Duiden wij de in dat geval per cm.^2 uittredende hoeveelheid energie aan door R_0 , dan is ¹⁾

$$R_0 = \frac{2}{2 + s \cdot t} S \dots \dots \dots (15)$$

Voor wij tot de toepassing van deze formule overgaan zij nog even er aan herinnerd, dat SCHUSTER bij de afleiding van (14) de temperatuur en de samenstelling der gasmassa overal dezelfde, en de stralingssterkte onafhankelijk van de richting heeft ondersteld. Omdat aan deze voorwaarden in de atmosfeer van een hemellichaam natuurlijk niet voldaan is, geven (14) en (15) slechts een eerste benadering en moet de invloed der genoemde omstandigheden later afzonderlijk worden onderzocht.

In § 4 voerden wij de hypothese in, dat de eerste term van den dempingsparameter op kleinen afstand van de eigen-frequenties verdwijnt; dat derhalve het eigenlijke absorptiegebied tot de middelste deelen der donkere lijnen beperkt is in alle gevallen, waar de gaslaag dik genoeg is om ook de verstrooiing merkbaar te doen zijn. Op grond daarvan achten wij de vergelijking (15) geldig in alle overige deelen van het spectrum, dus bijv. bij het zonne-spectrum tot op zekere diepte binnen de Fraunhofersche lijnen.

De vergelijking (15) toont dat met toenemende dikte t der laag de uittredende straling in sterkte vermindert, doch langzamer dan het geval zou zijn indien voor de verstrooiing dezelfde wet gold als voor de absorptie. Was bijv. $s \cdot t = 98$, zoodat 2% van het invallende licht doorgelaten werd, dan zou bij verdubbeling van de laag nog ruim 1% de atmosfeer verlaten; terwijl, als een gelijk verlies in de eerste laag had plaatsgevonden door *absorptie*, een laag van de dubbele dikte slechts 0.04% zou hebben doorgelaten.

Zelfs een uiterst kleine absorptie-coëfficiënt zou in een zoo enorm dikke gaslaag als de zonne-atmosfeer is, een aanmerkelijke lichtverzwakking ten gevolge moeten hebben. De smalheid van de meeste Fraunhofersche lijnen en het langzaam uitvloeien van sommige ervan schijnt ons daarom gemakkelijker te begrijpen als wij mogen onderstellen dat reeds op zeer kleinen afstand van het midden der lijn de absorptie-coëfficiënt gelijk nul is, en dat de lichtverdeling overigens door verstrooiing en andere invloeden wordt beheerscht. ²⁾

¹⁾ SCHUSTER, l.c. p. 6.

²⁾ De vraag kan rijzen of er ook aanwijzingen bestaan hoe groot ongeveer het verstrooiings-effect wel is, dat men in een gasmassa van de afmetingen der zonne-

Krachtigen steun vindt deze hypothese echter vooral in het feit dat tal van astrophysische verschijnselen zich zeer overzichtelijk, in onderlingen samenhang, daaruit laten verklaren, zooals de stelselmatige verplaatsingen der Fraunhofersche lijnen en, als wij bovendien de straalbreking in aanmerking nemen, verschillende onregelmatigheden in het niterlijk dier lijnen, benevens vele uitkomsten van het spectroheliografisch onderzoek.

Voeren wij thans in (15) de waarde van den verstrooiingscoëfficiënt volgens (10) in, dan komt er

$$R_0 = \frac{3 \lambda^3}{32 \pi^3 \Delta f t} R^2 S.$$

Wij willen nu de grootheid R_0 beschouwen in haar afhankelijkheid van λ . Bepalen wij echter de aandacht telkens tot een deel van het spectrum dat slechts enkele Ångströmsche eenheden omvat, dan mogen wij daarvoor λ^3 en S wel als constanten behandelen en dus stellen

$$R_0 = \frac{a''}{a + b R^2} S \dots \dots \dots (16)$$

Hierin is in de constante b evenredig aan de dichtheid der gasmassa, aan de dikte der laag, en aan de gemiddelde massa per verstrooiend deeltje. Hoe grooter elk dezer grootheden is, des te kleiner zal (voor iedere waarde van λ) de sterkte zijn van het uit tredende licht. Snel veranderlijk met λ in het beschouwde kleine deel van het spectrum is alléén de factor R^2 , indien namelijk binnen dat gebied een absorptielijn gelegen is.

Het bovenste deel van fig. 4 moge $R = \frac{\mu - 1}{\Delta}$ voorstellen als functie van λ^3). De oorsprong der coördinaten beantwoordt aan de golflengte λ_0 eener eigen-trilling; de lijn $P_1 P_2$, die tot ordinaat

atmosfeer redelijkerwijze verwachten mag. Volgens de theorie van RAYLEIGH nu wordt door moleculaire verstrooiing in de aardatmosfeer de sterkte van het gemiddelde zonlicht, bij loodrechten inval, tot op ongeveer 95 0/10 verzwakt. In formule (15) zou dus voor dat geval $s.t = 0,1$ moeten zijn. Onderstellen wij, om iets te noemen, de zonne-atmosfeer 50 maal zoo dik als de aard-atmosfeer, bij gelijke gemiddelde dichtheid, dan zou $s.t = 5$ en dus $R_0 = \frac{5}{17} S$ worden. Dit is geen onredelijke uitkomst. Er volgt uit dat zelfs bij geringere dichtheid de atmosfeer der zon nog tot zeer merkbare verstrooiingsverschijnselen kan aanleiding geven, vooral nabij absorptielijnen.

1) In deze figuur neemt λ toe van links naar rechts; de volgorde der lichtsoorten is dus tegengesteld aan die in de figuren 1 en 2, waar de frequenties ν als abscissen waren gekozen.

heeft $\frac{n_0 - 1}{\Delta}$, zou den loop van R weergeven indien bij λ_0 geen

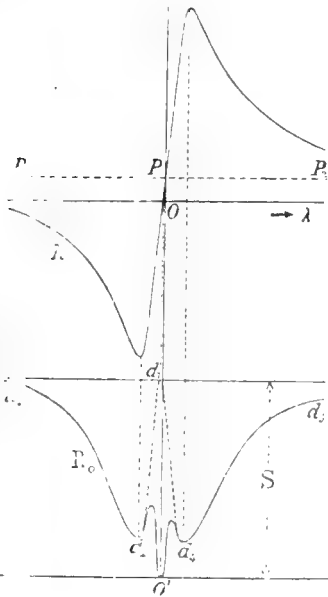


Fig. 4.

absorptielijn gevonden werd.

Wanneer t groot genoeg is, mogen wij in den noemer van (16) a tegenover bR^2 verwaarloozen; R_0 is dus ten naaste bij omgekeerd evenredig aan R^2 . Wij zien dat de invloed der verstrooiing grooter is aan den rooden dan aan den violetten kant van de absorptielijn, indien (zooals in de teekening ondersteld werd) n_0 grooter is dan 1. Intusschen zal bij *zeer* sterke lijnen dat verschil gedeeltelijk weer worden opgeheven, doordat volgens § 3 het minimum van den brekingsindex dieper beneden n_0 dan het maximum boven n_0 gelegen is.

Dit in aanmerking nemende kunnen wij (als voorloopig alléén op de verstrooiing, niet op de absorptie wordt gelet) de intensiteit van het doorgelaten licht voorstellen door een kromme lijn die ongeveer de gedaante $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$ hebben zal (fig. 4, onderste helft). De top d_3 ligt niet bij λ_0 doch is een weinig naar het violet verschoven. Indien men derhalve het gebied tusschen d_2 en d_4 , waar het aan verstrooiing toe te schrijven lichtverlies een minimum doorloopt, als een „emissielijn” opvatte, zou men aan deze een kleinere golflengte moeten toekennen dan aan de absorptielijn, en de toepassing van het beginsel van DOPPLER zou doen meenen, dat de emitterende damp den waarnemer naderde.

Streng genomen is het niet geoorloofd, de formules (15) en (16) op het geheele gebied tusschen d_2 en d_4 toe te passen, want waar z niet nul is, geldt de vergelijking (14). Onderstellen wij dat slechts in het middelste deel van dat gebied z een merkbare waarde heeft, dan is het niet onwaarschijnlijk dat men een beeld van de lichtverdeling verkrijgt door de ordinaten eener t.o.v. de lijn OO' symmetrische absorptiekromme af te trekken van de ordinaten van den asymmetrischen top $d_2 d_3 d_4$. Het resultaat is de scherpe inzinking, die een donkere lijn in het spectrum voorstelt, waarvan het zwaartepunt een weinig naar den kant der grootere golflengten verschoven is (vergeleken met λ_0), en die deels op absorptie, deels op verstrooiing berust. Beschouwde men deze lijn nu, ten onrechte, als een zuivere absorptielijn, dan zou de verschuiving naar rood den indruk geven

alsof de absorbeerende damp zich van den waarnemer verwijderde.

De hier genoemde bijzonderheden welke de theorie voorziet in de lichtverdeling binnen een breeden dispersieband, vertoonen een treffende gelijkenis met hetgeen werkelijk waargenomen werd door CHARLES E. ST. JOHN ¹⁾ bij de calciumlijnen H en K van het zonnespectrum. En wanneer wij behalve de gevolgen der anomale verstrooiing ook nog die der anomale refractie in rekening brengen, blijkt de overeenstemming tusschen de theorie en de resultaten der waarneming zich uit te strekken tot in nagenoeg alle details der in die verhandeling beschreven verschijnselen. De vrij ingewikkelde eigenaardigheden die de onderdeelen H_1 , H_2 , H_3 , K_1 , K_2 , K_3 der bekende breede calciumlijnen in het spectrum van de verschillende deelen der zonnenschijf vertoonen, kunnen dus worden verklaard *zonder* dat het noodig is met ST. JOHN aan te nemen, dat in de zonne-atmosfeer de calciumdamp in algemeene radiale circulatie verkeert met snelheden welke gemiddeld voor den stijgenden stroom 197 kilometer per secunde, voor den dalenden stroom 1,14 kilometer per secunde zouden bedragen. Dit hoop ik binnenkort in een afzonderlijke mededeeling uitvoerig aan te toonen.

Bij de meeste lijnen van het zonnespectrum is het geheele gebied der dispersie-anomalie, van d_1 tot d_5 , zóó smal, dat de bijzonderheden van het tusschen d_2 en d_4 begrepen deel aan de waarneming ontsnappen. Dan blijft slechts merkbaar de *asymmetrie* van de dispersiebanden der Fraunhofersche lijnen. Gevolgen die daaruit voortvloeien, heb ik in vroegere mededeelingen besproken. ²⁾

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt aan: Onderzoekingen, verricht met ondersteuning van het VAN DER WAALS-fonds N^o. 2. Prof. PH. KOHNSTAMM en Dr. J. TIMMERMANS: „*Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

In deze Verslagen Deel XVI en XVII ³⁾ heeft VAN DER WAALS een reeks conclusies afgeleid omtrent stelsels van niet volledig mengbare vloeistoffen. Wij zullen in deze mededeeling drie dier conclusies vergelijken met de experimenteele gegevens die daaromtrent in de

¹⁾ CHARLES E. ST. JOHN, The general circulation of the mean and high-level calcium vapor in the solar atmosphere. *Astrophysical Journal* **32**, p. 38—82 (1910).

²⁾ Verslagen Natuurk. Afd. XVIII, p. 196 en 913 (1909—1910); Les raies de Fraunhofer et la dispersion anormale de la lumière. „Le Radium”, t. VII, Oct. 1910.

³⁾ Zie ook Archives Néerl. (2) XIII p. 249—283 (1908).

literatuur te vinden zijn, en met de uitkomsten van eenige nieuwe, hier volgende bepalingen.

Wij zullen daarbij bespreken :

1°. Den vorm van de p, T -projectie der driephasenlijn $L_1 L_2 D$.

2°. Het verband tusschen den vorm der plooi-puntlijn en het bestaan van een maximum in de p, v -doorsnede van het saturatievlak.

3°. Het optreden van buigpunten in de p, v -doorsnede van het saturatievlak speciaal in de nabijheid van een kritisch eindpunt.

§ L. VAN DER WAALS heeft getracht aan te toonen, dat de p, T -projectie der driephasenlijn de plooi-puntlijn in een kritisch eindpunt niet snijdt, maar raakt. Daaruit zouden zeer merkwaardige resultaten voortvloeien.

a. In het geval van splitsing der plooi-puntlijn zou de driephasendruk regelmatig stijgen bij verhooging der temperatuur. Zooals echter een van ons ¹⁾ reeds vroeger opmerkte, heeft in het geval van splitsing der plooi-puntlijn $\frac{dp}{dT}$ voor deze lijn een zeer hooge waarde ($\frac{dT}{dp}$ wordt nooit hooger dan 0.04 graad per atmosfeer), en de driephasendruk zou dus zeer snel moeten toenemen in de nabijheid van het kritisch eindpunt.

b. In het geval van terugtrekking der plooi-puntlijn zou $\frac{dT}{dp}$ negatief zijn in het kritisch eindpunt zoowel voor de plooi-puntlijn als voor den driephasendruk; en daar bij lagere temperaturen de driephasendruk zeker weer zijn gewoon beloop zou her krijgen ($\frac{dp}{dT}$ positief) zou dus de driephasendruk noodzakelijk een maximum vertoonen.

c. In het geval van terugtrekking zou $\frac{dp}{dT}$ van den driephasendruk in de nabijheid van het kritisch eindpunt kunnen variëren tusschen een zeer kleine waarde (bijv. bij butaan + aniline : $\frac{dp}{dT} = 12.5$ atm. per graad) tot oneindig toe (bijv. isobutaan + methylalcohol, waarvan de plooi-punttemperatuur niet waarneembaar verandert tusschen 10 en 70 atm.) De laatste mogelijkheid zou dus ten onrechte door VAN DER WAALS als onmogelijk zijn beschouwd ²⁾,

¹⁾ J. TIMMERMANS. Handelingen van het 13e Vlaamsche Congres 1909 p. 120.

²⁾ Deze Verslagen XVI p. 226.

Wij bezitten tot nu toe bijna geen gegevens omtrent de waarde der driefasendrukken, die ons in staat zouden stellen deze uitkomsten te toetsen. Slechts enkele waarnemingen van SCHREINEMAKERS¹⁾ omtrent het systeem water + phenol kunnen daartoe gebruikt worden; zij zijn in tabel I vereenigd

T A B E L I.

t	p in mm kwik	$\frac{dp}{dT}$ in mm kwik per graad
29.8	29	2.26
38.2	48	3.33
42.4	62	4.05
50.3	51	5.16
56.5	126	6.66
60.1	150	7.44
64.4	182	10.45
71.2	251	11.32
75.0	294	

Het kritisch eindpunt ligt bij 68° volgens SCHREINEMAKERS; de beide dampdrukken, aangegeven voor hogere temperatuur, hebben betrekking op mengsels van de kritische concentratie; ze zijn ontleend aan VAN DER LEE²⁾, die ook de waarde van $\frac{dp}{dT}$ voor de plooiingslijn heeft bepaald. Deze is 197600 mm. kwik per graad; zij is dus van geheel andere orde van grootte dan de toename van den driefasendruk in de nabijheid van het kritische eindpunt (ongeveer 10 mm. kwik). Deze gegevens zijn dus ten eenenmale in strijd met de genoemde stelling, tenzij men een zeer steil oploopen van den driefasendruk in de onmiddellijke nabijheid van het kritische eindpunt zou willen aannemen, waar geen metingen gedaan zijn; maar deze onderstelling is moeilijk te rijmen met de stijging der tweefasendrukken van mengsels in de nabijheid der kritische concentratie, zooals uit de laatste cijfers der tabel blijkt.

1) Deze Verslagen van 21 April 1900 p. 704; Ztschr. phys. Ch. 35 p. 459 (1900).

2) Dissertatie Amsterdam 1898.

Om over wat meer materiaal beschikking te hebben, hebben wij nu eenige nieuwe bepalingen verricht. Hoewel de conclusie, als van zuiver thermodynamischen aard, niet van den aard van het stelsel moet afhangen, hebben wij onze keuze toch op mengsels van normale stoffen bepaald; met de metingen zijn wij zoo dicht mogelijk genaderd tot het kritische eindpunt. Wij hebben één geval gekozen van splitsing der plooiingslijn (cyclohexaan + aniline) en één van terugtrekking (hexaan + nitrobenzol) van welk systeem reeds vroeger door een van ons¹⁾ de loop der plooiingslijn nauwkeurig bepaald was. De gebruikte stoffen waren zeer zuiver; wij verwijzen voor verdere details daaromtrent naar de genoemde mededeeling.

Het gebruikte toestel is hetzelfde, dat door een van ons²⁾ reeds vroeger is gebezigd voor dampspanningsbepalingen langs statischen weg. Wij behoeven daarbij niet verder stil te staan. Het was geplaatst in een grooten thermostaat (80 L.); de drukken werden afgelezen met een kathetometer met een nauwkeurigheid van 0,05 mm. nadat door herhaalde meting gebleken was, dat het evenwicht zich ingesteld had. De metingen (die alle door den laatstgenoemde van ons (I.) werden verricht) werden eerst bij stijgende temperatuur, daarna bij dalende temperatuur gedaan; de uitkomsten kwamen altijd binnen 1 mm. overeen, wat voor het beoogde doel volkomen voldoende mag geacht worden. Alle drukken werden tenslotte herleid op mm. kwik bij 0°. De verkregen uitkomsten vindt men in de tabellen II en III; in de 4^{de} kolom dier tabellen vindt men voorts den dampdruk van de vluchtigste component (hexaan resp. cyclohexaan, bij de bijbehorende temperatuur; deze waarden zijn verkregen door graphische interpolatie uit de opgaven van SYDNEY YOUNG³⁾); de vijfde kolom eindelijk geeft het verschil tusschen de dampdrukken der zuivere stoffen en van het driephasensysteem; deze kolom stelt duidelijk in 't licht de volkomen evenwijdigheid van beide dampdruklijnen, wat een steun te meer geeft aan de nauwkeurigheid der hier gegeven uitkomsten.

De gegevens voor temperaturen boven het kritische eindpunt hebben weer betrekking op tweephasendrukken van mengsels van de kritische concentratie.

1) J. TIMMERMANS. Deze Verslagen October 1910.

2) PH. KOHNSTAMM. Dissertatie Amsterdam 1901, p. 183. Zie ook VAN DALFSEN Dissertatie Amsterdam 1906 p. 10.

3) S. YOUNG en J. FORTEY. Chem. Soc. London 77 p. 1126 (1900).

T A B E L. II.

*Cyclohexaan + aniline.*Temperatuur van het kritisch eindpunt 31^o.00. $\frac{dp}{dT}$ voor de plooi-puntslijn 166 atm. per graad.

T	p in mm kwik	$\frac{dp}{dT}$ in mm kwik	p cyclo- hexaan	D
23.22	90.65		89.4	+1.25
		4.30		
25.50	100.45		98.5	1.95
		4.37		
27.80	110.50		109.3	1.20
		5.00		
29.98	121.40		120.3	1.10
		5.19		
31.03	126.85		125.9	0.95
		4.71		
31.20	127.65		126.8	0.85

Bij herhaling den volgenden dag:

31.195	127.75		126.8	+0.95
		4.74		
31.100	127.30		126.3	1.00
		4.44		
30.48	124.55		123.0	1.25
		5.07		
28.99	117.00		115.7	1.10
		4.71		
27.29	108.00		106.6	2.30
		4.61		
25.61	101.15		99.2	1.95

Er blijkt ten duidelijkste uit deze metingen, vooreerst dat de waarde van $\frac{dp}{dT}$ voor den driephasendruk in het kritisch eindpunt van totaal andere orde van grootte is dan die langs de plooi-puntslijn, en voorts dat zoowel in het geval van terugtrekking als in dat van splitsing der plooi-puntslijn de driephasendruk geregeld met de temperatuur stijgt tot het kritisch eindpunt.

Voorloopige metingen bij het systeem isopentaan + nitrobenzol, hebben getoond, dat in dit geval van terugtrekking de driephasendruk evenmin een maximum bereikt om daarna weer te dalen: nauwkeurige metingen over dit systeem moesten ten gevolge van een experimenteel ongeval achterwege blijven.

Blijkt dus de genoemde stelling omtrent de raking van driephasendruklijn en plooi-puntslijn in strijd te zijn met de ervaring, wij meenen tevens in staat te zijn aan te toonen, dat een theoretische basis van die stelling ontbreekt.

TABEL III.

Hexaan + nitrobenzol.

Temperatuur van het kritisch mengpunt $20^{\circ}, 40$,
 $\frac{dp}{dT}$ voor de plooiingslijn = 53.75 atm. per graad.

T	p in mm kwik	$\frac{dp}{dT}$ in mm kwik	p hexaan	D
18.65	116.1		113.2	+2.9
		4.2		
19.44	119.4		117.1	2.3
		4.9		
20.24	123.3		121.4	1.9
		4.7		
20.62	125.1		123.3	1.8
15.55	103.8		98.1	5.7
		2.6		
16.52	106.3		102.6	3.7
		4.3		
17.65	111.2		108.2	3.0
		4.6		
18.65	115.8		113.2	2.6
		4.9		
19.45	119.7		117.15	2.55
18.92	115.0		111.05	3.95
		5.1		
19.05	119.2		115.2	4.0
		3.3		
19.85	121.8		119.3	2.5
		5.1		
20.30	124.1		121.7	2.4

De $\frac{dp}{dT}$ toeh voor den driephasendruk wordt gegeven door de vergelijking

$$\frac{dp}{dT_{123}} = \frac{(x_1 - x_2)(\eta_2 - \eta_3) - (x_2 - x_3)(\eta_1 - \eta_2)}{(x_1 - x_2)(v_2 - v_3) - (x_2 - x_3)(v_1 - v_2)}$$

Wij zullen de dampphase door 1, de beide vloeistofphases door 2 en 3 voorgesteld denken; in het kritisch eindpunt worden nu x_2 en x_3 gelijk, maar ook η_2 en η_3 en v_2 en v_3 ; teller en noemer worden dus beide nul. Daardoor onderscheidt zich dit geval van het driephasenevenwicht vast-vloeibaar-gasvormig, gelijk VAN DER WAALS l. c. opmerkt ¹⁾, omdat als de samenstelling van vaste phase en vloeistof gelijk worden hun volume en hun entropie niet gelijk zijn. Tot een

1) VAN DER WAALS. Deze Verslagen XVI p. 224.

bepaling van $\frac{dp}{dT}$ komt men op de volgende wijze. Het kritisch eindpunt is een plooiptpunt waarbij de fasen 2 en 3 zijn samengevallen. Het volume- en entropieverschil tusschen coëxisterende fasen in de nabijheid van een plooiptpunt kunnen wij nu weergeven door

$$v_2 = v_3 + (x_3 - x_2) \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)_{pT} \dots \quad \text{en} \quad \eta_2 = \eta_3 + (x_3 - x_2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right)_{pT} + \dots$$

Voor de limiet mogen we dus stellen:

$$v_2 - v_3 = (x_3 - x_2) \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)_{pT} \quad \text{en} \quad (\eta_2 - \eta_3) = (x_3 - x_2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right)_{pT}$$

Substitueeren wij deze waarden in de vergelijking van $\frac{dp}{dT_{123}}$ en deelen wij teller en noemer door $x_3 - x_2$, dan krijgen wij:

$$\frac{dp}{dT_{123}} = \frac{\eta_1 - \eta_3 - (x_1 - x_3) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right)_{pT} - W_{13}}{v_1 - v_3 - (x_1 - x_3) \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)_{pT}} \dots \dots \dots (1)$$

Daarentegen geldt voor het plooiptpunt dat ontstaat door de samenvalling van x_2 en x_3

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{pl. 23} = \frac{W_{23}}{r_{23}} = \frac{\eta_2 - \eta_3 - (x_2 - x_3) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right)_{pT}}{v_2 - v_3 - (x_2 - x_3) \left(\frac{\partial v}{\partial x_3} \right)_{pT}}$$

of als we weer dezelfde reeksontwikkeling als boven toepassen, maar de termen met $(x_2 - x_3)^2$ in aanmerking nemen:

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{pl. 23} = \frac{\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2} \right)_{pT}}{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \right)_{pT}} \dots \dots \dots (2)$$

en er is volstrekt geen reden, waarom (2) en (1) gelijk zouden zijn.

Achteraf laat zich thans ook gemakkelijk doorzien, hoe de tegengestelde meening kon tot stand komen. Na verg. (1) afgeleid te hebben, merkt VAN DER WAALS l. c. op, dat deze waarde gelijk is aan $\left(\frac{dp}{dT} \right)_{x_3}$ d. w. z. de stijging van den druk als men een doorsnede aanbrengt door het saturatievlak $x = x_3$. En hij gaat dan eenige regels verder voort: „En daar de p, T -projectie der plooiptlijnen de enveloppe is van de p, T -projectie der doorsneden van het saturatievlak voor stand-

vastige waarde van x raken de plooi puntlijn en de p, T -projectie der doorsnede elkander, en dus ook het eindpunt der p, T -projectie van den driephasendruk, daar in dat eindpunt het laatste element van dezen druk samenvalt met genoemde doorsnede." Uit twee juiste premissen is hier een onjuiste conclusie getrokken. Inderdaad bewijst verg. (1), dat de driephasendruk moet raken aan de p, T -projectie voor x_3 constant, of m. a. w. dat de druktoename langs de driephasenlijn bij de limiet (kritisch eindpunt) gelijk is aan de druktoename van het tweefasenevenwicht damp-vloeistof, en deze uitkomst is dan ook volkomen in overeenstemming met de gegevens van tabel I, II en III. Er is volstrekt geen sprong in de waarde van $\frac{dp}{dT}$ te zien,

als men de temperatuur van het kritisch eindpunt passeert. Evenzeer is het juist, dat elke plooi puntlijn in elk van haar punten moet raken aan een doorsnede voor x constant door het verzadigingsvlak (vlak van tweefasenevenwichten), en deze stelling wordt bevestigd door verg. (2). Maar bij de conclusie uit deze beide stellingen is over het hoofd gezien, dat in het beschouwde geval het saturatievlak (vlak der tweefasenevenwichten) niet zooals gewoonlijk een twebladig, maar een vierbladig oppervlak is. Door het kritische eindpunt gaan twee van die bladen; in de plaats van de onderlinge raking van drie lijnen, die VAN DER WAALS aannam, komt dus een raking van vier twee aan twee; de driephasenlijn raakt aan het vloeistofblad van de coëxistentie vloeistof-damp, en de plooi puntlijn raakt aan het eene vloeistofblad van de coëxistentie vloeistof-vloeistof. De experimenteele bevestiging van deze laatste stelling ligt reeds opgesloten in de waarnemingen, een vorige maal door een onzer¹⁾ medegedeeld. Immers daaruit blijkt afdoende, wat trouwens wel a priori mocht verwacht worden, dat de concentratie van het plooi punt slechts uiterst weinig met de temperatuur verandert, en dat voor de stijging van den eigenlijken plooi puntsdruk met de temperatuur zeker in den aanvang in de plaats mag gesteld worden de toename van den druk, die noodig is om bij verschillende temperaturen een mengsel van de concentratie van het kritisch eindpunt in homogeneu toestand te houden. En dit is niets anders dan de genoemde stelling.

§ 2. Een tweede stelling door VAN DER WAALS afgeleid, die experimenteel getoetst kan worden, luidt, dat in het geval van splitsing der plooi puntlijn altijd een minimum kritische temperatuur van het ongesplitste mengsel aanwezig moet zijn, dus in 't algemeen ook een

¹⁾ J. TIMMERMANS. Deze Verslagen van October 1910.

punt waar de samenstelling van damp en vloeistof gelijk worden (maximum dampdruk in de p,x -lijn; minimum kookpunt in de T,x -lijn). In het geval van terugtrekking is zulk een punt mogelijk, maar niet noodig.

In de beide gevallen in de vorige § genoemd, schijnen de metingen het bestaan van zulke punten aan te wijzen, omdat de driefasendruk hooger gevonden is dan de dampspanning van het meest vluchtige bestanddeel volgens YOUNG bedraagt. Maar een nauwkeuriger onderzoek toont, dat dit resultaat geheel valt binnen de foutengrens der metingen. Ten eerste toch zijn de verschillen tusschen de door YOUNG en de hier gegeven waarden steeds zeer klein (2 à 3 mm.) en kunnen zij veroorzaakt zijn door spoortjes opgeloste lucht, die gelijk bekend is, niterst moeilijk te verwijderen zijn ¹⁾. Vervolgens was het hexaan, dat wij gebruikten een weinig minder zuiver dan dat van YOUNG

T A B E L IV.
Hexaan + aniline.
Temperatuur van het kritische eindpunt 68° 9.

Concentratie		Kookpunt	$\frac{dT}{dc}$ per ‰	$\frac{dT}{dx}$
	gew. der aniline op 100 deelen mengsel			
0	0	68.95		
0.0388	4.18	69.65	0.170	18.04
0.0859	9.31	70.55	0.175	19.11
0.1205	12.95	71.25	0.19	20.23
0.1833	19.52	72.15	0.14	14.33
0.2795	29.55	72.95	0.08	8.32
0.3524	37.04	73.20	0.033	3.43
0.4296	44.88	73.34	0.013	1.29
0.5083	52.77	73.40	0.013	1.27
0.5778	59.67	73.45	0.007	0.72
0.6503	65.80	73.60	0.024	2.40
0.6880	70.45	73.90	0.034	6.28
0.7505	76.48	76.10	0.36	35.26
0.8458	85.57	82.85	0.74	70.83
1.	100	184.40	7.04	658.6

¹⁾ Vgl. PH. KOHNSTAMM Dissertatie p. 179.

T A B E L V.

Cyclohexaan + aniline.

Temperatuur van het kritische eindpunt 31°.0.

Concentratie		Kookpunt	$\frac{dT}{dc}$ per 0/0	$\frac{dT}{dx}$
x	gew. der aniline op 100 deelen mengsel			
0	0	80.75		
0.0167	1.85	81.20	0.243	26.95
0.0586	6.45	82.15	0.206	22.67
0.1083	11.85	83.15	0.185	20.12
0.2118	22.92	84.55	0.127	13.53
0.2749	29.55	85.15	0.090	9.51
0.3519	37.53	86.00	0.106	11.04
0.4237	44.86	86.85	0.116	11.84
0.4988	52.41	87.75	0.119	11.98
0.5576	58.25	88.60	0.145	14.45
0.6074	63.13	89.60	0.204	20.08
0.6892	71.05	95.10	0.70	67.24
1.	100	184.40	3.8	287.3

(te groote dichtheid nl. 0.67713 in plaats van 0.67693 0°/4°) terwijl daarentegen ons cyclohexaan zuiverder was dan dat van YOUNG (hooger smeltpunt 6°.50 in plaats van 4°.7) en deze onzuiverheden zijn voldoende om de afwijkingen te verklaren.

Ter nadere bevestiging hebben wij de kookpuntslijn dezer systemen onderzocht. De proeven werden gedaan met het toestel van BECKMANN en met een thermometer van BAUDIN, in vijfde graden verdeeld en voorzien van een correctietabel; alle resultaten zijn herleid tot de normale drukking van 760 mm. Bij beide mengsels waren de aniline-rijke mengsels zeer visqueus, en vertoonden groote oververhitting, welke soms tot 25° bedroeg en elke meting onmogelijk maakte. De resultaten zijn vereenigd in tabel IV en V.

Nadere overweging en vergelijking van deze gegevens toont nu, dat we hier met om meer dan een reden belangrijke systemen te doen hebben. In 't algemeen geldt de regel, dat van twee stoffen die met het grootere molecuul ook de grootste α heeft en daardoor de minst vluchtige is: in overeenstemming daarmede behooren dan ook de meeste tot nu toe onderzochte stelsels tot de rechter- of de midden-

strook der algemeene isopiëstentfiguur. In de mengsels van aniline met hexaan en cyclohexaan hebben wij nu systemen met een zeer uitgesproken verschil in vluchtigheid. Terwijl hexaan en cyclohexaan bij $\pm 33^\circ$ 125 à 150 mM. dampspanning hebben is die van de aniline bij die temperatuur minder dan 0,1 mM. ¹⁾ Desniettemin heeft de aniline de kleinste b (0.006113 in de gewone eenheden ²⁾, tegen 0.006947 voor cyclohexaan en 0.007849 voor hexaan). Dat de aniline toch zoo veel minder vluchtig is, ligt daaraan dat hier de a niet, zooals gewoonlijk, stijgt en zelfs sterk stijgt bij vergrooing van de b , maar zelfs daalt. De a voor aniline is in dezelfde eenheden 0.05282 tegen 0.05190 voor cyclohexaan en 0.04928 voor normaal hexaan). Wij hebben dus systemen met óf voortdurend afnemende kritische temperatuur van het ongesplitste mengsel (linker strook) óf systemen met een minimum T_k (midden strook); in welk geval wij verkeerden zal afhangen van de waarde van a_{12} . Nu leert de theorie, dat het bestaan van een punt, waar $x_1 = x_2$ (maximum in de p, x -lijn; minimum in de T, x -lijn) ten nauwste samenhangt met de aanwezigheid van een minimum kritische temperatuur van het ongesplitste mengsel. En wel komen beide eigenschappen bij de laagste temperaturen voor bij dezelfde waarde van x ; bij hooger temperatuur verschuift het mengsel, waar $x_1 = x_2$, steeds verder naar links (kleinste b , hier dus naar den anilinekant ³⁾). Daar nu in de kooklijn, dus bij hoogere temperatuur het punt $x_1 = x_2$ niet aanwezig is, moeten wij voorloopig concludeeren, dat inderdaad de verschillen in kolom 5 van tabel II aan verschil van zuiverheid tusschen de door ons en door SYDNEY YOUNG onderzochte stoffen moeten worden toegeschreven. Mocht nader onderzoek het tegendeel aantoonen, zoodat bij lagere temperatuur wél het maximum bestaat, dan zouden wij hier, voor zoover ons bekend is, voor 't eerst een geval hebben dat in strijd is met den door VAN DER WAALS gegeven regel omtrent de verschuiving van een punt $x_1 = x_2$. Het best zal deze vraag wellicht uitgemaakt worden door een direkte bepaling van de plooiingslijn $L-D$. Wij hopen deze te kunnen laten volgen, zoodra wij weer over een voldoende hoeveelheid zuiver cyclohexaan kunnen beschikken.

Er is nog een andere omstandigheid, die bij deze systemen de aandacht trekt en die eveneens wijst in de richting van een niet bestaan van een punt $x_1 = x_2$. Wij bedoelen het zeer groote verschil in vluchtigheid tusschen aniline en de respectievelijke andere com-

¹⁾ KAHLBAUM. Z. phys. Ch. 26 p. 603 (1898).

²⁾ Zie de tabellen van LANDOLT en BÖRNSTEIN.

³⁾ Théorie moléculaire § 9. Zie verder VAN DER WAALS, Deze Verslagen Maart 1902 en KOHNSTAMM Z. phys. Ch. 75, p. 527 (1910).

ponenten, waarvan wij reeds spraken. Bij de onderzochte temperaturen is de dampspanning van hexaan en cyclohexaan ruim 1000 maal zoo groot als die van aniline. Nu schijnt het weinig waarschijnlijk, dat de dampspanning van een stof door toevoeging van een zoo veel minder vluchtige stof zou kunnen stijgen, zooals toch voor een maximum zou vereischt worden. Ja, in 't algemeen acht men dit zoo vanzelfsprekend, dat men wanneer beide componenten zeer veel in vluchtigheid verschillen meestal zonder meer de geldigheid van den

regel van VAN 'T HOFF, $\frac{dp}{pd.x} = -1$, aanneemt, dus $\lim_{x_1} \frac{x_2}{x_1} = 0$ stelt.

En bijna steeds is men daarmee dan ook in overeenstemming met de ervaring. Dat echter een groot verschil in vluchtigheid nog niet de onderstelling $\lim_{x_1} \frac{x_2}{x_1}$ rechtvaardigt, bewijzen nu de systemen aniline

met hexaan en cyclohexaan, en in nog hoogere mate nitrobenzol met isopentaaen en hexaan, omdat bij dit laatste het verschil in vluchtigheid nog grooter is. Immers, welke conclusie men ook uit tabel II en III omtrent het bestaan van een maximum wil trekken, dit wordt er afdoende door bewezen, dat de dampspanningslijn van den rand af zoo goed als niet daalt. Men neme bijv. de metingen van den tweefasendruk bij een mengsel van de kritische concentratie even boven de temperatuur van het kritische eindpunt. Deze mengsels hebben een concentratie van omstreeks $x = 0.5$, maar hun dampdruk is niet meetbaar lager dan die van den vluchtigen component in zuiveren toestand. En daarmee vergelijkte men nu eens bijv. de door RAOULT onderzochte mengsels van aniline en nitrobenzol met aether ¹⁾. Bij een concentratie van 50 % is de dampdruk wel niet tot de helft gedaald, gelijk extrapolatie van den regel van VAN 'T HOFF voor deze niet-verdunde oplossingen zou geven, maar de gevonden verhouding (omstreeks 3/5) verschilt daarvan toch betrekkelijk weinig.

Een dergelijk verschijnsel als bij de hier genoemde systemen was nu weliswaar reeds bekend bij phenol en water, maar de abnormaliteit der beide componenten deed de verklaring daarvan zoeken in die abnormaliteit. De drie hier genoemde systemen doen zien, dat ook bij mengsels van normale componenten, die zeer sterk in vluchtigheid verschillen, hoogst belangrijke afwijkingen van den regel van VAN 'T HOFF kunnen voorkomen ²⁾. Daartoe is noodig, maar ook vol-

¹⁾ Z. phys. Ch. 2 p. 353 (1888).

²⁾ Wij bedoelen hier natuurlijk niet afwijkingen voor geconcentreerde oplossingen, want deze treden bij *elk* systeem op. Maar wij bedoelen, dat de regel van VAN 'T HOFF ook als limietwet voor uiterste verdunning niet behoeft door te gaan voor alle mengsels die zeer sterk in vluchtigheid verschillen. De conditie dat de beide stoffen

doende, dat de waarde van $l = \sqrt[12]{\frac{a_{12}}{a_1 a_2}}$ slechts betrekkelijk weinig beneden de eenheid dale (in deze gevallen bijv. tot omstreeks 0.85. Met deze geringere waarde van a_{12} gaat dan echter steeds gepaard een ontmengingsgebied. In verband met beschouwingen over systemen van geheel anderen aard zal een van ons binnen kort uitvoeriger op deze quaestie terugkomen en wij zullen daarom hier bij dit punt niet langer stilstaan. Slechts één conclusie willen wij nog uit het gezegde trekken. Is reeds een ongewoon kleine waarde van l noodig om te maken, dat $\lim_{x_1} \frac{x_2}{x_1}$ niet gelijk nul wordt voor mengsels van zeer verschillende graad van vluchtigheid, natuurlijk zal die waarde nog weer kleiner moeten genomen worden, wanneer men $\lim_{x_1} \frac{x_2}{x_1}$ grooter dan 1 stelt, en dus aanneemt, dat het zoo veel minder vluchtige bestanddeel bij de limiet toch rijker in den damp vertegenwoordigd is dan in de vloeistof, zooals de aanwezigheid van een maximum zou eischen. Vandaar dat wij in het juist gezegde een versterking zien van de uit de kooklijnen verkregen aanwijzing dat ook bij lagere temperatuur een punt $x_2 = x_1$ niet in de figuur voorkomt. Om dezelfde reden schijnt het minder waarschijnlijk, dat het systeem zwaveligzuur + decaan een maximumdampdruk zal bezitten, hoewel het behoort tot het type van de splitsing der plooi-puntslijn.¹⁾ Daaruit zou dan voortvloeien, dat de regel van VAN DER WAALS omtrent het samengaan van een minimum T_k en splitsing van de plooi-puntslijn te eng is, daar zulk een splitsingspunt ook voor kan komen in systemen uit de linker strook der isopiëstenfiguur, mits zij zich niet al te ver verwijderen van het gebied waar vloeistof en damp-samenstelling aan elkaar gelijk worden.

Toch toont een overzicht van al de bekende gegevens, dat in de groote meerderheid der gevallen splitsing van de lengteplooi alleen zal voorkomen bij systemen met een minimum T_k . Wij hebben alle experimenteele gegevens vereenigd in Tabel VI. Die omtrent de plooi-puntslijn zijn ontleend aan onze vorige mededeeling; die omtrent de dampspanningslijnen zijn in de literatuur verspreid; wij hebben overal naar het origineel verwezen. De gevallen van splitsing zijn door een S aangeduid, die van terugtrekking door een T , beneden-mengpunten door een B . Het teeken X geeft aan, dat de samen-

zich in vloeibaren toestand gemakkelijk mengen m.a.w. dat men ver van een ontmengingsgebied verwijderd is, moet bovendien vervuld zijn.

¹⁾ TIMMERMANS en KOHNSTAMM, Deze Verslagen Sept. 1909, N^o. 15 van de tabel.

TABEL VI

Systeem.	Type		
Amyleen + aniline	X T	Geen maximum	D. KONOWALOW. Drudes Ann. 10 p. 360 (1902)
„ + nitrobenzol	X T?	„	
Pentaaan + „	X T	„	Deze mededeeling.
Hexaaan + „	X T	„ ?	
„ + aniline	X T	„ ?	
Cyclohexaaan + aniline	X S	„ ?	
Ethaan + methylalcohol	X B	„	J. P. KUENEN en W. G. ROBSON. Phil. Mag. (5) 48 p. 180 (1899).
„ + aethyl „	X B	„	
„ + propyl „	X B	„	
„ + butyl „	X B	„	
Koolzuur + o-nitrophenol	X B	„	BÜCHNER. Diss. Amster- dam (1905).
Nicotine + water	B	„	SCHUKAREW. Z. phys. Ch. 71 p. 100 (1910).
Chloralhydraat + water	X B?	(Minimum)	VAN ROSSEM. Z. phys. Ch. 62 p. 681 (1908).
Zwavel + toluol	X T?	Geen maximum	J. K. HAYWOOD. J. of phys. Ch. 1. p. 232 (1897).
„ + xylool	X T?	„	
Aether + water	B?	Maximum	J. P. KUENEN en W. C. ROBSON. Z. phys. Ch. 28. p. 349 (1899).
Water + phenol	X S	„	F. A. H. SCHREINEMAKERS. Z. phys. Ch. 35. p. 459 (1900)
„ + aniline	S	„	
„ + isobutylalcohol	T	„	D. KONOWALOW. Wied. Ann. 14. p. 34 (1881).
„ + isoamylalcohol	T	„	
„ + boterzuur	T	„	
„ + isoboterzuur	T	„	
„ + isovaleriaanzuur	T	„	
„ + sec. butylalcohol	T	„	
„ + methylaethylketon	T	„	
„ + acetylaceton	T	„	
„ + triaethylamine	B	„	J. TIMMERMANS.
Propaan + methylalcohol	T	„	J. P. KUENEN. Phil. Mag. (6) 6 p. 637 (1903).
Isopentaaan + „	S	„	
Hexaaan + „	S	„	LECAT. Diss. Brussel 1908.
Cyclohexaaan + „	S	„	
Zwavelkoolstof + methylalcohol	S	„	
„ + aceton	S?	„	G. RYLAND. Amer. Ch. J. 22. p. 384 (1899).
Benzol + mierenzuur	S	„	W. NERNST. Z. phys. Ch. 8. p. 110 (1891).

stelling van de dampphase buiten die van de vloeistofphases valt. Een vraagteeken duidt dubieuse gevallen aan. Wij hebben ook het eenige ons bekende geval van een minimum dampdruk, met ontmenging gepaard gaande, opgenomen; gelijk bekend is bestaan bij deze systemen zoo goed als zeker verbindingen tusschen de componenten.

§ 3. Het laatste punt, dat wij bespreken willen is het optreden van buigpunten in de p, v -lijn speciaal in de nabijheid van een kritisch eindpunt. Gelijk reeds door KÜENEN uitvoerig is uiteengezet¹⁾, bezitten deze lijnen in het kritisch eindpunt een buigpunt met horizontale raaklijn. Boven het kritische eindpunt (we onderstellen dat het een bovenmengpunt is) zal er dus in de nabijheid der kritische concentratie een buigpunt blijven bestaan, maar in dit buigpunt is de raaklijn niet meer horizontaal. Deze vorm der p, v -lijn hangt nauw samen met een soortgelijken vorm der kook- en smeltlijnen in de nabijheid van een kritisch eindpunt. Wat betreft den vorm der smeltlijnen bezitten wij belangrijke systematische onderzoekingen van FLASCHNER en RANKIN²⁾. Omtrent de kook- en dampspanningslijnen van deze soort hebben wij nog betrekkelijk weinig gegevens; wij hebben wat er van bekend is vereenigd in tabel VII. De tweede kolom (T_1) geeft de temperatuur van het kritisch eindpunt; de derde (T_2) die, waarbij het buigpunt is waargenomen.

TABEL VII.

Systeem	T_1	T_2	Waarnemer
Amyleen + aniline	17.5	18.1	D. KONOWALOW. Drudes Ann. 10 p. 360 (1902). (D. KONOWALOW. J. de Ch. ph. 5 p. 1 (1907).
Isopentaaan + dichloorazijnzuur	<0	0	
Hexaan + aniline	68.9	73.4	Deze mededeeling.
Cyclohexaan + methylalcohol	31.8	85.5	
Hexaan + „	43	43.8	A. SCHUKAREW. Z. ph. Ch. 71. p. 100 (1910). F. A. H. SCHREINEMAKERS. Z. ph. Ch. 35. p. 456 (1900).
Water + phenol	68	71.2	
„ + acetylaceton	91	91.2	SCHUKAREW.
„ + nicotine B	60	59.6	

Men ziet, dat het bestaan van buigpunten in deze lijnen in de nabijheid van kritische eindpunten algemeen voorkomt, ook wanneer de beide componenten normale, niet-associerende stoffen zijn. In het

¹⁾ Verdampfung und Verflüssigung von Gemischen. Leipzig Barth 1906 p. 170.

²⁾ O. FLASCHNER en J. G. RANKIN Monatshefte f. Ch. 31 p. 23 (1910).

stelsel aniline + cyclohexaan bestaat het zelfs nog 50° boven het kritisch eindpunt. Wilde men al de bekende gevallen van buigpunten in de tabel opnemen, ook wanneer de meting ver van het kritische eindpunt is verricht, dan zou men waarschijnlijk de lijst nog met een groot aantal kunnen vermeerderen. Trouwens het is niet in te zien, hoe men zich den gang dier p, v -lijnen zonder buigpunten zou willen voorstellen. Reeds in 1901 heeft een onzer¹⁾ zich op het bestaan van buigpunten in de p, v -lijnen van aether²⁾ met weinig vluchtige stoffen beroepen tegenover een stelling van OSTWALD, die de mogelijkheid van zulke buigpunten ontkent voor het algemeene geval, dus zelfs bij in de vloeistofphase associeerende of chemisch op elkaar werkende componenten³⁾. De hier medegedeelde systemen zijn nieuwe bewijzen tegen die stelling.

Maar zij bewijzen nog meer. Gelijk een onzer⁴⁾ onlangs uit de theorie van VAN DER WAALS afleidde, zijn onder bepaalde omstandigheden p, v -lijnen met *tree* buigpunten te verwachten. Hij toonde daar ter plaatse alleen aan, onder welke omstandigheden een p, v -lijn moet optreden, die aan de beide zijden bol, in 't midden hol naar beneden is, en voegde er aan toe: „Den umgekehrten Fall, eines konvexen Teiles zwischen zwei konkaven, den man erhalten wird wenn $l_6 < l_7$, habe ich bis jetzt noch nicht gefunden, doch es ist kein Grund mehr vorhanden, ihn als unmöglich zu betrachten.“ De hier gepubliceerde metingen omtrent het stelsel hexaan en aniline bevestigen den theoretisch gevonden regel. Immers tracht men uit de gegevens van tabel IV een p, v -lijn voor bijv. $73^\circ 30'$ op te maken, dan kan men dien moeilijk een anderen vorm geven, dan den zoo juist beschrevenen. Toch blijft direkte experimenteele bepaling der p, v -lijn gewenscht.

In elk geval is er thans een reden te meer voor de l.e. gegeven waarschuwing, dat men uit een beloop der p, v -lijnen, eenigszins afwijkend van het meest voorkomende type, nog niet mag besluiten tot het bestaan van een dissocierende verbinding, zooals vaak geschiedt. Doordat in het stelsel hexaan en aniline het kritisch eindpunt kan gerealiseerd worden, wordt men hier voor die dwaling behoed, maar het is natuurlijk zeer goed mogelijk, dat in andere gevallen het optreden van een kristallijne phase die realisatie belet. Slechts de bepaling van de smeltlijn kan in zulke gevallen zekerheid geven.

¹⁾ PH. KOHNSTAMM, Z. phys. Ch. 36 p. 41 (1901).

²⁾ RAOULT, Z. phys. Ch. 2 p. 353 (1888).

³⁾ Lehrbuch der allgemeinen Ch. II 2 p. 642.

⁴⁾ PH. KOHNSTAMM, Z. phys. Ch. 75 p. 550 (1910).

Hoe men de hier genoemde feiten, en trouwens zoo vele andere, in overeenstemming zou kunnen brengen met de voor vele jaren reeds door SPEYERS¹⁾ en in den laatsten tijd opnieuw door DOLEZALEK²⁾ verdedigde „theorie”, volgens welke de partieele drukkingen der componenten steeds evenredig zijn aan de vloeistofconcentratie, is niet in te zien. Zelfs als men zich beperkt tot mengsels van normale stoffen is de rijkdom van verschijnselen zoo groot, dat daarvan alleen rekenschap kan gegeven worden door een theorie die let op het groote verschil, dat bestaan kan in de drie grootheden, die te samen den toestand van zulk een binair mengsel bepalen:

de verhouding der moleculgroote $n = \frac{b_2}{b_1}$,

moleculaire attractie $k = \frac{a_2}{a_1}$, en de onderlinge attractie der moleculen

$$l = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_1 a_2}}.$$

CONCLUSIES.

Wij hebben in deze mededeeling getoond:

1. Dat de door VAN DER WAALS uitgesproken verwachting, dat de lijn der driephasendrukken $L_1 + L_2 + D$ zou raken aan de plooi-puntslijn in het kritisch eindpunt, in strijd is met het experiment, maar dat ook nadere theoretische overweging de ongegrondheid dier verwachting toont en in de plaats van de stelling van VAN DER WAALS twee andere regels stelt, die beide door het experiment worden bevestigd.

2. Dat in het algemeen de door VAN DER WAALS gegeven regel, dat splitsing van een plooi-puntslijn alleen voorkomt in stelsels uit het middenstuk der isopiëstenfiguur door de ervaring bevestigd wordt. Maar dat toch ook gevallen schijnen voor te komen waarbij stelsels geheel uit de linkerstrook der isopiëstenfiguur (dalende T_k bij toenemende b , zonder dat het minimum T_k bereikt wordt) splitsing der plooi-puntslijn vertoonen. Ook om andere bovengenoemde redenen blijft nader onderzoek van deze mengsels zeer gewenscht.

3. Dat in strijd met de theorieën van OSTWALD, SPEYERS, DOLEZALEK en anderen, maar in overeenstemming met de theorie van VAN DER WAALS, mengsels van normale stoffen p, v -lijnen met een buigpunt kunnen bezitten, en zelfs met meer dan één buigpunt, wanneer men tot een ontmengingsgebied nadert.

1) Journ. of Phys. Chem. 2 p. 347, 362 Journ. Amer. Ch. Soc. 21 p. 282, 725

2) Zeitschr. f. Phys. Ch. 62 727; 71, 191.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N^o. 117 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: E. MATHIAS en H. KAMERLINGH ONNES. „*De reëthlijnige diameter van zuurstof.*”

(Aangeboden in de vergadering van 25 Juni 1910¹⁾).

§ 1. *Inleiding.* Reeds in Meded. N^o. 14 (Dec. 1894) over het cryogene laboratorium te Leiden werd als een der eerste doelwitten, waarop de pogingen om de methoden uit te werken die daar thans voor nauwkeurige metingen bij zeer lage temperaturen worden aangewend, gericht waren, het vergelijken van de toestandsvergelijking der permanente gassen (en in het bijzonder die van waterstof) met die der gewone normale stoffen aangewezen.

Terwijl de benaderde geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden voor de groep van stoffen met zeer lage kritische temperatuur evenzoo als voor de andere normale stoffen werd aangenomen, waren er toch redenen om te verwachten, dat het vergelijken van hunne gereduceerde toestandsvergelijking met die der andere stoffen grootere afwijkingen zou aanwijzen dan die men vindt tusschen verschillende groepen van gewone normale stoffen.

Inderdaad verschilt de gereduceerde empirische toestandsvergelijking der gewone lichamen belangrijk van de oorspronkelijke gereduceerde toestandsvergelijking van VAN DER WAALS, en dit verschil verdwijnt niet wanneer men de wijzigingen aanbrengt, waartoe eene strengere berekening van den invloed van de uitgebreidheid der moleculen op den kinetischen druk dan die welke zich er toe bepaalt aan b eene constante waarde toe te komen, leidt. Men kon toen de hoop koesteren dat de stoffen als zuurstof, stikstof, waterstof, wegens de meer eenvoudige constitutie hunner moleculen, beter dan de andere stoffen aan de onderstellingen waarop de berekening van VAN DER WAALS gebaseerd was, zouden beantwoorden en dat hun gereduceerde toestandsvergelijking zou naderen tot de theoretische vergelijking van VAN DER WAALS, wat eene afwijking van de gereduceerde toestandsvergelijking der andere stoffen zou medebrengen.

De werkzaamheden bestemd om dit aan het licht te brengen hebben slechts zeer langzaam kunnen vorderen²⁾; er moesten cryostatens geconstrueerd worden die de schaal der temperaturen met eene voldoende nauwkeurigheid ter beschikking stelden; het vloeibaar

1) Een uittreksel dezer Mededeeling is gegeven in de Compt. Rend. de l'Acad. des Sciences Paris Juli en Aug. 1910.

2) Zie de inleiding van meded. No. 97 *a* (Dec. 1906).

maken van de waterstof nam weldra eene plaats op het programma in; de piezometrie en de thermometrie der lage temperaturen waren te bestudeeren. Intusschen waren de eenatomige gassen, wier moleculen vermoedelijk het meest aan de onderstellingen van VAN DER WAALS beantwoorden, ondeckt en was het helium de plaats komen innemen die in het begin door de waterstof was bezet. Nu het helium zelf vloeibaar gemaakt is, zijn het aantal der isothermen die bepaald zijn en het gebied hetwelk zij omvatten, nog altijd klein, en heeft het probleem hetwelk te Leiden bewerkt wordt, hoewel het zich zeer belangrijk heeft uitgebreid, nog hetzelfde karakter.

De stof waaraan men a priori de toestandsvergelijking, die het meest die van VAN DER WAALS nabij komt, zou willen toeschrijven, is nu het helium. Het komt er op aan in het licht te stellen hoe men van de oppervlakken die de gereduceerde toestandsvergelijkingen der gewone normale stoffen voorstellen, die van zuurstof, stikstof, enz. argon, neon, waterstof passeerende, door voortschrijdende vervorming overgaat tot dat hetwelk de gereduceerde toestandsvergelijking van het helium voorstelt, en aan hetwelk men eene limietvorm zou willen toekennen.

In de Meded. No. 71 (Juni 1901) en No. 74¹⁾ is eene gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking afgeleid door de gedeelten die de metingen betreffende waterstof, zuurstof, stikstof, koolzuur, ether en isopentaan geven ieder voor het gebied van gereduceerde temperatuur hetwelk voor die stof met de gewone temperatuur correspondeert, te vereenigen. Deze gemiddelde toestandsvergelijking wordt in de onderzoekingen te Leiden beschouwd als eene omhullende, waartegen elk der speciale toestandsoppervlakten in het gebied waarvoor dit bijgedragen heeft om de gemiddelde vergelijking te vormen, rakend aanligt, terwijl deze speciale gereduceerde oppervlakken voor de verschillende stoffen in de andere gebieden zich van elkander en van het omhullende oppervlak verwijderen. Het oppervlak van het helium zal zich hiervan het meest verwijderen. De speciale gereduceerde toestandsvergelijking voor waterstof [VII, H₂, Meded. No. 109a § 7 verg. (16), Maart 1909] verschilt inderdaad aanmerkelijk van de gemiddelde toestandsvergelijking (VII 1, Comm. phys. Lab. Leiden Suppl. No. 19 p. 18), en de metingen betreffende helium (zie Meded. No. 108, Aug. 1908) hebben bevestigd dat zijn toestandsvergelijking afwijkt van die van waterstof op gelijke wijze als waarop deze afwijkt van die van zuurstof en van stikstof.

De vervorming van het oppervlak, dat de gereduceerde toestands-

¹⁾ Arch. Néerl. (2) 6 (1901.)

vergelijking voorstelt, brengt mede eene vervorming van alle corresponderende lijnen die erop aangebracht worden, m. a. w. eene verandering der gereduceerde waarden van alle grootheden, die uit de toestandsvergelijking worden afgeleid. Dit zal meer in bijzonderheden worden uiteengezet in een artikel van H. KAMERLINGH ONNES en W. H. KEESOM over de toestandsvergelijking en hare grafische behandeling in de Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Van deze afgeleide grootheden schijnt de rechtlijnige diameter een der belangrijkste. Reeds in 1899¹⁾ werd vastgesteld dat wat den diameter betreft de wet der overeenstemmende toestanden niet voor de stoffen in hun geheel genomen geldt. In de veronderstelling dat de diameter ook voor de stoffen met zeer lage kritische temperatuur rechtlijnig is, leerden de metingen van DEWAR en WROBLEWSKI dat voor deze stoffen de gereduceerde richtingscoëfficiënt van den diameter zelfs belangrijk van dien voor de gewone normale stoffen afwijkt. Dit resultaat deed verwachten, dat het onderzoek van den diameter een karakteristieken trek zou doen kennen in het geheele beeld der verschillen van de toestandsvergelijkingen der stoffen met lage kritische temperatuur met die van de gewone normale stoffen, en dit des te meer nu de nieuwere onderzoekingen van VAN DER WAALS²⁾ over de moleculopeenhooping in den vloeistoestand den rechtlijnigen diameter als middel om de wet dezer opeenhooping te karakteriseeren op den voorgrond hebben gesteld.

De eerste vraag die zich bij het onderzoek van den diameter van de stoffen met lage kritische temperatuur aanbiedt, is de volgende. Voor de gewone normale stoffen is aangetoond dat de diameter met een hoogen graad van benadering recht is. Is dit ook het geval voor de stoffen met lage kritische temperaturen? Laat de vervorming van het gereduceerde oppervlak, hoewel zij eene richtingsverandering van den diameter medebrenkt, de rechtlijnige gedaante ongeschonden, zooals het geval zou zijn indien deze rechtlijnige gedaante in een innig verband met het karakter van den vloeistoestand zou staan? Dit is het fundamenteele vraagstuk, hetwelk wij hebben aangevat, en hetwelk door de metingen die in deze Meded. gegeven worden³⁾ voor zuurstof in bevestigenden zin wordt beslist.

Zuurstof was voor dit eerste onderzoek zeer geschikt omdat het tot zeer lage gereduceerde temperaturen (0,30) vloeibaar blijft en

1) E. MATHIAS. Liège Mém. Soc. Roy. des Sc. 2 (1899).

2) J. D. VAN DER WAALS. Zittingsverslag Mei 1910.

3) De uitkomsten zijn in het uittreksel in de Compt. Rend. de l'Académie des Sciences (van Juli en Aug. 1910) gegeven.

wij zijn diameter van af zijn kritisch punt tot aan -217°C . (gered. temp. 0,36) konden vervolgen met behulp van de cryostaten en der thermometrische gegevens, die door de onderzoekingen over de isothermen waarover wij spraken ter beschikking gesteld waren.

Als men van neon en van helium als voor dit soort van onderzoekingen nog te veel moeilijkheden gevende afziet, dan zou alleen waterstof toelaten vloeistofdichtheden bij nog lagere temperatuur te bepalen. Echter ontbreken voor waterstof vooralsnog de cryostaten voor temperaturen tusschen het kookpunt en het kritisch punt, zoodat metingen betreffende het meest belangrijke gedeelte van den diameter, te weten dat tusschen het kookpunt en het kritisch punt nog niet mogelijk zijn, en slechts het gedeelte van den diameter gelegen beneden het kookpunt, hetwelk men den verlengden diameter zou kunnen noemen, voor metingen overblijft.

Eindelijk beval zich zuurstof ook hierom aan, dat zij gemakkelijk volkomen zuiver kan bereid worden. Dit geschiedde door kaliumpermanganaat te verhitten in buizen die deel uitmaken van een geheel uit glas bestaanden toestel. De zuurstof werd in een ander gedeelte van den toestel dat in vloeibare lucht gedompeld was, vloeibaar gemaakt, zij werd vervolgens van dezen toestel overgedistilleerd in een op zijne beurt in vloeibare lucht afgekoeld cylindrisch reservoir (zie § 4). Men regelt de hoeveelheid die hierin gecondenseerd wordt, zoodanig dat bij terugkeer tot gewone temperatuur de druk de waarde, die door de constructie van dit koperen reservoir toegelaten wordt, niet overschrijdt.

§ 2. *Methode I. Densimeter.* Wij hebben de constanten van den diameter afgeleid uit metingen van de dichtheden van de vloeistof en den damp bij eene reeks van temperaturen. Bij elke dichtheidsbepaling, zoowel van de vloeistof als van den damp, was de phase waarvan de dichtheid bepaald werd in evenwicht met eene kleine hoeveelheid van de coëxisterende phase.

Fig. 1 Pl. II stelt een toestel voor waarmede men den diameter direct zou kunnen bepalen. Twee gelijke reservoirs *A* en *B* zijn verbonden door middel van een verdeelde capillair *c*, het bovenste reservoir eindigt in een nauwe capillair voorzien van een kraan *f*. Het inwendig volume van den toestel tot aan een deelstreep *d* is het dubbele van dat van het benedenste reservoir tot aan eene af te lezen deelstreep van de capillair *c*. Men vult nu den dilatometer zoo dat de vloeistofmeniscus bij de laagste temperatuur waarbij men werkt, raakt aan de middenstreep; dan brengt men den toestel op hoogere temperatuur, daarbij telkens door de kraan *f* zooveel damp latende ontsnappen,

dat de vloeistofmeniscus altijd blijft raken aan de middenstreep. Zijn de massa die de toestel bij de laagste temperatuur bevat en de hoeveelheden die achtereenvolgens bij het overgaan tot de andere temperaturen ontsnappen, gemeten en de correcties voor de nauwe capillair e en voor het verschil der gelijk gestelde volumina V_A en V_B der beide deelen A en B en voor de afwijking van het vloeistofniveau van den middenstreep, over welke wij niet nader behoeven uit te weiden, aangebracht, dan verkrijgt men uit $V_A q_{liq} + V_B q_{vap} = V_A (q_{liq} + q_{vap})$, daar V_A bekend is, onmiddellijk de gegevens voor den diameter.

We hebben van dezen toestel nog geen gebruik gemaakt. Gelijk reeds opgemerkt werd, hebben we de minder directe methode gevolgd die bestaat in het afzonderlijk bepalen van q_{liq} en q_{vap} bij eene zelfde temperatuur. Soms hebben we bepalingen van het verschil $q_{liq} - q_{vap}$ er aan toegevoegd.

Ten einde q_{liq} en q_{vap} te bepalen vult men met de te onderzoeken phase, waarbij men een kleine hoeveelheid van de coëxisterende phase aanwezig laat, een glazen reservoir van bekend volume. Dit reservoir is verbonden aan een nauwe glascapillair, die toelaat het reservoir in een der cryostaten van het cryogene laboratorium in een bad van vloeibaar gemaakt gas te dompelen. De glascapillair zet zich voort in een nauwe staalcapillair die gesloten kan worden door middel van een kraan. Daar het meten der hoeveelheden van het gas, die den densimeter vullen, gelijk wij in §3 zullen zien, geschiedde in een volumenometer, is het aangewezen van verschillende reservoirs gebruik te maken wanneer de dichtheden van de vloeistof en van den damp met even groote nauwkeurigheid moeten bepaald worden. Voor het doel van ons onderzoek was dit echter niet noodig. Ten einde een punt van den diameter vast te stellen heeft men voor de dichtheid van den damp eene niet zoo groote procentische nauwkeurigheid noodig als voor die van de vloeistof. Het is voldoende als de hoeveelheid die het reservoir waarvan men zich voor de beide bepalingen bedient, vult, met eene zelfde absolute nauwkeurigheid bekend is. Voor q_{liq} en voor q_{vap} kon dus hetzelfde reservoir gebruikt worden.

Met het oog op de bepaling van de dampdichtheid, die eene nauwkeurige bepaling van het volume van de vloeistof, welke men in evenwicht met den damp laat, vereischt, eindigt het reservoir van den densimeter beneden in een appendix a met verdeeling. Ongelukkigwijze was voor dezen appendix een te nauwe capillair genomen, zoodat het bij de metingen noodig was het niveau van de overblijvende vloeistof in het conische gedeelte boven de verdeeling waar

te nemen. In deze omstandigheden is het vrij lastig geweest deze correctie te verkrijgen.¹⁾

De vorm van het reservoir was zoodanig gekozen dat men zoowel de methode met constante massa als die met constant volume kon toepassen. Daartoe bestond het reservoir (zie Pl. II. fig. 2) gedeeltelijk uit een verdeelden steel $d_c - d_c$. De toestel vormde op die wijze een dilatometer voorzien van een zeer nauwe capillair d_f met een kraan k_a en een appendix d_a . Blijft de kraan k_a gesloten, dan zal de vloeistofmeniscus, die bij de begintemperatuur stond bij de hoogste deelstreep, die wij η_1 zullen noemen, dalen wanneer men tot lagere temperaturen overgaat, en leest men met een kathetometer-microscop K (Pl. I.) de niveaustanden die wij evenzoo $\eta_2, \eta_3 \dots \eta_n$ zullen noemen behorende bij de voortdurend lagere temperaturen $T_2, T_3 \dots T_n$ af, totdat het vloeistofniveau tot beneden in den steel $d_c - d_c$ (Pl. II. fig. 2) gekomen is. Ten einde op de beste wijze van deze metingen partij te trekken moet de appendix d_a zoo berekend zijn, dat bij gesloten kraan voor de bepaling van de dichtheid van den damp bij de temperaturen $T_1, T_2, T_3 \dots T_n$ de niveau aflezingen $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n$ in de capillair van den appendix kunnen geschieden. In dat geval kan men direct de correcties afleiden, die aangebracht moeten worden aan de ruwe waarden van $q_{lig1}, q_{lig2} \dots q_{lign}$ en $q_{cap1}, q_{cap2} \dots q_{capn}$ welke men verkrijgt door de correctie wegens de kleine hoeveelheid der coëxisterende phase te verwaarloozen, terwijl anders die correcties volgens de methode van opeenvolgende benaderingen²⁾ gevonden moeten worden. De voorwaarde om deze eenvoudige methode te kunnen toepassen, n.l. dat de cryostaten toelaten nauwkeurige gelijkheid van de temperaturen bij de bepaling van de dichtheid van de vloeistof en bij die van de dichtheid van den damp te verwezenlijken, was bij onze proeven vervuld. Er was dus alle reden van deze omstandigheid gebruik te maken ten einde tusschen de twee temperaturen T_1 en T_n de methode der constante massa toe te passen.

Daar de bepaling der massa's in het geval van een permanent gas vrij moeilijke metingen vereischt, was het aangewezen op de aangegeven wijze het aantal bepalingen der massa, die bij uitsluitend

¹⁾ Dit is op de volgende wijze geschied. Uit dezelfde glassoort zijn copieën gemaakt met nauwkeurig dezelfde uitwendige afmetingen en zoodanige inwendige afmetingen, dat zij optisch dezelfde waren. Deze copieën werden bij achtereenvolgende stapjes afgeslepen en de inwendige afmetingen telkens uitgemeten, waarna de volumes door integratie gevonden werden. Wij betuigen gaarne onzen dank aan den Heer G. HOLST voor de zorg waarmede hij dit heeft uitgevoerd.

²⁾ E. MATHIAS, Remarques sur le théorème des états correspondants. Ann. de Toulouse 1891.

gebruik van de methode van constant volume — waarbij de dilatometer vanaf een streep van den appendix tot aan de bovenste streep van de steel als densimeter fungeert — zouden noodig zijn, tot een zoo klein mogelijk temperatuurinterval te beperken. Men zal dus de dilatometrische methode, die van constante massa, welke op de boven aangegeven wijze de gegevens voor eene reeks van tusschengelegen temperaturen levert, combineeren met de densimetrische (pycnometrische) methode, die met constant volume, welke als het ware de standaardpunten op de schaal van temperaturen, die men wil doorloopen, levert en tusschen welke de tusschengelegen punten corresponderende met de temperaturen, die tusschen twee standaardpunten doorloopen worden, ingelascht worden.

Voor zuurstof, en dit is voor de permanente gassen in het algemeen het geval, kunnen noch de methode met constante massa, noch die met constant volume, in het geheele temperatuurinterval streng toegepast worden. Het is om de verschillende temperatuurgebieden te doorloopen somtijds noodig van een bad tot een ander over te gaan, wat niet kan geschieden dan door daartusschen op de gewone temperatuur over te gaan; daarbij is het noodig het gas uit den dilatometer te laten ontsnappen om het er later weer in te brengen. Voor de metingen met zuurstof bedient men zich voor de laagste temperaturen, van -217°C . tot -183°C . van een bad van vloeibare zuurstof, voor de temperaturen tusschen -183°C . en -164°C . gebruikt men een bad van vloeibaar methaan, tusschen -158°C . en -120°C . een van vloeibaar ethyleen. Men moet dus minstens driemaal met eene nieuwe hoeveelheid beginnen. Eenige standaardpunten op de temperatuurschaal zijn dus reeds van zelf door den aard der baden aangewezen.

Anderzijds zou eene verandering van toestel bij het overgaan van een temperatuurgebied tot een ander, tot het verkrijgen van een grootere nauwkeurigheid, voordelig zijn. De uitzetting der vloeistof en de dichtheid van den damp nemen bij het naderen tot de kritische temperatuur sterk toe; het is duidelijk dat men, ten einde in dit gebied met denzelfden dilatometer een niet te klein interval te kunnen doorloopen, er toe geleid wordt andere diameters van de steel en van den appendix te kiezen. Wij hadden daarom eene reeks dilatometers samengesteld met verschillende steelen en verschillende appendices, berekend voor eene serie temperatuurintervallen. Laatstgenoemde deelen hadden voor de dilatometers die bij temperaturen dichter bij de kritische moesten dienen grootere diameters. Verder hadden wij door het reservoir in twee gedeelten vereenigd door eene capillair die van eenige deelstrepen voorzien is te verdeelen,

getracht ons zooveel mogelijk controlemiddelen te verschaffen, daar wij zoodoende direct metingen in elk der individueele toestellen zouden kunnen aansluiten aan een of meerdere metingen in een ander.

Om te beginnen hebben wij geen van de complicaties toegepast, die wij beschreven en die zich opdringen zoodra men voor elk der gegevens voor den diameter de grootst mogelijke nauwkeurigheid, gegeven de graad van standvastigheid der temperaturen in de cryostaten en de nauwkeurigheid waarmede zij gemeten kunnen worden, wenscht te bereiken. Wij hebben ons ertoe bepaald al onze metingen met eenzelfde dilatometer te doen, zoowel die van de dampdichtheid als die van de vloeistofdichtheid, en zoowel die bij de zeer lage temperaturen als die nabij de kritische temperatuur. Deze dilatometer was dus zoodanig geconstrueerd dat hij den kritischen druk kon verdragen. Het groote gemak gelegen in het gebruik van eenzelfde dilatometer voor alle bepalingen is, dat wanneer deze eenmaal in den cryostaat op zijne plaats gebracht is, men hierin slechts de verschillende vloeibaar gemaakte gassen noodig voor de verschillende baden behoeft af te schenken om de geheele temperatuurschaal te doorloopen en dat men voor de geheele reeks van bepalingen niets aan de meettoestellen heeft te veranderen. Ook was het voor ons allereerst van belang de waarden der dichtheden, die voor de berekening van den diameter noodig zijn met eenzelfde nauwkeurigheid over het geheele beloop ervan te leeren kennen en was eenerzijds de grootste hoeveelheid gas, die wij bij elke meting konden gebruiken, beperkt door de afmetingen van den volumemeter, anderzijds de nauwkeurigheid der metingen bij de hoogste temperatuur door den graad van standvastigheid der temperaturen. Overigens was er geen belang bij voor enkele punten eene grootere nauwkeurigheid te verkrijgen dan die men op deze wijze bereiken kan, en die eene eenheid in de derde decimaal bedraagt. Deze nauwkeurigheid toch is voldoende om uit te maken of de diameter van zuurstof als rechtlijnig is te beschouwen en om zijn richtingcoëfficiënt met dezelfde nauwkeurigheid als die welke bij de studie der andere stoffen verkregen is, af te leiden. In ieder geval was deze eerste stap gewenscht om de gegevens te verkrijgen waarover men beschikken moet om de toestellen waarover wij boven spraken, en waarvan men zal gebruik maken om eene grootere nauwkeurigheid te verkrijgen, te berekenen. In overeenstemming met de nauwkeurigheid, die gewenscht werd, scheen het niet noodig metingen te doen betreffende de dichtheid van den damp bij de laagste temperaturen daar men kon aannemen dat deze dichtheden voldoende nauwkeurig kunnen berekend worden.

De juiste afmetingen van den dilatometer, dien men in de schema-

tische teekening der opstelling, Pl. I, in den cryostaat *C* geplaatst ziet, worden gegeven door Pl. II, fig. 2. De verbinding tusschen de glasecapillair d_f en de staalecapillair van circa 0,6 m.m. diameter d_g is beschreven Meded. N^o. 69 (Maart '01) Pl. II fig. 4. Het stuk d_{f4} is op de wijze beschreven Meded. N^o. 27 II (Juni '96) gesoldeerd aan het glas; het eindvlak hiervan is loodrecht op den steel afgeslepen; in plaats van een ringetje van leer gedrenkt in was wordt als pakking een ringetje van fiber gebruikt. Deze verbinding is (evenals alle andere metaalverbindingen en als alle kranen) ter controle onder olie geplaatst op de wijze ingevoerd volgens Meded. N^o. 94*b*, Mei '05 (vergel. ook Meded. N^o. 97*a*, Dec. '06) door middel van een buisje aangebracht op de door *a* aangewezen plaats (Pl. II fig. 2 en Pl. I) op het deksel van den cryostaat waarin de dilatometer geplaatst is.

§ 3. *Methode II. Volumemeter.* De massa van het gas werd volumemetrisch bepaald. Wij hebben gebruik gemaakt van den nauwkeurigen volumemeter beschreven in Meded. N^o. 84 (Maart '03), die intusschen verschillende veranderingen heeft ondergaan ten behoeve van de proeven van KAMERLINGH ONNES en DE HAAS over de samen-drukbaarheid van den damp van waterstof bij zijn kookpunt en daar beneden, welke proeven weldra gepubliceerd zullen worden. Het reservoir tot het bereiden van mengsels (Meded. N^o. 84 Pl. II fig. 2), hetwelk men aan den toestel die voor de proeven van Meded. N^o. 88 (Sept. '03) en N^o. 92 (Juni '02) gediend heeft, vindt, was voor die proeven evenmin als voor de onze noodig en is dan ook van den toestel afgenomen. Het reserveglas *P'* (*P'* van N^o. 84 Pl. II fig. 2) is voorzien van een afzonderlijke kwikpeer Q_2 (Pl. I), en de capillair die dit reserveglas met den volumemeter *E* verbindt is zoo geconstrueerd dat het gas erin geheel door het kwik kan uitgedreven worden. Een tweede kraan k_1 was boven aan de vorkbuis tusschen den volumemeter en het reservoir *P'* aangebracht; wanneer men het gas van het reservoir *P'* in den volumemeter *E* overbrengt kan men het kwik boven de kraan k_2 van *P'* laten opstijgen en bij de volumemetrische metingen rekening houden met het volume kwik dat in k_1 — k_2 is opgestegen door den stand van het kwik op eene verdeling die op de gecalibreerde capillair is aangebracht, af te lezen.

Door het reservoir *P'* op deze wijze te construeeren was het groote voordeel verkregen dat de metingen bijna altijd zoo konden geschieden, dat de schadelijke ruimten, gevormd door het gedeelte van den volumemeter dat boven het niveau (§ op pl. I) van het bad waarin deze geplaatst is, uitsteekt, en door de volumes tusschen

den volumenometer en de kranen van de toestellen die ermede in verbinding gesteld worden (b.v. k_4 en k_5 op pl. I), (en gewoonlijk ook de dilatometer met dat deel van het te meten gas, dat er in overblijft nadat men het grootste deel in den volumenometer heeft overgebracht) bij de berekening der massa's, die men meet, slechts met lage drukkingen voorkomen, zoodat hunne temperatuur niet zoo nauwkeurig behoeft bepaald te worden. Inderdaad kan men bijna al het te meten gas in het reservoir F' , dat te voren leeggepomp en met kwik gevuld is, overbrengen, en blijft er, wanneer men zich bij die bewerking van den volumenometer als van eene pomp bedient, in de schadelijke ruimten slechts gas met een zeer kleinen druk te meten over. Vervolgens brengt men, na den volumenometer door k_4 en k_5 leeggepompt te hebben, terwijl k_3 gesloten is, het gas hetwelk in F' bewaard was erin over, en meet men deze groote hoeveelheid bij eene temperatuur, die met groote nauwkeurigheid bekend is.

De verbindingsbuizen tusschen de manometerbuis M en het groote reservoir R waarin men een druk gelijkaan (of zoo men wenscht een weinig verschillend van) den atmosferischen heeft verwezenlijkt, de vacuumpomp en de barometer waren ook voor den genoemden arbeid een weinig gewijzigd. O.a. bestaan de verbindingen daar waar een vacuum aangebracht wordt uit slijpstukken of zijn zij uit glas aaneengeblazen, zoodat het mogelijk is over den geheelen volumenometer volumina bij alle drukken tusschen 0 en iets meer dan een atmosfeer te meten. Verder kan men nu een verbinding tusschen het bovengedeelte van de manometerbuis en de volumenometer buis tot stand brengen. Hierdoor zijn controlemetingen mogelijk wanneer de druk boven het kwik in de twee gedeelten van den toestel, die dan voor het kwik twee communicerende vaten vormen, gelijk is, en in het bijzonder ook wanneer deze 0 is; daarbij moeten dan afgezien van correcties de kwikmenisci op dezelfde hoogte zijn. Eene andere controlemeting is de bepaling van den barometerstand, die men op *Bar* (Pl. I) alleest, door boven het kwik in den volumenometer een vacuum aan te brengen. Deze controlemetingen stellen in staat te oordeelen over de nauwkeurigheid der gegevens, die voor de correcties noodig zijn. Het gebruik hetwelk van de klemmen l_1, l_2, l_3, l_5 en van de kranen k_1, k_2, k_3, k_4, k_6 en l_7 (de twee laatsten waren gedurende een gedeelte der proeven vervangen door klemmen) voor de volumenometrische bewerkingen en in het bijzonder voor de zooeven vermelde controlemetingen gemaakt werd, behoeft geen nadere beschrijving. Vermelden we nog dat twee stukken hout waren aangebracht, waardoor men door middel van twee schroeven de caoutchoubuis kan samenknijpen ten einde het

kwik iets te doen stijgen en zoo volgens de methode van RAYLEIGH goed afleesbare kwikmenisci op de gewenschte plaats te verkrijgen, waarvoor ook van de klemmen kan worden gebruik gemaakt. Voor meerdere bijzonderheden betreffende den volumemeter en de bewerkingen daarmede verwijzen we naar de genoemde verhandelingen, en de in § 3 aangekondigde Mededeeling.

De volumemeter is beneden de streep 0 tweemaal gecalibreerd, eens voor de proeven behandeld in Meded. N^o. 92 en N^o. 88, de tweede maal voor de reeds genoemde proeven van KAMERLINGH ONNES en DE HAAS. De verschillen tusschen de twee calibraties zijn minder dan $\frac{1}{200000}$. We hebben ermede rekening gehouden dat de temperatuur van het bovenste gedeelte van den volumemeter (boven het niveau ξ) verschilt van die van het bad van E . Dit volume heeft sinds Meded. N^o. 92 voor het bovengenoemde onderzoek eene wijziging ondergaan, de volumes x en x' boven de streep 0 zijn door ons gecalibreerd. We hebben ook de schadelijke ruimten k_1-k_2 , $k_3-k_4-k_5$ met behulp van den volumemeter zelf gecalibreerd. Daarbij is o.a. rekening gehouden met het aantal slagen dat een kraan bij het openen gedraaid wordt. Door de algemeene toepassing van bovengenoemde methode om slechts een lagen druk in die ruimten over te laten, is de kennis van hun inhoud met de op die wijze te bereiken nauwkeurigheid slechts bij uitzondering noodig.

De druk van het gas, waarvan het volume bepaald wordt door den kwikmeniscus in den volumemeter op een der hiervoor bestemde strepen in te stellen wordt gegeven door het hoogte verschil tusschen het kwikniveau in den volumemeter en in de manometerbuis M vermeerderd met de barometerhoogte, wanneer gelijk bij al onze metingen het geval was, de manometerbuis in verbinding staat met het reservoir R op constanten druk. Deze barometerhoogte werd in Bar gemeten. (Zie voor deze methode de Meded. N^o. 60, Juni 1900, en N^o. 84.) Gewoonlijk wordt bij het instellen van het evenwicht tusschen M en E de kraan k_{13} geopend; bij het overgaan tot de allezingen sluit men deze. Soms tijds trekt men, om beter te kunnen instellen of aflezen, partij van k_{13} om den druk in R eenige centimeters hooger of lager dan den atmosferischen in te stellen.

§ 4. *Gang der proeven, hulptoestellen.* De volumemeter staat door de kraan k_5 in verbinding met het stevig opgestelde T -stuk met kranen, hetwelk den dilatometer en den volumemeter onderling en met de toestellen verbindt, waar de zuurstof onder hoogen druk kan bewaard worden, nl. het cilindrisch reservoir P_1 en den hulpcompressor A (de glazen buis die de zuurstof boven het kwik bevat is aangeduid met A_2).

Langs k_{4a} , k_4 , k_5 kunnen alle apparaten leeggepompt worden, wat bij gesloten k_{5b} en e_5 natuurlijk geschiedt voordat de metingen begonnen worden en voordat de zuurstof van het reservoir P_1 in de buis A_2 gelaten wordt. Wanneer de druk in het reservoir P_1 hooger is dan de maximum-spanning van zuurstof bij de temperatuur van den dilatometer, hetgeen bij zeer lage temperaturen bijna steeds het geval is, kan men de zuurstof van uit het reservoir P_1 eenvoudig in den dilatometer overdistilleeren, en met behulp van de kranen de vloeistof in den verdeelden steel van den dilatometer op het gewenschte punt instellen. De hulpcompressor stelt in staat in te stellen wanneer de druk in het reservoir P_1 lager is dan die van de vloeibare zuurstof in den dilatometer. Inderdaad wanneer de hulpcompressor in verbinding staat met den dilatometer d in Cr door de kranen k_8 , k_7 , k_6 , bij gesloten k_5 , k_9 , vormt deze een piezometer zooals bij de bepalingen der isothermen (zie Meded. N^o. 97a, Pl. I en N^o. 69, Pl. I en II) gebruikt wordt, en kan men, nadat de zuurstof door k_{5b} , k_5 , k_8 erin gelaten is, door het kwik met behulp van samengeperste lucht op te drijven (vergel. met de plaat van deze Meded. de aangehaalde van Meded. N^o. 97a, waarin dezelfde letters zijn gebruikt, wier beteekenis in dezelfde Meded. gevonden wordt) de zuurstof in den dilatometer d overbrengen totdat, door zuurstof te laten in- of uitstroomen de gewenschte instelling verkregen is. Men kan verkrijgen dat men terzelfder tijd het kwik in den verdeelden steel A_1 ziet door naar behoefte zuurstof naar P_1 te laten stroomen. De hulpcompressor die vóór het inbrengen van het kwik luchtledig gepompt was dient ook om met behulp van een metaalmanometer (zie Pl. I), die met den open manometer van Meded. N^o. 44 of met den gesloten manometer van Meded. N^o. 78 IV vergeleken is ¹⁾, gebruik makende van het peilglas met schaal C_4 (zie Pl. I) de dampspanning van de vloeibare zuurstof in den dilatometer af te lezen. Men doet deze bepaling terwijl de meniscus zich in het midden van het dilatometerreservoir d_b (iig. 2) bevindt, en verzekert zich ervan dat het evenwicht, hetwelk aan de stabiliteit van den meniscus in A_1 beoordeeld wordt, bij denzelfden druk intreedt, wanneer in den dilatometer slechts eene zeer kleine hoeveelheid vloeistof is overgebleven; hieruit blijkt dan, dat de temperatuur voor den geheelen dilatometer dezelfde is, in het bijzonder wat betreft den appendix en het midden van het bad, waar de temperatuur gemeten wordt.

Het cilindrische koperen reservoir P_1 met kraan k_{5b} is van het model hetwelk in het cryogene laboratorium geregeld gebruikt wordt;

¹⁾ Gaarne betuigen wij hier onzen dank aan den Heeren Dr. C. DORSMAN en G. HULST, die dit werk met veel zorg verrichtten.

het heeft een kleinen manometer P_2 die door zijn druk de hoeveelheid gas die nog in het reservoir aanwezig is aanwijst. Door het reservoir in vloeibare lucht te dompelen (zie P_3 op de Plaat) kan men door distillatie de zuurstof die voor de metingen gediend heeft weer erin terugbrengen. Van de ruimte $k_3—k_{3b}$ maakt men gebruik om bepaalde kleine hoeveelheden gas aan P_1 te ontleenen.

Wij verwijzen naar Pl. I van Meded. N^o. 97*a* (Dec. 1906) en de gedetailleerde beschrijving in Meded. N^o. 94*d* (Juni '05) voor de inrichting van den cryostaat *Cr* (Pl. I van deze Meded., met dezelfde letters als in Meded. N^o. 97*a*) en voor den cyclus van vloeibaar gemaakt gas voor het geval dat met vloeibare zuurstof onder gereduceerden druk als bad gewerkt wordt. Voor het geval dat de temperaturen worden verkregen met behulp van baden van methaan of ethyleen is de inrichting in beginsel dezelfde. De plaats die in de zoeven genoemde onderzoeken door den piezometer werd ingenomen, was nu ingenomen door den dilatometer *d*. In plaats van een enkelen weerstandsthermometer als in Meded. N^o. 94*d* hebben wij twee weerstandsthermometers¹⁾ van platina gebruikt, elk met vier toeleidingsdraden en van het model uitsluitend geconstrueerd (Meded. N^o. 99*b* § 2) van platina en glas; de zeer dunne platinadraad was op den glaseylinder gewonden terwijl deze verhit werd totdat hij een weinig week begon te worden; de platina-einddraden waren in het glas ingesmolten en ieder van deze in de blaasvlam aan zijn twee toeleidingsdraden, eveneens van platina, aangesmolten.

In ons geval bestond het vat van den cryostaat uit een dubbelwandig geevacueerd doorzichtig glas. Het was omgeven door een doorzichtig vacuumglas gevuld met vloeibare lucht om de verdamping te verminderen ten einde altijd beneden in den cryostaat de laagste temperatuur te hebben. Dit laatste glas werd door een glas met alcohol, waarvan de temperatuur boven die van de kamer gehouden werd, tegen het neerslaan van vocht beschermd, (vergl. bv. Meded. N^o. 108).

Wanneer het evenwicht in den dilatometer verkregen is, dat voor eene meting gewenscht wordt, en bij blijvend evenwicht de temperatuur gemeten is, wordt de kraan k_3 gesloten, de volumenometer en de schadelijke ruimte luchtledig gepompt (bij gesloten k_7) en daarna het gas uit den dilatometer in den volumenometer opgevangen.

De temperatuur van den volumenometer wordt constant gehouden door een stroom water geleverd door een thermostaat beschreven

¹⁾ De weerstandsthermometers waren gecalibreerd door MEVR. DE HAAS—LORENTZ, die ook de temperatuurmetingen heeft uitgevoerd. Gaarne betuigen wij haar onzen hartelijken dank voor de zorg hieraan besteed.

Meded. N^o. 70. Thermometers met aan de proeven voor elke meting aangepaste nauwkeurigheid waren aangebracht op de plaatsen aangeduid door θ_A in het bad, θ_B . . . gebonden tegen de buizen enz., en zooveel mogelijk tegelijk met deze met eene gemeenschappelijke laag wol omhuld.

De volumenometer, de manometerbuis, daarnaast eene schaal, en de twee beenen van den barometer *Bar* zijn zoo rondom een kathetometer met drie kijkers (Med. N^o. 60) opgesteld dat zij achtereenvolgens kunnen afgelezen worden door eenvoudig den kathetometer om zijne as te draaien. Ten einde de instelling gemakkelijk te verkrijgen zijn de barometer en de schaal op tafeltjes (Med. N^o. 95*e*) geplaatst die door middel van schroeven in horizontale richtingen bewogen en ten opzichte van de verticaal versteld kunnen worden. Electriche lampen die dienen om verticaal bewegelijke schermplaten met spleten achter de menisci, of andere punten met behulp van spiegels, te verlichten, zijn passend aangebracht en worden achtereenvolgens met een kruik dicht bij den kathetometer, van waar ook de schermplaten op de gewenschte hoogte gebracht worden, aangestoken. Wij verwijzen verder wat de bij de metingen genomen voorzorgen betreft naar de meergemelde Mededeelingen.

§ 5. *Berekening der proeven, correcties.* De dilatometer is gecalibreerd met kwik, tot welk doel er tijdelijk onder aan d_a (Pl. II. fig. 2) een fijne glazen kraan met capillair, die men in een bakje met kwik laat dompelen, was aangesmolten: wij hebben rekening gehouden met het volume van den meniscus volgens Meded. No. 67 (Juni 1901). Voor het meerendeel der menisci is het voldoende dezen als een holsegment te beschouwen. De correctie voor de uitzetting van het glas is aangebracht volgens Meded. N^o. 95*b*. De instellingen van de vloeistof in den steel van den dilatometer zijn te corrigeeren voor de vloeistof in den ringvormigen tegen het glas opgeheven meniscus. Ten einde deze correctie aan te brengen hebben we in het begin den pijl door schatting in het micrometrisch oculair of door meting met behulp van den micrometerdraad van dat oculair bepaald. De basis van den meniscus is echter zeer moeilijk te fixeeren. Ten slotte hebben we gebruik gemaakt van de resultaten die men verkrijgt door grafisch den vorm van den meniscus volgens de wetten der capillariteit te berekenen¹⁾.

Ten einde uit de massa van het gas in den dilatometer tot aan

¹⁾ De Heer DE HAAS, wien wij daarvoor gaarne onzen dank brengen, heeft zich wel met deze berekeningen willen belasten.

kraan k_6 die van het gas hetwelk de vloeistof, waarvan we zoeven het gecorrigeerde volume hebben gevonden, geleverd heeft af te leiden, moet rekening gehouden worden met de gasmassa's in de schadelijke ruimten van de nauwe capillair, van het kleine gedeelte d_{73} , en van de staalcapillair d_g die de glasecapillair met de kraan k_6 verbindt.

De temperaturen in de verschillende deelen van de nauwe glasecapillair hangen van den stand van het niveau van het bad af. Hiermede rekening houdende zijn zij ontleend aan de metingen der isothermen, in het bijzonder aan die behandeld in Meded. N^o. 97*a*.

De drukkingen die bij de proeven optreden, zijn steeds die van den verzadigden damp. Zij zijn voor het meereendeel der metingen bepaald op de wijze als in § 4 uiteengezet. Voor de temperaturen bij welke de dichtheid van den verzadigden damp klein genoeg is om door berekening gevonden te kunnen worden, zijn de dampspanningen geïnterpoleerd met behulp van de zoeven vermelde metingen en de vroegere bepalingen van Meded. N^o. 107*a*.

Bij gegeven temperaturen en drukkingen zijn de dichtheden in de verschillende deelen van de schadelijke ruimte, nu de isothermen van zuurstof voor de lage temperaturen nog niet bepaald zijn, berekend door uit te gaan van de formule voor de gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking VII,1 volgens Suppl. N^o. 19, pp. 17 en 18, rekening houdende met noot 1, Comm. N^o. 97*a* p. 24, gegeven door verg. III van Meded. N^o. 74, met verwaarloozing van de termen na ξ .

Daarbij is gebruik gemaakt van

$$t_k = -118^{\circ}.8, \quad p_k = 50.8$$

$$T = t + 273.09 \quad \mathfrak{B} = \frac{B_A}{T k^2} p k \frac{1}{A_{A_0}^2}, \quad \xi = \frac{C_A}{T k^3} p k^2 \frac{1}{A_{A_0}^3}$$

$$A_{A_0} = 1 - (B_{A_0} + C_{A_0} \dots)$$

waarin A_{A_0} , B_{A_0} , \dots zijn de waarden van A_A , B_A , \dots , bij $0^{\circ} C$,

$$A_A = (1 + a_{AV} t) A_{A_0}, \quad a_{AV} = 0.0036618$$

$$p v_A = A_A + \frac{B_A}{v_A} + \frac{C_A}{v_A^2} + \dots$$

(Meded. N^o. 74). Daar het er om te doen is de dichtheden bij gegeven druk te berekenen, worden de laatste vergelijkingen omgezet (vergel. Comm. N^o. 92, II, p. 18 en N^o. 109, p. 7) in:

$$p v_A = A_A + B^{(p)} p + C^{(p)} p^2 + D^{(p)} p^3 + \dots$$

waar

$$B^{(p)} = \frac{B_A}{A_A}, \quad C^{(p)} = \frac{C_A A_A - B_A^2}{A_A^2}, \quad D^{(p)} = \frac{2B_A^3 - 3A_A B_A C_A}{A_A^3}$$

Men verkrijgt de dichtheden voor de gewone temperaturen op dezelfde wijze doch gebruik makende van de isothermen van Meded. N^o. 78. Deze laten niet wel toe C_A in de bovengenoemde vergelijking te bepalen; andererseits zijn de isothermen van AMAGAT (behandeld Meded. N^o. 71) onzeker wat betreft B_A . Wij ontleenen daarom aan VII. 1 de waarde van C_A en vervolgens aan de isothermen van Meded. N^o. 78 B_A .

Uit VII. 1 vindt men

		B_A	C_A
bij	0° C.	— 0.82164 . 10 ⁻³	2.1255 . 10 ⁻⁶
	15.°6 „	— 0.70050 . 10 ⁻³	2.1221 . 10 ⁻⁶
	20.°0 „	— 0.66747 . 10 ⁻³	2.1238 . 10 ⁻⁶

Uit de individueele isothermen (Meded. N^o. 71 p. 10):

		B_A	C_A
bij	0° C.	— 0.9295 . 10 ⁻³	2.2931 . 10 ⁻⁶
	15.°6 „	— 0.7828 . 10 ⁻³	2.1925 . 10 ⁻⁶

waarden die niet veel verschillen van die afgeleid uit VII. 1.

Uit de isothermen van Meded. N^o. 78 verkrijgt men, zich beperkende tot de metingen bij de kleinste drukkingen (zoodat de term met C hoogstens 10% van die met B geeft):

		B_A
bij	0° C.	— 1.02843 . 10 ⁻³
	15.°6 „	— 0.86388 . 10 ⁻³
	20° „	— 0.87466 . 10 ⁻³ ,

welke waarden worden samengevat in de formule

$$10^3 \cdot B_A = - 1,02843 + 0,008942 t.$$

$$A_{1,0} = 1,00103.$$

Van deze formule is ook gebruik gemaakt bij het calibreeren van de staalcapillair $k_c - a$ met zuurstof onder hoogen druk met behulp van den hulpcompressor en den volumemeter.

Uit de formule van de gewone temperatuur wordt ook afgeleid de formule, die men noodig heeft om uit het volume gemeten in cm.^3 , uit den druk en uit de temperatuur van eene hoeveelheid gas gemeten in den volumemeter af te leiden het normaalvolume N (0°C. en 760 m.m.) van die hoeveelheid gemeten in cm.^3 . Men overtuigt er zich met behulp van de boven gegeven getallen gemakkelijk van dat in die omstandigheden C^p kan verwaarloosd worden, zoodat

$$N = A_{1,0} (1 + \frac{pV}{A_{1,0} t}) (1 + B^p p)^{-1}$$

voor welke formule alle gegevens in het boven behandelde gevonden worden. Passen wij haar toe om den spannings-coëfficiënt tussehen 0°C.

en 20°C voor zuurstof met een druk van 1 atm. bij 0°C. te vinden. Zij geeft 0.0036746, goed in overeenstemming met hetgeen JOLLY gevonden heeft¹⁾.

Voor de normale specifieke massa van zuurstof hebben we aangenomen het gemiddelde der waarden²⁾ van LEDUC, RAYLEIGH, en MORLEY: 0,00142876, 0,00142905, en 0,00142900, te weten: 0,00142894.

Voor de correcties die in de berekeningen der volumetrische metingen gevende p , V , t optreden, verwijzen we naar de aangehaalde Meded. N°. 84, 88, 92 en de § 3 aangekondigde mededeeling. De nauwkeurigheid der metingen is grooter dan die welke wij met onzen dilatometer konden bereiken, zoodat men de gegevens voor de massa's als zeker kan aannemen. Als voorbeeld geven we de volgende metingen, verkregen doordat elk van ons eenzelfde massa tweemaal gemeten heeft:

11 Nov.	1.74448	
12 „	1.74432	
	—	1.74440
11 „	1.74450	
12 „	1.74449	
	—	1.74449
		1.74444.

Omtrent eene nauwkeurigheid van $\frac{1}{4000}$ van de massa kan men vrij zeker zijn.

Ten einde te oordeelen over de nauwkeurigheid waarmede het evenwicht waarop de gemeten hoeveelheid betrekking heeft, verwezenlijkt wordt, hebben we bij de proeven over de dichtheid van den damp nadat het evenwicht zich had ingesteld en k_6 gesloten was, de temperatuur van den cryostaat een weinig veranderd totdat de vloeistof verdween en weer verscheen in den appendix. Eene temperatuurverandering van $\frac{1}{30}$ tot $\frac{1}{20}$ graad was voldoende om de vloeistofphase te doen verdwijnen. De absolute waarde der temperaturen is nauwkeurig tot op ongeveer $\frac{1}{20}$ graad, in een enkel geval (-210° C.) door onvoordeelige omstandigheden tot op $\frac{1}{3}$ graad.

§ 6. *Resultaten.* We vonden voor de dichtheid van de vloeibare zuurstof ρ_{liq} , voor die van den verzadigden damp bij dezelfde tempe-

¹⁾ De metingen van MAKOWER en NOBLE laten twijfel toe. Zij geven voor $p=0$: $\gamma=0.0036655$ in plaats van 0.0036618, dus eene waarde die zeker te hoog is.

²⁾ DANIEL BERTHELOT, Ztschr. f. Electrochem. 1904 p. 621.

ratuur q_{vap} en voor de ordinaat $D_z = \frac{1}{2} (q_{liq} + q_{vap})$ van den diameter de volgende waarden :

t	q_{liq}	q_{vap}	D_z (waarg.)	D_z (ber.)	$W-R$
210°.4 C.	1.2746	0.0001	0.6373	0.6373	0
— 182.0	1.1415	0.0051	0.5733	0.5730	+ 0.0003
— 154.51	0.9758	0.0385	0.5072	0.5107	— 0.0035
140.2	0.8742	0.0805	0.4773	0.4783	— 0.0010
129.9	0.7781	0.1320	0.4550	0.4550	0.0000
123.3	0.6779	0.2022	0.4400	0.4400	+ 0
120.4	0.6032	0.2701	0.4366	0.4335	+ 0.0031

De berekende waarde voor den diameter is ontleend aan de formule

$$D_z(ber.) = 0.1608 - 0.002265 t$$

De uitkomsten zijn op Pl. III grafisch voorgesteld.

Substitueert men in deze formule voor t de kritische temperatuur -118.8°C ., dan vindt men voor de kritische dichtheid $q_k = 0.4299$. Deze waarde is, vergeleken met q_{liq} bij $-210.^\circ\text{C}$., in goede overeenstemming met den *regel van het derde van de dichtheid*.¹⁾

Uit de absolute waarde van den richtingscoëfficiënt b_d van den diameter $D_z = a_d + b_d T$.

$$b_d = -0.002265$$

vindt men voor den gereduceerden richtingscoëfficiënt met $T_l = 273.1 - 118.8$:

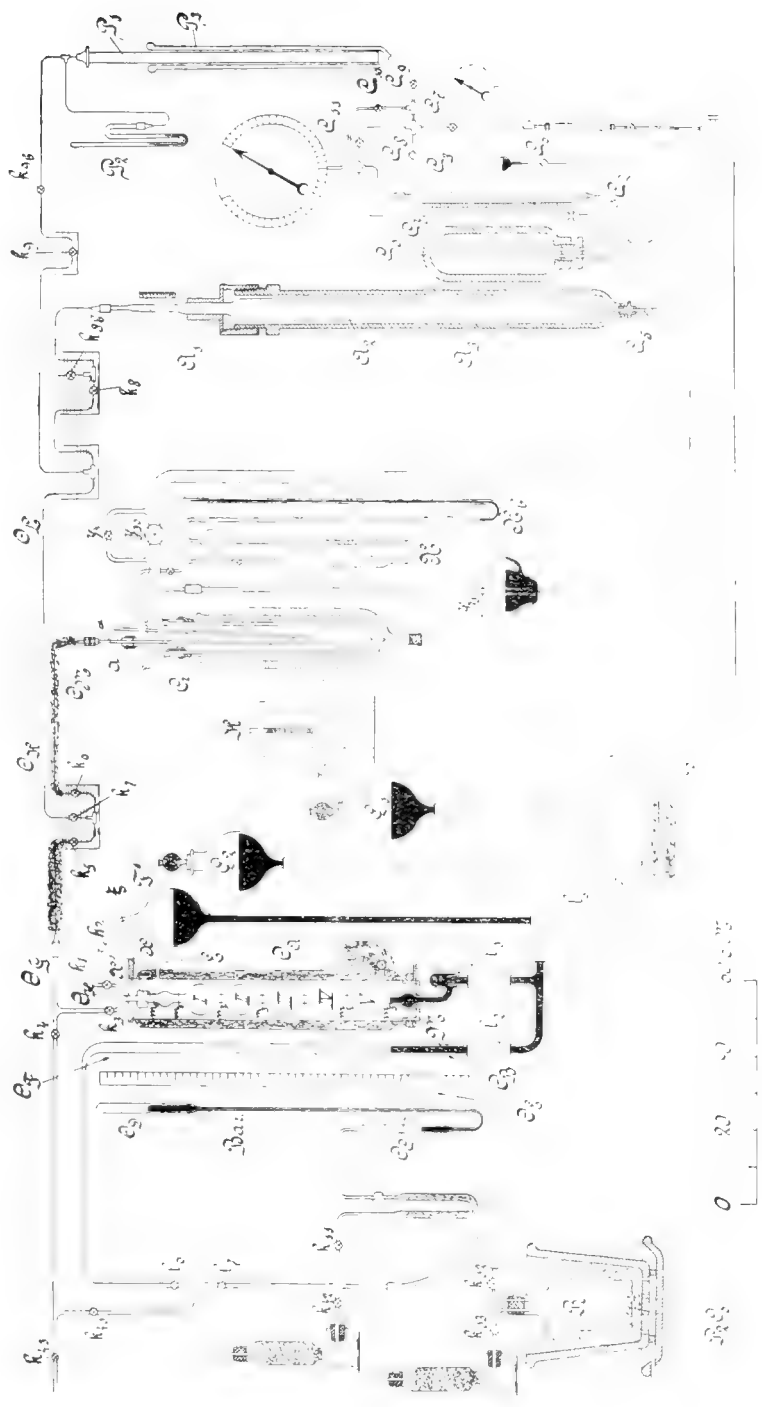
$$b_d \cdot \frac{T_k b_d}{q_k} = -0.813.$$

De afwijking waargenomen bij -154.5°C . (de dichtheid van den damp is berekend met behulp van de gemiddelde toestandvergelijking, zie § 5) is waarschijnlijk veroorzaakt door eene fout bij de bewerkingen, die we als mogelijk hebben kunnen opsporen, en die haar geheel zou verklaren. Wat betreft de temperatuur -120.4°C ., deze valt in het bijzondere gebied nabij den kritischen toestand, en zou bijgevolg op onze conclusie geen invloed kunnen hebben.

Wij komen dus tot deze slotsom dat de diameter van zuurstof tot een hoogen graad van benadering recht is. De dichtheden van de vloeistof bij de zeer lage temperaturen verschillen vrij weinig van die welke men uit de proeven van DEWAR eenerzijds, van BALY en DOXNAX anderzijds afleidt. Merkwaardigerwijze zijn de waarden, die wij vonden voor b_d , V_d en q_k bijna indientiek met de waarden

$$b_d = -0.002264, \quad V_d = 0.800, \quad q_k = 0.4387,$$

¹⁾ E. MATHIAS. Remarques sur le Théorème des états correspondants. Ann. de Toulouse t. V. 1891



Verslagen der Afdeling Natuurk. Dl. XIX A^o. 1910/11



die door een van ons (E. M.) in 1899 (l. c.) uit de metingen van WROBLEWSKI bij lage temperaturen werden gevonden.

Het verdient ten slotte zeker opmerking, dat voor het kritische viriaalquotient K_4 gevonden wordt

$$K_4 = \frac{RT_k}{p_c^2 v_c} = 3.346$$

een waarde kleiner dan die voor alle normale stoffen met hoogere kritische temperatuur (zie KUENEN, Zustandsgleichung, p. 60), voor welke de waarden van 3.4 tot 3.9 loopen, zoodat de waarde voor zuurstof meer dan alle deze nadert tot de waarde welke de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS geeft, nl. 2.67.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMÁN biedt eene mededeeling aan van den Heer F. E. C. SCHEFFER: „*Over de bepaling van driephasendrukkingen in het stelsel zwavelwaterstof-water.*”

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER WAALS).

1. Bij het onderzoek der systemen, waarin zwavelwaterstof een der componenten is, doet zich de moeilijkheid voor, dat eene chemische inwerking kan optreden op het kwik, dat het mengsel afsluit, wanneer het niet voldoende van bijmengselen is gezuiverd. In hoofdzaak zal deze inwerking aan de aanwezigheid van geringe hoeveelheden lucht moeten worden toegeschreven. Door zoo zorgvuldig, als bij de gebruikte methoden mogelijk was, de aanwezigheid van lucht (en water) uittesluiten, is het mij dan ook vroeger gelukt de ligging der driephasenlijnen in het stelsel zwavelwaterstof-ammoniak te bepalen. De methoden, welke bij dat onderzoek werden gebruikt, moesten berekend zijn op hoogen druk, daar mijn hoofddoel was de snijpunten van de kritische lijn en de driephasenlijnen, de kritische eindpunten te bepalen. Ik heb daarbij tevens terloops gelegenheid gevonden de gedaante der ruimtefiguur van het genoemde stelsel bij lagere temperatuur te bepalen; de waarnemingen bij deze lage temperaturen en de daarmee corresponderende lage driephasendrukkingen konden, hoewel kwalitatief volkomen voldoende, natuurlijk slechts op geringe nauwkeurigheid aanspraak maken, vooral, omdat de drukkingen werden afgelezen op een metaalmanometer, welke tot 250 atmosferen aanwees en welke beneden ongeveer 20 atmosferen slechts globale waarden kan geven en omdat de langzame evenwichtsinstelling bij deze lage drukkingen een groote relatieve fout kan veroorzaken.

Ik heb nu getracht voor het onderzoek bij drukkingen beneden 20 atmosferen eene gewijzigde methode te vinden, welke nauwkeuriger resultaten kon opleveren; het is mijne bedoeling hier eene beschrijving van deze methode te geven en de bruikbaarheid daarvan niet aan het systeem zwavelwaterstof-ammoniak te demonstreeren, daar dit slechts eene herhaling van vroegere waarnemingen zou opleveren, welke niet tot nieuwe gezichtspunten aanleiding zou geven¹⁾, maar toe te passen op een ander stelsel met zwavelwaterstof als component, namelijk het systeem zwavelwaterstof-water. Zooals uit de volgende beschrijving zal blijken, treedt ook tusschen vochtige zwavelwaterstof en kwik, althans beneden 30°, geene inwerking op, wanneer de aanwezigheid van lucht zorgvuldig wordt uitgesloten.

2. *Bereiding der mengsels.*

Voor het bereiden van een zwavelwaterstof-watmengsel werd de toestel gebruikt, welke in figuur 1 is afgebeeld. De zwavelwater-

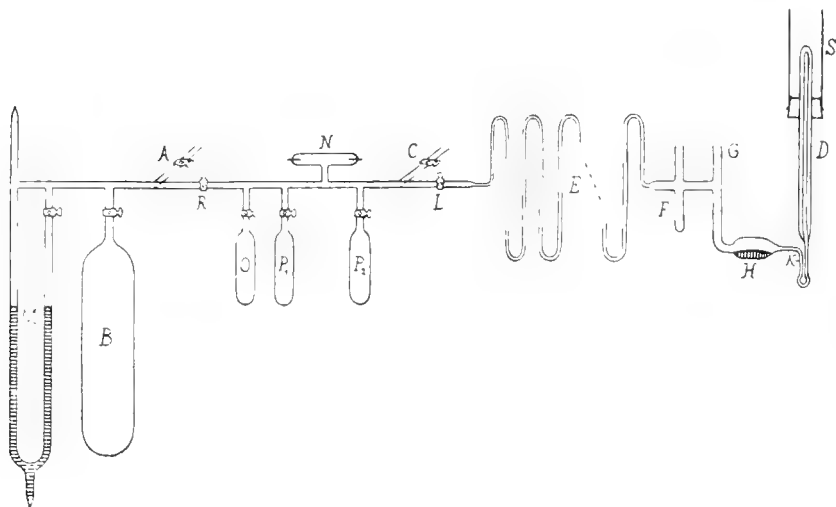


Fig. 1.

stof werd bereid uit eene oplossing van natriumsulfide, welke koolzuurvrij was, en verdund zwavelzuur; de eerstgenoemde oplossing werd verkregen door natron, welke door toevoegen van barietwater van haar koolzuur was ontdaan, met zwavelwaterstof te verzadigen.

¹⁾ Deze waarnemingen zullen spoedig in het Zeitschrift für physikalische Chemie verschijnen. Alleen zij hier medegedeeld, dat eene inwerking van zwavelwaterstof op kwik niet meer werd waargenomen en dat bijvoorbeeld eene verkleining van volume onder driephasendruk tot op de helft eene drukstijging gaf, welke gewoonlijk minder, in één geval iets meer dan 0,1 atmosfeer bedroeg; deze afwijkingen hebben ongeveer dezelfde grootte als de waarnemingsfouten.

Het aldus bereide gas werd door phosphorpenoxyde gedroogd en door de kraan *A* (fig. 1) in het geëvacueerde vat *B* geleid; het werd vervolgens door condenseeren in *O* van lucht bevrijd door middel van de beide vaten P_1 en P_2 , welke met kokosnootkool waren gevuld; *O*, P_1 en P_2 waren daartoe in vloeibare lucht geplaatst. Bleven nu in de Geisslersche buis *N* de ontladingen geheel uit, dan werd de zwavelwaterstof uit *O* door verdampen weer in het reservoir *B* teruggebracht. Het in de buizen van den toestel tusschen *M* en *L* achtergebleven gas kon dan door openen van kraan *C* met een waterstraalpompe worden weggezogen.

De Cailletetbuis *P*, welke voor dit onderzoek, waar de drukkingen 25 atmosferen niet overtroffen, van gewoon glas was gemaakt en een vrij groot lumen kon bezitten (5 m.M.), was door samensmelten met een glazen veer *E* aan het overige gedeelte van den toestel verbonden.

In het reservoir *H* werd nu door *G* eene hoeveelheid uitgekookt kwik gebracht, welke voldoende was om de geheele proefbuis *D* te vullen; na dichtsmelten van *G* werd *F* van een weinig gedistilleerd water voorzien en het boven-einde van deze buis eveneens dichtgesmolten. Het water werd nu in *F* bevroren en de proefbuis met waterstraalpompe (kraan *C*) en kool (P_1 en P_2) geëvacueerd. Na sluiten van kraan *L* kon nu het water uit *F* naar het met vloeibare lucht (vat *S*) afgekoelde boven-einde van de proefbuis worden overgedestilleerd.

Een hoeveelheid zwavelwaterstof werd uit *B* in den toestel tusschen *M* en *L* toegelaten met geopend vat *O*; met behulp van de manometer *M*, welks rechter been geëvacueerd was, kon deze hoeveelheid ruw worden geschat. Ook dit gas werd door openen van *L* in het boven-einde van de proefbuis vastgelegd.

Wanneer ik me daarna overtuigd had, dat in de proefbuis geen lucht aanwezig was (ontlading in *N*) werd door kantelen van de Cailletetbuis het kwik uit *H* in het U-vormig onder-einde van de proefbuis overgebracht en door openen van de kranen *C* en *L* door de buitenlucht tot boven in de proefbuis opgeperst. De Cailletetbuis werd nu bij *K* van den toestel gescheiden en in de met gezuiverd en uitgekookt kwik gevulde persbus overgebracht.

Op deze wijze werkende is de aanwezigheid van lucht vrijwel geheel uitgesloten en komt het mengsel slechts met een geringe hoeveelheid zuiver kwik in aanraking; een contact met niet volkomen luchtvrij kwik en caoutchoucheverbindingen werden hierbij dus geheel vermeden.

3. *Druk- en temperatuurbeoordeling.* Een cilindervormig, aan de

onderzijde konisch vernauwd vat werd met behulp van een kurk op de Caillietbuis bevestigd en met water gevuld. De verwarming geschiedde elektrisch; de temperatuur werd met behulp van een gloeilampenweerstand geregeld en op een met een normaalthermometer vergeleken Anschützthermometer afgelezen. Het roeren geschiedde in het waterbad door middel van vertikaal op en neer bewegende loodplaten; in de proefbuis door een roerdertje volgens KREKEN; de daartoe benodigde electromagnetische klos werd vertikaal bewogen om het verwarmingsvat heen.

Voor het bepalen van den druk gebruikte ik twee luchtmanometers, waarvan de ééne een minimumdruk van ongeveer 3, de andere van ongeveer 8 atmosferen aangaf. De fouten der methode blijven op deze wijze beneden 0.1° en 0.1 atmosfeer (fouten van de manometer

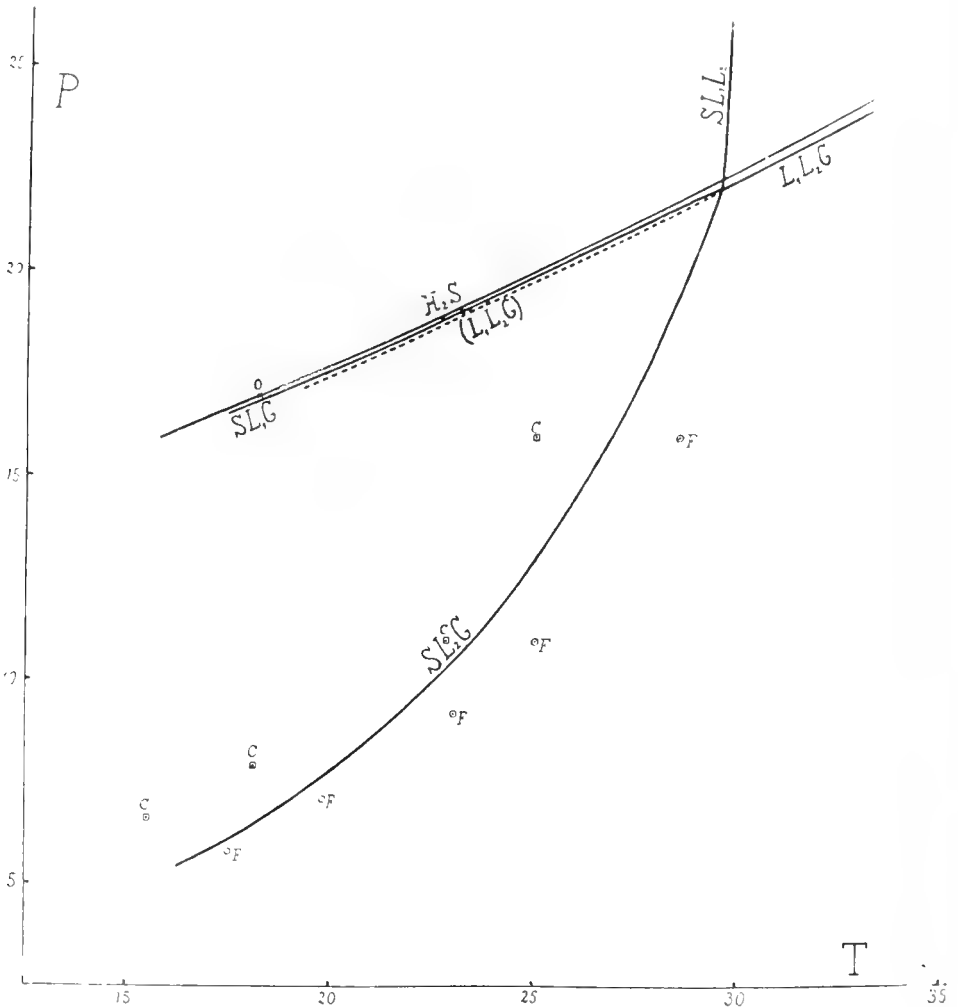


Fig. 2.

en standverschil tusschen het kwik in de proefbuis resp. manometer en in de persbus); de fouten, welke bij de bepaling der driefaselijnen kunnen worden gemaakt, blijken uit de overeenstemming der resultaten meestal op ongeveer 0.1 atmosfeer te kunnen worden geschat; ik kom hierop echter bij de bespreking der resultaten terug.

4. *Resultaten.* In fig. 2 is de P - T -projectie van de ruimtefiguur weergegeven. In de eerste plaats zien we hierin de dampspanningslijn van zwavelwaterstof getoekend, welke reeds vroeger door verschillende waarnemers werd bepaald. Evenals bij mijne vroegere bepalingen betreffende het systeem zwavelwaterstof-ammoniak, kon ik ook nu weer constateeren, dat de waarden, welke door REGNAULT aangegeven werden, te hoog zijn; de afwijkingen variëren in het door mij onderzochte temperatuurgebied tusschen 0.8 en ruim één atmosfeer. De eenige waarde, welke door OLSZEWSKI in het door mij onderzochte traject werd bepaald, vertoont minder dan 0.1 atmosfeer afwijking van de mijne en is door de letter O in de grafische voorstelling aangegeven, de afwijkende waarden van REGNAULT heb ik in de figuur ter wille der duidelijkheid weggelaten.

De zwavelwaterstof vertoont bij isotherme compressie op een vierde van het totaalvolume minder dan 0.1 atmosfeer drukverandering, terwijl ook de druk, waarbij de laatste hoeveelheid damp verdween van die bij het grootst mogelijke volume minder dan 0.1 atmosfeer verschilde.

Onmiddellijk beneden deze lijn treden in de P - T -projectie twee driefaselijnen op, waarvan de eene de coëxistentie van het zwavelwaterstofhydraat naast eene zwavelwaterstofrijke vloeistof en damp aangeeft en de tweede de evenwichten tusschen twee vloeistofflagen en damp. De eerstgenoemde driefasenlijn (SL_1G) geeft over het geheele traject stabiele toestanden; de andere (L_1L_2G) beneden 29.5° metastabiele, daarboven stabiele evenwichten. De isotherme drukverschillen tusschen deze beide driefaselijnen en de bovengenoemde kooklijn van zwavelwaterstof zijn zeer klein en komen, wat grootteorde betreft, dicht bij de waarnemingsfouten; toch meen ik uit het groote aantal waarnemingen, in de tabel aangegeven, met zekerheid te mogen concludereen, dat de drukkingen op de driefasenlijn SL_1G grooter zijn dan die op L_1L_2G en dat de kooklijn van zwavelwaterstof hooger ligt dan beide.

Ook van theoretisch standpunt bekeken lijkt deze volgorde de meest waarschijnlijke; indien immers het vloeistof-dampvlak van de zwavelwaterstof naar de waterkant voortdurend daalt, zullen de driefasendrukkingen bij eene bepaalde temperatuur beneden de maximumspanning van vloeibare zwavelwaterstof liggen en zal (beneden 29.5°)

de metastabiele L_1L_2G -lijn lager moeten liggen dan de stabiele SL_1G -lijn; we kunnen dit o. a. reeds hieruit inzien, dat de vloeistof L_1 bij de coëxistentie L_1L_2G , daar ze metastabiel is, oververzadigd moet zijn t. o. v. het hydraat en dus waterrijker moet zijn dan de vloeistof L_1 op de driefasenlijn SL_1G .

De mogelijkheid, dat op het vloeistof-dampvlak een lijn van maximumdruk voorkomt, is van te voren natuurlijk niet uittesluiten,

$LG(H_2S)$		L_1L_2G		SL_1G		SL_2G		
T	P	P	T	P	T	P	T	P
15		16.38 R						
15.8	15.9+		19.4	17.3	17.4	16.6	15.5	6.6 C
15.9	16.0-; 16.0+		19.8	17.4	18.4	17.0-	16.3	5.3-
16.0	16.0		20.6	17.8-	18.7	17.05	17.5	5.8 F
16.2	16.1		20.8	17.9-	19.0	17.2	17.9	6.3-
17.0+	16.5-		21.2	18.0; 18.0	19.9	17.6-	18.4	7.9 C
17.6	16.7		21.4	18.15; 18.2	20.9	18.0-	19.7	7.6
17.8	16.8-; 16.8-		22.8	18.85	21.2	18.1+	19.8	7.1 F
18.2		16.95 O	23.0	18.95	21.8	18.4+	21.0	8.6+
19.0	17.3-		23.65	19.3-	22.9	18.9+	22.8	11.0 C
20		18.62 R	24.6	19.7+	23.65	19.3	23.0	9.2 F
20.4	17.9+		24.8	19.85; 19.8-	23.8	19.35	23.3	10.7
21.2	18.25		25.1	20.0-	24.1	19.5+	24.8+	12.9
22.0	18.65		25.4	20.0-	26.0	20.5	25.0	11F; 16C
23.6	19.4+		25.6	20.1-	26.6	20.7-	25.6	14.0-
24.9	20.0+; 20.1-		25.8	20.2; 20.3-	27.2	21.0+	27.4	17.1
25		21.07 R	26.4	20.6	27.3+	21.05	28.5	19.5+; 16 F
25.4+	20.3-		26.9	20.75	28.2	21.5+	29.2	21.3+
25.8	20.5-		27.5	21.0+	28.8	21.8	SL_1L_2	
26.1	20.6+		28.0	21.3-	29.4	22.1		
26.2	20.7-		28.2	21.4	T		P	
27.5	21.3		28.4	21.5+				
29.6	22.35		29.4	21.75	29.8		32	
30		23.73 R	29.2	21.9-				
30.6	22.9		30.3	22.45	Quadrupelpunt			
31.6	23.4+		31.0	22.9-	T 29.5 ; P 22.1+			
31.6+	23.45		31.2	22.9+	R = REGNAULT O = OLSZEWSKI C = CAILLETET en BORDET F = DE FORCRAND			
33.4	24.45		32.0	23.4				
			32.7	23.8+				
			33.2	24.0+				

vooral omdat in dit systeem eene verbinding optreedt en bovendien stellig één der componenten (H_2O) abnormaal is. Zelfs schijnt het hier nog mogelijk, dat onmiddellijk aan den zwavelwaterstofkant eene dergelijke lijn van maximumdruk voorkomt: deze moet dan echter liggen bij concentraties, welke kleiner zijn dan de gas- en vloeistofconcentraties op de beide driephasenlijnen; dit lijkt echter vooralsnog niet waarschijnlijk en ik heb dit in de P - x -doorsnede (fig. 3) dan ook niet in aanmerking genomen.

De beide driephasenlijnen $S L_1 G$ en $L_1 L_2 G$ snijden elkaar in het quadrupelpunt ($29,5^\circ$; 22,1 atm.); de beide andere driephasenlijnen, welke door dit punt gaan, waar respect. vast hydraat naast twee vloeistofflagen ($S L_1 L_2$) en naast waterrijke vloeistof en damp ($S L_2 G$) voorkomt, zijn ook in de grafische voorstelling aangegeven.

De voorgaande tabel geeft een overzicht van de waarnemingen der besproken evenwichtslijnen. (Zie p. 1062).

5. Met behulp der bovenstaande gegevens is in fig. 3 schematisch

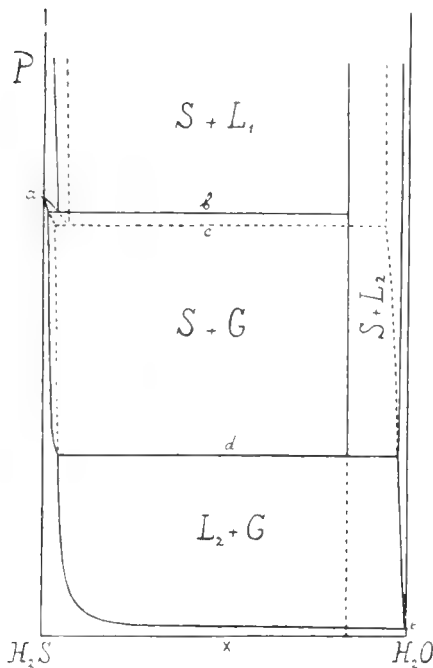


Fig. 3.

een P - x -doorsnede aangegeven, welke voor ongeveer 20° door de ruimtefiguur is aangebracht. We hebben hierbij aangenomen, zooals reeds boven werd vermeld, dat het vloeistof-dampvlak van de eerste naar de tweede component voortdurend daalt; het punt a , de maximumspanning van vloeibare zwavelwaterstof ligt hoger dan de stabiele driephasenlijn $S L_1 G$ (b) en de metastabiele $L_1 L_2 G$ (c)¹⁾. De andere evenwichtslijnen en de in de figuur aangegeven gebieden zullen zonder verdere omschrijving duidelijk zijn. Alleen wil ik hierbij de aandacht vestigen op het feit, dat het hydraat in deze doorsnede beneden de driephasenlijn $S L_2 G$ (d) niet meer stabiel kan

¹⁾ Alle metastabiele evenwichtslijnen zijn door stippellijnen aangegeven.

waarnemingen van de FORCRAND¹⁾ en van CAILLETET en BORDET²⁾ betrekking hebben op deze driephasenlijn, daar zij drukkingen hebben bepaald, die noodig waren voor de vorming van het hydraat; tevens wordt het dan duidelijk, dat deze drukking, zooals de FORCRAND aangeeft³⁾ onafhankelijk is van de mengverhouding, wat immers door de fasenregel voor dit driephasen-evenwicht wordt vereischt. Ik heb hunne waarnemingen zoowel in de tabel onder SL_2G als in de $P-T$ projectie van fig. 2 door de letters C en F aangegeven; mijne waarnemingen blijken tusschen beide in te liggen. De vrij groote afwijkingen tusschen de drie lijnen moeten m. i. hieraan worden toegeschreven, dat de vorming van het hydraat bij samenpersing en het smelten bij uitzetting langzaam verloopt; in het eerste geval vindt men te hooge, in het tweede te lage drukking. Mijne waarnemingen van deze driephasen-evenwichten heb ik verricht door bij constante drukking langzaam op te warmen en de temperatuur te bepalen, waarbij de transformatie $S \rightarrow L + G$ optreedt; het bleek, dat deze wijze van werken nauwkeuriger uitkomsten levert dan die, waarbij de transformaties bij isotherme volumeverandering worden waargenomen.

Terwijl de evenwichten op de andere driephasenlijnen zich bij constante temperatuur van zelf instellen en de afwijkingen 0.1 atmosfeer slechts zelden overtreffen, meen ik de nauwkeurigheid van de waarnemingen op de lijnen SL_2G en SL_1L_2 op 0.1 à 0.2° te moeten schatten⁴⁾.

In de P,p -doorsnede liggen de gasphase G en de vloeistofphase L_1 op de drie driephasenlijnen aan den zwavelwaterstofkant; uit enkele oriënteerende proeven bleek nu, dat de vloeistofphase L_2 dicht aan den waterkant ligt, m. a. w. dat het gebied van de ontmenging zich bijna over de geheele breedte der figuur uitstrekt.

Ten slotte zij hier nog in het kort iets over de samenstelling van het hydraat medegedeeld. Uit de opgaven uit de literatuur is deze niet met zekerheid af te leiden. DE FORCRAND, die talrijke analyses van het hydraat heeft verricht, achtte achtereenvolgens $H_2S.15H_2O$, $H_2S.12H_2O$ en $H_2S.7H_2O$ de meest waarschijnlijke formule. De zeer slechte overeenstemming der analyseresultaten schrijft DE FORCRAND

¹⁾ DE FORCRAND. C.F. **94** 967 (1882); DE FORCRAND EN VILLARD C.F. **106** 849 (1888).

²⁾ CAILLETET EN BORDET. C.F. **95** 58 (1882).

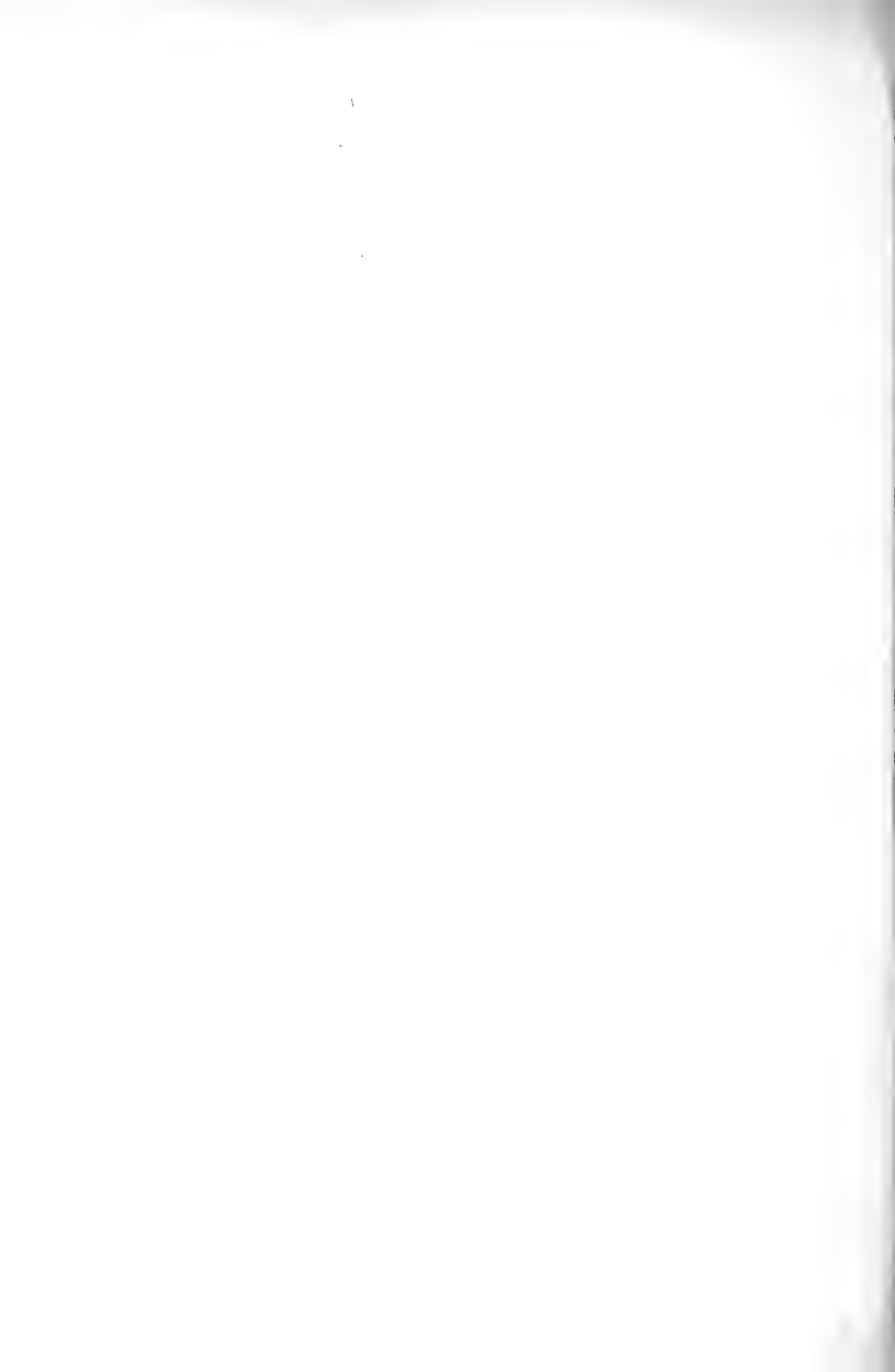
³⁾ DE FORCRAND. C.F. **94** 967 (1882).

⁴⁾ Ook de waarneming van SL_1L_2 geschiedde door bij langzame verwarming bij constanten druk de temperatuur te bepalen, waarbij de transformatie $S \rightarrow L_1 + L_2$ optreedt.

terecht hieraan toe, dat het hydraat gemakkelijk water ingesloten houdt. Wanneer men verder bedenkt, dat het hydraat bij de atmosferische drukking slechts beneden 0.35° bestendig is en dat dus eene vorming van het hydraat bij atmosferischen druk slechts zonder ijsvorming mogelijk zal zijn tusschen 0° en 0.35° , dan zal het duidelijk zijn, dat men hier zijn toevlucht moet nemen tot bijzondere analysemethoden. Ik zal eene beschrijving van een hiervoor bruikbare methode tot eene volgende mededeeling uitstellen; slechts zij hier vermeld, dat zelfs de later door DE FORCRAND op theoretische gronden afgeleide formule $H_2S.6H_2O$ hoogstwaarschijnlijk nog te groote hoeveelheid water bevat.

Voor de bibliotheek wordt aangeboden door den Heer W. H. JULIUS een overdruk van zijne verhandeling in „Le Radium” van 1910 getiteld: „*Les raies de Fraunhofer et la dispersion anormale de la lumière.*”

De vergadering wordt gesloten.



KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 25 Februari 1911.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 1068.
Jaarverslag der Geologische Commissie over 1910, p. 1069.
A. F. HOFFMAN, J. C. HARFOGS en T. VAN DER LINDEN: „Over de nitratie van anilien en van eenige anilieden”, p. 1070.
M. W. BELJERING: „Pigmenten als oxydatieproducten door bacteriën gevormd”, p. 1092.
E. HEKMA: „Over een bevorderenden invloed van Calciumchloride en van darmwand-extract op de Trypsine-werking”. (Aangeboden door de Heeren H. J. HAMBURGER en C. A. PEKELHARING), p. 1104.
H. J. HAMBURGER en F. BEBANOVIC: „Over het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in het bijzonder voor Alkali- en Aardalkalimetalen”, p. 1114.
J. G. DUSSER DE BARENNE: „De strychninewerking op het centrale zenuwstelsel”. (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en L. BOLK), p. 1115.
F. L. BERGANSIUS: „Een nieuwe formule om den coëfficiënt van zelfinductie voor lange solenoiden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen”. (Aangeboden door de Heeren W. H. JULIUS en W. KAPTEYN), p. 1133.
L. RUTTEN: „Over Orbitoiden uit de omgeving der Balik Iapan-baai (Oostkust van Borneo)”. (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en MAX WEBER), p. 1143. (Met één plaat).
J. SCHMITZER: „Over de oriëntering van kristaldoorsneden”. (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en J. CARDINAAL), p. 1161.
J. SCHMITZER: „Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak in een willekeurige kristalsnede”. (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en J. CARDINAAL), p. 1165.
J. SCHMITZER: „Over de vaststelling van de richting van een onbekend vlak uit zijne trace in twee georiënteerde kristalsneden”. (Aangeboden door de Heeren C. E. A. WICHMANN en J. CARDINAAL), p. 1176.
H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Isothermen van éénatomige stoffen en van hunne binaire mengsels. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden”, p. 1177. (Met één plaat).
H. KAMERLINGH ONNES: „Verdere proeven met vloeibaar helium”, p. 1187. (Met drie platen).
Aanbieding van een Boekgeschenk, p. 1208.
Errata, p. 1208.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Kennisgevingen van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. H. WIND, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Een gedrukte uitnoodiging van den Rektor en den Senaat der Koninklijke Frederiks-Universiteit te Christiania tot het zenden van één afgevaardigde der Akademie bij de feestelijke herdenking van het 100-jarig bestaan dier Universiteit op 5 en 6 September a.s.

3°. Een gedrukte uitnoodiging van den Rektor en den Senaat der Koninklijke Universiteit te Breslau tot het zenden van een vertegenwoordiger der Akademie bij de feestelijke herdenking van het 100-jarig bestaan dier Universiteit op 1—3 Augustus a. s.

De Voorzitter verzoekt de leden, die bij een dezer of bij beide feesten de Akademie zouden willen vertegenwoordigen, daarvan mededeeling te doen aan den Secretaris vóór 1 Juni a. s.

4°. Van het Bestuur der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Turijn een gedrukt programma der VALLAURI-prijzen, volgens de testamentaire beschikking van wijlen het lid dier Akademie THOMAS VALLAURI door haar uit te reiken o. m. aan dien geleerde, zonder onderscheid van nationaliteit, die in het tijdvak 1 Januari 1915—31 December 1918 zal hebben in het licht gegeven het meest belangrijke en het meest bekende werk op het gebied der natuurkundige wetenschappen (Sciences physiques), dit begrip genomen in den meest uitgebreiden zin des woords. De prijs groot 26000 livres italiennes zal worden uitgereikt een jaar na de toekenning.

5°. Van het Bestuur der „Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto” te Bologna een gedrukt programma van een prijsvraag voor eene verhandeling over de kritisch-historische methode voor de ontwikkeling van de theorie der elliptische functies van het einde der 18^{de} eeuw tot heden. Voor het beantwoorden dier prijsvraag, vóór 31 December 1912 te geschieden, wordt een prijs uitgelooft van L. 500.

Beide programma's worden ter kennisname voor de leden beschikbaar gesteld.

Aardkunde. — De Heer DE BRUYN leest het Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1910, hetwelk luidt als volgt:

In den loop van dat jaar heeft de Heer Dr. J. M. VAN BEMMELEN wegens hoogen leeftijd en den minder goeden staat van zijn gezondheid ontslag genomen als lid van de commissie. In de vergadering van 26 November j.l. herdacht de Voorzitter der afdeling de groote verdienste, die de Heer VAN BEMMELEN als lid en secretaris voor de commissie heeft gehad. Daarna is het lid H. E. DE BRUYN als waarnemend secretaris opgetreden.

In den loop van het jaar waren twee leden onzer commissie, Dr. K. MARTIN en Dr. G. A. F. MOLENGRAAFF, achtereenvolgens gedurende geruimen tijd afwezig wegens hun verblijf in Nederlandsch-Indië.

Geen mededeelingen omtrent grondboringen of terrein-insnijdingen werden ons gedaan.

Dr. H. VAN CAPELLE heeft zijn verslag over de boring te Klazina-veen en over zijn onderzoek van het keileem in het oostelijk diluviaal gebied van Friesland ingezonden. Dit stuk is, evenals dat van Dr. LORIÉ, in het vorig verslag vermeld, gedrukt en opgenomen onder de „Mededeelingen omtrent de Geologie van Nederland”, als N^o. 36 en 37.

Aan den Heer Dr. J. F. STEENHUIS te Groningen is door onze Commissie opgedragen een rapport op te maken over hetgeen in verschillende Mededeelingen van wege onze Commissie is verzameld omtrent de kennis der Geologie van Nederland.

Aan den Heer A. E. VAN GIFFEN was door ons opgedragen aan zijn onderzoek omtrent vele terpen in Nederland nog toe te voegen een onderzoek omtrent den grondslag van enkele terpen bij Purmerend. Door zijne studie voor het doctoraalexamen en andere bezigheden was hij daarin tot nu toe verhinderd. Hij hoopt dat echter van het jaar te doen. Een verhandeling over de daling van den bodem in verband met bestudeering der terpen door hem vroeger onderzocht heeft hij gepubliceerd in het „Tijdschrift voor Geschiedenis, Land- en Volkenkunde”.

Van Prof. J. A. GRUTTERINK te Delft is in het afgelopen jaar tot ons leedwezen nog niet ontvangen het rapport omtrent de kaartteering van twee strooken in Nederland. Het rapport is echter nagenoeg gereed: van de kaarten van elk der verschillende bladen dier strooken, zijnde een kaart zooals die definitief zou worden, een kaart met aanduiding der boringen, beide op een schaal van 1 à 25000

en een kaart op een schaal van 1 à 50000 om te kunnen oordeelen over de te kiezen schaal, hebben wij enkele ontvangen. In den loop van Mei a.s., heeft de Heer Prof. GRUTTERINK ons toegezegd, het rapport en de kaarten van al de bladen, gelijkelijk bewerkt, te zullen zenden. Omtrent deze belangrijke aangelegenheid hopen wij dus in dit jaar een voorstel te kunnen doen.

Ten slotte hebben wij de eer U voor te stellen aan Dr. H. VAN CAPELLE den dank der Akademie te betuigen voor zijn medewerking.

Het aanvragen van een toelage voor het jaar 1912 vermeenen wij niet te mogen voorstellen. Voor de kaarteering van Nederland geen terreinwerkzaamheden kunnende laten doen, met het oog op den stand van dit vraagstuk, vermeenen wij met de gelden voor dit jaar toegestaan aan de overige behoeften geheel te kunnen voldoen.

De Geologische Commissie:

C. LELY. *Voorzitter.*

H. E. DE BRUYN, *Secretaris.*

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN doet, mede namens de Heeren J. C. HARTOGS en T. VAN DER LINDEN, eene mededeeling: „*Over de nitratie van anilien en van eenige anilieden*”.

Voor zooverre dit uit de chemische literatuur is op te maken, wijkt de nitratie van anilien en van zijne acylderivaten sterk af van de nitraties, die tot nu toe meer nauwkeurig zijn bestudeerd. Terwijl toch bij dit proces in het algemeen werd geconstateerd, dat door verandering van de omstandigheden der proef slechts betrekkelijk geringe wijzigingen kunnen worden teweeg gebracht in de verhouding, waarin de isomeren ontstaan, is hier eene sterke wijziging dier verhouding mogelijk. Zoo wordt b.v. voor de nitratie van acetanilied opgegeven, dat men het geheel in de hand heeft om hierbij nagenoeg uitsluitend para- of ortho-nitracetanilied te verkrijgen.¹⁾ En terwijl men b.v. in benzoeëzuur allerlei wijzigingen aan de carboxylgroep kan aanbrengen, zonder dat een nieuwe substituent daardoor in de kern eene andere plaats gaat innemen, heeft men anilien slechts in sulfaat over te voeren, om het type der substitutie van para-ortho in meta-para te veranderen. Het was daardoor van bijzonder belang, de nitratie

¹⁾ Literatuuroverzicht, zie in mijn werk: „Die Einführung von Substituenten enz.” bl. 138 vlgg.

van anilien en van zijne acylderivaten aan een nauwkeurig, systematisch onderzoek te onderwerpen. Nadat de heer HARTOGS zich hiernede had bezig gehouden ¹⁾ bleek het noodzakelijk zijne waarnemingen nog met andere aan te vullen teneinde een meer volledig inzicht in deze ingewikkelde reactie te verkrijgen. Deze verdere proeven zijn door den heer VAN DER LINDEN verricht. Het bleek hierbij, dat de oorspronkelijk door den heer HARTOGS ¹⁾ en ook door mij verdedigde verklaring van het verschijnsel niet houdbaar was. Ik kom daar later op terug, nadat eerst een kort overzicht der proefnemingen is gegeven.

Analyse der nitratieprodukten.

Hiervoor werd door den heer HARTOGS de methode VALETON gebezigd, (zie deze Verslagen, Deel **18**, 755), waaraan de door laatstgenoemde bepaalde stolpuntskrommen der binaire mengsels, uit *o*-, *m*- en *p*-nitrilien te maken, ten grondslag werden gelegd. Bij nader onderzoek bleek nu echter, dat genoemde krommen wel geheel voldoende waren om eene theoretische formule van VAN LAAR te verifiëren, zijnde het doel waarvoor VALETON hen had bepaald; maar dat zij niet de vereischte nauwkeurigheid bezaten, om uit een gevonden stolpunt de samenstelling van een nitratieprodukt met eene nauwkeurigheid van ca. 1% te bepalen. Dit was voornamelijk daaraan toe te schrijven, dat de heer VALETON niet van de volkomen zuivere nitrilanilienen was uitgegaan. De heer VAN DER LINDEN is dus begonnen, met de nitrilanilienen in volkomen zuiveren toestand te bereiden en heeft met deze een deel der stollijnen opnieuw bepaald, alsmede enkele gedeelten der ternaire stollijnen, daar hij bij de door hem verrichte analyses zijne eigene methode (Verslagen **18**, 751) aanwendde.

Door eene gelukkige omstandigheid zijn echter de door den heer HARTOGS gevonden cijfers niet waardeloos. Om nl. de hoeveelheid van een der componenten (stel b. v. *p*-nitrilanilien) te bepalen, voegde hij bij eene nauwkeurig afgewogen hoeveelheid van het nitratieproduct een groote overmaat van het te bepalen isomeer, natuurlijk ook weder in nauwkeurig bekende hoeveelheid. Daar het smeltvlak der isomere nitrilanilienen een ideaal smeltvlak is, kon hij nu (volgens de methode-VALETON) uit het beginstolpunt van zijn mengsel het para-gehalte, daarin aanwezig, afleiden en dus ook het para-gehalte van

¹⁾ Proefschrift. Amsterdam 1910.

¹⁾ Zie proefschrift HARTOGS bl. 35.

het nitratieprodukt vinden. Nu gebruikte de heer HARTOGS hierbij dezelfde praeparaten, die ook de heer VALETON voor de bepaling zijner stollijnen had gebruikt, van welke eene vrij groote hoeveelheid was bewaard gebleven. Hierdoor waren dus bij de bepalingen van den heer HARTOGS de stollijnen van den heer VALETON te gebruiken.

Indien de tweede stolpunten bij ternaire mengsels goed te bepalen zijn, verdient in het algemeen de methode-VAN DER LINDEN de voorkeur boven de methode-VALETON. Bij deze laatste toch moet aan het te analyseeren mengsel een overmaat van telkens een der componenten worden toegevoegd, ten einde te bereiken, dat het eerste stolpunt op een der twee (samenvallende) takken van den te bepalen component ligt. De heer HARTOGS b. v. voegde meestal de drie- tot viervoudige gewichtshoeveelheid van het te analyseeren nitratieprodukt van een der componenten toe. Hierdoor wordt eene kleine fout in de bepaling van het eerste stolpunt sterk vergroot op de te vinden waarde overgebracht. Bij de methode-VAN DER LINDEN daarentegen wordt althans één der stolpunten aan het onvermengde nitratieprodukt waargenomen. Men zal dus enkel dan de methode-VALETON aanwenden, als de bepaling der tweede stolpunten aanleiding tot moeielijkheden geeft.

De stolpunten, zooals die door den heer VAN DER LINDEN zijn bepaald, volgen hieronder. Zij werden alle met behulp van een apparaat waargenomen, dat de heer HARTOGS volgens het door THEELE aangegeven principe liet construeeren. (Zie fig. 1).

Stolpunten van ortho- + para-nitramilien.

% para.	Beginstolp.	Eindstolp.
100 %	148. ^o 3	—
85.6 „	138. ^o 0	—
71.5 „	126. ^o 5	—
59.4 „	115. ^o 0	—
49.3 „	104. ^o 0	—
30.0 „	—	56. ^o 6
25.0 „	—	56. ^o 6— 56. ^o 7
9.7 „	62. ^o 0	—
0.0 „	69. ^o 5	—

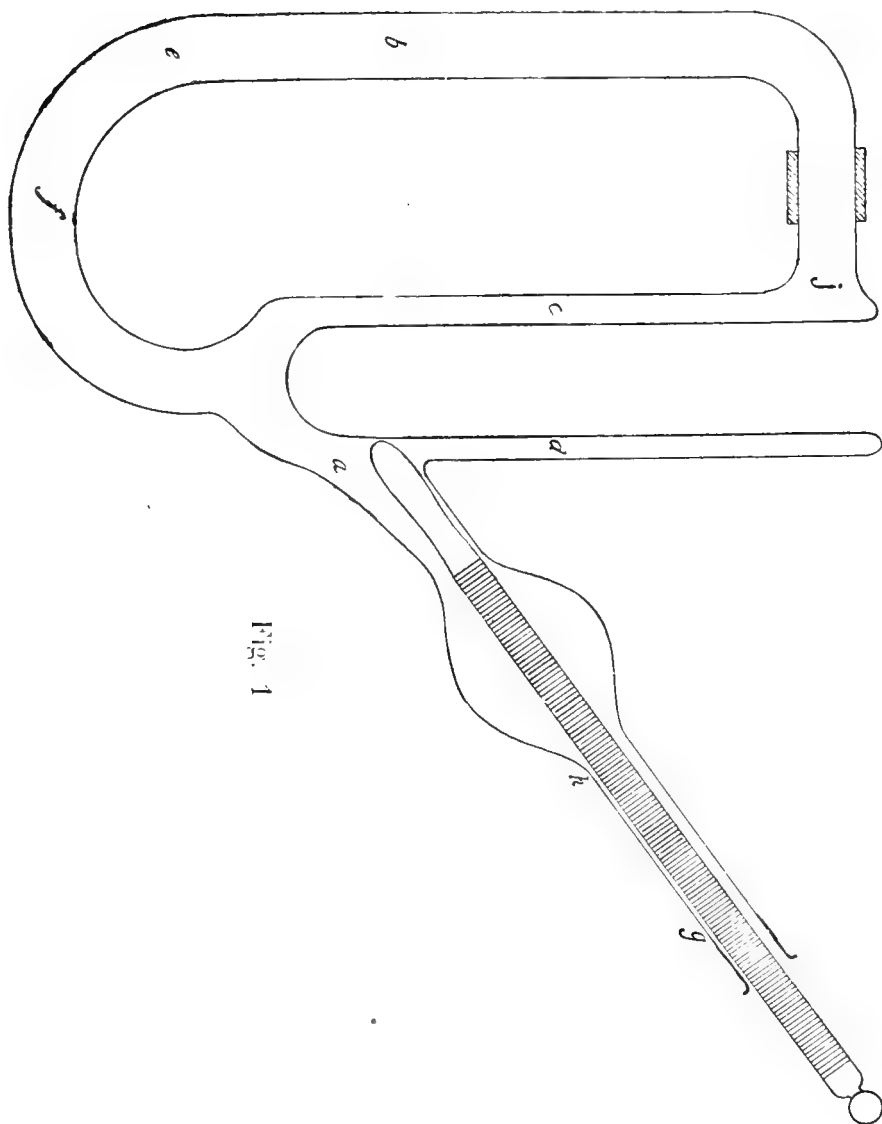


Fig. 1

Stolpunten van para- + meta-nitranilien.

„ Para.	Beginstolp.	Eindstolp.
100 %	148.°3	
84.3 „	136.°8	
74.8 „	129.°0	
60.3 „	115.°4	—
49.6 „	102. 2	89.°8—89.°9
30.3 „	94. 0	89.°8—89.°9
20.9 „	100.°3	89.°8—89.°9
10.2 „	106.°6	
0.0 „	112.°4	

Stolpunten van meta- + ortho-nitranilien.

% Meta.	Beginstolp.	Eindstolp.
100 %	112.°3	
84.9 „	103.°9	
72.1 „	95.°8	
60.1 „	86.°9	
49.8 „	77.°9	
39.7 „	66. 7	52. 2
30.0 „		52.°2
19.8 „	54.°4	
10.3 „	62.°1	
0.0 „	69. 5	

Lijn der 2^e stolpunten, aangevende de verhouding van ortho- tot meta-nitranilien. — Para-nitranilien kristalliseert bij het beginstolpunt uit:

% Meta.	% Ortho.	2e stolpunt.
100 „	—	89.°9
92.5 „	7.5 „	87.°0
84.7 „	15.3 „	83.°7
—	—	—
14.9 „	85.1 „	47.°1
7.6 „	92.4 „	52.°4
0.0 „	100 „	56.°6

Zooals uit bovenstaande waarden blijkt, liggen deze door VAN DER LINDEN bepaalde stollijnen iets hoogers dan die van VALETON. De eutectische temperaturen van para-ortho en meta-ortho liggen zelfs 1° hooger.

Als bewijs dat de corresponderende stollijnen, geteekend op eenzelfde schaal langs elkaar vallen, dat we dus met ideale lijnen te doen hebben diene het volgende vergelijkende staatje:

$\frac{\circ}{\circ}$ Para.	Para-Ortho	Para-Meta.	Vershil.
90 $\frac{\circ}{\circ}$	141. \circ 1	141. \circ 0	+ 0. \circ 1
80 „	133. \circ 4	133. \circ 3	+ 0. \circ 1
70 „	125. \circ 1	124. \circ 5	+ 0. \circ 6
60 „	115. \circ 6	115. \circ 0	+ 0. \circ 6
50 „	104. \circ 8	102. \circ 6	+ 2. \circ 2
$\frac{\circ}{\circ}$ Meta.	Meta-Ortho.	Meta-Para.	Vershil.
90 $\frac{\circ}{\circ}$	106. \circ 7	106. \circ 7	0. \circ 0
80 „	100. \circ 8	100. \circ 8	0. \circ 0
70 „	94. \circ 2	94. \circ 3	- 0. \circ 1
$\frac{\circ}{\circ}$ Ortho.	Ortho-Para.	Ortho-Meta.	Vershil.
90 $\frac{\circ}{\circ}$	61. \circ 8	62. \circ 3	- 0. \circ 5

't Meest valt de schoone overeenkomst van de meta-ortho en de meta-para-lijnen in het oog, welke juist bij VALETON zeer slecht corresponderen.

Ten slotte werd nog een stuk van de stollijn 1, 2, 4-dinitranilien-para-nitranilien bepaald.

$\frac{\circ}{\circ}$ Di-nitranilien	Stolpunt.
100 „ „	179. \circ 5
89.6 „	169. \circ 5
79.8 „	159. \circ 4

Nitraties van anilien (uitgevoerd door den heer HARTOGS).

In de eerste plaats beproefde de heer HARTOGS, om *anilien te nitreren met salpeterzuur alleen*, daar verreweg de meeste onderzoekers deze nitratie in zwavelzuur hebben uitgevoerd en de enkelen, die salpeterzuur alleen gebruikten, enkel harsachtige producten verkregen. Doch de heer HARTOGS was hierin niet gelukkiger dan zijne voorgangers, hoewel hij bij -30° werkte en het anilien eerst in zijn nitraat omzette om de vormingswarmte van dit zout te elimineeren. Wel constateerde hij, dat bij het inbrengen van genoemd nitraat in reëel salpeterzuur bij lage temperatuur eene heldere, rood-gekleurde oplossing werd verkregen, maar alle pogingen faalden om daaruit meer dan eene kleine hoeveelheid krystallen te verkrijgen; verreweg het grootste deel van het reactieprodukt verharste. Met

behulp van een verdunningsmiddel was het resultaat niet veel beter; hiervoor werd propionzuur gekozen, omdat het nog bij zeer lage temperatuur vloeibaar is en door reëel salpeterzuur onder die omstandigheid niet wordt aangegrepen. Echter kon zoo ook nog geen 50% van de theorie aan zuivere nitranilinen verkregen worden.

Daarom nam de heer H. nu de *nitratie van anilien in zwavelzuur* ter hand. Telkens 3 gr. anilien werd in wisselende hoeveelheden zwavelzuur opgelost; deze vloeistof werd tot -20° afgekoeld en hierbij onder krachtig roeren in het verloop van 20—25 minuten de berekende hoeveelheid reëel salpeterzuur gedruppeld, die met haar viervoudig volume gewoon geconcentreerd zwavelzuur was verdund. Ook deze vloeistof was in een koudmakend mengsel (ijs + zout) afgekoeld. De nitratievloeistof werd op ca. 400 gr. ijs quantitatief uitgegoten en met vaste soda ($\text{Na}_2\text{CO}_3 \cdot 10 \text{ aq}$) langzaam geneutraliseerd. De vloeistof, waarin zich een deel der nitranilinen in vlokken verdeeld bevond, werd nu met chloroform zoolang uitgeschud, totdat dit kleurloos bleef. Na afdistilleeren van dit oplosmiddel werd het residu uit water omgekristalliseerd, dat bij 12° met de drie nitranilinen verzadigd was. De zoo verkregen kristallen werden ten slotte van sporen hars nog door eene distillatie onder zeer lage drukking ($> 1 \text{ mM.}$) bevrijd. Aan een mengsel der drie zuivere nitranilinen van bekende samenstelling, werd eerst bewezen, dat deze methode van opwerken bruikbaar is.

De eerste serie proeven had ten doel om de wijziging in samenstelling van het reactieproduct te bestudeeren, als het anilien in toenemende hoeveelheden zwavelzuur werd verdeeld, omdat volgens eene opgave van NÖLTING en COLLIN de verhouding, waarin de isomeren gevormd worden, van de hoeveelheid zwavelzuur afhankelijk zoude zijn. Onderstaande tabel geeft hiervan een overzicht. Deze bepalingen zijn door den heer VAN DER LINDEN volgens zijne methode verricht.

Nitratie van anilien in zwavelzuur. Temp. -20° .

Aantal c.c. geconc. zwavelzuur, waarin 1 gr. anilien was opgelost.	Samenstelling v/h. nitratieprod.			% opbrengst der theorie.
	ortho	meta	para	
5	1.4	47.9	50.7	75
20	2.1	46.6	51.3	94.5
	1.0	47.5	51.5	97
50	1.3	49.1	49.6	80

De waarneming van HÜBNER en FRERICHS¹⁾, dat bij deze nitratie *m*- en *p*-nitranilien „sehr reichlich“ ontstaan, *o*-nitranilien daarentegen „in verhältnissmässig geringer Menge“ wordt hier bevestigd. Evenzoo die van BRUNN²⁾, die bij aanwending der 6-8-voudige hoeveelheid zwavelzuur ongeveer gelijke hoeveelheden *m*- en *p*-nitranilien verkreeg. De door hem opgegeven hoeveelheid *o*-nitranilien (10—15%) is echter veel te hoog. Daarentegen bleek NOELTING en COLLIN'S³⁾ opgave onjuist, dat bij aanwending van de 50-voudige hoeveelheid zwavelzuur de *p*-verbinding in ondergeschikte hoeveelheid ontstaat. Praktisch is de verhouding, waarin zich de isomeren vormen, onafhankelijk van de hoeveelheid zwavelzuur, waarin het anilien wordt opgelost, want de verschillen die gevonden werden, zijn grootendeels wel als onvermijdelijke experimenteele fouten aan te merken. Indien de vorming van aniliensulfaat de reden is, waardoor deze verhouding der isomeren bij de nitratie te voorschijn komt, was ook wel niet anders te verwachten. Wordt n.l. 1 gr. anilien in 5 c.c. d. i. in ca. 9 gr. zwavelzuur opgelost, dan heeft men reeds eene verhouding van ca. 1 mol. anilien op ruim 8 mol. zwavelzuur. Hierbij komt nu nog druppelsgewijze een mengsel van 1 vol. salpeterzuur op 4 vol. zwavelzuur. Men mag dus veilig aannemen, dat reeds bij de oplossing in 5 c.c. zwavelzuur al het anilien tot het einde toe als sulfaat aanwezig is: a fortiori zal dit dus ook bij de oplossing in 20 en in 50 c.c. zwavelzuur het geval zijn.

Wordt echter vast aniliennitraat in zwavelzuur gebracht of genoemd nitraat eerst in 80% salpeterzuur opgelost en hierbij geconcentreerd zwavelzuur gedruppeld, dan zijn, volgens onderstaande bepalingen van den heer HARTOGS, de resultaten anders. De temperatuur werd weer op -20° gehouden.

Werkwijze.	conc. v h. zwavelzuur.	Samenstelling v/h. nitratieprod.			% opbrengst der theorie.
		ortho	meta	para	
3 gr. nitraat in 40 c.c. zwavelzuur.	95—96%	4	33	56	91%
	90%	4.5	39.5	56	92
2 gr. nitraat in 20 c.c. HNO ₃ van 80%; hierbij 40 c.c. H ₂ SO ₄ .	95—96%	5	32	62	91

Bij deze bepalingen moet worden opgemerkt, dat de heer HARTOGS

1) A. 208, 299 (1881).

2) B. 28, 1954 (1895).

3) B. 17, 261 (1884).

steeds alle drie isomeren experimenteel bepaalde, waardoor veroorzaakt wordt, dat de som der procenten niet juist op 100 uitkomt.

Door de nitraatvorming wordt het meta-gehalte in het produkt verlaagd, het para- en ortho-gehalte verhoogd.

Nitratie van formanilied (HARTOGS).

Deze werd verricht, doordien het vaste anilied bij kleine hoeveelheden tegelijk in afgekoeld salpeterzuur van verschillende concentraties gebracht werd. Na afloop van deze bewerking bevinden zich de nitroderivaten van het anilied in het zuur opgelost. Ter afscheiding van het reactieproduct werd deze sterk zure vloeistof op ijs quantitatief uitgegoten. De waterige zure vloeistof werd gedurende 2 uur bij 0° aan zichzelf overgelaten. Het ontstane praecipitaat werd afgezogen en met water tot verdwijning der zure reactie uitgewassen. Waschwasser en filtraat werden vereenigd en met chloroform uitgetrokken, totdat dit volkomen kleurloos bleef. De chloroformoplossing werd met eene verdunde soda-oplossing doorgeschud en daarna met water gewassen. Het oplosmiddel werd daarna afgedistilleerd en de vaste rest met het praecipitaat, bij het uitgieten op ijs verkregen, vereenigd.

Het zoo verkregen reactieproduct werd met éénprocentige natronloog verzeept en wel per gram nitratieproduct met 60 c.c. dier loog; zij was te voren bij 12° met de drie mono-nitranilienen en ook met 2—4-dinitranilien verzadigd. Het koken met de loog werd aan een opstijgenden koeler niet langer dan 10 minuten voortgezet, aangezien er bij lang koken ammonia ontwijkt. Door middel van een lakmoespapiertje werd steeds gecontroleerd, dat dit gas zich niet gevormd had.

Na de verzeeping werd de kolf den nacht over aan zichzelf overgelaten, op 12° afgekoeld, de afgescheiden nitranilienen afgefiltreerd, bij lage temperatuur gedroogd en ten slotte in hoog vacuum (>1 mM.) gesublimeerd. Op het dus verkregen product werd dan de analysemethode van VALETON toegepast. Dat deze methode van werken juiste resultaten oplevert, zal bij acetanilied (zie hieronder) bewezen worden.

De volgende proeven werden gedaan:

1. 5 gr. formanilied werd bij kleine hoeveelheden tegelijk in 50 c.c. salpeterzuur van 80 % gebracht. De temperatuur werd op —15° gehouden; de duur van het inbrengen was 20 minuten. Daarna werd op ijs gegoten en het reactieproduct, als boven beschreven is, opgewerkt. De opbrengst aan nitranilienen was slechts 27 % van de theorie; het onveranderde formanilied was bij de verzeeping van het nitratieproduct in mierenzuur en anilien gesplitst, welke beide in de waterige moederloog opgelost bleven.

2. De proef werd hier enkel zoo gevarieerd, dat de temperatuur op 0° werd gehouden en na het inbrengen van het formanilied nog 40 minuten gewacht werd vóór dat op ijs werd uitgegoten; het nitratieproces duurde dus in het geheel één uur. De opbrengst was thans 92% van de theoretische.

3. Door Dr. VAN DER LINDEN werd nog de volgende proef genomen: 3.37 gr. formanilied werden in 34 c.c. salpeterzuur van 80.3% gebracht, bij -20° . Het inbrengen duurde een half uur. Daarna werd de vloeistof nog $2\frac{1}{2}$ uur op -20° gehouden. Gedurende het inbrengen had de vloeistof eene donker bruine kleur aangenomen, die later weer verdween. Toen op ijs werd uitgegoten was de vloeistof lichtgeel. Bij het nitschudden van de zure vloeistof met chloroform bleef dit laatste zeer lang gekleurd. Vermoed werd, dat dit veroorzaakt wordt doordien er door den langen duur van het proces vrij nitranilien ontstaan was. Dit werd daardoor bevestigd, dat nadat de vloeistof zwak alkalisch was gemaakt, enkele extracties met chloroform voldoende waren, dit geheel kleurloos te doen blijven. Dat er eenige hars gevormd was bleek daaruit, dat het gewichtsverschil tusschen het omgekristalliseerde en in vacuo gesublimeerde produkt 95 mgr. bedroeg, terwijl dit anders slechts enkele mgr. is. De opbrengst was 83% van de theorie. Ook was het gesublimeerde mengsel der nitranilien veel sterker rood gekleurd dan gewoonlijk. Het beginstolpunt van het produkt was 119.6° , het tweede stolpunt 55.6° . Daar dit samenvalt met het eutektikum ortho- + para-nitranilien volgt daaruit de afwezigheid van meta-nitranilien.

4. 5 gr. formanilied werd bij kleine hoeveelheden tegelijk in 50 cc. salpeterzuur van 90% gebracht, dat op 20° tot -25° werd gehouden. De duur der bewerking was 20 minuten, waarna terstond werd uitgegoten. De opbrengst bedroeg 93% der theoretische.

5. 5 gr. formanilied werden in 50 c.c. recël salpeterzuur gebracht, dat onder -25° werd gehouden. Hierbij ontstond echter grootendeels dinitranilien.

Het resultaat der proeven 1—4 is in onderstaande tabel samengevat.

Nitreeing van formanilied; per gr. anilied 10 c.c. zuur

No.	temp.	conc. v. h. zuur	ortho	para	$\%$ der theor. opbr.	Duur der nitratie
1	-15°	86%	46%	60%	27%	20'
2	0	80	39	61	92	1 uur
3	-20	80	35.7	64.3	83	3 »
3a	-20	80	35.2	64.1	66.6	$2\frac{1}{2}$ »
4	-20	90	18.5	81	93	20

Uit deze tabel blijkt: 1o. dat de verhouding der isomeren onafhankelijk is van de opbrengst aan reactieprodukt, zooals theoretisch te verwachten is (Zie: die direkte Einführung enz. bl. 72).

2o. dat in een interval van 20° de verhouding der isomeren weinig verandert.

3o. dat de invloed van het watergehalte van het zuur zeer groot is, in tegenstelling met hetgeen meestal wordt waargenomen; en wel vermeerderd hier, door hooger gehalte van het nitreerzuur, sterk de hoeveelheid der para verbinding.

Ter vergelijking met de nitraties van anilien werden de acylanilienen door den heer v. D. LINDEN ook wat in zwavelzure oplossing genitreerd. Daar het hierbij verkregen produkt eenigszins geel gekleurd was, moet tijdens de bewerkingen een deel van het anilied verzeept zijn geworden; naar alle waarschijnlijkheid heeft dit echter eerst na de nitratie plaats gevonden, omdat de samenstelling van het nitratieprodukt geheel anders dan die is, welke in bovenstaande proeven bij de nitratie van anilien werd verkregen. De temperatuur werd bij deze nitratie op -20° gehouden. De hoeveelheid salpeterzuur was de berekende.

Nitrecring van formanilied in zwavelzuur van 96% Temp. -20° .

c.c.H ₂ SO ₄ per 1 gr. anilied	Samenstelling v.h. nitratieprod.			% der theor. opbrengst	duur der nitratie
	ortho	meta	para		
5	3.0	0.8	96.2	87.5	$\pm 45'$
20	5.1	1.3	93.6	47.8	35'

De gevonden hoeveelheid meta-nitranilien is zeer gering en ligt op de grens der bepaalbaarheid. Het resultaat is dus, dat thans nagenoeg uitsluitend de nitratie naar de *p*-plaats geschiedt.

Nitratie van acetanilied (HARTOGS).

Deze werd op geheel analoge wijze als de nitratie van formanilied uitgevoerd, ook het opwerken van het nitratieprodukt en zijne analyse had op geheel overeenkomstige wijze plaats. Deze werd hier echter met een mengsel van bekende samenstelling gecontroleerd door Dr. v. D. LINDEN. Hij ging uit van een mengsel bevattende 60.1% para-, 29.9 ortho- en 10.0 meta-nitraceetanilied. Na de sublimatie in vacuo woog het mengsel der nitranilienen 2.97 gr., terwijl er voor berekend wordt 3.0 gr.; de opbrengst was dus 99%.

Van dit mengsel werd zoowel volgens de methode-VALETON als

volgens de methode v. d. LINDEN de samenstelling bepaald, waarbij de volgende resultaten werden verkregen.

Samenstelling		Gevonden volgens meth.	
v. h. mengsel.		VALETON	v. d. LINDEN.
para	60.1	62.4	61.0
ortho	29.9	30.3	30.0
meta	10.0	10.0	9.0

Hieruit blijkt, dat de methode ter bepaling van de samenstelling der nitratieprodukten, zooals die boven (bl. 1078) is beschreven, inderdaad goede uitkomsten geeft, vooral volgens de methode VAN DER LINDEN.

De volgende proeven werden gedaan :

1. 5 gr. acetaanilied werd bij kleine hoeveelheden in eens in 50 c.c. salpeterzuur van 80% gebracht. De temperatuur werd tusschen -2° en $+1^{\circ}$ gehouden. Na 20 minuten was al het acetaanilied er ingebracht, doch werd het nitratiemengsel daarna nog 40 minuten op 0° gehouden.

2. Door Dr. VAN DER LINDEN werd de volgende proef nitgevoerd: 5 gr. acetaanilied werd in 50 c.c. salpeterzuur van 80.3% gebracht, waarbij de temperatuur op -20° werd gehouden. Het inbrengen duurde 50 minuten, waarna de vloeistof nog 2 uur 10' op -20° werd gehouden en toen eerst uitgegoten.

3. 5 gr. acetaanilied werden in 50 c.c. salpeterzuur, maar nu van 90% gebracht. Duur van het inbrengen 25 minuten. Twee minuten later op ijs uitgegoten.

4. De proef 3 herhaald.

5. Nitratie met réeel salpeterzuur: 5 gr. gebracht in 40 c.c. zuur; duur der bewerking 30 minuten, temperatuur -20° tot -25° . Hierbij werd (evenals bij formanilied) hoofdzakelijk dinitroprodukt verkregen, naast 13% *p*-nitraceetaanilied. Het resultaat der nitratie is hier (evenals bij formanilied) sterk afhankelijk van den tijdsduur der reactie, zoodat bij langer staan wel uitsluitend dinitroprodukt zal gevormd worden.

In onderstaande tabel zijn de verkregen resultaten samengevat.

Nitratie van acetaanilied; per gr. anilied 10 c.c. zuur.

No.	Temp.	Conc. v.h. zuur	ortho	para	% der theor. opr.	Duur der nitratie
1	0°	80%	41.5	58	92%	1 uur
2	-20	80.3	40.7	59.3	75	3 >
3	-20	90	23.5	75.5	94	27'
4	-22	90	24.5	75.5	92	20'

De opmerkingen, over deze tabel te maken, zijn geheel dezelfde als die bij de nitratie van formanilied zijn medegedeeld.

De nitratie van acetanilied in zwavelzuur van 96 % gaf de volgende resultaten (VAN DER LINDEN).

c.c.H ₂ SO ₄ per 1 gr. anilied	Samenstelling v h. nitratieprod.			% der theor. opbr.	duur der nitratie	Temp. -20°
	ortho	meta	para			
5	4.5	—	95.5	99.1	60'	}
20	1.8	0.6	97.6	95.4	35'	

Ook hier ontstaat dus, onder den invloed van zwavelzuur, nage-
noeg uitsluitend de para-verbinding.

Nitratie met diacetylorthosalpeterzuur (CH₃CO.O)₂N(OH)₃
van Pictet (HARTOGS).

5 gr. acetanilied werd in 50 c.c. van genoemd zuur gebracht. Temperatuur + 0.°5. Duur der bewerking 30'. Daarna nog 30' aan zichzelf bij 0° overgelaten. Na uitgieten in water werd 4.5 gr. acetanilied onveranderd teruggewonnen. Diacetylsalpeterzuur nitreert dus onder bovenstaande omstandigheden het acetanilied niet.

Nitratie van acetanilied door middel van acetylnitraat CH₃CO.ONO₂
(HARTOGS, VAN DER LINDEN).

Door PICTET¹⁾ werd acetanilied, in tetrachloorkoolstofoplossing, genitreerd met acetylnitraat, waarbij hij uitsluitend ortho-nitraceetanilied verkreeg. Het scheen ons wenschelijk deze proef te herhalen en het nitratieprodukt quantitatief te analyseeren. Er werd eene nitratie zoowel met het onverdunde acetylnitraat gedaan (*A*), waarin bij — 20° het acetanilied langzaam werd gebracht, als met de oplossing van het anilied in tetrachloorkoolstof (*B*). Gebruikt werd bij *A* op 5 gr. acetanilied 50 c.c. acetylnitraat, bij *B* op 4.9 gr. anilied 3.8 gr. acetylnitraat (d.i. de theoretische hoeveelheid) opgelost in 50 c.c. CCl₄.

De verkregen produkten, op de gebruikelijke wijze opgewerkt, hadden de volgende samenstelling:

Proef.	Verhouding der isomeren.			% opbrengst der theorie.
	ortho	meta	para	
<i>A</i>	76.7	3.9	19.4	87.1%
<i>B</i>	84.9	2.2	12.9	83

¹⁾ B. 40, 1165 (1907).

Bij proef *A* was meer bars gevormd, dan bij proef *B*, hetgeen bij de sublimatie in vacuo achterbleef. De geringere opbrengst bij *B* wordt door onvolledige nitratie veroorzaakt. Niet onderzocht werd, of geringe hoeveelheden dinitroproduct waren ontstaan, zoodat de cijfers, in bovenstaande tabel voor meta aangegeven, in het algemeen alle andere produkten, geen para- of ortho-nitraceetanilied zijnde, in zich begripen.

De hoofdzaak is, dat inderdaad bij deze nitratie-methode de ortho-verbinding wel niet uitsluitend ontstaat, maar in het reactieproduct toch verreweg de overhand heeft.

*Nitraties van aceetanilied met mengsels van salpeterzuur en
ijszijn* (VAN DER LINDE).

Daar in het bovenstaande gebleken is, dat de concentratie van het ter nitratie gebruikte salpeterzuur van aanzienlijken invloed is op de verhouding, waarin de isomeren ontstaan (wij zullen dit ook nog bij benzanilied terugvinden), was het belangwekkend, na te gaan hoe de samenstelling van het nitratieproduct zoude zijn, als het water geheel of gedeeltelijk door eene andere verbinding werd vervangen. Hiervoor werd ijszijn gekozen. De temperatuur, waarbij gewerkt werd was wederom 20° ; per gr. aceetanilied werd 10 c.c. zuurmengsel aangewend.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van de verkregen resultaten.

Samenstelling v. h. zuurmengsel.	Samenstelling v. h. nitratieprod.				% opbrengst der theorie.
	ortho	meta	para	dinitro	
80% reëel HNO_3 + 20% ijszijn	—	—	—	50.20 ₀	
81% " " " " + 10% " " } + 9% H_2O	30.0	1.2	68.8	—	93
80% reëel HNO_3 + 20% H_2O	40.7	—	59.3	—	75%

De vervanging van water door ijszijn heeft dus een zeer grooten invloed op de samenstelling van het nitratieproduct.

Nitratie van diaacetanilied (HARTOGS).

5 gr. zuiver diaacetanilied (smp. 38°) werd bij kleine hoeveelheden tegelijk in 50 c.c. reëel salpeterzuur gebracht, dat op eene temperatuur van -20° tot -25° werd gehouden. De duur van het inbrengen was 30 minuten. Enkele minuten later werd quantitatief op ijs nitgegoten, waarbij aanvankelijk geen praecipitaat ontstond, in tegen-

stelling van hetgeen bij de nitratie van mono-aceetanilied wordt waargenomen. Na vijf uur staan werd van het inmiddels gevormde praecipitaat afgefiltreerd, het filtraat met chloroform uitgetrokken en beide produkten afzonderlijk kwalitatief onderzocht. Het praecipitaat werd met benzol uitgekookt, waarbij zuiver *p-nitraceetanilied* (smp. 210—211°) terugbleef. De benzolische oplossing werd na afkoeling met zijn dubbel volume ligroïne (kookp. 80—100°) vermengd, waardoor nog een weinig *p-nitraceetanilied* neersloeg. Deze vloeistof werd daarna afgedistilleerd en het residu met eene éénprocentige loog verzeept, waardoor een fijn geel poeder ontstond dat bij 180° smolt. Dit was 2-4-dinitranilien, zooals nog nader door de mengproef werd bewezen.

Het chloroformresidu, door afdistilleeren der vloeistof verkregen, werd met ligroïne (100 c.c. voor 0.3 gr.) uitgekookt. Hetgeen hiernit bij afkoeling kristalliseerde werd met het onopgeloste deel vereenigd en gezamenlijk uit benzol omgekristalliseerd. Zoo werden kristallen van het smp. 150—152° verkregen, die, ook blijkens de mengproef uit *m-nitraceetanilied* bestonden.

De ligroïne-oplossing werd verdampt en het residu met 1 %ige loog verzeept. De heldere vloeistof werd van een weinig hars afgegoten en leverde bij afkoeling kristallen van het smp. 67°, die gemengd met eene gelijke hoeveelheid *o-nitranilien* bij 68° smolten, dus uit genoemde verbinding bestonden.

Qualitatief zijn dus in het reactieprodukt de drie mononitranilienen en 2-4-dinitranilien aangetoond. Over zijne quantitative analyse zie onderstaande tabel.

Ten einde de vorming van dinitroprodukt te vermijden, werd door VAN DER LINDEN beproefd om diaceetanilied met verdunder zuur of in zwavelzure oplossing te nitreeren. Met een salpeterzuur van 90 % werden echter nog enkele procenten dinitranilien verkregen, terwijl de nitratie met zuur van 80 % een produkt opleverde, in samenstelling overeenkomende met het nitratieprodukt van aceetanilied, met zuur van deze concentratie verkregen. Het is dus waarschijnlijk, dat vóór de nitratie reeds eene ontleding van het diaceetanilied in azijnzuur en aceetanilied heeft plaats gevonden. Ook pleit hiervoor, dat bij het gieten van het nitratiemengsel in water, er evenals bij de nitratie van aceetanilied, terstond een neerslag ontstaat.

De nitratie in zwavelzure oplossing werd op twee wijzen uitgevoerd. Vooreerst (I) werd diaceetanilied in zwavelzuur opgelost en hierbij salpeterzuur gevoegd. Maar hierbij werd, blijkens de samenstelling van het nitratieprodukt, het diaceetanilied eerst in aceetanilied omgezet. Ten tweede, (II) door inbrengen van diaceetanilied in een mengsel van zwavelzuur en de berekende hoeveelheid salpeterzuur. Het

resultaat van deze proef was niet geheel bevredigend, daar de som der procentcijfers van de gevonden produkten enkele procenten beneden 100 bleef. Toch is deze proef in zooverre interessant, dat er vrij veel *m*-nitroprodukt bij ontstond. In onderstaande tabel zijn de resultaten samengevat.

Nitratie van diacetaanilied. Temperatuur -20° .

Conc. v h. zuur.	c.c. zuur per gr. diaceta- anilied.	Samenstelling v/h. nitratiepr.				o/10 opbrengst der theorie.	duur der nitratie	uitgevoerd door
		ortho	meta	para	dinitro			
100%	10	14	10	65	10.5	89	30'	HARTOGS
90	10	14.5	5.5	76.9	4.0	62	60'	V. D. LINDEN
80	10	40.4	1.6	58.0	—	32.2	105'	„

Nitratie in zwavelzuur met de ber. hoeveelheid salpeterzuur. Temp. -20° .

Zwavelz.

I. 90%	10	0.8	1.1	98.1	—	38.7	23'	V. D. LINDEN
II. 96 „	10	} 5.9 6.9	9.3	71.8	9.5	80.2	210'	„

De meta-verbinding in proef II kan niet ontstaan zijn door voorafgegane particele vorming van anilien, want uit proef I blijkt, dat zwavelzuur onder de heerschende omstandigheden slechts ééne acetyl-groep afsplitst.

Nitratie van benzanilied (HARTOGS).

Bij het opwerken der nitratieprodukten moest hier op eenigszins andere wijze worden gehandeld. Vooreerst bleek, dat na het uitgieten in water en affiltreeren van het praecipitaat, de zure waterige vloeistof aan chloroform niets afgaf, zoodat met het verzamelen en opwerken van het praecipitaat kon volstaan worden. Vervolgens waren de nitro-benzanilieden niet glad door éénprocentige waterige loog te verzeepen, daarentegen wel door eene oplossing bestaande uit 24 gr. met alcohol gezuiverde natron, 600 c.c. water en 400 c.c. aethylalcohol. Op 5 gr. aangewend benzanilied werd 500 c.c. van bovenstaande loog voor de verzeeping gebruikt. De verwarming werd op het waterbad zoolang voortgezet, totdat de vloeistof begon te koken; daarna liet men haar langzaam afkoelen en werd eerst na 2×24 uur door middel van chloroform het mengsel der nitranilienen aan de alkalische vloeistof onttrokken.

Bij een kunstmengsel, bestaande uit gelijke deelen der drie benzanilieden werd volgens deze methode 99 % der theoretische hoeveelheid aan nitranilienen gewonnen, welke de samenstelling had:

ortho-nitranilien	32.4 %
meta- „	33.7 „
para- „	33.2 „

volgens de methode-VALETON bepaald.

Bij de verdere opwerking van het nitratieprodukt werden de door verzeeping verkregen nitranilienen uit water, verzadigd bij 12° met de drie isomeren, omgekristalliseerd en ten slotte in vacuo gesublimeerd.

Onderstaande tabel geeft een overzicht der verkregen resultaten.

Temp.	c.c. zuur per 1 gr. benz- anilied.	conc. v/h zuur.	Samenstel. v/h. reactieprod.			o opbrengst der theoret.	duur der nitratie	uitgevoerd door
			ortho	meta	para			
0°	10	80%	41	—	58.5	94	60'	HARTOGS
—20°	10	80	41.1	1.5	57.4	92.9	180'	V. D. LINDEN
—20°	10	90	19	—	80	92	25'	HARTOGS

Werd bij de nitratie reëel salpeterzuur gebruikt, dan ontstond wederom in hoofdzaak dinitroprodukt en daarnaast eenig *p*-nitrobenzanilied, dat bij langeren duur der bewerking, zonder twijfel ook geheel in dinitroverbinding zoude zijn overgegaan.

Bij de nitratie in zwavelzuur werd op 5 gr. benzanilied 25 resp. 100 c.c. geconcentreerd zuur aangewend en de berekende hoeveelheid salpeterzuur toegevoegd. In beide gevallen werd, bij —20° werkende, ruim 97 % aan para-verbinding verkregen.

Nitratie door wateronttrekking aan aniliennitraat (VAN DER LINDEN).

Bij deze bewerking moet men aannemen, dat eerst phenylnitramien ontstaat en dit zich onder de omstandigheden der proef in nitranilienen omzet. De op bl. 1077 beschreven proeven, waarbij aniliennitraat in geconcentreerd zwavelzuur wordt gebracht, zijn wellicht ook ten deele nitraties door wateronttrekking. Daar echter het reactieprodukt hetzelfde type vertoont (nl. vorming van para- en *m*-nitranilien als hoofdprodukten) als de nitratie van anilien in zwavelzure oplossing schijnt dit laatste proces ook bij het inbrengen van nitraat in zwavelzuur verreweg de overhand te hebben.

Geheel andere uitkomsten worden verkregen, als aan aniliennitraat door middel van azijnzuuranhydried water wordt onttrokken. Deze reactie is reeds door BAMBERGER en HOFF ¹⁾ bestudeerd; het leek ons echter wenschelijk quantitatief de daarbij ontstaande produkten te bepalen.

De heer v. d. LINDE bracht 4 gr. aniliennitraat in 40 c.c. azijnzuuranhydried, dat op 0° werd gehouden.

Na 2½ uur roerens was alles in oplossing gegaan. Bij het opwerken van het reactieprodukt bleek, dat er vrij veel aceetanilied was gevormd, zoodat de opbrengst aan nitranilienen slechts 29.7 % van de theoretische was. Bij analyse van dit mengsel der nitranilienen bleek het uit 82.1 % ortho-, 2.9 % meta- en 15.0 % para-nitranilienen te bestaan. Deze uitkomst is niet in overeenstemming met die van HOFF, die uit 10 gr. aniliennitraat 3 gr. *o*- en 4.3 gr. *p*-nitranilienen verkreeg.

Omzetting van phenylnitramien (VAN DER LINDE).

Het bij de anhydreering van aniliennitraat verkregen resultaat is echter analoog aan hetgeen bij de omlegging van phenylnitramien in nitranilienen werd verkregen. Ook dit proces is reeds door BAMBERGER ²⁾ bestudeerd. De heer VAN DER LINDE voerde de omlegging door middel van zwavelzuur van 74 % uit; het plan om hiertoe geconcentreerd zwavelzuur te gebruiken, ter vergelijking met de nitratie van anilien in dit zuur, moest worden opgegeven, daar phenylnitramien zich met geconcentreerd zwavelzuur heftig ontleedt, onder uitstooting van bruine nevels.

5 gr. phenylnitramien werden in 50 c.c. zwavelzuur van 74 % gebracht, dat op -20° werd gehouden. De bewerking duurde één uur; het proces verliep zeer rustig. Aan nitranilienen werd eene opbrengst van 66.1 % verkregen. Bij analyse bleek dit mengsel te bestaan uit 95.0 % *o*-, 1.5 % *m*- en 3.5 % *p*-nitranilienen; m. a. w. en ontstaat bij dit proces nagenoeg uitsluitend de ortho-verbinding.

Bespreking der resultaten.

Op grond van de gegevens, in de literatuur voorhanden, heb ik in mijn werk over de directe invoering van substituenten in de benzolkern ³⁾ mij aangesloten aan de verklaringen, door BLANKSMA en

1) B. 28, 399 (1895) en A. 311, 101 (1899).

2) B. 26, 490 (1893).

3) Die direkte Einführung enz. bl. 139 en 142.

BAMBERGER van het mechanisme der nitratie van anilien (en zijne derivaten) gegeven. Ik onderstelde echter, dat de direkte nitreering van aniliensulfaat tot het meta-nitroprodukt voert, de indirecte (d.i. onder intermediaire vorming van phenylnitramien verloopende) tot para- en orthoderivaten. De onderzoekingen van den heer HARROGS, hierboven medegedeeld, schenen deze opvatting te steunen. Daar aan de indirecte nitratie de vorming van aniliennitraat dient vooraf te gaan, waarna zich dit door waterverlies in phenylnitramien en dit zich weder in nitranilien omzet; de vorming van nitraat echter door nitreeren in zwavelzuur, zooals het hierboven beschreven is, niet kan worden aangenomen, was te verwachten, dat in zwavelzuur milieu veel meta-nitranilien zoude gevormd worden, hetgeen ook werkelijk werd waargenomen. In overeenstemming hiermede was verder, dat bij het inbrengen van aniliennitraat (voornamelijk als het in salpeterzuur is opgelost) in zwavelzuur, veel minder meta-, veel meer para- en ortho-*produkt* ontstaat. Ook de nitratie van diaceetanilied was in deze van belang. Daar hierbij de indirecte nitratie niet meer mogelijk is, voor zooverre althans dit lichaam als zoodanig genitreerd wordt, zoude hierbij de meta-nitroverbinding moeten ontstaan, hetgeen ook inderdaad werd waargenomen.

De verdere hierboven beschreven waarnemingen doen echter zien, dat de daar even ontwikkelde hypothese niet juist kan zijn. Want bij de nitratie van anilien in zwavelzuur ontstaat naast meta-, in aanzienlijke hoeveelheden paranitranilien en slechts zeer ondergeschikte hoeveelheden der ortho-verbinding. Daar nu anderzijds zowel door de anhydreering van aniliennitraat, als door de omlegging van phenylnitramien bijna uitsluitend de ortho-verbinding ontstaat, kan de indirecte nitratie geene verklaring geven voor de vorming der aanzienlijke hoeveelheden para-isomeer. En wat betreft de nitratie van diaceetanilied, moet wel overwogen worden, dat daarbij slechts ca. 10 % aan meta-verbinding ontstaat, hoewel er alle reden is om aan te nemen, dat genoemd anilied in hoofdzaak als zoodanig wordt genitreerd, en men dus zou mogen verwachten, dat het meta-derivaat het hoofdproduct zoude zijn.

Verder is het op grond van de bovenstaande hypothese opvallend, dat de anilieden bij nitratie zoo goed als uitsluitend para- en orthoderivaten geven. Men zou mogen verwachten als zij juist was, dat hier het metaproduct op den voorgrond zal treden, omdat de indirecte nitratie de vorming van phenylacetylnitramien zoude vereischen en dit (niet bekende lichaam) zich toch zeker moeilijker dan phenylnitramien zelf zal vormen.

1) Die direkte Einführung enz. bl. 479—480.

Uit het bovenstaande, blijkt dus: 1° dat BAMBERGER's hypothese omtrent de nitratie van anilien, als verloopende over phenylnitramien, onhoudbaar is, want het nitratieprodukt bestaat uit *m*- en *p*-inplaats van uit *o*-nitranilien; 2° dat ook met behulp van BLANKSMA's onderscheiding tusschen direkte en indirecte nitratie nog geene voldoende verklaring van de waargenomen feiten mogelijk is,

Door de aanwending van eene andere onderstelling, reeds vroeger door mij ontwikkeld ¹⁾ is echter naar mijne meening een aannemelijke verklaring van het waargenomene te geven. Het betreft de invloed, die componenten van eene samengestelde groep op haar richtend vermogen hebben.

Bij de nitratie van anilien in zwavelzure oplossing wordt de groep NH_2 tot $\text{NH}_2\text{H}_2\text{SO}_4$. Daar de sulfogroep een intredende substituent bijna uitsluitend naar de meta-plaats richt ²⁾, is dit van het aan NH_2 gebonden H_2SO_4 ook te verwachten. Van de NH_2 -groep zelf is bekend dat zij een tweede groep in de kern uitsluitend naar para dirigeert ²⁾. Wij hebben dus in het complex $\text{NH}_2\text{H}_2\text{SO}_4$ twee componenten vereenigd, die elkanders werking niet ondersteunen. In zulk een geval hangt het van de relatieve snelheid der substitutie af, welke de componenten te weeg brengen, wat er zal ontstaan. Het is bij dezen toestand zeer begrijpelijk, dat beide componenten hun invloed op de substitutie zullen uitoefenen en er dus zoowel para- als meta-nitranilien gevormd wordt. De vorming der geringe hoeveelheden ortho-nitranilien bij nitratie in zwavelzuur is waarschijnlijk aan indirecte nitratie toe te schrijven; want als men vast aniliennitraat in zwavelzuur brengt, wordt de hoeveelheid ortho-verbinding grooter. Dat bij de proeven, in de tabel op p. 1077 samengevat minder meta- en meer para-nitranilien is gevormd, is in overeenstemming daarmee, dat het anilien hier slechts gedeeltelijk als sulfaat aanwezig was.

Uit de cijfers, verkregen bij de nitratie van de anilieden blijkt, dat de aard der acylgroep op de verhouding, waarin de para- en ortho-verbindingen ontstaan, nagenoeg geen invloed heeft. Nu richt de formyl (aldehyd) groep een tweeden substituent naar de meta- maar ook naar de ortho-plaats; en volgens een onderzoek van CAMPS ³⁾ is dit ook het geval voor de acetylgroep. Of deze richtende invloed der acylgroepen sterk of zwak is laat zich nog niet geheel beoordeelen. Naar alle waarschijnlijkheid zal hij echter niet sterk zijn ⁴⁾. Men mag

¹⁾ Zie „die direkte Einführung“ bl. 74—82.

²⁾ Ibid. bl. 133 vlgg.

³⁾ Arch. d. Pharm. **240**, 1 (1901).

⁴⁾ Zie direkte Einführung bl. 469.

dus veronderstellen, dat in het complex NH-acyl de richtende invloed van NH sterk overwegend zal zijn, te meer daar substituties naar para-ortho-plaatsen veel sneller dan die naar de meta-plaats verlopen¹⁾. Inderdaad ontstaan, bij de nitratie der acylanilieden geen, of slechts sporen van de meta-verbinding. Worden echter twee acylgroepen aan de stikstof gebonden, zooals in diaacetanilied, dan treedt de snelheid der meta-substitutie iets meer naar voren en men verkrijgt bij nitratie dezer verbinding enkele procenten van de meta-verbinding.

Men kan zich op grond van het bovenstaande, van de verschijnselen bij de nitratie van anilien optredende, de volgende voorstelling maken: Evenals bij de invoering der halogenen enz. ontstaat bij de invoering der nitrogroep de para-verbinding en daarnaast de ortho-verbinding. Twee omstandigheden kunnen hierop echter wijzigend inwerken. Ten eerste de indirecte nitratie, zooals bij de nitratie door acetylnitraat, bij de wateronttrekking aan aniliennitraat, en bij de nitratie volgens WITT en UTERMANN²⁾ die ook bij aanwezigheid van azijnzuurhydried werkten: alsdan wordt de orthonitroverbinding hoofdproduct. Men mag hier bij alle drie methoden aannemen, dat primair phenylnitramien ontstaat, dat zich in *o*-nitranilien omzet.

Eene tweede wijziging kan het nitratieproduct ondergaan, als aan de aminogroep naar meta richtende groepen zijn gebonden of daarin zijn gesubstitueerd, waardoor, al naar den aard der groepen, *m*-nitranilien in grootere of geringere hoeveelheid ontstaat.

Bij de nitratie der acylanilieden is het opvallende resultaat verkregen, dat de hoeveelheid van het ontstaande ortho-isomeer sterk afneemt bij hoogere concentratie van het salpeterzuur en bij de nitratie in zwavelzuur nagenoeg uitsluitend de para-verbinding ontstaat. Hierover moge ten slotte nog een en ander in het midden worden gebracht.

Voorerst moet worden opgemerkt, dat dit resultaat in lijnrechte tegenspraak is met een onderzoek van KÖRNER³⁾, die bij toenemende concentratie van het nitreerzuur meer ortho-verbinding verkreeg. De heer HARTOGS⁴⁾ heeft echter hiervan in zijn proefschrift eene zeer plausibele verklaring gegeven. Hij merkt op, dat KÖRNER uitdrukkelijk vermeldt, dat men voor de nitratie van acetanilied (het eenige door hem onderzochte) geen sterker salpeterzuur kan gebruiken dan van het spec. gew. 1.465, daar anders het mengsel zelfs onder 0° ontbrandt (hetgeen ons echter nooit is gebleken, zelfs niet met sterker

1) Die direkte Einführung enz. bl. 464.

2) B. 39, (1906).

3) J. 1875, 344,

4) Diss. bl. 161.

zuur). KÖRNER's zuur was dus steeds verdunder dan 80 %, waardoor het waarschijnlijk wordt, dat hij geen volledige nitratie heeft bereikt, daar zelfs zuur van 80 % bij korte inwerking, volgens de ervaringen van HARTOGS, een deel van het acetanilied onaangetast laat. Het reactieprodukt, met het sterkste zuur verkregen, zal dus bij nitratie onder overigens gelijke omstandigheden het meest genitreerd zijn. KÖRNER voegde bij zijn nitratieprodukt kaliloog en blies daarna het ortho-nitranilien met stoom over. Hij verkreeg dan natuurlijk uit verder genitreerd produkt ook meer o-nitranilien. Dat hij ook op verre na niet zooveel o-nitranilien verkreeg als in onze proeven, blijkt uit zijne mededeeling, dat hij in maximo slechts 15 % ortho-verbinding verkreeg.

Daar ortho-nitranilien uit vooraf gevormd phenylnitramien ontstaat, moet overwogen worden, of de vorming van laatstgenoemde verbinding als tusschenprodukt bij de nitratie met een zuur van 80 % in ruimer mate kan optreden, dan bij aanwending van een hooger procentig zuur. Dit is zeer onwaarschijnlijk, daar juist de vorming van phenylnitramien uit aniliennitrat door wateronttrekkende stoffen moet plaats vinden. Het ware dan eerder te verwachten, dat bij de nitratie der acylanilieden in zwavelzuur de ortho-verbinding zoude ontstaan, waar zij in het reactieprodukt juist zeer op den achtergrond treedt.

De proeven, waarin inplaats van met zuur van 80 %, genitreerd werd met ijsazijn-salpeterzuurmengsels of ijsazijn-salpeterzuur-watermengsels, waarin echter het salpeterzuur ook voor 80 % aanwezig was, bewijzen evident, dat het niet alleen de concentratie van het salpeterzuur is, die hier den doorslag geeft; want eene geheele of partieele vervanging der 20 % water door ijsazijn geeft geheel andere nitratieprodukten.

Men moet dus wel tot het besluit komen, dat de stoffen (water, ijsazijn) die naast het salpeterzuur aanwezig zijn een specifiek invloed uitoefenen, die echter eerst door verder onderzoek nader zal kunnen worden opgehelderd.

Amsterdam, Org. Chemisch Lab. der Univ.

Februari 1911.

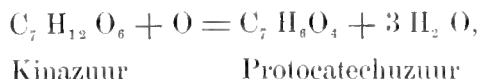
Microbiologie. De Heer BEJERINCK doet eene mededeeling over:
Pigmenten als oxydatieproducten door bacteriën gevormd.

Door de in de volgende regels beschreven proeven gelukt het eenige belangrijke, in onze omgeving meer of minder algemeen verspreide, ten deele vroeger niet opgemerkte bacteriën op zeer duidelijke wijze zichtbaar te maken.

1. *De vorming van Protocatechuzuur uit Kinazuur.*

Nadat door Löw¹⁾ was aangetoond, dat 1 proc. oplossingen van kinazurekalk bij staan aan de lucht bruin worden door vorming van protocatechuzuur, hebben EMMERLING en ABDERHALDEN²⁾ deze omzetting ook bakteriologisch onderzocht. Zij neutraliseerden 10 proc. oplossingen van kinazuur met kalk, voegden daaraan 0.5 proc. pepton, 0.1 proc. kaliumfosfaat en 0.1 proc. magnesiumsulfaat toe, entten dit mengsel met eenige druppels eener infusie van rottend vleesch en kultiveerden dan eenige weken bij 35° C. Daardoor ontstond protocatechuzuur tegelijk met een slijmerige bacteriënmasse in de vloeistof, waaruit het gelukte een eveneens slijmerigen *Micrococcus* te isoleeren als oorzaak van de vorming van dat zuur, deze werd *M. clinicus* genoemd.

De reactie geschiedt volgens de formule:



waarbij hoogstens 12 proc. kinazuur wordt omgezet; waarin de overige 88 proc. veranderen, wordt door deze onderzoekers niet opgegeven. Opmerkelijk bij deze reactie is, dat daarbij slechts één atoom zuurstof betrokken is.

Daar de zoo uiterst intensieve kleuring van ijzerzouten door protocatechuzuur bij deze proeven door de genoemde schrijvers niet was toegepast, scheen het wenschelijk daarvan gebruik te maken om de betrokken bacteriën gemakkelijker te herkennen.

Daartoe werd de proef op de volgende wijze uitgevoerd.

Voor de ruw- of vóórkultuur bleek een vloeistof geschikt te zijn van de samenstelling:

¹⁾ Berichte der Deutschen Chem. Gesellschaft, Bd. 14, pag. 450, 1902.

²⁾ Ueber einen Chinasäure in Protocatechusäure überführenden Pilz. Centralblatt für Bakteriologie 2. Abt. Bd. 10, Pag. 337, 1903.

Leidingwater	1.00
Dikaliumfosfaat	0.05
Ammoniumchlorid	0.05
Calciumkinaat ($C_7 H_{11} O_6$) $2Ca + 10 H_2 O$	0.1
Ferrichlorid	0.001

Gebracht in een ruime ERLÉNMEYERKOLF, zoodat in de dunne vloeistoflaag sterke aëratie plaats vindt, geïnfecteerd met grond en gekultiveerd bij 20° of bij 30° C, kleurt zich de vloeistof na enkele dagen diep zwart, tengevolge van de vorming van ijzerprotocatechaat.

Voor reiniging der bakteriënkultuur wordt hieruit een spoor overgeënt in een overeenkomstige kultuurvloeistof en opnieuw bij 20 of 30° gekultiveerd.

Wordt hiervan dan een uitzaaisel gemaakt op een kultuurgrond, die uit dezelfde oplossing bestaat maar met agar is gestolten en wat ferricitraat bevat, dan verkrijgt men, wat betreft de kulturen bewaard bij 20° tot 25° C, koloniën van verschillende variëteiten van *B. fluorescens non liquefaciens*, en wat betreft de bij 30° à 35° C gehouden kulturen, in hoofdzaak een mikrokok, alle gelegen te midden van intensief violet of rood gekleurde diffusievelden van ferriprotocatechaat. Deze mikrokok behoort wellicht tot dezelfde soort als de door EMMERLING en ABDERHALDEN beschrevene, maar dan toch zeker tot een daarvan afwijkende variëteit, want slijm wordt daardoor niet gevormd, ook niet bij aanwezigheid van pepton. Dezen vorm, die hoogst algemeen in onze omgeving is en met allerlei andere organische zouten op overeenkomstige wijze verkregen kan worden als met het kinaat, zal ik *Micrococcus calco-aceticus* noemen, omdat calciumacetaat bijzonder geschikt is voor de ophooping daarvan. Bovendien ontstaan bij de laatst genoemde cultuurvoorwaarde koloniën van zekere bij 30° C nog groeiende variëteiten van *B. fluorescens non liquefaciens*.

Afstrijkingen van deze verschillende bakteriën op vleeschagar met 1 proc. calciumkinaat en een weinig ferricitraat of op den bovengenoemden cultuurgrond geven weder diep zwart of rood gekleurde, diffusievelden van ferriprotocatechaat.

Een deel van het kinaat oxydeert direkt tot water en calciumcarbonaat, dat als kristallen in de kolonien neerslaat, welke kristallen donker paars gekleurd zijn doordat zij het ijzerzout van het protocatechuzuur bij het kristalliseeren hebben opgezogen.

Andere bakteriënsoorten, welke het kinazuur hetzij in water en calciumcarbonaat of in protocatechuzuur kunnen omzetten, maar niet bij de bovengenoemde ophoopingsproeven werden gevonden, zijn in de volgende tabel genoemd, waarbij door + en — aangegeven is

of de daarboven genoemde stoffen al of niet worden gevormd. Bij de proeven met deze bacteriën genomen, bevond zich 1 proc. calciumkinaat in vleeschbouillonagar, welke in plaatkulturen bij 30° C. onderzocht werd; of daarvoor werd gebruik gemaakt van de boven voor de ophooping genoemde ammoniumchloridhoudende cultuurvoecistof na stolling met agar.

Uit kinaten ontstaat door	Protocatechuzuur	Calciumcarbonaat als kristallen	Opmerkingen
<i>Bacillus prodigiosus</i>	+	—	
" <i>punctatus</i>	—	—	
<i>Aërobacter coli</i>	—	—	
" <i>aërogenes</i>	+	—	Sommige variëteiten
" <i>liquefaciens</i>	—	—	
<i>Pseudomonas aromatica</i>	—	—	
" <i>fluorescens non liquefaciens</i>	+	+	Sommige variëteiten
" <i>fluorescens liquefaciens</i>	+	+	Sommige variëteiten
" <i>pyocyaneus</i>	+	+	
<i>Proteus vulgaris</i>	—	—	
<i>Microspira tyrosinatica</i>	—	—	
<i>Micrococcus calco-aceticus</i>	+	+	Alle variëteiten
<i>Azijn</i> bacteriën	—		
Gistsoorten	—		

Men ziet uit deze tabel, dat de gewone bacteriënsoorten, die het kinaat oxydeeren tot protocatechuzuur, namelijk de fluorescenten, ook variëteiten omvatten die dit vermogen missen.

De tweede kolom is slechts van relatieve waarde, want tal van bacteriën oxydeeren het kinaat en groeien daarvan met groote intensiteit zonder dat het daarbij gevormde calciumcarbonaat uitkristalliseert. De kinaten behooren dan ook (met de malaten) tot de, voor niet-sporenvormende bacteriën gemakkelijkst assimileerbare organische zouten.

Merkwaardigerwijze schijnen er geen sporenvormende bacteriën te zijn, die uit kinazuur protocatechuzuur vormen, want het is niet

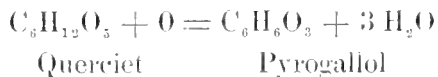
gelukt om uit gepasteuriseerde materialen, zooals tuingrond of grachtmodder mikroben te verkrijgen, die in oplossingen of op platen van de vroeger beschreven samenstelling tot duidelijke kleurverandering aanleiding gaven. Wel werd door verschillende sporenvormers calciunkinaat in carbonaat veranderd.

Bij luchtafsluiting zijn kinaatoplossingen voor een gistingproces vatbaar zooals ook reeds door Löw is opgemerkt, waarbij koolzuur, mierenzuur, azijnzuur en propionzuur ontstaan. Waterstof is daarbij niet aangetoond; de bij dit proces betrokken mikroben zijn nog onbekend.

2. *De oxydatie van Querciet tot Pyrogalluszuur door Pseudomonas aromatica.*

De ondervinding, dat liet van den hexamethyleenring afgeleide kinazuur (hexahydrotetraoxybenzoëzuur) zoo gemakkelijk door allerlei mikroben kan worden omgezet in een aromatisch lichaam, dat buitengewoon seerp door de ijzerreactie is aan te toonen, deed de vraag rijzen of er met het kinazuur verwante stoffen bestaan, die zich op dezelfde wijze gedragen.

Deze beschouwing gaf aanleiding de querciet aan een overeenkomstig onderzoek te onderwerpen als het voorgaande. De structuur dezer verbinding is namelijk de hexamethyleenring, waarin 5 waterstofatomen door hydroxyl vervangen zijn. Het bleek, dat hier inderdaad onder den invloed van het leven gemakkelijk een aromatische stof ontstaat, maar tevens, dat de toevoeging van een ijzerzout om die stof aan te toonen overbodig is; en verder, dat er slechts één enkele mikrobensoort schijnt te bestaan, waarvan weder alleen bepaalde variëteiten het vermogen bezitten die stof te vormen. Nauwkeuriger onderzoek bewees, dat de chemische reactie hierbij wel op geheel overeenkomstige wijze verloopt als bij de oxydatie van het kinazuur, maar dat het produkt naar alle waarschijnlijkheid pyrogalluszuur is, blijkbaar ontstaande volgens de formule:



Ook hier wordt dan slechts één atoom zuurstof per molekuul querciet gebruikt. Opgemerkt moet worden, dat bij deze proeven een groot gedeelte van de querciet op andere wijze verdwijnt, waarschijnlijk als koolzuur en water.

De mikroben, die deze omzetting veroorzaken, zijn in onze omgeving algemeen verspreid, maar hoezeer daaronder een aantal duidelijk onderscheiden variëteiten voorkomen, behooren alle tot één en dezelfde

soort, namelijk die der aromabacteriën, wel bekend uit melk en melkproducten en het eerst duidelijk beschreven door MIGULA onder den naam van *Pseudomonas aromatica*¹⁾. Het is een polair-monociliaat kortstaafje, in plaatkulturen weinig, in bouillon tamelijk sterk beweegelijk.

De zeer donkere kleur van het pigment in een alkalisch medium bij luchttoetreding maakt de opsporing der quercietbakterie gemakkelijker. Indien men bijv. een plaat giet van vleeschbouillonagar met 0,5 proc. querciet en daarop enkele druppels rioolwater uitspreidt, is de kans groot, dat zich bij 30° na één of twee dagen enkele koloniën vertoonen, die pikzwart zijn of in het midden van een zwart diffusieveld liggen, verspreid tusschen de zeer vele geen pigment voortbrengende koloniën, welke laatste weinig hinderen met uitzondering van *B. fluorescens liquefaciens*, waarvan de afscheidingsproducten voor de quercietbakterie nadeelig zijn.

Bij een vroegere gelegenheid heb ik gewezen op een eenvoudige proef, waarbij aromatische melk ontstaat²⁾.

Men behoeft melk daartoe slechts bij zeer volledige luchttoetreding bij betrekkelijk lage temperatuur, bijv. bij 15° à 25° C. te bewaren, dat is aan het spontane bederf door de daarin aanwezige kiemen over te laten. De verzuring is dan aanvankelijk zwak, omdat daarvoor de temperatuur te laag is, terwijl juist de „aromabacteriën” zich dan sterk vermeerderen en den eigenaardigen nog niet nader onderzochten ester voortbrengen.

Wordt zulke aromatische melk afgestreken op een quercietplaat van de bovengenoemde samenstelling, dan ziet men na een kultuurtijd van 2 × 24 uur bij 30° C een groot aantal bruine koloniën van quercietbacteriën voor den dag komen. Onderzoekt men deze ten aanzien van hun vermogen om het aroma in melk voort te brengen,

¹⁾ Systeem der bakteriën, Bd. 2, pag. 880, 1900; met afbeelding Bd. 1, Tab. 1, Fig. 8. Aan deze beschrijving ligt ten grondslag *Bacillus crassus aromaticus* TATAROFF. Waarschijnlijke synonymen: *B. aromaticus lactis* GRIMMER, Centralbl. f. Bacteriol. 2te Abt., Bd. 8, pag. 584, 1902. *B. butyri aromafaciens* KEITH, B. N^o. 41 CONN; *Pseudomonas fragariae* GRUBER, Centralbl. f. Bact. 2te Abt. Bd. 9, pag. 705, 1902. *Ps. fragariae* GRUBER, Id. Bd. 14, pag. 122, 1905 en *Ps. fragaroides* HARALD HUSS. Id. Bd. 19, pag. 661, 1907. Wellicht eveneens de geelgekleurde *Ps. trifolii* van HARALD HUSS. Id. Bd. 19, pag. 68 en 149, 1907, en nog verschillende andere minder duidelijk uit de literatuur herkenbare vormen *Bacillus esterificans* MAASSEN, Arbeiten des Kais. Gesundheitsamtes, Bd. 15, 1899, is een geheel andere soort, die sporen voortbrengt, tot de groep der hooibacillen behoort, en waarschijnlijk identisch is met *Granulobacter polymyxa* PRAZMOWSKI.

²⁾ Fermentation lactique dans le lait. Archives Néerlandaises, Sér. II. T. 13. Pag. 350, 1907.

dan blijkt dit inderdaad voorhanden te zijn maar slechts in geringe mate. De „echte aromabacterien” die naast de „quercietkoloniën” tot ontwikkeling komen en daarmee in alle andere opzichten overeenstemmen, missen het vermogen om uit querciet pyrogallol te vormen, behooren dus wel tot de zelfde soort maar tot andere variëteiten. De quercietbakterie zou derhalve *P. aromatica* var. *quercitopyrogallica* kunnen genoemd worden. De duidelijke herkenbaarheid van *P. aromatica* als soort, maakt het in dit geval mogelijk een kenmerk aan te wijzen, waardoor in de natuur gevonden en schijnbaar gelijke vormen als tot verschillende variëteiten behoorend kunnen herkend worden. De oxydatiefunctie blijkt dus ook hier een zeer veranderlijke te zijn, die bij na verwante vormen aanwezig is of ontbreken kan.

Een ander kenmerk, waardoor de natuurvariëteiten van *P. aromatica* zich van elkander onderscheiden, bestaat in hun ongelijk vermogen gelatine te doen vervloeien: dit vermogen kan zeer sterk zijn, geheel ontbreken of in alle tusschentrappen voorkomen. Hetzelfde laat zich waarnemen bij de quercietbacteriën, zoodat juist de veranderlijkheid dezer eigenschap een karakteristiek kenmerk van de vormen dezer groep is.

Alle variëteiten, naar het schijnt zonder uitzondering, brengen in glukose-bouillon omstreeks 3 cM.³ N. zuur per 100 cM.³ vloeistof voort. Voor groei, oxydatie en zuurvorming zijn peptonen als stikstofbron noodig; ammoniakzouten en nitraten kunnen daarvoor slechts moeilijk en alleen in de reinkulturen (niet bij vrije concurrentie) dienen.

Terwijl aromatische melk wel zeer veel quercietbacteriën maar toch in hoofdzaak andere variëteiten van *P. aromatica* bevat, kan men bij de volgende proef, waarvan het principe is: langzame stijging der concentratie van een voor geringe zuurvorming vatbaar, zeer geschikt voedingsmedium de quercietbacteriën bijna uitsluitend verkrijgen.

In groote bekersglazen doet men 1 L. gedistilleerd water en laat daarin drijven een paar kleine dialysatoren van perkamentpapier, zooals die geleverd worden door SCHLEICHER en SCHÜLL en die de gedaante van reageerbuizen hebben, elk gevuld met ca. 15 cM.³ extract van groenmout. Dit extract is verkregen door 2 deelen groenmout met 3 deelen water in een mortier fijn te wrijven, eenige uren bij kamertemperatuur te digereeren en dan te filtreeren. De heldere oplossing bevat betrekkelijk weinig maltose en is natuurlijk buitengewoon geschikt voor bakteriëngroei, waarbij evenals bij melk, wel melkzuurfermenten tot ontwikkeling kunnen komen maar slechts weinig melkzuur kan ontstaan, door het lage suikergehalte. Bewaard

in een kamer waar de temperatuur wisselde tusschen 15 en 20° C., gaven de in de bekersglazen spontaan bedorven infusies bij herhaalde proefnemingen, verricht in December 1910 en Januari 1911, na afstrijking op bouillon-agar-querciet-platen, een zoo groote overmaat van quercietbacteriën, dat andere soorten moeilijk in de zwarte massa te vinden waren.

Werden in plaats van het groenmoutextract aan de dialyseproef te onderwerpen, daarvan verschillende hoeveelheden direkt aan het water toegevoegd, dan ontwikkelden zich, bij overigens gelijke voorwaarden, veel minder quercietbacteriën.

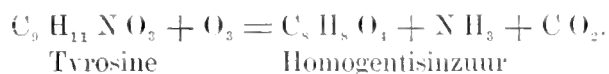
Het aroma in de groenmout-extrakten gevormd, is van denzelfden aard als het in aromatische melk aanwezige.

Andere bacteriën, die uit querciet een pigment voortbrengen dan de bovengenoemde, zijn niet gevonden, noch door proeven met niet-sporenvormers bij hoogere temperaturen, noch bij het onderzoek van de mikroben, die in gepasteuriseerde materialen levend blijven.

Ten slotte moge nog worden opgemerkt, dat de querciet (die niet voor alkoholgisting vatbaar is) bij lucht-afsluiting door gistingsbacteriën uit de *Aërobacter*-groep, zooals *A. aërogenes*, aangetast wordt, onder vorming van koolzuur, waterstof en organische zuren, die nog niet nader onderzocht zijn.

3. De oxydatie van Tyrosine tot Melanine door *Microspira tyrosinatica*.

Het is wel bekend dat het enzym tyrosinase tyrosine tot een pikzwarte stof (melanine) oxydeeren kan die aan de lucht uit het dioxyphenylazijnzuur of homogentisinzuur wordt gevormd. Men neemt aan, dat dit laatste lichaam ontstaat volgens de formule¹



Bij de hier te bespreken proeven kon ik de ammoniak, die volgens deze formule moet vrijkomen, niet aantoonen, waarschijnlijk omdat daarbij al de in de tyrosine aanwezige stikstof dient voor den groei der bacteriën.

Tot nu toe was deze omzetting alleen bestudeerd als gevolg van de werking van een bij hoogere planten en ook in hoogere Fungi voorkomend enzym. Door niemand waren echter tyrosinase vormende bacteriën beschreven op wier bestaan intusschen in de volgende regels gewezen zal worden. Daar zij zich nogal gemakkelijk laten kweeken en in groote hoeveelheid het zwarte uit de tyrosine ge-

¹) ABDERHALDEN, Physiolog. Chemie. 2te Aufl. pag. 367, 1909.

vormde pigment kunnen leveren, dat identiek of naverwant is met de melaninen van het menschelijk lichaam, moeten zij uit een experimenteel-physiologisch oogpunt als belangrijk beschouwd worden.

De tyrosine-mikroben zijn kleine vibrionen, die vooral in de zee voorkomen en in de wintermaanden op het plankton aanwezig zijn; zij ontbreken echter in het zoete water niet geheel en kunnen zonder veel moeite uit rioolwater geïsoleerd worden. De in zee levende vormen maken, tenminste wat de sterkere betreft, naast tyrosinase ook tyrosine en daar dit geschiedt uit pepton zijn zij herkenbaar aan de zwarte vlekken, welke hun kolonieën voortbrengen op bouillon-agarplaten die, omdat men hier met zeebewoners te doen heeft, drie proc. keukenzout moeten bevatten. Merkwaardigerwijze laten zich deze tyrosinase-vibrionen belangrijk ophoopen in zeewater, waaraan men als eenige koolstofbron agar-agar heeft toegevoegd met chloorammonium als stikstof- en kaliumfosfaat als fosforbron; zij vertoonen in dit opzicht dus overeenkomst met de gelasevibrionen, die het enzym gelase afscheiden, waardoor agar in suiker wordt veranderd.

Ophooping dezer mikroben in zeewater met tyrosine als koolstofbron is niet gelukt, evenmin als bij de zoetwaterbewoners door overeenkomstige proeven. Tracht men de laatste uit rioolwater op te hoopen met tyrosine als koolstof- en stikstofbron, dan verkrijgt men fluorescenten, die dus bij de concurrentie, welke bij deze elektieve kultuur plaats vindt, de sterkeren zijn.

De zoetwatervorm is vrij algemeen in het stadsriool te Delft. Om dit organisme in reinkultuur te brengen kan men het onverdunde rioolwater gebruiken en daarmede een kultuurplaat van de samenstelling

Leidingwater	100
Tyrosine	0.1
Natriumcarbonaat	0.1
Dikaliumfosfaat	0.05
Agar	2

overgieten, het overbodige water laten afloopen en enkele dagen kultiveeren bij 30° C.

Hierbij is de tyrosine wel tegelijkertijd koolstof- en stikstofbron, maar de methode is nu een „separatieve”, omdat de vrije concurrentie is uitgesloten.

Den tweeden of derden dag ziet men dan eigenaardige zwarte vlekken rondom enkele kolonieën ontstaan, welke vlekken zich

langzamerhand uitbreiden over afstanden van enkele centimeters ¹⁾. De zwarte kleurstof blijkt tot op vrij groote afstanden te kunnen diffundeeren want het enzym, dat hierbij werkzaam is, blijft aan de bakteriënlichamen gebonden en behoort tot de endoenzymen. Dat hier {werkelijk een echt enzym in het spel is, laat zich gemakkelijker bij de in de zee voorkomende soort aantoonen dan bij de zoetwatermikrobe. Daartoe wordt eenig op vleesch- of visch-agar gekweekt materiaal met chloroform gedood en daarna op een kultuurplaat van de bovenbeschreven samenstelling gebracht, of in een vloeistof op overeenkomstige wijze bereid maar met weglating van de agar. Vrij spoedig kan men dan zwartkleuring waarnemen, maar natuurlijk zonder eenige ontwikkeling van de kiemen zelve. Daar de endoenzymen kunnen opgevat worden als bestanddeelen van het protoplasma, kan het geen verwondering wekken, dat de reacties met zoodanige, door afsterving der cellen verkregen preparaten, gewoonlijk zwak zijn, want het materiaal, waarmede men de proeven doet, is bij dat afsterven grootendeels zelve vernietigd. De studie van de endoenzymen kan, naar mijne meening, dan ook het beste uitgevoerd worden met de levende cellen zelve, en door deze enzymen te beschouwen als een integreerend deel van het levend protoplasma. In dezen zin opgevat kan de tyrosinase een „adembalingsenzym” genoemd worden en het opmerkelijke daarbij is dan, dat als produkt van die ademhaling, naast het koolzuur, ammoniak wordt gevormd inplaats van, zooals bij de gewone ademhaling, water.

Bij de uitzaaiing van het rioolwater, worden per cm^3 slechts een gering getal tyrosinbakteriën gevonden. Dit aantal kan eenigszins vergroot worden door het rioolwater eenigen tijd bij kamertemperatuur te bewaren en dan de in den spiegel opgehoopte mikrobe-laag op de kultuurplaten af te strijken. Deze mikrobe-laag, die zeer rijk is aan infusoriën en flagellaten, levert, vooral naar het schijnt in den nazomer, veel meer tyrosinbakteriën op dan het rioolwater zelve. Intusschen is het tot nu toe niet gelukt een eigenlijke ophoopingsproef van de tyrosinbakteriën te vinden, ofschoon dit op allerlei manieren beproefd is.

Het zwarte pigment laat zich in willekeurige hoeveelheid bereiden door de reine microben bij 30° te kultiveeren in ruime ERLÉNMEYER-kolven, waarin zich de genoemde zwak alkalische oplossing van natriumtyrosinaat bevindt met de noodige anorganische zouten. De

¹⁾ Daar de zoo algemeen verspreide fluoresceerende bakteriën, de tyrosine eveneens aantasten onder voortbrenging van een licht roodbruine kleurstof, vindt men op zulke kultuurplaten ook steeds lichtbruine vlekken, die echter onmogelijk met de tyrosinasevlekken kunnen verwisseld worden.

omzetting is betrekkelijk langzaam, zoodat deze eerst na verloop van weken volledig is, maar men verkrijgt dan ook een vloeistof die als inkt gebruikt kan worden. Sporen van ijzerzouten begunstigen de melaninevorming eenigszins.

De tyrosinebacteriën behooren tot het door MIGULA opgestelde geslacht *Microspira*. Het zijn zeer kleine, snel bewegelijke, polair-monociliate gekromde staafjes van tamelijk verschillende dikte, meestal nog dunner dan de cholera-vibrionen, waarop zij overigens veel gelijken. Evenals deze brengen zij bouillongelatine spoedig tot versmelting, en vormen op bouillonagar, witte, tamelijk krachtig groeiende, niet samenhangende massa's. Zij zijn soms tot lange snoeren vereenigd; de langste individuen vertoonen duidelijke krommingen en herinneren aan spirillen. Bij aanwezigheid van tyrosine in den voedingsbodem kleuren vele individuen zich gedeeltelijk zwart, waarbij zij sterk opzwellen en somtijds kogelvormig worden. De cilie wordt daarbij niet zichtbaar. Zij brengen wel indol voort maar geven de nitroso-indolreactie niet. Zij groeien in peptonoplossingen goed.

De zoetwatervorm kleurt bouillonagar zonder tyrosine niet of slechts weinig, maar indien daaraan tyrosine is toegevoegd, wordt deze ten slotte zwart. De zwartkleuring ontstaat echter veel eerder op den kultuurbodem boven genoemd, die alleen tyrosine bevat, ofschoon de groei daarop veel langzamer is.

Daar vroeger nog door niemand tyrosinasevorming door bacteriën was waargenomen, is er grond de gevonden mikroben voor de wetenschap als nieuw te beschouwen; de in rioolwater voorkomende soort moge *Microspira tyrosinatica* genoemd worden¹⁾. Het is een voor den aard der voedingswaarden uiterst gevoelig organisme, dat de tyrosinase-functie door allerlei nog niet opgehelderde invloeden verliezen kan, maar niettemin in het laboratorium jaren lang als erfelijk standvastige soort voortbestaat.

4. Het bruine pigment van *Acetobacter melanogenes*.

Indien men bier aan de lucht laat verschalen, vormt zich aan de oppervlakte een kaanhuid, waarin kaangist en azijnbacteriën kunnen voorkomen of azijnbacteriën alleen, al naar de temperatuur en de overige cultuurvoorwaarden. Laat men het verschalen geschieden bij kamertemperatuur, dan zal men, indien het bier in beker-glazen gegoten is, kunnen opmerken, dat sommige dezer glazen, nadat de kaanhuid zich over de oppervlakte gesloten heeft, lang-

¹⁾ *Microspira nigricans*, MIGULA System d. Bakteriën Bd. II, pag. 1013, versmelt kultuurgelatine niet, maar kleurt deze bruin-zwart. Of ook daarbij tyrosine en tyrosinase betrokken zijn, is niet onderzocht.

zamerhand een donker bruine kleur verkrijgen, en na een paar weken zoo donker worden, dat het bier den indruk maakt alsof het met karamel vermengd is.

Voor het isoleeren van het hierbij werkzame agens kan de kaamluid op wort- of biergelatine worden afgestreeken, waarbij, nadat de kultuurplaten *twee of drie weken* bij kamertemperatuur bewaard zijn donkerbruine vlekken ontstaan, blijkbaar gekleurd door dezelfde stof, die in het bier ontstaat, vlekken in wier middelpunt de kolonie van een azijnbacterie ligt. Natuurlijk zijn zulke kultuurplaten verder overdekt met koloniën van *Saccharomyces Mycoderma* en van gewone azijnbacteriën.

Ook kultuurplaten bestaande uit water 100, gelatine 10, pepton 2, glukose 3, zijn uitmuntend geschikt voor groei en pigmentvorming. De „bruine” op deze wijze verkregen azijnbacteriën heb ik onlangs beschreven onder den naam van *Acetobacter melanogena*¹⁾. Het is een meestal maar niet altijd onbewegelijk organisme, dat zich alleen ontwikkelen kan ten koste van glukose of maltose en pepton. Andere stikstofbronnen dan de laatste stof zijn niet gevonden. De suiker wordt bij den groei in een sterk zuur, waarschijnlijk glukonzuur, omgezet. Bij aanwezigheid van alcohol wordt zeer veel azijnzuur gevormd. Bier wordt dientengevolge met groote intensiteit verzuurd.

Oplossingen van 10 proc. glukose en 2 proc. pepton in leidingwater met 10 proc. krijt worden bij 25° à 30° C. na een paar weken pikzwart terwijl het krijt verandert in calciumglukonaat.

Voor het ontstaan van het pigment is wel is waar de gelijktijdige aanwezigheid van suiker en pepton noodzakelijk, maar er is reden om aan te nemen, dat het pigment een aromatische stof is, die uit pepton alleen ontstaat, terwijl deze reactie alleen dan geschiedt, wanneer de mikrobe groeit, voor welken groei tevens suiker vereischt wordt. Zulke processen heb ik bij een vroegere gelegenheid auxobolismen genoemd.

Met de vorming van het pigment in gelatineplaten gaat gepaard, dat de gelatine niet alleen donkerbruin gekleurd maar tevens geheel onoplosbaar in kokend water wordt, hetgeen des te opmerkelijker is, omdat de versch geïsoleerde stammen van *A. melanogena* de kultuurgelatine aanvankelijk tot versmelting brengen (waarschijnlijk door de krachtige zuurvorming en niet door een specifiek enzym). Oudere stammen verliezen deze eigenschap waarschijnlijk omdat zij iets langzamer zuur voortbrengen.

De eigenschap van in kokend water niet op te lossen, wordt aan

¹⁾ Pigmentbildung bei Essigbakterien. Centralblatt f. Bakteriöl. 2te Abt. Bd. 29. S. 169, 1911.

de gelatine slechts door zeer weinige stoffen medegedeeld zooals bijvoorbeeld door formaline en chinon en onder de mikroben is het alleen de *Actinomyces chromogenes* (*Streptothrix chromogena*), die door chinonvorming uit pepton die zelfde eigenschap aan de gelatine geeft. Daar bovendien de bruin gekleurde gelatine uit een ammoniakale zilveroplossing zilver, uit alkalische kwikoplossing metallisch kwik afscheidt, is er grond om aan te nemen dat *A. melanogenum* ook werkelijk chinon voortbrengt. Intusschen is het nog niet gelukt de voor chinon meest kenmerkende reacties nl. de blauwkleuring van guajacemulsie en de afscheiding van jodium uit joodwaterstofzuur aan te toonen. Wel geeft het afscheidingsprodukt der bruine azijnbacteriën de voor chinon karakteristieke zwartkleuring met ijzerzouten.

Samenvatting.

De oxydatie van het kinazuur tot protocatechuzuur kan door een aantal mikroben, behorende tot verschillende verwantschapsgroepen bewerkt en door ijzerzouten gemakkelijk aangetoond worden. Vooral *Micrococcus calco-aceticus* en sommige variëteiten van *B. fluorescens non liquefaciens* bezitten dit vermogen in hooge mate en kunnen op grond daarvan geïsoleerd worden.

De oxydatie van querciet tot pyrogallol geschiedt door bepaalde variëteiten van *Pseudomonas aromatica* en is dus een zeer gespecialiseerde functie. Melk of groenmoutextrakt, welke men op bepaalde wijzen „aromatisch laat worden”, zijn rijk aan de genoemde soort in het algemeen en bevatten steeds quercietbacteriën, welke overigens ook vrij algemeen zijn in riool- en zelfs in grachtwater.

De melaninvorming uit tyrosine is eigen aan zekere zee-vibrionen en aan de in rioolwater niet zeldzame *Microspira tyrosinatica*, welke door deze reactie kunnen gevonden worden. Het zijn mikroben na verwant met de cholera- en de lichtvibrionen. De tyrosinasefunctie gaat door invloeden van nog onbekenden aard somtijds plotseling verloren, maar kan bij den zelfden stam weder terugkeeren.

Extract-arm bier kleurt zich bij het verschalen aan de lucht somtijds donkerbruin. Dit is het gevolg van de aanwezigheid eener azijnbakterie, *Acetobacter melanogenum*, die uit pepton een pigment vormt, dat aan karamel doet denken. Gelatine wordt door de afscheidingsprodukten van *A. melanogenum* als het ware gelooid en in kokend water onoplosbaar. Wellicht is hierbij chinon betrokken.

De oxydatiefunctie der mikroben ten opzichte van bepaalde stoffen kan bij overigens niet onderscheidbare natuurvariëteiten derzelfde soort voorkomen of ontbreken, maar bij deze variëteiten in de kultuur jaren lang standvastig zijn.

Physiologic. — De Heer HAMBURGER biedt eene mededeeling aan van den Heer E. HEKMA: „*Over een beorderenden invloed van Calciumchloriede en van darmwand-extract op de Trypsinewerking.*”

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

Het onderzoek waarover in de navolgende bladzijden zal worden bericht, vond zijn uitgangspunt in een onderzoek omtrent de vraag of calciumchloriede de eigenschap bezit trypsinogeen te activeeren. Door meerdere onderzoekers, met name LARGUIER DES BANCELS¹⁾, DELEZENNE²⁾, ZUNZ³⁾ en kortelings ook door miss AYRTON⁴⁾ wordt namelijk aan Calcium-zouten, en tevens ook aan enkele andere zouten, de eigenschap toegeschreven om onwerkzaam pankreassap, resp. pancreasextract, werkzaam te kunnen maken ten opzichte van eiwitstoffen, derhalve het vermogen om trypsinogeen te kunnen activeeren.

Ik heb in de laatste maanden eveneens een aantal proefnemingen gedaan met het doel om zoo mogelijk door eigen onderzoek een bevestiging te krijgen van de uitkomsten der genoemde auteurs, wier resultaten overigens vrijwel gelijkkluidend zijn. Het bleek mij intusschen * dat een onderzoek omtrent de activeerende werking van calcium-chloriede (andere zouten heb ik nog niet in mijn onderzoek betrokken) ten opzichte van trypsinogeen, hoewel schijnbaar eenvoudig, inderdaad niet te onderschatten moeilijkheden met zich meebrengt. Mijne proefnemingen omtrent dat onderwerp hebben dan ook nog niet tot een beslist resultaat geleid, in zooverre het de vraag omtrent de *activeering van trypsinogeen* door calcium-chloriede betreft. Wel zijn in den loop van dat onderzoek enkele andere feiten aan den dag getreden, welke mij der publicatie waard schijnen, te meer omdat daardoor tevens de bovengenoemde onderzonden moeilijkheden eenigermate in het licht worden gesteld resp. een verklaring vinden.

In den loop van het bovenbedoeld onderzoek werd namelijk gevonden dat *calciumchloriede* de eigenschap bezit om de werking van reeds uit zich zelf werkzame, trypsinogeen vrije, trypsine, in belang-

¹⁾ LARGUIER DES BANCELS. C. R. Soc. de Biol. 1895, p. 130.

²⁾ DELEZENNE. C. R. Soc. de Biol. 1905, p. 476, 523, 614; 1906, p. 1070; 1907, p. 274.

³⁾ ZUNZ. Annal. de la Soc. Roy. des Sc. Méd. et Nat. de Bruxelles. XVI. 1907.

⁴⁾ Miss B. AYRTON. Collected Papers. Inst. of Physiol. University College London. Vol. XV. Edited by E. H. STARLING.

rijke mate te bevorderen. Hetzelfde bleek het geval te zijn met *darmwandextracten*, hoewel in veel geringere mate.

Het is zonder meer duidelijk dat het *activeeren* van trypsinogeen (d.i. derhalve het overvoeren van onwerkzaam trypsinogeen in werkzaam trypsine), en het bevorderen der trypsinewerking dus het tot verhoogde werkzaamheid aanzetten van het reeds uit zich zelf werkzame, trypsinogeen-vrije, ferment), twee geheel verschillende begrippen zijn.

Een nader onderzoek omtrent deze bevorderende werking werd, zooals gezegd, ingesteld naar aanleiding van waarnemingen gedaan bij eenige proeven welke ten doel hadden de activeerende werking van calciumchloriede ten opzichte van trypsinogeen te bestudeeren. Een paar dezer proeven mogen hier worden vermeld. (Tabel I en II). Vooraf zij nog meegedeeld dat het gebruikte pancreassap verkregen werd door uitpersing van pancreas-klieren van varkens, alsmede dat de darmwandextracten werden bereid door afgeschaafd darmwandlijmvlies te extraheren en na eenigen tijd te filtreeren. Vervolgens dat in al de, in deze mededeeling aangehaalde proeven, als eiwitstof werd gebruikt: gestold kippeneiwit, volgens de beproefde methode van METT en ten slotte dat, waar in dit opstel van calciumchloriede sprake is, bedoeld wordt het watervrije zout.

T A B E L I.

			Vertering der eiwitkolommetjes in m.m. na	
			24 uur	2 × 24 uur
1	Pankreassap: 3 druppels	+ 2 procents fluornatrium-oplossing 5 c.c.	8	18
2	" : 3 "	+ darmwandextract in 2/10 NaFl oplossing: 5 c.c.	12	22
3	" : 3 "	+ gekookt darmwandextr. in 2/10 NaFl opl. 5 c.c.	9	19
4	" : 3 "	+ gedistilleerd water: 5 c.c.	8	12
5	" : 3 "	+ 0,40/10 opl. v. CaCl ₂ : 2 1/2 c.c. + water: 2 1/2 c.c.	12	25
6	" : 3 "	+ 10/10 opl. v. CaCl ₂ : 2 1/2 c.c. + water: 2 1/2 c.c.	12	26
7	" : 3 "	+ 10/10 opl. v. CaCl ₂ : 2 1/2 c.c. + 20/10 opl. v. NaFl 2 1/2 c.c.	6	8

De proef vermeld in tabel I leert het volgende:

In de eerste plaats blijkt uit 1) dat het pankreassap niet trypsinevrij was, want zooals men ziet was in een medium van een 2 procents oplossing van fluornatrium niet onbelangrijke vertering opgetreden. Was het pankreassap trypsinevrij, was daarin dus enkel trypsinogeen aanwezig geweest, dan zou in het medium eener 2 % Nafl. opl. geen eiwitvertering hebben plaats gehad. Uit een vergelijking van 2) met 1) blijkt dat de eiwitvertering in 2) grooter is dan in 1). Daaruit volgde dat waarschijnlijk nog niet alle trypsinogeen in trypsine was overgegaan, omdat aangenomen moest worden dat in 2) nog trypsinogeen-activering had plaats gehad door het darmwandextract.

Doordat dit pankreassap reeds vrij trypsine bleek te bevatten, konden daaruit ten opzichte van een *activering* van het trypsinogeen door chloorealium uit den aard der zaak geen conclusies worden getrokken, deze proef moest, uit dat oogpunt beschouwd, derhalve als mislukt aangemerkt worden.

Bij vergelijking van 4) met 1) ziet men dat in 4) de vertering na 48 uren belangrijk geringer is dan in 1). Deze uitkomst moet daaraan worden toegeschreven, dat in 1) de bacterien-ontwikkeling door de fluornatriumoplossing is tegengehouden, terwijl in 4) bacteriën zich vrijelijk hebben kunnen ontwikkelen.

Bacteriën (althans sommige bacteriën, op dit punt zal ik evenwel als niet ter zake dienende niet verder ingaan) oefenen, zooals mij in een groot aantal experimenten is gebleken, op trypsinogeen en trypsine werkingen uit, welke lijnrecht tegenover elkaar staan. Terwijl eenerzijds het *trypsinogeen* door bacteriënwerking kan worden *geactiveerd*¹⁾ wordt anderzijds de werking van het *trypsine* door bacteriënwerking (resp. door de omzettingsproducten van het eiwit bij de inwerking van trypsine en bacteriën samen) zeer belangrijk *belemmerd*. Waar in deze proef (Tabel I) het gebruikte pankreassap betrekkelijk weinig trypsinogeen bevatte en veel trypsine daar had de antitryptische werking der bacteriën in dit geval de overhand boven de activeerende werking, hetgeen ook daaruit blijkt dat de eiwitvertering in 4) en 1) na 24 uur nog gelijk is, terwijl de vertering na 48 uur (toen derhalve al het aanwezige trypsinogeen in 4) geacht kon worden in trypsine te zijn overgegaan) belangrijk geringer is dan in 1). Deze proef vormt, zooals men ziet, tevens een bijdrage tot de meening dat met den invloed van mikro-organismen bij proeven omtrent de activeering van trypsinogeen (en ik zou hier

1) Nadere gegevens daaromtrent kunnen o.a. gevonden worden in een artikel van mijn hand in het Archiv. für Anat. und Physiologie 1904 p. 343.

terloops aan willen toevoegen: eveneens bij proeven omtrent anti-tryptisch werkende factoren) terlege rekening moet worden gehouden.

De voorwaarde dat bacterienwerking afdoende moet worden buitengesloten levert bij dergelijke proeven, bijv. bij de bestudeering van den invloed der calciumzouten op de trypsinogeenactivering, een der moeilijkheden op, waarop ik straks doelde. Zulks temeer omdat bij proeven met calciumzouten uit den aard der zaak niet met fluornatrium mag worden gewerkt, zooals ook uit 7) (Tabel I) bijv. blijkt. Zooals men ziet is de vertering in 7) zeer gering. Dit moet daaraan worden toegeschreven dat in dit geval het Fl. van het NaFl met het Ca van het CaCl₂ onoplosbaar CaFl₂ heeft gevormd. Het gevormde precipitaat van CaFl₂ was in 7) naar den bodem van het proefglaasje gezonken, onder meevoering van een deel der eiwitstoffen van het pankreassap. De Mett'sche buisjes waren daardoor ingesloten in een dik precipitaat van CaFl₂ en pankreaseiwit, tengevolge waarvan de trypsinewerking ten opzichte van de Mett'sche eiwitkolommetjes zich begrijpelijkerwijze minder goed kon doen gelden.

Beschouwen wij tenslotte in Tabel I de nummers 5) en 6) in vergelijking met 1) en 2) dan zou men daaruit bij oppervlakkige beschouwing inderdaad den indruk kunnen krijgen dat onder invloed van het calcium-chloriede trypsinogeenactivering heeft plaats gehad, daar immers de vertering in 5) en 6) belangrijk grooter was dan in 1) en even groot, zelfs nog iets grooter, dan in 2). Bij een nadere overdenking van deze proef kwam ik tot de conclusie dat men hier niet enkel met een *activerende* werking door het calciumchloriede te doen kon hebben, dat er voor de grootere vertering in 5) en 6) in ieder geval tevens andere oorzaken aanwezig moesten zijn. Er kon immers, zooals uit 2) blijkt in dit geval slechts weinig trypsinogeen voorhanden zijn, terwijl ten opzichte van het trypsine zich de antitryptische werking der bacterien in 5) en 6) evengoed had moeten doen gelden als in 4) indien niet nog een factor aanwezig was die in 5) en 6) de trypsinewerking meer bevorderde, dan deze door de bacterienwerking werd tegengegaan.

Deze overwegingen brachten mij op het denkbeeld dat het calciumchloriede wellicht de eigenschap zou kunnen bezitten om het trypsine zelf tot verhoogde werkzaamheid aan te zetten. Daardoor zou dan het resultaat van deze en dergelijke proeven (dergelijke uitkomsten ontmoette ik n.l. herhaaldelijk) tevens verklaard zijn.

Als vertegenwoordiger der proeven, waarbij het gebruikte pankreassap trypsinevrij was, dus enkel trypsinogeen bevatte, moge de volgende aangehaald worden (Tabel II)

TABEL II.

Hoeveelheid gebruikt Pancreasperssap		Toegevoegde vloeistoffen	Vertering van twee eiwitkolommetjes in in m.m. nā:	
			24 uur	2 × 24 uur
1)	2 druppels	+ twee procents fluornatrium- oplossing: 10 c.c.	0	0
2)	2 „	+ darmwandextract in 2 / NaFl oplossing: 10 c.c.	5.4	9
3)	2 „	+ gekookt darmwandextract in 2 / ₁₀ NaFl oplossing: 10 c.c.	0	0
4)	2 „	+ één procents oplossing van calciumchloriede: 5 c.c. + 2 / ₁₀ NaFl oplossing 5 c.c.	0	0
5)	2 „	+ één procents oplossing van calciumchloriede: 5 c.c. + water: 5 c.c.	2	6
6)	2 „	+ water: 10 c.c.	1.6	4

In de eerste plaats blijkt uit 1) en 3) dezer proef (Tabel II) dat in dit geval het gebruikte pankreassap enkel trypsinogeen bevatte, dus trypsinevrij was. Op deze proef was dus, uit het oogpunt beschouwd van een onderzoek omtrent het activeerend vermogen van calciumchloriede ten opzichte van trypsinogeen, weinig aan te merken. Behalve dan, dat in deze proef niet met steriel water en steriele CaCl_2 oplossing was gewerkt, wat uit den aard der zaak bij proeven omtrent de activeerende werking van trypsinogeen door calciumchloriede wèl moet gebeuren. Ik haal intusschen juist een proef aan, waarbij van niet steriel water en niet steriele CaCl_2 opl. werd gebruik gemaakt, omdat deze hier ter zake dienende is. Een proef als de in Tabel II weergegevene, kan, misschien nog in sterkere mate dan de vorige (Tabel I) den indruk wekken, wanneer men 5) en 6) met elkaar vergelijkt, dat door chloorecalcium trypsinogeen zou kunnen worden geactiveerd. In 6) is de activeering ongetwijfeld tot stand gekomen door de bacterien, welke zich in het niet steriele water (+ pankreassap) hebben ontwikkeld; in 5) zou de grootere activeering kunnen zijn veroorzaakt door bakteriënwerking en den invloed van CaCl_2 samen. En, waar in 5) de vertering verder bleek gevorderd te zijn dan in 6) zou men allicht tot het besluit kunnen komen dat het calcium-chloriede in dit geval bij de trypsinogeen-activeering een

rol had gespeeld. Intusschen, waar mijn aandacht eenmaal gevallen was op de mogelijkheid van een bevorderende werking van calcium-chloriede ten opzichte van het trypsine, daar zou, uit dat oogpunt beschouwd, het verschil in vertering in 5) en 6) wellicht ook kunnen worden verklaard in dien zin. Een verdere bespreking dezer proef mag overbodig geacht worden; ik meende haar hier te mogen opnemen, mede om in het licht te stellen dat men bij conclusies omtrent een eventueele activeerende werking van calciumchloriede ten opzichte van trypsinogeen groote voorzichtigheid dient te betrachten.

Terwijl het mij op grond van het vorenstaande niet onwaarschijnlijk voorkwam dat calcium-chloriede op het trypsine een stimuleerenden invloed zou kunnen uitoefenen, werd alsnu een nader onderzoek ingesteld teneinde die onderstelling aan het experiment te kunnen toetsen. Ik maakte voor dat doel gebruik van eenige trypsine-preparaten uit den handel, met name van die van GRÜBLER en van MERCK. Daar het mij bleek dat de in het laboratorium aanwezige preparaten bijzonder zwak werkzaam waren ten opzichte van gestold kippeneiwit, heb ik eenige malen versche preparaten laten komen. Aan de firma GRÜBLER deed ik van mijne bevinding omtrent de zeer zwakke werkzaamheid mededeeling, waarop deze firma een, volgens hare mededeeling, versch. bereid preparaat zond. Intusschen bleek ook dit preparaat niet beter werkzaam te zijn dan de andere. D. w. z. ten opzichte van gestold kippeneiwit, ten opzichte van fibrine liet de werking dezer preparaten niets te wenschen over. Door de concentratie der trypsine-oplossingen (resp. suspensies) echter belangrijk sterker te nemen, dan de bij de leveranties gegeven voorschriften luiden, kon ik de handelspreparaten voor mijn doel gebruiken. De trypsine-oplossingen, resp. suspensies, werden bereid met behulp van soda-oplossingen. Daar het gebruik van natrium-carbonaat mij intusschen eenigermate bedenkelijk scheen, met het oog op een, na toevoeging van CaCl_2 oplossing te verwachten vorming van het weinig oplosbaar calcium-carbonaat, maakte ik gebruik van zeer zwakke, in den regel 0.1 % natrium-carbonaat oplossingen.

Dat het gebruik van een 0.1 procent oplossing van natrium-carbonaat geen bezwaren opleverde, blijkt uit de volgende proef, welke overigens ten doel had den bevorderenden invloed van CaCl_2 op de trypsine-werking na te gaan. (Tabel III). Voor deze proef werd 1 gram trypsine-GRÜBLER opgelost in 100 c.c. natriumcarbonaat van 0.1 %. De trypsine loste hierin op met een lichte opalescentie, de oplossing werd vóór het gebruik niet gefiltreerd. Aan 5 c.c. dezer oplossing werden 5 c.c. water resp. CaCl_2 opl. toegevoegd.

TABEL III.

	Vertering van 2 eiwitkolommetjes in m.m. na:	
	2×24 uur	3×24 uur
1) Trypsine opl. 1 100: 5 c.c. + water: 5 c.c.	3	4
2) Trypsine opl. 1 100: 5 c.c. + CaCl ₂ opl. van 1%: 5 c.c.	9	15
3) Trypsine opl. 1 100: 5 c.c. + CaCl ₂ opl. van 1%: 2½ c.c. + water: 2½ c.c.	10	15

Uit deze proef blijkt dat de eiwitvertering in 2) en 3), waar aan de trypsine-oplossingen calciumchloride-oplossingen waren toegevoegd, belangrijk grooter was dan in 1), waar water was toegevoegd. Men ziet dat het trypsine op zich zelf (1), ofschoon hier, zooals boven gezegd, 1 gram trypsine op 100 c.c. natrium-carbonaat van 0.1 % was genomen (door de toevoeging van een gelijke hoeveelheid water aan deze oplossing, werd de trypsine-concentratie dus 1/200) ten opzichte van het gestolde kippeneiwit zeer zwak werkzaam was. En vervolgens dat deze werkzaamheid in belangrijke mate werd verhoogd onder den invloed eener 1 %, resp. 0.5 %, oplossing van Calcium-chloride.

Intusschen mocht uit dit resultaat nog niet met zekerheid worden besloten dat het calcium-chloride in deze proef bevorderend ten opzichte der trypsine had gewerkt. En wel daarom niet, omdat het zou kunnen zijn dat het trypsine-preparaat nog trypsinogeen bevatte, hetwelk dan misschien door het calcium-chloride in trypsine zou kunnen zijn overgevoerd.

Alvorens met de proeven in deze richting verder te gaan, diende ik derhalve eerst te onderzoeken of het gebruikte trypsine-preparaat inderdaad trypsinogeen-vrij was. Deze vraag kon worden opgelost door aan de trypsine-oplossing bij een volgende proef tevens darmwandextract toe te voegen en tegelijkertijd gekookt darmwandextract. [Door koking wordt, zooals vrij algemeen wordt aangenomen en ook naar mijne meening onomstootelijk vaststaat, (men vergelijk hieromtrent ook 3) (Tabel II) de stof in het darmwandextract, die de trypsinogeen-activering te weeg brengt, onwerkzaam gemaakt].

Teneinde de vraag omtrent het al of niet trypsinogeen vrij zijn van het trypsine te kunnen oplossen, scheen het mij gewenscht een dubbele proef te nemen, in dien zin dat in de eerste plaats gebruik

gemaakt werd van een oplossing van trypsine in 0.1 % Na_2CO_3 opl. (Tabel IV A 1—6) en in de tweede plaats van een oplossing van trypsine in een 2 % fluornatrium-oplossing (Tabel IV B 1—6).

Zoals reeds werd opgemerkt, werd voor deze proef (Tabel IV) dezelfde trypsine-GRÜBLER gebruikt als die welke in de vorige proef (Tabel III) aangewend werd: in plaats van een trypsine-concentratie 1/100 werd echter gebruikt 1/50. Tevens werd, zooals men uit deze Tabel ziet, gebruik gemaakt zoowel van een waterig darmwandextract als van een darmwandextract in 2 % NaFl oplossing. Vermeld moge nog worden dat de goede trypsinogeen-activerende werking der darmwand-extracten met behulp van pankreasperssap steeds is gecontroleerd geworden.

TABEL IV.

A	Trypsine GRÜBLER 1 gram op 50 c.c. Na_2CO_3 opl. v. 0.1 %	Toegevoegde vloeistoffen	Vertering der twee eiwitkolommetjes in m.m., na		
			24 uur	48 uur	72 uur
1)	3 c.c.	water: 2 c.c.	2	4	5
2)	3 c.c.	CaCl_2 opl. (1 %): 2 c.c.	8	16	20
3)	3 c.c.	Darmwandextract in 2 % NaFl- opl. 2 c.c.	4	8	12
4)	3 c.c.	Waterig darmwandextract: 2 c.c.	3.60	7	10
5)	3 c.c.	Gekookt darmwandextract in 2 % NaFl-opl.: 2 c.c.	4	8.50	13
6)	3 c.c.	Gekookt waterig darmwandextract: 2 c.c.	8	8	11
B					
	Trypsine GRÜBLER 1 gram op 50 c.c. eener 2 % NaFl-opl.				
1)	3 c.c.	Water: 2 c.c.	3	6	8
2)	3 c.c.	CaCl_2 -opl. (1 %): 2 c.c.	0	0	0
3)	3 c.c.	Darmwandextract in 2 % NaFl-opl.: 2 c.c.	4	8	12
4)	3 c.c.	Waterig darmwandextract: 2 c.c.	4.40	8.50	12
5)	3 c.c.	Gekookt darmwandextract in 2 % NaFl-opl.: 2 c.c.	4	9	13
6)	3 c.c.	Gekookt waterig darmwandextract: 2 c.c.	4	8.50	12

De vorenstaande proef (Tabel IV A en B) leert het volgende. Uit een vergelijking van A 3—6 met A_1 , en eveneens van A 3—6 met B_1 , blijkt dat de darmwandextracten ook in deze proef een gunstige werking hebben uitgeoefend op de trypsine-werking. Uit het resultaat dat de eiwitvertering in A 3, 4, 5 en 6, en eveneens in B 3, 4, 5 en 6, weinig of niet verschildt; dat derhalve de *gekookte* darmwandextracten dezelfde gunstige werking bleken uit te oefenen als de ongekookte darmwandextracten, mag de conclusie worden getrokken dat in het gebruikte trypsine-preparaat geen *trypsinogeen* aanwezig was. Het feit dat desniettegenstaande de eiwitvertering in A 3—6 belangrijk grooter werd gevonden dan in A_1 , terwijl hetzelfde het geval bleek te zijn resp. met B 3—6 en B_1 , kon m. i. niet anders verklaard worden dan daardoor, *dat in darmwandextracten, resp. in den darmwand, een stof voorkomt die in staat is de trypsinewerking te bevorderen, een stof die door koken (in tegenstelling met de trypsinogeen activeerende stof) niet wordt omverzaam gemaakt.*

Uit de bevinding dat het gebruikte trypsine geen trypsinogeen bleek te bevatten, volgt tevens dat de gunstige werking van het calciumchloriede in de vorige proef (Tabel III) gezien, aan een *bevorderende werking van het trypsine door Calciumchloriede* moet worden toegeschreven. De stimuleerende werking van calcium chloriede ten opzichte van trypsine komt eveneens tot uiting, en wel in zeer duidelijke mate, in de laatste proef (Tabel IV A en B). Men ziet immers dat in A_2 de eiwitvertering belangrijk grooter is dan in A_1 . Dat in B_2 in 't geheel geen vertering had plaats gehad moet ongetwijfeld daaraan worden toegeschreven dat hier een neerslag van CaF_2 is gevormd, hetwelk op den bodem van het proefglasje was gezonken en de Mett'sche buisjes inhulde, zoodat de tryprinewerking niet tot uiting kon komen. Uit een vergelijking van A 3—6 met A_2 , blijkt tevens dat de stimuleerende werking van het darmwand-extract een geringere is dan die teweeg gebracht door calcium chloriede, althans in de hier gebruikte concentratie der oplossing¹⁾.

Vervolgens mag uit A 3 en 5 en B 3 en 5 (Tabel IV) worden geconcludeerd *dat de, de trypsinewerking bevorderende stof, van het darmslijmvlies afkomstig naar alle waarschijnlijkheid geen calciumzout is.* Immers mag worden aangenomen dat een calciumzout, mocht het in de gebruikte extracten al aanwezig zijn, door het fluoornatrium zou zijn geprecipiteerd tot onoplosbaar CaF_2 . De laatste opmerking geldt uit den aard der zaak eveneens voor andere eventueel in de

¹⁾ Een onderzoek omtrent den invloed der concentratie der calciumchloriede oplossing, alsmede omtrent de werking van andere oplosbare calciumzouten ten opzichte der trypsine is in gang, echter nog niet afgesloten.

darmslijmvliesextracten, resp. het darmslijmvlies zelf, aanwezige zouten voorzoover deze met fluonatrium onoplosbare verbindingen vormen.

De resultaten, aan de hand van de aangevoerde Tabellen beschreven, werden bevestigd door andere met het zelfde doel verrichte proeven welke, zooals reeds werd opgemerkt, werden genomen met verschillende Trypsinepreparaten van GRÜBLER en van MERCK. Een enkele proef met trypsine-MERCK verricht, moge hier nog een plaats vinden. (Tabel V).

T A B E L V.

Trypsine-MERCK 1 gram op 50 c.c. Na ₂ CO ₃ -opl. v. 0.1%	Toegevoegde vloeistoffen	Vertering der twee eiwitkolommetjes in m.m. na		
		24 uur	48 uur	72 uur
3 c.c.	Water: 2 c.c.	4	10	11
3 c.c.	CaCl ₂ -opl. van 1 %: 2 c.c.	8	20	leeg
3 c.c.	Darmwandextract in 2 % NaFl: 2 c.c.	4.40	16	leeg
3 c.c.	Waterig darmwandextract: 2 c.c.	5.50	15	leeg
3 c.c.	Gekookt darmwandextract in 2 % NaFl: 2 c.c.	5.60	15	leeg
3 c.c.	Gekookt waterig darmwandextract: 2 c.c.	6	16	leeg

Zooals men ziet is het resultaat dezer proef (Tabel V) analoog aan dat van de vorige. Tot verdere opmerkingen geeft Tabel V geen aanleiding, behalve tot deze dat hieruit, in vergelijking met Tabel IV, blijkt dat de trypsine-MERCK iets werkzamer was dan de trypsine-GRÜBLER, een feit dat steeds kon worden geconstateerd bij de proeven.

CONCLUSIES.

1. Het is uit de vorenstaand medegedeelde proefnemingen gebleken dat Calciumchloriede de eigenschap bezit het trypsinogeenrijke trypsine in belangrijke mate tot verhoogde werkzaamheid te kunnen aanzetten.

2. Deze bevorderende werking van het calciumchloriede ten opzichte van trypsine behoort wél onderscheiden te worden van de activeerende werking van calciumchloriede ten opzichte van trypsinogeen, welke laatste eigenschap door meerdere auteurs aan dit zout wordt toegeschreven.

3. Ook darmslijmvliesextracten bleken een, de trypsinewerking bevorderend vermogen te bezitten, evenwel in geringere mate dan calciumchloriede.

4. De stof van het darmslijmvlies afkomstig, welke deze werking teweeg brengt, wordt door koken niet vernietigd en is naar alle waarschijnlijkheid geen calcium.

5. Het darmslijmvlies bevat derhalve naast een stof, die, zooals bekend is, het vermogen bezit trypsinogeen te kunnen activeeren en welke stof door koken onwerkzaam wordt gemaakt, nog een anderen stof, welke de eigenschap bezit de werking van reeds op zich zelf werkzame, trypsinogeen-vrije, trypsine te kunnen bevorderen, een stof welke door koken niet onwerkzaam wordt gemaakt.

Physiol. Laboratorium.

Groningen, 22 Januari 1911.

Physiologie. — De Heer HAMBURGER biedt, mede namens den Heer Dr. F. BUBANOVIC, een mededeeling aan: „*Over het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in het bijzonder voor Alkali- en Aardalkalimetalen.*”

De Heer G. GRYNS heeft te dezer plaatse¹⁾ een kleine mededeeling gepubliceerd, waarin hij op grond van eenige berekeningen meent te moeten opkomen tegen de gevolgtrekkingen, die wij maakten uit onze proeven over bovengenoemd onderwerp. (Zittingsverslag van 25 Juni 1910).

Wij houden ons overtuigd, dat zijn opmerkingen achterwege zouden zijn gebleven, indien hij onze meer uitvoerige mededeelingen over dit onderwerp in de „Archives Internationales de Physiologie” had afgewacht. Blijkens de noot op de eerste bladzijde van ons stuk hadden wij die in uitzicht gesteld en weldra zijn ze ook verschenen²⁾.

In deze verhandeling is uitvoerig mededeeling gedaan van de wijze van proefneming, en ten overvloede is, bij wijze van voorbeeld, in een appendix een uitvoerig verslag toegevoegd over alle bijzonderheden van één der proevenreeksen. In een zittingsverslag kan men bezwaarlijk in bijzonderheden treden, vooral waar het, zooals in dit

¹⁾ Zittingsverslag van 24 September 1910.

²⁾ La perméabilité physiologique des globules rouges, spécialement vis-à-vis des cations. Archives Internationales de Physiologie, Vol. X, p. 1. Verschenen 24 Sept. 1910.

geval, uitvoerige onderzoekingen geldt. Een gedetailleerde beschrijving is beter in een vaktijdschrift op haar plaats.

Wij zouden met deze opmerking kunnen volstaan, doch het is wellicht van eenig nut, dat zij, die niet dadelijk gelegenheid hebben om de „Archives Internationales” te raadplegen, kennis nemen van de vergissing van Dr. GRYNs.

Laten wij een willekeurig voorbeeld nemen om in het licht te stellen, waarin de vergissing van den Heer GRYNs bestaat.

Wij wenschen den invloed na te gaan van toevoeging van b.v. een weinig water op de uitwisseling van bestanddeelen tusschen bloedlichaampjes en serum.

Tot dit doel namen wij een afgemeten hoeveelheid bloed. Laten we om het den lezer gemakkelijk te maken, aannemen, dat die hoeveelheid 100 c.M.³ bedroeg. Laten deze bevatten 40 c.M.³ roode bloedcellen en 60 c.M.³ serum. Van die 60 c.M.³ serum nemen wij 20 c.M.³ weg en verdunnen die met 7½ c.M.³ water, maar voegen nu *niet* die 27½ c.M.³ vloeistof aan het achtergebleven bloed toe, maar slechts 20 c.M.³, zoodat het volume van het bloed weer 100 c.M.³ wordt. Nu kan men toch niet verlangen, zooals GRYNs doet, dat het behandelde bloed nog dezelfde absolute hoeveelheid bestanddeelen bevat, als het oorspronkelijke; er is immers een deel van het serum teruggelaten. *Dit heeft GRYNs over het hoofd gezien*, en een soortgelijke fout heeft hij gemaakt bij de berekening van de proeven, waarin het serum door toevoeging van NaCl hyperisotonisch werd gemaakt.

Wanneer de Heer GRYNs, met vermindering van de door hem begane fout, de berekening herhaalt, zal hij niet meer tot de slotsom komen, dat „de fouten in onze analyses veel grooter zijn, dan de verschillen, waarop onze conclusies berusten”, en ook wel geen aanleiding meer vinden om op grond van die berekening onze zienswijze ten opzichte van de permeabiliteit der bloedlichaampjes te bestrijden.

Physiologie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. G. DUSSER DE BARENNE: „*De strychnine-werking op 't Centrale Zenuwstelsel. De segmentaire, streng lokale strychnine-vergiftiging der dorsale ruggemergs-mechanismen: een bijdrage tot de dermatomerie van den achterpoot van den hond.*”

(Mede aangeboden door den Heer L. BOLK).

In een vorige mededeeling¹⁾ heb ik waarschijnlijk gemaakt, dat de opvatting dat strychnine-tetani ontstaan als gevolg van de vergiftiging door dit alkaloid der dorsale, koördinatorische ruggemergs-mechanismen, niet juist kan zijn.

¹⁾ DUSSER DE BARENNE, Die Strychnin-wirkung auf das Zentralnervensystem. II. Folia neurobiologica. Band V, Heft 1, 1911. voorloopige mededeeling in Zentralblatt f. Physiologie. Band XXIV. N^o. 18, 1910.

Ten gevolge der uitsluitend op de dorsale vlakte van 't ruggemerg beperkte aanwending van 't gif treden *nooit* tetani op, maar ziet men 't door mij beschreven *Syndroom der strychnine-vergiftiging van de dorsale ruggemergsmechanismen*, dat uit de volgende symptomen is opgebouwd.

1. Subjektieve sensibiliteitsstoornissen, hoogstwaarschijnlijk van paraesthetischen aard.

(Bij den kikvorsch door „Abwischbewegungen”, bij den hond door likken en bijten der huid zich uitend).

2. Hyperreflexie.

3. Spontane, d.w.z. zonder aantoonbare, uitwendige oorzaak optredende spierschokken, die echter toch nog voor 't meerendeel reflektorisch tot stand komen.

Reeds bij de eerste proeven bleek 't, dat terwijl deze symptomatologie als zoodanig een konstante en kenmerkende is, 't huidgebied waarin zich deze sensibiliteitsstoornissen (zowel de subjektieve als de objectieve) afspelen, in plaats en uitbreiding wisselt, afhankelijk van 't deel van 't ruggemerg waarop men 't strychnine aanwendt.

Wordt dit gif op de caudale ruggemergsegmenten gebracht, dan treden de symptomen op aan 't achterste deel van 't lichaam.

Vergiftigde ik de dorsale mechanismen van de rechter helft van de lenden-aanzwelling, dan openbaarde 't syndroom zich uitsluitend in den rechter achterpoot.

In weer een ander geval werd 't gif aangebracht op de dorsaalvlakte van enkele der caudale segmenten van 't thorakaal-merg, om daarna de bovenvermelde symptomen te zien optreden in een zone, die, over de laatste ribben verloopend, bandvormig 't lichaam omgaf.

Uit deze feiten blijkt ten duidelijkste dat 't syndroom lokaliseerbaar is; ja, zelfs kan men, indien telkens de dorsaalvlakte van één segment van 't ruggemerg vergiftigd wordt, een reeks huidgebieden, waarin 't syndroom zich afspeelt, vinden, naar vorm, ligging en uitbreiding van elkaar verschillend.

Zoo heb ik in een reeks experimenten, vanaf *Th. XIII* tot en met *S. I.* achtereenvolgens de dorsale mechanismen telkens van één segment vergiftigd en daarbij een aantal huidgebieden gevonden, waarin 't syndroom optreedt en die ik *strychnine-segmentzones* noemen wil, die in regelmatige volgorde en met voor iedere zone kenmerkenden vorm, ligging en uitbreiding op den achterpoot van den hond liggen.

Als voorbeeld van de wijze waarop ik in deze proevenreeks te werk ging, zoowel wat betreft de methodiek der strychnine-applicatie

als wat 't sensibiliteitsonderzoek en de bepaling dezer strychnine-segmentzones aangaat, volge hier 't protokol van een mijner proeven op 't caudale borstmerg, te meer waar uit de bijgevoegde figuren, (fig. I—IV) die de resultaten demonstreeren in 2 gevallen van omgrenzing der strychninesegmentzone van *Th.* X verkregen, duidelijk blijkt hoezeer voor eenzelfde 'segment de zones op elkaar gelijken zoowel wat ligging, als wat vorm en uitbreiding aangaat.

Ik kies bovendien dit experiment omdat deze strychnine-zones voor de rompsegmenten zeer eenvoudig van gedaante zijn, in tegenstelling met die op den poot gelegen, zoodat de overeenkomst des te duidelijker in 't oog springt.

Protokol I.

6 Juni '10. Str. Hond. XVIII. „Dackel“.

't Caudale deel van 't borstmerg wordt blootgelegd en na splijting der dura mater over *Th.* IX, X en XI de uitgetreden liquor cerebrospinalis met een watje opgezogen. Nu wordt op de volgende wijze 't strychnine aangebracht.

Een om de branches van een fijn pincetje gerold, ± 3 m.M. lang, wattepropje wordt in 1%, met methyleenblauw gekleurde, strychninesulfaatoplossing gedoopt en daarna uitgeknepen.

Met dit wattepropje wordt nu herhaaldelijk, uiterst voorzichtig, de dorsaalvlakte van 't segment van *Th.* X, ter plaatse van de intreding van de rechter achterwortel, bebet.

Na elke aanraking met 't strychnine-watje wordt de eventueel overtollig aanwezige gifoplossing met een vochtig, gifvrij wattepropje opgezogen.

Enkele seconden nadat zoo eenige malen 't ruggemerg daar ter plaatse met de strychnineoplossing in aanraking is gebracht, begint de hond, die inmiddels nagenoeg uit de narkose ontwaakt is, zich de huid van de rechter romphelft te likken in een gebied, dat als een vrij breede band over de laatste ribben verloopt van de dorsale tot de ventrale middellijn.

De hond omgrenst zelf met zijn natte tong vrij scherp en duidelijk die zone. Ook 't objektieve deel van 't syndroom is aanwezig en laat zich gemakkelijk van uit diezelfde huidzone opwekken. De hyperreflektorische symptonen zijn: 1°. rimpelen der huid, 2°. kromming der wervelkolom met de concaviteit naar rechts, 3°. 't nu en dan optreden van krabbewegingen met den rechter achterpoot, die veel gelijken op die van 't bekende SHERRINGTON'sche „scratchreflex“.

Om objektief de uitbreiding der strychninesegmentzone vast te stellen

raak ik òf met een mijner vingertoppen, òf met de punt van een gesloten, krom pincetje heel zacht de huid van 't dier aan in de buurt van 't gebied waar zich 't syndroom afspeelt. Langzamerhand nader ik nu, telkens die zachte, mechanische prikkel herhalend, deze zone, om zoodra ik de grens ervan overschrijd, de bovengenoemde hyperreflektorische symptomen te zien optreden of in sterkte toenemen, terwijl 't dier meestal¹⁾ tegelijkertijd door huilen of bijten aangeeft dat de subjektieve symptomen ook optreden of in intensiteit toenemen.

Met een huid-potlood worden de gevonden grenzen op de huid aangegeven en zoo de zone afgeteekend. Dan wordt 't dier gedood en 't achterlijf gefotografeerd of de zone op een gipsmodel van de extremiteit nauwkeurig afgebeeld.

Op de huid resp. 't gipsmodel worden vóór dien de verschillende vaste punten en lijnen, zooals de laatste rib, de crista ilei, de trochanter major, tuber ischii, epicondylus femoris lateralis et medialis, patella, tuberositas tibiae en malleolus medialis et lateralis aangegeven.

Dan wordt autopsie verricht, waarbij nauwkeurig wordt vastgesteld op welk segment 't gif aangebracht is, terwijl in 't protokol ook een eventueele anomalie der wervelkolom vermeld wordt.



Fig. I. Th. X.



Fig. II. Th. X.



Fig. III. Th. X.



Fig. IV. Th. X.

Mijn materiaal, voor zoover 't dit onderzoek betreft, bestaat uit 29 experimenten, die als volgt over de verschillende segmenten verdeeld zijn:

¹⁾ Ik zeg „meestal”, want de intensiteit waarmee 't subjektieve deel van 't syndroom in de verschillende gevallen aanwezig is, wisselt nogal, ten deele van 't „temperament en karakter” van 't dier afhankelijk, ten deele misschien aan den verschillenden graad van 't ontwaakt zijn uit de narkose toe te schrijven.

op 't segment van

<i>Th. X</i>	werd $3 \times$	Strychnine	aangebracht	(Str. Hond XVIII, XIX, XX)
<i>Th. XIII</i>	„ $1 \times$	„	„	(Str. Hond XLIV)
<i>L. I</i>	„ $1 \times$	„	„	(Str. Hond XLV)
<i>L. II</i>	„ $3 \times$	„	„	(Str. Hond XIII, XXV L., XLVI)
<i>L. III</i>	„ $3 \times$	„	„	(Str. Hond XXI, XXIX, XLVII)
<i>L. IV</i>	„ $4 \times$	„	„	(Str. Hond XIV, XXV R., XLVIII, XLIX)
<i>L. V</i>	„ $3 \times$	„	„	(Str. Hond XV, XXXI, L)
<i>L. VI</i>	„ $3 \times$	„	„	(Str. Hond XVI, LI, LII)
<i>L. VII</i>	„ $6 \times$	„	„	(Str. Hond XVII, XXII, XXIII, XXVI, LIII, LIV)
<i>S. I</i>	„ $2 \times$	„	„	(Str. Hond XXIV, LV).

Vóór enkele maanden verschenen de onderzoekingen van WINKLER en VAN RIJNBEEK ¹⁾, waarin zij met de SHERRINGTON'sche isolatie-methode aan een groot, 40 objecten omvattend, materiaal de dermatomerie van den achterpoot van den hond vaststelden.

Toen dat werk verscheen, was mijn proeven-reeks bijna ten einde en kon ik een waarlijk treffende overeenstemming opmerken tusschen de bevindingen der genoemde onderzoekers, wat betreft vorm, ligging en uitbreiding der door hen gevonden dermatomen, en mijne met deze strychninemethode vastgestelde strychnine-segmentzones, een overeenstemming en gelijkenis die in sommige gevallen, zooals blijken zal, nagenoeg tot identiteit werd.

Ik wil nu in de volgende bladzijden mijn in dit opzicht verkregen resultaten mededeelen, daarbij telkens mijn strychninesegmentzones vergelijkende met de verhoudingen zooals WINKLER en VAN RIJNBEEK die bij hun dermatomen vonden.

De theoretische bespiegelingen en consequenties die uit deze mee te deelen feiten voortvloeien, zullen in deze mededeeling geen plaats vinden.

Th. XIII. Evenals van de rompsegmenten is de strychnine-zone van dit segment nog zeer eenvoudig van vorm, zoodat de verschillende eigenschappen zonder meer duidelijk worden uit de bijgevoegde Fig. V en VI.

¹⁾ WINKLER en VAN RIJNBEEK „Experimental researches on the segmental innervation of the skin in dogs”. VIe en VIIe mededeeling. Verslagen der Koninkl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 1910, Juli en November.

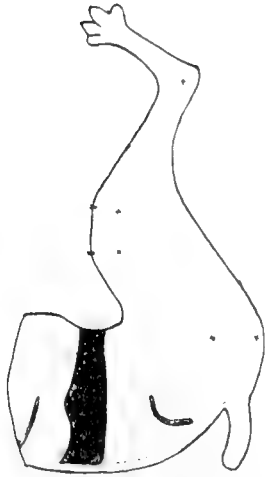
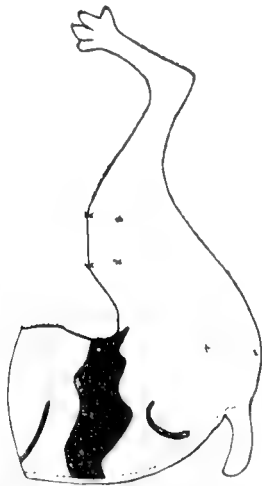


Fig. V. Th. XIII.



Fig. VI. Th. XIII.

L. I. Wat ons teerst treft, is wel 't feit dat deze strychnine-segmentzone duidelijk meer caudaal op 't lichaam ligt dan de voorafgaande. We hebben hiertoe slechts de ligging der caudale grens van de zones ten opzichte der crista aliaea te vergelijken, zooals Fig. V en Fig. VII die toonen. Deze zone ligt feitelijk nog niet op de huid van den voet, hoewel we toch wel de nabijheid van dit lichaamsdeel kunnen bespeuren, aan de kleine tongvormige uitbochting die deze zone in de buigingsplooi der heup vertoont. Zie Fig. VII. WINKLER en VAN RIJNBEEK vonden analoge verhoudingen bij hun *L. I.* dermatoom.

Fig. VII. *L. I.*Fig. VIII. *L. I.*

L. II is 't eerste segment, welks strychnine-zone op de huid van den poot ligt. 't Is in vergelijking met de *L. I*-zone meer caudaalwaarts gelegen, wat o. a. weer daaruit blijkt dat de crista ilei nu ten deele in dit huidgebied is komen te liggen.

Deze strychnine-segmentzone ligt zeer ver op de laterale vlakke van den poot, terwijl ook een groot deel van de mediale vlakke er door ingenomen wordt.

't Meest distaal op den poot liggende punt dezer zone ligt, zooals Fig. IX en X toonen, op ongeveer $2\frac{1}{3}$ c.M. van den bovensten patellarand. In al mijn gevallen was de ligging dezer distale grens dezelfde, terwijl ik ook steeds vond dat de vaste punten van 't kniegewricht altijd buiten de zone lagen.

De aangaven van WINKLER en van RUIJBERK betreffende 't dermatoom van *L. II*, zijn volkomen gelijkkluidend met mijn bevindingen van deze zone. Aan de ventrale middellijn is de strychnine-segmentzone vrij smal en neemt zij de huid van den wortel der penis in, zonder op 't scrotum over te gaan.

Bij vrouwelijke individuen ligt de caudale grens der zone $\pm 2\frac{1}{2}$ c.M. cranial van den voet van den Mons veneris.



Fig. IX. *L. II*.



Fig. X. *L. II*.

L. III. In tegenstelling tot de vrijwel in alle gevallen konstante ligging der grenzen van de strychninesegmentzone van *L. II*, bijv. ten opzichte van de trochanter en de vaste punten van 't kniegewricht treft ons bij de zone van *L. III*, dat hoewel de vorm ongeveer dezelfde is, de ligging der grenslijnen in de verschillende gevallen nogal wisselend is.

Bij Str. Hond XLVIII bijv. vond ik dat de caudale grens ongeveer

2 c.M. craniaal van de trochanter langs deze verloopt, terwijl bij Hond XXIX die lijn iets caudaal van dit beenpunt op de laterale dijvlakte ligt. Ook WINKLER en van RIJNBEEK constateerden voor hun dermatomen een analoog gedrag. Dezelfde onstandvastigheid vinden we ook voor de grenzen der betreffende zone ten opzichte van de beenpunten van 't kniegewricht. Bij Str. Hond XXIX verliep de caudale huidveldgrens over de knie iets boven de tuberositas tibiae, bij de honden XXI en XLVII lag deze grens op de voorvlakte van 't onderbeen, 3 c.M. distaal van 't bovengenoemde beenpunt.

Vergelijken we nu weer de opgaven van WINKLER en van RIJNBEEK voor hun *L. III* dermatomen, dan blijkt dat ook zij die disto caudale grens in hun verschillende isolatie-gevallen op verschillende hoogte vinden. Terwijl evenwel bij mijn strychninesegmentzones de ligging dier grens schommelde om de tuberositas tibiae, reikt volgens de aangiften der genoemde schrijvers die grens niet zoover distaal op de post omlaag en varieëert de ligging ervan om de horizontale middellijn der patella als gemiddelde.

Overigens zijn de opgaven omtrent vorm, ligging en uitbreiding bij WINKLER en van RIJNBEEK gelijkkluidend met mijn bevindingen.

Aan de ventrale middellijn ligt dit huidgebied op den peniswortel en een deel van 't scrotum.

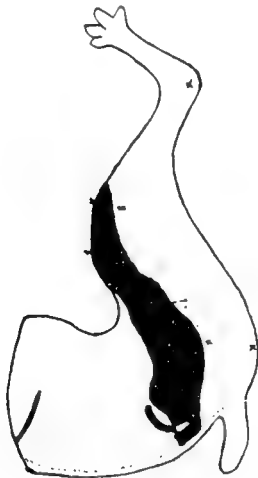


Fig. XI. *L. III.*



Fig. XII. *L. III.*

L. IV. De strychninezone van dit segment heeft zeer veel gelijkenis met die van 't voorafgaande segment, alleen ligt ze meer caudaal en dus ook meer distaal op den poot.

De craniale grens vinden we aan de dorsale middellijn steeds caudaal van de crista ilei. Op de laterale dijvlakte verloopt de caudale

grenslijn meestal nagenoeg over de trochanter in de richting van 't kniegewricht om ± 4 c.M. distaal der tuberositas tibiae de crista tibiae te overschrijden.

Aan de ventrale middellijn wordt de scrotaal huid door deze zone ingenomen.



Fig. XIII. L. IV.



Fig. XIV. L. IV.

L. V. Kenmerkend voor deze strychninesegmentzone is dat zij den samenhang met de dorsale, zoowel als met de ventrale middellijn van 't lichaam verloren heeft. WINKLER en van RIJNBEEK vonden 't zelfde voor hun L. V dermatomen en betitelen dit huidgebied dan ook als 't eerste „apikale dermatoom”. De zone ligt ten deele op de laterale, ten deele, en wel voor 't grootste deel, op de mediale vlakte van de dij. 't Meest proximale punt ligt op de laterale dijvlakte ongeveer op 't midden der lijn die trochanter en epicondylus lateralis verbindt. Van daar loopt de craniale grenslijn distaalwaarts om tusschen patella en tuberositas tibiae op de voorvlakte van den poot te geraken en vandaar op de mediale dijvlakte om te slaan.

De caudale grens dezer strychninesegmentzone geraakt op de grens tusschen 't proximale en middelste derde deel der crista tibiae op de mediale vlakte van 't onderbeen.

Op dit deel der extremiteit ligt dit huidgebied geheel op de mediale zijde, zoodat 't hier als een smalle tong zich uitstrekt, daarbij in de verschillende gevallen verschillend ver distaalwaarts reikende. Soms komt 't niet verder dan de malleolus medialis, soms bereikt de zone zelfs de zool van den medialen teen. De malleolus medialis ligt óf in 't midden der smalle tong óf juist op de voorgrens ervan.

WINKLER en van RIJNBEEK vinden voor hun L. V dermatomen analoge verhoudingen.

Fig. XV. *L. V.*Fig. XVI. *L. V.*

L. VI. Nog meer dan de strychninesegmentzone van *L. V* ligt die van 't 6e lendenmergsegment op de mediale pootvlakte. Slechts een zeer klein deel ervan ligt nog op de laterale vlakte der extremit. Terwijl de zone van *L. V* hoogstens de huid van den medialen teen beslaat, wordt door de *L. VI* strychninezone de geheele mediale helft van den voet ingenomen, zoowel op de volaire als op de dorsale vlakte. Evenals WINKLER en VAN RIJNBERK, wier gegevens omtrent 't *L. VI* dermatoom overeenstemmen met mijn bevindingen betreffende de overeenkomstige strychninesegmentzone, voor 't dermatoom aangegeven, kunnen we dus zeggen dat de strychninezone van *L. VI* spiraalsgewijze op het onderbeen en den voet ligt. Nooit vond ik dat

Fig. XVII. *L. VI.*Fig. XVIII. *L. VI.*

deze zone samenhang met de lichaamsmiddellijnen, evenmin als de genoemde schrijvers dit voor hun *L. VI* dermatoom vonden.

L. VII. Ook de strychninezone van dit segment ligt distaal op de poot, hoewel 't op de laterale vlakke reeds weer veel verder proximaalwaarts reikt. Deze zone heeft een typische, langgerekte vorm en ook de ligging en uitbreiding is in alle gevallen een kenmerkende.

Wat de ligging betreft is dit huidgebied gekarakteriseerd door 't feit, dat 't de laterale voet- en onderbeenvlakte inneemt en op de dij een groot deel der postero-laterale vlakke beslaat.

De uitbreiding dezer strychninesegmentzone is een nog al wisselende. Naast zones die slechts tot de malleolus lateralis distaalwaarts reiken, kan men, en dit is meestal 't geval, zulke ontmoeten die ook nog een deel der voethuid innemen en wel of slechts de huid van den lateralen teen of de geheele laterale voethelft.

WINKLER EN VAN RIJNBEEK vonden dezelfde verhoudingen voor hun *L. VII* dermatomen. Als gemiddelde grootte van deze strychnine-segmentzone zou ik willen aangeven die waarbij de huid, zoowel aan den voetrug als aan de zool, der 2 laterale teenen door dit veld wordt ingenomen.

Fig. XXI geeft de verschillende varianten in uitbreiding van de *L. VII* zone op den voet weer zoals ik die in eenige proeven gevonden heb.



Fig. XIX. *L. VII.*

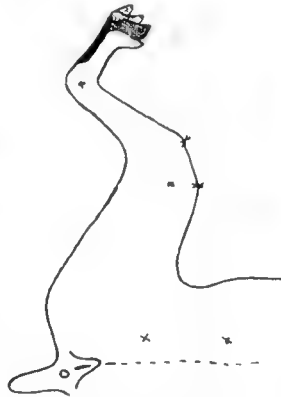


Fig. XX. *L. VII.*

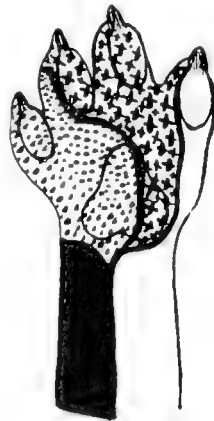


Fig. XXI. *L. VII.*

SI. 't Dermatoom van *SI* is, naar de gegevens van WINKLER EN VAN RIJNBEEK, 't eerste caudale randdermatoom, d.w.z. 't eerste

der caudale pootdermatomen dat weer den samenhang met de lichaamsmiddellijnen herwonnen heeft.

Geheel analoog is 't gedrag van de overeenkomstige strychnine-segmentzone.

Voor zoover deze zone op het proximale gedeelte van den poot ligt, is er dus een principieel verschil met de voorafgaande strychnine-segmentzone. Op 't distale einde der extremitéit echter zijn vorm en ligging dier twee vrijwel identiek al kunnen we wel aangeven dat in 't algemeen de zone van S1 nog meer op de achtervlakte van den poot ligt dan die van L VIII en niet zoover distaal reikt als deze.

De smalle tong die deze zone op den onderpoot uitzendt, reikt nl. voor zoover mijn materiaal aangeeft hoogstens tot 't tuber calcanei.

WINKLER en VAN RIJNBEEK, die in 5 gevallen 't dermatoom van S1 isoleerden, vonden in een van deze ¹⁾ (Hond 11) dat hier 't huidgebied tot op den lateralen teen reikte. In alle andere 4 gevallen lag de distale grens van 't dermatoom tusschen fossa poplitea en tuber calcanei.



Fig. XXII. S1.



Fig. XXIII. S1.

De streng gelocaliseerde strychnineapplicatie op de dorsaalvlakte van 't 1e sakraalsegment is niet zonder moeilijkheden, want niet alleen dat de lengte van dit stukje ruggemerg een vrij geringe is, maar, en dit vooral is een faktor die vele bezwaren met zich brengt, 't segment wordt aan de dorsaalvlakte nagenoeg geheel bedekt door de vezels der in dit ruggemergsniveau sterk ontwikkelde cauda equina.

¹⁾ WINKLER en VAN RIJNBEEK, VIII Communication. l. c. blz. (339) 33.

Nog veel meer doen deze bezwaren zich gelden aan de opvolgende segmenten van 't sakraalmerg, zoodat hier van een scherpe lokalisatie geen sprake kan zijn, waarom ik deze proevenreeks dan ook met de vaststelling der strychninesegmentzone van S_1 heb afgesloten.

Overzien we nu nog eens de gevonden resultaten.

De eerste strychninesegmentzone die op den poot ligt is die van LII , want pas deze zone neemt een groot deel van de huid op de voorvlakte van de dij in beslag.

De zones van de segmenten $LIII$ en LIV gelijken zeer veel op elkaar en ofschoon we niet ontkennen dat er vrij veel individueele uitzonderingen op deze verhouding voorkomen, kunnen we toch in 't algemeen aangeven dat de caudale grenzen dier 2 strychninesegmentzones vrijwel samenvallen en daarbij deze gemeen-chappelijke grens ligt op de lijn die op 't midden van 't sacrum de dorsale middellijn verlaat om over de trochanter in de richting der epicondylus medialis te verlopen, (Zie fig. XI en XIII).

De zone van 't segment van LV is de eerste zone van den achterpoot die losgerukt is van de middellijnen van 't lichaam. WINKLER en VAN RIJNBEEK 't zelfde voor hun LV dermatoom vermeldend, betitelen dit dan ook als 't eerste apikale dermatoom, zoo de dermatomen benoemend die op de apex der extremiteit liggen, waarbij ze deze als een stomp-puntigen kegel beschouwen.

De strychninesegmentzones van LVI en $LVII$ hebben ook den samenhang met de dorsale en ventrale mediaanlijn verloren, terwijl die van SI weer met beide in verband treedt. Deze bevindingen stemmen volkomen overeen, zooals we trouwens al opgemerkt hebben met die van WINKLER en VAN RIJNBEEK voor de overeenkomstige dermatomen. Wanneer we dus de terminologie van deze schrijvers overnemen, dan kunnen we zeggen dat we op den achterpoot moeten onderscheiden 3 craniale rand-strychninesegmentzones n.l. die van LII , $LIII$ en LIV , 3 apikale strychninesegmentzones n.l. die van LV , LVI en $LVII$ en minstens 1 caudale rand-strychninesegmentzone n.l. die van SI .

Naar WINKLER en VAN RIJNBEEK zijn de dermatomen van SH en $SIII$ ook nog, en wel de laatste, caudale rand-dermatomen van den achterpoot. Zooals reeds gezegd, is van streng gelokaliseerde strychnine-applicatie op deze segmenten geen sprake en heb ik dus de betreffende strychninesegmentzones niet vastgesteld.

Wanneer we Fig. XXII bezien, merken we op dat de craniale grens van de strychninesegmentzone van SI op 't midden van 't sacrum de dorsale middellijn verlaat en over den trochanter in de

richting van de epicondylus medialis verloopt, om een eind distaal van de trochanter deze richting te verlaten en op de achtervlakte van den poot af te wijken.

Voor de gemeenschappelijke caudale grenslijn der zones van *L III* en *L IV* konden we ten minste tot een eindweegs distaal van den trochanter eenzelfde verloop vaststellen. Hier grenzen dus de strychninesegmentzones van serieel niet onmiddellijk op elkaar volgende segmenten aan elkaar.

WINKLER en VAN RIJNBEEK vonden voor hun dermatomen geheel analoge verhoudingen en geven dan ook deze, ten deele op de laterale dijvlakte liggende rooilijn tusschen oorspronkelijk niet aan elkaar grenzende huidgebieden als de „dorsale lijn” (SHERRINGTON) of de „dorsale differentiatiegrens” (BOLK) der extremiteit aan.

Aan de buikzijde en mediale vlakte van den achterpoot vinden we de volgende verhoudingen.

De caudale grenzen der strychninesegmentzones van *L II*, *L III* en *L IV* vallen over een belangrijk deel van hun verloop vrijwel samen; ja men kan bijna zeggen dat de ventrale deelen der zones elkaar nagenoeg geheel bedekken.

Hoewel we door 't gemis aan vaste punten op den buik en de mediale dijvlakte (de tepels komen als zoodanig allerminst in aanmerking) niet zoo scherp als op de buitenvlakte der extremiteit 't verloop der zone-grenzen kunnen omschrijven, geven we toch vrijwel de werkelijke verhoudingen weer als we zeggen dat de gemeenschappelijke caudale grens der *L II*, *L III* en *L IV* strychninezones wordt gevormd door de lijn die van de symphysis in de richting verloopt van een punt, op de mediale pootvlakte ongeveer midden tusschen epicondylus femoris medialis en fossa poplitea gelegen. De caudale grenzen van de *L III* en *L IV* zones loopen zelfs over dit punt en vallen dus op de geheele mediale dijvlakte samen; de caudale grens van *L II* ergens in 't verloop van deze lijn haar verlatend, divergeert van daar met de gemeenschappelijke caudale grens der *L III* en *L IV* zones.

De craniale grenslijn van de strychnine zone van *SI* verlaat, zooals uit Fig. XXIII duidelijk blijkt, de ventrale middellijn ook vlak voor de symphysis, om na een kort verloop in de richting der epicondylus femoris medialis meer caudaalwaarts af te buigen, dan over 't reeds genoemde, midden tusschen deze epicondylus en fossa poplitea gelegen, punt, in de richting der malleolus medialis verloopend. We zien nu dus dat hier op de mediale dijvlakte ook een rooilijn bestaat tusschen oorspronkelijk niet aan elkaar grenzende huidgebieden.

WINKLER en VAN RIJNBEEK geven in hun VII^e mededeeling voor

de rooilijn tusschen de dermatomen van *L II*, *L III*, *L IV* en *SI* eenzelfde verloop en betitelen deze lijn als de „ventrale aslijn” (SHERRINGTON) of de „ventrale differentiatiegrens” (BOLK) der extremiteit.

Zooals men uit al 't voorafgaande kan zien, bestaat er een groote overeenkomst in de resultaten van 't dermatoomonderzoek der genoemde schrijvers en de gegevens die in deze mededeeling zijn neergelegd.

Deze overeenstemming gaat echter nog verder, want niet alleen is ze aanwezig in wat men noemen mag „normale” gevallen ¹⁾ maar ook in die waar anomalieën in de samenstelling van 't wervelkolom-skelet wijzigingen in de dermatomerie en den vorm, de ligging en uitbreiding der strychninesegmentzones met zich brengen.

WINKLER en VAN RIJNBEEK hebben bij hun proefnemingen één geval ontmoet (hond 19) waarbij 't dermatoom van *L IV* een van de „norm” afwijkende gedaante vertoonde, doordat 't nl. in tegenstelling met hun andere gevallen van isolatie van dit huidgebied, een smallen tongvormigen uitlooper op de mediale vlakte van 't onderbeen uitzond.²⁾ (Fig. XXIV en XXV).



Fig. XXIV.
Plaat VIII. 1.

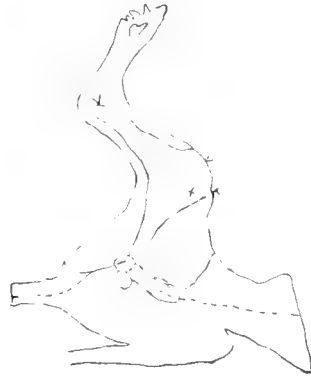


Fig. XXV.
Plaat VIII. 2.

LIV. Hond 19. Praefixie der extremiteit *LIV*. Hond 19. Praefixie der extremiteit
(naar WINKLER en VAN RIJNBEEK). (naar WINKLER en VAN RIJNBEEK).

't Kenmerkte zich hiermede als 't ware als een overgangsvorm tusschen een *L IV* en *L V* dermatoom. Bij de autopsie bleek de

¹⁾ Voor zoover van „normaal” in verhoudingen de perifere huidinnervatie betreffende, gesproken kan worden. Volgens de gegevens van WINKLER en VAN RIJNBEEK moeten we SHERRINGTON's „prefixed” en „postfixed type” beschouwen als extremen ten opzichte der metamere huidinnervatie, zoodat er eigenlijk talrijke tusschenvormen in dit opzicht bestaan. Ook in mijn resultaten vind ik meerdere gegevens, die voor deze opvatting pleiten. 't Zou mij hier echter te ver voeren, op deze voor 't vraagstuk der dermatomerie zoo interessante en gewichtige bespiegelingen in te gaan.

²⁾ WINKLER en VAN RIJNBEEK, VIe mededeeling l. c. blz. (321) 15. Plaat VIII.

hond slechts 6 lendenwervels te bezitten en was dit dus een geval van z. g. n. „praefixie der extremiteit” (SHERRINGTON).

In een van mijn gevallen (str. hond XIV) waarin ik op 't 4e lumbaalsegment strychnine aangebracht had, vond ik een nagenoeg gelijkgevoerde zone als WINKLER en VAN RIJNBEEK in bovenvermeld geval van isolatie van 't L IV dermatoom. Zie Fig. XXVI en XXVII. Deze hond bleek ook slechts 6 lendenwervels te bezitten.

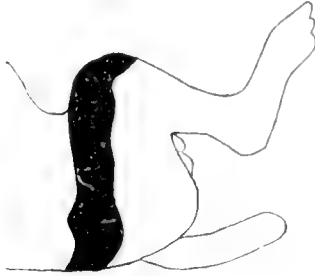


Fig. XXVI.

L. IV. Praefixie der extremiteit.



Fig. XXVII.

L. IV. Praefixie der extremiteit.

Behalve in dit opzicht, boezemt dit experiment ook nog in ander belang in.

Op blz. (439) 9 hunner VIIe mededeeling komen de reeds meermalen genoemde schrijvers nog eens uitvoerig terug op 't gedrag der aslijnen ¹⁾ der extremiteit.

In Fig. XXVIII geef ik schematisch weer de rooilijn tusschen de strychninesegmentzones van L II, III, IV en SI zooals die uit mijn gegevens blijkt te verlopen en die zooals we al boven gezien hebben, geheel identiek is met de door WINKLER en VAN RIJNBEEK aangegeven dorsale aslijn der extremiteit.

't Punt waar ze eindigt is het aan de L V, L VI en L VII zones gemeenschappelijke proximo-laterale hoekpunt vanwaar deze zones als de elkaar in belangrijke mate overdekkende sektoren van een waaier uitstralen.

En nu de ventrale aslijn.

Op grond van hun „normaal” materiaal, maar ook naar aanleiding

¹⁾ Zooals bekend geeft SHERRINGTON als kenmerk van zijn aslijnen een eigenschap in functioneel opzicht, nl. de geringe mate van „overlapping” die daar ter plaatse tusschen de aan elkaar grenzende dermatomen plaats vindt, terwijl voor de met deze aslijn identieke „differentiatiegrenzen” van BOLK, deze een morphologisch kenmerk geeft, waar hij als zoodanig betitelt de grenslijn tusschen dermatomen verloopend, die oorspronkelijk niet naast elkaar lagen, maar door 't uitbotten der extremiteit tijdens de ontogenese van deze naast elkaar zijn geschoven geworden.

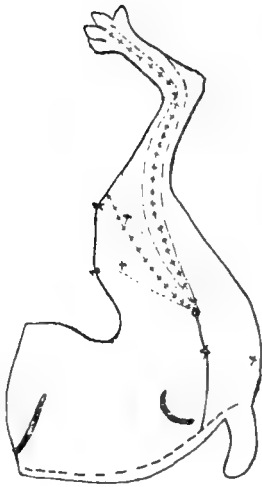


Fig. XXVIII.

—•— = rooilijn tusschen strychnine-segmentzones van *L. II, III, IV* en *S I*.
 begrenzing van zone van *L. V*.
 +++ .. " " " *L. VI*.
 " " " *L. VII*.

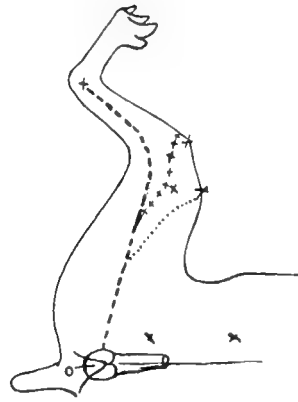


Fig. XXIX.

---- = rooilijn tusschen strychninesegmentzones van *L. II, III, IV, V* en *S I*.
 = caudale grens der zone van *L. III* van de rooilijn af.
 +++ = caudale grens der zones van *L. III* en *IV* van de rooilijn af.

der abnormale gevallen en in 't bijzonder van hun geval „hond 19” geven WINKLER en VAN RIJNBEEK als ventrale aslijn, daarbij vasthoudende aan de criteria der definities van BOLK en SHERRINGTON, de lijn aan die van de symphysis over de mediale pootvlakte naar de malleolus medialis verloopt, daarbij gaande door 't punt midden tusschen epicondylus femoris medialis en fossa poplitea.

Deze lijn nu is dezelfde als de reeds boven beschreven rooilijn tusschen de strychnine-segmentzones van *L. II, L. III* en *L. IV* aan den eenen en *S I* aan den anderen kant.

Dit geval van mijn Str. hond XIV brengt nu nog een nadere bevestiging van deze overeenstemming, waar immers hieruit blijkt (zie fig. XXVII) dat 1°. in gevallen van praefixie der extremititeit ook de strychninesegmentzones, evenals de dermatomen, zich (schijnbaar) caudaalwaarts op de extremiteit verplaatsen, 2°. die verschuiving klaarblijkelijk plaats vindt langs de rooilijn, die 't homologon der ventrale aslijn bij de dermatomen blijkt te zijn. Zie fig. XXIX.

Ook nog in ander opzicht kan ik op analoga, ja zelfs op identiteit wijzen. In een hunder eerste dermatoom-mededeelingen hebben de genoemde schrijvers aangetoond dat ieder filum radiculare van een achterwortel 't geheele dermatoom verzorgt, op grond van 't feit dat indien zij van een paar opvolgende achterwortels alleen of de craniale

of de caudale fila radicularia doorsneden, nooit een zone waarnaar waar opgeheven sensibiliteit bestond, integendeel juist een gebied, overeenkomende in uitbreiding met 't aantal ten deele doorsneden achterwortels, waar een gelijkmatige hyperalgesie heerschte.

Ik vond nu bij mijne strychnine-experimenten een soortgelijk feit. Niet slechts de vergiftiging van de dorsaalvlakte van een geheel segment geeft de voor dit stuk ruggemerg karakteristieke strychnine-zone, maar ook indien men 't alkaloid aanbrengt op een gedeelte, bijv. 't stuk waar de 2 craniale fila radicularia intreden, ziet men de strychninesegmentzone in toto optreden. Dat dit de zone in zijn geheele uitgebreidheid is die optreedt, blijkt o.a. ook nog daaruit dat de zone niet meer in grootte toeneemt indien men 't strychnine ook nog op 't overige deel van de dorsaalvlakte van 't segment aanbrengt.

Waar een zoo treffende overeenkomst bestaat in vorm, ligging en uitgebreidheid der door de isolatie-methode vastgestelde dermatomen en der door deze strychninemethode gevonden strychninesegmentzones, is ons, uit den aard der zaak, van den aanvang af aanwezig vermoeden, dat wij bij deze strychninesegmentzones met huidgebieden te maken hebben, naar de genoemde eigenschappen d.i. dus vorm, ligging en uitbreiding gelijkwaardig aan dermatomen, tot zekerheid geworden.

Aan dit feit laten zich meerdere voor de physiologie van 't centrale zenuwstelsel gewichtige theoretische beschouwingen vastknoopen en ik hoop dan ook in een volgende mededeeling gelegenheid te hebben de theoretische bespiegelingen die uit deze gegevens voortvloeien en die meerdere vragen naar de morphologische grondslagen der ruggemergsphysiologie en naar de functies van dit orgaan en van 't centrale zenuwstelsel in 't algemeen, raken, te ontwikkelen.

De conclusies waarin ik de resultaten van dit onderzoek, voor zoover 't de speciale vraag naar vorm, ligging en uitbreiding der strychninesegmentzones betreft, zou willen samenvatten, luiden als volgt:

I. *Bij segment-gewijze aanwending van strychnine op de dorsaalvlakte van het ruggemerg treedt 't door mij beschreven syndroom op in scherp omgrenste huidgebieden, die naar vorm, ligging en uitbreiding gelijkwaardig zijn aan de door de isolatie-methode gevonden dermatomen.*

II. *In deze strychnine-methode, d.i. dus de segmentaire, streng op de dorsaalvlakte van 't ruggemerg gelokaliseerde, strychnine-applicatie, hebben we een nieuwe, van alle andere tot dusver bekende, principieel afwijkende methode ter vaststelling van de dermatomerie van 't lichaam.*

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer F. L. BERGANSIUS: „*Een nieuwe formule om den coëfficiënt van zelfinductie voor lange solenoïden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen.*”

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN).

Voor de nauwkeurige berekening van de zelfinductie¹⁾ van solenoïden met vele draadlagen zijn verschillende formules beschikbaar, voor het geval de doorsnede der met draad bewikkelde ruimte quadratisch, cirkelvormig of rechthoekig is. Al deze formules geven alleen nauwkeurige resultaten, als de afmetingen van deze doorsnede niet te groot is, vergeleken bij den gemiddelden straal, en voor de rechthoekige doorsnede geldt ook nog de beperking, dat de lengte-afmeting niet meer dan deze gemiddelde straal mag bedragen.

Voor het geval van een *lange* solenoïde met vele draadlagen is, voor zoover mij bekend, nog geen formule afgeleid, die hetzij in gesloten vorm, of in den vorm van een convergerende reeks, de waarde van de zelfinductie nauwkeurig voorstelt.

LOUIS COHEN²⁾ heeft voor dit geval een benaderingsformule afgeleid van de volgende gedaante:

$$\begin{aligned}
 L = & 4\pi^2 n^2 m \left\{ \frac{2a_0^3 + a_0^2 l^2}{\sqrt{4a_0^2 + l^2}} - \frac{8a_0^3}{\pi} \right\} + \\
 & + 8\pi^2 n^2 \left\{ [(m-1)a_1^2 + (m-2)a_2^2 + \dots] \left(\sqrt{a_1^2 + l^2} - \frac{7}{8} a_1 \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} [m(m-1)a_1^2 + (m-1)(m-2)a_2^2 + \dots] \left(\frac{a_1 da}{\sqrt{a_1^2 + l^2}} - da \right) - \\
 & \left. - \frac{1}{2} [m(m-1)a_1^2 + (m-2)(m-3)a_2^2 + \dots] \frac{da}{8} \right\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

a_0 = gemiddelde straal; a_1, a_2, \dots enz. = straal 1^o, 2^o enz. laag van de as uit gerekend; da = afstand van twee opeenvolgende lagen; l = lengte; n = aantal windingen per cM. m = aantal lagen.

De nauwkeurigheidsgrens wordt door COHEN aangegeven als te bedragen: 0,5 percent voor een solenoïde, waarvan de lengte gelijk is aan tweemaal de middellijn, terwijl voor langere solenoïden de nauwkeurigheid toeneemt. Behalve deze niet zeer groote nauwkeu-

1) Kortheidshalve wordt hier en in 't vervolg de uitdrukking „zelfinductie” gebezigd in plaats van „coëfficiënt van zelfinductie”. De term „onderlinge inductie” is op dezelfde wijze op te vatten.

2) LOUIS COHEN, Bulletin of the Bureau of Standards IV, 383.

righeid heeft deze formule, waarvan de derde en vierde term bovendien nog foutief zijn, het groote nadeel van zeer omslachtig te zijn voor de berekening, vooral wanneer het aantal lagen m eenigszins aanzienlijk is.

EDWARD B. ROSA¹⁾ heeft een methode aangegeven om voor een solenoïde van willekeurige lengte, voorzien van vele lagen de zelfinductie te berekenen, die hij als volkomen correct beschouwt en die hij zelfs gebruikt om de nauwkeurigheid en het geldigheidsgebied van andere formules, o.a. van die van STEFAN te toetsen. Deze methode, die op een volkomen juist beginsel berust, geeft echter bij de door ROSA gebezigde wijze van uitvoering alleen dan resultaten van hooge nauwkeurigheid, wanneer de diepte van de windingen op den draadklos *zeer* klein is vergeleken bij den gemiddelden straal.

Ik stel me voor in de volgende bladzijden een formule af te leiden, die in zeer eenvoudigen en voor de berekening gemakkelijken vorm, met hoogen graad van nauwkeurigheid de zelfinductie weergeeft voor alle gevallen; waarin de formules voor korte draadklossen te kort schieten.

Voor de onderlinge inductie van twee even lange coaxiale cylinderlagen heeft MAXWELL²⁾ de volgende uitdrukking afgeleid.

$$M = 4 \pi^2 n^2 a^2 [l - 2 A \alpha] \dots \dots \dots (2)$$

waarin

$$\alpha = \frac{l-r+A}{2A} - \frac{a^2}{16A^2} \left(1 - \frac{A^3}{r^3}\right) - \frac{a^4}{64A^4} \left(2 + \frac{2A^5}{r^5} - \frac{5A^7}{2r^7}\right) - \\ - \frac{35 a^6}{2048A^6} \left(\frac{1}{7} - \frac{8 A^7}{7 r^7} + \frac{4A^9}{r^9} - \frac{3A^{11}}{r^{11}}\right) - \dots (3)$$

$r = \sqrt{A^2 + l^2}$ $A =$ straal buitenste cylinder $a =$ straal binnenste cylinder $n =$ aantal windingen per cM.

De laatste term van (3) is door ROSA³⁾ aan de afleiding toegevoegd.

In 't algemeen wordt de zelfinductie van een draadklos gevonden door de uitdrukking voor de onderlinge inductie van 2 elementen van de doorsnede tweemaal over het geheele oppervlak van deze doorsnede te integreeren.

Ten einde deze integraal te bepalen denken we ons de solenoïde voorzien van een zeer groot aantal m lagen. De straal van de

¹⁾ EDWARD B. ROSA, Bull. of the Bur. of St. IV 369.

²⁾ MAXWELL, Electricity and Magnetisme, II, § 678.

³⁾ E. B. ROSA and L. COHEN, Bull. of the Bur. of St. III 305.

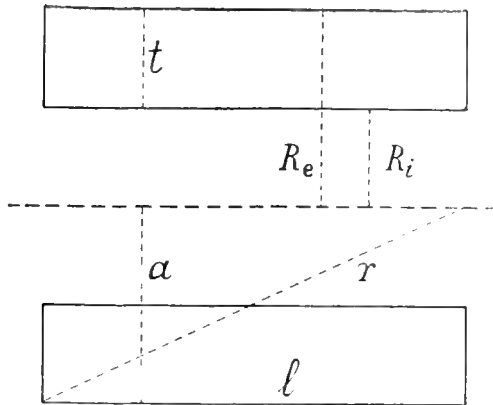


Fig. 1

buitenste laag zij a_1 ; de afstand tusschen de opvolgende lagen δa .

De stralen van de opeenvolgende lagen worden dan:

$$a_2 = a_1 - \delta a$$

$$a_3 = a_1 - 2\delta a$$

.

$$a_m = a_1 - (m - 1) \delta a$$

Noemen we nu de onderlinge inductie van twee willekeurige lagen met ordegetallen p en q : $M_{p,q}$, dan wordt de zelfinductie van de solenoïde gegeven door de vergelijking:

$$L_{00} = 2 \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m M_{p,q} \dots \dots \dots (4)$$

Substitueeren we de door (3) gegeven waarde van a in (2) en nemen we om het overzicht gemakkelijker te maken voorloopig alleen de twee eerste termen van a met weglating van den term $\frac{A^2}{r^3}$ dan krijgen we:

$$M = 4 \pi^2 n^2 a^2 \left[\sqrt{A^2 + l^2} - A + \frac{a^2}{8A} \right] \dots \dots \dots (5)$$

We vervangen nu in deze uitdrukking a en A door de boven aangegeven waarden en ontwikkelen de termen in de vierkante haken naar opklimmende machten van δa . We verwaarloozen alle termen in δa van hoogerem graad dan den tweeden en laten ook, om de zoeven genoemde reden, de termen met $\frac{\delta a^2}{r^3}$, die uit de ontwikkeling van den wortelvorm voortkomen, weg.

Verder nog ter bekorting $\sqrt{a_1^2 + l^2} = r$ stellende, vinden we voor de termen van de te bepalen som (4):

$$\begin{aligned}
 M_{1,1} &= 4\pi^2 n^2 a_1^2 \left\{ r - a_1 + \frac{a_1}{x} \right\} \\
 M_{1,2} &= 4\pi^2 n^2 a_2^2 \left\{ r - a_1 + \frac{a_1}{x} + \frac{2da}{x} + \frac{da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{2,2} &= 4\pi^2 n^2 a_2^2 \left\{ r - \frac{a_1 da}{r} - a_1 + da + \frac{a_1}{x} + \frac{da}{x} \right\} \\
 M_{1,3} &= 4\pi^2 n^2 a_3^2 \left\{ r - a_1 + \frac{a_1}{x} + \frac{4da}{x} + \frac{4da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{2,3} &= 4\pi^2 n^2 a_3^2 \left\{ r - \frac{a_1 da}{r} - a_1 + da + \frac{a_1}{x} + \frac{3da}{x} + \frac{da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{3,3} &= 4\pi^2 n^2 a_3^2 \left\{ r - \frac{2a_1 da}{r} - a_1 + 2da + \frac{a_1}{x} + \frac{2da}{x} \right\} \\
 M_{1,4} &= 4\pi^2 n^2 a_4^2 \left\{ r - a_1 + \frac{a_1}{x} + \frac{6da}{x} + \frac{9da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{2,4} &= 4\pi^2 n^2 a_4^2 \left\{ r - \frac{a_1 da}{r} - a_1 + da + \frac{a_1}{x} + \frac{5da}{x} + \frac{4da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{3,4} &= 4\pi^2 n^2 a_4^2 \left\{ r - \frac{2a_1 da}{r} - a_1 + 2da + \frac{a_1}{x} + \frac{4da}{x} + \frac{da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{4,4} &= 4\pi^2 n^2 a_4^2 \left\{ r - \frac{3a_1 da}{r} - a_1 + 3da + \frac{a_1}{x} + \frac{3da}{x} \right\} \\
 M_{1,5} &= 4\pi^2 n^2 a_5^2 \left\{ r - a_1 + \frac{a_1}{x} + \frac{8da}{x} + \frac{16da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{2,5} &= 4\pi^2 n^2 a_5^2 \left\{ r - \frac{a_1 da}{r} - a_1 + da + \frac{a_1}{x} + \frac{7da}{x} + \frac{9da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{3,5} &= 4\pi^2 n^2 a_5^2 \left\{ r - \frac{2a_1 da}{r} - a_1 + 2da + \frac{a_1}{x} + \frac{6da}{x} + \frac{4da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{4,5} &= 4\pi^2 n^2 a_5^2 \left\{ r - \frac{3a_1 da}{r} - a_1 + 3da + \frac{a_1}{x} + \frac{5da}{x} + \frac{da^2}{8a_1} \right\} \\
 M_{5,5} &= 4\pi^2 n^2 a_5^2 \left\{ r - \frac{4a_1 da}{r} - a_1 + 4da + \frac{a_1}{x} + \frac{4da}{x} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

enz.

De wet van de getallencoëfficiënten van de termen tusschen de haken, in ieder van de groepen met denzelfden factor vóór de haken, is zeer duidelijk, zoodat de som gemakkelijk te bepalen is.

gevonden worden door in (9) de uit de onder elkaar staande getallenreeksen af te leiden waarden van L_1, L_2, L_3 enz. te substitueeren.

Daar we ter bepaling van den integraal L_n het aantal lagen dus m oneindig groot moeten nemen is het duidelijk, dat van de functies P, Q en R dus van de reeks S_m alleen de term met den hoogsten exponent behoeft bepaald te worden. Deze term is:

$$\frac{m^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots n + 1} L_n$$

we behoeven dus van de getallenreeksen alleen het ordegetal en de waarde van het constante verschil te bepalen.

Voor den term met $\overline{\delta a^2}$ bv. geeft deze bepaling

0			
2	2		
8	8	6	3
10	6		
12	14		
24	6	6	4
36	20		
44			
80			

$$R = \frac{6m^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{m^4}{4}$$

op dezelfde wijze vinden we $P = \frac{m^2}{2}$; $Q = \frac{2m^7}{3}$.

De reeks in den eersten term van (7) wordt dus, als we nu den index van a_1 weglaten

$$\frac{m^2}{2} a^2 - \frac{2m^3}{3} a \delta a + \frac{m^4}{4} \overline{\delta a^2}$$

nu is $m \delta a = R_e - R_i = t$; dit substitueerende en de breuken verdrijvende krijgen we

$$\frac{1}{12} [6m^2 a^2 - 8m^2 a t + 3m^2 t^2]$$

we brengen nu $m^2 a^2$ buiten de haken

$$\frac{m^2 a^2}{12} \left(6 - 8 \frac{t}{a} + 3 \frac{t^2}{a^2} \right)$$

$\frac{t}{a} = q$ stellende vinden we ten slotte

$$\frac{m^2 a^2}{12} [6 - 8q + 3q^2] \dots \dots \dots (10)$$

Passen we dezelfde bewerking toe op de termen met δa en $\frac{\overline{\delta a^2}}{a}$

dan vinden we voor de coëfficiënten daarvan:

$$\frac{m^2 a^2}{12} \cdot \frac{1}{5} [10 - 15q + 6q^2] \dots \dots \dots (11)$$

en

$$\frac{m^2 a^2}{12} \cdot \frac{1}{15} [15 - 24q + 10q^2] \dots \dots \dots (12)$$

De gevonden waarden in (7) en daarna deze in (4) substitueerende vinden we:

$$L_u = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 a^2 m^2 \left\{ [6 - 8q + 3q^2] \left(r - a + \frac{a}{8} \right) + \frac{1}{5} [10 - 15q + 6q^2] \left(t - \frac{3t}{8} - \frac{at}{r} \right) + \frac{1}{15} [15 - 24q + 10q^2] \frac{t^2}{8a} \right\} \dots (13)$$

Bij de ontwikkeling en integratie van de verdere termen van de reeks $\alpha(3)$ levert iedere term een bijdrage, onder ieder van de coëfficiënten van (13).

De bijzondere regelmaat in deze ontwikkelingen maakt het gemakkelijk de wetten voor de opeenvolgende getalcoëfficiënten in de verschillende reeksen te bepalen.

In den eersten term komt b.v. de reeks

$$S_1 : \quad a \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{5}{1024} + \frac{35}{16384} + \dots \right)$$

in den tweeden term

$$S_2 : \quad t \left(3 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{64} + 7 \cdot \frac{5}{1024} + 9 \cdot \frac{35}{16384} + \dots \right)$$

in den derden term:

$$S_3 : \quad \frac{t^2}{a} \left(1 + 6 \cdot \frac{1}{64} + 15 \cdot \frac{5}{1024} + 28 \cdot \frac{35}{16384} + \dots \right)$$

Uit de afleiding van de grondvergelijking (3), die in de door WEINSTEIN bewerkte Deutsche uitgave van MAXWELL te vinden is; blijkt dat de termen van S_1 gevormd worden door de produkten van de termen met gelijk rangnummer van vier verschillende reeksen zoodat in de bovenstaande zooveel mogelijk vereenvoudigde gedaante van deze produkten de wet van opeenvolging moeilijk terug te vinden is.

De wet van opeenvolging blijkt zeer eenvoudig te zijn n.l.

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(2n-3)(2n-1)}{2n(2n+2)}$$

waaruit voor den algemeenen term volgt:

$$u_n = \left[\frac{(2n-3)!}{n!(n-2)!} \right]^2 \frac{2n-1}{2^{2n-1}(n+1)}$$

Ook de termen van (3) met $\frac{A^3}{r^3} \cdot \frac{A^3}{r^5}$ enz. leveren bijdragen in ieder van de termen van (13).

Deze ontwikkeling is uitgevoerd voor alle opgegeven termen van (3) behalve voor de termen met $\frac{A^2}{r^2}$ en $\frac{A^{11}}{r^{11}}$, die toch niet volledig zouden zijn, daar deze twee machten van $\frac{A}{r}$ in nog twee van de volgende termen moeten voorkomen.

De vergelijking (13) kan nu na invoering van al deze termen en eenige eenvoudige transformaties in den volgenden vorm geschreven worden :

$$L_{00} = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m^2 a^3 \left\{ C_1 [g_1(x) - 0.8488] + C_2 [g_2(x) + 0.0848] \varrho + \right. \\ \left. + C_3 [g_3(x) + 0.11] \varrho^2 \right\} \dots \dots \dots (14)$$

waarin

a = straal buitenste laag met inbegrip van isoleering

$$C_1 = 6 - 8\varrho + 3\varrho^2 \quad \varrho = \frac{t}{a} \quad x = \frac{a}{r} \quad r = \sqrt{a^2 + l^2}$$

$$C_2 = 10 - 15\varrho + 6\varrho^2 \quad m = \text{aantal lagen.}$$

$$C_3 = 15 - 24\varrho + 10\varrho^2 \quad n = \text{aantal windingen per cm.}$$

$$g_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{16} x^5 - \frac{15}{128} x^7 + \dots$$

$$g_2(x) = -\frac{1}{5} x + \frac{3}{20} x^3 -$$

$$g_3(x) = \frac{1}{30} x - \frac{3}{40} x^3 +$$

De in de vergelijking (14) voorkomende constanten hebben de volgende beteekenis

$$0.8488 = 1 - S_1$$

$$0.0848 = \frac{1}{5} (1 - S_2)$$

$$0.11 = \frac{1}{15} S_3$$

waarin S_1, S_2, S_3 de sommen van de bovengenoemde reeksen voorstellen. De eerste van deze constanten, die den meesten invloed op de nauwkeurigheid van de berekende waarden heeft, is tot in vijf decimalen nauwkeurig bepaald.

Het bepalen van de sommen van deze reeksen komt eigenlijk neer op het uitbreiden van de ontwikkeling en integratie over een zeer groot aantal termen van de reeks (3).

Dat in (14) m het *éindig* aantal lagen voorstelt, terwijl bij de integratie m *oneindig* groot verondersteld is, wordt verklaard door het feit, dat de zelfinductie van een draadklos, voor het geval, dat de stroom over de oppervlakte van de doorsnede gelijkmatig verdeeld is, evenredig is aan het vierkant van het aantal lagen.

Voor niet te groote waarden van q , welke grootheid in den regel aanmerkelijk kleiner dan 1 is, wordt de onderlinge verhouding van de coëfficiënten C_1 , C_2 en C_3 in (14) ten naasten bij voorgesteld door de verhouding van de daarin voorkomende constanten 6, 10 en 15. Daar de termen in q en q^2 voor lange draadklossen altijd zeer klein zijn vergeleken bij den eersten term mogen we dus bij benadering stellen:

$$C_2 = \frac{5}{3} C_1 \quad C_3 = \frac{5}{2} C_1$$

daardoor gaat (14) over in:

$$L_u = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m^2 a^3 C_1 \left\{ |g_1(x) - 0.8488| + \frac{5}{3} |g_2(x) + 0.0848| q + \frac{5}{2} |g_3(x) + 0.11| q^2 \right\}. \quad (15)$$

stelt men in deze vergelijking $q = 0$ dan vervallen de termen in q en q^2 en wordt $C_1 = 6$. De vergelijking gaat dan over in de vergelijking voor de zelfinductie van een vlakke cylinderlaag.

$$L_s = 4\pi^2 n^2 a^3 (g_1(x) - 0.8488) \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

De methode om de nauwkeurigheid van de volgens de formules (14) en (15) berekende waarden van de zelfinductie te toetsen berust op het boven aangehaalde door E. B. ROSA toegepaste beginsel.

ROSA¹⁾ berekent eerst de zelfinductie van een vlakke cylinderlaag met denzelfden gemiddelden straal, als de solenoïde met windingsdiepte t , en neemt het geheele aantal windingen van dezen cylinder $= \frac{l}{t}$ wanneer l de lengte voorstelt. Vervolgens denkt hij zich een solenoïde van dezelfde lengte en gemiddelden straal, voorzien van één enkele laag van een quadratischen geleider met doorsnede $t \times t$ zoodat deze ook $\frac{l}{t}$ windingen heeft.

De zelfinductie van deze laatste L_u en van de eerste L_s noemende berekent hij de correctie om van L_s op L_u te komen zoodat

$$L_u = L_s - \Delta_1 L.$$

Deze correctie $\Delta_1 L$ wordt gevormd door n malen het verschil in

1) E. B. ROSA. Bull. of the Bur. of St. IV 369.

de zelfinductie van een winding met quadratische doorsnede en een winding op het cylinderoppervlak, vermeerderd met de som van de verschillen van de onderlinge inducties van alle windingen. Rosa brengt nu den correctieterm $\Delta_1 L$ in den vorm

$$\Delta_1 L = 4\pi an (A + B)$$

waarin n het genoemde aantal windingen $= \frac{l}{a}$. A het aandeel van de verschillen in de zelfinducties en B het aandeel van de verschillen in de onderlinge inducties voorstelt. Hij geeft twee tabellen waarin A gegeven wordt als functie van $\frac{t}{a}$ en B als functie van n .

De fout in de methode van Rosa schuilt in dezen correctieterm B , die, zooals ik bij een latere gelegenheid zal aantoonen, behalve een functie van n ook in zeer merkbare mate een functie van $\frac{t}{a}$ is; zoodat voor dezen term een tabel met dubbelen ingang zou vereischt worden.

Ik heb voor een paar verschillende waarden van $\frac{t}{a}$ een tabel voor de grootheid B berekend; zoodat ik met behulp daarvan in staat ben voor die waarden van $\frac{t}{a}$ een oordeel te verkrijgen, over den graad van nauwkeurigheid, die met de formules (14) en (15) bij de berekening van zelfinducties te bereiken is.

Voorbeeld:

$l = 50$ cM. $a = 5.2$ cM. $t = 0.4$ cM. $m = 4$ $n = 10$
berekend:

volgens formule (14)	$L_u = 70.5976$	millihenry
„ „ (15)	$L_u = 70.5988$	„
„ juiste correctiemethode	$L_u = 70.5992$	„
„ methode Rosa	$L_u = 70.544$	„
„ formule (1) van COHEN	$L_u = 70.551$	„

Voor dit voorbeeld is de door Rosa gebruikte waarde van den correctieterm $B = 0.3440$ terwijl de door mij berekende tabel $B = 0.3247$ geeft.

Zoowel de formule van COHEN, als de methode van Rosa geven te kleine waarden voor de zelfinductie.

Een voorbeeld van de buitengewone nauwkeurigheid, die de uiterst eenvoudige formule (16) bij de berekening geeft vergeleken met de

exacte formule van LORENZ¹⁾ met elliptische integralen moge hier nog volgen :

$$l = 50 \text{ cm.} \quad a = 5 \text{ cm.} \quad n = 10$$

berekend :

Volgens formule (16)	$L_s = 4.540489$ millihenry.
,, LORENZ	$L_s = 4.540486$ „

Geologie. — De heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer L. RUTTEN: „*Over Orbitoiden uit de omgeving der Balik Papan-Baai, Oostkust van Borneo.*”

(Mede aangeboden door den Heer MAX WEBER).

Tijdens eene viermaandelijksche exploratie aan de Balik Papan-baai, uitgevoerd in opdracht der „Nederlandsche Maatschappij tot het verrichten van Mijnbouwkundige Werken”, waarvan de algemeene geologische resultaten ter andere plaatse beschreven worden, verzamelde ik op verschillende plaatsen Foraminiferenhoudende gesteenten.

Met toestemming van den Directeur van het Departement van Landbouw, den Heer LOVINK, kon ik een deel dezer fossielen in het laboratorium voor geologische waarnemingen te Buitenzorg bewerken, waar de afdeelingsschef Dr. J. MOHR met groote bereidwilligheid een plaats voor mij vrijmaakte en mij tijdens het onderzoek voortdurend behulpzaam was.

Tot mijn spijt beschikte ik noch over voldoende tijd, noch over voldoende literatuur om alle Foraminiferen te kunnen determineeren; het meeste werk werd aan de Orbitoiden besteed, die in verschillende species en een groot aantal individuen onder mijn materiaal voorkwamen. Bij de beschrijving dezer Orbitoiden zullen, voorzover ze gedetermineerd konden worden, ook de overige Foraminiferen genoemd worden.

Ter oriëntering is aan deze mededeeling een schetskaartje op de schaal, 1.250.000 toegevoegd, waarop de vindplaatsen der fossielen aangegeven zijn, en wel de voornaamste met kruisjes; de andere met cirkeltjes. Terwijl de Foraminiferen voor het grootste deel in zuiveren kalksteen of in harden mergel voorkomen, waarin ze pas na het vervaardigen van doorsneden goed te zien zijn, gelukte het op 3 plaatsen meer mulle mergels aan te treffen, waaruit de Foraminiferen in groot aantal konden uitgeslibd worden. De eerste vind-

¹⁾ Bull. of the Bur. of St. V. 41.

plaats ligt aan de Soengei (rivier) Pamaloean, ongeveer 2 K.M. ten W. van de kampong van dien naam, de tweede aan de Sg. Blakin, de laatste aan den bovenloop van de Sg. Mentawir. Deze drie vindplaatsen zijn op het kaartje met een kruisje aangegeven. Van deze drie vindplaatsen is die aan de Sg. Pamaloean de oudste, die aan de Sg. Mentawir de jongste. Het grootste deel der op deze plaatsen verzamelde Foraminiferen bevindt zich in de collectie van het Mineralogisch-Geologisch Instituut der Universiteit te Utrecht; bij de bewerking beschikte ik slechts over kleine, hier achtergehouden monsters, zoodat het niet onmogelijk is, dat het hoofdmateriaal nog eenige andere dan de hier te beschrijven vormen bevat. De meeste te beschrijven vormen komen van de drie genoemde vindplaatsen; slechts eene soort vond ik in een kalksteen aan de helling van het bronzebergte van de Sg. Sepakoe, die even oud is als de lagen aan de Sg. Pamaloean: er werden ook Orbitoiden aangetroffen in mergels op Poeloe Balang, aan de Sg. Binoewang en in de delta van de Sg. Pamaloean, doch deze waren niet duidelijk genoeg om tot een specifieke determinatie te komen.

Daar alle gevonden Orbitoiden tot het subgenus *Lepidocyclina* en tot het nog jongere, nieuwe genus *Lepidosemicyclina* behooren, zijn alle lagen van posteocenen ouderdom ¹⁾.

Reeds een vrij groot aantal soorten van *Lepidocyclina* is uit den Indischen Archipel beschreven; ik zal trachten, deze soorten overzichtelijk te groepeeren, maar ben er mij wel van bewust, dat ik door onvolledige kennis der literatuur en door ontoegankelijkheid van een aantal publicaties, die wel niet direct op Indische vormen betrekking hebben, maar toch voor de kennis der Orbitoiden van veel belang zijn, hierin waarschijnlijk niet geheel slagen zal.

Onder de in Indië bekende *Lepidocyclinen* laten zich enkele zeer gemakkelijk onderscheiden, doordat ze niet rond, maar stervormig tot polygonaal zijn; één vorm is gekarakteriseerd door het voorkomen van verschillende lagen van mediane kamers, terwijl ook zoowel de zeer groote als de zeer kleine vormen van de overige gemakkelijk afgescheiden kunnen worden. De grootste moeilijkheden leveren de soorten met normalen vorm en van gemiddelde grootte op.

Wanneer in het vervolg getallen over de dimensies der Orbitoiden gegeven worden, beteekent *d* steeds den horizontalen diameter, *h* de hoogte (dikte).

1). Soorten van polygonalen of radiären vorm. Hiertoe behooren

¹⁾ K. MARTIN, Samml. d. Geol. Reichsmuseums in Leiden, 6. p.132—245, 1902.

O. radiata MARTIN ¹⁾, *O. Martini* SCHLUMBERGER ²⁾, beiden van Java en misschien *O. murrayana* JONES and CHAPMAN ³⁾, van Christmas Island. *O. radiata* heeft een gegolfden omtrek, de diameter is 8 mM., *O. Martini* is echt stervormig, de maximale diameter is 6 mM., *O. murrayana*, waarvan alleen eene horizontale doorsnede bekend is, is vierhoekig; *d.* is 9,375 mM. Terecht heeft DOUVILLÉ er echter op gewezen ⁴⁾, dat de laatste vorm misschien in het geheel niet stervormig of polygonaal is, maar rond en sterk zadelvormig gebogen, waardoor we op horizontale doorsnede eene polygonale tot stervormige figuur moeten krijgen.

2). Soorten met meer dan 1 laag van mediane kamers. Als een dergelijke vorm is alleen beschreven *O. multipartita* MARTIN ⁵⁾. De meerlagigheid der mediane kamers treedt eerst aan de peripherie op, waar de laterale kamers gereduceerd worden. *d.* is ongeveer 7 mM. Deze vorm is alleen van Java beschreven. Ik geloof echter, dat twee, door JONES and CHAPMAN (l.c.) van Christmas Island beschreven vormen, n.l. *O. insulae natalis* var. *inaequalis* en *O. ephippoides* evenzeer tot *O. multipartita* moeten gerekend worden. Bij de eerste ziet men in de afbeelding zeer duidelijk verscheidene lagen van mediane kamers aan de peripherie, waar de laterale kamers zeer gereduceerd zijn. Bij de tweede is ook vrij duidelijk te zien, dat aan de peripherie verscheidene lagen van mediane kamers voorkomen, terwijl de aanvangskamer, evenals bij *O. multipartita*, groot is. Dat overigens de opstelling eener nieuwe soort: *O. ephippoides*, ongemotiveerd was, daarop wees reeds DOUVILLÉ (l.c.).

3). Kleine Soorten. De oudst bekende van deze is *O. Sumatrensis* BRADY ⁶⁾, die bijna bolrond is, *d.* 3, *h.* $1\frac{1}{2}$ — $2\frac{1}{2}$ mM. Het mediane vlak vormt aan den omtrek een dunne kiel; met zekerheid zijn alleen kleine macrosphere vormen bekend ⁷⁾; van de microsphere vormen wordt slechts terloops aangegeven, dat ze 15 mM. diameter

¹⁾ K. MARTIN, Die Tertiärschichten auf Java, 1880.

²⁾ C. SCHLUMBERGER, Samml. d. Geol. Reichsmuseums in Leiden, 6, p. 128—134, 1901.

³⁾ T. RUPERT JONES and F. CHAPMAN On the Foraminifera of the Orbitoidal Limestone and Reef Rocks of Christmas Island, in: C. ANDREWS, A Monograph Christmas Island, 1900, p. 226—264.

⁴⁾ H. DOUVILLÉ, Bull. Soc. Géol. de France (4) 5, p. 435—465, 1905.

⁵⁾ K. MARTIN, Die Fossilien von Java, Erstes Heft, 1891.

⁶⁾ H. BRADY, Jaarb. v. h. Mijnwezen in Ned. Indië, 7, p. 157—169, 1878.

⁷⁾ R. BULLEN NEWTON and R. HOLLAND, The Ann. and Magazine of Natural History (7). 3, p. 245—264, 1899.

kunnen bereiken ¹⁾, Nias ²⁾, Serawak ³⁾, Z. Borneo ⁴⁾ en Christmas Island ⁵⁾.

Van Timor heeft K. MARTIN ⁶⁾ een zeer kleinen vorm beschreven, maar niet benoemd, die in hoofdzaak met *O. Sumatrensis* BRADY schijnt overeen te komen: de schaal is in het midden geleidelijk verdikt, de aanvangskamer en de daaropvolgende kamer zijn zeer groot; alleen is de vorm van Timor iets kleiner en minder bolronnd: d 1—2, h 1— $1\frac{1}{2}$ mM. Timor (G. ILHAUW), Z. Borneo ⁶⁾, Nieuw-Guinea ⁷⁾.

Een verdere, zeer kleine vorm van Timor ⁸⁾ verschilt echter zeker van *O. Sumatrensis* door zijne sterke afplatting: d 2, 8, h 0,32—0,90 mM. We zullen deze soort voor het gemak als *O. Timor* 1 aanduiden.

Iets grooter is een vorm, die BRADY ⁹⁾ als *O. dispansa* beschreven heeft; later toonden VERBEEK en FENNEMA ⁹⁾ aan, dat deze determinatie foutief was en brachten den vorm tot hunne *O. IA*. d 6, h 2 mM. De schijf is in het centrum geleidcijk verdikt en aan weerszijden met wratjes bedekt (ik tel op de afbeelding van BRADY ca. 40). Later is als een nieuwe soort van Christmas Island *O. neodispansa* JONES and CHAPMAN beschreven ¹⁾, waarvan de diagnose goed past op *O. dispansa* BRADY en *O. IA* VERBEEK en FENNEMA. (d 5, h $1\frac{1}{2}$ mM.). Deze *O. neodispansa* schijnt dus voor te komen op Christmas Island ¹⁾, Nias ¹⁰⁾, Padangsche Bovenlanden ¹⁰⁾ en ? Java (VERBEEK en FENNEMA, *Lepidocyclus* a en d) ⁹⁾.

Van deze *O. neodispansa* verschilt in elk geval *O. 2C* en *O. 2D* VERBEEK en FENNEMA ⁹⁾, waarvan de eerste megalosphere, de tweede microsphere is; volgens de afbeelding is de schaal geheel glad en van een centrale tuberkel voorzien. d 5—6, h 2 mM. Java.

Ten laatste behoort tot deze kleine vormen de megalosphere vorm van *O. Tournoueri* LEM. et DOUVILLÉ, (d 4—5 mM.), die alleen in het centrum eenige wratjes heeft ¹⁾.

¹⁾ H. DOUVILLÉ, l.c.

²⁾ Zie noot 6 voorgaande pag.

³⁾ Id. noot 7

⁴⁾ T. RUPERT JONES and F. CHAPMAN, l.c.

⁵⁾ K. MARTIN, Samml. des Geol. Reichsmuseums in Leiden, 1, p. 1—64, 1881.

⁶⁾ K. MARTIN, Samml. des Geol. Reichsmuseums in Leiden, 1, p. 131—193, 1883.

⁷⁾ K. MARTIN, Samml. d. Geol. Reichsmuseum in Leiden, 1, p. 65—83.

⁸⁾ Zie noot 6 voorgaande pag.

⁹⁾ R. VERBEEK et R. FENNEMA, Description géol. de Java et Madura, p. 1176—1182, 1896.

¹⁰⁾ Zie noot 6 voorgaande pag.

4). Groote Soorten. Er zijn een aantal groote Orbitoiden uit den Indischen Archipel beschreven, die, daar ze nog niet volledig bekend zijn, moeilijk of niet geïdentificeerd kunnen worden. Hiertoe behooren: *O. gigantea* MARTIN¹⁾, *O. Carteri* MARTIN²⁾, *O. 3 E* en *O. 3 F* VERBEEK en FENNEMA³⁾, allen van Java. Van de beide laatste is de eerste wederom micro- de andere megalospheer. Waarschijnlijk schuilen echter onder deze beide soorten nog enkele andere, daar voor hun horizontale diameter $4\frac{1}{2}$ —70 mM. wordt opgegeven, wat toch wel een al te groote variabiliteit is. Eene gemeenzame eigenschap is de, op horizontale doorsnede spatelige vorm der mediane kamers en hun groote dimensies (max. 0,250 mM. radiaal bij 0,200 mM. tangentieel), wat veel meer is dan bij de blijkbaar verwante *O. Mantelli*.

Een verdere reusachtige, onvolledig bekende en derhalve niet benoemde Orbitoïde is van Groot-Kei bekend (d 70 mM.)⁴⁾. Twee groote onvolledig bekende vormen zijn van Timor⁵⁾ bekend, een van deze heeft mediane kamers als *O. Mantelli* Mort⁴⁾.

Een vrij groote Orbitoïd werd het eerst; zeer onvolledig en alleen op grond der verticale doorsnede van Christmas Island als *O. insubstantialis* T. R. JONES and CHAPMAN beschreven⁶⁾. Later heeft SCHLUMBERGER⁶⁾ dezen naam overgenomen voor een goedbekenden vorm van Java, wiens dwarse doorsnede goed overeenkwam met den vorm van Christmas Island d 12—19 mM., h 5 mM. Skeletzuiltjes zeer fijn, aan de oppervlakte kleine wratjes vormend. Ook van Borneo⁷⁾ en van Sumatra⁷⁾ is deze vorm bekend.

Goed bekend is verder een vrij groote vorm, die SCHLUMBERGER het eerst van Borneo als *O. formosa* beschreven heeft⁸⁾. Uit zijne doorsneden (hij vond de Orbitoïde in een harden kalksteen) maakte hij op, dat hij met een straalvormige *Lepidocyclina* te doen had, maar DOUVILLÉ⁹⁾ toonde aan, dat de Orbitoïde zeer sterk zadelvormig gebogen was en daardoor eene straalvormige horizontale door-

1) K. MARTIN, Samml. d. Geol. Reichsmuseums, Leiden, 1, p. 65—83.

2) K. MARTIN, Die Tertiärschichten auf Java, 1880.

3) R. D. M. VERBEEK et R. FENNEMA, l.c.

4) K. MARTIN, Samml. d. Geol. Reichsmuseums, Leiden, 1, p. 8—64, 1881.

5) T. RUPERT JONES and F. CHAPMAN, l.c. pag. 242—243.

6) C. SCHLUMBERGER, Samml. d. Geol. Reichsmuseums in Leiden, 6, p. 128—134, 1901.

7) H. DOUVILLÉ, l.c.

8) C. SCHLUMBERGER, Samml. d. Geol. Reichsmuseums in Leiden, 6, p. 250—253, 1902.

9) H. DOUVILLÉ, l.c.

sneede gaf --- megalosphere, mediane kamers op horizontale doorsnede halfcirkelvormig, laterale kamers door zeer dunne horizontale wanden gescheiden d max. 18, h 2 mM. Aan de oppervlakte geen wratjes aanwezig. Borneo ¹⁾, ²⁾, en Celebes ³⁾.

Groot is verder de microsphere vorm van *O. Tournoueri* LEM. et Douv., die volgens DOUVILLÉ ²⁾ evenzeer glad is.

5. Orbitoiden van gemiddelde grootte. Er blijven nu niet meer veel vormen van gemiddelde grootte over. BRADY ³⁾ beschreef uit de Padangsche bovenlanden een Orbitoide als *O. papyracea*; later toonden VERBEEK en FENNEMA ⁴⁾ het foutieve dezer determinatie aan en noemden den vorm, dien ze ook van Nias kenden *O. I. B. NEWTON and HOLLAND* ⁵⁾ vonden deze *Lepidocyclina* in Serawak terug en doopten ze *O. VERBEEKI*. Ze vonden er zoowel de microsphere als de macrosphere vorm, de eerste is de grootste. d 5—12 mM., h $1\frac{1}{2}$ —2 mM. Door het gladde oppervlak en de geleidelijke verdikking naar het centrum toe is deze vorm voldoende gekarakteriseerd; hij kan alleen met *O. formosa* verwisseld worden. Terloops wordt *O. VERBEEKI* ook van Christmas Island vermeld ⁶⁾.

Van Christmas Island is ten laatste, hoewel zeer onvolledig, een nieuwe soort als *O. andrewsiana* JONES and CHAPMAN beschreven. Er is alleen een mediane tuberkel. d 9,75 mM.

Ten laatste is van een aantal vindplaatsen het subgenus *Lepidocyclina* vermeld, zonder dat de vormen nader gedetermineerd konden worden en wel van: Java ⁷⁾, N. W. Nieuw-Guinea ⁸⁾, Koor ⁸⁾, Batjan ⁹⁾, Obi ⁹⁾, en van de Phillipijnen ¹⁰⁾.

Van alle schrijvers heeft alleen H. DOUVILLÉ (l.c.) getracht, de Indische lepidocyclinen als gidsfossielen te gebruiken, waarbij hij steunt op elders verkregen ervaringen. Hij geeft de volgende tabel:

1) Zie noot 8 p. 1147.

2) Zie noot 9 p. 1147.

3) H. BRADY, l.c.

4) R. VERBEEK et R. FENNEMA, l.c.

5) BULLEN NEWTON and HOLLAND, l.c.

6) JONES and CHAPMAN, l.c.

7) K. MARTIN, Samml. d. Geol. Reichsmuseums in Leiden, 6, p. 135—245, 1902.

8) K. MARTIN, Samml. d. Geol. Reichsmuseums in Leiden, 1, p. 65—83.

9) K. MARTIN, Samml. d. Geol. Reichsmuseums in Leiden, 7, p. 225—230, 1904.

10) K. MARTIN, Centralbl. f. Mineralogie etc. 1901, p. 326—327.

Burdigalien	L. Tournoueri, L. sumatrensis.
Aquitaniën sup.	L. insulae natalis.
Aquitaniën inf.	L. formosa.
Stampien	L. formosa, met Nummulites subbrongniarti.

We zullen bij de hieronder volgende beschrijving van ons materiaal de stratigraphisch tezamenhoorende soorten bij elkaar nemen en wel de oudste het eerste, zoodat we zullen kunnen zien, of onze resultaten met die van DOUVILLÉ overeenkomen.

O. (Lepidocylium) aff. formosa SCHLUMBERGER.

In eenen kalkmergel, ongeveer 2 K.M. ten W. van de kampong Pamaloen kwamen naast kleine Orbitoiden, andere Foraminiferen en Korallen, vele prachtig bewaarde, groote Orbitoiden voor, die in toto uit den mergel konden uitgeslibd worden, zoodat het gemakkelijk was, georiënteerde doorsneden te vervaardigen.

De schaal is plat, cirkelrond (*d* 20 m.M.) en van een mediane tuberkel voorzien (*d* 4, *h* 3, 5 m.M.). Terwijl de meeste schalen vlak zijn, vertoonen enkele eene sterk zadelvormige buiging. Zonder moeite ziet men aan de oppervlakte de onregelmatig polygonaal begrensde laterale kamers, terwijl men aan de randen plaatselijk de mediane kamers kan zien doorschijnen. Van skeletzuiltjes is aan de oppervlakte weinig of niets te zien.

Horizontale Doorsnede. Twee horizontale doorsneden hebben in verschillende sectoren de mediane kamers aangesneden. Deze zijn alle min of meer spatelvormig. De aanvangskamer is niet getroffen; ze moet echter zeer klein zijn, daar de overige kamers tot vlak bij het centrum komen. De meest centrale kamers, die op de embryonale kamer volgen, zijn in radiaire richting afgeplat; de radiaire diameter bedraagt 40—60, de tangentele 60—80 μ . Verder naar de peripherie toe worden de mediane kamers eerst vrij regelmatig zeshoekig, terwijl de meest periphere echt spatelvormig zijn. Over het algemeen neemt de grootte der kamers naar de peripherie toe, doch soms treden tusschen grootere kamers ringen van kleinere op. Terwijl verreweg de meeste mediane kamers in cirkels gerangschikt zijn, is hunne ligging in het centrum iets onregelmatiger, terwijl aan de peripherie tusschen de doorlopende concentrische cirkels soms niet doorlopende cirkelbogen ingeschakeld zijn. Het aantal van concentrische cirkels van mediane kamers bedraagt meer dan 100. De radiaire diameter der periphere kamers is 150—250 μ , hun tangentele diameter 140—150 μ . Vooral aan de peripherie vertoont de wand

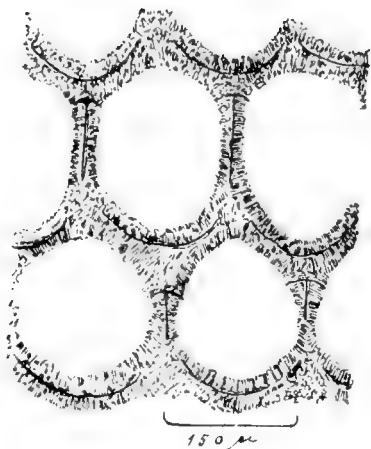


Fig. 1.

Misschien ligt boven dit kleine boogje een tangentieel verloopende porus, welke de kamers van eenzelfden boog verbindt. Bij vele kamers wordt de middenlamel alzijdig door een gelijkmatig dikken, secundairen wand bedekt, bij andere is deze secundaire wand het dunst op de tangentieele wanden.

Verticale Doorsnede. Ook uit deze doorsnede blijkt, dat de embryonale kamer zeer klein moet zijn, al is ze zelf niet zichtbaar. De hoogte der mediane kamers neemt n.l. van de peripherie tot zeer kort bij het centrum af van 120 tot 60 μ . De peripherische wanden der mediane kamers zijn steeds naar buiten convex, de structuur der wanden is slechts zeer onvoldoende zichtbaar. De laterale kamers zijn zeer dikwandig en in verticale richting sterk afgeplat; hunne hoogte bedraagt 30—50 μ , de dikte der wanden 30—40 μ . Doordat de wanden lateraal regelmatig in elkaar grijpen, worden min of meer verticale, van het centrum uit lichtelijk divergeerende wandverdikkingen gevormd, die weinig ontwikkelde skeletzuiltjes zijn. Aan weerszijden van het mediane vlak liggen in het centrum ongeveer 20, aan de peripherie slechts 5 lagen van mediane kamers.

In een dichten, grijzen kalksteen, die op halve hoogte van het Sepakoe-brongebergte aan den dag komt, vond ik veel Orbitoiden, die in hoofdzaak op de zoeven beschrevene lijken. De vorm der mediane kamers, hunne wandstructuur en afmetingen, en ook de vorm en ligging der laterale kamers zijn geheel gelijk. De grootste diameter bedraagt 23 m.M. Zeer verschillend is alleen de vorm der aanvangskamer, die bij deze Orbitoide groot is, evenals de tweede kamer. Deze beide kamers communiqueeren met elkaar door middel van eene zeer wijde opening.

De twee beschreven Orbitoiden vormen dus een duidelijk paar:

de fossielen van den Pamaloean zijn de microsphaere, die van den Sepakoe de megalosphere vormen.

Tusschen den beschreven vorm en *O. formosa* bestaan slechts geringe verschillen. Van weinig belang is de geringere en zeldzame zadelvormige buiging onzer Orbitoiden, daar, gelijk bekend, in dit opzicht vele soorten zeer variabel zijn. Van *O. formosa* echter vermeldt SCHLUMBERGER (l.c.), de laterale kamers beschrijvende; dat deze zijn: „très surbaissées et séparées par de très minces parois”, terwijl bij onzen vorm de horizontale wanden tusschen de laterale kamers zeer dik zijn. Over den vorm der mediane kamers deelt S. te weinig mede, dan dat het mogelijk zoude zijn, eventueele verschillen met onzen vorm op te sporen.

In den kalksteen van het Sepakoe-brongebergte komt naast de beschrevene Orbitoide nog een kleine, niet nader te determineeren *Lepidocyelina* voor, verder *Globigerina* en waarschijnlijk *Textularia*. De kalksteen is op doorsnede grijs, vrij ondoorzichtig; hij bevat hier en daar mikroskopische korreltjes van pyriet, die vaak kamers van Orbitoiden opvullen.

In den mergel van de Sg. Pamaloean werden nog enkele kleinere *Lepidocyelinen* gevonden (5 stuks), wier diameter slechts 5 m.M., in één geval zelfs minder bedroeg. De mediane kamers zijn op horizontale doorsnede ruitvormig, de aanvangskamer is waarschijnlijk klein. De skeletzuiltjes vertoonen zich aan de oppervlakte als kleine wratjes, wier ligging en aantal echter reeds bij dit kleine materiaal sterk varieeren. Bij twee exemplaren was er slechts één enkel centraal wratje, bij twee anderen waren er vele wratjes, die over de geheele schijf verspreid waren, terwijl bij het laatste exemplaar slechts weinig wratjes om het centrum liggen. Over het algemeen komen deze kenmerken goed overeen met wat er van *O. neolispansa* JONES and CHAPMAN (*O. dispansa* BRADY en *O. I A* VERBEEK en FENNEMA) bekend is; het materiaal is echter te gering om eene zekere determinatie toe te laten. Van belang is echter, dat we in een niveau, dat door veelvuldig voorkomen van een primitieve *Lepidocyelina* (*L. formosa*) gekarakteriseerd is, ook enkele representanten van, volgens DOUVILLÉ (l.c. p. 449) jeugdiger types vinden. Misschien is het ook van belang, dat deze jeugdiger vormen in één gewichtig kenmerk (het wratvormig aan de oppervlakte komen van de skeletzuiltjes) hier blijkbaar eene groote variatie vertoonen.

Uit een kalkmergel aan de Sg. Blakin werden door slibbing een groot aantal Foraminiferen verkregen, waarvan verreweg de meesten tot Orbitoides behoorden. Uit dit ruwe materiaal konden nu de verschillende soorten uitgezocht worden en het bleek, dat op deze

wijze streng gescheiden vormenrijen verkregen werden; slechts zeer zelden was het twijfelachtig, tot welke groep een bepaald exemplaar moest gebracht worden. Het tijdroovende en vermoeiende slijpen en uitzoeken der soorten werd met veel toewijding en volharding door mijne vrouw verricht.

De hier verzamelde soorten zijn de volgende.

O. (Lepidocyclina) acuta n. sp.

Van deze soort werden ca. 50 exemplaren gevonden, wier horizontale diameter varieerde van 3—7 mM. Aan de oppervlakte ziet men de onregelmatig begrensde laterale kamers, terwijl aan den rand soms ook de mediane kamers zichtbaar zijn, daar hier de laterale kamers kunnen ontbreken. Het centrum der schijf wordt ingenomen door een enkele, soms diffuse, in grootte zeer variabele skeletzuil, die ook uit een agglomeraat van kleine zuiltjes kan bestaan. Andere meer peripheer gelegen skeletzuiltjes zijn er niet. Het centrale deel der schijf is nu in verticale richting sterk uitgetrokken, zoo dat de Foraminifeer beiderzijds is toegespitst, waardoor deze Orbitoide een uiterst typischen vorm krijgt (*acuta*). Het doelmatige van het beperkt blijven der skeletzuiltjes tot deze verlengde verticale as springt dadelijk in het oog. De verlenging in verticale richting is echter aan belangrijke veranderingen onderhevig; ze kan zoo sterk zijn, dat de verticale diameter grooter wordt dan de horizontale (ik mat in een geval d 3, h $3\frac{1}{2}$ mM.) De periphere rand is bij dezen vorm steeds vlak, nooit zadelvormig gebogen.

Horizontale Doorsnede. Ook hier kon ik de embryonale kamer niet te zien krijgen: ze moet echter klein zijn, daar de mediane kamers tot vlak bij het centrum komen. De meer centrale mediane kamers zijn in radiaire richting afgeplat (rad. diam. 17, tang. diam. 30 μ). Reeds bij deze kamers is de wand dik (10 μ); er is hier slechts een onduidelijke middenlamel in den wand te zien.

Naar de peripherie toe worden de kamers eerst zeshoekig, dan spatelvormig: de kamerholte blijft echter bij deze periphere kamers ovaal. Zeer typisch is het, dat de kamers bij dezen vorm zoo onregelmatig liggen, zoodat tusschen de concentrische cirkels zeer vaak niet doorlopende cirkelbogen ingeschakeld zijn. De dimensies der periphere kamers varieeren vrij sterk: radiaire diam. 65—90 μ , tang. diam. 55 μ . Het aantal concentrische ringen van kamers is meer dan 50 en minder dan 100. Op sommige plaatsen in de preparaten kon ook hier de fijnere wandstructuur bestudeerd worden. Er is ook hier een middenlamel te onderscheiden, die echter vaak onduidelijk

is. De secundaire wand is hier veel scherper van de laterale kamer-vulling afgescheiden dan bij *O. formosa*, wat echter voor een deel een gevolg der conservatie zijn kan. Hier wordt n.l. elke kamer door één enkel calcietkristal gevuld, terwijl bij *O. formosa* de kamers meestal door een aggregaat van uiterst fijne calcietkristalletjes opgevuld werden. Op enkele plaatsen kan men hier de wijde pori zien, die van de ééne mediane kamer schuin naar buiten naar twee mediane kamers van den meer peripheer gelegen ring loopen. Talrijke pori loopen van de mediane kamers verticaal of iets schuin naar boven en beneden naar de aangrenzende laterale kamers. De vorm



Fig. 2.

der middenlamel is hier in hoofdzaak dezelfde als bij *O. formosa*; de radiaire stukken loopen hier echter naar de peripherie door (fig. 2).

Verticale Doorsnede. In de verticale doorsnede ziet men zeer duidelijk de vergroting van den verticalen diameter; de sterke, centrale skeletzuil is vooral aan één kant duidelijk getroffen. Het systeem der mediane kamers is slechts een laag dik; de kamers zijn laag (45μ) en hunne horizontale wanden zeer dik (25μ). De pori tusschen de mediane en de laterale kamers zijn hier overlans getroffen; ook de laterale kamers onderling blijken door middel van vele, wijde, verticale pori te communiqueeren, die voor een deel met een bruin, Fe-houdend mineraal gefiltreerd zijn. Het aantal lagen laterale kamers aan weerszijden van het mediane vlak bedraagt omstreeks 20.

O. (Lepidocyclina) flexuosa n. sp.

Een tweede vorm van den Sg. Blakin is iets minder talrijk dan de vorige; ik kon over ongeveer 20 exemplaren beschikken, die onder elkaar goed overeenkwamen. De Foraminiferen bestaan uit een dik, lensvormig lichaam, dat peripheer door een, in verticale richting sterk geplooiden rand (*flexuosa*) omgeven is. De horizontale diameter bedraagt 4—7 mM., de verticale ongeveer 3 mM. Aan de oppervlakte ziet men duidelijk, vooral in het centrum, de wratvormige uiteinden van vele niet dikke skeletzuiltjes tusschen de onregelmatig polygonaal begrensde, laterale kamers.

Horizontale Doorsnede. Door de sterke buiging van het mediane vlak kan men natuurlijk in eene horizontale doorsnede slechts onregelmatige velden van mediane kamers treffen. De embryonale kamer moet wederom zeer klein zijn; ze is echter in geen enkele doorsnede

getroffen. De eerste periphere kamers liggen onregelmatig om het centrum; de verder naar buiten gelegene schijnen in regelmatige concentrische ringen te liggen. Kort bij het centrum zijn de mediane kamers wederom in radiaire richting afgeplat: d 40μ rad. en 55μ tang. Verder naar de peripherie toe worden de mediane kamers eerst zeshoekig en dan ruit- of spatelvormig; de ruitvormige kamers schijnen de overhand te hebben. De dimensies dezer periphere kamers zijn: d $20-120\mu$ rad., $60-100\mu$ tang. Het aantal concentrische kamerringen bedraagt $50-100$.

Ook bij dezen vorm is aan de wanden der mediane kamers duidelijk een primaire lamel te onderscheiden; de secundaire wandverdickingen gaan hier geleidelijk in de latere kamervulling over. De vorm der mediane lamellen is typisch: elke kamer is begrensd door een peripheer boogvormig stuk, dat in twee radiaire stukken overgaat, terwijl aan den centralen kant twee boogvormige stukken liggen (fig. 3). Pori tusschen de mediane kamers waren niet met zekerheid te zien.

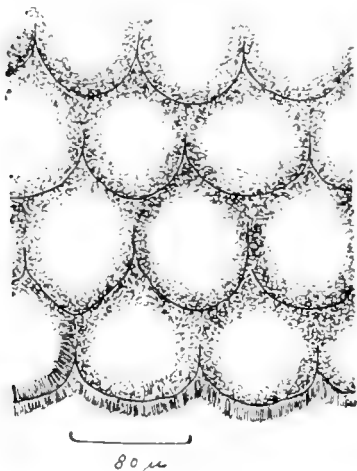


Fig. 3.

De laterale kamers zijn in deze doorsnede wederom onregelmatig polygonaal begrensd; hunne wanden zijn zeer dik; zij correspondeeren door zeldzame, zeer wijde, horizontale pori, terwijl men op gunstige plaatsen juist in de openingen van talrijke verticale pori kijkt.

Verticale Doorsnede. Terwijl de mediane kamers in het centrum slechts 1 laag hoog zijn, wordt dit naar de peripherie toe allengs meer, zoodat daar 2 of 3 lagen van mediane kamers aanwezig zijn. Van het centrum uit loopen verscheidene skeletzuiltjes naar de peripherie; andere worden op halve hoogte ingeschakeld. De hoogte der mediane kamers bedraagt in het centrum 25μ . De laterale kamers zijn ook hier sterk afgeplat en communiqueeren onderling door talrijke verticale pori. Het aantal lagen van laterale kamers bedraagt in het centrum ongeveer 20 of meer, aan de peripherie soms 0.

De beschreven *Lepidocyclina* komt het meeste met *O. multipartita* Mart. overeen, doch verschilt van deze door geringere grootte, grootere dikte, geringere uitbreiding van het mediane vlak naar de peripherie en door de kleine aanvangskamer. Ook kan *O. flexuosa* niet als de microspherische vorm van *O. multipartita* opgevat worden,

daar de microsphere vormen steeds grooter dan de megalosphere vormen zijn. Van *O. insulae natalis* onderscheidt zich de beschreven soort door hare kleinheid en algemeenen vorm, van *O. neodispana* door hare dikte en de veel minder groote wratten.

O. (Lepidocyclina) polygona n. sp.

Zeer sterk met de beide vorige contrasteert een vorm, die niet meer rond, maar min of meer regelmatig polygonaal is (polygona). Het is een kleine, dunne *Lepidocyclina* ($d 1\frac{1}{2}-3$ mM., $h 0,9$ mM.), geheel vlak, van drie- tot zeshoekigen vorm. Aan de oppervlakte ziet men zeer duidelijk de onregelmatig begrensde kamers, terwijl aan de hoekpunten betrekkelijk zeer stevige pilaartjes zich als wratjes aan de oppervlakte vertoonen. Onder mijn materiaal was slechts 1 exemplaar met 3 wratjes, 40 met 4, 54 met 5 en 13 met 6 wratjes. In het algemeen geldt, dat het aantal wratjes en dus ook de veelhoekigheid met de grootte toeneemt; doch er komen op dezen regel vele uitzonderingen voor.

Mediane horizontale doorsnede. In niet zuiver mediane doorsneden ziet men de onregelmatig begrensde, laterale kamers en de skeletzuiltjes, die uit een aggregaat van Calcietkristalletjes bestaan. Plaatselijk zijn er verticale of schuin naar boven loopende pori tusschen de laterale kamers te zien.

De aanvangskamer is zeer groot, de tweede kamer is nog grooter en omvat de eerste voor een deel; de buitenwand dezer beide kamers is dik, de scheidingswand tusschen deze beide kamers is dun. De maximale diameter der tweede kamer bedraagt 300—400 μ . Hoewel de mediane kamers bij deze soort in het algemeen nog spatelvormig zijn, varieert hun vorm toch zeer sterk, terwijl ze bovendien uiterst onregelmatig geplatst zijn: met moeite vindt men hier de concentrische ringen terug. Steeds zijn de wanden der mediane kamers dik; van een primaire middenlamel was niets te zien. Zeer talrijke pori loopen verticaal of schuin tot zelfs bijna horizontaal van de mediane kamers naar de laterale kamers.

Verticale Doorsnede. De mediane kamer is slechts één laag hoog; de kamerhoogte bedraagt 35 μ , de dikte der horizontale wanden 10 μ . Zeer duidelijk is te zien, hoe de skeletzuiltjes eerst op eenigen afstand van het mediane vlak beginnen en naar de peripherie toe allengs dikker worden. Aan weerszijden der mediane kamers liggen slechts 11 lagen van laterale kamers.

O. (Lepidocyclina) sumatrensis Brady.

Deze vorm is verreweg de talrijkste aan de Sg. Blakin. Van alle

andere vormen van dezelfde vindplaats is ze zeer gemakkelijk te onderscheiden; met *O. sumatrensis*, die vooral door NEWTON en HOLLAND (l. c.) nauwkeurig beschreven is, vertoont hij slechts zeer geringe verschillen, die niet voldoende zijn om er een nieuwe soort voor op te stellen.

De schijf heeft nooit of zeer zelden wratjes aan de oppervlakte; ze is zeer dik (d 2—4, h 2—2, 7 mM.) en soms zelfs cilindervormig. In het midden kan men om de Orbitoïde een dunne kiel vervolgen, die vaak in slippen uitloopt.

Horizontale Doorsnede. Deze vorm is megalospheer; de aanvangskamer wordt door de tweede kamer voor een deel omvat, juist als bij *O. polygona* en als bij de kleine Orbitoïden van Timor, die door MARTIN (l.c.) beschreven zijn. De buitenwand dezer beide kamers is 33 μ dik; de grenswand tusschen beide kamers slechts 10 μ . De diameter der aanvangskamer is max. 190 μ , van de tweede kamer 310 μ . De mediane kamers zijn meer ruit- dan spatelvormig, in vrij regelmatig concentrische ringen gelegen, vaak in tangenteele richting verlengd. Hun diameter is tang. 90, rad. 60—70 μ . De mediane lamel is onduidelijk. Het aantal concentrische ringen bedraagt 30—50.

De laterale kamers zijn niet zoo onregelmatig van vorm als bij de meeste Orbitoïden; ook zijn ze in vrij regelmatig concentrische ringen gelegen, wat NEWTON en HOLLAND (l.c.) ook van *O. sumatrensis* opgeven.

Verticale Doorsnede. Er is slechts een enkele laag van mediane kamers en aan weerszijden daarvan 15 lagen van laterale kamers. Hoewel er aan de oppervlakte geen wratjes te zien zijn, blijkt er inwendig toch wel degelijk een stevig tusschenskelet te bestaan. De hoogte der laterale kamers is groot 70 μ , de dikte der horizontale wanden bedraagt 30 μ .

Subgenus novum Lepidosemicyclina.

Naast de beschreven Orbitoïden kwamen in den mergel van de Sg. Blakin nog talrijke Forminiferen voor, die in menig opzicht nauwe verwantschap met *Lepidocyclina* vertoonen. Ook bij hen is een systeem van mediane kamers aanwezig, die in het algemeen op horizontale doorsnede den vorm eener spatel hebben en die zich om enkele groote aanvangskamers ontwikkelen; ook bij hen liggen ter weerszijden van deze mediane kamers laterale kamers, die onregelmatig van vorm zijn en tusschen welke een steunskelet plaats vindt, dat aan de oppervlakte in talrijke wratjes eindigt. In één opzicht echter vertoonen deze vormen groote verschillen met Lepido-

cyclina: de mediane kamers liggen n.l. niet in concentrische ringen, maar slechts in halve of in kwartecirkels, waarbij de embryonale kamers aan de peripherie, in het middelpunt van den cirkelsector komen te liggen. Derhalve werd voor deze vormen een nieuw ondergeslacht: *Lepidosemicyclina* opgesteld.

Lepidosemicyclina thecideaeformis n. sp.

Van dit subgenus komt aan den Sg. Blakin slechts één soort voor, die meestal den vorm van eenen cirkelsector van iets minder dan 180° heeft en in het cirkelmiddelpunt eenigszins verdikt is, waardoor de kleine schelpjes zeer aan de Brachiopode *Thecidea* doen denken. Vaak is de eene kant der schelp meer convex dan de andere, die zelfs concaaf kan zijn, zoodat het horizontale mediane vlak niet meer zuiver symmetrievlak is. Van laterale of mediane kamers is aan de oppervlakte niets te zien: de geheele schijf is met zeer kleine en dicht opeengedrongen wratjes bedekt. De algemeene vorm varieert eenigszins, doordat soms de tangentieele, soms de radiaire diameter het grootste is, (2—4 mM.). Soms is de schelp zwak gebogen; in de allermeeste gevallen is ze echter volkomen vlak.

Horizontale Doorsnede. In een goede doorsnede ziet men duidelijk de groote aanvangskamer, die iets buiten het cirkelmiddelpunt ligt. Ze is groot en rond en haar wand is dik (d 160, wanddikte 20 μ). Aan deze aanvangskamer sluit een nog grootere kamer aan, die geheel aan de spits der schelp, d.i. in het cirkelmiddelpunt ligt en die de aanvangskamer eenigszins omvat. Haar periphere wand is nog dikker dan die der aanvangskamer (30 μ); de grenswand is slechts 15 μ dik. Aan deze tweede kamer sluiten nog twee groote kamers aan, die weer meer naar binnen liggen; deze drie kamers omvatten de aanvangskamer in een onduidelijke spiraal. De volgende kamers zijn reeds ruitvormig. Aan de wanden is nooit eene primaire lamel te onderscheiden. Radiaire diameter der periphere kamers 100, tangentieele 90 μ . Op dikkere plaatsen in de preparaten ziet men zeer goed de wijde verticale pori, die naar de laterale kamers loopen.

Vertikale Doorsnede. De mediane kamers zijn slechts één laag dik. Deze laag is op verticale doorsnede op de grenzen der kamers vrij sterk ingesnoerd. Aan weerskanten hiervan liggen 5—6 lagen van laterale kamers, die zeer plat zijn en eenigszins schubvormig op elkaar liggen. De dikte van het fossiel bedraagt 0,8 mM.

Naast de genoemde Foraminiferen kwamen in den mergel van den Sg. Blakin nog voor: *Operculina* spec., *Amphistegina* spec.,? *Cyclo-*

elypeus spec., en andere Foraminiferen, die ik niet determineeren kon.

De derde plaats, waar talrijke Orbitoiden konden verzameld worden, ligt aan den bovenloop van den Sg. Mentawir in lagen, die zeker jonger zijn dan de lagen aan den Sg. Blakin en die waarschijnlijk naar boven toe geleidelijk overgaan in de pliocene, aan kool zeer rijke lagen, die aan het benedendeel der Balik Papan-Baai overal aan den dag komen.

O. (Lipidocyclina) sumatrensis Brady, var. minor nov. var.

Het allertalrijkst is ook hier weer een zeer kleine Orbitoide, die in bijna alle opzichten met *O. sumatrensis* van den Sg. Blakin overeenkomt. Het voornaamste verschil bestaat daarin, dat de soort aan de Sg. Mentawir aanmerkelijk kleiner is (d $1\frac{1}{2}$ —2, h 1, 2— $1\frac{1}{2}$ mm). Dit kan niet toevallig zijn, doordat we van hier alleen de minusvarianten zouden verzameld hebben: daartoe is het materiaal, op beide plaatsen verzameld, veel te groot. Voor de verdere beschrijving kan bijna geheel naar *O. sumatrensis* verwezen worden. Alleen komen bij den vorm van de Sg. Mentawir geen of bijna geen skeletzuiltjes voor, wat trouwens bij een zoo kleinen vorm, die door zijne bolrondheid al eene natuurlijke maximale stevigheid heeft, ook wel verwonderlijk zou zijn.

O. (Lipidocyclina) neodispansa Jones and Chapman, var. minor, nov. var.

Van dezen vorm kon ik over ongeveer 20, onder elkander goed overeenstemmende exemplaren beschikken. In het algemeen komen deze weer goed met *O. neodispansa* overeen. De schijf is naar het midden geleidelijk verdikt en een aantal betrekkelijk groote wratjes (max. 20) geven het oppervlakkige einde der skeletzuiltjes aan. De vorm is echter kleiner dan *O. neodispansa*: d $1\frac{1}{2}$ —3, h = 1— $1\frac{1}{2}$ mm.

Horizontale Doorsnede. De aanvangskamer is groot en dikwandig (d max. 270, wanddikte 20μ). De kamers daaromheen zijn half-cirkelvormig en verder naar de peripherie toe vrijwel afgerond zeshoekig, maar steeds onregelmatig. Zeer typisch is, dat de mediane kamers aan de peripherie niet in concentrische cirkels liggen, maar in den omtrek van concentrische zeshoeken, wier zijden naar buiten iets concaaf zijn. Horizontale pori tusschen de mediane kamers zijn niet zichtbaar, wel zeer veel verticale pori. De laterale kamers zijn onregelmatig begrensd en hebben een wijd lumen. Ze zijn onder elkander verbonden door vele, bijna horizontale pori. De diameter der mediane kamers bedraagt 45—50 μ ; de wanddikte 15 μ .

Van de inwendige structuur van *O. neodispansa* is te weinig bekend om te kunnen beoordeelen, of de beschreven vorm met deze soort in alle opzichten overeenkomt; de gelijkenis in de uitwendige kenmerken is echter zoo groot, dat ik niet gearzeld heb, deze *Lepidocyclinen* van den Sg. Mentawir als eene variëteit van *O. neodispansa* te beschrijven.

O. (Lepidocyclina) glabra n. sp.

Ten laatste werden er van deze vindplaats ca. 15 stuks van een iets grootere *Lepidocyclina* verzameld, die gekenmerkt was door de onduidelijkheid of zelfs door de afwezigheid van oppervlakkige wratjes. Door zijn vorm komt hij nog het meest met *O. neodispansa* overeen (*d* 2 $\frac{1}{2}$ -5, *h* 1-2 mm), maar de afwezigheid der wratjes verbiedt, hem tot deze soort te brengen.

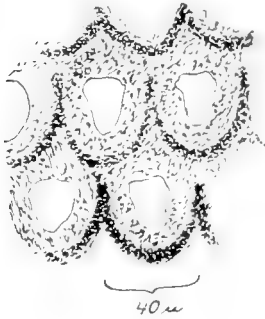


Fig 4.

lamel zeer fijne kanalen. Rad. diam. der mediane kamers 45, tang. 35 μ .

Horizontale doorsnede. Ook door zijne mikroskopische structuur is deze soort van de tot nu toe beschrevene goed gescheiden. De aanvangskamer is waarschijnlijk groot, de eerste periphere, mediane kamers zijn onregelmatig rondachtig; naar buiten toe worden de kamers echter spoedig spatelvormig en vertoonen een uiterst typische middenlamel, die denzelfden vorm heeft als die van *O. flexuosa*, maar veel dikker is. (fig. 4). Misschien loopen in deze primaire

Lepidosemicyclina polymorpha n. sp.

In de jongere lagen van de Sg. Mentawir treffen we een vorm van *Lepidosemicyclina* aan, die in structuur geheel met den ouderen vorm van de Sg. Blakin overeenkomt, zoodat daarnaar kan verwezen worden. Uitwendig wijkt echter deze jonge vorm sterk en wel door zijne groote variabiliteit, van den primitieven vorm af. Er komen enkele vormen voor, die nauwelijks van *L. thecideaeformis* te onderscheiden zijn. Andere exemplaren worden aan den peripheren rand sterk geplooid, ingesneden, worden in radiaire richting sterk verlengd of zelfs geheel onregelmatig van vorm.

Er zijn enkele dingen, die er zeer vaag op wijzen, dat *thecideaeformis* eene kruipende levenswijze had, terwijl *L. polymorpha* vastzittend geworden zou zijn. Terwijl n.l. de overige *Orbitoiden* radiair gebouwd zijn, wat met waarschijnlijkheid op eene zwevende levens-

wijze wijst (plankton), is *L. thecidaeiformis* niet alleen in verticale richting (cirkelsector) bilateraal symmetrisch geworden, maar heeft ook een boven- en onderkant gekregen (verschil in convexiteit); heeft dus de symmetrie aangenomen, die we van een kruipend dier gewoon zijn. Daarbij komt echter, dat de jongere vorm een zoo groote variabiliteit en zoo onregelmatige vormen vertoont, als we alleen van vastzittende dieren (*Ostrea* enz.) gewoon zijn te zien.

Naast de beschreven Orbitoiden komt in den mergel van de Mentawir nog *Amphistegina* voor.

Met een enkel woord willen we nog gesteenten van andere vindplaatsen bespreken, die alleen generiek determineerbare fossielen bevatten.

Even oud als de kleimergel aan de Sg. Pamaloean is een kalksteen, die op vrij groote schaal in de delta van genoemde rivier wordt aangetroffen. Hierin werd de verticale doorsnede van een kleine Orbitoide, een *Globigerina* en misschien ook *Amphistegina* aangetroffen. De kalksteen is zeer dicht, wordt onder het microscoop nauwelijks doorzichtig en bevat hier en daar korreltjes pyriet.

Jonger dan de Pamaloean-mergel, maar misschien ouder dan de Blakin-mergel is een mergelige zandsteen, die aan den Sg. Binocwang aan den dag komt.

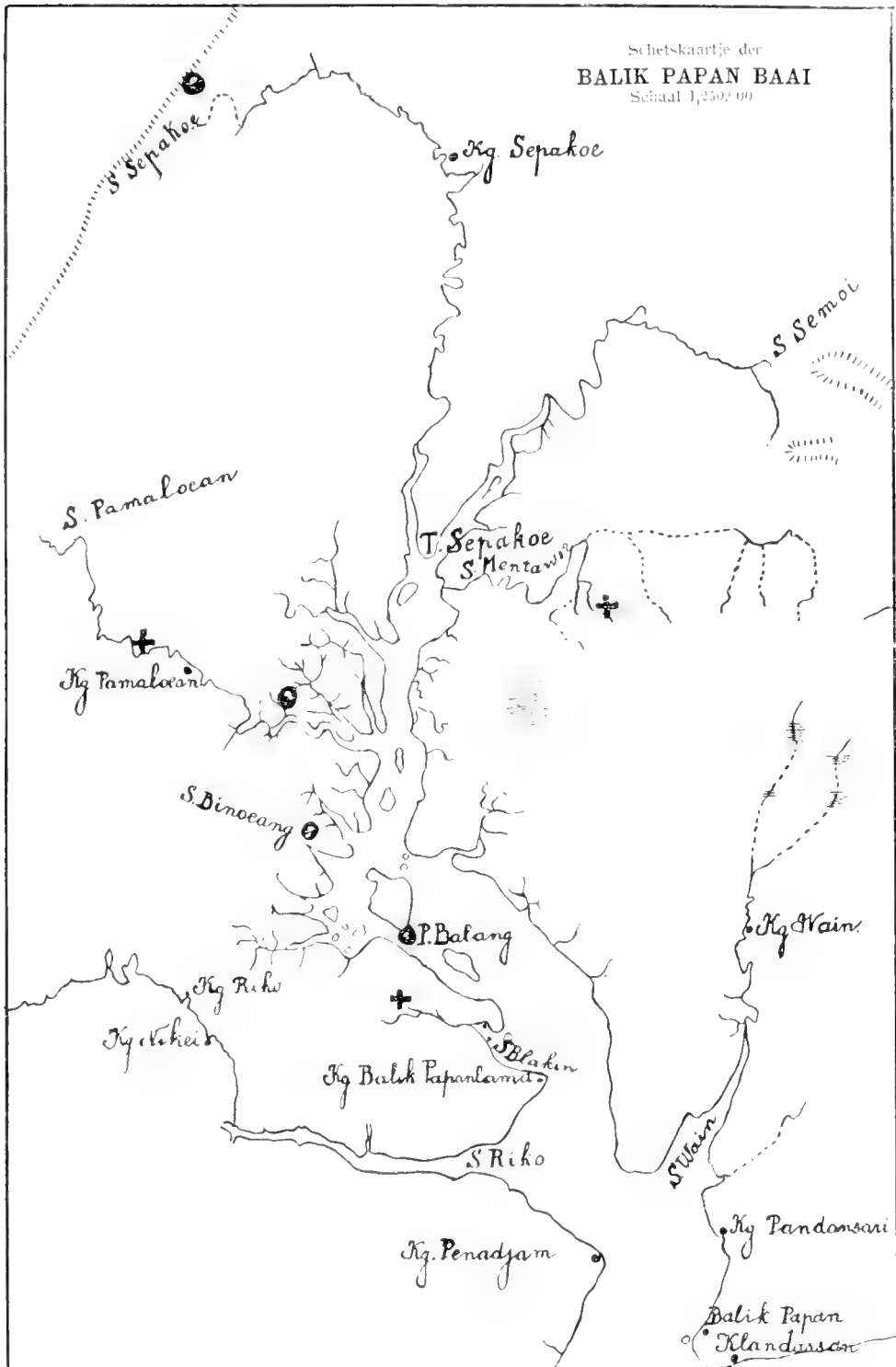
De mergel blijkt o. h. m. te bestaan uit veel hoekige kwartskorrels, die door een Fe- en Ca-rijk cement aan elkaar bevestigd zijn. Hij bevat *Amphistegina*, een enkele *Alveolina* van 5 mM. lengte, enkele Orbitoiden en een groote, spiraalvormig gebouwde, mij geheel onbekende Foraminifeer (niet *Spiroclypeus*).

Een mergel, die op de Z. O. kust van Poeloe Balang aan den dag komt, en waarvan een handstuk een groot harsinsluitsel bevat, is geheel met Foraminiferen opgevuld, waaronder: *Miliola*, een zeer kleine *Alveolina*, *Globigerina*, *Amphistegina*, een kleine Orbitoide, e.a. te herkennen zijn. De mergel bevat veel hoekige kwartskorrels, terwijl de fossielen vaak korreltjes van pyriet insluiten.

De in het voorgaande beschreven Orbitoiden kunnen dus tot drie verschillende afdeelingen van het Tertiair aan de Balik Papan-baai gebracht worden:

Mentawir-lagen	<i>L. sumatrensis</i> var. <i>minor</i> , <i>L. neodispansa</i> var. <i>minor</i> , <i>L. glabra</i> , <i>Lepidosemicyclina polymorpha</i> .
Poeloe Balang-lagen. (Sg. Blakin)	<i>L. acuta</i> , <i>L. flexuosa</i> , <i>L. sumatrensis</i> , <i>Lepidosemicyclina thecidaeiformis</i> .
Pamaloean-lagen.	<i>L. aff. formosa</i> , <i>L. ? neodispansa</i> .

L. RUTTEN. „Over orbitoiden uit de omgeving der Balik Papan-baai (Oostkust van Borneo).”



De aldus verkregen stratigraphische opvolging komt niet geheel met de door H. DOUVILLÉ gegevene overeen. Wel komen bij ons ook in de oudste lagen eenvoudige vormen van het type van *L. formosa* voor, maar daarnaast treden direct vormen van het type van *O. neodispansa* op, die volgens DOUVILLÉ veel jonger moeten zijn. Aan de Sg. Blakin komen dan naast elkaar voor vormen met veel en weinig geprononceerde skeletzuiltjes (*O. flexuosa*), vormen van het type van *L. sumatrensis* en vormen met een enkele, groote, centrale wrat, die volgens DOUVILLÉ in gescheiden horizonten zouden moeten voorkomen. Hetzelfde geldt voor de allerjongste lagen, de Mentawirlagen.

Het is echter zeker niet zonder belang, dat in het oudste niveau de eenvoudigste vormen voorkomen, dat in het middelste niveau het aantal soorten het grootste is en dat in het jongste niveau, dat niet veel ouder kan zijn dan de uitstervingsperiode van het genus, twee minor-vormen van oudere soorten voorkomen, terwijl van een derde soort zeer bizarre variaties optreden.

Buitenzorg, Januari 1911.

Kristallographie. — De Heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. SCHMUTZER: „*Over de oriëntering van kristaldoorsneden.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. CARDINAAL).

Bij de bepaling van de richting van een snijvlak (ϱ, σ) uit de hoeken, die de traces van drie niet evenwijdige en niet in ééne zone liggende vlakken met elkaar insluiten, krijgt men in het algemeen eene 4^e graads vergelijking in $\cos 2\varrho$, welke als maximum 4 bestaansbare wortels levert. Daar nu de hoek 2ϱ gelijktijdig in twee kwadranten kan worden aangenomen, volgt hieruit, dat men 8 waarden van ϱ vindt. Daaraan beantwoorden 8 waarden van σ . Wanneer een drietal kristalvlakken en een bepaalde kristaldoorsnede gegeven zijn, is intusschen het snijvlak geheel bepaald; welke waarde van ϱ en van σ hier in aanmerking komt, is met zekerheid uit te maken, wanneer men rekening houdt met de omstandigheid, dat een kristalvlak tevens het begrenzingsvlak van de mineraalsubstantie is.

Gaat men (cf. fig. 1) van een vlak (hkl) uit, waarvan de pool ligt bij p en dat met het vlak C ($\perp c$ -as) een snijlijn AB levert, dan zal de hoek $DBE = \alpha < \frac{\tau}{2}$ gevuld zijn met mineraalsubstantie, de stompe hoek EBI daarentegen niet. Men kan zich nu den projectiebol verdeeld denken in 8 oktanten, waarvan er 4 boven en 4 beneden

het projectievlak C liggen, en waarvan de eerste twee ($BOD = I$, $DOA = II$) den scherp en tweevlakkenhoek DBE bevatten. Legt men s vast aan de coördinaten $\varrho = \sphericalangle BM$, $\sigma = \sphericalangle Ms$, dan ligt s in het 1^e boloktant, gerekend van AB af; voor een vlak $P''(\overline{hkl})$ ligt s in oktant III.

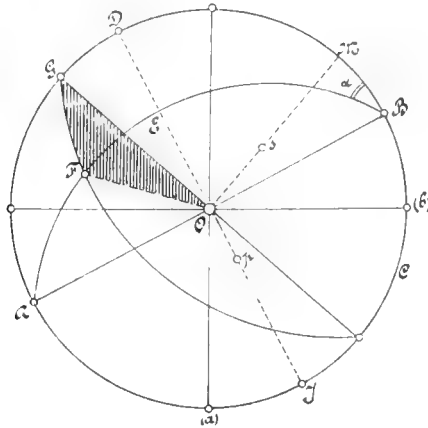


Fig. 1.

Het vlak S snijdt $P(hkl)$ volgens de lijn FO ; de mineraalsubstantie ligt rechts van deze snijlijn, zooals door de harsceering is aangegeven. Neemt bij eene constante waarde van σ ($\sigma = \sigma_1$), ϱ toe, dan neemt de hoek $h = \sphericalangle GOF$, die voor $s(\varrho, \sigma)$ in het 1^e oktant > 0 en $< \frac{\pi}{2}$ was, af, tot bij $\varrho = \frac{\pi}{2}$ de waarde $h = 0$ is bereikt. Nu wordt

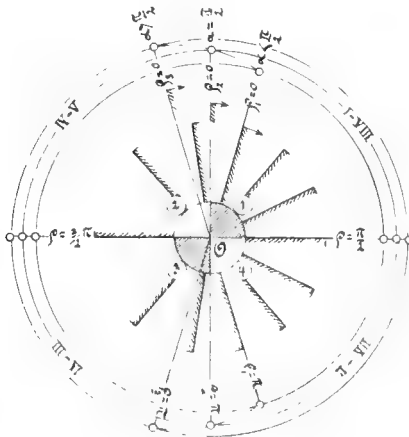


Fig. 2.

$h < 0$, verkrijgt in het III^e oktant een waarde $-\frac{\pi}{2}$; bij $\varrho = \frac{3}{2}\pi$ is $h = -\pi$; in het IV^e oktant wordt de waarde $h = -\frac{3}{2}\pi$ overschreden en eindelijk bereikt h bij $\varrho = 2\pi$ de waarde $-2\pi + h_0$, waarin h_0 de hoek is, die beantwoordt aan $\varrho = 0$, $\sigma = \sigma_1$.

Fig. 2 geeft de verandering van den hoek h weer voor een vlak $\Gamma(\alpha = 60^\circ)$, waarbij ϱ met 30° opklimt en $\sigma = 60^\circ$. Voor $\varrho_1 = 0$ is $h = 73^\circ 54'$; met toenemende ϱ_1 neemt h af, wordt bij $\varrho_1 = \frac{\pi}{2}$ gelijk 0, bij $\varrho_1 = \pi$ gelijk $-73^\circ 54'$, bij $\varrho_1 = 199^\circ 28'$ gelijk $-\frac{\pi}{2}$ en bereikt bij $\varrho_1 = 2\pi$ de waarde $-2\pi + 73^\circ 54'$.

In de figuur is verder aangeduid, dat h , voor gelijke absolute waarden voor ϱ en σ , in de oktanten I en VIII, II en VII, III en VI, IV en V identiek is. In den centralen cirkel is tevens aangegeven, dat de cotangens in de kwadranten 1 en 3 > 0 , in 2 en 4 < 0 is. Nu varieert, zooals uit het diagram fig. 4, 5 in de vorige mededeeling is af te leiden, h bij $\alpha < \frac{\pi}{2}$ voor verschillende waarden van ϱ en σ , in de oktanten I en VIII uitsluitend tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, in II en VII tusschen 0 en $-\frac{\pi}{2}$. In fig. 2 grijpen de oktanten I en VIII resp. II en VII bijgevolg nooit over de kwadranten 1 en 4 heen, wel echter de oktanten IV en V over kwadrant 1 en III en VI over 4. Wanneer men dus uit de betrekking

$$\cot h = \frac{\cos \sigma \cot \alpha + \sin \sigma \sin \varrho}{\cos \varrho}$$

vindt $\cot h > 0$, dan moet h worden aangenomen in het 1st kwadrant, als $s(\varrho, \sigma)$ ligt in een der oktanten I, IV, V of VIII en in het 3^{de} kwadrant, als s ligt in III of VI. Is $\cot h < 0$, dan ligt h in het 2^{de} kwadrant bij s in IV of V, en in het 4^{de}, als s in het II^{de} of VII^{de} oktant ligt.

Wat de vlakken met $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en $\alpha > \frac{\pi}{2}$ betreft, spreekt de figuur voor zichzelf. Men kan dus de hier verkregen resultaten in de volgende tabel samenvatten:

	<i>cot h > 0</i>								<i>cot h < 0</i>							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\alpha < \frac{\pi}{2}$	1	—	3	1	1	3	—	1	—	4	4	2	2	4	4	—
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	1	—	3	—	—	3	—	1	—	4	—	2	2	—	4	—
$\alpha > \frac{\pi}{2}$	1	3	3	—	—	3	3	1	2	4	—	2	2	—	4	2

Van een trigonaal prisma zijn gegeven de vlakken $\Gamma_1(0\bar{1}10)$ en $\Gamma_2(10\bar{1}0)$, verder $\Gamma_3(0001)$. Neemt men het laatste vlak als projectievlak aan, dan wordt $a_1 = a_2 = \frac{\pi}{2}$; $\gamma = 120^\circ$.

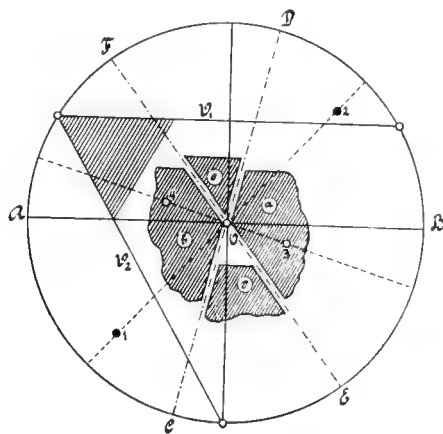


Fig. 3.

Meet men verder tusschen de traces van $\Gamma_1 : \Gamma_2$ en $\Gamma_2 : \Gamma_3$ succ. de hoeken $h_1 = 76^\circ$, $h_2 = -53^\circ$, dan levert (I)

$$\cot 76^\circ = \sin \sigma \operatorname{tg} \varrho$$

en

$$\cot 53^\circ = -\sin \sigma \operatorname{tg} (\varrho - 120^\circ)$$

waaruit:

$$\operatorname{tg}^2 \varrho - \frac{\cot 76^\circ + \cot 53^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ \cot 53^\circ} \operatorname{tg} \varrho - \frac{\cot 76^\circ}{\cot 53^\circ} = 0$$

$$\operatorname{tg} \varrho = 1,07592 \quad \text{of} \quad -0,30754.$$

Men vindt hieruit de waarden:

$$\rho_1 = 47^\circ 5' 58''; \quad \rho_2 = -132^\circ 54' 2''; \quad \rho_3 = +162^\circ 54' 17''; \quad \rho_4 = -17^\circ 5' 43'' \\ \sigma_1 = 13^\circ 33' 49''; \quad \sigma_2 = 13^\circ 33' 49''; \quad \sigma_3 = -54^\circ 9' 53''; \quad \sigma_4 = -54^\circ 9' 53''.$$

Zij in fig. 3 AB de trace van Γ_3 (0001), dan geven

$$CD \sphericalangle DOB = h_1 = 76^\circ \text{ en } EF \sphericalangle BOE = h_2 = -53^\circ$$

de richtingen van de traces van Γ_1 en Γ_2 aan. Het vlak S_1 (ρ_1, σ_1) heeft zijn pool ten opzichte van Γ_1 in okt. I, $\text{coth}_1 > 0$, h_1 ligt dus in kwadr. 1; ten opzichte van Γ_2 ligt s_1 in okt. IV, $\text{coth}_2 < 0$, h_2 in kwadr. 2, terwijl $h_3 = 0$, en de trace van Γ_3 de snede dus van boven afsluit. Aan het snijvlak S_1 beantwoordt dus de doorsnede a ; op gelijke wijze vindt men, dat de doorsneden b , c en d betrekking hebben op de snijvlakken S_2 , S_3 en S_4 . En hiermede is een keuze tusschen de vier gevonden polen met zekerheid mogelijk geworden.

Moet men de oriëntering bij het hier besproken kristal bepalen met behulp van 2 kristalvlakken en 1 splijvlak, dan blijven 2 oplossingen voldoen, zooals gemakkelijk is in te zien, terwijl bij 1 kristalvlak en 2 splijvlakken of ook bij 3 splijvlakken alle 4 oplossingen in aanmerking komen.

Kristallographie. — De Heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. SCHUTZER: „*Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoeringshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak in eene willekeurige kristalsnede.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. CARDINAAL).

Zij in fig. 1 het projectievlak, \perp op de bissectrix der optische assen A en B aangebracht, en zij verder $S(s)$ het snijvlak, dan worden de trillingsrichtingen in het preparaat gegeven door de vlakken, die den hoek AsB en zijn supplement halveeren.

Zij x de hellingshoek van de bissectrix (O) op het snijvlak S ; $\sphericalangle IKM = \alpha$, de hoek, door de snijlijnen der vlakken AOB en S met het projectievlak ingesloten, dan kan men, zooals vroeger werd afgeleid, in het vlak S de uitdooving ten opzichte van de snijlijn OH vinden uit de betrekking:

$$\cot 2y = \cot 2 \sphericalangle FH = \cot (\sphericalangle DFH + \sphericalangle GH) = \\ = - \frac{1 - \sin^2 V \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sin^2 V} \cdot \sin x + \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha \sin^2 V} \sin x \quad . \quad (1)$$

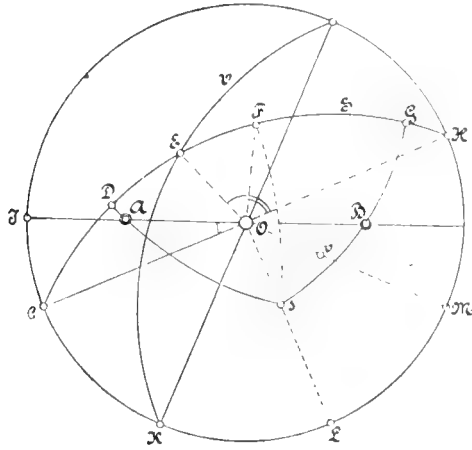


Fig. 1.

Wordt de pool s van S vastgelegd aan de coördinaten $\varrho = \sphericalangle IKL$, $\sigma = \sphericalangle Ls$, dan gaat (1) over in:

$$\begin{aligned} \cot 2y &= \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 \varrho}{\sin 2\varrho \sin^2 V} \cdot \frac{1}{\sin \sigma} - \frac{1 - \sin^2 V \sin^2 \varrho}{\sin 2\varrho \sin^2 V} \sin \sigma = \\ &= \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 \varrho - (1 - \sin^2 V \sin^2 \varrho) \sin^2 \sigma}{\sin 2\varrho \sin \sigma \sin^2 V} \dots \dots (2) \end{aligned}$$

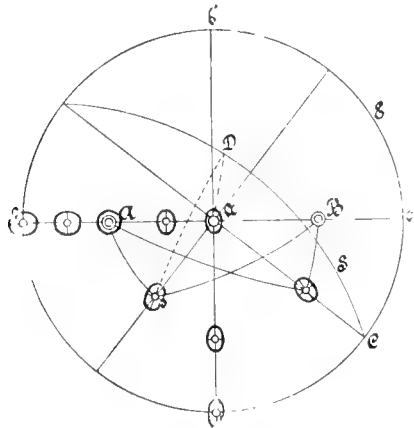


Fig. 2.

Aan elke waarde van $\cot 2y$ beantwoorden nu 2 waarden van y , die onderling 90° verschillen en die de trillingsrichting van den snellen resp. van den langzamen straal aangeven. De ligging van de ellips is uit de formule zonder meer niet af te leiden; om deze nochtans te vinden gaat men als volgt te werk. In fig. 2 duidde men de boloktanten cab , $\beta a'c'$, $c'ab'$ en $\beta'ac$ aan met de cijfers I, II,

III en IV voor zoover ze boven, en met V, VI, VII en VIII voor zoover ze beneden het projectievlak liggen. In het eerste oktant varieert ϱ tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, $\sin 2\varrho > 0$; σ tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, $\sin \sigma > 0$.

Het teeken van $\cot 2\gamma$ in den vorm (2) wordt dus geheel bepaald door het teeken van den teller der breuk.

$$\cot 2\gamma = 0, \text{ wanneer } (\sin 2\varrho \sin \sigma \sin^2 V = 0):$$

$$(1 - \sin^2 V \cos^2 \varrho) - (1 - \sin^2 V \sin^2 \varrho) \sin^2 \sigma = 0.$$

Neemt, bij eene constante waarde van σ en V , ϱ toe, dan wordt de vorm

$$1 - \sin^2 V \cos^2 \varrho - (1 - \sin^2 V \sin^2 \varrho) \sin^2 \sigma =$$

$$= 1 - \sin^2 \sigma (1 - \sin^2 V) - \sin^2 V (1 + \sin^2 \sigma) \cos^2 \varrho \dots (3)$$

door de afname van $\cos \varrho$, > 0 , en dan wordt bij $\varrho = \frac{\pi}{2}$

$$\cot 2\gamma = \frac{1 - \sin^2 \sigma (1 - \sin^2 V)}{(\sin 2\varrho = 0) \sin \sigma \sin^2 V} = + \infty.$$

$$\text{Hieruit volgt: } 2\gamma = \pm 180^\circ \text{ of } 0^\circ$$

$$\gamma = \pm 90^\circ \text{ of } 0^\circ \dots \dots \dots (4)$$

In fig. 2 is de α -as als normaal van het projectievlak gekozen; het behoeft geen nadere toelichting, dat het vlak, dat $\angle AsB$ halveert, hier steeds de trillingsrichting van den snelsten straal aangeeft. Ligt de pool van het snijvlak in het vlak bb' , dan wordt γ_a , de hoek tusschen de langste ellipsas en de snijlijn $S: E (= \alpha')$ gelijk $\frac{\pi}{2}$, zoodat de waarde $\gamma = 0 = \gamma_c$ op de korte ellipsas betrekking heeft.

Brengt men dus het projectievlak \perp op de negatieve bissectrix, dan vindt men met behulp van (2) den hoek, dien de lange as van de snelheidsellips maakt met de snijlijn van het projectievlak en het snijvlak, wanneer men bij eene positieve waarde van $\cot 2\gamma$ den hoek $2\gamma_a$ neemt in het 3^e kwadrant. Dan is tevens γ_a een hoek in het 2^e of 4^e kwadrant en draagt bijgevolg, wanneer wij de waarde $< \frac{\pi}{2}$ nemen, een negatief teeken.

Neemt, in het 1^e oktant, van het punt af, waar bij eene bepaalde waarde van σ en V

$$1 - \sin^2 \sigma (1 - \sin^2 V) - \sin^2 V (1 + \sin^2 \sigma) \cos^2 \varrho = 0$$

ϱ af, dan krijgt tengevolge van de toename van $\cos \varrho$ de vorm (2) negatieve waarden. Bij $\varrho = 0$ wordt:

$$0 > \cot 2\gamma = \frac{1 - \sin^2 V - \sin^2 \sigma}{(\sin 2\varrho = 0) \sin \sigma \sin^2 V} = \frac{\cos^2 \sigma - \sin^2 V}{(\sin 2\varrho = 0) \sin \sigma \sin^2 V}$$

Laat men nu σ alle waarden doorloopen tusschen 0 en $\frac{\pi}{2}$, dan blijkt, dat $\cot 2y_a$ onbepaald wordt voor

$$\cos \sigma = \sin V = \cos \left(\frac{\pi}{2} - V \right).$$

De pool van het snijvlak ligt hier in de optische as. Voor $\sigma > \frac{\pi}{2} - V$ wordt $\cos^2 \sigma - \sin^2 V < 0$, waardoor $\cot 2y$ eene positieve waarde verkrijgt en $2y$ in het 3^e kwadrant moet worden aangenomen; $\cot 2y = +\infty$, $y_a = \pm 90^\circ$. Voor $\sigma < \frac{\pi}{2} - V$ wordt $\cos^2 \sigma - \sin^2 V > 0$, $\cot 2y < 0$ en wel $-\infty$; de hoek $2y$ moet, in overeenstemming met de figuur, worden aangenomen in het 4^e kwadrant: $2y_a = 0^\circ$, $y_a = 0^\circ$. Voor $\frac{\pi}{2} > \varrho > 0$ en $\cot 2y < 0$ ligt dienovereenkomstig $2y_a$ in het 4^e kwadrant, en y_a , voor zoover men de waarde $+\frac{\pi}{2} > y_a > -\frac{\pi}{2}$ neemt, eveneens in het 4^e kwadrant. In het 1^e oktant is dus steeds $-\frac{\pi}{2} < y_a < 0$. Hetzelfde geldt voor de oktanten III, VI en VIII, waar de noemer van den vorm (2) eveneens > 0 is.

Aan de waarde $y_a(\varrho, \sigma)$ in het 1^e oktant beantwoorden identieke waarden bij $(\pi + \varrho)$, σ in het III^e, $(\pi - \varrho)$, $-\sigma$ in het VI^e en $(2\pi - \varrho)$, $-\sigma$ in het VIII^e oktant. Waar het product $\sin 2\varrho \sin \sigma < 0$ (cf. (2)), dus in het II^e, IV^e, V^e en VII^e oktant, wordt $0 < y_a < \frac{\pi}{2}$. Aan $y_a(\varrho, \sigma)$ in het 1^e oktant beantwoorden identieke waarden met een tegengesteld teeken bij ϱ , $-\sigma$ in het V^e, $(\pi - \varrho)$, σ in het II^e, $(\pi + \varrho)$, $-\sigma$ in het VII^e en $(2\pi - \varrho)$, σ in het IV^e oktant. Op gelijke wijze als hierboven voor de oktanten I, III, VI en VIII gedaan is, kan men de betrekking tusschen het teeken van $\cot 2y$ en de waarde van y_a vaststellen. Men komt tot dit resultaat: staat de a-as vertikaal op het projectievlak, dan ligt

in de oktanten I, III, VI, VIII

$$\begin{array}{ll} \text{bij } \cot 2y > 0, & 2y_a \text{ in het 3}^e \text{ kwadrant} \\ \text{cot } 2y < 0, & 2y_a \text{ in het 4}^e \text{ kwadrant} \end{array}$$

in de oktanten II, IV, V, VII

$$\begin{array}{ll} \text{bij } \cot 2y > 0, & 2y_a \text{ in het 1}^e \text{ kwadrant} \\ \text{cot } 2y < 0, & 2y_a \text{ in het 2}^e \text{ kwadrant} \end{array}$$

(4^a)

Zoo kan de ligging van de snelheidsellips uit (2) met zekerheid worden gevonden.

Om nu den hoek te vinden, dien in eene willekeurige snede de lange ellipsas met de trace van een willekeurig vlak Γ maakt, keeren wij terug tot fig. 1. Het vlak Γ , waarvan de pool gegeven is door de coördinaten $\mu = \sphericalangle ILM$, $r = \sphericalangle Mr$, wordt door S gesneden volgens de lijn EO , die met OH een hoek $HOE = h$ maakt. Nu vonden wij, dat

$$\cot h = \frac{\cos \sigma \cot \alpha + \sin \sigma \sin (\varrho - \gamma)}{\cos (\varrho - \gamma)}$$

waarin $\gamma = \sphericalangle ICK = \mu - \frac{\pi}{2}$

$\alpha =$ de standhoek van Γ op het projectievlak $= r + \frac{\pi}{2}$

zoodat

$$\begin{aligned} \cot h &= \frac{\cos \sigma \cot \left(r + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \sigma \sin \left(\varrho - \mu + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(\varrho - \mu + \frac{\pi}{2} \right)} \\ &= \frac{\cos \sigma \operatorname{tg} r - \sin \sigma \cos (\varrho - \mu)}{\sin (\varrho - \mu)} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

De hoek tusschen de lange ellipsas en de trace van Γ wordt dus gegeven door

$$\sphericalangle FOE = \sphericalangle HOF - \sphericalangle HOE = \gamma_a - h \dots \dots \dots (6)$$

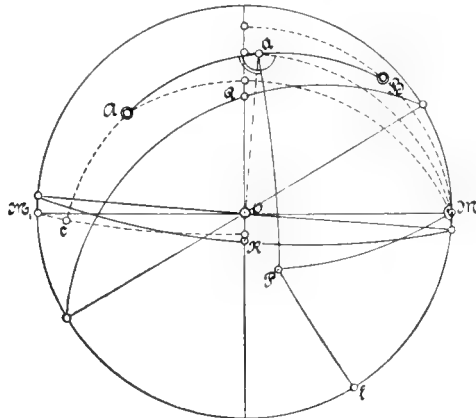


Fig. 3.

Fig. 3 geeft de projectie van een triklien kristal, oligoklaas van Bamle¹⁾. Meet men ϱ langs den grooten cirkel ROQ vanaf het vlak

¹⁾ ROSENBUSCH, Mikrosk. Physiogr. I. 2, 342.

$MO M_1$ positief tegengesteld aan de wijzers van een uurwerk, σ vanaf ROQ positief naar rechts, dan zijn de optische assen A en B en hare bissectrices bepaald door:

	ϱ	σ
A	$- 67^{\circ}58'$	$- 44^{\circ}58'$
B	$- 83^{\circ}53'$	$+ 47^{\circ}9'$
a	$- 75^{\circ}36'$	$+ 1^{\circ}6'$
c	$+ 6^{\circ}35'$	$- 82^{\circ}28'$

In $\triangle ABM$ is $AB = 2V$; $AM = 134^{\circ}58'$; $BM = 42^{\circ}51'$; $\angle BMA = 15^{\circ}55'$; hieruit volgt $2V = 93^{\circ}10'30''$; $V = 46^{\circ}35'15''$.

De uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van $P(001)$ in het snijvlak $M(010)$ wordt als volgt berekend. Brengt men \perp op de bissectrix Oa een vlak E aan, dat beantwoordt aan het projectievlak in fig. 1, dan vindt men voor de vlakken $M(=S)$ en $P(=V)$ de volgende coördinaten der polen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \angle AaM = 2\pi - \angle BaM = 172^{\circ}58' \\ \sigma &= \frac{\pi}{2} - \sphericalangle Ma = 1^{\circ}6' \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

$$\mu = \angle AaP \quad \text{en} \quad r = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle Pa$$

Om μ en r te vinden gaat men uit van de gegevens:

$$M:P = 86^{\circ}32'; \quad M:l = 59^{\circ}14'; \quad P:l = 65^{\circ}40'.$$

Hieruit berekent men:

$$\angle PML = 63^{\circ}37'; \quad \angle OMP = \frac{\pi}{2} - 63^{\circ}37' = 26^{\circ}23';$$

$$\angle aMP = 26^{\circ}23' + 75^{\circ}36' = 101^{\circ}59';$$

zoodat nu uit $\triangle aMP$ kan worden gevonden:

$$\sphericalangle aP = 101^{\circ}53'20'' \quad \text{en} \quad r = - 11^{\circ}53'20'' \dots (7a)$$

Verder vindt men:

$$\begin{aligned} \angle MaP &= 86^{\circ}13'; \quad \mu = \angle AaP = 2\pi - (\angle MaP + \angle BaM) = \\ &= 2\pi - (86^{\circ}13' + 7^{\circ}2') = 86^{\circ}45'. \dots (7b) \end{aligned}$$

De vlakken M en E ($\perp aO$) snijden elkaar volgens de lijn OR ; ten opzichte van deze lijn bedraagt in M de uitdooving een hoek γ , gegeven door (cf. (2)):

$$\cot 2\gamma = - \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 7^{\circ}2' - (1 - \sin^2 V \sin^2 7^{\circ}2') \sin^2 1^{\circ}6'}{\sin 14^{\circ}4' \sin 1^{\circ}6' \sin^2 V}$$

$$l\gamma \cot 2\gamma = 2,28980 (-).$$

en daar de pool van $M(\varrho = 172^{\circ}58', \sigma = 1^{\circ}6')$ ligt in het II^{de} oktant, moet $2\gamma_a$ genomen worden in het 2^{de} kwadrant, zoodat

$$2\eta_a = 180^\circ - 17'38''$$

$$\eta_a = \frac{\pi}{2} - 8'49'' = \pm 89^\circ 51'11'' (8)$$

De hoek, dien de trace van P maakt met de richting OR vindt men uit (5)

$$\cot h = - \frac{\cos 1^\circ 6' \operatorname{tg} 11^\circ 53'20'' + \sin 1^\circ 6' \cos 86^\circ 13'}{\sin 86^\circ 13'}$$

$$\operatorname{tg} \cot h = 9.32678 \text{ (—)}$$

$$h = -78^\circ 17'' (9)$$

De hoek tusschen de lange ellipsas en de trace van P wordt dus gegeven door (cf. 6)

$$\eta_a - h = 89^\circ 51'11'' + 78^\circ 17'' = 167^\circ 52'18'' = -12^\circ 8'.$$

ROSENBUSCH geeft t. a. p. voor hetzelfde mineraal als berekende waarde —) $12^\circ 16'$.

De hierboven gevolgde wijze van berekening ligt ten grondslag aan de grafische methode, volgens welke men in eene willekeurige kristalsnede den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak kan bepalen uit de grootte van den assenhoek. Men gaat daarbij uit van de coördinaten μ, r van (J) en ϱ, σ van (S). Nemen wij den hierboven besproken oligoklaas, dan vindt men, op de wijze als de vorige keer uiteengezet, de waarde h in het diagram voor $a = \frac{\pi}{2} + r = 78^\circ$ bij $\varrho_h = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle MaP = 176^\circ 13'$, $\sigma_h = 1^\circ 6'$.

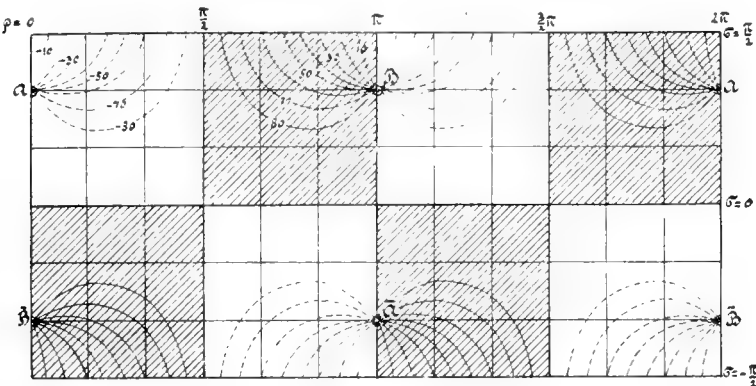


Fig. 1.

Zooals uit het schema van het h -diagram blijkt ¹⁾, beantwoordt aan een snijvlak ($\varrho_h = 2\pi$, $\sigma_h = 0$) eene waarde $h = -a$; men vindt dan ook in ons geval voor h eene waarde, die slechts weinig van

¹⁾ Vgl. Versl. Wis- en Nat. Afd. K. A. W. 24 Dec. 1910, 799, fig. 4—5.

-- 78° afwijkt. Om de optische uitdooving ten opzichte van de fictieve trace van het vlak $E (\perp a(O))$ te bepalen, maakt men gebruik van een tweede diagram, dat met behulp der betrekking (2) is berekend, en dat voor een bepaalden assenhoek de waarde y geeft als $f'(\varrho, \sigma)$. In fig. 4 is het y -diagram voor $I' = 30^\circ$ afgebeeld; in de geharceerde oktanten (II, IV, V, VII) heeft y weer eene positieve, in de overige eene negatieve waarde. Voor eene nadere toelichting van dit diagram kan worden verwezen naar hetgeen hierboven omtrent de beteekenis der betrekking (2) werd gezegd, zoomede naar eene vroegere mededeeling, waarin een overeenkomstig diagram werd besproken¹⁾. Het y -diagram voor $I' = 46^\circ 35'$ levert voor $\varrho_y = \angle MaM = 172^\circ 58'$ en $\sigma_y = \frac{\pi}{2} - \angle Ma = 1^\circ 6'$ ongeveer de waarde $y = + 89^\circ 50'$. Daarmede is de waarde $u = y - h = - 12^\circ 10'$ gevonden.

Omgekeerd kan men de grootte van den assenhoek bepalen, als bekend zijn het snijvlak $S(\varrho, \sigma)$, de uitdooving u ten opzichte van de trace van een bekend vlak $I'(u, r)$ en de richtingen, waaraan de extreme straalnelheden beantwoorden.

In fig. 5 is het amfiboolkristal afgebeeld, waarvan in de vorige mededeeling²⁾ met behulp van de schijnbare hoeken tusschen de prismavlakken en het klinopinakoïd de oriëntering werd bepaald. De hoeken $\alpha_1 = 55^\circ 50'$ en $\alpha_2 = - 62^\circ 5'$ worden hier ingesloten

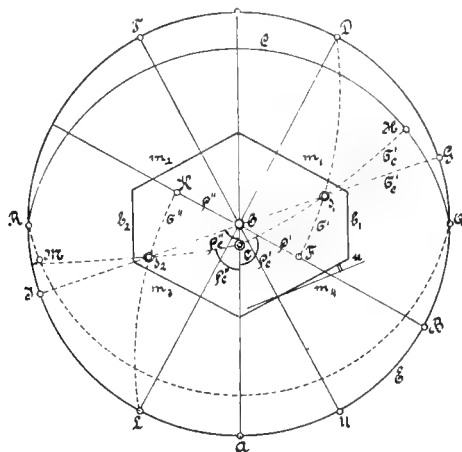


Fig. 5.

door de vlakken $m_2 : m_1 (= \alpha_1)$ en $b_1 : m_1 (= \alpha_2)$, m_1 als equatorvlak genomen, of wel door $m_4 : m_3 (= \alpha_1)$ en $b_2 : m_3 (= \alpha_2)$, m_3 als equator-

¹⁾ ibid. 30 Nov. 1907, p. 369 c. v.

²⁾ ibid. 24 Dec. 1910, p. 796.

vlak beschouwd.¹⁾ Het maakt voor de plaats van de gevonden polen der snijvlakken S_1 en S_2 geen verschil, of men m_1 met zijn pool D dan wel m_3 met zijn pool L als equatorvlak aanneemt; daar dit slechts eene verwisseling van s_1 en s_2 ten gevolge heeft. Neemt men m_1 als equatorvlak, dan ligt

$$\begin{aligned} s_1 \quad \text{bij} \quad \varrho' &= \sphericalangle OF = 35^\circ 5' \\ \sigma' &= \sphericalangle F s_1 = 30^\circ 55' \\ s_2 \quad \text{bij} \quad \varrho'' &= \sphericalangle OK = -35^\circ 5' \\ \sigma'' &= \sphericalangle K s_2 = -30^\circ 55' \end{aligned}$$

De waargenomen uitdooving bedraagt onder deze omstandigheden ten opzichte van de trace van m_2 (m_1) $u = 6^\circ$. Het assenvlak OA ligt // (010); zij verder de hoek $\epsilon : \epsilon = 10^\circ$ gegeven, dan kan men den assenhoek berekenen.

Voor de polen s_1 en s_2 vindt men door berekening de volgende coördinaten ten opzichte van de vlakkenstelsels OA , E (= projectievlak) en OA , C (\perp bissectrix ϵ):

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABG &= \varrho'_e = 108^\circ 15' 38'' & \sphericalangle ALI &= \varrho''_e = -71^\circ 44' 22'' \\ \sphericalangle G s_1 &= \sigma'_e = 44^\circ 35' 28'' & \sphericalangle I s_2 &= \sigma''_e = 44^\circ 35' 28'' \\ \sphericalangle A c s_1 &= \varrho'_c = 116^\circ 48' 13'' & \sphericalangle A c s_1 &= \varrho''_c = -81^\circ 46' 2'' \\ \sphericalangle H s_1 &= \sigma'_c = 40^\circ 44' 20'' & \sphericalangle M s_2 &= \sigma''_c = 46^\circ 53' 35'' \end{aligned}$$

Voor de pool T van het vlak m_2 vindt men uit $\mu_e = \sphericalangle ABDT = 2\pi + 27^\circ 55'$, $r_e = 0$ door berekening $\mu_c = 2\pi + 28^\circ 16' 52''$, $r_c = -8^\circ 49' 35''$. De hoek tusschen de trace van m_2 en de fictieve trace van C wordt volgens (5) voor het snijvlak S_1 gegeven door:

$$\begin{aligned} \cot h_1 &= \frac{\cos \sigma'_c \operatorname{tg} r_c - \sin \sigma'_c \cos (\varrho'_c - \mu_c)}{\sin (\varrho'_c - \mu_c)} \\ &= \frac{\cos 40^\circ 44' 20'' \operatorname{tg} 8^\circ 49' 35'' - \sin 40^\circ 44' 20'' \cos 88^\circ 31' 21''}{\sin 88^\circ 31' 21''} \end{aligned}$$

waaruit $h_1 = 84^\circ 14' 20''$

en voor S_2 door:

$$\cot h_2 = \frac{-\cos 46^\circ 53' 35'' \operatorname{tg} 8^\circ 49' 35'' - \sin 46^\circ 53' 35'' \cos 69^\circ 57' 6''}{\sin 69^\circ 57' 6''}$$

waaruit $h_2 = -69^\circ 13' 20''$,

zoodat men overeenkomstig (6):

$$u = \eta_c - h$$

voor S_1 (IIe oktant) vindt:

$$\eta'_c = u + h_1 = -6^\circ + 84^\circ 14' 20'' = 78^\circ 14' 20''$$

¹⁾ Over de complicaties, die voor de oriëntering uit de kristal­symmetrie voortvloeien, zal nog nader worden gehandeld.

en voor S_2 (IV^e oktant)

$$y''_c = u + h_2 = -6^\circ - 69^\circ 13' 20'' = -75^\circ 13' 20''.$$

Uit het diagram fig. 4 is dadelijk te zien, dat y voor een snijvlak in het IV^e oktant nooit < 0 kan worden en bijgevolg S_2 niet voldoet.

Nu is volgens (2):

$$\cot 2\eta = \frac{1 - \sin^2 V \cos^2 \varrho - (1 - \sin^2 V \sin^2 \varrho) \sin^2 \sigma}{\sin 2\varrho \sin \sigma \sin^2 V}$$

$$\sin^2 V (\cot 2\eta \sin 2\varrho \sin \sigma + \cos^2 \varrho - \sin^2 \varrho \sin^2 \sigma) = 1 - \sin^2 \sigma$$

$$\sin^2 V = \frac{\cos^2 \sigma}{\cot 2\eta \sin 2\varrho \sin \sigma + \cos^2 \varrho - \sin^2 \varrho \sin^2 \sigma} \quad (10)$$

Voor S_1 wordt:

$$\sin^2 V = \frac{\cos^2 40^\circ 44' 20''}{\cot 23^\circ 31' 20'' \sin 53^\circ 36' 26'' \sin 40^\circ 44' 20'' + \cos^2 6^\circ 11' 47'' - \sin^2 6^\circ 11' 47'' \sin^2 40^\circ 44' 20''}$$

waaruit

$V = 47^\circ 4'$ om c ; $2V = 58^\circ 52''$ om a als bissectrix.

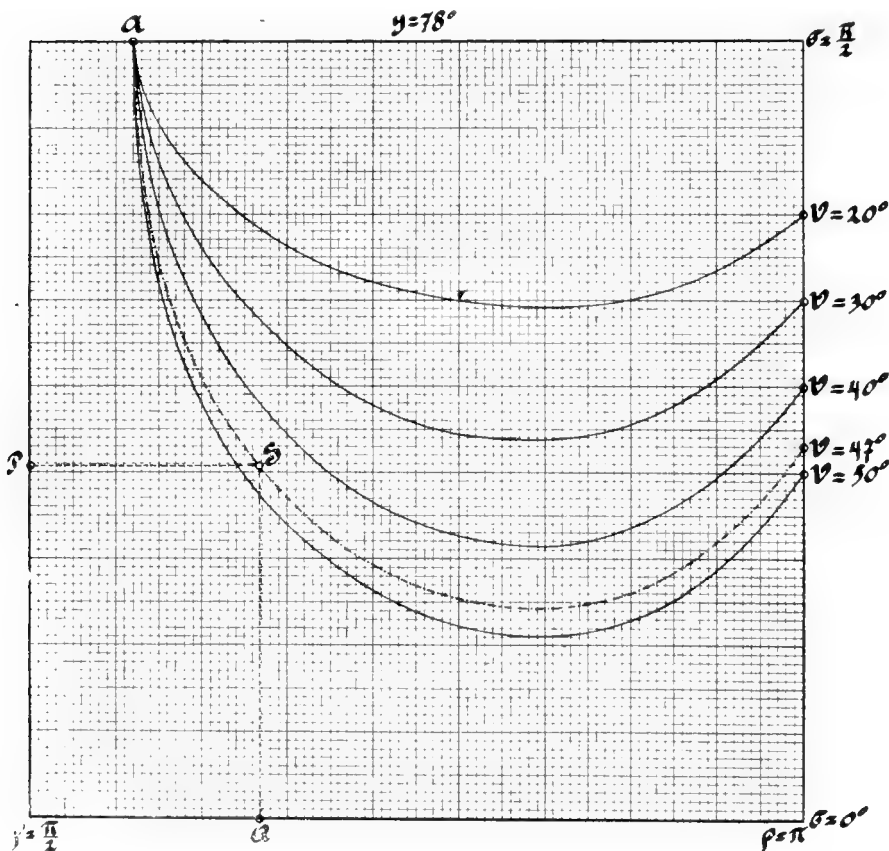


Fig. 6.

Hieruit blijkt tevens, dat het mineraal optisch negatief is.

Langs grafischen weg is de grootte van den assenhoek uit γ eenvoudig te bepalen. Fig. 6 geeft de curven $\gamma = 78^\circ$ voor verschillende waarden van V (vgl. fig. 4). De pool van S ($\varrho = 116^\circ 48'$, $\sigma = 40^\circ 44'$) ligt in het diagram tusschen de curven voor $V = 40^\circ$ en $V = 50^\circ$, en wel op eene plaats, die, zooals bij interpolatie blijkt, ongeveer aan $V = 47^\circ$ beantwoordt. Deze laatste waarde geeft dus den halven assenhoek van den amfibool.

Er dient de aandacht op te worden gevestigd, dat deze methode onzekere resultaten levert, wanneer γ weinig verschilt van 0° of van $\pm \frac{\pi}{2}$, en de pool van het snijvlak dus ligt bij eene waarde van ϱ ,

die weinig afwijkt van $\varrho = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π of $\frac{3}{2}\pi$, dan wel bij een kleine waarde van σ . Wat de laatste voorwaarde betreft, verkeert men bij een grooten assenhoek in gunstiger conditie dan bij een kleinen; terwijl bij $V = 90^\circ$ de curve $\gamma = 89^\circ$ in de onmiddellijke nabijheid van de vertikale assen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3}{2}\pi$ (cf. fig. 4) en de horizontaal $\sigma = 0$ blijft, benadert bij $V = 10^\circ$ de overeenkomstige curve de horizontaal $\sigma = 0$ nog niet tot op eene breedte van $\pm 40^\circ$.

Verschilt γ weinig van 0° of $\pm \frac{\pi}{2}$, dan ligt 2γ in de buurt van 0° of $\pm \pi$. In (10) levert dan $\cot 2\gamma$ bij verschillen van enkele minuten, die met de gewone petrografische mikroskopen — zelfs wanneer de richtingen aan het kristal scherp zijn waar te nemen — niet met zekerheid kunnen worden gemeten, reeds zoo sterk onderling afwijkende waarden, dat het eindresultaat daarvan in hooge mate den invloed ondervindt. Neemt men b.v. den hierboven behandelde veldspaat van Bamle. Voor γ_a werd gevonden de waarde $89^\circ 51'$, terwijl uit de berekening volgens ROSENBUSCH $\gamma'_a = 89^\circ 43'$ zou volgen. Het verschil tusschen $l\gamma \cot 2\gamma_a$ en $l\gamma \cot 2\gamma'_a$ bedraagt

$$2,28100 - 2,00478 = 0,27622,$$

zoodat hier een waarnemingsfout van $8'$ opweegt tegen $8^\circ 35'$ bij $\gamma = \pm 45^\circ$. Dienovereenkomstig berekent men uit de waarde, door ROSENBUSCH gegeven voor de uitdooving ten opzichte van de trace van $P(001)$ in het snijvlak $M(010)$, $u = \gamma'_a - h = -12^\circ 16'$ (inplaats van $-12^\circ 8'$) eene waarde voor $V = 55^\circ 50'$ (inplaats van $46^\circ 35'$). De pool van het snijvlak M , vastgelegd aan het assenvlak AB (cf. fig. 3) en het vlak $\perp a$, ligt bij $\varrho = 172^\circ 58'$, $\sigma = 1^\circ 6'$. Het resultaat was dus te voorzien.

Kristallographie. — De Heer WICHMANN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. SCHMUTZER: „*Over de vaststelling van de richting van een onbekend vlak uit zijne traces in twee georiënteerde kristalsneden.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. CARDINAAL).

Noemt men de coördinaten van de pool van een onbekend vlak P (kristal-, slijpt- of tweelingsvlak) μ en r ; zijn twee bekende snijvlakken S_1 en S_2 gegeven door de polen s_1 (ϱ_1, σ_1) en s_2 (ϱ_2, σ_2) en zijn verder de hoeken, die de trace van P in deze vlakken maakt met de snijlijn tusschen snijvlak en projectievlak ($S: E$) succ. h_1 en h_2 , dan is

$$\begin{aligned} \cot h_1 &= \frac{\cos \sigma_1 \operatorname{tg} r - \sin \sigma_1 \cos (\varrho_1 - \mu)}{\sin (\varrho_1 - \mu)} \\ \cot h_2 &= \frac{\cos \sigma_2 \operatorname{tg} r - \sin \sigma_2 \cos (\varrho_2 - \mu)}{\sin (\varrho_2 - \mu)} \\ \operatorname{tg} r &= \frac{\cot h_1 \sin (\varrho_1 - \mu) + \sin \sigma_1 \cos (\varrho_1 - \mu)}{\cos \sigma_1} = \frac{\cot h_2 \sin (\varrho_2 - \mu) + \sin \sigma_2 \cos (\varrho_2 - \mu)}{\cos \sigma_2} \quad (1) \end{aligned}$$

waaruit:

$$\begin{aligned} \cos \sigma_2 \{ \cot h_1 \sin (\varrho_1 - \mu) + \sin \sigma_1 \cos (\varrho_1 - \mu) \} = \\ \cos \sigma_1 \{ \cot h_2 \sin (\varrho_2 - \mu) + \sin \sigma_2 \cos (\varrho_2 - \mu) \} \end{aligned}$$

dat bij uitwerking geeft:

$$\cot \mu = \frac{\cos \sigma_2 (\cot h_1 \cos \varrho_1 - \sin \sigma_1 \sin \varrho_1) - \cos \sigma_1 (\cot h_2 \cos \varrho_2 - \sin \sigma_2 \sin \varrho_2)}{\cos \sigma_2 (\cot h_1 \sin \varrho_1 + \sin \sigma_1 \cos \varrho_1) - \cos \sigma_1 (\cot h_2 \sin \varrho_2 + \sin \sigma_2 \cos \varrho_2)} \quad (2)$$

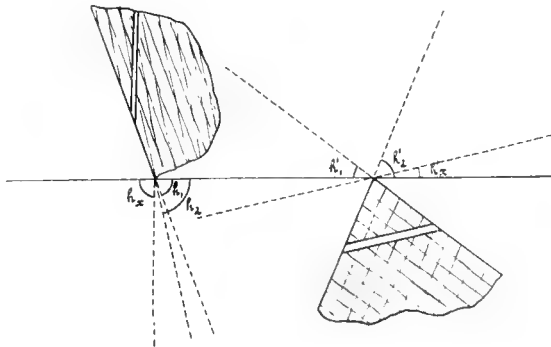


Fig. 1.

Bij een angietkristal zijn de vlakken m_1 ($\bar{1}10$) en m_2 ($1\bar{1}0$), vastgelegd aan het projectievlak E ($\perp c$; $c:c = 45^\circ 18'$) en aan het vlak,

$\perp E$ door de normaal van m_1 gelegd, bepaald door $\mu_1 = 0$, $r_1 = 29^\circ 20' 55''$ (m_1) en $\mu_2 = 112^\circ 22' 34''$, $r_2 = 29^\circ 20' 55''$ (m_2), wanneer $m_1 : m_2 = 92^\circ 48'$. In fig. 1 beantwoordt de linker doorsnede aan het snijvlak S_1 ($\varrho_1 = 36^\circ 30'$, $\sigma_1 = 47^\circ$) de rechter aan S_2 ($\varrho_2 = 220^\circ 30'$, $\sigma_2 = 79^\circ$); de traces van de vlakken m_1 , m_2 en van het tweelingsvlak x van de ingeschakelde lamel maken in deze doorsneden met de snijlijn $S: E$ de hoeken $h_1 = -70^\circ 34'$; $h_2 = -78^\circ 4'$, $h_x = 89^\circ 24'$ en $h'_1 = -37^\circ 10'$, $h'_2 = 66^\circ 44'$ en $h'_x = 13^\circ 30'$. Met behulp der waarden ϱ_1 , σ_1 , ϱ_2 , σ_2 , h_x en h'_x vindt men uit (2) voor μ de waarde $\mu = 56^\circ 20'$ en uit (1) $r = 45^\circ 8'$. Het vlak P is bijgevolg $a(100)$, dat theoretisch bepaald wordt door $\mu = \frac{\mu_2}{2} = 56^\circ 11' 17''$, en $r = c:c = 45^\circ 18'$.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan: Mededeeling N^o. 120a uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „*Isothermen van éénatomige stoffen en van hunne binaire mengsels. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden.*”

§ 1. *Het gemiddelde gereduceerde toestandsoppervlak voor éénatomige stoffen.*

De theoretische onderzoeken over de toestandsvergelijking worden niet weinig bemoeilijkt, doordat het experimenteel onderzochte gebied zich voor elke stof, en vooral voor stoffen van eenvoudigen moleculairen bouw slechts over een klein gebied van waarden van gereduceerden druk en temperatuur uitstrekt. Gold de wet der overeenstemmende toestanden streng, dan kon men aan dit bezwaar tegemoet komen door de bij de verschillende stoffen onderzochte gebieden van gereduceerden toestand aan elkaar te schakelen. Op deze wijze is dan ook de gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking opgebouwd. Zij omvat in den vorm VII. 1. ¹⁾ de waarnemingen omtrent waterstof, zuurstof, en stikstof van AMAGAT, die omtrent isopentaan van YOUNG en die omtrent ether van AMAGAT en van RAMSAY en YOUNG. Op deze wijze is de toestandsvergelijking van eene fictieve stof verkregen, welke, wanneer zij nog wordt aangevuld met de gereduceerde storingsfunctie ²⁾ voor de buurt van den kritischen toestand, geschikt is voor al die berekeningen, waarbij de geldigheid van de wet van de overeenstemmende toestanden wordt aangenomen.

¹⁾ Suppl. N^o. 19 (Mei 1908).

²⁾ Febr. 1908. Comm. N^o. 104.

Wat de afwijkingen van die wet betreft, is zij in het bijzonder geschikt om op zichzelf staande, niet door eene speciale toestandsvergelijking op voldoende wijze voorgestelde waarnemingen gemakkelijk en doelmatig uit het oogpunt van de wet der overeenstemmende toestanden met waarnemingen omtrent andere stoffen te vergelijken; in 't bijzonder met waarnemingen omtrent de stoffen, die tot het opstellen der vergelijking VII. 1. hebben gediend. Wanneer men n.l. de afwijkingen van de waarnemingen omtrent de eene of andere stof van de fictieve stof in denzelfden gereduceerden toestand berekent, zoo kunnen de veel meer overzichtelijke afwijkingen van VII. 1. de waarnemingen zelve vervangen.

Dergelijke afwijkingen worden in de eerste plaats geleverd door ieder der stoffen, die tot het opbouwen van de vergelijking VII. 1. hebben gediend, en ten opzichte van wier gereduceerde toestandsoppervlakken het gereduceerde toestandsoppervlak VII. 1. de rol van omhullend oppervlak vervult.

Op de verschillen, welke de afzonderlijke oppervlakken onderling vertoonen kan in 't bijzonder de kritische temperatuur der stoffen een belangrijken invloed hebben; de eigenaardigheden der moleculen kunnen daarbij echter ook nog op andere wijze een rol spelen.

Het doel, dat ons bij het onderzoek der isothermen van éénatomige stoffen voor den geest staat is, om op dezelfde wijze als waarop de vergelijking VII. 1. verkregen is, tot eene gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking te geraken, bij de opbouwning waarvan *uitsluitend waarnemingen omtrent éénatomige stoffen* gebruikt zullen worden. Tenzij er nog eigenaardigheden in den bouw der verschillende atomen der éénatomige stoffen, die op de toestandsvergelijking van invloed zijn, ontdekt worden, zal zich dan in de afwijkingen van de speciale toestandsvergelijkingen van deze gemiddelde, ongestoord door andere mogelijke factoren, alleen de invloed van de kritische temperatuur op den vorm van het gereduceerde oppervlak openbaren. En wel is te verwachten, dat de speciale toestandsoppervlakken van de verschillende éénatomige stoffen op systematische wijze in dier voege van het omhullende oppervlak en van elkaar afwijken, dat het oppervlak van xenon¹⁾ door geleidelijke vervorming in die van krypton, van argon en van neon overgaat, om eindelijk den limiet-vorm van het helium-oppervlak aan te nemen²⁾.

¹⁾ Wij zullen voorloopig stoffen met hooger kritische temperatuur buiten beschouwing laten.

²⁾ Dat men voor elke klasse van stoffen met gelijksoortige moleculen eene afzonderlijke toestandsvergelijking zal hebben op te stellen, werd reeds opgemerkt in

Dat de gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking voor éénatomige stoffen, tot welke wij wenschen te geraken en die wij door VII_{mon.} zullen aanduiden, van de algemeene gemiddelde vergelijking VII. 1. belangrijke en karakteristieke afwijkingen zal vertoonen, blijkt uit het vervolg van deze mededeeling omtrent een eerste zeer kleine stap in de bedoelde richting van onderzoek.

§ 2. *Vergelijking van de isothermen van argon*¹⁾ *met die van isopentaan* (YOUNG²⁾, *ether* (RAMSAY en YOUNG³⁾ *en koolzuur* (AMAGAT⁴⁾ *tusschen de gereduceerde temperaturen 1.0000 en 1.1323.*

Om tot eene systematische vergelijking van de verkregen uitkomsten omtrent argon met andere stoffen uit het oogpunt van de wet der overeenstemmende toestanden te geraken, hebben wij op de in § 1 aangegeven wijze voor de waarnemingen betreffende verschillende stoffen hunne afwijkingen van VII. 1. in de plaats gesteld⁵⁾.

Voor argon werden dus om te beginnen, onder invoeging van de reeds gepubliceerde kritische temperatuur en druk⁶⁾ de viriaalefficiënten volgens VII.1. uitgerekend, en met deze coëfficiënten de afwijkingen van VII.1. Het doelmatigst bleek het te zijn, te werken met de percentsgewijze afwijkingen van p_v , ten opzichte van de uit VII.1. berekende waarden van p_v .

De viriaalefficiënten zijn in tabel I, de afwijkingen in tabel II samengevat.

De afwijkingen van isopentaan, ether en koolzuur van VII.1. waren reeds geruimen tijd geleden berekend en vormen een deel van een uitgebreid, nog slechts voor een klein gedeelte gepubliceerd onderzoek aangaande de verschillen in de empirische toestandsver-

1881, (H. KAMERLINGH ONNES, Verh. Kon. Akad. 1881, Arch. neêrl. 30, pg. 101). De groep der éénatomige stoffen is in dit opzicht in 't bijzonder bestudeerd door H. HAPPEL, zie o.a. Ann. d. Phys. (4). 13. 340. 1904.

1) Zitt. versl. Oct. 1910. Comm. No. 118b en C. A. CROMMELIN, Diss. Leiden 1910.

2) S. YOUNG, Proc. phys. Soc. Londen, 1894/95, pg. 602.

3) W. RAMSAY en S. YOUNG Phil. Trans. 178. 57. 1887.

4) E. H. AMAGAT, Ann. de chim. e. d. phys. (6) 29, Juni en Aug. 1893.

5) Vervanging der werkelijke waarnemingen door hunne afwijkingen van VII. 1 is ook zeer doelmatig bij de kritische discussie van waarnemingen, ten einde experimenteele fouten te elimineeren en bij het vergelijken van uitkomsten, door verschillende waarnemers aangaande eenzelfde stof verkregen. Onze uitkomsten omtrent argon zijn op deze wijze vereffend voor dat zij op de figuur zijn gebracht.

6) Zitt. versl. April 1910, Comm. N^o. 115 en C. A. CROMMELIN, Diss. Leiden 1910.

7) Voor de wijze, waarop deze berekeningen geschieden, vergelijkte men Zitt. verslag Juni 1901. Comm. N^o. 71.

TABEL I.

Viriaalcoëfficiënten van argon volgens VII. 1.					
t	$B_A \cdot 10^3$	$C_A \cdot 10^6$	$D_A \cdot 10^{12}$	$E_A \cdot 10^{18}$	$F_A \cdot 10^{24}$
+ 20.39C	- 0.61763	+ 2.21916	+ 4.32836	+ 7.6045	- 4.35430
0.00	- 0.77633	+ 2.21208	+ 3.09635	+ 8.7321	- 4.98937
- 57.72	- 1.30816	+ 2.40067	- 0.67139	+ 10.5255	- 5.02409
- 87.05	- 1.66571	+ 2.73556	- 2.83014	+ 10.5566	- 3.93044
- 102.51	- 1.89979	+ 3.04873	- 4.10121	+ 10.4013	- 3.10842
- 109.88	- 2.02794	+ 3.25078	- 4.76310	+ 10.3251	- 2.69045
- 113.80	- 2.10156	+ 3.37635	- 5.13599	+ 10.2947	- 2.47655
- 115.86	- 2.14198	+ 3.44818	- 5.35020	+ 10.2837	- 2.35600
- 116.62	- 2.15723	+ 3.47581	- 5.41534	+ 10.2806	- 2.31432
- 119.20	- 2.21026	+ 3.57411	- 5.67996	+ 10.2759	- 2.17669
- 120.24	- 2.23230	+ 3.61597	- 5.78950	+ 10.2764	- 2.12239
- 121.21	- 2.25318	+ 3.65646	- 5.89340	+ 10.2783	- 2.07246
- 130.38	- 2.46836	+ 4.10021	- 6.96374	+ 10.3966	- 1.66293
- 139.62	- 2.72584	+ 4.69951	- 8.27734	+ 10.8045	- 1.42979
- 149.60	- 3.06753	+ 5.59972	- 10.45136	+ 11.8440	- 1.53961

gelijking van deze stoffen door middel van de afwijkingen van de algemeene gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking.

Van deze afwijkingen werden nu diegene uitgezocht, die met de argon-isothermen tusschen -100°C . en het kritische punt vergeleken kunnen worden, dus diegene, die in hetzelfde gereduceerde gebied als die argon-isothermen liggen; vervolgens werden de afwijkingen van de 4 stoffen op eene teekening vereenigd door deze afwijkingen te teekenen als functies van $\log \lambda v$ waarin $\lambda = \frac{p_k v_k}{T_k}$ en $v = \frac{v}{v_k}$.

Uit de uitdrukking $\lambda v = \frac{p_k}{T_k} v$ valt dus het kritisch volumen weg; alleen kritische temperatuur en druk worden bij de berekening van λv gebruikt, terwijl bij de vergelijking van verschillende stoffen onderling aan λ een voor die stoffen gelijke, maar onbepaald ge-

T A B E L. II.

Afwijkingen van ρv_A in procenten van $\rho v_A(R)$ van de algemeene gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking VII. 1.

d_A	$\left \frac{W-R}{\text{in } 0_0} \right $	d_A	$\left \frac{W-R}{\text{in } 0_0} \right $	d_A	$\left \frac{W-R}{\text{in } 0_0} \right $	d_A	$\frac{W-R}{\text{in } 0_0}$	d_A	$\frac{W-R}{\text{in } 0_0}$	d_A	$\frac{W-R}{\text{in } 0_0}$
+ 20° 39 C.		0° 00 C.		- 57° 72 C.		- 87° 05 C.		- 102° 51 C.		- 109° 88 C.	
20.499	0.0	20.877	0.0	23.509	+0.1	25.452	+0.3	25.571	+0.5	26.242	+0.6
25.759	0.0	26.581	0.1	[28.575	-0.2]	34.467	+0.1	35.077	+0.4	34.807	+0.8
32.590	0.0	32.302	-0.1	33.793	-0.2	55.822	-0.1	[47.893	+0.9]	65.142	+0.8
35.759	0.0	37.782	-0.2	48.116	-0.3	71.444	-0.2	[53.752	+0.9]	87.176	+0.8
47.319	0.0	51.840	-0.5	64.948	-0.4	94.625	-0.7	62.240	+0.4	102.76	+0.5
59.250	-0.1	65.325	-0.7	90.695	-0.9	119.84	-1.0	[69.954	+0.9]	125.56	+0.2
								84.002	+0.2	148.32	-0.2
								95.802	0.0	180.84	-1.0
								115.88	-0.4		
								135.65	-0.7		
								158.01	-1.2		
- 115° 80 C.		- 115° 86 C.		- 116° 62 C.		- 119° 20 C.		- 120° 24 C.		- 121° 21 C.	
67.078	+1.0	69.947	+1.1	26.480	+0.9	26.871	+1.0	72.627	+1.7	27.326	+1.1
88.889	+1.0	91.308	+1.2	34.939	+0.8	34.965	+1.2	82.816	+2.0	35.283	+1.3
106.68	+0.7	108.02	+0.9	68.630	+1.2	70.314	+1.4	99.246	+2.0	71.459	+1.8
129.17	+0.5	131.51	+0.6	90.563	+1.2	70.481	+1.0	118.51	+1.8	85.580	+2.0
152.71	0.0	155.12	+0.1	110.19	+0.9	83.257	+1.1	136.31	+1.7	100.33	+1.8
155.40	0.0	179.94	-0.5	133.69	+0.7	96.834	+1.5	165.79	+0.9	[123.85	+1.9]
182.13	-0.5	[183.35	+1.8]	159.71	+0.2	98.863	+1.0	206.57	+0.1	148.95	+1.6
184.82	-0.7	235.47	-1.7	161.75	0.0	124.97	+0.6	280.25	-0.7	170.05	+0.9
212.99	-1.1	319.52	-2.9	[186.15	-0.4]	[143.71	+0.9]	338.95	-0.5	234.13	-0.2
				210.02	-0.9	156.36	-0.1			333.75	-0.1
				[260.61	-2.0]	[172.25	+0.6]				
				331.29	-2.8	222.69	-1.8				
						275.02	-2.8				
						336.89	-3.4				
- 130° 38 C.		130° 62 C.		- 149° 60 C.							
27.394	+1.7	28.122	+2.4	29.183	+3.8						
31.583	+1.2	35.573	+2.9	34.646	+4.4						
34.726	+2.0										
55.807	+2.9										
65.125	+3.2										
77.821	+4.2										
101.71	+3.3										

laten waarde wordt toegekend. Deze reeds vroeger¹⁾ toegepaste methode heeft het groote voordeel, dat men van de kritische grootheid, omtrent welke de meeste onzekerheid heerscht, nl. het kritisch volumen geen gebruik behoeft te maken en alleen met scherp bepaalde grootheden werkt. Het gelijk stellen van λ voor alle stoffen, ofschoon λ voor verschillende stoffen op duidelijke wijze verschilt²⁾, kan op den eersten blik eenigszins zonderling schijnen. De systematische afwijkingen van de verschillende gereduceerde toestandsvergelijkingen van VII.1., die zich in de verschillende waarden van λ openbaren, zijn echter niet de eenige systematische afwijkingen, die op de een of andere wijze tot uitdrukking zullen komen. Er is dus geen bezwaar in gelegen deze soort afwijkingen met de andere te zamen te vereenigen tot het beeld, dat wij ervan trachten te ontwerpen. Op de door ons gevolgde wijze schijnt het mogelijk alle afwijkingen van de wet der overeenstemmende toestanden in *één* beeld samen te vatten, dat althans aan bepaaldheid niets te wenschen overlaat; waarmede natuurlijk niet gezegd wil zijn, dat het bij verder en dieper gaande studie van de afwijkingen van de wet der overeenstemmende toestanden, niet doelmatiger zou kunnen blijken op eene andere wijze tot een overzicht ervan te komen.

Om aan λ dezelfde waarde voor alle stoffen te mogen toekennen, moet het volumen in dezelfde eenheid zijn uitgedrukt. Dit is bij de nu bewerkte waarnemingen niet het geval, zoodat eenige reducties noodig waren. De volumina der argon-isothermen en der koolzuur-isothermen, v_A , zijn uitgedrukt in het experimenteele normaalvolumen, en die der isopentaa- en ether-isothermen v_Y in het aantal cm^3 per gram stof.

Aangezien wij voor alle 3 stoffen de λv met betrekking tot het theoretische normaalvolumen wenschten te gebruiken, berekenden wij de waarden van λv volgens de volgende uitdrukkingen:

$$\text{voor argon en koolzuur: } \lambda v = \frac{p_k}{T_k A_{A_0}} v_A ;$$

$$\text{voor isopentaa en ether: } \lambda v = \frac{p_k \gamma}{T_k A_{A_0}} v_Y \text{ } ^{1)}$$

In deze uitdrukkingen is $A_{A_0} = \frac{1}{v_N}$ de verhouding van het experimenteele tot het theoretische normaalvolumen, en γ de specifieke massa in grammen per cm^3 bij 0° en 760 mm. druk.

¹⁾ Zitt.versl. Juni 1901, Comm. No. 71.

²⁾ Zitt.versl. Jan. 1907, Suppl. No. 14.

³⁾ Arch. néerl. (2) 6, 874. 1901, Comm. No. 74.

Langs de horizontale as werden de waarden van $\log \lambda_v$ uitgezet, langs de verticale die van den gewonen logarithmus van de gereduceerde temperatuur. De horizontale lijnen, evenwijdig aan de as der $\log \lambda_v$ stellen voor het verloop der vergelijking VII. 1., terwijl van die lijnen af de afwijkingen (positief naar boven, negatief naar beneden) zijn uitgezet, zoodanig dat 1% overeenkomt met 5 mm. op de hierbij gegeven figuur. Deze wijze van het in teekening brengen der afwijkingen zullen wij noemen: de afwijkingen als functies van $\log \lambda_v$, en gerangschikt volgens $\log t$.

Op deze teekening, die weinig overzichtelijk is, aangezien de afwijkingen der verschillende stoffen daarop bij verschillende gereduceerde temperaturen (de waarnemingstemperaturen der isothermen) geteekend zijn, werden nu de afwijkingen van iedere stof afzonderlijk bij opeenvolgende waarden van $\log \lambda_v$ afgelezen, dus als functies van $\log t$, en deze afgelezen waarden werden voor iedere stof geteekend als functies van $\log \lambda_v$, gerangschikt volgens $\log \lambda_v$. Door middel van aflezing op deze afgeleide teekeningen konden de afwijkingen der verschillende stoffen op deze zelfde gereduceerde temperaturen herleid worden.

Voor deze gereduceerde temperaturen werden gekozen de temperaturen der argon-isothermen nl.

1.00816,	voor argon overeenkomend met	—121°.21
1.01460,	„ „ „ „ „	—120°.24
1.02151,	„ „ „ „ „	—119°.20
1.03863,	„ „ „ „ „	—116°.62
1.04368,	„ „ „ „ „	115°.86
1.05735,	„ „ „ „ „	113°.80
1.08337,	„ „ „ „ „	—109°.88
1.13229,	„ „ „ „ „	—102°.51

Zoo werden ten slotte de afwijkingen geteekend als functies van $\log \lambda_v$, gerangschikt volgens $\log t$, en nu alle op dezelfde temperaturen teruggebracht. Deze teekening is weergegeven op de bij deze mededeeling gevoegde plaat. Alleen de afwijkingskrommen bij de gereduceerde temperaturen 1.01460 en 1.04368 hebben er geen plaats op kunnen vinden, aangezien dan de schaal te groot zou geworden zijn.

Het rechthoekje rechts onder aan de teekening begrenst het gebied in de onmiddellijke nabijheid van den kritischen toestand. Wij hebben gemeend dit gebied voorloopig bij overzichten volgens deze methode

²⁾ Zitt. versl. Juni 1901, Comm. No. 71.

buiten beschouwing te moeten laten, aangezien men daar met den invloed der storingsfunctie¹⁾ rekening zal hebben te houden.

Eene omschrijving van wat op deze plaat omtrent de afwijkingen der verschillende stoffen kan worden opgemerkt schijnt ons overbodig. Zij spreekt voor zich zelf en brengt het systematische der afwijkingen van argon van de andere stoffen in dit gebied, duidelijk tot uitdrukking.

§ 3. *Berekening van enkele grootheden, van belang voor de kennis van de afwijking van de wet der overeenstemmende toestanden.*

Ter beoordeeling van de afwijking van de wet der overeenstemmende toestanden worden gewoonlijk verschillende grootheden berekend waarvan wij de waarden voor argon op grond van onze waarnemingen²⁾ nu ook kunnen bepalen.

a. Substituëert men de waarden voor de dampspanningen van argon in de bekende dampspanningsvergelijking van VAN DER WAALS³⁾,

$$\log \frac{p}{p_k} = f \frac{T - T_k}{T}$$

dan vindt men bij gebruik van gewone logaritmen de volgende waarden van f :

t	p in atm.	f
-140°.80C	22.485	2.415
-134°.72	29.264	2.421
-129°.83	35.846	2.457
-125°.49	42.457	2.577

Een oppervlakkige vergelijking van deze waarden van f met die van andere stoffen leert ons, dat de waarde van argon dichter dan die van verreweg de meeste andere stoffen bij de theoretische waarde van f in het kritische punt, die uit de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS volgt (1.737), ligt, zooals voor eene éénatomige stof ook wel te verwachten is. Voor koolzuur tusschen -63°C en het kritische punt beweegt zich f tusschen 2.84 en 2.97⁴⁾; voor iso-

¹⁾ Zitt.versl. Febr. 1908, Comm. No. 104.

²⁾ Zitt.versl. April 1910, Comm. No. 115; Zitt.versl. Sept. 1910, Comm. No. 118a; Zitt.versl. Oct. 1910, Comm. No. 118b.

³⁾ J. D. VAN DER WAALS, Cont. 1, pag. 158.

⁴⁾ J. P. KUIJEN, Die Zustandsgleichung, p. 101, aangevuld met de metingen van KEESOM, Zitt.versl. Oct. 1903, Comm. N^o. 88.

pentaan¹⁾ tusschen 130°C en het kritische punt neemt f' een waarde aan tusschen 2.75 en 2.95, terwijl verder uit het door KUENEN²⁾ gepubliceerde lijstje blijkt, dat behalve voor de éénatomige stoffen, en enkele andere, zooals waterstof, stikstof en kooloxyde, f' steeds grootere waarden heeft.

b. Voor het kritische viriaalquotient

$$K_4 = \frac{RT_k}{p_k v_k}$$

vonden wij met behulp van de gepubliceerde kritische grootheden en van het gewicht in grammen van 1 liter argon onder normale omstandigheden 1.782 volgens RAMSAY en TRAVERS³⁾

$$K_4 = 3.283.$$

Ook hier komt deze waarde dichter bij de theoretische waarde zooals die uit de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS volgt (nl. 2.67), dan die van bijna alle andere stoffen, zooals o.a. blijkt uit de door KUENEN⁴⁾ samengestelde tabel. De schatting van D. BERTHELOT⁵⁾ is dus vermoedelijk veel te laag.

c. Schrijven wij de vergelijking van den rechtlijnigen diameter van CAILLETET en MATHIAS⁶⁾ met de notatie

$$\frac{q_{\text{liq}} + q_{\text{vap}}}{2} = q_k - \alpha (T_k - T),$$

waarin q_{liq} , q_{vap} en q_k resp. de vloeistofdichtheid, de dampdichtheid en de kritische dichtheid voorstellen en α de *z.g.* richtingseconstante van den diameter is, en noemen wij

$$a_M = -\alpha \frac{T_k}{q_k}$$

de gereduceerde richtingseconstante, dan vinden wij uit de vloeistofdichtheden van BALY en DONNAN⁷⁾, en de reeds gepubliceerde kritische dichtheid afgeleid uit de isothermen:

$$\alpha = -0.003050$$

$$a_M = 0.9027.$$

De helling van den diameter voor argon is dus buitengewoon

1) S. YOUNG l. c.

2) J. P. KUENEN, l. c. p. 142.

3) W. RAMSAY en M. W. TRAVERS, Proc. R. S. 67. 329. 1900.

4) J. P. KUENEN, Die Zustandsgleichung, p. 60.

5) D. BERTHELOT, Journ. de phys. (3). 10. 611. 1901.

6) L. CAILLETET en E. MATHIAS, Journ. d. phys. (2). 5. 549. 1886.

7) E. C. C. BALY en F. G. DONNAN, Journ. chem. Soc. 81. 911. 1902.

groot, grooter dan nog ooit voor een andere stof gevonden is, aangezien α bij de meeste stoffen begrepen is tusschen -0.0005 en 0.0023 ¹⁾.

In verband met het bovenstaande is het van belang op te merken, dat YOUNG ²⁾ bij de stoffen met hoogere kritische temperatuur een innig verband tusschen de richting en kromming van den diameter eenerzijds en de waarde van de, uit de toepassing van de wet van den diameter gevonden waarde van het kritisch volumen (v_{kd}) anderzijds ontdekt heeft.

Stelt men nl. den gekromden diameter voor door

$$D = aa + bdt + ct^2$$

waarin

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_{li}} + \frac{1}{v_{vap}} \right).$$

dan behooren te zamen:

$$\begin{aligned} -b_d < 0.93 & \quad K_{4d} < 3.77 & \quad c_d > 0 \\ -b_d = 0.93 & \quad K_{4d} = 3.77 & \quad c_d = 0 \\ -b_d > 0.93 & \quad K_{4d} > 3.77 & \quad c_d < 0. \end{aligned}$$

Nu is bij een vroegere gelegenheid ³⁾ de diameter recht verondersteld en toen is ook deze onderstelling gerechtvaardigd. Dus $c_d = 0$.

Maar wij vonden zooeven K_4 , waaruit met $K_4 = K_{4d}$ ⁴⁾ volgt

$$K_{4d} = 3.283 \text{ en } -b_d = a_M = 0.9027$$

waaruit wij dus kunnen besluiten, dat de diameter van argon óf niet aan den regel van YOUNG gehoorzaamt, óf (wat niet onmogelijk is) toch eenigszins gekromd is, in welk geval argon tot de eerste groep van YOUNG zou behooren. Een nauwkeurig experimenteel onderzoek aangaande den diameter van argon zou, zoowel voor dit vraagstuk als voor de waarde van de kritische dichtheid, waarschijnlijk belangrijke uitkomsten opleveren.

Bij zuurstof vonden MATHIAS en KAMERLINGH ONNES ⁵⁾

1) E. MATHIAS, Le point critique des corps purs, p. 9 en 10.

2) S. YOUNG, Phil. Mag. (5). 50. 291. 1900.

3) Zitt.versl. Sept. 1910. Comm. N^o. 118a.

4) De index d in K_{4d} beteekent, dat het kritische volume, waarmede deze grootheid berekend is, met behulp van den diameter is gevonden. Hoewel nu de hier opgegeven waarde van het kritische viriaalquotient berekend is met eene uit de isothermen berekende waarde van v_k hebben wij toch gemeend hier $K_4 = K_{4d}$ te mogen schrijven, omdat vermoedelijk (zie Comm. N^o. 118c) de op beide wijzen bepaalde waarde van v_k weinig zullen verschillen.

5) Zitt. versl. Jan. 1911. Comm. No. 117.

$$-k_d = 0.813, \quad K_{4d} = 3.346, \quad \epsilon_d = 0.$$

Het schijnt dus alsof in het criterium van YOUNG de waarde van K_{4d} bij stoffen met lagere kritische temperatuur zich naar kleinere waarden verplaatst.

d. Aangaande de door REINGANUM ¹⁾ en VOGEL ²⁾ onderzochte functie

$$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) r^2$$

kunnen wij voorloopig nog niets stelligs mededeelen. Een onderzoek daarvan is echter in bewerking.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N^o. 119 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden:
„*Verdere proeven met vloeibaar helium.*”

A. *Isothermen van eenatomige gassen enz. VIII. Thermische eigenschappen van helium*”.

§ 1. *Het heliumbad.* Voor de meeste proeven, die men bij heliumtemperaturen zou willen ondernemen, is het noodig het vloeibare helium uit den bereidingsstoestel in andere meer bepaald voor de te verrichten proeven ingerichte toestellen, de heliumcryostaten, over te brengen. Dat dit beproefd zou worden, werd in Med. n^o. 112 (Zittingversl. Juni 1909) § 2 vermeld. In het Gedenkboek aangeboden aan J. M. VAN BEMMELN kon ook worden medegedeeld, dat het overschenken inderdaad eenmaal gelukt was.

Door het slagen van deze bewerking toch konden de toestellen met welke werd aangetoond, dat het helium zelfs als de dampdruk tot op 0,15 mm. daalt nog vloeibaar blijft, in hun beschermend bad van vloeibaar helium gedompeld worden. Doch tevens was gebleken dat dit gunstige resultaat alleen als bij toeval verkregen was. Een methode, die meer doeltreffend belooft te zijn, wordt nu uitgewerkt en ik hoop daarover spoedig te berichten.

Intusschen konden een paar vraagstukken reeds worden bestudeerd met een toestel, die zich bij den oorspronkelijken bereidingsstoestel (Meded. n^o. 108, Zittv. Aug. 1908) voldoende aansluit om zekerheid

¹⁾ M. REINGANUM, Diss. Göttingen 1899. Ann. d. Phys. (4), 18. 1008. 1905. Phys. Ztschr. 11. 735. 1910.

²⁾ G. VOGEL, Diss. Freiburg (Baden) 1910, Ztschr. f. phys. Chem. 73. 429. 1910.

te bieden, dat, voor zoover de toestellen er in kunnen worden ondergebracht, zij ook met een bad van vloeibaar helium kunnen worden omgeven.

Om die zekerheid te verkrijgen moest in den oorspronkelijken bereidingstoestel in beginsel geen verandering gebracht worden en dus ook het bezwaar, dat het vloeibare helium zich bevindt in een ruimte die naar boven door de regeneratorspiraal zoo goed als geheel wordt afgesloten, aanvaard worden. Doch de voor het vloeibare helium bestemde ruimte kon zooveel vergroot worden als op grond van de ervaring met den bereidingstoestel geoorloofd scheen. Zoo werd thans een toestel geconstrueerd, die ruimte bood voor een thermometer reservoir van grootere afmeting dan het tot 1909 gebruikte, voor een weerstands thermometer zooals bij het onderzoek van den galvanischen weerstand bij waterstoftemperaturen diende, voor een dilatometer van grootere afmetingen dan die in Med. N^o. 112 werd beschreven, alsmede voor een contrôle dilatometer.

De toestel is op Pl. I fig. 1 afgebeeld¹⁾. De letters zijn dezelfde als op Pl. III van Med. N^o. 108, en bij wijziging van een der deelen met een ' voorzien. Pl. II van Med. N^o. 108 blijft daarbij geldig voor wat het verdere van den heliumcyclus voor het gebruik bij gewonen druk betreft. Ten einde het helium onder lageren druk te laten verdampen, wordt de afvoerbuis uit den liquefactor in verbinding gebracht met de wijde zuigbuis van een BURCKHARDT vacuumpomp van 360 M³ aangezogen volume. Om dit na te gaan vervange men op Pl. II van Med. N^o. 108 het deel D_a met bijbehooren door het in fig. 2 gegeven wijzigingsschema; $B_a V_a$ geeft de verbinding met de vacuumpomp aan, waarvan kraan 22 afsluit, terwijl kraan 23 in eene zijleiding eene fijne regeling van de weggezogen hoeveelheid gas veroorlooft; 24 en 25 dienen om den gashouder (zie voortdurend Pl. II van Med. N^o. 108) en den liquefactor onafhankelijk van elkander luchtledig te kunnen pompen.

Behalve wat met de verandering van den toestel om deze tot het opnemen der meetapparaten geschikt te maken in verband staat, is nog op te merken, dat in plaats van de twee thermoelementen, die met het heliumthermometertje (nu N_1' , N_2 , N_3) dienden om over de in F aanwezige hoeveelheid vloeibare waterstof te oordeelen thans een tweede heliumthermometer Na_1 , Na_2 , Na_3 , is aangebracht. De bewegingen van het kwik in de capillairen N_3 en Na_3 laten veel beter dan de meer omslachtige waarnemingen met de thermoelementen over den stand van den vloeistofspiegel in F oordeelen, zoodat met

¹⁾ Het alcoholglas met toebehooren (verg. Pl. III van Med. N^o. 108) $E'd'$ is op de teekening slechts gedeeltelijk aangegeven.

de vloeibare waterstof zuiniger kan worden omgegaan, en het voor deze proeven noodige inspannende voorbereidingswerk dus kon worden ingekort.

In het onderste deel van het glas E_a' (fig. 1), de cryostaatruimte, bevindt zich het reservoir Th_1' van den heliumthermometer, met welken de temperatuur van het bad bepaald wordt, de weerstand Ω , de dilatometer Δ , de contrôletoestel van den dilatometer δ .

Eindelijk is er een dikke koperen staaf Cu in geplaatst, ten einde door geleiding de temperatuur van het bad, waarin niet geroerd kon worden, gelijkmatig te maken. In plaats van één thermometer capillair (die van Th_1 , Pl. III, Med. N^o. 108) loopen nu drie capillairen in de met flanel aangevulde nauwe ruimte tusschen de regeneratorspiraal A en den wand van het vacuumglas E_d' . Een er van Th_2 dient voor den thermometer (die Th_1 , Th_2 , Th_3 , Th_4 van Pl. III, Med. N^o. 108 vervangt), de tweede voor den dilatometer (deze was reeds ook Med. N^o. 112 aangebracht), de derde voor de contrôletoestel bij den dilatometer (verbindt δ en W). Verder loopen door deze ruimte inplaats van de twee geïsoleerde draden van het thermoelement (Med. N^o. 108) nu vier geïsoleerde draden, w_{a_1} , w_{a_2} , w_{b_1} , w_{b_2} zijnde de dubbele stroomtoe- en afvoerdraden van den weerstand Ω .

Al deze capillairen en geïsoleerde draden moeten luchtdicht door de met vloeibare lucht gevulde ruimte (welke Med. N^o. 108 § 2 onder d genoemd wordt en waarin zooals op Pl. II, Med. N^o. 108 aangegeven bij b de vloeibare lucht wordt geschonken) gevoerd worden. De capillairen zijn daartoe in de nieuwzilveren wanden dier ruimte gesoldeerd, de geïsoleerde geleiddraden worden er doorgevoerd in nieuwzilveren buizen die eveneens in die wanden gesoldeerd zijn.

Wat de vulling van het onderste deel van den toestel E_{a1} (op Pl. I fig. 1) met vloeibaar helium betreft, deze geschiedt geheel als in Med. N^o. 108 § 4 is aangegeven. Door oefening in de verschillende bewerkingen en de verbetering bestaande in den tweeden heliumthermometer Na was het mogelijk gebleken vrij wat waterstof te besparen zoodat, waar reeds den vorigen dag een deel van de benoodigde hoeveelheid waterstof bereid kon worden 's morgens te 7¹/₂ uur kon worden begonnen en te 1^h.45 het cryostaatdeel van den toestel met vloeibaar helium gevuld was. De circulatiedruk was op 25 atmosferen gehouden (verg. Med. N^o. 112 § 2).

De druk, waaronder het helium in den cryostaat verdampt, wordt ontleend aan den druk in de wijde ruimte onder de nieuwzilveren kast F , van waar een buis door F heen loopt om buiten den toestel bij p_1 uit te komen en zich daar aan de drukregel- en meettoestellen aan te sluiten. Het verschil in druk in deze ruimte en boven het

helium noodig om den heliumdamp tusschen de windingen van de regeneratorspiraal heen te drijven is volgens bepalingen met lucht op minder dan $\frac{1}{20}$ mm. te stellen, en mag dus verwaarloosd worden. Alleen bij zeer lage drukkingen zal bij nauwkeurige proeven eene correctie noodig zijn.

De toestellen, die dienen om over het onderhouden van een standvastige temperatuur in het cryostaatdeel door regeling met de afvoerkranen en dus over het onveranderd houden van den verdampingsdruk te oordeelen, en om dezen druk te meten zijn afgebeeld in fig. 2, Pl. II. Voor drukkingen boven 5 cm. dient de indicator I_1 voor drukkingen tusschen 5 cm. en 1 cm. I_2 voor lagere drukkingen I_3 . Men brengt I_{2a} of wel I_{3a} bij geopend K_{i21} , K_{i22} , K_{i23} of K_{i31} , K_{i32} , K_{i33} op een bepaalden door I_1 of den MacLeod drukmeter I_4 te meten druk, sluit dan K_{i21} of wel K_{i31} en werkt dan met de regelkranen voor het wegzuigen van het gas zoo, dat de olie in de hellende met eene verdeling voorziene buizen der indicatoren op dezelfde deelstreep blijft inspelen.

De instelling op een bepaalden verdampingsdruk en dus op een bepaalden druk aan het oppervlak van de vloeistof in de cryostaat is zeer bevredigend te verkrijgen. De temperatuur van het bad is echter minder zeker, daar er niet geroerd kan worden en de geleiding van *Cu* slechts weinig aan dit gebrek tegemoet kan komen. Lager gelegen deelen van het bad zullen hoogere temperatuur hebben en de verdampingsdruk behoorende bij de temperatuur zal daar van 0,009 tot 0,011 mm. kwik per mm. afstand tot het oppervlak van het vloeibaar helium kunnen stijgen. Bij de laagste temperaturen komt dit met ongeveer 0,06 graad temperatuurverschil overeen. Met deze onzekerheid zullen wij ons zoolang er niet een cryostaat verkregen is, waarin geroerd kan worden, tevreden moeten stellen. Zij is echter niet grooter dan die, welke uit anderen hoofde nog bestaat.

§ 2. *De thermometer.* De temperatuur werd gemeten met een heliumthermometer van constant volume met een nulpuntdruk van 14,5 cm. (Verg. Med. N°. 112).

Bij de laagste gemeten temperatuur was de spanning van het gas in den thermometer ongeveer 1,2 mm., de dampspanning van het helium was nog slechts 2 mm. Wij zijn dus wat het helium betreft eenigzins in dezelfde omstandigheden als wanneer men met een etherdampthermometer van constant volume gewone dampkringstemperaturen wil meten. Daarbij komt dan nog de bijzonder kleine waarde van den druk in ons geval. Uit den aard der zaak ligt er in deze bepalingen reeds in beginsel veel onzekers. Het best schijnt het echter

wel een begin te maken met aan te nemen, dat de gewone gaswetten bij deze dichtheden nog mogen worden toegepast en het aanbrengen van correcties voor afwijkingen, die uit de wet der overeenstemmende toestanden zouden volgen, en voor mogelijke condensatie op de wanden enz., uit te stellen tot waarnemingen verricht zijn, die daaromtrent een oordeel geven. Men kan althans beproeven op deze wijze uitkomsten omtrent sommige thermische eigenschappen te verkrijgen. In Meded. N^o. 112 werd vermeld, dat het toen nog niet gelukt was de bezwaren te overwinnen, die aan het verrichten van metingen in de onmiddellijke nabijheid der toestellen, dienende voor het bereiden van het helium, met een thermometer volgens het beginsel van den thans gebruikten verbonden zijn. Ook thans is dit nog niet het geval. Er worden aan de eenvoudigheid en de gemakkelijke hanteerbaarheid, van de toestellen eischen gesteld, welke met die van onafhankelijkheid der thermometrische bepalingen van trillingen en door andere werkzaamheden opgewekte storingen moeilijk te vereenigen zijn. Maar eene betrouwbaarheid tot op 0,1 graad schijnt nu toch wel verkregen te zijn.

Het deel van den helium-thermometer, dat voor het instellen op constant volume en het aflezen van den druk dient, is op Pl. I rechts afgebeeld. De inrichting er van herinnert aan die van den op Pl. I van Meded. N^o. 95^e (Zittg. Versl. Sept. 1906) afgebeelden waterstoffthermometer, wanneer deze voor het meten van waterstofftemperaturen dient; de letters zijn voor een deel in overeenstemming daarmede gekozen. Met het oog op het geringe bedrag der bij helium-temperaturen te meten drukkingen wordt de ruimte boven het kwik in de verstelbare dubbele manometerbuis l en f'_a luchtledig gepompt, en voor alle zekerheid met een in vloeibare lucht gedompelde luchtledige buis L met uitgegloeide kool verbonden. Om het hoogteverschil der kwikmenisci met groote nauwkeurigheid af te kunnen lezen is ook in de manometerafleesbuis een stalen spits f'_a aangebracht, evenals in de instelbuis; het blokje e_a , dat deze spits draagt is terzijde met een (in de figuur zichtbaar) kanaaltje voorzien. Vóór het instellen is K_{θ_5} gesloten. Men brengt het kwik in de manometerafleesbuis eerst met dat in de manometerinstelbuis door het openen van deze kraan in verbinding nadat door het op en neer schuiven van de dubbele manometerbuis de kwikmeniscus bij geopende K_{θ_1} in de instelbuis op gelijke hoogte met de spits f'_a in de afleesbuis is gekomen. Daarna kan men om tot eene instelling over te gaan met K_{θ_1} de instelbuis afsluiten. Met eene kleine draaiing van de schroef s_c en van de stelschroef met welke de fijnere hoogte-instelling van de manometerbuis verkregen wordt, welke schroeven beide in het bereik van den

waarnemer zijn, stelt men dan de kwikspiegels nauwkeurig op de beide spitsen in en bepaalt de hoogte midden tusschen spits en spiegelbeeld met den kathetometer voorzien van een der afleesmicroscopen, die in Med. N^o. 85 (Ztg. Versl. Juni 1903) en N^o. 95^b (Juni 1906) bij het gebruik van den kathetometer als verticalen comparateur gediend hebben.

Op deze wijze zijn, bij inachtneming van de aanwijzingen der gevoelige niveaus, hoogten tot op 0,002 mm. nauwkeurig kunnen worden bepaald. Om de onzekerheid omtrent de correctie voor de breking van het licht door het glas ter plaatse waar op de spits wordt geïsoleerd en omtrent die voor de temperatuur der evenwicht makende kwikzuilen (de onzekerheid der capillaire depressie, die slechts 0,01 mm. bedraagt, mag verwaarloosd worden) te elimineeren is de kraan K_0 aangebracht en maakt de bol d_5 deel uit van de schadelijke ruimte¹⁾. Laat men het kwik, dat bij de thermometerinstelling bij gesloten kraan K_0 in de nauwe steel d_4 staat, na het sluiten van K_0 dalen, zoo blijft in de schadelijke ruimte slechts een zeer klein — juist bekend — breukdeel van den druk over, en moet men de manometerinstelbuis laten dalen om weer het kwik op beide spitsen in te stellen. De verplaatsing wordt afgelezen op een fijn verdeeld schaalte, dat aan de manometerinstelbuis bevestigd is en geeft onmiddellijk de alleen nog met den restdruk te corrigeren thermometerdruk in mm. kwik van de temperatuur van de instelruimte aan.

Bij de verschillende inrichtingen, die — verg. Med. N^o. 60 (Ztg. Versl. Juni 1900) — veroorloven gemakkelijk de verschillende te viseeren punten zoo te stellen, dat zij, achtereenvolgens in den kathetometer gebracht, scherp zijn ingesteld, behoeven wij niet stil te staan, de beteekenis der luchtvaarders op de met kwik gevulde verbindingsbuizen is uit de tekening voldoende op te maken, evenzoo die van de met kwik gevulde caoutchoucbuis S_1 , die de caoutchoucoverbindingbuis S en hare aankoppelingsplaatsen omvat. Het evenwicht tusschen ruimten met gas op zoo lagen druk, als in ons thermometerreservoir en in de schadelijke ruimte heerscht, komt als de verbindingsbuis nauw is, tengevolge van de groote betrekkelijke waarde der wrijving in het algemeen slechts zeer langzaam tot stand. In ons geval doet zich echter de gunstige omstandigheid voor, dat er slechts zeer weinig gas behoeft over te stroomen, omdat de eene der beide ruimten (de schadelijke ruimte) slechts

1) In capillair d_2 is eene koppeling ingeschakeld, welke vele bewerkingen en controles zeer veel gemakkelijker maakt, doordat het geheele manometer deel van de overige inrichting kan worden losgemaakt, en dit of het overige afzonderlijk met eene luchtpomp etc. verbonden kan worden.

zeer klein is. Tegen het wijder maken van de capillair bestaat het bezwaar, dat dan de in de capillair bevatte hoeveelheid gas, wegens de onzekerheid omtrent de temperatuursverdeeling tot onnauwkeurigheid aanleiding kan geven. In verband met de verandering van wrijving en dichtheid met de temperatuur en rekening houdend met moeilijkheden van constructie werd voor het deel van de capillair op lage temperatuur 37 cm. stalencapillair van 0,5 mm. diameter en voor het deel dat nagenoeg op kamertemperatuur is 50 cm. koperen capillair van 1.0 mm. diameter genomen. De onzekerheid bedraagt dan hoogstens 1% terwijl de wrijving nog niet te groot is, daar eene instelling tot op 0,01 mm. in 2 minuten tot stand komt.

§ 3. *De densimetriscbe toestellen.* Het in het heliumbad gedompelde deel van den dilatometer bestond (zie Pl. I fig. 1 en fig. 4) uit een reservoir L_1 met steel L_2 en nauwe glazen capillair L_3 voortgezet door een stalen capillair. De massa van het daarin aanwezige helium wordt volumetriscb bepaald met behulp van den bol met boven en beneden een verdeelde buis F_1 , waarvan de temperatuur door het omgevende waterbad wordt aangegeven; de druk wordt op een schaal afgelezen waarbij gebruik wordt gemaakt van de zijdelings aan de kwikpeer V_2 verbonden stijgbuis F_{2b} . De afmetingen van L_1 en F_1 zijn zoo gekozen, dat bij den gewenschten druk en voor en na de gewenschte vulling van den dilatometer de stand van het kwik op de benedenste en de bovenste der verdeelde buizen van F_1 kon worden afgelezen. Verder is de doorsnede van den verdeelden steel zoo gekozen, dat wanneer de dilatometer bij het kookpunt tot boven aan de verdeeling L_2 gevuld is en bij gesloten $K_{\Delta v}$ en $K_{\Delta w}$ de dilatometer wordt afgekoeld ook bij de grootste te bereiken dichtheid de meniscus nog in den steel blijft.

Hoewel de capillair, daar waar hare temperatuur onzeker is, slechts nauw is, werd de correctie voor het zich daaruit bij afkoeling van den dilatometer condenseerende gas (bij gesloten $K_{\Delta v}$ en $K_{\Delta w}$), hetgeen in den zin van eene stijging van den meniscus van den vloeistof in den steel werkt, van groot belang, waar de vraag rees of een maximum van dichtheid bij het vloeibare helium kan worden aangetoond. Er is dus een tweede toestel d met zeer korten steel en eenzelfde capillair doch zonder reservoir aangebracht, bij welken de volumometer W behoort. Wordt voor de capillair van deze controle toestel de correctie op dezelfde wijze berekend als voor die van den dilatometer zoo volgt daaruit eene stijging van de vloeistof, die men in d ziet verschijnen, welke door vergelijking met de waarneming over de juistheid der correctie laat oordeelen.

Bij het bepalen van de dampdichtheid, diende dezelfde dilatometer

Δ_1 , doch werd de volumemeter Q gebruikt, waar het gas in een verdeelde buis wordt gemeten en dien men door $K_{\Delta Q}$ met Δ in verband kan brengen ($K_{\Delta r}$ gesloten).

§ 4. *Dampspanningen van helium.* De waargenomen drukkingen werden gecorrigeerd voor de hoogte van den vloeistofspiegel van het helium boven het midden van het thermometerreservoir ThI' , voor den aërostatischen druk tusschen de plaats waar de druk gemeten werd en den vloeistofspiegel van het helium en voor den wrijvingsdruk van de windingen van de regeneratorspiraal.

Er werd gevonden.

Helium, maximumspanning.

Temperatuur			${}^{760} p_{co\ddot{a}x}$
I	II	gem.	
$4.{}^{\circ}29 K$	$4.{}^{\circ}28 K$	$4.{}^{\circ}29 K$	760
3.97			565
3.26	3.20	3.23	197
2.34	2.40	2.37	51
1.47	1.49	1.48	3

De kolommen I en II hebben betrekking op twee onafhankelijke metingen.

In fig. 5 is *log. Brigg.* $p \times 760$ (p uitgedrukt in atmosferen) als functie van $\frac{1}{T}$ uitgezet. Deze figuur laat tevens oordeelen over de aansluiting aan de dampspanningsformule van VAN DER WAALS

log. $\frac{p}{p_k} = f \left(1 - \frac{T_k}{T} \right)$ welke een rechte lijn vordert.

De kromming van de lijn, welke de waarnemingen weergeeft, is slechts gering, maar de waarde van f neemt duidelijk af bij lagere temperatuur.

Berekent men f uit de raaklijn bij $T = 4.{}^{\circ}29 K$. zoo vindt men $f = 1,2$, $T_k = 5.{}^{\circ}8 K$., de twee temperaturen $4.{}^{\circ}29$ en $3.{}^{\circ}23$ geven $f = 1,1$, $T_k = 5.{}^{\circ}7 K$. Bij lagere temperatuur wordt de f nog kleiner en gemiddeld zou slechts $f = 0,9$ gevonden worden, waaruit $T_k = 6.{}^{\circ}4$ zou volgen, hetgeen ook reeds met het oog op de temperatuur van het Boylepunt wel te hoog moet zijn.

Opmerkelijk is het dat deze waarde van f zeer sterk afwijkt van de voor de gewone normale stoffen gevondene ¹⁾, welke van 2 tot 3 loopt. Bij het helium komt dan zeer sterk tot uitdrukking de afwijking welke men reeds bij de stoffen met eene kritische temperatuur beneden 0° opmerkt, daar deze $f = 2.2$ geven in plaats van $f = 2.7$, die als gemiddeld voor de gewone normale stoffen geldt. De afwijking is in tegengestelden zin van die der geassocieerde stoffen, voor welke van 3.26 voor water tot 4.17 voor isobutylalcohol gevonden is.

Het nieuwe inzicht in de dampspanningswet voor het helium dat wij thans gekregen hebben voert ook tot eene nieuwe schatting van de laagste temperaturen, die bij de in het VAN BEMMELEN Gedenkboek vermelde proeven bereikt werden en toen uitgaande van $f = 2.2$ geschat werden. Met de thans bepaalde waarde zou de temperatuur bij een dampdruk van 1 mm., 1.°33 K. en die bij 0,15 mm. de laagste welke bereikt werd 1,°15 K. zijn en zou de dampdruk tot ¹/₂₅ mm. verlaagd moeten worden om tot 1° K. te komen.

§ 5. *Vloeistofdichtheid van helium.* De volgende tabel bevat de uitkomsten der metingen, de dichtheid uitgedrukt in de normale dichtheid van het gas.

Helium, vloeistofdichtheid.				
T	$v_{A \text{ liq}}$			ver-effend
	I	II	III	
4.33	[658.0]			678.0
4.29		682.3		682.3
4.28			683.6	683.6
3.98		715.5		715.5
3.26		779.0		782.0
3.20	784.8		785.9	785.9
2.40	822.6		818.8	818.8
2.34		815.4		820.0
1.49			815.3	815.3
1.47		810.9		815.0

¹⁾ KUENEN, Zustandsgleichung p. 142.

De dichtheid ρ_{liq} volgt hieruit door vermenigvuldiging met $\rho_{0^{\circ}\text{C. } 760 \text{ mm.}} = 0,0001787$, zoodat $\rho_{liq_{\text{coex. } 1^{\circ}29}} = 0,122$; vroeger was als ruw benaderde waarde opgegeven 0,15.

Opmerkelijk is een sterke afname van de uitzetting bij het dalen van de temperatuur. Reeds in 1909 was bij de proeven, in Med. N^o. 112 beschreven, de indruk gewekt, dat dit het geval was, de toen verkregen dichtheidscijfers staan in kolom I. Hoogst merkwaardig is het optreden van een maximum van dichtheid, dat volgens de grafische voorstelling der uitkomsten in fig. 2 van Pl. III bij ongeveer $2^{\circ},2$ K. schijnt te liggen. Buitendien is het tot stilstand komen van den meniscus in den dilatometer steel terwijl de temperatuur bij hare daling $2^{\circ},1$ K. overschrijdt en het vervolgens weder rijzen van den meniscus wanneer de daling in temperatuur verder tot $1^{\circ},48$ K. door gaat, duidelijk waargenomen evenals het omgekeerde verschijnsel toen de temperatuur van dit punt af weder tot $2^{\circ},37$ K. steeg.

Dat de meniscus bij $2^{\circ},37$ K. lager staat dan bij $1^{\circ},48$ K. en dat dit niet aan den invloed van condensatie van gas uit den steel is toe te schrijven blijkt uit het volgende overzicht.

Eerste proef.

temperatuur	stand van den meniscus
	gemiddeld
$1^{\circ},47$ K.	0.72
2.34	voor afkoeling 0.52
	na afkoeling 0.49
	verschil 0.215
	correctie 0.06 verschil 0.155

Tweede proef.

$1^{\circ},49$ K.	0.59	
	0.58	0.587
	0.59	
$2^{\circ},40$ K.	0.42	
	0.37	0.393
	0.39	
minimum afgelezen	0.35	—
	verschil 0.194	
	correctie 0.082	verschil 0.112

Ter beoordeeling van de juistheid der telkens aangebrachte correctie kan dienen, dat bij de tweede proef de contrôle dilatometer aanwees

een stijging van den meniscus bij daling van temperatuur van 0.03 terwijl berekend was 0.028.

Het bedrag van gemiddeld 0.134, dat na correctie overblijft moet dus op rekening van eene uitzetting tusschen $2^{\circ}.37$ K en $1^{\circ}.48$ K gesteld worden. Voor zoover thans uit de waarneming een besluit kon worden getrokken, moet voor het helium een maximum van dichtheid worden aangenomen. Uit eene waarneming, waarbij de dampdruk van het bad verminderd werd tot 1 mm. zou volgen, dat er bij verdere daling der temperatuur geen verdere uitzetting plaats heeft. Intusschen is deze waarneming, daar niet geroerd werd, te onzeker om te beslissen of de dichtheid van het helium na een maximum doorloopen te hebben een onveranderlijke waarde aanneemt

§ 5. *Dampdichtheid van helium.* Bij 65,54 cm. druk en $4^{\circ}.29$ K werd de dichtheid $69,0 \times$ de normale gevonden. Leidt men de B af uit $pr = RT = B/r$ zoo vindt men $B = 0,000047$ en voor de dichtheid van den verzadigden damp bij 76 cm. $85,5 \times$ de normale. De correctie voor C volgens de gemiddelde gereduceerde toestandsvergelijking VII.1 aan te brengen schijnt, ofschoon zij wel in aanmerking komt, te onzeker. Bij $3^{\circ}.23$ K werd voor B door te extrapoleren uit de individueele B 's, afgeleid uit de heliumisothermen tusschen 0 en $-216^{\circ}.56$ (Med. N^o. 102a. Zitting Versl. Dec. 1907) en de zoeven bepaalde waarde gevonden $B = 0,00061$ en hiermede de dichtheid van den verzadigden damp bij $3^{\circ}.23$ K $24,5 \times$ de normale.

Met deze waarden kan men verschillende karakteristieke thermische grootheden voor helium berekenen, zoo volgt voor den hoekcoëfficiënt van den diameter van MATHIAS als wij dien uit $4^{\circ}.29$ K en $3^{\circ}.23$ K afleiden $a_D = 0,0033$, en voor de constante van den diameter van MATHIAS $a_D = 0,255$ wanneer wij de kritische temperatuur bij $5^{\circ}.5$ K. stellen en dus tot $q_{KD} = 0,065$ komen. MATHIAS had voorspeld, dat de waarde van a_D gering zou zijn en vermoedde dat zij 0.14 zou zijn.

Het eerste gedeelte van deze merkwaardige voorspelling is althans bevestigd.

Voor het kritische viriaalquotient $K_4 = \frac{RT_k}{p_k^2 v_k}$ vinden wij (met $T_k = 5^{\circ}.5$ K en $p_k = 2,75$ uit q_{KD}) $K_4 = 2,68$, bijna juist de theoretische waarde volgens de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS. Deze waarde is (Zie KUENEN l. c. p. 60) belangrijk kleiner dan die van alle andere stoffen met uitzondering van waterstof, waarvoor zij slechts door voorloopig zeer onzekere berekening gevonden kan worden en 2.9 zou bedragen. De laagste tot nu toe gevonden waarde is die van E. MATHIAS en mij (Med. N^o. 117 Zitting Verslag Januari 1911) nl. 3.35;

in eene weldra aan te bieden Mededeeling van C. A. CROMMELIN en mij ¹⁾ wordt uit de isothermen van argon $K_4 = 3,28$ afgeleid.

§ 6. *De moleculaire attractie van het helium.* Het optreden van een maximum van dichtheid bij een zoo eenvoudige stof als het helium doet uit moleculair theoretisch oogpunt belangrijke vragen rijzen. Bij eene stof als water kan men zich gemakkelijk voorstellen, dat eene bijzondere samenkoppeling van de moleculen waarbij enkele deelen er van nauwer aaneensluiten tot verwijdering van andere deelen en alles samengenomen tot vergrooting van het volume bij dalende temperatuur voert. Vooral wanneer men aanneemt, dat de dielectrische eigenaardigheden van het water daarbij zooals waarschijnlijk is eene rol spelen. Doch bij de atomen van het helium, die wij ons wel als bolvormig en glad en blijkens het ZEEMAN-effect bij deze stof ook van allereenvoudigsten inwendigen bouw moeten voorstellen, zoekt men voorloopig te vergeefs naar een steunpunt van eene dergelijke verklaring. Buitendien wijkt het helium van de gewone normale stoffen juist in tegengestelden zin als de geassocieerde stoffen af.

Aan eene bij daling der temperatuur toenemende tot vermeerdering van het aantal moleculen (dus van R in de toestandsvergelijking) voerende dissociatie, welke deze afwijking in tegengestelden zin zou verklaren, kan moeilijk gedacht worden. Mocht het blijken dat er eene vergrooting van de afmeting der heliumatomen (b in de toestandsvergelijking) bij lagere temperatuur in het spel was, zoo zou ook dit iets zeer opvallends zijn. Veeleer schijnt bij het helium duidelijk te worden, dat men in 't algemeen twee uitingen der attractie, ook reeds bij de gewone normale stoffen te onderscheiden zal hebben, nl. eene attractie met betrekkelijk grootere werkingsfeer en een andere plaatselijk meer intensieve doch zich over kleinere werkingsfeer uitstreckende, die zich meer tot de nabijheid van het oppervlak van het molecuul beperkt en die de gewone normale stoffen in vergelijking met het helium doet herinneren aan geassocieerde stoffen. De laatste soort of werkingswijze van attractie zou dan bij het vloeibare helium geheel op den achtergrond treden.

De werkingsfeer dier krachten zou — zoo zij bij het helium niet reeds altijd ontbreken — zich dus bij de laagste temperaturen geheel (gelijk bij stoffen als waterstof bij de laagste temperaturen reeds misschien voor een groot deel) binnen de ruimte, die het atoom inneemt, hebben teruggetrokken. Zoo voert het meer op den voorgrond treden dier aan de geassocieerde stoffen tegengestelde eigenaardigheden tot de voorstelling dat althans een deel van de attractie

¹⁾ Zittingversl. van deze Vergadering.

bij daling van de temperatuur vermindert. Ook dit denkbeeld schijnt eerst vreemd.

Wij zijn vertrouwd met het toenemen der attractie bij dalende temperatuur. Volgens de wet van BOLTZMANN moet dit bij standvastige aantrekking der moleculen zelfs op geheel bepaalde wijze plaats vinden. En wanneer wij dan eene afname van de cohaesie onderstellen dan moet dit zijn niettegenstaande de door BOLTZMANN's wet aangegeven oorzaak van vermeerdering blijft bestaan. De oorzaak zou m. a. w. gevonden moeten worden in het overwegen bij lagere temperaturen van het afnemen van de van het heliumatoom uitgaande aantrekkende kracht.

Laten wij nog iets nader uitwerken, welke wijziging eene afname van de attractie, de a van VAN DER WAALS, met de temperatuur beneden een zekere temperatuur in het gedrag der stof ten gevolge zal hebben. Zij is veel ingrijpender dan die welke eene toename mee brengt.

Terwijl de laatste meer den graad der verschijnselen verandert, kan de eerste een fundamenteele verandering te voorschijn brengen. Een paar eenvoudige voorbeelden mogen dit toelichten. Ik neem daarbij als toestandsvergelijking eenvoudigheidshalve die van VAN DER WAALS. Stelt men voor hogere temperaturen a en b constant, zoodat de kritische temperatuur T_K kan worden berekend, en van af $T = a$ tot $T = T_K$ de attractie $a = KT$, zoodat bij T_K $a = KT_K$ zoo volgt, en wel zoo eenvoudig, dat het niet noodig is de vergelijkingen hier op te schrijven, dat alle temperaturen beneden T_K de kritische verschijnselen bij $v = 3b$ leveren waarbij dan telkens de kritische druk evenredig is aan de absolute temperatuur nl. $\frac{1}{27} \frac{KT}{b^2}$. Wat de afzonderlijke isothermen

aangaat zoo zal, terwijl boven T_1 het gas zich overeenstemmende met onze onderstelling $a = \text{const.}$ als een gas volgens VAN DER WAALS gedraagt, bij elke temperatuur T beneden T_K de isotherme gevonden worden door de ordinaat in de verhouding $T : T_K$ verkleind te ontleenen aan de isotherme bij T_K .

Neemt men aan dat $a = KT$ slechts tot een bepaalde temperatuur, $T_1 > T_K$ geldt en $a = \text{const.}$ van af $T > T_1$, dan zullen de isothermen van de kritische af tot die voor T_1 , bepaald worden door de vergelijking van VAN DER WAALS, die ook maximum dampspanning, vloeistofdichtheid en dampdichtheid zal bepalen. De isothermen, voor lagere temperaturen worden uit deze gevonden door voor elk volume de daarbij behoorende ordinaat in de verhouding $T : T_1$ verkleind te ontleenen aan de isothermen voor T_1 . De dichtheden van coëxisterende vloeistof en damp zullen dus onveranderd blijven en de coëxistentiedruk

eenvoudig evenredig aan T worden. Al moge de maximum dampspanning bij het helium met de temperatuur minder sterk afnemen, dan bij de gewone normale stoffen, zoo is de vermindering toch vele malen sterker dan in het zooeven ontworpen beeld.

Trouwens een stof, die daarmee overeenkwam zou ook andere zeer bijzondere eigenschappen vertoonen. Voor de verandering van de energie bij constante temperatuur vindt men nul, de latente verdampingswarmte is alleen noodig voor den uitwendigen arbeid, de inwendige latente verdampingswarmte is nul.

Stelt men om zich rekenschap te geven van het ingrijpende der wijzigingen, die de thermodynamische eigenschappen van de stof ondergaan, wanneer de attractie met de temperatuur afneemt, dat dit nog sneller dan evenredig geschiedt, dan komt men tot nog zonderlinger eigenschappen. Het geval $a = cT^2$ beneden $T_1 < T_k$ moge hier even worden vermeld. Bij zulk eene stof zou beneden T_1 bij het dalen der temperatuur het verschil van vloeistof en dampdichtheid verminderen om nul te worden bij de temperatuur T_{ki} bepaald door $T_{ki} T_k = T_1^2$ waarbij het tot een samentreffen van $\frac{dp}{dr} = 0$ en $\frac{d^2p}{dv^2} = 0$ komt en dus een *benedenste kritische punt* optreedt, beneden het welk de stof zich verder weder tot het absolute nulpunt als een permanent gas gedraagt. De verandering van de energie met het volume is hier negatief, dus ook de inwendige latente verdampingswarmte.

Wij hebben ons nu nog af te vragen of er verdere voorstellingen zijn, met welke eene afname der attractie bij nadering tot het absolute nulpunt vereenigbaar is.

Het dichtst hierbij komt KELVIN's en J. J. THOMSON's voorstelling omtrent den bouw der atomen. Neemt men bijv. aan, dat een atoom uit een bol van gelijkmatig uitgespreide positieve electriciteit, en een daarbinnen zich bevindend electron bestaat, zoo zullen bij het absolute nulpunt, waarbij het electron in rust verkeert, twee dergelijke atomen op elkander geen electrische aantrekking uitoefenen. Zoodra de electronen echter trillingen om hun evenwichtsstanden gaan uitvoeren en banen gaan beschrijven om de middelpunten, zal eene aantrekking ontstaan. Hoe de moleculaire attractie van een stelsel van dergelijke atomen onder den invloed der botsingen en van de straling (het zijn immers vibratoren gelijk EINSTEIN er aanneemt) van de temperatuur zal afhangen, zou een onderzoek als van VAN DER WAALS Jr. volgens de statistische mechanica gevoerd moeten uitmaken, a priori schijnt het niet onmogelijk dat voor een bepaald temperatuur gebied a bij stijgende temperatuur zal toenemen.

Voorloopig zijn al deze beschouwingen niet anders dan eene omschrijving hiervan, dat het gedrag van het helium doet vragen naar de beteekenis van het absolute nulpunt voor de moleculaire aantrekking.

In de eerste plaats zal het er op aankomen nadere experimenteële gegevens omtrent de bij het helium opgemerkte thermische eigenaardigheden, die tot het opwerpen der zooeven genoemde vragen leidden, te verkrijgen, en de verwante eigenschappen als capillariteit, wrijving, specifieke warmte, lichtbreking en dielectrisch vermogen te onderzoeken.

Daarvoor is de oplossing van het vraagstuk om het vloeibare helium uit den bereidingsstoestel in eene ruimte over te brengen, waar de regeneratorspiraalen niet meer aan het inbrengen van meettoestellen in den weg staat, dringend noodig.

B. Over de verandering van den weerstand van zuivere metalen bij zeer lage temperaturen, enz.

III. De weerstand van Platina bij heliumtemperaturen.

§. 1. *De weerstand van een draad van zeer zuiver platina bij heliumtemperaturen.* Het lag voor de hand om zoo spoedig zich de mogelijkheid voordeed, het onderzoek omtrent de verandering van den galvanischen weerstand van zuivere metalen, dat laatstelijk in Med. No. 99c (Zitt. Versl. Juni 1907) tot de laagste waterstoftemperaturen was voortgezet uit te breiden tot heliumtemperaturen. De draad Pt_B die met behulp van draad Pt_I van Med. 99b (Zitt. Versl. Juni 1907) ook bij waterstoftemperaturen gecalibreerd was, stond daartoe ter beschikking. Hij is vervaardigd volgens het model van Pt_d (vorig. Med. No. 99 § 2) en aangegeven door Ω afgebeeld op Pl. I behoorende bij A van deze Mededeeling fig. 1 en fig. 2.

De dikkere platina-einden w_a en w_b van den op een glazen buis gewonden (en daarop door verhitting even vastgekleefden) dunnen platinadraad zijn in het glas ingesmolten. Aan deze einden zijn de dubbele platina toeleidingsdraden w_{a1}, w_{a2} en w_{b1}, w_{b2} echter niet met de blaasvlam doch slechts met tin gesoldeerd. De weerstand werd met behulp van de brug van WHEATSTONE gemeten, zooals in Med. N°. 99 en voorafgaande is uiteengezet. Gevonden werd voor de verhouding van den weerstand bij de waarnemingstemperatuur w_t tot die bij 0°C. , w_0 . (zie tabel p. 1202).

Het blijkt, dat de weerstand door het dalen tot heliumtemperatuur weder verminderd is, doch bij deze temperaturen zelf onafhankelijk op welke lagere temperatuur de draad gebracht wordt eene stand.

Weerstand van platinadraad Pt_B

T	$\frac{W_t}{W_0}$
273. ^o 09 K	1
20.2	0.0171
14.2	0.0135
4.3	0.0119
2.3	0.0119
1.49	0.0119

vastige waarde behoudt. Fig. 3 Pl. III zijn de uitkomsten grafisch voorgesteld en de rakende nadering tot eene bij 4^o.3 K constant geworden waarde tot uitdrukking gebracht.

§ 2. *De vermoedelijke weerstand van zuiver platina en zuiver goud bij heliumtemperaturen.* Ten einde de juiste beteekenis van de verkregen uitkomst in het licht te stellen moeten wij er op letten, dat de draad Pt_B niet van geheel zuiver metaal is, en ons rekenschap geven van den invloed, dien het verschil met zuiver platina vermoedelijk zal hebben.

Wij vestigen daartoe in de eerste plaats onze aandacht op de waarnemingen omtrent goud. Letten wij dan op de groote overeenkomst in de afwijking van de weerstanden van platina en gouddraden van eene lineaire betrekking met de temperatuur, dan zullen wij rekening houdende met de uitkomst van den platinadraad ook de weerstandskromme van Au_{III} verder tot eene bij heliumtemperaturen constante waarde mogen extrapoleeren. Dit is in Fig. 3 van Pl. III geschied. De door waarneming geleverde gedeelten zijn dikker getrokken. Wij merken nu op, dat volgens Med. N^o. 99^e van KAMERLINGH ONNES en CLAY (Juni 1907) § 1 bij ruwe benadering voor bijmengselen ook nog bij waterstoftemperaturen wel de invloed door een additieven van de temperatuur onafhankelijken weerstand kan worden gegeven. Dan volgt voor Au_I , die uit goud van een hoogerem graad van zuiverheid (0,003 % bijmengsel tegen 0,015 % bij Au_{III}) vervaardigd is, de lijn die met dit merk in de figuur is aangegeven. Volgens meergenoemde Med. N^o. 99^e § 1 zou nu de invloed van een bijmengsel vrijwel evenredig aan het bedrag kunnen worden gesteld. Dit zou dus voor zuiver goud tot negatieve waarden voeren. In de eerste plaats weten wij echter

niet of de onzuiverheid en de invloed van mogelijke spanningen in beide gevallen dezelfde geweest is, buitendien echter blijft er in onze ruwe benaderingen te groote onzekerheid om niet onze waarschijnlijkste uitkomst voorshands te beperken tot deze, dat de weerstand van zuiver goud reeds bij heliumtemperaturen binnen de grenzen der experimenteele fouten (den bereikbaren graad van zuiverheid) tot nul wordt.

Keeren wij thans tot platina terug. De draad Pt_B blijkt minder zuiver dan Pt_I (zie tabel V van Med. N°. 99b). Ook geeft het op glas kleven aanleiding tot ongewenschte invloeden. Wederom in eerste benadering den additieven weerstand constant stellende komt men door extrapolatie tot de in de figuur aangegeven lijn voor Pt_I . Doch ook de weerstand van Pt_I mag niet als die van zuiver platina vrij van den invloed van bewerkingen beschouwd worden. Een draad door HOLBORN gebruikt (van grootere dikte) geeft een sterkere afname van den weerstand van 0° tot -191°C . dan Pt_I . Extrapolceeren wij deze zoo wordt het verschil van den bij heliumtemperatuur overblijvenden, verder van de temperatuur onafhankelijken weerstand van nul nog kleiner. Men kan vragen of men soms het verschil in beide van HERRAË'S afkomstige draden omgekeerd evenredig aan de dikte mag stellen en daaruit de waarde voor zuiver door de bewerking niet gewijzigd platina mag afleiden. Doch hiermede zouden wij ons te ver op het gebied der gissingen wagen. Wel schijnt echter de gevolgtrekking gerechtvaardigd, dat binnen de grenzen der experimenteele fouten (den bereikbaren graad van zuiverheid) de weerstand van zuiver platina bij heliumtemperaturen reeds nul zal zijn geworden.

§ 3. *De verandering van den weerstand van zuivere metalen met de temperatuur bij lage temperaturen.* Terwijl ik vroeger de meening koesterde, dat de weerstand van zuivere metalen na een minimumwaarde bereikt te hebben bij nog lagere temperaturen weder zou gaan toenemen om bij het absolute nulpunt oneindig te worden, komt het mij nu waarschijnlijk voor, dat reeds voordat het absolute nulpunt bereikt is de weerstand zoo niet nul dan toch buiten verhouding klein wordt om bij verdere daling nul te blijven.

Met deze uitkomst vervalt dan tevens de voorstelling, die jaren lang bij het onderzoek van den weerstand der metalen bij lagere temperaturen te Leiden als leiddraad heeft gediend, volgens welke het vermoede dalen van den weerstand tot een minimum en oneindig worden bij $T=0$, het gevolg daarvan zouden zijn, dat de electronen, die in de metalen de geleiding bezorgen, gelijk het door mij (1904) werd uitgedrukt bij afkoeling tot waterstofftemperaturen als een damp

op de atomen zouden beginnen neer te slaan, of gelijk KOENIGSBERGER op eene tot eene dergelijke betrekking met de temperatuur voerende wijze — het toen vermoede verschijnsel omschrijft, de door dissociatie vrij geworden electronen weder gebonden worden. Twijfel aan de juistheid dezer voorstelling wat het gedrag bij waterstoftemperaturen betreft voor het geval der volkomen zuivere metalen was bij mij reeds gerezen na de laatste onderzoekingen (Meded. van KAMERLINGE ONNES en CLAY) over het zuiverste goud toen nl. het evenredigheids-punt steeds lager gezocht moest worden. Het is nu duidelijk dat zij voor dit geval niet meer kan worden aanvaard. De vrije electronen schijnen in hoofdzaak vrij te blijven. Wat gebonden wordt schijnen de bewegende deelen der vibratoren te zijn, die bij gewone temperatuur door hunne beweging de beletselen vormen, welke bij voldoende daling der temperatuur verdwijnen, doordat de bewegende deelen der vibratoren zoo goed als onbewegelijk worden ¹⁾. Voor de berekening van de „latente verdampingswarmte” of de „dissociatie-constante” der vrije electronen bestaat dan ook voor het geval der zuivere metalen van de beschouwde soort, tenzij misschien voor nog veel lagere temperaturen, die voorshands niet te bereiken zijn, geen aanleiding.

Het opmerkelijke dalen van de weerstand tot zoo goed als nul bij een temperatuur even boven 4° K., om verder, gelijk over een gebied van ruim 2,5 graden kon worden vastgesteld, die waarde te behouden, zoodat voor den weerstand het kookpunt van helium praktisch het absoluut nulpunt is, schijnt mij in verband te moeten worden gebracht met de verandering van de energie der warmtebeweging van vaste stoffen met de temperatuur, die door EINSTEIN in zijne theorie van de specifieke warmte is afgeleid in de onderstelling, dat de warmte energie die van vibratoren is, en als zoodanig door het stralings-evenwicht wordt bepaald.

In 't bijzonder ligt de onderstelling voor de hand, dat de vrije weglengte der electronen, die de geleiding bezorgen, door de elongatie der zoeven genoemde vibratoren bepaald wordt. Om dit toe te lichten houden wij ons zoo na mogelijk bij de theorie van den galvanischen weerstand van RIECKE, DRUDE en LORENTZ, die haar tot eene zuivere electronentheorie heeft ontwikkeld.

Wij zullen eenvoudigheidshalve in de formule: ²⁾

¹⁾ Met het zoo goed als onbewegelijk worden van vibratoren is teven eene voorstelling verkregen voor hetgeen vroeger door mij het „vastvriezen” der electronen is genoemd.

²⁾ RIECKE, Phys. Zeitschr. 1909, p. 512.

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{\epsilon^2 N L \beta}{C^2 a T}$$

waar γ 't galvanisch geleidingsvermogen van een kubus van de eenheid van volume, N de dichtheid der vrije electronen, L hun weglengte, β hunne moleculaire snelheid, C de snelheid van het licht, ϵ het elementair quantum en aT de levende kracht van een vrij electron en T de absolute temperatuur is, of, wanneer wij $\frac{1}{3} \frac{\epsilon^2 a}{C^2 \sqrt{V} T} = p$ stellen,

$$\gamma = \frac{pNL}{\sqrt{V}}$$

in plaats van RIECKE's hypothese, volgens welke $L = \frac{q}{\sqrt{V} T}$ (als $q = \frac{a\sqrt{V} T_s}{\pi(1 + \beta s)}$, a de afstand der kubisch geschikt gedachte atomen, s de gewone en T_s de absolute temperatuur van het smeltpunt, β in RIECKE's notatie de lineaire uitzettingscoëfficiënt,

$$L = \frac{q}{\sqrt{V} E_T}$$

stellen, waar

$$E_T = 3R \frac{\beta r}{e^T - 1}$$

met nu $\beta = 4,864 \cdot 10^{-11}$ en R de gasconstante volgens PLANCK de energie van de vibratoren met het trillingsgetal r voorstelt.

Voor de verhouding van het geleidingsvermogen bij 0°C . en dat bij eene andere temperatuur T , γ_0 en γ_T vindt men dan

$$\frac{\gamma_T}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{V} T E_T}{\sqrt{V} T_0 E_0}$$

Deze formule brengt nu inderdaad het karakter van de afname van den weerstand van de zuivere metalen van de hier beschouwde soort (éénatomige?) met de temperatuur wel tot uitdrukking. In de eerste plaats het afnemen tot nul bij eene temperatuur boven het absolute nulpunt. Voor $a = 54$ wordt de weerstand bij helium-temperaturen ongeveer 0,0001 van die bij 0°C . Mag men verder bij 0°C . $\frac{a}{T}$ reeds klein stellen dan wordt de weerstand w bij T in verhouding tot die bij 0°C . w_0 uitgedrukt door

$$\frac{w_r}{w_v} = \frac{T}{273.1} \frac{1}{1} \frac{a}{1}$$

Inderdaad zijn de veranderingsefficiënten van den weerstand der zuivere metalen met de temperatuur bij daling onder nul in 't algemeen grooter dan 0,00367 en liggen zij voor platina, zilver, goud en lood in de buurt van 0,0039 en 0,0040.

Eindelijk wordt ook goed uitgedrukt, dat de vermindering van den weerstand bij de waterstoftemperatuur in bedrag vermindert en dit in meerdere mate bij die met hooger smeltpunt dan met die met lager smeltpunt.

Een numerisch juiste voorstelling, zoodat ook het buigpunt in de lijn, die den weerstand als functie van de temperatuur voorstelt wordt gegeven, kan de formule echter alleen leveren wanneer men aanneemt, dat kleinere waarden van r en dus van a bij lagere temperaturen op den voorgrond treden. Trouwens voor r kan niet met zekerheid een bepaalde waarde worden aangegeven, Uit de elasticiteit vindt EINSTEIN ¹⁾ bijv. voor zilver $a = 200$ (immers hij geeft voor de golflengte in 't luchtledig behoorende bij r , $\lambda = 73.10^{-4}$ e.M.) terwijl NERNST ²⁾ uit de specifieke warmte $a = 162$ afleidt overeenkomende met $\lambda = 90.10^{-4}$, welk getal echter alleen ook niet voldoende is om het geheele gedrag van zilver voor te stellen. Bij lood geeft NERNST $a = 58$, terwijl uit de elasticiteit volgens EINSTEIN zou volgen $a = 104$. Verder zou volgens de elasticiteit a bij lagere temperatuur iets moeten toenemen, terwijl voor de specifieke warmte de toename in denzelfden zin noodig schijnt als waarop de verandering van den weerstand wijst, ook al een bewijs, dat de theorie nog ver van volledig is.

Ik zal waar zoo groote onzekerheid bestaat ³⁾ en het er meer op aankomt in 't licht te stellen, dat de invoering der vibratoren tot de kwalitatieve verklaring van den aard der afwijkingen tusschen de werkelijke verandering van den weerstand met de temperatuur en eene evenredigheid met de temperatuur voert, voor a de helft nemen van de waarde die de elasticiteit volgens EINSTEIN levert.

Dan komt voor a Pt III, Ag 100, Au 92, P₆ 54.

¹⁾ Ann. d. Phys. (IV) 34. p. 170 (1911). Daar het in de December-vergadering voorgedragene voor afdrukken eerst in dit Zittingsverslag gereed was, heb ik aan het toen medegedeelde de volgende berekening uit de elasticiteit nog kunnen toevoegen.

²⁾ Bull. des Séances de la Soc. franç. de Phys. 1910 p. 28, 29.

³⁾ Vergelijk ook MADELUNG Gött. Nachr. 1909, p. 100, die het eerst de trillings-tijd der moleculaire eigen trillingen berekende.

T	T 273.1	$\frac{W_T}{W_v}$							
		platina		zilver		goud		lood	
		R	W	R	W	R	W	R	W
379.86	1.365	1.405		1.401	1.411	1.397		1.384	
273.1	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
169.29	0.617	0.579	0.581	0.583	0.581	0.586	0.593	0.601	0.594
77.93	0.285	0.213	0.199	0.220	0.197	0.225	0.219	0.250	0.253
20.18	0.074	0.012	0.014	0.015	0.009	0.018	0.008	0.035	0.030
13.88	0.054	0.003	0.010	0.004	0.007	0.005	0.003	0.015	0.012
4.30	0.016	0.000	[0.009]	0.000		0.000	[0.002]	0.000	

Een kwalitatieve overeenstemming ¹⁾ blijkt inderdaad te bestaan. Voor daaraan echter meer beteekenis kan worden gehecht, zou moeten blijken, dat ook de verhouding van het geleidingsvermogen voor warmte tot dat voor electriciteit bij waterstoftemperaturen ²⁾ aan de gewijzigde theorie van RIECKE voldoet ³⁾.

¹⁾ De getallen zijn alle aan de Leidsche waarnemingen (KAMERLINGH ONNES en GLAY l.c.) ontleend en hebben betrekking op de meest zuivere draden, terwijl de vermoedelijke negatieve correctie tot zuiver metaal, bevrijd van den invloed van bijmengselen en gevolgen van bewerking, achterwege is gelaten hetgeen door [] om de waarnemingen is aangeduid. De invloed van bijmengsels doet zich voor als van door het metaal verspreide (op afstanden door 't gehalte bepaald geplaatste) beletselen, die op de weglengte der vrije electronen een van de temperatuur onafhankelijken invloed uitoefenen evenals de mengkristallen in legeringen.

Schat men voor kwik naar aanleiding van het lagere smeltpunt $\alpha = 30$, zoo komt vergeleken met den naar 0° C. geëxtrapoleerden weerstand in den vasten toestand (l.c.)

T	77°,29 K.	20°,8 K.	13°,88 K.
berekend	0°,263	0°,050	0°,027
waargenomen	0°,264	0°,056	0°,033

²⁾ Metingen hiervan worden sedert eenigen tijd voorbereid.

³⁾ Het ligt voor de hand aan te nemen dat de energie der vibratoren de vermeerdering van het volume van het absolute nulpunt af bepaalt, waarmede dan de verklaring van de betrekkingen tusschen uitzetting en verandering van weerstand enerzijds, van uitzettingscoëfficiënt en specifieke warmte anderzijds in de theorie dient te worden opgenomen.

In alle gevallen schijnt het wenschelijk met de verkregen uitkomst¹⁾ bij nieuwe theoretische beschouwingen omtrent den galvanischen weerstand rekening te houden.

Gaarne betuig ik mijn hartelijken dank aan den Heer Dr. C. DORSMAx, die mij bij dit geheele onderzoek met veel oordeel ter zijde stond en aan den Heer G. HOLST die de metingen met de Wheatstonebrug met veel zorg verrichtte.

Voor de boekerij der Akademie wordt aangeboden door den Heer H. ZWAARDEMAKER een exemplaar van zijn „Leerboek der Physiologie” Deel II, stuk I.

De vergadering wordt gesloten.

1) Ook de door haar opgeworpen vraag naar de eigenaardigheden in de beweging van electronen door geleiders, wanneer de vrije weglengte zoo bijzonder groot wordt, als voorloopig aangenomen moet worden, dat zij bij inachtneming van alle voorzorgen kunnen worden gemaakt (zoodat zij bij de dikte van zeer dunne laagjes in aanmerking beginnen te komen) schijnt overweging te verdienen.

E R R A T A.

In het Verslag der vergadering van 28 Januari 1911:

p. 1056 r. 4 v. o. in pl. v. \sqrt{d} leze men ϑ_d

r. 3 v. o. in pl. v. δ_d leze men ϑ_d .

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 25 Maart 1911.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 1210.
- In Memoriam JACOBS HENDRICUS VAN 'T HOFF en JAKOB MAARTEN VAN BEMMELEN, p. 1212.
- F. A. H. SCHREINEMAKERS: „Evenwichten in het stelsel: water—natriumsulfaat—natriumchlorid—kopersulfaat—koperchlorid”, p. 1222.
- A. A. W. HUBRECHT: „De jonge kiemblaas van Eutheria en Metatheria”, p. 1236. (Met één plaat).
- G. C. J. VOSMAER: „Opmerkingen omtrent het geslacht Spirastrella”, p. 1243.
- P. VAN ROMBURGH: „Hypaphorine en het verband dezer stof met tryptophaan”, p. 1250.
- W. H. ARISZ: „Over het verband van prikkel en effect bij phototropische krommingen van kiemplantjes van Avena Sativa”. (Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en J. W. MOLL), p. 1254.
- N. L. SÖHNGEN: „Microben-lipase”. (Aangeboden door de Heeren M. W. BELFERINCK en S. HOOGWERFF), 1263. (Met één plaat).
- W. H. JULIUS en B. J. VAN DER PLAATS: „Waarnemingen betreffende anomale dispersie van het licht in gassen”, p. 1275. (Met één plaat).
- J. WOLFF: „Quadratische omwentelingscomplexen en omwentelingscongruenties (2,2)”. (Aangeboden door de Heeren JAN DE VRIES en HENDRIK DE VRIES), p. 1280.
- D. DE VRIES REILINGH: „Een nieuwe methode ter bepaling van de arteriele bloedsdrukking bij den mensch: tevens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten”. (Aangeboden door de Heeren K. F. WENCKEBACH en H. J. HAMBURGER), p. 1284. (Met één plaat).
- C. BRAAK: „De getijkrachten te Batavia volgens den astatischen seismograaf van WIECHERT”. (Aangeboden door de Heeren J. P. VAN DER STOK en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 1304.
- J. D. VAN DER WAALS: „Opmerkingen over de waarde der kritische grootheden”, p. 1310.
- H. G. CANNEGIEFER: „Ionisatie van gassen door licht, uitgestraald door GEISSLER'sche buizen. Onderzoek naar eventueel hierbij zich voordoende selectieve verschijnselen”. (Aangeboden door de Heeren W. H. JULIUS en J. P. VAN DER STOK), p. 1331.
- C. T. VAN VALKENBURG: „De oorsprong der vezel in het corpus callosum en het splaterium”. (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en C. WINKLER), p. 1337. (Met drie platen).
- C. T. VAN VALKENBURG: „Over mesencefale kern en wortel van den N. trigeminus”. (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en C. WINKLER), p. 1352. (Met één plaat).
- Vaststelling der April-vergadering, p. 1369.
- Aanbieding van een Boekgeschenk, p. 1370.
- Errata, p. 1370.

Het Proces-Verhaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgevingen van de Heeren P. P. C. HOEK en H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 9 Maart 1911 met verzoek om bericht en raad omtrent een bijgevoegde missive van Z. E. den Minister van Landbouw, Handel en Nijverheid over de wenschelijkheid der toetreding van Nederland tot de in 1875 gesloten internationale Meter-conventie.

De behandeling dezer zaak wordt aangehouden tot de volgende vergadering.

3°. Missive van Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 20 Maart 1911, met bericht dat bij Kon. Besluit van 10 Maart 1911 n°. 3 aan Dr. A. GELJ te Leiden over het loopende jaar een Rijkssubsidie is verleend van f' 2500.— ten behoeve van de door hem voorgenomen nasporingen in archieven en bibliotheken en met het verzoek de namen van de Leden der Akademie te vernemen, die bereid zijn als Commissie van Toezicht in deze op te treden. Voorts ziet de Minister gaarne voorstellen tegemoet omtrent de wijze, waarop de uitbetaling van dit subsidie kan plaats hebben en vraagt hij een opgave van de archieven en bibliotheken, die voor de nasporingen van Dr. GELJ in aanmerking komen.

Zal in de buitengewone vergadering behandeld worden.

4°. Missive van Z. E. den Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel dd. 20 Maart 1911 ten geleide van een afschrift van een rapport, uitgebracht door het Hoofd van den phytopathologischen Dienst aan den Directeur-Generaal van den Landbouw inzake eene internationale bestrijding van plantenziekten.

Hoewel de Minister geen antwoord of nader advies vraagt, meent de Voorzitter dit schrijven niet gewoon als kennisgeving te moeten aannemen, doch het met de bijlage te moeten stellen in handen van de commissie, die het vorige jaar benoemd werd om te adviseeren over het voorstel, gedaan in een der zittingen van de 4^{de} algemeene vergadering der Internationale Associatie der Akademiën te Rome gehouden, om een internationale samenwerking in 't leven te roepen

voor de bestrijding van de ziekten der cultuurplanten, welk advies den Minister toen werd medegedeeld. Aan deze commissie, die oorspronkelijk samengesteld was uit de Heeren HUGO DE VRIES, M. W. BELJERINCK en W. BURCK, ontviel de laatste door den dood, zoodat de Voorzitter deze opengevallen plaats thans wenscht aan te vullen door de benoeming van den Heer F. A. F. C. WENT tot lid der commissie. De Heer WENT neemt deze benoeming aan.

5°. Uitnoodiging van het Bestuur van den „Verein für Naturkunde“ te Cassel tot bijwoning van de feestelijke herdenking van het 75-jarig bestaan van dat Genootschap op 23 April a.s.

Daar geen der leden zich als vertegenwoordiger der Akademie beschikbaar stelt, zal de uitnoodiging met een schriftelijken gelukwensch beantwoord worden.

6°. Kennisgevingen van het overlijden van het Correspondeerend Lid der Akademie J. H. VAN 'T HOFF te Steglitz-Berlijn en van het rustend lid der Akademie J. M. VAN BEMMELEN te Leiden, overleden respectievelijk 1 en 13 Maart j.l.

Beide kennisgevingen zijn met een brief van rouwbeklag beantwoord.

De Voorzitter zegt naar aanleiding daarvan het volgende:

Mijne Heeren!

Op nieuw, weinige maanden slechts na den dood van BUREK en TREUB, hebben wij het droevige verlies te betreuren van twee mannen die de eer van Nederland op wetenschappelijk gebied hoog hebben gehouden en die het ons een voorrecht is geweest onder onze medeleden te tellen.

In

JACOBUS HENDRIKUS VAN 'T HOFF,

den 1^{sten} Maart te Steglitz bij Berlijn overleden, ontviel ons een dier zeldzaam bevoorrechten, aan wie het gegeven is, dieper dan anderen in het wezen der dingen te zien en op elk vraagstuk dat zij behandelen, den stempel van hun vernuft te drukken. Zoo deed hij met rijpe ervaring in den bloeitijd van zijn werken, maar vroeger ook reeds, met al de stoutmoedigheid en het blijde vertrouwen der jeugd.

Nadat hij op 17-jarigen leeftijd — hij was op 30 Augustus 1852 te Rotterdam geboren — als student aan de Polytechnische School te Delft was ingeschreven en na twee jaren het examen als technoloog had afgelegd, bracht hij een jaar te Leiden door en werkte vervolgens eenigen tijd bij KÉKULÉ te Bonn en bij WURTZ te Parijs. Van daar teruggekeerd, voltooide hij zijne studiën onder leiding van MULDER te Utrecht, alwaar hij in 1874 promoveerde met een proefschrift: „Bijdrage tot de kennis van cyaanazijzuur en malonzuur.” Van meer beteekenis dan dit was echter zijn eenige maanden te voren uitgegeven „Voorstel tot uitbreiding der tegenwoordig in de scheikunde gebruikte structuurformules in de ruimte; benevens een daarmee samenhangende opmerking omtrent het verband tusschen optisch actief vermogen en chemische constitutie van organische verbindingen.” Het kleine geschrift zal altijd gedenkwaardig blijven, want het bevatte de kiem der thans tot zoo

groote ontwikkeling gekomen stereochemie. De theorie van het „asymmetrische koolstofatoom” werd er in uiteengezet, met behulp daarvan de verklaring gegeven van isomerieën die de oude structuurformules onopgehelderd lieten, en in aansluiting aan de denkbeelden die HERSHELL, PASTEUR en RAMMELSBERG over de draaiing van het polarisatievlak in kristallen hadden uitgesproken, werd het nauwe verband tusschen de optische activiteit en de aanwezigheid van een asymmetrisch koolstofatoom aangewezen. Op grond hiervan voorspelt VAN 'T HOFF de constitutie van de eenvoudigst samengestelde optisch actieve koolstofverbindingen uit verschillende klassen, en leidt hij de structuurformule van eenige lichamen af. Hij paste ook aanstonds zijne theorie op verbindingen met dubbel gebonden koolstofatomen toe, zoo op het maleïne- en fumarzuur, ter verklaring hunner isomerie.

Het ging met deze verhandeling zooals het meer gaat wanneer geheel nieuwe, tegen de heerschende opvattingen indruisende denkbeelden worden uitgesproken — en dit was hier in hooge mate het geval —; zij trok slechts weinig de aandacht. De victorie begon eerst het volgend jaar met de „Chimie dans l'espace”, en vooral met de in 1877 verschenen Duitse vertaling daarvan: VAN 'T HOFF was inmiddels leeraar aan de Veeartsenijschool te Utrecht geworden.

Later, in zijne „Dix années dans l'histoire d'une théorie”, kon hij erop wijzen dat alle tegenstand glansrijk was overwonnen. Hij liet niet na alle recht te laten wedervaren aan LE BEL, die onafhankelijk van hem tot soortgelijke denkbeelden was gekomen, en dankbaar den steun te gedenken, dien WISLICENUS aan de nieuwe theorie had geschonken. En thans, in onze dagen, wij weten allen hoe de stereochemie der koolstof — weldra gevolgd door die der stikstof, waartoe de stoot eveneens van VAN 'T HOFF uitging — een welgevestigd hoofdstuk, van groote beteekenis voor de geheele scheikunde is geworden.

Het zijn uit den aard der zaak slechts enkele hoofdzaken, die in dit korte overzicht der helaas nu afgesloten roemrijke wetenschappelijke loopbaan op den voorgrond kunnen worden

gebracht. In de „Etudes de dynamique chimique” van 1884 zien wij VAN 'T HOFF eene geheel nieuwe richting inslaan. Het is de eerste groote stap op het gebied der physische chemie, waaraan hij verder zijn leven zou wijden. Het onderwerp is het vraagstuk van het scheikundig evenwicht. Breed is de opzet, overstelpend bijna de rijkdom aan gedachten, nu eens geheel uitgewerkt, dan weder vluchtig aangeduid. Ik bepaal mij er toe, U te herinneren aan de fundamenteele onderscheiding der verschillende soorten van evenwicht, aan de welgeslaagde experimenteele bevestiging van de theoretisch afgeleide evenwichtsvoorwaarden, en bovenal aan de algemeene thermodynamische betrekking tusschen de omzettingswarmte en de verschuiving van het evenwicht bij temperatuurverandering. In woorden drukte VAN 'T HOFF het zóó uit: „tout équilibre entre deux états différens de la matière se déplace par un abaissement de la température, du côté de celui des deux systèmes dont la formation développe de la chaleur”.

In nauw verband met de „Etudes” staat de verhandeling van 1886, „L'équilibre chimique dans les systèmes gazeux ou dissous à l'état dilué”. Wij geven haar eene eereplaats omdat met haar de theorie der verdunde oplossingen begint. Ten einde ook op deze op eene dergelijke wijze als op gasvormige stelsels de wetten der thermodynamica te kunnen toepassen, bedient hij zich hier voortdurend van het begrip van den „osmotischen druk”. Hij toont aan dat deze in genoegzaam verdunde oplossingen evenredig met de concentratie en met de absolute temperatuur moet zijn, dat hij dus door eene formule kan worden voorgesteld, die zich alleen door een zekeren coëfficiënt i van de formule voor den druk van een gas onderscheidt, een coëfficiënt die nu verder ook in de vergelijkingen voor het chemisch evenwicht voorkomt. Hij bepaalt dezen coëfficiënt op verschillende wijzen, o. a. met behulp van RAOULT'S uitkomsten over de vriespuntsverlaging, van de dampspanning en van de bekende waarnemingen van HUGO DE VRIES. In sommige gevallen wordt $i = 1$, zoodat de osmotische druk even groot wordt als de gasdruk bij gelijk aantal molekulen per volume-eenheid; in andere gevallen wordt eene

grootere waarde verkregen. Nadat ARRHENIUS hiervan de interpretatie had gegeven, die ik niet nader behoef aan te duiden, was de weg gebaad om zeer uiteenlopende verschijnselen op scheikundig, natuurkundig en biologisch terrein op eene wijze waaraan men vroeger niet had durven denken, te overzien.

In 1896 verwisselde VAN 'T HOFF het hoogleeraarsambt aan de Amsterdamsche Universiteit, dat hij 18 jaren lang bekleed had, met een professoraat te Berlijn, verbonden met het lidmaatschap van de Akademie der Wissenschaften aldaar. Rijpelijk overwoog hij, zooals hij ons in een zijner werken verhaalt, welke richting hij thans, onder omstandigheden waarin hij zich zoo goed als uitsluitend aan wetenschappelijken arbeid kon wijden, zou volgen. De keus viel op de bestudeering van het ontstaan der oceanische zoutafzettingen, zooals die te Stassfurt en op andere plaatsen gevonden worden. Aan dit omvangrijke vraagstuk, tot welks behandeling zijne onderzoekingen over de vorming van dubbelzouten hem hadden voorbereid, heeft hij, bijgestaan door vele leerlingen en tot 1905 toe in vereeniging met MEYERHOFFER, jaren lang onverpoosd gewerkt. Hij slaagde erin zijn programma, ondanks de groote moeilijkheden die in de vertragingverschijnselen gelegen waren, geheel tot uitvoering te brengen, en mocht de voldoening hebben, tot het tot stand komen eener goed ingerichte organisatie mede te werken, waardoor het verdere onderzoek op dit gebied verzekerd is. Dit laatste deel van zijn levenswerk zal steeds een merkwaardig voorbeeld blijven van de toepassing der in het laboratorium verkregen of uit theoretische overwegingen afgeleide uitkomsten op werkingen die in de natuur op groote schaal hebben plaats gehad.

VAN 'T HOFF werd in 1885 tot lid dezer Afdeeling gekozen en na zijn vertrek uit Nederland stelden wij er hoogen prijs op, dat hij als corresponderend lid aan onze Akademie verbonden bleef. Wij hebben ons verheugd over den gelukkigen voortgang zijner onderzoekingen, en over de bewijzen van waardeering die hem van vele zijden ten deel vielen. Menigeen onder de Nederlandsche vakgenooten bleef persoonlijke betrek-

kingen met hem onderhouden, die thans tot de kostbaarste herinneringen behooren. Hij van zijn kant voelde zich bij voortdoring nauw met het vaderland verbonden, getuige o. a. zijne bijdrage tot het aan VAN BEMMELEN bij gelegenheid van diens 80sten verjaardag aangeboden Gedenkboek. In dat opstel, een der allerlaatste van zijne hand, geeft hij een overzicht van het te Berlijn verrichte onderzoek. Hij knoopt dat vast aan eene voorspelling door VAN BEMMELEN in 1889 in zijne rectorale rede uitgesproken, treffend eerbetoon voorzeker aan den ouderen vakgenoot. Weemoedig doet ons aan wat hij in het overigens in opgewekte stemming geschreven artikel van zijne in de laatste jaren verzwakte gezondheid zegt; met weemoed ook lezen wij thans van zijn plan om zich, na van het zoutvraagstuk afscheid genomen te hebben, in zijn nieuwe laboratorium op het domein Dahlem, dat wel zijn laatste zou zijn, met onderzoekingen in geheel andere richting bezig te houden. Deze onderzoekingen, die op de synthetische fermentwerking betrekking zouden hebben, heeft hij helaas nauwelijks mogen ter hand nemen, en thans heeft zijn heengaan de wetenschappelijke wereld in diepen rouw gedompeld. Wij deelen van ganscher harte in dien rouw, maar ook in de dankbaarheid voor het licht dat hij heeft ontstoken, en voor de nieuwe wegen, veelbelovend en vèrreikend, die hij heeft ontsloten.

Terwijl VAN 'T HOFF werd weggenomen op een leeftijd waarop hij nog veel voor de wetenschap had kunnen doen, bleef

JACOB MAARTEN VAN BEMMELEN

tot op hoogen ouderdom voor ons gespaard, ons de onvergetelijke herinnering nalatend aan een werkkracht en werklust die ondanks het klimmen der jaren bijna tot aan het einde toe onverflauwd bleven. Te Almelo op den 3den November 1830 geboren, bracht hij zijne jeugd te Leiden door, waar hij in 1847 als student werd ingeschreven en 7 jaren later promoveerde met een proefschrift „de Cibotio Cumingii”. Twee jaren te voren was hij als assistent aan het laboratorium van VAN KERCKHOFF te Groningen verbonden. Hij is dat tot in 1860 gebleven en gewaagde in later jaren steeds met groote dankbaarheid en ingenomenheid van den invloed dien VAN KERCKHOFF op zijne vorming als chemicus had gehad.

Intusschen brak weldra een tijd aan, waarin hij zijne krachten tusschen wetenschappelijk werk — dat hij steeds volhield — en andere plichten moest verdeelen. In 1856 werd hij benoemd tot leeraar in natuur- en scheikunde aan de „Akademie Minerva”, kort daarna tot leeraar aan de Landhuishoudkundige School te Groningen, en in 1864 werd hem het directoraat der Hoogere Burgerschool te Groningen opgedragen, welken werkkring hij in 1869 voor een gelijksoortigen te Arnhem verliet.

Na deze voorbereiding mocht men verwachten dat VAN BEMMELEN, toen hij in 1874 als hoogleeraar in de anorganische scheikunde naar de Rijksuniversiteit te Leiden werd beroepen, zich met hart en ziel, niet alleen aan zijne eigen onderzoekingen, maar ook aan de opleiding zijner leerlingen zou wijden. Hoeveel men in dit opzicht aan hem te danken heeft, weet ieder die van nabij met de verhouding tusschen hem en wijlen BAKHUIS ROOZEBOOM bekend is geweest. Door

zijn bezielenden invloed op tal van jonge scheikundigen, door de aanmoediging en ondersteuning die hij hun schonk, heeft VAN BEMMELEN in hooge mate tot den bloei der physische chemie in ons vaderland bijgedragen.

Doorloopen wij de lange lijst zijner eigen geschriften, die zich over meer dan eene halve eeuw uitstrekt, dan treft ons zijne buitengewone vruchtbaarheid en de veelheid der onderwerpen die hij heeft bestudeerd. Uit den rijken voorraad kan slechts hier en daar een greep worden gedaan. Ik laat de onderzoekingen die bovenal zijn naam zullen doen voortleven, voor het oogenblik nog rusten en begin met U eraan te herinneren, hoe VAN BEMMELEN steeds voor de toepassing van zijne wetenschap op vraagstukken van maatschappelijk belang een open oog heeft gehad. Wij vinden het verslag van talrijke onderzoekingen van drinkwater en van de lucht, dit laatste in verband met het ventilatievraagstuk, waarmede hij zich met algemeen bekend goed gevolg heeft bezig gehouden. In het bijzonder echter trok de landbouwscheikunde hem aan. Ik wijs op zijne verhandeling „De verbetering der zure gronden in den Haarlemmermeer (1850, in samenwerking met J. BOEKER)”, zijne „Bouwstoffen tot de kennis van de kleigronden in de provincie Groningen (1863)”, zijne opstellen „Over de samenstelling en den aard der grondsoorten, die voor de meekrapcultuur geschikt zijn (1864)”, „Bodenuntersuchungen in den Niederlanden (1866)”, „Scheikundig onderzoek van terpaarde (1868)”, en „Oorzaken der nadeelige gevolgen van eene overstroming van bouw- en weilanden door zout water (1874)”. Door deze onderzoekingen had hij weldra den naam verworven, de beste kenner van de scheikunde der akkeraarde te zijn, en herhaaldelijk wendde men zich dan ook tot hem om voorlichting op dit gebied. Nadat hij reeds in 1867 een groot aantal monsters aarde uit de Zuiderzee, verzameld door STIELTJES en BELJERINCK, geanalyseerd had, deed hij later een uitvoerig onderzoek naar de samenstelling der monsters bij nieuwe boringen in 1875 verkregen: de uitkomsten daarvan werden bekend gemaakt in

eene bijlage van het Wetsontwerp tot bedijking en droogmaking van het zuidelijk gedeelte der Zuiderzee, in 1877 door den Minister HEEMSKERK ingediend. Ook dergelijke onderzoekingen over den drooggemalen Legmeerpolder, over de aardmonsters uit het Wieringermeer, over de vermoedelijke vruchtbaarheid van den Vinkeveen-Proostdij-polder na de ontvening en droogmaking, en vooral de verslagen over den bodem der IJpolders, van 1873—78 aan het Bestuur der Amsterdamsche Kanaalmaatschappij uitgebracht, moeten hier vermeld worden. De wetenschappelijke inzichten tot welke dit alles hem bracht, werden uiteengezet in de „Bijdragen tot de kennis van den alluvialen bodem in Nederland”, in de werken onzer Akademie opgenomen.

In de geologie van Nederland, met welke de vermelde werkzaamheden hem in nauwe aanraking brachten, heeft VAN BEMMELEN steeds levendig belang gesteld. Toen in 1886 de vraag van de vervaardiging eener nieuwe aan de eischen van den tijd beantwoordende geologische kaart, waarop reeds STARING in het laatst van zijn leven had aangedrongen, opnieuw aan de orde kwam, maakte hij deel uit van de commissie die geroepen werd hieromtrent te adviseeren. Gij weet dat het plan op te groote bezwaren afstuitte, maar dat aan de geologische commissie werd opgedragen, er voor te waken dat de uitkomsten bij grondboringen en terreininsnijdingen verkregen, niet zouden verloren gaan, en in het algemeen zooveel mogelijk bouwstoffen te verzamelen voor de kaart die men eenmaal hoopt tot stand te brengen. VAN BEMMELEN is van 1892 af tot in de laatste maanden van zijn leven secretaris der commissie geweest en heeft ook aan hare bemoeiingen met de hem steeds eigene voortvarendheid en ijver deelgenomen.

Mag men reeds op grond van het in herinnering gebrachte het „bene meruit de patria” ten volle op VAN BEMMELEN toepassen, mij rest nu nog dat deel van zijn werk te herdenken, dat uit zuiver wetenschappelijk oogpunt het allerbelangrijkste is. Inderdaad, het was hem gegeven, in zijne oorspronkelijk

op praktische belangen gerichte studiën het uitgangspunt te vinden voor proefnemingen en beschouwingen die hem een blijvende eereplaats in zijne wetenschap verzekeren. Al vroeg werd zijne aandacht getrokken door het vermogen der akker-aarde om zuren, basen en zouten uit eene oplossing in zich vast te leggen, en kwam hij er toe, deze „absorptie” aan de in de aarde voorkomende colloïdale stoffen toe te schrijven. Zoo werd hij er toe gebracht, van deze colloïden elk afzonderlijk, en ook van vele andere die niet in de aarde worden gevonden, de eigenschappen na te gaan, en de wijze vast te stellen, op welke zij zich met andere zelfstandigheden, inzonderheid ook met water, verbinden. Hoe het colloïdale kiezel-zuur, tinzuur, chroomoxyde, koperoxyde, de colloïdale aluin-aarde, om van andere niet te spreken, zich gedragen, als zij in water zijn opgelost of als „gels” daarnit worden afgescheiden, heeft hij met onuitputtelijk geduld tot in de kleinste bijzonderheden nagespeurd. Het werd het hoofdwerk van zijn gevorderden leeftijd en het heeft uitkomsten opgeleverd, die van het hoogste belang zijn voor onze kennis van de materie in dezen raadselachtigen toestand, een toestand, die thans allerwege bij schei- en natuurkundigen, en niet minder bij de biologen de aandacht trekt.

Aan VAN BEMMELEN heeft men het inzicht te danken in die eigenaardige chemische verbindingen, door hem „absorptie-verbindingen” genoemd, die de colloïdale stoffen ons aanbieden, verbindingen die niet naar vaste verhoudingen worden gevormd, maar waarin toch omzetting en vervanging naar bepaalde door hem aan het licht gebrachte regels plaats hebben. Bij de ontwarring der ingewikkelde verschijnselen bewees hem de leer van het scheikundig evenwicht goede diensten en onder de verkregen uitkomsten verdienen vooral ook die omtrent de structuur der gels en de ontdekking der merkwaardige hysteresis bij het opnemen en afstaan van water opzettelijke vermelding.

VAN BEMMELEN werd in 1873 tot lid onzer Afdeeling gekozen en was steeds, ook nadat hij tot de rustende leden was

overgegaan, een trouw bezoeker onzer vergaderingen. Alleen in het laatste vijftal jaren moesten wij hem daarin missen. Echter zette hij, zoo lang zijne krachten het maar eenigszins toelieten, zijne onderzoekingen voort, waarin hij troost vond voor het leed dat zijn levensavond verduisterde. Nog op 79-jarigen leeftijd bood hij eene mededeeling over de daling van den bodem van Nederland, de laatste die wij van hem mochten ontvangen, voor het verslag onzer zittingen aan.

Wij allen, in het bijzonder de talrijke vrienden die hij onder ons had, vernamen met blijdschap van de erkenning die zijne denkbeelden allerwege meer en meer vonden. Wij brengen thans eene eerbiedige hulde aan zijne nagedachtenis.



Scheikunde. — De Heer SCHREINEMAKERS doet eene mededeeling:
*„Evenwichten in het stelsel: Water — Natriumsulfaat —
 Natriumchlorid — Kopersulfaat — Koperchlorid.”*

I. INLEIDING.

In eene vorige mededeeling¹⁾ heb ik de evenwichten besproken, die in het stelsel: Water — Ammoniumsulfaat — Ammoniumchlorid — Kopersulfaat-Koperchlorid bij 30° optreden. Ik heb thans in dit stelsel de ammoniumzouten door de overeenkomstige natriumzouten vervangen. Dit heeft tengevolge dat de evenwichten meer samengesteld worden en tevens dat hun vorm meer afhankelijk is van de temperatuur. Ik heb daarom dan ook dit stelsel bij verschillende temperaturen nl. bij 35°, 25° en 15° onderzocht.

Op het eerste gezicht zou men kunnen denken dat het stelsel uit vijf componenten opgebouwd is; dit is echter, daar tusschen vier dezer stoffen de reactie:



optreedt, niet het geval. Wij hebben dus slechts met een quaternair stelsel te maken, waarin dubbele ontleding optreedt.

Om de evenwichten in dit stelsel voor te stellen nemen wij een vierkant; zijn hoekpunten geven de vier stoffen CuSO_4 , CuCl_2 , Na_2SO_4 en Na_2Cl_2 aan en wel zoo, dat het sulfaat van het eene metaal door een diagonaal met het chlorid van het andere metaal verbonden wordt. In het snijpunt der diagonalen nemen wij loodrecht op het vierkant de as, waarop het watergehalte der fasen wordt uitgezet.

2. ISOTHERME VAN 35°.

De bij 35° optredende evenwichten zijn in fig. 1 schematisch voorgesteld. De zijden van het vierkant zijn weggelaten; slechts een deel der diagonalen met hun snijpunt *H* is geteekend. Verder is niet de ruimtevoorstelling der evenwichten, maar hun projectie op het vierkant geteekend.

Wij zullen eerst de vier ternaire evenwichten beschouwen.

a. Het stelsel: water — Na₂SO₄ — NaCl.

Als vaste fasen treden bij 35° slechts het Na_2SO_4 en het NaCl op. De isotherme bestaat dus uit slechts twee takken nl. uit de verzadigingslijn van het Na_2SO_4 en uit die van het NaCl . De eerste

¹⁾ Deze Verslagen (1909—1910) 586.

is door ak , de tweede door hk voorgesteld. Punt a stelt dus de oplosbaarheid voor van het Na_2SO_4 , h die van het NaCl in water; het snijpunt k is de oplossing, die tegelijk met beide zouten verzadigd is.

b. Het stelsel: water — NaCl — CuCl_2 .

Bij 35° treden als vaste fasen op: NaCl en $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. De isotherme bestaat dus uit twee takken: hg is de verzadigingslijn van het NaCl , $f'g$ die van het $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Punt h stelt dus de oplosbaarheid voor van het NaCl , f' die van het $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ in water; g is de oplossing, die tegelijk met beide zouten in evenwicht is.

c. Het stelsel: water — CuSO_4 — CuCl_2 .

Ook in dit stelsel treden bij 35° slechts twee vaste fasen op, nl. $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ en $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. De verzadigingslijnen dezer zouten zijn door de en $f'e$ aangegeven, zoodat oplossing e met



verzadigd is.

d. Het stelsel: water — Na_2SO_4 — CuSO_4 .

In dit stelsel treden drie vaste stoffen op, namelijk: $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, Na_2SO_4 en een dubbelzout: $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

De verzadigingslijn van het Na_2SO_4 is door ab , die van het $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ door cd en die van het dubbelzout door bc voorgesteld. Oplossing b is dus met Na_2SO_4 en dubbelzout, oplossing c met $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ en dubbelzout verzadigd.

e. Het quaternaire stelsel.

Als vaste fasen treden in dit stelsel bij 35° op: NaCl , Na_2SO_4 , $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ en het dubbelzout $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

Daar de met eene vaste stof verzadigde quaternaire oplossingen door een vlak in de ruimte: het verzadigingsvlak, voorgesteld worden, zoo heeft men vijf verzadigingsvlakken. Hunne projecties vindt men in fig. 1.

$f'gmnec$ is het verzadigingsvlak van het $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

$hgmllk$ „ „ „ „ „ NaCl

$abllk$ „ „ „ „ „ Na_2SO_4

$dcnec$ „ „ „ „ „ $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$

$blmnce$ „ „ „ „ „ $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

Om een beter overzicht te krijgen is in de figuur op elk ver-

verzadigingsvlak de vaste stof aangegeven, waarmede de oplossingen verzadigd zijn. Ter afkorting hebben wij $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} = \text{Cu}_5$,

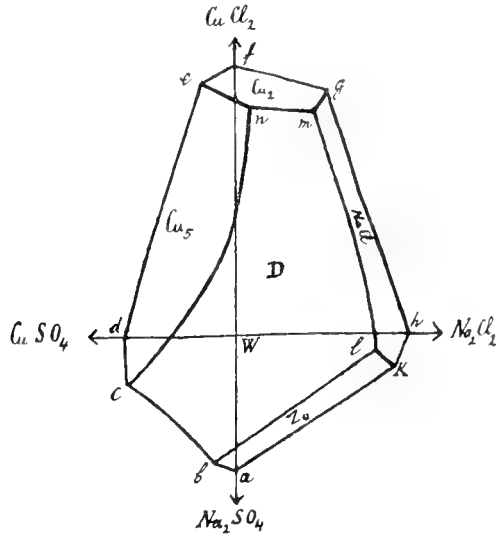


Fig. 1.

$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} = \text{Cu}_2$, $\text{Na}_2\text{SO}_4 = \text{Z}_0$ en het dubbelzout $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} = \text{D}$ gesteld.

De snijlijnen der verzadigingsvlakken zijn de verzadigingslijnen; deze stellen de oplossingen voor, die tegelijk met twee vaste stoffen verzadigd zijn. Men vindt de volgende:

<i>e n</i>	de verzadigingslijn van	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
<i>n m</i>	„ „ „	$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
<i>m g</i>	„ „ „	$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl}$
<i>m l</i>	„ „ „	$\text{NaCl} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
<i>k l</i>	„ „ „	$\text{NaCl} + \text{Na}_2\text{SO}_4$
<i>b l</i>	„ „ „	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
<i>c n</i>	„ „ „	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

Verder heeft men drie verzadigingspunten, nl. punten, die eene oplossing voorstellen met drie vaste stoffen verzadigd. Het zijn de volgende:

<i>n</i>	verzadigd met	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
<i>m</i>	„ „	$\text{NaCl} + \text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
<i>l</i>	„ „	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{NaCl} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

Zooals uit fig. 1 gemakkelijk in te zien is, kan in tegenwoordigheid van oplossing:

$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ bestaan naast : $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast : NaCl of Na_2SO_4 ,
 $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, NaCl of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast Na_2SO_4 ,
 NaCl naast $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, Na_2SO_4 of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$,
 Na_2SO_4 naast NaCl of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ of $\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$,
 $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ naast elk der andere stoffen.

In tabel I vindt men de samenstellingen van verschillende oplossingen in Molprocenten aangegeven; ter afkorting is het dubbelzout $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ door *D* voorgesteld

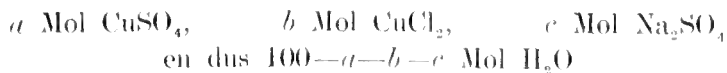
TABEL I.
 Samenstellingen in Molprocenten bij 35°.

Punt.	H ₂ O	CuSO ₄	CuCl ₂	Na ₂ SO ₄	Na ₂ Cl	Vaste phase.
<i>f.</i>	90,311	0	9,689	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>e.</i>	90,108	0,592	9,360	0	0	CuSO ₄ ·5H ₂ O + CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>g.</i>	88,387	0	8,708	0	2,905	NaCl + CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>f.</i>	90,311	0	9,689	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>e.</i>	90,108	0,592	9,360	0	0	CuSO ₄ ·5H ₂ O + CuCl ₂ ·2H ₂ O
lijn <i>e n</i>	89,795	0,669	9,034	0	0,502	" + "
<i>n.</i>	89,482	0,773	8,796	0	0,949	CuSO ₄ ·5H ₂ O + CuCl ₂ ·2H ₂ O + D
<i>n.</i>	89,482	0,773	8,796	0	0,949	CuSO ₄ ·5H ₂ O + CuCl ₂ ·2H ₂ O + D
lijn <i>n m</i>	89,039	0,437	8,705	0	1,789	CuCl ₂ ·2H ₂ O + D
<i>m.</i>	88,132	0,299	8,486	0	3,083	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl + D
<i>g.</i>	88,387	0	8,708	0	2,905	NaCl + CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>m.</i>	88,132	0,299	8,486	0	3,083	NaCl + CuCl ₂ ·2H ₂ O + D
<i>e.</i>	90,108	0,592	9,300	0	0	CuSO ₄ ·5H ₂ O + CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>d.</i>	97,079	2,921	0	0	0	CuSO ₄ ·5H ₂ O
<i>c.</i>	95,590	2,895	0	1,515	0	CuSO ₄ ·5H ₂ O + D
<i>d.</i>	97,079	2,921	0	0	0	CuSO ₄ ·5H ₂ O
<i>c.</i>	95,590	2,895	0	1,515	0	CuSO ₄ ·5H ₂ O + D
lijn <i>c n</i>	95,619	1,566	1,360	1,455	0	" + "
	95,310	2,336	0,922	0	1,432	" + "
	92,961	1,213	4,590	0	1,236	" + "
<i>n.</i>	89,482	0,773	8,776	0	0,949	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O + D

<i>c.</i>	95,590	2,895	0	1,515	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$	
<i>b.</i>	94,004	0,235	0	5,761	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{D}$	
<i>a.</i>	94,106	0	0	5,894	0	Na_2SO_4	
<i>b.</i>	94,004	0,235	0	5,761	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{D}$	
<i>b.</i>	94,004	0,235	0	5,761	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{D}$	
lijn <i>b l.</i>	94,435	0,200	0	4,080	1,285	„ + „	
	94,600	0,196	0	2,640	2,564	„ + „	
	94,420	0,267	0	1,575	3,738	„ + „	
<i>l.</i>	93,814	0,482	0	0,639	5,065	$\text{NaCl} + \text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{D}$	
<i>a.</i>	94,106	0	0	5,894	0	Na_2SO_4	
<i>k.</i>	94,130	0	0	1,041	4,829	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{NaCl}$	
<i>k.</i>	94,130	0	0	1,041	4,829	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{NaCl}$	
<i>h.</i>	94,721	0	0	0	5,279	NaCl	
<i>k.</i>	94,130	0	0	1,041	4,829	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{NaCl}$	
<i>l.</i>	93,814	0,482	0	0,639	5,065	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{NaCl} + \text{D}$	
<i>h.</i>	94,721	0	0	0	5,279	NaCl	
<i>g.</i>	88,387	0	8,708	0	2,905	$\text{NaCl} + \text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	
lijn <i>l m.</i>	<i>l.</i>	93,814	0,482	0	0,639	5,065	$\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{NaCl} + \text{D}$
		93,419	0	1,218	0,758	4,605	$\text{NaCl} + \text{D}$
		93,023	0,550	1,606	0	4,821	„ + „
		92,089	0,445	3,177	0	4,239	„ + „
		91,195	0,389	4,506	0	3,940	„ + „
	89,923	0,311	7,559	0	3,107	„ + „	
<i>m.</i>	88,132	0,299	8,486	0	3,083	$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl} + \text{D}$	

Bij de beoordeeling van de opgegeven samenstellingen der oplossingen bedenke men dat deze op verschillende wijzen uitgedrukt kunnen worden.

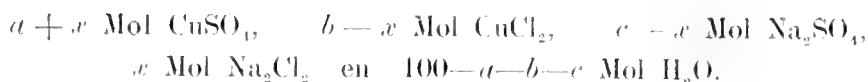
Nemen wij eene oplossing, die:



bevat. Tengevolge der betrekking:

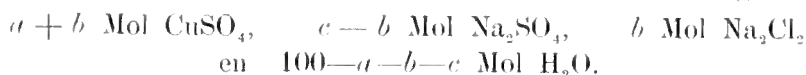


kan men dan eveneens voor de samenstelling schrijven:



Men ziet hieruit dat op deze wijze de samenstelling eener phase op een oneindig aantal manieren uitgedrukt worden kan.

Is $b < c$ en stelt men $x = b$, dan wordt de samenstelling:



3. DE ISOTHERMEN TUSSEHEN 35° EN 25° .

Verlaagt men de temperatuur dan veranderen de vlakken en verzadigingslijnen van fig. 1 eenigszins van vorm, maar de isotherme blijft tot $\pm 32.5^\circ$ ongeveer de gedaante van fig. 1 behouden.

Bij 32.5° treedt namelijk eene nieuwe vaste phase op, het hydraat: $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{ H}_2\text{O}$.

Bij deze temperatuur verschijnt dus in het punt a van fig. 1 een nieuw verzadigingsvlak, dat zich bij T -verlaging uitbreidt. Bij 32° gaat het door punt b en beneden deze temperatuur krijgt de isotherme een vorm als in fig. 2 aangegeven. Deze is bij 25° bepaald.

4. DE ISOTHERME VAN 25° .

(Onderzocht met Mej. W. C. DE BAAT).

De bij 25° optredende evenwichten zijn in fig. 2 voorgesteld; deze onderscheiden zich van die in fig. 1 daardoor dat nog een nieuw verzadigingsvlak, namelijk dat van $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{ H}_2\text{O}$ optreedt. Dit vlak is in fig. 2 door $abqp$ voorgesteld; ter afkorting is $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{ H}_2\text{O} = \text{Z}_{10}$ gesteld.

Wij moeten weer eerst de vier ternaire evenwichten beschouwen.

a. Het stelsel: water - Na_2SO_4 - NaCl .

Dit stelsel onderscheidt zich bij 25° van het zelfde stelsel bij 35° doordat nog als vaste phase het hydraat $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{ H}_2\text{O}$ optreedt. De isotherme bestaat daarom uit 3 takken. ap is de verzadigingslijn van het $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{ H}_2\text{O}$, pk die van het anhydrische Na_2SO_4 en kh die van het NaCl .

De oplossing, die met $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{ H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{SO}_4$ verzadigd is, wordt dus door p , de met $\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{NaCl}$ verzadigde oplossing door k voorgesteld.

b. De andere ternaire stelsels.

Zooals uit eene vergelijking der fig. 1 en 2 dadelijk volgt, behooren de evenwichten in de stelsels: water - NaCl - CuCl_2 , water - CuSO_4 -

In plaats van drie verzadigingspunten, zooals bij 35°, vindt men er hier vier; namelijk:

n verzadigd met $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

m „ „ $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + \text{NaCl} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

l „ „ $\text{NaCl} + \text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

q „ „ $\text{Na}_2\text{SO}_4 + \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

Zooals uit fig. 2 gemakkelijk is af te leiden kan bij 25° in tegenwoordigheid van oplossing bestaan:

$\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ naast $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

maar niet naast NaCl , Na_2SO_4 of $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$.

$\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$, NaCl of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

maar niet naast Na_2SO_4 of $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$.

NaCl naast $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$, Na_2SO_4 of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

maar niet naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ of $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$.

Na_2SO_4 naast NaCl , $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

maar niet naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ of $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$.

$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ naast Na_2SO_4 of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

maar niet naast NaCl , $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$.

$\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ naast alle andere vaste stoffen.

In tabel II zijn de samenstellingen der oplossingen in Molprocenten aangegeven.

TABEL II.

Samenstellingen in Molprocenten bij 25°.

Punt. ^o	H ₂ O	CuSO ₄	CuCl ₂	Na ₂ SO ₄	Na ₂ Cl ₂	Vaste phase.
<i>f.</i>	90,695	0	9,305	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>e.</i>	90,534	0,424	9,042	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O
<i>f.</i>	90,695	0	9,305	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>g.</i>	89,014	0	8,193	0	2,793	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl
<i>g.</i>	89,014	0	8,193	0	2,793	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl
<i>m.</i>	88,922	0,284	7,994	0	2,800	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl + D
<i>e.</i>	90,534	0,424	9,042	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O
lijn <i>e n</i>	90,210	0,502	8,602	0	0,506	„ + „
<i>n.</i>	89,760	0,587	8,428	0	1,225	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O + D
<i>n.</i>	89,760	0,587	8,428	0	1,225	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O + D
lijn <i>n m.</i>	89,733	0,302	8,271	0	1,604	CuCl ₂ ·2H ₂ O + D
<i>m.</i>	88,922	0,284	7,994	0	2,800	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl + D

<i>g.</i>	89,014	0	8,193	0	2,793	CuCl ₂ ·2H ₂ O+NaCl
<i>h.</i>	94,075	0	0	0	5,25	NaCl
<i>m.</i>	88,922	0,284	7,994	0	2,800	CuCl ₂ ·2H ₂ O+NaCl+D
	89,840	0,299	6,651	0	3,210	NaCl+D
	90,700	0,353	5,510	0	3,437	" + "
	90,851	0,352	5,314	0	3,483	" + "
	91,371	0,386	4,391	0	3,852	" + "
	92,222	0,423	3,234	0	4,121	" + "
	92,924	0,491	2,126	0	4,459	" + "
	93,362	0	4,839	0,573	4,226	" + "
	93,779	0	4,167	0,621	4,433	" + "
	93,939	0	0,582	0,964	4,515	" + "
	93,857	0	0,474	1,082	4,587	" + "
	93,862	0	0,377	1,239	4,522	" + "
<i>l.</i>	93,840	0	0,371	1,269	4,520	NaCl+D+Na ₂ SO ₄
<i>h.</i>	94,75	0	0	0	5,25	NaCl
<i>k.</i>	94,122	0	0	1,163	4,715	NaCl+Na ₂ SO ₄
<i>k.</i>	94,122	0	0	1,163	4,715	NaCl+Na ₂ SO ₄
<i>p.</i>	94,60	0	0	2,57	2,83	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O+Na ₂ SO ₄
<i>p.</i>	94,60	0	0	2,57	2,83	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O+Na ₂ SO ₄
<i>a.</i>	96,57	0	0	3,43	0	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O
<i>k.</i>	94,122	0	0	1,163	4,715	NaCl+Na ₂ SO ₄
<i>l.</i>	93,840	0	0,371	1,269	4,520	NaCl+Na ₂ SO ₄ +D
<i>p.</i>	94,60	0	0	2,57	2,83	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O+Na ₂ SO ₄
<i>q.</i>	94,444	0,184	0	2,546	2,826	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O+Na ₂ SO ₄ +D
<i>l.</i>	93,840	0,371	0	0,898	4,891	NaCl+Na ₂ SO ₄ +D
	93,984	0,355	0	0,955	4,742	Na ₂ SO ₄ +D
	94,198	0,251	0	1,483	4,958	" + "
	94,468	0,200	0	2,101	3,231	" + "
<i>q.</i>	94,444	0,184	0	2,546	2,826	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O+Na ₂ SO ₄ +D
<i>a.</i>	96,57	0	0	3,43	0	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O
<i>b.</i>	95,525	0,934	0	3,541	0	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O+D

<i>b.</i>	95,525	0,934	0	3,541	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
lijn <i>bq.</i>	95,569	0,680	0	3,234	0,517	" + "
	95,515	0,580	0	3,069	0,876	" + "
	95,311	0,394	0	2,793	1,502	" + "
	<i>q.</i>	94,444	0,184	0	2,546	2,826
<i>b.</i>	95,525	0,934	0	3,541	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
<i>c.</i>	95,641	2,519	0	1,840	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
<i>c.</i>	95,641	2,519	0	1,840	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
<i>d.</i>	97,546	2,454	0	0	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
lijn <i>cn.</i>	95,641	2,519	0	1,840	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
	95,805	1,024	1,446	1,726	0	" + "
	94,659	1,406	2,313	0	1,622	" + "
	93,596	1,063	3,804	0	1,537	" + "
	91,744	0,909	5,847	0	1,500	" + "
	91,037	0,682	7,083	0	1,198	" + "
<i>n.</i>	89,760	0,587	8,428	0	1,225	$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
<i>d.</i>	97,546	2,454	0	0	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
<i>e.</i>	90,534	0,424	9,042	0	0	$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
vlak <i>D.</i>	96,405	0,687	0	2,509	0,399	D
	95,574	0,664	0	2,960	0,802	"
	94,609	0	1,831	0,852	2,618	"
	93,078	0,603	3,589	0	2,730	"

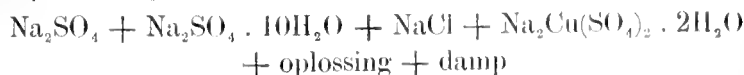
5. *De isothermen tusschen 25° en 15°.*

Bij temperatuursverlaging blijft de isotherme eerst nog een vorm als in fig. 2 behouden; de punten *b* en *c* naderen echter elkaar, eveneens de punten *p* en *k* en de punten *q* en *l*.

Bij 17,9° vallen de punten *p* en *k* samen, zoodat de verzadigingslijn *pk* van het anhydrische Na_2SO_4 verdwijnt. Het vierhoekje (natuurlijk met gebogen zijden) reduceert zich dan tot een driehoekje met de hoekpunten *q*, *l* en het punt, waarin *p* en *k* samenvallen. Bij verdere temperatuursverlaging wordt dit driehoekje kleiner en verdwijnt bij 17,4° in een punt. De oplossing, door dit punt voorgesteld, is met vier vaste stoffen verzadigd; rekt men den damp mede dan zijn er zes fasen in evenwicht, zoodat wij een sextupelpunt hebben.

Dit stelsel is, daar vier componenten in zes fasen aanwezig zijn, nonvariant.

Deze fasen zijn:



Beneden $17^\circ.4$ verdwijnt dus het verzadigingsvlak van het Na_2SO_4 en grenst dus het verzadigingsvlak van het $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ aan dat van het NaCl .

Bij verdere temperatuursverlaging schuiven de punten *b* en *c* snel naar elkaar toe; bij $16^\circ.7$ vallen zij samen. Beneden deze temperatuur verdwijnt dus het dubbelzout $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ uit het ternaire stelsel: water— Na_2SO_4 — CuSO_4 . Het dubbelzout bestaat dan nog slechts alleen in quaternaire oplossingen; de isotherme krijgt dan een vorm als in fig. 3.

6. De isotherme van 15° .

De bij 15° optredende evenwichten zijn in fig. 3 voorgesteld; deze onderscheidt zich dadelijk van die van 25° (fig. 2) door het wegvallen van het verzadigingsvlak Z_0 en door dat de verzadigingsvlakken van $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ en $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ ten deele (volgens lijn *bt*) aan elkaar sluiten. De evenwichten in de ternaire systemen water— NaCl — CuCl_2 en water— CuSO_4 — CuCl_2 behooren bij 15° nog tot hetzelfde type als bij 25° en 35° ; deze behoeven dus niet verder besproken te worden. De evenwichten in de beide andere ternaire stelsels zijn echter bij 15° anders dan bij 25° en 35° ; wij zullen deze dus eerst kort bespreken.

a. Het stelsel: water — Na_2SO_4 — NaCl .

Bij 15° treden slechts $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ en NaCl als vaste stoffen op; punt *r* is dus de met $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl}$ verzadigde oplossing. De verzadigingslijn van het NaCl is door *hr*, die van het $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ door *ar* voorgesteld.

b. Het stelsel: water — CuSO_4 — Na_2SO_4 .

Door het uitvallen van het dubbelzout $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ bestaat de isotherme slechts uit de verzadigingslijn *at* van het $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ en uit de verzadigingslijn *dt* van het $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$. Oplossing *t* is met beide zouten verzadigd.

c. Het quaternaire stelsel.

Men vindt de volgende verzadigingsvlakken:

<i>fenmg</i>	het verzadigingsvlak van het	$\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>hgmsr</i>	„ „ „ „	NaCl
<i>atusr</i>	„ „ „ „	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$
<i>dtunc</i>	„ „ „ „	$\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$
<i>usmt</i>	„ „ „ „	$\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

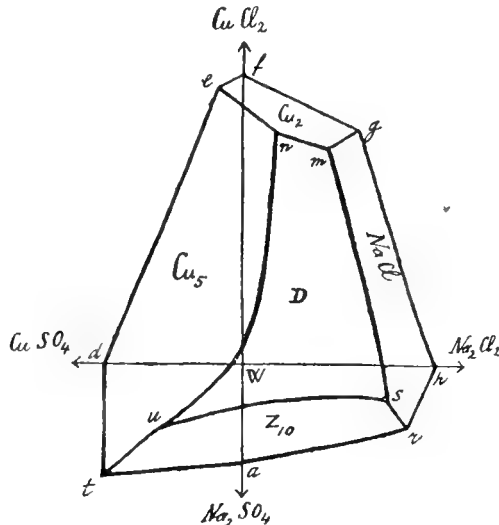


Fig. 3.

Verder vindt men de verzadigingslijnen:

<i>eu</i>	de verzadigingslijn van	$\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$
<i>mm</i>	„ „ „	$\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>mg</i>	„ „ „	$\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + \text{NaCl}$
<i>ms</i>	„ „ „	$\text{NaCl} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>sr</i>	„ „ „	$\text{NaCl} + \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$
<i>su</i>	„ „ „	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>uu</i>	„ „ „	$\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>tu</i>	„ „ „	$\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$

Tevens vindt men nog vier verzadigingspunten:

<i>u</i>	verzadigd met	$\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} + \text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>m</i>	„ „	$\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O} + \text{NaCl} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>s</i>	„ „	$\text{NaCl} + \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
<i>u</i>	„ „	$\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O} + \text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$

Zooals men uit fig. 3 gemakkelijk inzielt kan bij 15° in tegenwoordigheid van oplossing bestaan:

$\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$, NaCl of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$;
 $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ naast $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$, $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast NaCl ;
 NaCl naast $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$, $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ of $\text{Na}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$;
 $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10 \text{H}_2\text{O}$ naast $\text{CuSO}_4 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$, NaCl of $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$
 maar niet naast $\text{CuCl}_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$;
 $\text{Na}_2\text{Cu}(\text{SO}_4)_2 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ naast alle andere vaste stoffen.

In tabel III zijn de samenstellingen der oplossingen aangegeven.

TABEL III.

Samenstellingen in Molprocenten bij 15°.

Punt.	H ₂ O	CuSO ₄	CuCl ₂	Na ₂ SO ₄	Na ₂ Cl ₂	Vaste phase.
<i>f.</i>	91,066	0	8,934	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>e.</i>	91,020	0,231	8,749	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O
<i>f.</i>	91,066	0	8,934	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O
<i>g.</i>	89,519	0	7,888	0	2,593	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl
<i>e.</i>	91,020	0,231	8,749	0	0	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O
<i>n.</i>	90,023	0,455	7,959	0	1,563	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O + D
<i>g.</i>	89,519	0	7,888	0	2,593	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl
<i>m.</i>	89,509	0,259	7,661	0	2,571	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl + D
<i>n.</i>	90,023	0,455	7,959	0	1,563	CuCl ₂ ·2H ₂ O + CuSO ₄ ·5H ₂ O + D
<i>m.</i>	89,509	0,259	7,661	0	2,571	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl + D
<i>g.</i>	89,519	0	7,888	0	2,593	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl
<i>h.</i>	94,78	0	0	0	5,22	NaCl
<i>m.</i>	89,509	0,259	7,661	0	2,571	CuCl ₂ ·2H ₂ O + NaCl + D
<i>s.</i>	92,420	0,439	3,157	0	3,984	NaCl + D
<i>m s.</i>	93,448	0,557	4,164	0	4,831	„ + „
<i>ij h.</i>	93,880	0,738	0,312	0	5,070	„ + „
<i>s</i>	93,947	0,494	0	0,595	4,964	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O + NaCl + D
<i>h.</i>	94,78	0	0	0	5,22	NaCl
<i>r.</i>	94,26	0	0	0,95	4,79	Na ₂ SO ₄ ·10H ₂ O + NaCl

<i>s.</i>	93,947	0,494	0	0,595	4,964	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl} + \text{D}$
<i>r.</i>	94,26	0	0	0,95	4,79	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl}$
<i>r.</i>	94,26	0	0	0,95	4,79	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl}$
<i>a.</i>	98,36	0	0	4,64	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$
<i>s.</i>	93,947	0,494	0	0,595	4,964	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl} + \text{D}$
	94,676	0,711	0	0,365	4,248	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
lijn <i>s u.</i>	95,229	0,948	0	0,251	3,572	„ + „
	95,763	1,282	0	0,400	2,555	„ + „
	95,924	1,830	0	0,987	1,250	„ + „
	<i>u.</i>	95,901	2,038	0	1,094	0,967
<i>a.</i>	98,36	0	0	4,64	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$
<i>t.</i>	95,83	2,24	0	1,93	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
<i>t.</i>	95,83	2,24	0	1,93	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
lijn <i>t u.</i>	95,861	2,099	0	1,502	0,738	„ + „
<i>u.</i>	95,901	2,038	0	1,094	0,967	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
<i>t.</i>	95,83	2,24	0	1,93	0	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
<i>d.</i>	97,89	2,41	0	0	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
<i>u.</i>	95,901	2,038	0	1,094	0,967	$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
	95,572	2,032	0,277	0	2,419	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
	94,701	1,158	2,137	0	2,004	„ + „
lijn <i>u n.</i>	94,433	1,060	2,533	0	1,974	„ + „
	lijn	93,166	0,773	4,192	0	1,869
	92,056	0,598	5,628	0	1,718	„ + „
	91,118	0,523	6,652	0	1,707	„ + „
<i>n.</i>	90,023	0,455	7,959	0	1,563	$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O} + \text{D}$
<i>d.</i>	97,89	2,41	0	0	0	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
<i>e.</i>	91,020	0,231	8,749	0	0	$\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
vlak <i>D.</i>	93,365	0,620	3,325	0	2,681	<i>D</i>

Behalve de oplossingen zijn ook in de meeste gevallen bij 15°, 25° en 35° de bijbehorende resten geanalyseerd en hieruit met behulp van de restmethode de vaste fasen afgeleid, waarmede de oplossingen verzadigd waren.

(Wordt vervolgd).

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT doet eene mededeeling over:
„De jonge kiemblas van Eutheria en Metatheria.”

De nauwkeurige beschrijving van de vroege ontwikkeling der Marsupialia door Prof. J. P. HILL in deel 56 van het Quart. Journ. (Dec. 1910) Micr. Sc. werd vol verwachting te gemoet gezien door talrijke embryologen die, bekend met HILL's belangrijke bijdrage (gezamenlijk met WILSON) tot de kennis van de ontogenie der Monotremen, zich voorstelden, dat daarmede een soliede basis gelegd zou worden, waarop de wederzijdsche verwantschap der meer primitieve en meer gespecialiseerde zoogdieren zou kunnen worden opgebouwd. In dit opzicht is echter bovengenoemde belangrijke publicatie een teleurstelling. Verre van een volledig overzicht te geven, laat dit werk op het beperkte aantal beschikbare preparaten een licht vallen, dat het onderscheid tusschen hetgeen normaal of abnormaal is, geheel afhankelijk maakt van getalsverhoudingen, terwijl de vertegenwoordigers der zoogenaamde abnormale kiemblazen den lezer niet volkomen worden voorgelegd, noch voldoende beschreven worden om hem in staat te stellen zich een eigen oordeel te vormen.

En toch ware dit in het bijzonder gewenscht, omdat Prof. HILL, die in zijn vorige publicatie, over de placentatie van Perameles zoo bepaaldelijk de Eutheria en Metatheria nader tot elkaar heeft gebracht, in de ontwikkeling van Dasyurus redenen vindt, deze twee onderklassen weder verder vaneen te scheiden.

Onmiddellijk nadat ik met HILL's bovengenoemd werk had kennis gemaakt, stelde ik het mij tot plicht te trachten mijzelf te overtuigen, dat het bovenvermelde verschil inderdaad bestond, en ik vond in Prof. HILL's laboratorium een zeer gastvrije ontvangst en een groote liberaliteit, die mij in staat stelde alles persoonlijk te zien en te overwegen; zelfs preparaten te teekenen en te reconstrueeren, die op een van de zijne afwijkende interpretatie schenen te wijzen. Ik kan deze belangeloosheid niet genoeg op prijs stellen; aan haar is het te danken, dat op de bedoelde vraagstukken des te eerder het volle licht zal kunnen geworpen worden, dat andere onderzoekers tot zelfstandige conclusies zal mogen voeren. Ik wil dus trachten hier een kort overzicht te geven van de voornaamste verschilpunten die HILL ontdekt heeft tusschen de resultaten die hij bij Dasyurus verkreeg en mijn eigen algemeene opvattingen, die voornamelijk gebaseerd waren op mijn persoonlijke ervaring ten opzichte van de ontogenie der Eutheria.

Zonder twijfel is de klieving van Dasyurus tot aan het 16-cellige stadium van zeer bijzonderen aard, en het feit dat de 16 cellen in

twee rijen van 8 cellen gerangschikt zijn verdient ten volle de aandacht, die HILL er voor inroept. De drie eerste klievingen schijnen uitsluitend in meridionale richting plaats te hebben. Alleen de vierde klieving geschiedt in een vlak loodrecht op dat der vorige; als resultaat hiervan ontstaat een aequatoriale band van twee celgordels, de ééne gevormd door 8 kleinere cellen (die volgens HILL de formatieve helft van de kiemblaas voorstellen) en een tweede door 8 iets grootere cellen (de niet-formatieve helft).

HILL heeft zeer zeker gelijk wanneer hij nadruk legt op de navolgende punten van onderscheid tusschen dit stadium van *Dasyurus* en de morula der *Eutheria*. Ze zijn:

a. Het blastulastadium van *Dasyurus* is normaal onder en boven open, totdat (zeer spoedig daarna) zoowel de bovenste als de onderste verbreking der continuïteit zal opgehouden hebben te bestaan, dank zij de voortgaande woekering (in de richting der tegenovergestelde polen) van de cellen, die de bovengenoemde gordels samenstellen.

b. De éénbladige kiemblaas bevat *geen* embryonaalknobbel, die door alle onderzoekers, die over de kiemblaas der *Eutheria* geschreven hebben bij dezen vermeld wordt als een groep cellen, die op één plaats tegen de zich daarbuiten bevindende trophoblast liggen. Die knobbel is samengesteld uit cellen, *die het embryonale (formatieve) ektoderm zoowel als het geheele embryonale ectoderm zullen leveren.*

Bij *Dasyurus* wordt zooals HILL herhaaldelijk zegt, de weefselgroep die voor *Eutheria* zooveen geëursiveerd werd aangeduid, vervangen door hetgeen hij de formatieve hemisfeer van de holle kiemblaas noemt, die weder zelf een derivaat is van de 8 kleinere cellen, terwijl de onderste of niet-formatieve hemisfeer van de blastocyst den trophoblast der *Metatheria* voorstelt, vergelijkbaar met dien van de *Sauropsida* en *Prototheria* en *a fortiori* ook met dien van de *Eutheria*¹⁾.

1) Uit bladzijde 107 van HILL's laatste publicatie blijkt, dat hij mij verkeerd begrepen heeft als hij meent dat ik het extraembryonale ektoderm der *Sauropsida* *niet* als trophoblast beschouw. Deze vergissing kan hieraan te wijten zijn, dat HILL den verkorten tekst van mijn voordracht in Boston heeft geciteerd, terwijl mijn origineele artikel (Q. J. deel 53 p. 20, 24, 25) geen twijfel zou hebben gelaten en hem tegelijkertijd zou overtuigd hebben dat het merkwaardige verschijnsel bij *Dasyurus* — zoo voortreffelijk afgebeeld in zijn fig. 42—46, 48—50 — door mij als een schoone bevestiging verwelkomd is van mijn opvatting dat wij bij *Sauropsida* en *Ornithodelphia* het zoogenaande extraembryonale ektoderm met de geheele trophoblast der *Eutheria* moeten gelijkstellen. Hier hebben weder de Rauber'sche cellen van het konijn, van *Sorex* en andere dieren HILL op een dwaalspoor geleid, evenals vroeger BONNET; en de intercalatie van het embryonale ektoderm in de trophoblastlaag is niet voldoende in het oog gehouden, ofschoon ik bij *Tupaja*, *Tarsius*, *Sus*, *Cervus* en verscheidene andere zoogdieren daarop in het bijzonder de aandacht gevestigd heb.

Mijn eigen opvatting van de morula der Metatheria op blz. 7 van mijn onderzoek in deel 53 van het Quart. Journal, welke niet op eigen waarnemingen was gebaseerd, had als uitgangspunt SELENKA's afbeeldingen van jonge kiemblazen van Opossum, waaromtrent HILL twijfel koestert, en die hij niet als normaal wil beschouwen. Hier staan dus de twee specialisten, die ons de vroege ontwikkelingsstadia der Marsupialia hebben verklaard, lijnrecht tegenover elkaar; de een (SELENKA) beschrijft en teekent de aanwezigheid van een entodermmoedereel (Urentodermzelle) binnen in de éénbladige kiemblaas, terwijl de ander (HILL) overtuigd is, dat er normaal geen cel binnen de éénlagige kiemblaas van Dasyurus aanwezig is en dus geen moedereellen van een embryonaalknobbel, vergelijkbaar met de binnenste celmassa („inner cellmass“) der Eutheria bij de Marsupialia gevonden wordt.

Wat mij zelf betreft, heb ik mijne vergelijkende beschouwingen gebaseerd op SELENKA's gegevens (fig. 10, 11), doch heb ze anders verklaard dan hij deed, daar ik SELENKA's „Urentodermzelle“ als de moedereel niet slechts van het entoderm maar van de geheele binnenste celmassa (embryonaalknobbel) beschouw.

Het feit dat Prof. HILL één geval afbeeldt (l. c. Pl. 3 Fig. 37) waar een kiemblaas van Dasyurus één groote cel in hare holte vertoont, een geval dus dat door HILL als abnormaal wordt beschouwd, maar dat een zekeren graad van vergelijkbaarheid met de bovengenoemde afbeeldingen van SELENKA toelaat, wekte bij mij des te meer het verlangen op persoonlijk deze vroege kiemblazen van Dasyurus te leeren kennen, onder welke HILL, gelijk hij duidelijk vermeldt, behalve het geval in fig. 37 afgebeeld, nog *meer* „abnormale“ vormen is tegengekomen. Drie van deze „abnormale“ vormen zijn hier afgebeeld en bevatten, gelijk men ziet, prolifereerende cellen. In menig opzicht doen ze denken aan SELENKA's Pl. 17 fig. 11 en Pl. 18 fig. 2 waarop mijn eigen verklaring, eenigszins afwijkend van die van SELENKA, gebaseerd was.

De bij dit opstel behorende afbeeldingen (fig. 1—5) zijn ongeveer 150 maal vergroot, elk afkomstig van op elkaar volgende doorsneden van één kiemblaas, en dus voor plastische reconstructies toegankelijk. Men kan dan niet ontkennen dat sommige dezer kiemblazen een binnenste celmassa bevatten, die in het geval van fig. 1 tot 5 van zeer regelmatigen vorm is, en uit 16 cellen bestaat. In de meeste gevallen is deze massa bevestigd op één plaats aan den trophoblast zooals we bij Eutheria zien. Bovendien treft het ons, dat in fig. 1—4 de 16 cellen in een soort matrix schijnen te liggen, die volkomen gelijk is op die welke HILL in zijn fig. 37 afgebeeld en daar

cyl genoemd heeft, terwijl in dezelfde tekening (die ik hier in fig. 7a-d weergeef) die ééne cel - door HILL *abn.* (d. w. z. abnormaal) genoemd, — binnen in de kiemblaas nog geheel alleen ligt, in tegenstelling tot het 16-cellige stadium, dat ik beschreef en afbeeldde in fig. 1—15. Deze ééne cel ligt niet ingebed in de massa *cyl* maar staat er in nauw verband mede. Voorloopig wensch ik geen nadere beschrijving of verklaring te geven van deze matrix, die HILL als *coagulum* vermeldt en die ook gevonden wordt in de kiemblazen, die hij als normaal beschouwt en in welke geen celproliferatie binnen in de kiemblaas bestaat.

Ik ben niet overtuigd, dat het histologisch voorkomen van de ingesloten cellen iemand het recht kan geven ze als abnormaal te betitelen.

Desniettemin wil ik uit de beschikbare gegevens niet besluiten, dat — in tegenstelling met HILL's overtuiging — de hier afgebeelde kiemblazen *normaal* zijn en dat degene die hij als normaal beschouwt — welke *geen* binnenste celmassa bevatten en welke talrijker zijn — als *abnormaal* moeten worden opgevat. Ik wensch slechts te betoogen dat een beslissing hieromtrent vooralsnog onrijp zou zijn en dat een definitieve uitspraak noodzakelijkerwijze uitgesteld moet worden totdat het onderzoek van een veel grootere hoeveelheid kiemblazen van *Dasyurus* of *Didelphys* ons den sleutel heeft gegeven tot dit raadsel¹⁾.

De andere hier afgebeelde exemplaren zijn ontwikkelingsstadiën waarin dezelfde scheiding tusschen een buitenste trophoblast en een binnenste celmassa ook zichtbaar is. Drie ervan zijn belangrijk omdat ze nog andere stadia geven dan fig. 1—5.

In fig. 6a-g zijn doorsneden afgebeeld waarin een inwendige celmassa zichtbaar is. Nauwkeurige beschouwing leert dat de cellen die in fig. 6b-e een embryonaalknobbel s e h j u e n samen te stellen, toch tegelijkertijd deel uitmaken van de buitenste oppervlakte van de kiemblaas. Voorloopig moet het onbeslist blijven of deze doorsneden argumenten leveren om HILL's opvatting met de mijne in overeenstemming te brengen. Fig. 8 leert ons de kiemblaas kennen

¹⁾ Het zou mogelijk zijn de bezwaren tegen een directe vergelijking tusschen de „normale” en de „abnormale” kiemblazen uit den weg te ruimen door aan te nemen, dat bij *Dasyurus* in talrijke gevallen de cellen van den embryonaalknobbel zich als een platte laag uitspreiden zonder ooit overgroeid te zijn door de trophoblastcellen (een geval dat zich ook zoover wij weten bij alle reptilien en vogels voordoet) terwijl in andere gevallen diezelfde cellen een zekeren graad van ontwikkeling ondergaan binnen den kiemblaaswand en eerst later geïntegreerd worden tusschen de trophoblastcellen, zooals het op zoo verschillende wijze bij tal van *Eutheria* geschiedt.

waarin 3 of 4 cellen binnen een uitgezette trophoblast liggen, doch ook dit exemplaar geeft ons geen definitieve oplossing.

Fig. 9a d stellen een iets vroeger stadium voor dan fig. 1—5. De ingesloten cellen liggen in een overeenkomstige matrix en haar aantal bedraagt ongeveer zestien.

De grootte der ingesloten cellen ligt tusschen die van fig. 7 en 1—5. Het verschil tusschen trophoblast en binnenste celmassa is eveneens duidelijk.

Ten slotte vermeld ik nog, zonder haar af te beelden, een iets latere en veel grootere kiemblaas, waarvan de cellen, die den embryonaalknobbel schijnen te representeeren, histologisch minder volmaakt zijn dan die in fig. 1—4 en twijfel zouden kunnen verwekken of dit exemplaar al of niet als een schakel van een normale ontwikkelingsreeks mag worden opgevat.

De feiten, waarop ik de aandacht heb gevestigd, en die er ons toe leiden ons oordeel omtrent de hechtheid der fundamente van HILL's theoretische speculaties op te schorten, verhinderen ons *a fortiori* de waarde dier theoretische conclusies tegenover de mijne af te wegen en in een polemiek te treden, zooals hij dat gedaan heeft in het bovengenoemde artikel. Men mag niet uit het oog verliezen dat juist omdat de daar opgeworpen vraagstukken van fundamenteelen aard zijn, de discussie ook vóór alles degelijk en onbevooroordeeld behoort te zijn. De tegenstand, die mijn beschouwingen over den eersten oorsprong van de allantois van verschillende kanten heeft ondervonden, is grootendeels veroorzaakt door het noodzakelijk gevolg waartoe zij moesten leiden, namelijk dat geen plausible phylogenetische verklaring van den hechtsteel der Primaten en van de vrije allantois van anderen zoogdieren en van de Sauropsida mogelijk is, zoolang wij vasthouden aan de afstammingslijn, die zoo met nadruk door HILL en anderen verdedigd wordt: d. w. z. de afstamming der vivipare zoogdieren van ovipare voorouders, die voorzien waren van een ejschaal en een vrije allantois hadden.

De Prototheria (Ornithodelphia), tot welker bekendheid in ontogenetischen zin HILL zoo veel heeft bijgedragen, worden zodoende geheel buiten de directe ontwikkelingslijn van alle andere zoogdieren geplaatst. Het ligt voor de hand dat HILL in dit speciale punt een weinig bevooroordeeld is. Hij geeft in zijn bovengenoemde publicatie (p. 109 laatste paragraaf) toe, dat het éénlagige blastoderm der Prototheria onwederlegbaar de trophoblast is, doch ontkent dat de cellen die er binnen liggen in de streek van de witte dooiermassa de moedercellen zijn van den embryonaalknobbel. Ik ben geneigd te gelooven, dat de noot op p. 3 waardoor een misverstand is uit

den weg geruimd, hem er toe zal leiden dit punt nog eens te overwegen en het met mij eens te zijn, dat we ook hier ons oordeel moeten opschorten totdat meer materiaal beschikbaar is.

Ten slotte wil ik, indien mijne beschouwingen op deze laatste bladzijden over de phylogenie van de allantois aan sommigen te voorbarig toeschijnen, er op wijzen dat ik juist eene beschrijving van de allereerste stadia van *Galeopithecus* onder handen heb, die gedeeltelijk reeds ter perse is. In dit zoogdier, waarvan ik de volledige beschrijving in den herfst hoop te publiceeren — vinden we een vertegenwoordiger van een orde die zonder twijfel primitief is, in het bezit van eigenschappen tijdens de embryonale ontwikkeling die ons noodzakelijkerwijze leiden tot het besluit dat hier in de allereerste stadia een hechtsteel (Haft- oder Bauchstiel) tusschen embryonaalschild en trophoblast bestaat, die later ten gevolge van de ontwikkeling van het coeloom verdwijnt en gaandeweg vervangen wordt door een vrije allantois, ongeveer op dezelfde plaats gelegen, wier oorsprong kan teruggebracht worden tot groeiverschijnselen in den moederbodem van dezen hechtsteel zelf. Dit zou een direct en aan de ontogenie ontleend argument zijn, dat aan mijne beschouwingen steun verleent en langs anderen weg onverklaarbaar is. Ik kan echter van dit punt hier slechts ter loops melding maken.

Ik had in dit artikel wellicht eenige bezwaren tegen mijne theoretische beschouwingen kunnen weerleggen, welke MAC BRIDE in een opstel over *Amphioxus* (N^o. 215 van het *Quart. Journal*, vol. 54) heeft ontwikkeld. Ik zie hiervan af, omdat er in dit geval geen positieve feiten zijn om een antwoord op te grondvesten, zooals in het geval van Prof HILL's aanval. Bovendien, sedert het duidelijk is dat MAC BRIDE (l.c. p. 332) op zóódanige wijze mijn eigen opvatting omtrent de phylogenie van de allantois verkeerd begrepen heeft, dat hij haar als volgt formuleert: „Along the stalk of connection between embryo and vesicle the bladder subsequently grew and so the allantois was formed” is elke vruchtbare discussie omtrent mijne phylogenetische beschouwingen, van den aanvang af uitgesloten. En ik geef er de voorkeur aan om voorloopig in MAC BRIDE's laatste oordeel te berusten waar hij zegt: „Prof. HUBRECHT heeft het boek der vertebraten-ontwikkeling onderste boven gelezen,” totdat verdere bijeenhooping van feiten op beide schalen der balans ons in staat zal stellen te beoordeelen wat *ouder* en wat *boven* is.

VERKLARING DER FIGUREN.)

Fig. 1—5. *Dasyurus* N^o. 7.

1*a*—1*c*. Drie doorsnedes door kiemblaas en schaal. In *a* en *b* uitsluitend trophoblasteellen; in *c* de binnenste celmassa (embryonaalknobbel?) opgesloten in een matrix (coagulum?).

Fig. 2 en 3. De beide doorsnedes door de inwendige celmassa onmiddellijk voorafgaande aan die van fig. 1*c*.

Fig. 4*a*—4*l*. Elf opeenvolgende doorsnedes door denzelfden embryonaalknobbel; de afzonderlijke cellen genummerd ten behoeve der reconstructie van den moerbeivorm.

Fig. 5. De werkelijke reconstructie van laatstgenoemde uit de 16 cellen.

Fig. 6*a*—6*g*. *Dasyurus* N^o. 11.

Zeven doorsnedes van welke *b*—*f* werkelijk op elkaar volgen, waarin massieve cellen bijeenliggen in eene blinden hoek van de kiemblaas. Deze is aan het andere einde gesloten met 26 doorsnedes die vóór 6*a* liggen; de kiemblaas is dus éénbladig. In 6*b* is de schaal mede aangegeven.

Fig. 7*a*—7*d*. *Dasyurus* N^o. 12.

Doorsnedes door dezelfde kiemblaas met ingesloten cel die door Prof. HILL in zijn fig. 37 werd afgebeeld. De kern(?) van wat HILL het coagulum noemt heeft een geheel verschillend aspect dan die van de cel. 7*a* moet zijn plaats in de reeks vinden tusschen 7*b* en 7*c*.

Fig. 8. *Dasyurus* N^o. 9.

Een doorsnede waarin schaal, trophoblast en twee blijkbaar onafhankelijke cellen binnen den kiemblaaswand zijn afgebeeld.

Fig. 9*a*—9*d*. *Dasyurus* N^o. 8.

Vier doorsnedes door een kiemblaas die vele vergelijkingspunten met de in fig. 1—5 afgebeelde bezit. De afmetingen van de cellen der binnenste celmassa staan tusschen die van fig. 7*a* en fig. 1*c* in, het aantal is ook ongeveer 16. De matrix (coagulum) is minder regelmatig. Het aantal trophoblast cellen is 62; zij zijn geringer in aantal dan in de kiemblaas van fig. 1*c* waar wij er 192 tellen.

Fig. 10 en 11. Copiën van twee van SELENKA's afbeeldingen uit zijn Opossum-ontwikkeling (Wiesbaden Kreidel 1887) waarin wij (fig. 10) SELENKA's „Urentodermzelle" waarnemen en (in fig. 11) de tegenstelling tusschen trophoblast en inwendige celmassa; deze laatste op het punt om aan de oppervlakte te komen.

4) De nummers waarmede de *Dasyurus* preparaten in dit opstel worden aangeduid voeren in de verzameling van Prof. HILL de volgende aanwijzingen:

Dasyurus 7: 2β. 16. VII. 01. * * 39

„ 8: 2B. 16. VII. 01. 39

„ 9: 46. Picro. abn. 29. 6. 04

„ 10: 45. Herm. abn. 29. 6. 04

„ 11: 45. Herm. * 29. 6. 04

„ 12: 2B. 16. VII. 01. 397.

Dierkunde. — De Heer VOSMAER biedt eene mededeeling aan getiteld: „*Opmerkingen omtrent het geslacht Spirastrella.*”

In 1868 maakte OSCAR SCHMIDT het geslacht *Spirastrella* voor een zgn. nieuwe soort van kiezelpons, waarvan als kenmerkende eigenschap werd opgegeven, dat het in het bezit was van een „eigen-thümliche Art von strahligen Kieselkörperchen, deren Strahlen spiralgelagert sind.” Wij weten thans, dat die soort van spicula lang niet zeldzaam is en dat het geen vorm is van polyaxons, maar van monaxons; wij noemen die spicula spinispirae. Behalve deze kiezelnaalden bestaat het skelet van *Spirastrella* uit tylostyli of ook wel styli. Sinds SCHMIDT zijn *Spirastrella cunctatrix* beschreef, hebben verschillende onderzoekers talrijke „species” vermeld: in het geheel circa 44. Maar daarvan vallen reeds dadelijk tien af, omdat zij óf ten onrechte tot bovengenoemd geslacht gebracht worden, óf wel ten eenenmale ontoereikend beschreven zijn, zoodat zij niet meer te herkennen zijn.

Onder het rijke, door ons medelid MAX WEBER verzamelde, materiaal der Siboga-Expeditie bevindt zich een kleine honderd exemplaren van kiezelponzen, die ik meen dat gebracht moeten worden tot genoemd genus. Deze zijn door mij zoo nauwkeurig onderzocht als omstandigheden toelieten; bovendien heb ik een dertig- en veertigtal andere specimina onderzocht, grootendeels in het Britsch Museum te Londen, vertegenwoordigende de meeste originalia van onder verschillende namen beschreven „species”. De slotsom, waartoe dit onderzoek mij heeft geleid, is, dat wij hier met een merkwaardig veranderlijke soort te doen hebben: naar mijn overtuiging behooren 32 van de boven vermelde 34 „species”, benevens al de exemplaren der Siboga-Expeditie in werkelijkheid tot één species, die volgens de regelen der prioriteit *Spirastrella purpurea* (LMK.) Rdl. moet heeten. Beschouwt men deze exemplaren eenvoudig makroskopisch, dan ziet men verschillen zóó groot, dat een ieder een aantal soorten zal meenen te kunnen onderscheiden. Hier zijn het dunne korsten over oude koralen, kalkalgen enz.; dáár dikkere plakken met knobelvormige verhevenheden; nu eens zijn het knotsvormige gewassen of lange, vingervormig eindigende, cylindere; dan weder kegel- of pyramide-vormige stukken of wel massieve, onregelmatig spherische klompen. Nu eens zijn ze bruin of geel of grijs, dan weder fraai purper- of wijnrood. Onder de incrusteerende vormen zijn er, die slechts één of twee millimeters dik zijn; onder de massieve klompen treft men exemplaren aan van bijv. 12 bij 18 $\frac{3}{4}$ cm., ja BOWERBANK vermeldt een specimen van bijkans 2.5 meter hoogte. Nu eens is de

oppervlakte effen en zonder noemenswaardige verhevenheden, dan weder is die bedekt met wratachtige knobbels of vingervormige uitsteeksels. De zaak verandert echter indien wij wat nauwkeuriger toezien en bijv. vruchten ze naar het uiterlijk in groepen te verdeelen; dan stuit men weldra op een aantal vormen, die men niet zoo gemakkelijk kan onder dak brengen. Zoo vindt men er onder de inrusteerende vormen, die wel over het algemeen zeer dun zijn, maar toch hier en daar dikkere plaatsen vertoonen. Men ziet spoedig, dat de dunne korsten geleidelijk overgaan in de dikke plakken, of in zulke, die wratten, knobbels of vingervormige uitsteeksels vertoonen. Nu eens zijn die uitsteeksels of knobbels van ongeveer gelijke grootte en min of meer gelijkmatig verspreid, dan weder is er één hoofd-verhevenheid en daarnevens tal van kleinere vormen, die trapsgewijs leiden tot kegel- of pyramide-vormige exemplaren met veel kleinere of ook wel zonder vingervormige verhevenheden langs de helling. Of wel, de uitsteeksels worden zóó groot in verhouding tot het basaal-vlak, waarmede zij vastgehecht zijn, dat de eerste geheel en al het karakter van het individu bepalen. Bovendien merken wij nog een ander verschijnsel op, dat n.l. naburige verhevenheden met elkaar geheel of gedeeltelijk vergroeien en bijv. van een vorm met eenige duidelijke knotsvormige verhevenheden, wij geleidelijk komen tot spherische klompen.

Het blijkt uit dit alles ten duideliĳkſte, dat, hoe uitermate verſhillend het uiterlijk ook moge zijn, er allerhande overgangen worden gevonden als evenzooſe „connecting links” en dat het ondoenlijk is op grond van het uitwendig voorkomen ſoorten te onderscheiden.

Hoe ſtaat het nu echter met den inwendigen bouw? Het antwoord op deze vraag luidt, dat wij en wat betreft de configuratie van het kanaalſteel, en wat betreft den bouw van parenchym en ſkelet, en eindelijk ook wat aangaat de ſkelet-elementen of ſpicula dezelfde groote verſhillen vinden, maar ook hier alles geleidelijk in elkaar overgaande. Hier ter plaatſe kan en wensch ik dit ook niet uitvoerig na te gaan en met bewijzende platen of preparaten te ſtaven. Een enkele greep ſlechts, evenals ik dit deed met betrekking tot den uitwendigen habitus.

Kenmerkend voor *Spirastrella* is dit, dat het ſkelet opgebouwd is uit naar de peripherie zich vertakkende bundels van kiezelnaalden, hoofdzakelijk tyloſtyli, en, daartuſſchen, maar vooral als ſchors aan de oppervlakte gelegen, zigzag-vormige kiezelelementen, ſpinispirae. Hieruit beſtaat het volledig ſkelet; de laatſtgenoemde elementen echter kunnen onder bepaalde omſtandigheden uiterſt ſpaarzaam worden en zelfs, naar het ſchijnt, geheel verdwijnen. Dan is het kenmerk,

waaraan het genus zijn naam te danken heeft, afwezig¹⁾). In de werken van nagenoeg alle spongiologen vindt men, dat species o. a. onderscheiden zijn op grond van de afmetingen der spicula. Na loopen de lengte-maten der tylostyli in het onderhavige geval zeer uiteen. De maximale lengte schommelt bij de door mij onderzochte exemplaren tusschen 280 en 800 μ , de maximale diameter tusschen 5 en 30 μ . Maar het eene niterste en het andere zijn door alle mogelijke overgangen verbonden, en dus is ook hier geen grens voor specifieke onderscheidingen te trekken. Het blijkt intusschen, dat niet alle maten gelijkelijk voorkomen. In ongeveer 33 % gevallen is de maximale lengte 550 μ en meer, maar onder 600 μ ; in ongeveer 75 % gevallen 500 μ en meer, maar minder dan 650 μ . Gevallen van minder dan 350 μ en meer dan 700 μ zijn zeldzaam. En zoo vond ik in 20 % gevallen den maximalen diameter der tylostyli 16 μ en meer, maar minder dan 18 μ , in ca. 85 % gevallen 10 μ en meer, maar minder dan 22 μ ; terwijl de maten van minder dan 6 μ en meer dan 24 μ zelden voorkomen.

Nog grooter zijn de verschillen bij de spinispirae. Wij zagen reeds, dat deze kenmerkende spicula nu eens in grooten getale, dan weder uiterst spaarzaam voorkomen. Zoo vond ik bij sommige specimina, dat in één mikroskopisch preparaat der door zoutzuur of salpeterzuur geïsoleerde spicula bijv. een paar spinispirae werden aange troffen, in een ander preparaat van hetzelfde individu echter geen enkele. DENDY vond in door hem *Suberites inconstans* var. *globosa* en var. *macandrina* genoemde sponzen geen spinispirae; ik had gelegenheid DENDY's originalia, aanwezig in het Britsch Museum, te onderzoeken en vond de bewuste spicula wèl. Dit zijn geenszins op zich zelf staande feiten, maar voorbeelden uit talrijke gevallen. Hieruit volgt echter, dat, indien in eenige specimina, die in habitus geheel overeenkomen, hier wèl, dáár geen spinispirae gevonden worden, men allerminst recht heeft op grond van de aan- of afwezigheid dier spicula species, laat staan genera, te grondvesten. Het is dan ook duidelijk, dat DENDY's bovengenoemde spons geen *Suberites* maar een *Spirastrella* is.

Nu vindt men spinispirae in allerlei grootte en gedaante²⁾). In vele

¹⁾ Een verschijnsel, dat allerminst op zich zelf staat in het dierenrijk. Het mag misschien vergeleken worden met het ontbreken van een chorda bij bepaalde Chordata. Te meer, omdat ik reden heb om aan te nemen, of het althans niet onwaarschijnlijk te achten, dat genoemde spinispirae in larvalen of jeugdigen toestand aanwezig waren, bij vormen, waar zij later schijnen te ontbreken.

²⁾ Aangezien het op het oogenblik nog niet is uit te maken of wij hier met één of meer soorten van spicula te maken hebben, moeten wij wel een keuze doen; ik beschouw hen voorloopig als één soort.

exemplaren van *Spirastrella purpurea* treft men nevens zeer kleine (en toch zonder twijfel volwassen) spinispirae van bijv. gemiddeld 8 of 10 μ lengte, ook zeer groote aan, van $\pm 12 \mu$ diameter bij 75 μ lengte. In andere exemplaren worden die reuzen ten eenenmale gemist. Ik zelf meende in den aanvang mijner onderzoekingen hierin soorts-kenmerken te vinden. Maar ik heb ook dit moeten opgeven; immers, die zeer groote spinispirae bleken somtijds beneden, ja zelfs zeer ver beneden de zooveen opgegeven maten te blijven, of wel andere verhouding te bezitten van lengte en diameter, waardoor het geheele karakter verandert. Deze feiten en het feit, dat "groote" spinispirae nu eens in overvloed, dan weder zelden of zeer zelden voorkomen, en wij dus wederom alle mogelijke overgangen zien, toont ons, dat wij vooralsnog in het al of niet voorkomen der groote spinispirae geen soorten kunnen gronden. Evenmin lukt dit als men mikroskopische details tracht te gebruiken. Zoo beschreef LENDENFELD een nieuwe soort op grond van het feit, dat de doorns niet puntig eindigden maar een eigenaardige gekartelde oppervlakte vertoonden. Het is mij echter gebleken, dat bij nauwgezet onderzoek met sterke vergrootingen, dit bepaalde „Efflorescenz-artiges Aussehen" in talrijke specimina gevonden wordt.

Summa summarum: men wordt voor het dilemma geplaatst al de onderzochte vormen als tot één species behoorend te beschouwen, of wel even zoovele of nagenoeg even zoovele species te maken als men specimina onder de oogen krijgt. Ik voor mij twijfel niet welken weg men hier heeft in te slaan. Althans op dit oogenblik, nu men vergelijkend-anatomisch nog zoo bitter weinig, vergelijkend-embryologisch nog zoo goed als niets van Sponzen weet. Toch verdienen deze laagste Metazoa dat zij onderzocht worden. Al werpen zij thans weinig licht op phylogenetische vraagstukken en zullen zij als doodlopende tak van Metazoa dit misschien nooit doen, het lijdt voor mij geen twijfel, dat zij in andere opzichten wel van algemeen belang kunnen zijn. Al was het alleen om hun weefsel. Maar het veld der Porifera ligt braak voor bijna ieder, die zich niet in het bijzonder met deze wezens heeft afgegeven. Niet geheel zonder reden, want er liggen veel voetangels en klemmen.

Al kunnen wij dan voorloopig slechts één soort onderscheiden, de vraag moet toch gesteld worden of zekere groepen van exemplaren wellicht nader verwant zijn, meer op elkaar gelijken, dan ten opzichte van andere. Speelt hier de diepte of de aard van den bodem waarop zij gevonden zijn een rol? De eerste vraag kan bevestigend beantwoord worden; de tweede nog niet. Ik geloof inderdaad, dat men een zevental groepen kan onderscheiden, die echter alle innig

op allerhande wijze met elkaar samenhangen. Indien men nu zulke groepen onderscheidt naar de vereeniging van een zeker aantal kenmerken, en deze onderling waarschijnlijk nader verwante vormen tracht te toetsen aan de omstandigheden, waaronder zij leefden, dan blijken hieruit weinig gevolgtrekkingen te maken te zijn, althans voor iemand, die niet voldoende vertrouwd kan zijn met die omstandigheden. Zooveel is echter wel zeker, dat er onder het Siboga-materiaal van éénzelfde vindplaats somtijds zeer verschillende exemplaren afkomstig zijn, waardoor men nog niet van zgn. locale variëteiten kan spreken.

De algemeene bouw van *Spirastrella purpurea* biedt, nevens groote verschillen, toch in hoofdzaak hetzelfde beeld. Ik wil dien bouw van één vorm schetsen n.l. van een exemplaar, dat overeenkomt met *Suberites inconstans* var. *digitata* van DEXDR. Een longitudinale snede door een der lange vingervormige uitloopers toont ons een centrale min of meer cylindrische holte, die aan den top in den regel een opening heeft. Dergelijke centrale wijde kanalen vindt men zeer vaak bij Porifera. De opening wordt „osculum” genoemd en het kanaal wordt beschouwd als uitstrooingskanaal. Men heeft n.l. bij een aantal Sponzen gedurende het leven waargenomen, dat uit die groote opening water stroomt, terwijl dit door talrijke veel kleinere openingen wordt ingezogen. Mikroskopisch onderzoek van zulke Sponzen heeft aangetoond, dat de laatste (kleine) openingen in gemeenschap staan met zich vertakkende kanalen en holten, welke ten slotte uitloopen in, of althans in gemeenschap staan met, eigenaardige ruimten, waarvan de wand bekleed is met trilhaar-dragende cellen, choanocyten, en die daarom trilkamers worden genoemd. Anderzijds staan nu deze trilkamers in rechtstreeksche gemeenschap met een stelsel van kanalen en holten, die ten slotte uitmonden in de bovengemelde centrale holte, welke met het „osculum” eindigt. Het is duidelijk, dat de waterstroom door de trilharen wordt te weeg gebracht. Nu vond men, dat de vorm der trilkamers en de plaatsing der choanocyten zóó zijn, dat de richting van den waterstroom er door wordt bepaald. Wij mogen hieraan een recht ontleenen om uit den vorm van een trilkamer te besluiten, welk der beide kanalen, waarmede zij in gemeenschap staat, toevoerend en welk afvoerend is. Zóó kan men uit reeksen van doorsneden het geheele kanaalstelsel opbouwen. Voor een aantal Sponzen is dit geschied; maar voor een veel grooter aantal nog niet. Waar men nu vond, dat de centrale holte steeds afvoerend bleek te zijn, heeft men eenvoudig voor andere, niet nader onderzochte Porifera, per analogiam besloten tot gelijkheid. Bij *Spirastrella purpurea* rezen echter bij nauwkeurig vergelijkend onderzoek

bezwaren tegen de opvatting van het centraal-kanaal als afvoerend vat. Immers bij vele exemplaren eindigde het centrale kanaal wel met een tamelijk wijde opening, maar bij anderen was die opening klein. Wat echter meer zegt is het feit, dat in talrijke, ja de meeste exemplaren het lumen van het centraal-kanaal nabij de spons-oppervlakte veel geringer is, of wel het kanaal nabij de peripherie zich meer dan eens in nauwere kanalen vertakt. Bovendien ziet men in de wijde kanalen, dat de wand niet glad is, maar voorzien van vele concentrische rugae. Een dergelijk kanaal zou, naar de voorstelling van PEKELHARING en mij, al heel weinig geschikt zijn als „eloaca”. Ik heb daarom getracht in het onderhavige geval den bouw van het kanaalstelsel te weten te komen door reeksen van doorsneden. Daarbij ben ik steeds tot het besluit gekomen, dat de afvoerende kanalen, die rechtstreeks met de trilkamers in gemeenschap staan, *niet* uitloopen in de centrale holte; maar dat deze juist omgekeerd, een toevoerend vat is, welke het water uit het centrale kanaal ontvangt, m. a. w. dit laatste is geen eloaca, maar een toevoerend reservoir. Talrijke zeer kleine openingen, stomata, voeren in stelsels van kanalen, deze ten slotte in het centraal-kanaal, dat bovendien door een betrekkelijk wijde opening zeewater kan opnemen. Van dit reservoir uit dringen de kanalen het parenchym binnen en eindigen tegen de trilkamers, die het water uitstorten in een ander stelsel van kanalen, welke ten slotte evenzeer met kleine openingen, procti, aan de spons-oppervlakte uitmonden. De verbinding van trilkamers met kanalen is zóó dat een eury pyl stelsel tot stand komt.

Maar het kanaalstelsel van *Spirastrella purpurea* biedt nog een andere merkwaardigheid aan. Terwijl men tot nog toe meende, dat de bewegende kracht voor den waterstroom bij Sponzen uitsluitend zételde in de flagella der choanocyten, komt m. i. in het onderhavige geval nog een andere factor. In den wand van het centraal-kanaal komen n.l. zeer fraaie spiervezels in menigte voor, en wel concentrisch en radiaal gelegen. In de bovengemelde rugae zijn de eerste maximaal verslapt, misschien zelfs door contractie van de tweede iets over den norm uitgerekt. Verslappen de radiale spiereellen, maar trekken de concentrische samen, dan ontplooiën zich de rugae tot diaphragma-achtige vliezen, en het lumen van het centraal-kanaal wordt in meerdere of mindere mate verkleind. Heeft zich hierbij de terminale opening eerst gesloten, dan zal dus water opgeperst worden in de kanalen, m. a. w. de werking der flagella worden ondersteund.

Het geheele parenchym bestaat uit een zeer eigenaardig weefsel, waarop ik reeds meermalen de aandacht heb gevestigd en dat zich het best vergelijken laat met lymfhoïd bindweefsel. Het zijn platte

cellen met vliesvormige uitloopers, naar het schijnt als een syncytium samenhangend. Celgrenzen heb ik althans niet met zekerheid kunnen aantoonen. Aldus ontstaat een netwerk, waarvan de mazen zeer verschillend in grootte zijn. Zonder twijfel komen ook fibrillen voor, misschien ook elementen, die aan elastieke draden herinneren. Eindelijk vindt men een groote verscheidenheid van cellen, amoebocyten, thesocyten, spoel- en stervormige bindweefselcellen met vertakte uitloopers enz. enz. De wanden der kanalen zijn met platte cellen bekleed, die geheel het karakter hebben der eerstgenoemde; men zou dan van endothelium kunnen spreken.

Het skelet wordt gevormd door bundels tylostyli. In incrusteerende vormen staan deze bundels loodrecht op het substratum; zij vertakken zich al of niet nabij de peripherie, maar eindigen in ieder geval in omgekeerd kegelvormige pluimen. De spicula van de laatste zijn in den regel kleiner dan die, welke lager in de bundels zijn gelegen. In massieve exemplaren of dezulke, welke vingervormige uitsteeksels bezitten, trekken lange bundels longitudinaal door de uitloopers, vertakken en anastomoseeren. Deze longitudinale hoofdbundels geven ook takken af, die in de richting der peripherie ombuigen om ten slotte ook weder in pluimen te eindigen. Het aantal tylostyli aan of nabij de sponsoppervlakte is zeer verschillend, evenals de mate van het buiten de oppervlakte uitsteken. Het gevolg hiervan is, dat de spons nu eens vrij glad, dan weder ruw is. In het algemeen kan men zeggen, dat het aantal periphere tylostyli in omgekeerde verhouding staat tot het aantal spinispirae. Zijn deze zeer talrijk, dan vormen zij in de eerste plaats een schors, die spaarzaam door tylostyli wordt doorboord. Indien behalve zeer kleine spinispirae ook de groote plompe voorkomen, dan bestaat die schors distaal uit één of twee lagen der eerste soort, terwijl de laatste soort in 2—5 lagen daaronder voorkomt, dus proximaal gelegen is.

In vele exemplaren met krachtig ontwikkelde longitudinale bundels springen strengen van eigenaardige cellen door hun donker gekleurde korrels in iedere doorsnede terstond in het oog. Die cellen zijn meer of minder spoelvormig, hebben een grooten kern en grooten „nucleolus”. Zij liggen dicht bij elkaar in de onmiddellijke omgeving der bundels.

Deze cellen zijn hoogstwaarschijnlijk op te vatten als fibroblasten; het zijn deze cellen, die de bindweefselfibrillen leveren, welke de spicula-bundels versterken door de afzonderlijke tylostyli te verbinden. De naalden zijn dus in een bindweefsel-streng stevig ingepakt. In zulk een „periapt”¹⁾ treft men spoelvormige bindweefsel-

1) Zie Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. 1905, p. 742.

Dr. GRESHOFF over het hypaphorine, zooals de uit dadapzaden verkregen stof inmiddels genoemd was, waarin echter de door mij verkregen resultaten niet zijn opgenomen.

In die mededeeling worden de bereidingsmethode alsmede de eigenschappen van het hypaphorine opgegeven.

Van de eigenschappen zij hier vermeld, dat hypaphorine in waterhoudende, doorschijnende kristallen kristalliseert, die in den exsiccator verweeren. Het smelt bij 255° onder ontleding. Bij sterke verhitting aan de lucht verbrandt het onder uitsooten van indol-achtig riekende dampen. Het is rechtsdraaiend $[\alpha]_D = +91^{\circ} - 93^{\circ}$. Hoewel hypaphorine neutraal reageert, geeft het met zuren gekristalliseerde verbindingen, waarvan vooral het moeilijk oplosbare nitraat kenmerkend is. Uit de opgegeven analyses van hypaphorine en het nitraat was geen formule af te leiden. Echter wordt in den „Index Phytochemicus” van RITSEMA en SACK, in 1905 verschenen, voor hypaphorine de formule: $C_{14}H_{11}N_2O_2$ opgegeven, echter zonder vermelding van bron.

Na het overlijden van Dr. GRESHOFF heb ik mij tot de Commissie voor het Koloniaal Museum te Haarlem gewend met het verzoek, de in het laboratorium van dat Museum aanwezige praeparaten van hypaphorine te mogen ontvangen, ten einde het indertijd te Buitenzorg aangevangen onderzoek te kunnen voortzetten. Voor de groote bereidwilligheid, waarmede, nu eenige maanden geleden, aan mijn verzoek is voldaan, betuig ik ook te dezer plaatse aan die Commissie mijn welgemeenden dank.

De elementaire analyse van het watervrije hypaphorine gaf mij in Buitenzorg de volgende resultaten:

C 68.4; 68.4. H 7.68; 7.63. N 10.9; 11.—.

Berekend voor $C_{14}H_{11}N_2O_2$: C 68.24, H 7.38, N 11.37.

De zoutzuurverbinding gaf: 13.1 %; 13.1 % HCl.

Berekend voor $C_{14}H_{11}N_2O_2 \cdot HCl$: 12.95 % HCl.

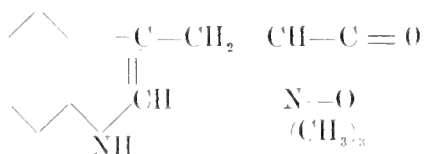
Door verhitting met een sterke kali-oplossing wordt het hypaphorine ontleed. Er ontwijkt een amineachtig riekend gas en er distilleeren met het water oliedruppels over, die na korten tijd vast worden. Het ontwijkende gas werd in verdund zoutzuur opgevangen. Uit het waterige distillaat werd door filtratie de vaste stof afgescheiden. De waterige vloeistof werd met het zoutzuur, waarin het gevormde amine opgevangen was, vereenigd, en ingedampt. Daarna werd mit het verkregen bruin gekleurde zout het amine weer vrij gemaakt, op nieuw aan zoutzuur gebonden en als platinadubbelzout afgescheiden.

van PETER GRIESS ¹⁾ in methylalkoholische oplossing met natron en methyljodide in overmaat vermengd. De oplossing bleef eenige uren staan, waarna de alcohol en het overvloedige methyljodide uit het waterbad werden afgedistilleerd. Voegt men nu bij het residu, na dit in een weinig water te hebben opgenomen, verdund salpeterzuur, en wrijft men den wand van het glas met een glasstaaf, dan kristalliseert er een nitraat in fijne naaldjes uit. Ik verkreeg daarvan ongeveer 0.12 gram.

Dit nitraat vertoont in zijne reacties de grootste gelijkenis met het nitraat van hypaphorine. Evenmin als dit laatste heeft het een scherp smeltpunt; omstreeks 220° gingen beide praeparaten, in haarbuisjes, onder opbruising in een zwarte massa over. Dit ontledingspunt is afhankelijk van de wijze van verhitting.

Bij koking met kali ontwikkelen zich ook uit het synthetische nitraat amine- en indolachtig riekende dampen. ²⁾

Op grond van de beschreven proeven hield ik het voor zeer waarschijnlijk, dat hypaphorine identisch is met het van tryptophaan af te leiden α -trimethyl- β -indolpropiobetaïne:



Ik was voornemens, ten einde volkomen zekerheid te erlangen, alsmede om de noodige analyses te kunnen maken, dé synthese van dit betaïne op grootere schaal uit te voeren, toen ik de vorige week van Dr. BARGER te Londen het bericht ontving, dat hij door methyleeren van tryptophaan volgens ENGELAND ³⁾ en behandeling van het verkregen product met verdunde kali, een betaïne verkregen had, waarvan het nitraat met dat van hypaphorine in eigenschappen overeenstemt. Bovendien kon de draaiing bepaald worden. Gevonden werd $[\alpha]_D = +94^\circ$, terwijl GRESHOFF $+91-93^\circ$ opgeeft.

Ik bepaal mij daarom nu tot de korte, voorloopige mededeeling der door mij verkregen resultaten, en stel mij voor, in gemeenschap met Dr. BARGER, uitvoeriger op de synthese terug te komen.

Utrecht.

Org. Chem. Lab. der Univ.

¹⁾ B. 8, 1406 [1875].

²⁾ Tryptophaan geeft met zeer geconcentreerde kali gekookt, wel een distillaat, dat met HNO₂ de indolreactie geeft, maar met hypaphorine gaat de splitsing veel gemakkelijker, wat uit de formule, zonder meer, niet zoo eenvoudig af te leiden is.

³⁾ B. 42, 2962 [1909]; 43, 2662 [1910].

Plantkunde. -- De Heer WENT biedt een mededeeling aan van den Heer W. H. ARISZ: „*Over het verband van prikkel en effect bij phototropische krommingen van kiemplantjes van Avena sativa.*“

(Mede aangeboden door den Heer J. W. MOLL).

Ongeveer terzelfder tijd verschenen in 1908 onderzoekingen van BLAAUW ¹⁾ en FRÖSCHEL ²⁾ over de perceptie van den lichtprikkel. Werd een kiemplant van Avena of Lepidium eenzijdig belicht, dan bleek bij verschillende lichtintensiteiten een juist merkbare reactie tot stand te komen, wanneer het product van lichtintensiteit en prikkelduur telkens even groot was.

Een herhaling van deze onderzoekingen in het laboratorium van Prof. WENT leidde tot eenige waarnemingen, waarvan ik hier de voorloopige resultaten medeel.

Door Mevr. POLOWZOW ³⁾ was voor aërotropische en geotropische krommingen aangetoond, dat bij waarneming met het microscoop terstond na de prikkeling een kromming optreedt. BLAAUW ⁴⁾ bespreekt in hoeverre ook bij lichtkrommingen dit waarschijnlijk te achten is. Hij meent dat of de reactie bij het macroscopisch zichtbaar worden juist begonnen moet zijn, of dat op dit moment een nieuwe phase

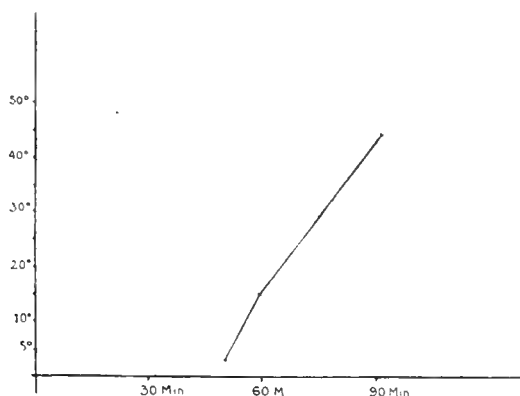


Fig. 1.

Verloop van de phototropische kromming volgens BLAAUW. Op de abscis de tijd in minuten na het begin van de prikkeling, op de ordinaat de grootte van de afwijkingshoek.

¹⁾ A. H. BLAAUW. Zittingsverslag K. Akad. van Wet. Amsterdam, Sept. 1908.

²⁾ P. FRÖSCHEL. Sitzungsberichte der K. Akad. der Wiss. Wien, April 1908.

³⁾ W. POLOWZOW. Untersuchungen über Reizerscheinungen bei den Pflanzen. 1909.

⁴⁾ A. H. BLAAUW. Die Perzeption des Lichtes. Recueil d. Trav. Bot. Néerl. Vol. 5. 1909.

in het krommingsproces opgetreden is, dat hij dus in elk geval met een bijzonder punt van de reactie werkt.

Het ligt voor de hand op dezelfde wijze als Polowzow voor geotropische krommingen deed, ook eens het verloop van een phototropische kromming met het microscoop na te gaan. Met het oog op de later te beschrijven wijze van krommen, werd als maat van de kromming op een bepaald oogenblik de afstand gekozen tusschen den oorspronkelijken stand van het uiteinde van den top van het coleoptiel en den nieuwen stand, waar dit punt zich telkens tijdens de kromming bevond. Ook MAILLEFER¹⁾ en POLOWZOW namen dezen

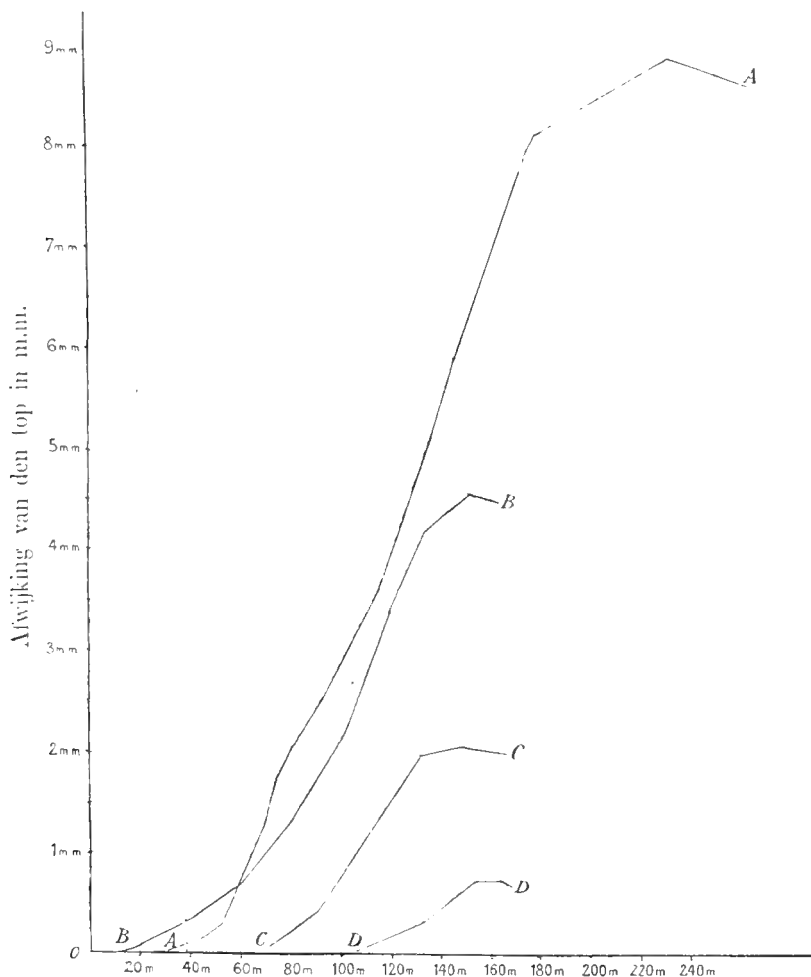


Fig. 2.

Verloop van de phototropische kromming.

A geprikkeld door 800 M.K.S. B door 112 M.K.S.

C door ± 20 M.K.S. D door 5 M.K.S.

¹⁾ A. MAILLEFER. Etude sur la Réaction géotropique. Bull. Soc. Vandoise. 1910.

afstand als maat van de kromming aan. In het oculair bevond zich een netmicrometer, zoodat het mogelijk was bij zwakke vergrooing een teekening op millimeterpapier van den geheelen top te maken. Door deze elke 5 of 10 minuten gemaakte teekeningen te vergelijken kon ook een geringe vormverandering in zijn aanvang gadeslagen worden. Veel moeite gaven mutatie's, doch alle exemplaren waar deze voorkwamen werden onherroepelijk afgekeurd. Daar de mutatiebeweging zich door de verandering van plaats van den geheelen top ten opzichte van de basis scherp van een phototropische kromming onderscheidt, was een herkenning vrij gemakkelijk. Bij de krommen van fig. 2 is op de abscis de tijd, op de ordinaat de sterkte van de kromming, op boven genoemde wijze gemeten, afgezet.

In één geval was dus de kromming na 12 minuten aan het optreden. Moet nu echter gezegd worden, dat de kromming juist op dit oogenblik begint, dat hier dus een reactietijd van 12 minuten is? Ik geloof van niet. Tot deze conclusie moet men naar mijn meening komen door bestudeering van den vorm van den top bij het begin van de kromming; het blijkt, dat waar deze oorspronkelijk bijna zuiver kegelvormig was met een weinig afgestompte spits, de kromming zichtbaar wordt als een lichte asymmetrie van de zijden van den kegel, die naar het licht toe en afgekeerd waren ten opzichte van elkander. Deze asymmetrie wordt langzamerhand sterker tot de top voorover gaat buigen en een steeds verder van den top gelegen zone aan de kromming deel gaat nemen. Van een plotseling zichtbaar worden van de asymmetrie geen spoor. In enkele gevallen is de vorm van den top gunstig om ook een kleine asymmetrie waar te nemen, maar het is zeer waarschijnlijk, dat ook voordat in een dergelijk geval een afwijking was te bespeuren, de kromming in gang was.

Het bepalen van een reactietijd is dus experimenteel onmogelijk, en het is zeer goed denkbaar, dat de kromming feitelijk *direct* bij de prikkeling begint op te treden.

De overgang van een alleen microscopisch zichtbaar, in een ook macroscopisch waarneembaar deel van de kromme geschiedt min of meer geleidelijk. Een in het oog vallende knik vinden wij echter bij sterke energie (zie fig. 2 A.). De interpretatie van BLAAUW, dat de kromming hier in een nieuwe phase treedt, lijkt mij zeer plausibel, wanneer we zien dat juist op dit moment de verder van den top gelegen zone's, die in tegenstelling met den top een sterke lengte-toename vertoonen, aan de kromming deel gaan nemen.

Door vergelijking van op dergelijke wijze verkregen krommen viel het in het oog, dat het maximum van kromming, bereikt door

planten, die met verschillende hoeveelheden energie belicht waren, niet bij alle even groot was, bij de kleinere energieën aanzienlijk zwakker.

Het bleek, dat er kleiner krommingen bestonden, dan die door BLAAUW en FRÖSCHEL waren waargenomen. Dit was een gansch onverwacht resultaat, want al had BLAAUW zeer voorzichtig van nog juist macroscopisch zichtbare krommingen gesproken, hij meende toch met een prikkeldrempel gewerkt te hebben. Veel meer nog FRÖSCHEL, die aan het product, dat nog juist een kromming gaf, groote waarde hechtte als maatstaf van de phototropische gevoeligheid ter vergelijking met die van andere planten.

Was nu de door BLAAUW nog als kromming gewaardeerde uitwijking van den top een bijzondere waarde, waarvoor alleen de productregel opging of zou het blijken, dat ook aan kleinere of grootere hoeveelheden energie een overeenkomstig kleinere of grootere kromming beantwoordt? In het algemeen, dat bij een bepaalde hoeveelheid energie een bepaalde sterkte van kromming hoort?

Om op deze vraag een antwoord te krijgen moest met een groote hoeveelheid materiaal gewerkt kunnen worden. Van de omslachtige waarneming met het microscoop werd afgezien en een veel eenvoudiger toestel gebezigd. Een photographielens projecteerde, 2 maal vergrootend, een bakje met plantjes op een glazen plaat, waarop langs photographischen weg een verdeeling in ruitjes van een halven millimeter was aangebracht. Met een loupe werd de stand van de toppen afgelezen. Voordeel van deze opstelling is, dat behalve het grooter aantal plantjes steeds het geheele coleoptiel kan worden waargenomen. Als maatstaf van de sterkte van de kromming werd de afwijking van den top van zijn oorspronkelijken stand vóór het begin van de kromming gekozen op het moment, dat deze afstand het grootst is. Er komt nml., daar de zwaartekracht van den aanvang af de kromming tegenwerkt, een oogenblik, dat de top zich onder invloed van de phototropische krommingsenergie niet verder van de verticaal af beweegt, daar deze geneutraliseerd wordt door de zwaartekrachtwerking. Al zal dit punt waarschijnlijk geen zuiver beeld van de gevoeligheid geven, het is hier slechts noodig een vast punt in het krommingsverloop te hebben.

Uit de vele gedane waarnemingen heb ik hier de volgende bijeengebracht, die voor plantjes van een gemiddelde lengte van 22.5 m.M. bij een temperatuur van ongeveer 17.5° Cels. gelden.

De lichtenergie werd verkregen door verschillende combinatie's van intensiteit en prikkelduur (wisselend tusschen 2 en 240 sec.)

De intensiteiten werden bepaald met een Photometer van WEBER ¹⁾

Lichtenergie in M.K.S.	Grootte van de max. kromming in mm.	Aantal waarnemingen
7.6	0.73	12
12.4	0.96	6
18.1	1.47	10
26.1	2.1	6
44.2	2.8	15
54.0	3.0	7
65.0	3.4	16
75.3	3.9	7
99.0	4.6	13
126.6	4.6	11
144.0	4.3	10
239.0	4.9	10
576.0	3.6	13

Deze cijfers blijken op een vloeiende lijn gelegen te zijn, die dus het verband van energie en maximale kromming weergeeft.

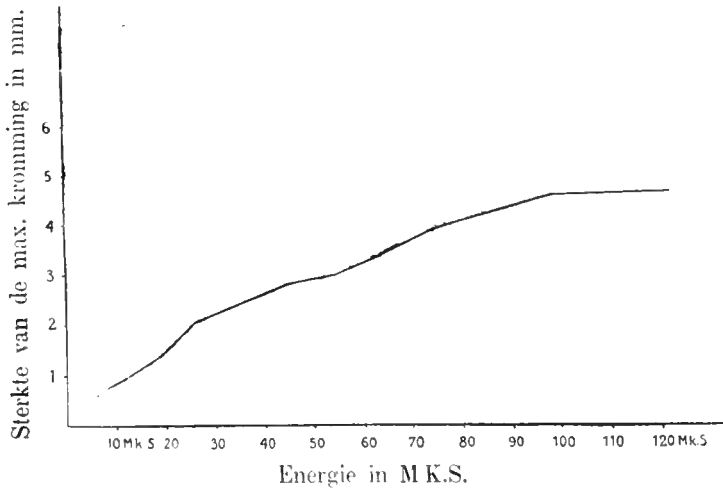


Fig. 3.

De kromme stelt voor het verband van de lichtenergie waarmee geprikkeld is en de sterkte van de maximale kromming voor plantjes van ± 22.5 mm. lengte en een temp. van $\pm 17.5^\circ$ Cels.

¹⁾ Prof. H. SnelLEN, Directeur van het Nederlandsch Gasthuis voor ooglijders was zoo vriendelijk dezen photometer tot mijne beschikking te stellen.

Tot 100 M.K.S. een eerst snellere dan iets langzamere toename van de sterkte van de kromming; van 100 M.K.S. tot 400 M.K.S. dezelfde sterkte, daarna weer afnemend. Beneden 7 M.K.S. was de kromming op deze wijze niet te bepalen, maar tot 2 M.K.S. toe bleek de kromming als flauwe topneiging nog macroscopisch duidelijk zichtbaar. Ook vroeger zijn deze topneigingen opgemerkt o.a. door RUTGERS¹⁾ die ze echter, daar ze naar zijn meening ook zonder voorafgegane prikkeling optraden, niet als phototropische krommingen erkende. Door mij gedane controleproeven toonden echter aan, dat wanneer coleoptielen, die in het geheel geen topneigingen vertoonden, in het donker werden gezet, waarbij er zorg voor werd gedragen ze vooraf noch geotropisch noch mechanisch door aanraking of iets dergelijks te prikkelen, ze geen topneigingen gingen vertoonen, waarbij echter (RUTGERS l. c. pag. 56) alleen op krommingen loodrecht op het nutatievlak werd gelet.

Beneden 2 M.K.S. was de krommig zoo flauw, dat macroscopisch deze niet meer met zekerheid was vast te stellen. Ook het microscop laat hierbij in den steek. De kleinst waargenomen kromming was ongeveer $\frac{1}{4}$ mm. bij 1.4 M.K.S.

Er is dus ook hier geen grens te stellen waarbeneden beslist geen krommingen optreden, maar dat er voor ons op het oogenblik niet meer waarneembare krommingen bestaan, is hoogst waarschijnlijk.

Het ligt voor de hand en het verloop van de kromme zou er voor pleiten, de lijn tot het nulpunt door te trekken. De beteekenis hiervan is, dat elke hoeveelheid energie een kromming van bepaalde sterkte veroorzaakt.

Elke hoeveelheid energie werkt op de plant in en komt in een kromming van bepaalde maximale sterkte tot uiting.

Waar al deze waarnemingen gelden voor phototropische krommingen tegengewerkt door de zwaartekracht, was het wenschelijk eens te vergelijken wat bij opheffing van de eenzijdige zwaartekrachtwerking zou gebeuren. Hiervoor werd gebruik gemaakt van den intermitterenden klinostaat van Fitting, die het mogelijk maakte een plantje gedurende gelijke tijden afwisselend in standen, die 180 graden van elkaar verschillen, te stellen, waarbij de zwaartekrachtwerking in die standen elkaar opheft. Bij een intermitteering van 2 minuten trad bij niet belichte planten na 6 uur nog geen waarneembare kromming op. Van elke 4 minuten bevonden de planten zich dus 2 minuten in den stand, waarin ze met het microscop

¹⁾ A. A. L. RUTGERS. De invloed der temperatuur op den praesentatietijd bij geotropie. Dissertatie, Utrecht 1910.

konden worden bekeken en er een teekening van gemaakt kon worden.

Onderstaande kromme geeft het verloop van een dergelijke kromming weer.

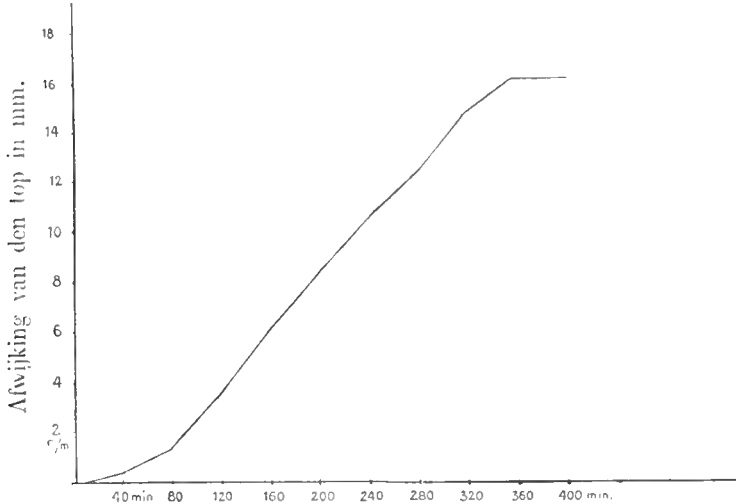


Fig. 4.

Verloop van de phototropische kromming bij opheffing van de eenzijdige zwaartekrachtwerking. Geprikkeld met 360 M. K. S.

Uit deze kromme blijkt, dat al na 10 minuten, dus eerder dan bij tegenwerking van de zwaartekracht, een kromming zichtbaar wordt, wat voor een vroeger begin van het krommingsproces natuurlijk zeer pleit. Na 6 uur ongeveer komt een oogenblik, waarop de afstand van de verticaal niet meer toeneemt. Om een overzicht van de kromming gemakkelijker te maken, reproduceer ik afbeeldingen van teekeningen op matglas gemaakt door het beeld, dat de photographische lens hierop projecteerde, te omlijnen.

Vergelijkt men hiermee een kromming, waarbij de zwaartekracht tegenwerkt dan valt het groote verschil terstond in het oog. Ook hier weer eerst het asymmetrisch worden van den top, waarna een steeds meer basaal gelegen zone aan de kromming deel gaat nemen. Na ongeveer 6 uur is de grootste afwijking van den top bereikt. Bepalen we op dit oogenblik de sterkte van de kromming door hoogen van verschillenden straal langs het gekromde deel te leggen, dan blijkt het, dat het coleoptiel zich niet in een cirkelboog gekromd heeft, maar een aaneenschakeling is van deelen, die verschillend sterk gekromd zijn; zoo is de zone vrij dicht onder den top gelegen het sterkst gekromd, misschien als zone van den sterksten groei.

Na deze 6 uur neemt de kromming van het bovenste deel af, zoodat er een kleine vermindering van de afwijking van den top is waar

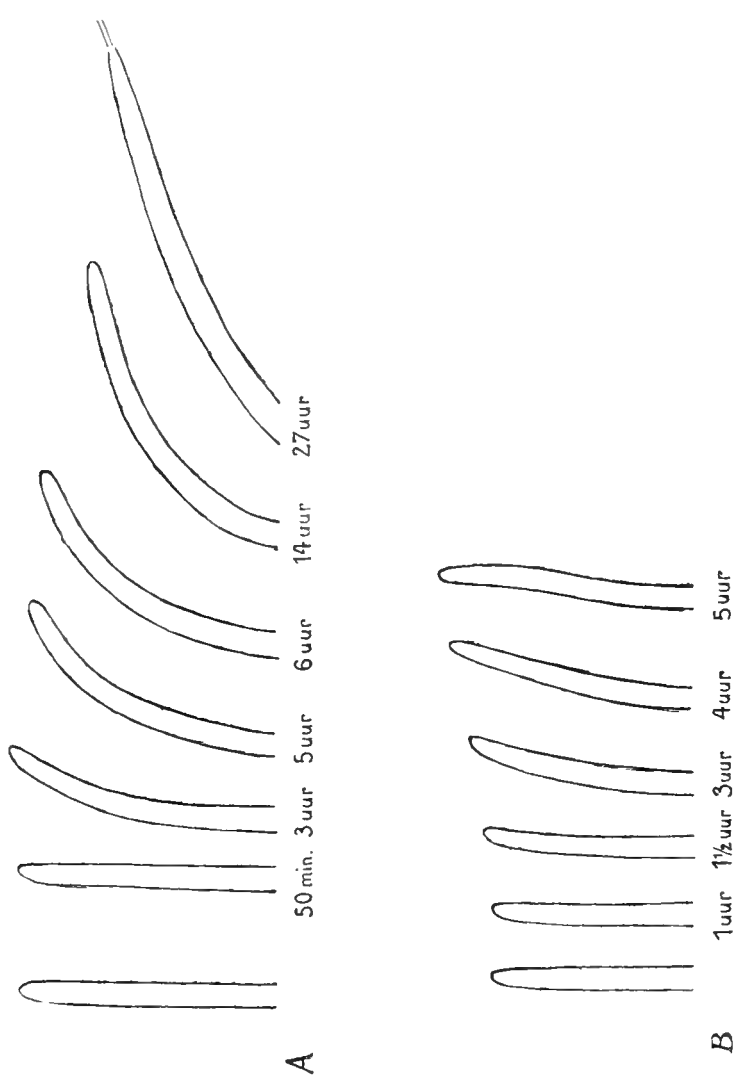


Fig. 5.

A. Het verloop van een kromming bij ophelling bij eenzijdige zwaartekrachtwerking.
B. Het verloop van een kromming waarbij de eenzijdige zwaartekrachtwerking niet is opgeheven.
A en B door een zelfde lichthoeveelheid geprikkeld ± 25 M.K.S. vergrooting $2 \times$.

te nemen, het is het begin van de rechtstrekking. Aan de meer basaal gelegen deelen neemt de kromming nog steeds in sterkte toe. Ten slotte is het bovendeel geheel recht gestrekt en de kromming aan de basis gefixeerd.

Misschien bezitten wij in deze methode van waarneming op een intermitterenden klinostaat een zuiverder middel om de gevoeligheid van de plant te bepalen.

Gaan we nu nog even na in hoeverre bovenstaande onderzoeken van invloed zijn op onze opvatting van het prikkelproces, dan

blijkt het dat de vergelijkbaarheid met fysisch chemische processen nog meer op den voorgrond treedt. Het bestaan van een prikkel-drempel is niet langer meer te handhaven, want niet alleen wordt elke hoeveelheid energie geperepieerd, maar het blijkt nu ook dat steeds een reactie zal optreden.

De tijd, die verloopt tusschen het toedienen van den prikkel en het begin van de kromming „de reactietijd” is experimenteel onbepaalbaar gebleken. Als maatstaf voor de gevoeligheid kan zij dus geen dienst bewijzen.

Het blijkt hoe langer hoe meer dat begrippen als „Erregung” en „Erregungshöhe” uitstekend gemist kunnen worden, daar de verschijnselen niet de minste aanwijzing geven ze op te stellen. Ook het bepalen van een relaxatietijd of relaxatieindex zal wel tot de onmogelijkheden blijken te behooren, daar het ook hier experimenteel onmogelijk is vast te stellen, dat geen kromming uit de sommatie van de intermitterende prikkelingen resulteert.

Aangezien de praesentatietijd is opgesteld als factor van de energiehoeveelheid, die in staat is juist den prikkel drempel te overschrijden, blijkt uit bovenstaande onderzoekingen dat, waar de „Schwelle” niet meer gehandhaafd wordt, de praesentatietijd als *bijzondere* prikkelduur veel van zijn waarde verliest. Hij is te handhaven als de tijd-factor van de hoeveelheid energie, die een kromming van bepaalde sterkte ten gevolge heeft.

Voortaan zal dus in de prikkelphysiologie gewerkt moeten worden met de energie, die als prikkel wordt aangewend en die bepaald wordt door het product van de intensiteit van de werkende kracht en den prikkelduur, terwijl de reactie beoordeeld kan worden naar de sterkte van de maximale kromming als tenminste de eenzijdige zwaartekrachtwerking niet wordt opgeheven. Wordt deze opgeheven dan kan de sterkte van de kromming op het moment dat de rechtstrekking aanvangt misschien als maatstaf dienst bewijzen.

Wil men bij een onderzoek den invloed van de een of andere uitwendige omstandigheid op de gevoeligheid nagaan, dan kan bepaald worden, welke hoeveelheid energie bij wisseling van die omstandigheid telkens een kromming van bepaalde sterkte geeft, waarbij het veel gemak kan geven, dat het oogenblik, waarop een dergelijke kromming zichtbaar wordt, constant is. Wat dus vroeger onder reactietijd verstaan werd, maar wat gebleken is bijna geheel *krommings-tijd* te zijn, is *constant* voor een bepaalde hoeveelheid energie. Deze krommingstijd neemt in grootte sterk toe naarmate de energie, waarmee geprikkeld wordt, kleiner is, wat onderstaande kromme duidelijk weergeeft.

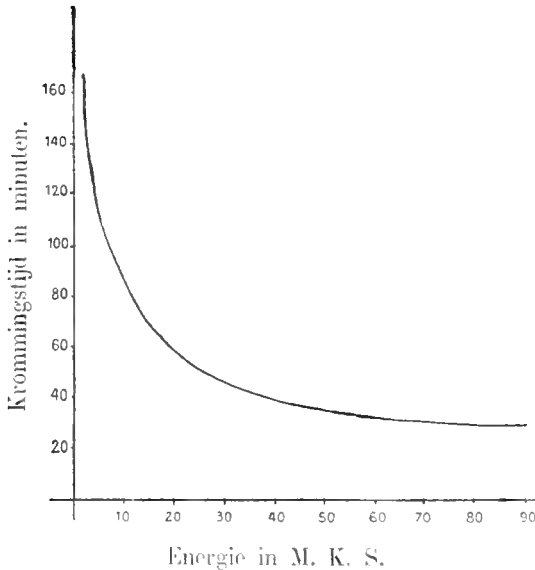


Fig. 6.

Verband tusschen „Energie” en „de tijd totdat de kromming juist met het bloote oog zichtbaar wordt”.

Ten slotte wil ik Dr. BLAAUW en in het bijzonder Prof. WENT hartelijk dank zeggen voor de belangstelling en voorlichting, die ik van hen mocht ondervinden.

Utrecht.

Bot. Laboratorium.

Microbiologie. — De Heer BELJERINCK biedt eene mededeeling aan van den Heer N. L. SÖHNGEN: *Microben-lipase*.

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGWERFF.)

In eene vorige mededeeling ¹⁾ zijn een aantal soorten vetsplitsende bakteriën beschreven, welke algemeen verspreid in de natuur voorkomen; tevens is daarin de weg aangegeven volgens welke wij deze soorten van andere kunnen onderscheiden en de wijze waarop zij in reinkultuur gebracht worden uit bouwgrond, rioolwater, melk of ranzige boter.

Ook onder de gisten en schimmels treffen we vele soorten aan, welke lipase vormen. Zoo bevatten de meeste gistsoorten endo-lipase; ze vermogen bij rijke voeding vet als reserve-voedsel in de cel op te hoopen en kunnen dit weder verbruiken, indien minder gunstige cultuurvoorwaarden optreden.

¹⁾ Vetsplitsing door bakteriën. Verslagen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, December 1910, blz. 689.

Slechts een gering aantal gistsoorten scheidt diffundeerende lipase af; tot deze behooren enkele in melk dikwijls voorkomende gisten, waaronder een *torulasoort*. Vetsplitsende gisten kunnen we uit tuingrond verkrijgen door deze te enten in een kultuurmedium van de volgende samenstelling: 100 leidingwater, 1 vet, 0,05 KCl, 0,05 NH₄Cl en 2 tot 4 druppels phosphoszuur, terwijl bij 20°—25° C. aërob wordt gekultiveerd.

De isolatie der vetsplitsende gisten geschiedt nu door uitzaaiing der cultuur waarin deze zich hebben opgehoopt, op gistglucosegelatine met krijt, welke in een kultuurdoos is gestold op een dun laagje vet. De kolonies der vetsplitsende gisten kenmerken zich op dezen bodem doordat zij het vet hydrolyseeren.

Veel algemeener dan door gistsoorten, wordt diffundeerende lipase door schimmels afgescheiden. Vetsplitsende schimmels kunnen het eenvoudigst uit ranzige vetten geïsoleerd worden. Ook uit de lucht verkrijgen we vetsplitsende gisten en schimmels, door bovengenoemden cultuurbodem eenigen tijd aan de lucht bloot te stellen, waarna we die organismen isoleeren, welke onder de kolonie vet gesplitst hebben.

Vetontledende bacteriën, gisten en schimmels scheiden alle een enzym af, lipase, dat dezelfde eigenschappen bezit.

Hoewel de volgende onderzoekingen grootendeels zijn verricht met bacteriën-lipase, gelden dus de verkregen resultaten tevens voor de lipase van gisten en schimmels zooals door overeenkomstige proeven met deze organismen is aangetoond.

Lipase-vorming door microben in cultuurmedia van verschillende samenstelling.

Kultiveeren we vetsplitsende microben in cultuurmedia van verschillende samenstelling, dan blijkt, dat in cultuurbodems waarin groei van een vetsplitsend organisme plaats heeft, ook lipase gevormd wordt.

Zoo scheiden *B. fluorescens liquefaciens*, *B. lipolyticum*, *Oidium lactis*, een *torula*, *penicillium glaucum* lipase af, indien zij gekultiveerd worden in duinwater waaraan 0,05 % bikaliumphosfaat is toegevoegd, een der volgende koolstofbronnen: glycerine, glucose, calciumlactaat of natriummalaat met een der volgende stikstofbronnen: pepton, asparagine, ammoniumchloride of kaliumnitraat.

De aard van de koolstof- en stikstofbron is dus geen voorwaarde voor de vorming van lipase door micro-organismen welke deze assimileeren of m. a. w., indien een koolstof- of stikstofbron, onver-

schillig welke hare samenstelling is, door een vetsplitsend organisme geassimileerd wordt, zal zij dienen tot de vorming van lipase door dit organisme.

De samenstelling van het cultuurmedium oefent echter wel invloed uit op de hoeveelheid lipase, welke door een organisme wordt afgescheiden.

Door een bepaald aantal microben wordt de grootste hoeveelheid lipase afgescheiden indien de cultuurvoorwaarden voor deze het gunstigst zijn. Dit feit kunnen we op eenvoudige wijze met behulp van de vetbuisjes-methode aantonen.

Verschillende stoffen echter oefenen een belemmerenden invloed uit op de afscheiding van lipase door microben en wel zijn dit verbindingen, als suikers en alcoholen, waaruit die micro-organismen zuren vormen.

Invloed van zuur en alkali op microben-lipase.

De groote invloed welchen zuren uitoefenen op het ontledingsproces van vet door microben-lipase blijkt zeer duidelijk, als we lipase-microben welke zuur vormen uit glucose, zooals b.v. *penicillium-glucum*, *Oidium lactis*, *B. lipolyticum a*, *B. Stutzeri* of *B. fluorescens liquefaciens*, kultiveeren op vleeschagar 5% glucose, welke gestold is op een vetlaagje in een kultuurdoos of in een vetbuisje, dat vleeschwater 5% glucose bevat. Deze microben splitsen in het cultuurmedium geen vet door diffundeerende lipase; het vet blijft geheel onveranderd. Wel heeft door katabolisme eene geringe aantasting plaats b.v. door het mycelium der schimmels als dit door de cultuuragar is gegroeid en daarna met het vet in aanraking komt of door bacteriën in de vetbuisjes als deze in een niveau aan het oppervlak plaatselijk het vet zwak aantasten; de vetontleding heeft echter niet dieper in de buis plaats ook is deze steeds uitgesloten indien geen aanraking tusschen vet en organisme bestaat.

Op nevensgaande afbeeldingen *A* en *B* kunnen we den invloed van zuurvorming en van aanwezigheid van zuur in een cultuurbodem op de werking van microben-lipase nagaan.

A stelt een kultuurdoos voor waarin vleeschgelatine op een laagje vet is gestold.

B komt met *A* overeen, doch bevat vleeschgelatine waaraan 5% glucose is toegevoegd.

Op beide cultuurbodems zijn entstreepen van vetsplitsende bacteriën getrokken, op de wijze als dit in fig. 1 is aangegeven.

Op *A* maken de bacteriën, zooals zeer duidelijk te zien is, alle

velden van gesplitst vet; terwijl dit op *B* niet geschiedt door *B. Stutzeri* en *B. lipolyticum* α welke uit glucose zuur maken. Tevens

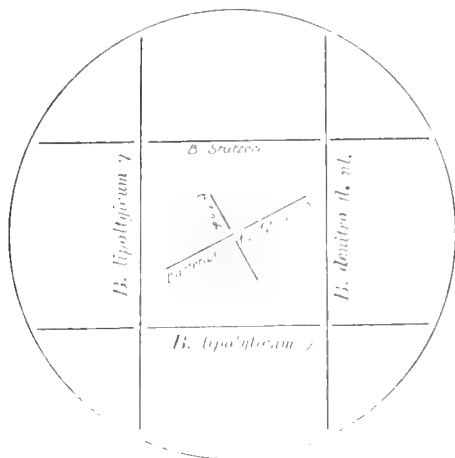


Fig. 1.

merken we op, dat de aanwezigheid van zuur ook de aantasting van het vet door de lipase der uit glucose niet zuur vormende bacteriën verhindert, hetgeen aan de insnoering der velden op de kruispunten der entstreepen duidelijk is waar te nemen.

Het zou echter onjuist zijn, de gevolgtrekking te maken, dat in kulturen, waarin vet niet ontleed wordt door de vorming van zuren, ook geen lipase zou zijn afgescheiden. Dat dit enzym inderdaad aanwezig is, blijkt door zulk een kultuur na toevoeging van een antisepticum te neutraliseeren; reeds eenige uren daarna is dan eene duidelijke ontleding van het vet waar te nemen; deze is echter niet zoo krachtig als in kulturen waarin geen zuurvorming heeft plaats gehad hoewel de groei der microben in kulturen met glucose dikwijls beter is dan in die zonder glucose. Voegen we echter aan glucosehoudende kultuurmedia calciumcarbonaat toe, dan worden door bacteriën gevormde zuren steeds geneutraliseerd; het vet wordt dan bijna even krachtig ontleed als in kulturen welke geen glucose en krijt bevatten. Deze feiten kunnen op eenvoudige wijze zoowel met behulp van vetbuisjes als door middel van plaatkulturen worden vastgesteld.

Bij een bepaalden zuurgraad wordt vet niet meer door microbenlipase ontleed, hetgeen bepaald werd met een reeks vetbuisjes waarin eene stijgende hoeveelheid zuur, in dit geval melkzuur, wordt gebracht met eene bepaalde hoeveelheid eener kultuur van vetsplitsende microben. Het blijkt nu dat de aantasting van het vet bij stijgenden zuurgraad afneemt en dat deze niet meer plaats heeft, indien de kultuurvloeistof ongeveer $\frac{1}{60}$ N zuur is.

Deze zuurgrens voor de lipasewerking is dezelfde voor het enzym van *B. Stutzeri*, *B. lipolyticum* α , *B. lipolyticum*, β en *Oidium lactis*.

Microben-lipase wordt door minerale- zoowel als door organische zuren onwerkzaam gemaakt; de eerste grijpen het ferment meer aan dan de laatste zoodat een lipasepreparaat, dat met minerale zuren onwerkzaam is gemaakt, na neutralisatie belangrijk minder actief is dan hetzelfde preparaat, dat met een even groote hoeveelheid van een organisch zuur is behandeld en daarna geneutraliseerd. Voor den terugkeer van het splitsend vermogen der lipase is eenige tijd noodig; deze hangt af van den aard, en van de hoeveelheid zuur, waarmede de lipase behandeld is. Terwijl b.v. door een lipasehoudende kultuur na aanzuren met melkzuur tot $\frac{1}{10}$ N en daarop volgende neutralisatie, reeds na één uur kultuur bij 37° , de ontleding van het vet in een vetbuisje waarin de geneutraliseerde kultuur was gebracht, zichtbaar werd, duurde dit bij aanwending van zwavelzuur van dezelfde concentratie en met inachtneming van dezelfde omstandigheden van de vorige proef, 6 uur vóór ontleding van vet zichtbaar was.

Bepaling van den invloed van zuur en alkali op de vetsplitsing door microben-lipase.

De invloed van zuur en alkali op de vetsplitsing door microben-lipase is op de volgende wijze nader bepaald.

In tien reageerbuisjes werden 15 c.c. van eene neutrale thymolhoudende lipase-bacteriën kultuur, 10 c.c. eener 10 procentige vet emulsie in agar en in de buisjes no. 1 tot 10, resp. 2 tot 24 drop-pels eener geconcentreerde melkzuuroplossing in water gebracht, zoodat de inhoud daarvan resp. 1 tot 12 c.c. $\frac{1}{10}$ N. zuur bevatte.

Een tweede reeks buisjes, op dezelfde wijze ingericht bevatte in-plaats van melkzuur, ammoniumcarbonaat, zoodat no. 1 tot 10 resp. 1.8 tot 18 c.c. $\frac{1}{10}$ N. ammoniumcarbonaat bevatten. Nadat de buisjes gedurende 8 uur bij 37° C waren geplaatst, werden zij snel op 7° C afgekoeld en getitreerd. Voor neutralisatie van 10 c.c. vetemulsie in agar zijn 0,45 c.c. $\frac{1}{10}$ N zuur noodig.

De resultaten van deze proeven zijn in onderstaande tabellen verenigd.

Invloed van melkzuur op de vetsplitsing door microben-lipase.

c.c. $\frac{1}{10}$ N Melkzuur	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12
na 8 uur bij 37° C.	0.8	1.5	2.3	3.4	4	4.7	5.6	7.5	9.5	11.5
Hoeveelheid gevormd vetzuur in c.c. $\frac{1}{10}$ N.	1.25	0.95	0.75	0.55	0.45	0.15	0.05	—	—	—

Vetsplitsing door Ammoniumcarbonaat.

c.c. $\frac{1}{10}$ N Amm. carb.	0	1.8	3.6	7.2	10.8	14.4	18.
c.c. $\frac{1}{10}$ N verbruikt zuur na 8 uur bij 37° C.	0.45	0.75	0.75	1.2	1.4	1.75	2.10
gevormd vetzuur.	0	0.10	0.30	0.75	0.95	1.30	1.65

Invloed van Ammoniumcarbonaat op de vetsplitsing door microben-lipase.

c.c. $\frac{1}{10}$ N gevormdzuur.	1.25	1.55	2.05	2.95	3.15	3.75	3.90
afgescheiden vetzuur door Amm. carb. werking.	0	0.10	0.30	0.75	0.95	1.30	1.65
Vetzuur gevormd door lipasewerking in c.c. $\frac{1}{10}$ N.	1.25	1.45	1.75	2.2	2.2	2.45	2.25

Uit deze proeven blijkt, dat in een medium met een melkzuurconcentratie van ongeveer $\frac{1}{50}$ N geen vetsplitsing door microbenlipase meer plaats heeft. De werking der lipase op vet wordt zeer bevorderd door de aanwezigheid van alkali, in dit geval ammoniumcarbonaat, en deze is het krachtigst indien het medium ongeveer $\frac{1}{23}$ N alkali titreert.

Het is duidelijk dat de werking van microbenlipase, zooals uit bovenstaande tabellen volgt, afhankelijk is van de concentratie der waterstof en hydroxylionen. De eerste oefenen een vertragenden, de laatste een versnellenden invloed op het proces uit.

De onderzoekingen over dit punt en over microbenlipase zullen worden voortgezet. Uit de beschreven waarnemingen volgt, dat het ranzig worden van zuivelprodukten slechts dan door daarin aanwezige microbenlipase kan plaats hebben, wanneer de zuurgraad van deze produkten beneden $\frac{1}{50}$ N is. Dit zal slechts geschieden wanneer het in boter of kaas aanwezige melkzuur, dat in den aanvang genoemde concentratie ver overschrijdt, tot $\frac{1}{50}$ N is gedaald, doordat alkalivormende bacteriën en schimmels het aanwezige zuur neutraliseeren en oxydeeren terwijl tevens door de vorming van calciumcarbonaat bij de oxydatie van aanwezig calciumlactaat tevens zuur wordt genutraliseerd.

Invloed van verschillende verbindingen op de vetsplitsing door microben-lipase.

Het bleek van belang om na te gaan in hoeverre andere verbindingen dan zuren en basen invloed uitoefenen op de vetsplitsing door

microben-lipase. Voor deze proefnemingen in het wenschlijk dat we over een lipasepreparaat beschikken, dat behalve het enzym geen of uiterst geringe hoeveelheden verbindingen bevat welke invloed zouden kunnen uitoefenen op het splitsingsproces. We kunnen dit tot voldoende graad bereiken door dialyse van den kultuurbodem waarin het microorganisme gegroeid is of door precipitatie van het enzym daaruit.

Dialyse van de microbenkultuur geschiedt zeer langzaam, zoodat we deze bij aanwending van pergament eenige weken moeten voortzetten alvorens de dialyseerbare verbindingen in de kultuur genoegzaam verdund zijn voor het welslagen dezer proeven.

De resultaten met een op deze wijze vervaardigd lipasepreparaat verkregen zijn m. i. niet absoluut betrouwbaar, aangezien gedurende den langen tijd der dialyse, tal van processen in de gecompliceerde kultuurvloeistof kunnen verlopen. Met behulp van de vetbuisjes-methode kon echter worden vastgesteld, dat de vetsplitsende kracht van de kultuur gedurende de dialyse afneemt terwijl het dialysaat geen of uiterst geringe hoeveelheden lipase bevat. Voegen we het dialysaat weder bij de gedialyseerde kultuur, dan is het vetsplitsend vermogen van het mengsel grooter dan dat van de kultuur waaraan een even groote hoeveelheid water is toegevoegd als in 't vorige geval c.c. dialysaat; eveneens bleek dat geringe hoeveelheden calcium en magnesiumzouten gunstig werken op het ontledingsproces.

In zeer korten tijd kunnen we ons een microben-lipase-preparaat verschaffen, dat geheel aan de bovengenoemde eischen voldoet en waarmede we tevens langs auxanographischen weg den invloed van verschillende verbindingen op de vetsplitsing kunnen nagaan, n.l. door dialyse van een vasten kultuurbodem.

Op de volgende wijze werd dit verkregen:

Het oppervlak van een vleeschagarplaat in een glasdoos wordt met een kultuur van vetsplitsende microben bestreken en ongeveer acht dagen bij $\pm 25^{\circ}$ C geplaatst. In dien tijd zijn de bakteriën gegroeid en hebben lipase gevormd welke in de agar is gediffundeerd. Nu worden de bakteriën van de agar gewasschen met thymolhoudend water, daarna nemen we de agar uit de glasdoos en brengen haar in een vat met gedistilleerd water. Ververschen we nu gedurende de eerste 24 uur eenige keeren het water, dan bevat de agar na 36 uur nog slechts zeer geringe hoeveelheden dialyseerbare verbindingen terwijl van de lipase, welke langzaam diffundeert, nog eene voor de proeven voldoende hoeveelheid in de agar terugblijft.

Plaatsen we deze agar op een vetlaagje in een kultuurdoos, dan

wordt het vet over het geheele oppervlak zeer zwak aangetast; daarentegen roepen verbindingen welke op de agar worden gebracht en welke de vetontleding door lipase bevorderen, op het vetlaagje een wit veld te voorschijn.

Op deze wijze werd van de volgende verbindingen vastgesteld dat zij de vetontleding door lipase bevorderen en wel zeer krachtig: calciumsulfaat, calciumchloride, magnesiumchloride, natriumbicarbonaat, ammonium-chloride, ammoniumsulfaat, trimethylamine, natrium glycocholaat, vooral calcium- en magnesiumzouten, trimethylamine en natriumglycocholaat, terwijl kalium, natrium, ijzer en mangaanzouten minder invloed uitoefenen. In 't algemeen kunnen we echter opmerken dat geringe hoeveelheden electrolyten de vetsplitsing door lipase bevorderen. Op dezelfde wijze werd bepaald, dat methyl-, aethyl- en amylalcohol het proces belemmeren terwijl suikers en glycerine daarop van geen invloed zijn.

Analoge resultaten werden verkregen bij proeven met lipase, welke geprecipiteerd was uit een microbenkultuur door middel van alcohol.

Uit deze feiten volgt, dat microben-lipase groote overeenkomst vertoont met lever- en pancreas-lipase.

Door de onderzoekingen toch van POTTEVIN, KANITZ, HENRI, LOEVENHART en MAGNUS is aangetoond dat calciumionen en natriumglycocholaat het proces der vetsplitsing zeer bevorderen. De vetsplitsende kracht van leverextract vermindert door dialyse terwijl toevoeging van het dialysaat tot het gedialyseerde extract weder een actief lipasepreparaat geeft. Als ko-enzym kan inplaats van het dialysaat met gelijk resultaat natriumglycocholaat worden toegevoegd.

Door middel van pancreas-lipase gelukte het POTTEVIN om langs biochemischen weg vet synthetisch te bereiden; we zullen zien, dat ook met behulp van microben-lipase uit vetzuur en glycerine vet wordt gevormd.

Zuur-lipasen.

Uit de in den aanvang dezer mededeeling vermelde onderzoekingen over den invloed van zuren op de lipasewerking, zouden we reeds de gevolgtrekking mogen maken, dat lipase eene labiele verbinding met zuren vormt, welke door alkaliën gemakkelijk wordt ontleed. Uit de resultaten der volgende proeven zal dit nog duidelijker blijken; tevens zullen daaruit eenige eigenschappen van deze verbindingen volgen.

De diffusie van zuur-lipase en hare ontleding door neutralisatie van deze verbinding kunnen we met behulp van eenen kultuurbodem aantoonen van de volgende samenstelling.

Op den bodem van een glasdoos is een vetlaagje aangebracht, daarop zijn achtereenvolgens drie lagen gegoten van vleeschgelatine 4% glucose, vleeschgelatine 4% glucose krijt en vleeschgelatine 4% glucose.

Enten we nu op dezen kulturbodem vetsplitsende bakteriën welke uit glucose zuur maken, dan diffundeert zuur-lipase, welke vet niet ontleeft zooals we hebben aangetoond, door de bovenste laag vleeschgelatine-glucose; daarna wordt in de calciumcarbonaat-laag het zuur geneutraliseerd en de lipase diffundeert door de tweede vleeschgelatine-glucose laag tot de vetlaag, waar hare aanwezigheid door de splitsing van het vet wordt vastgesteld.

De verbinding van lipase met hoogere vetzuren is in tegenstelling met de bovengenoemde zuur-lipase onoplosbaar; zij diffundeert niet door den kulturbodem.

We kunnen dit op de volgende wijze aantoonen.

In een vleeschgelatine, welke op een vetlaagje wordt gestold, brengen we een laagje fijn verdeeld vetzuur aan op dezelfde wijze als in bovengenoemden kulturbodem een calciumcarbonaat-laagje werd aangebracht.

Kultiveeren we nu op deze kultuurplaat vetsplitsende micro-organismen, dan diffundeert de genoemde lipase in de gelatine en wordt in de vetzuurlaag vastgelegd. Het vetlaagje op den bodem van de kultuurdoos blijft onveranderd. Ik heb zulke kulturen meer dan een maand bij $\pm 22^{\circ}$ laten staan zonder dat een spoor van vetontleding was te bespeuren, terwijl toch door een gelatinelaag van dezelfde dikte als de gebezigde met vetzuur, welke ± 3 m.m. dik was, reeds een zeer duidelijke ontleding van het vet was waar te nemen na 4 dagen kultuur door de gediffundeerde lipase.

Hoewel lipase dus niet door de vetzuur-laag diffundeert, doet zij dit wel in den vorm van zuur-lipase. Ook kunnen we lipase uit de onoplosbare vetzuurverbinding door middel van minerale zuren of door organische zuren als melkzuur en boterzuur tot een diffundeerende zuur-lipase maken.

We kunnen deze beide eigenschappen der lipase aantoonen met een kulturbodem welke eene combinatie is van de beide boven genoemde. Van den bodem der kultuurdoos volgen dan op elkaar: een vetlaagje, gelatine, gelatine + krijt, gelatine, gelatine + vetzuur, gelatine; de gelatine bestaat uit vleeschgelatine 5% glucose.

Op dezen kulturbodem welke ongeveer 0.5 c.M. dik is, cultiveeren we een vetsplitsende microbe welke uit glucose zuur maakt b.v. *B. lipolyticum* α en eene welke geen zuur uit glucose maakt b.v. *B. lipolyticum* β . Na twee weken kultuur bij $\pm 22^{\circ}$ nemen we

vetsplitsing onder *B. lipolyticum a* waar terwijl onder *B. lipolyticum β* geen splitsing is te bespeuren. De zuur-lipase onder *B. lipolyticum a* diffundeert dus door de vetzuurlaag, wordt geneutraliseerd door de krijtlaag en de verder diffundeerende lipase ontleedt het vet. De lipase van *B. lipolyticum β* vormt met het vetzuur eene verbinding en diffundeert niet verder.

Brengen we nu echter een der genoemde zuren op de plaats waar *B. lipolyticum β* is gegroeid, dan diffundeert dit zuur door de gelatine, vormt met de lipase welke aan vetzuur gebonden is een zuur-lipase welke diffundeert; deze wordt in de krijtlaag ontleed en de verder diffundeerende lipase ontleedt het vet. Het behoeft geen betoog, dat lipase eveneens vrijwordt, indien we het vetzuur neutraliseeren door toevoeging van alkaliën zoodat dan eveneens velden van ontleed vet ontstaan.

Microben-lipase gedraagt zich dus bij al deze proeven als een zwakke base welke met zuren verbindingen geeft en daaruit weder door basen wordt vrij gemaakt.

*Invloed van zuurstof en van licht op de vetsplitsing
door microben-lipase.*

Aanwezigheid van zuurstof en licht bevorderen de vetontleding bij de lipase-werking.

De gunstige invloed van zuurstof op het ontledings proces wordt op eenvoudige wijze met behulp van vetbuisjes aangetoond waarin eene lipase bevattende gelatine wordt gebracht. Vullen we eenige buisjes geheel met deze gelatine en brengen we in andere een dun laagje langs den binnenwand op de wijze als dit bij het vervaardigen van rolkulturen geschiedt, dan blijkt dat de vetontleding in de gevulde buisjes waarin dus geen zuurstof kan toetreden veel langzamer geschiedt dan in de vetbuisjes waarin een dun laagje gelatine is aangebracht; toch is in de eerste meer lipase aanwezig dan in die welke weinig gelatine bevatten zoodat ook in de gevulde buisjes een krachtiger aantasting van het vet was te verwachten.

Blijkbaar heeft tegelijkertijd met de vetsplitsing eene oxydatie plaats van de vetzuren.

De eigenaardige produkten welke uit het vet ontstaan bij de kultuurmethode volgens EYKMAN zullen bestaan uit vetzuren, zeepen, oxydatieproducten van vetzuren, en verbindingen van deze zuren met lipase.

Katalase welke door de bakteriën wordt gevormd, speelt hierbij geen rol, evenmin kon dit worden aangetoond voor oxydasen; deze enzymen konden niet in de kultuurgelatine op het vetlaagje worden aangetoond.

De bevorderende werking van het licht op de vetontleding bij aanwezigheid van lipase kunnen we aantoonen door eenige vetbuisjes met lipasehoudende gelatine aan 't licht bloot te stellen en daarmede overeenkomende buisjes van het licht af te sluiten, terwijl ter contrôle eenige vetbuisjes met gelatine zonder lipase in het licht, andere van het licht afgesloten werden bewaard.

In de buisjes welke gelatine met lipase bevatten en aan 't licht zijn blootgesteld is het vet krachtiger aangetast dan in die welke niet aan 't licht zijn blootgesteld geweest; de buisjes waarop zuurstof en licht hun invloed hebben doen gelden zijn het krachtigst aangetast.

In die, welke gelatine zonder lipase bevatten merken we ook eene geringe aantasting van het vet op; deze aantasting is geringer dan die welke in de buisjes met gelatine en lipase heeft plaats gehad.

Synthese van vet uit glycerine en vetzuur door microben-lipase.

Microben-lipase splitst zooals we gezien hebben vet in glycerine en vetzuur bij aanwezigheid van veel water; zij vermag uit glycerine en vetzuur weder vet op te bouwen indien zeer weinig water aanwezig is.

Als lipasepreparaat diende eene hoeveelheid bacteriën materiaal van *B. lipolyticum a.*

Deze bacteriën waren op vleeschagar gekultiveerd en werden na 10 dagen kultuur bij 30° met een spatel van de agar gestreken.

Op deze wijze waren ongeveer vier en een halve eubieke centimeter materiaal verkregen.

Dit lipase-preparaat werd met ± 50 c.c. oliezuur en ± 60 c.c. glycerine (S. G. 1.25) in een stopfleschje gebracht en nadat eenige glazen kralen voor het goed mengen der vloeistoffen bij het schudden der flesch waren toegevoegd, werd de flesch verder met glycerine geheel gevuld; hiervoor waren ongeveer 25 c.c. toereikend.

Nadat de inhoud van de stopflesch door krachtig schudden, zoo homogeen mogelijk was gemaakt, werden daarvan 5 c.c. genomen en door 5 c.c. glycerine vervangen.

Deze 5 c.c. oliezuur + glycerine titreerden 77.2 c.c. $\frac{1}{10}$ N. natronloog.

De flesch werd nu op 40° gebracht en bleef 48 uur bij deze temperatuur terwijl zij gedurende dien tijd herhaaldelijk krachtig werd geschud.

5 c.c. van den inhoud der flesch titreerden nu 56.2 c.c. $\frac{1}{10}$ N natronloog zoodat ongeveer $\frac{1}{3}$ van het oliezuur verdwenen was.

De inhoud van de flesch werd nu in twee liter kokend water uitgeschonken; daarmede geschud waarna de olieachtige laag werd afgescheitrechtferd. De olieachtige vloeistof werd nu nog twee keer

met een liter warm water gewassen en daarna geschud met eene $\frac{1}{2}$ procentige natriumcarbonaat oplossing waardoor het nog aanwezige oliezuur in oplossing ging als natrium-oleaat.

De achterblijvende vloeistof werd met calciumcarbonaat, dat op $\pm 200^\circ \text{C}$. was verhit, gemengd en vervolgens afgezogen.

Na deze bewerking waren 11.5 c.c. vloeistof verkregen van eene olieachtige consistentie en gele kleur. Zij reageerde neutraal tegenover lakmoes, was oplosbaar in aether, benzol en zwavelkoolstof.

Door verwarmen met alcoholische kali had verzeeping plaats. Een gram dezer verbinding verbruikt 163 m.G. KOH.

Het S.G. bedroeg 0.938.

Blijkbaar is bij deze synthese in hoofdzaak het monoglyceride van oliezuur gevormd zooals uit het S.G. en verzeepingsgetal volgt; tevens zullen geringe hoeveelheden di- en tri-glyceriden aanwezig zijn.

Samenvatting der resultaten.

1. De samenstelling van het cultuurmedium heeft geen invloed op de afscheiding van lipase door microben; indien dus een koolstof- of stikstofbron, onverschillig welke hare samenstelling is, door een vetsplitsend organisme wordt geassimileerd, zal zij dienen tot de vorming van lipase door dit organisme.

2. De afscheiding van zuren door microben in een cultuurbodem belemmert de afscheiding van lipase.

3. Zuren vormen verbindingen met lipase waaruit door basen lipase weder vrij wordt gemaakt. Deze zuur-lipasen diffundeeren evenals lipase door gelatine- en agarkultuurbodems; zuur-lipasen van hoogere vetzuren diffundeeren niet; zuur-lipasen ontlede vet niet.

4. Waterstofionen vertragen, hydroxylionen versnellen de lipase-werking. Indien de zuurgraad van een medium grooter is dan $\frac{1}{50} \Delta V$ heeft daarin geen vetsplitsing door microben-lipase meer plaats. Lipase gedraagt zich tegenover zuren als een zwakke base.

5. Calcium- en magnesiumionen bevorderen de lipase-werking eveneens trimethylamine en natriumglycocholaat, eenwaardige alcoholen belemmeren het proces terwijl suikers en glycerine daarop van geen invloed zijn.

6. Aanwezigheid van zuurstof en licht bevorderen de vetaantasting gedurende de lipase-werking.

7. Door middel van microben-lipase kan synthetisch vet worden verkregen. Uit oliezuur en glycerine ontstaat daarmee hoofdzakelijk het mono-glyceride van oliezuur benevens waarschijnlijk een weinig di- en triglyceride van oliezuur.

8. Microben-lipase vertoont groote overeenkomst met lever- en pancreas-lipase.

N. L. SÖHNGEN. „Microben-lipase“.



A



B



Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt, mede uit naam van den Heer B. J. VAN DER PLAATS, eene mededeeling aan: „*Waarnemingen betreffende anomale dispersie van het licht in gassen*”. (Eerste mededeeling).

Hoewel men er nauwelijks meer aan twijfelt, of op zekere astrofysische verschijnselen moet de anomale dispersie van het licht wel eenigen invloed hebben, zijn de meeste astrofysici toch de meening toegedaan, dat die invloed niet van algemeenen of ingrijpenden aard is, doch zich slechts in bijzondere gevallen, bij enkele lijnen van de spectra der hemellichamen, wellicht openbaart.

Om te beslissen of deze meening houdbaar is, moet men twee vragen beantwoorden. Ten eerste: Is anomale dispersie al of niet een *algemeen* verschijnsel, dat zich — mits men de omstandigheden van de waarneming juist kiest — voordoet in de omgeving van elke absorptielijn? En ten tweede: Kan men, op grond van de ons ten dienste staande physische en astrofysische gegevens, het al of niet zeer waarschijnlijk achten, dat in de atmosfeeren van hemellichamen omstandigheden verwezenlijkt zijn, die de gevolgen van anomale dispersie voor ons waarneembaar maken?

Met de tweede vraag zullen wij ons in dit opstel niet bezighouden; zij werd reeds meermalen behandeld¹⁾ en zal ook in het vervolg een onderwerp van nauwgezette studie blijven uitmaken.

Wat de eerste vraag betreft, daaromtrent heeft tot op zekere hoogte de dispersietheorie reeds uitspraak gedaan. Volgens die theorie gaat met selectieve absorptie onvermijdelijk gepaard een snelle variatie van den brekingsindex in de omgeving van het absorptiegebied. Alle experimenteele bevestigingen van de dispersietheorie kunnen dus gelden als steun voor de bewering, dat inderdaad bij elke absorptielijn anomale dispersie moet worden aangetroffen. Daarom kon de hypothese, dat wellicht vele zonneverschijnselen voortvloeien uit anomale dispersie, reeds in 1900, toen zij door een onzer voor het eerst werd uitgesproken²⁾, als geoorloofd en niet ontijdig worden beschouwd, al was destijds de eigenaardige loop van den brekingsindex in de nabijheid van smalle absorptielijnen nog slechts voor een paar metaaldampen werkelijk waargenomen. Sedert dien tijd heeft zich het directe waarnemingsmateriaal aanmerkelijk uitgebreid. Uit onderzoekingen van LUMMER, PRINGSHEIM, WOOD, EBERT, SCHÖN,

¹⁾ Versl. Nat. Afd. XVII, 193; XVIII, 181, 456, 913; XIX, 1007; „Le Radium” VII, Oct. 1910.

²⁾ W. H. JULIUS, Versl. Nat. Afd. VIII, 510.

PUCCIANTI, GEISLER, LADENBURG, en anderen is gebleken, dat honderden spectraallijnen aanleiding geven tot ongelijkmatigheden in de voortplantingssnelheid van naburige lichtsoorten op een wijze, die met de gevolgtrekkingen uit de dispersietheorie geheel in overeenstemming is.

De intensiteit waarmee het verschijnsel aan den dag trad, was bij de verschillende lijnen zeer uiteenlopend, en natuurlijk ook sterk afhankelijk van de bijzonderheden der proefneming. Bij een onnoemelijk aantal lijnen slaagde men er tot heden nog niet in, het te zien. Maar met het oog op de welgevestigde theorie der dispersie is de onderstelling dat sommige absorptielijnen of -banden *niet* tot anomale dispersie aanleiding geven ¹⁾ eene meer gewaagde, dan de onderstelling dat het verschijnsel zich wel vertoonen zal, als men maar de geschikte omstandigheden weet te kiezen.

Wij stellen ons voor, die omstandigheden bij een aantal gassen en dampen op te sporen, en te onderzoeken of werkelijk, overeenkomstig de theorie, selectieve absorptie steeds met anomale dispersie gepaard gaat, dan wel of er uitzonderingen zijn, die dan een wijziging van de theorie noodig zouden maken.

De waarnemingen waarover wij thans een korte mededeeling doen, betreffen jodiumdamp, bromiumdamp en stikstofdioxyde. Zij werden verricht volgens de methode die het eerst door PUCCIANTI ²⁾, later ook door GEISLER ³⁾, voor dergelijke onderzoekingen is toegepast. Daar op 't oogenblik onze opstelling nog slechts eene voorloopige is, en wij later over betere hulpmiddelen hopen te kunnen beschikken, bepalen wij ons thans tot de volgende korte aanduiding van de gebruikte toestellen.

Het licht van een booglamp van 25 A. wordt door een interferentiaalrefractor van JAMIN in twee bundels gesplitst, wier afstand 29 m.M. bedraagt. Op den weg van den eenen bundel bevond zich bij het onderzoek van bromiumdamp en van stikstofdioxyde een glazen buis van 12 c.M. lengte, waarin het gas in regelbare hoeveelheid kon worden toegelaten, terwijl de andere bundel twee platen spiegelglas doorliep die nauwkeurig even dik waren als de sluitplaten der buis. De waarnemingen met deze beide stoffen geschieden bij kamertemperatuur. Jodiumdamp daarentegen werd onderzocht bij 53° C. Daartoe waren in de beide lichtbundels twee gelijke glazen buizen van 40 c.M. lengte geplaatst, tezamen omgeven door een electrischen oven van

¹⁾ Zie o.a. HALE and ADAMS, *Astroph. Journ.* XXX, p. 230, 1909.

²⁾ PUCCIANTI, *Mem. Spettr. Ital.* XXXIII, 133 (1904); *Nuovo Cimento*, Ser. V, Vol. IX, 303 (1905).

³⁾ H. GEISLER, *Zur anomalen Dispersion des Lichtes in Metalldämpfen*, Diss., Leipzig, Barth, 1909.

HERAEUS, waardoor hunne middelste deelen over een lengte van ongeveer 23 c.M. aan dezelfde gelijkmatige verhitting konden worden blootgesteld. In één der buizen bevond zich jodium. Door aangesmolten nauwe zijbuisjes kon uitwisseling van spanning met de buitenlucht plaats hebben.

De horizontale interferentiefraanjes werden met behulp van lenzen scherp gesteld op de spleet van den spectrograaf. Als zoodanig deed voor kleine dispersie dienst een toestel van HILGER, met één flintglasprisma voor constante afwijking; enkele waarnemingen werden bij groote dispersie gedaan, met behulp van een apparaat, voorzien van een vlak buigingsrooster van ROWLAND (werkzame oppervlakte 8×5 c.M., 14436 lijnen per inch) en twee verzilverde spiegels van respectievelijk 150 en 250 c.M. brandpuntsafstand.

Op de bijgevoegde plaat vindt men eenige spectrogrammen, driemaal vergroot gereproduceerd. Wanneer zich geen selectief absorbeerende stof in één der lichtbundels bevond, zouden in het spectrum de interferentiebanden volkomen glad en nagenoeg horizontaal zijn, afgezien van de waaivormige uitspreiding met toenemende golflengte. In het absorbeerende gas echter is van sommige golven de snelheid grooter, van andere kleiner dan in lucht; daardoor verschuiven zich de banden, in toenemende mate als men een absorptielijn nadert, en worden zij dus plaatselijk gekromd. Bij de gekozen opstelling beteekent buiging van de interferentiebanden naar *beneden*, dat in den damp de voortplantingssnelheid toeneemt, dus de brekingsindex afneemt; een ombuiging naar *boven* beduidt natuurlijk het omgekeerde.

Het eerste spectrum toont de anomale dispersie, het tweede de absorptie in *jodiumdamp*. Nadert men in den zin van toenemende golflengten de scherpe grens van een der absorptiebanden, dan buigen de fraanjes steil omlaag en neemt dus de brekingsindex snel af; in den band zelf schijnt de brekingsindex eerst vrij snel, dan langzamer toe te nemen, om daarna, bij nadering van den volgenden band, steeds steiler weer te dalen. Dit herhaalt zich bij elken band, zonder uitzondering.

Het oplossend vermogen van den spectrograaf van HILGER was niet voldoende om in de banden van het jodium-spectrum de afzonderlijke lijnen te onderkennen; maar naar analogie van hetgeen duidelijk zichtbaar was in het geval van stikstofdioxyde (zooals aanstonds nader zal blijken), mag men het waarschijnlijk achten dat elke lijn in een band van het jodium-spectrum den brekingsindex aan haar violetten kant doet dalen, aan haar rooden kant doet rijzen, en dat de schijbaar geleidelijke toeneming van den index binnen elken

band ontstaat door de samenwerking der anomalieën, behoorende bij al de lijnen van dien band. Aan deze opvatting — die met de dispersietheorie in overeenstemming is — geven de waarnemingen bij stikstofdioxyde krachtigen steun.

Bij *bromiumdamp* mocht het ons niet gelukken, even scherpe anomalieën van de dispersie te fotografeeren als bij jodiumdamp. Waarschijnlijk is dit hierdoor te verklaren, dat, indien men de hoeveelheden der beide dampen zoodanig kiest, dat in beide gevallen ongeveer evenveel licht wordt doorgelaten, binnen de banden van het bromium de intensiteit minder sterk verandert dan binnen die van het jodium. Het absorptiespectrum van jodiumdamp vertoont grootere contrasten dan dat van bromiumdamp, bij gelijke gemiddelde absorptie. - Intusschen kan men uit de beschouwing van het derde en het vierde spectrum met voldoende zekerheid besluiten, dat de anomale dispersie in bromiumdamp geheel hetzelfde karakter draagt als die in jodiumdamp.

De volgende drie spectra hebben betrekking op stikstofdioxyde; het absorptiespectrum (gefotografeerd terwijl een der beide interfereerende bundels onderschept was) is geplaatst tusschen twee spectra die de anomale dispersie vertoonen; daarvan werd het bovenste verkregen met gas van geringere, het onderste met gas van grootere dichtheid. Belichtingstijd en ontwikkeling zijn zóó gekozen, dat op het eene het gebied tusschen $\lambda = 4400$ en $\lambda = 5200$, op het andere dat tusschen $\lambda = 5200$ en $\lambda = 6200$ het best tot zijn recht komt. Op den regel dat elke absorptielijn tot een vervorming van de interferentiebanden aanleiding geeft, hebben wij bij de honderden lijnen van het NO_2 -spectrum geen enkele uitzondering kunnen vinden. Natuurlijk hangt het bedrag der vervorming af van de hoeveelheid gas die doorloopen wordt. Zoo zijn in spectrum 5 de dispersie-anomalieën in het rood nauwelijks merkbaar; zij nemen over het algemeen toe met afnemende golflengte (gelijk ook de absorptie van NO_2 gemiddeld toeneemt naar 't violet); in spectrum 7, bij grootere hoeveelheid gas, zijn in 't rood de anomalieën reeds aanzienlijk en groeien zij in de richting naar de kleine golflengten zóó zeer aan, dat voorbij $\lambda = 5000$ van horizontale franjes ongeveer niets meer te bespeuren is.

Bij enkele smalle, min of meer geïsoleerd staande lijnen kan men zeer goed waarnemen, dat het omgevende licht als scherpe pieken tot in de naastliggende franjes uitschiet; aan den rooden kant der lijn naar boven, aan den violetten kant naar beneden. Indien ditzelfde nu óók plaats vindt bij elke der vele scherpe lijnen die, dicht op één gedrongen, tezamen een breederen band in het spectrum vormen,





dan is het duidelijk dat in zulk een absorptiegebied de donkere franjes minder donker, de lichte franjes minder licht zullen schijnen. Dit verschijnsel nu kan men op tal van plaatsen in de fotografieën waarnemen. Met breede donkere banden van het absorptiespectrum correspondeeren min of meer vage, contrastlooze deelen van het stelsel interferentiefrajes, terwijl deze laatste daarentegen duidelijk afwisselend licht en donker zijn op de plaatsen, waar de absorptie geringer is.

Tevens neemt men waar, dat overal in een gebied van dicht opeengeloopen absorptielijnen de gemiddelde brekingsindex bij toenemende golflengte grooter wordt, en in een gebied waar zich weinig of geen absorptielijnen bevinden, daalt.

De afbeeldingen 8 en 9 geven deelen van het NO_2 -spectrum bij groote dispersie. De strook 9 is een reproductie op ware grootte¹⁾; zij omvat het stuk van het spectrum, dat bij 7 begrepen is tusschen *a* en *d*; daarvan is wederom een deel, tusschen *b* en *c* gelegen, driemaal vergroot weergegeven in de strook 8.

Daar de expositietijd wegens de geringe lichtsterkte $1\frac{1}{2}$ uur bedragen moest en de opstelling niet aan zeer hooge eischen van stabiliteit voldeed, zijn op de fotografie de franjes niet zoo scherp als zij zich visueel vertoonden. Maar bij de directe waarneming bleken verscheidene banden nu in fijne lijnen opgelost te zijn, en het was ontwijfelbaar te zien, dat elke lijn in hare allernaaste omgeving den brekingsindex sterk wijzigde. Zelfs de reproductie kan hiervan de overtuiging schenken. Alle daarop zichtbare absorptielijnen van het stikstofdioxyde zijn namelijk slangvormig gekromd, een gevolg van het feit dat elke heldere interferentieband, bij de kruising met een donkere spectraallijn, deze aan den onderkant naar rechts, aan den bovenkant naar links schijnt te dringen. Dit bewijst, dat de duisterheid dier donkere lijnen niet uitsluitend op absorptie, maar gedeeltelijk op anomale dispersie berust. Het slangvormig uiterlijk der lijnen is geen optisch bedrog, want de natriumlijn D_2 (D_1 , die ruim $2\frac{1}{2}$ mM. meer naar rechts ligt, is onzichtbaar in de reproductie), teweeggebracht in de lichtboog, is scherp en volmaakt recht. Wij mogen dus proefondervindelijk bewezen achten, dat duizenden lijnen in de spectra van jodiumdamp, bromiumdamp en stikstofdioxyde tot anomale dispersie van het licht aanleiding geven.

De uitkomst van dit onderzoek steunt de meening, dat met selectieve absorptie steeds anomale dispersie gepaard gaat.

¹⁾ De interferentiebanden zijn hier in tegengestelden zin gekromd (vergeleken met al de andere spectra op de plaat); dit hangt samen met een kleine verandering in de opstelling der instrumenten.

Wiskunde. — De Heer JAK DE VRIES biedt een bijdrage aan van Dr. J. WOLFF te Middelburg: „*Quadratische omwentelingscomplexen en omwentelingscongruenties* (2,2).”

(Mede aangeboden door den Heer Hk. DE VRIES).

§ 1. Het volgende opstel sluit aan bij het onderzoek van Prof. Dr. JAK DE VRIES (Versl. Kon. Ak. v. W. Dl. 15, 1906, 7, p. 211—216).

Kiest men het gemeenschappelijk middelpunt O der beide quadratische omwentelingsoppervlakken O_1^2 en O_2^2 , die samen het singuliere oppervlak van een quadratischen omwentelingscomplex Ω vormen, tot oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel, dan moeten de wortels van $Ez^2 - 2Fz + 1 = 0$ alleen in teeken verschillen, daar met die wortels de *bisinguliere punten* B_1 en B_2 overeenkomen, waar O_1^2 en O_2^2 elkaar raken. Dan is $F = 0$, zoodat de vergelijking van Ω wordt

$$A(p_1^2 + p_2^2) + Bp_3^2 + 2Cp_3p_6 + Dp_6^2 + E(p_4^2 + p_5^2) = 0. \quad (1)$$

Deze vergelijking kan geschreven worden in elken der vormen

$$E \left(p_4 + p_1 \sqrt{\frac{A}{E}} \right)^2 + E \left(p_5 + p_2 \sqrt{\frac{A}{E}} \right)^2 + Bp_3^2 + 2(C + \sqrt{AE})p_3p_6 + Dp_6^2 = 0, \quad (2)$$

$$E \left(p_4 - p_1 \sqrt{\frac{A}{E}} \right)^2 + E \left(p_5 - p_2 \sqrt{\frac{A}{E}} \right)^2 + Bp_3^2 + 2(C - \sqrt{AE})p_3p_6 + Dp_6^2 = 0. \quad (2^*)$$

Daar de eerste leden van (2) en (2*) tot sommen van vier quadraten kunnen worden herleid, dus ook tot 2^e producten, zijn uit elk der vergelijkingen (2) en (2*) twee stelsels van congruenties (1,1) af te leiden, waaruit Ω is opgebouwd; wij noemen ze F en F' , resp. F^* en F'^* . Iedere F heeft een regelschaar gemeen met iedere F' ; evenzoo iedere F^* met iedere F'^* . De richtlijnen van al die congruenties vormen O_1^2 en O_2^2 .

§ 2. Wij geven het xOy -vlak een schroefing om Oz , waarbij de hoeksnelheid, positief gerekend van Ox naar Oy , zich tot de translatiesnelheid verhoudt als $1:k$. Wij kiezen de rechten p_1 en p_2 , waarlangs de snelheden van twee willekeurige in xOy gelegen punten P_1 en P_2 vallen, tot richtlijnen van een congruentie $F(1,1)$, en zoeken de vergelijking van den complex, die door wenteling van F om Oz ontstaat.

Zij $OP_1 = a_1$, $OP_2 = a_2$, $\angle xOP_1 = \phi$, $\angle xOP_2 = \phi + \alpha$.

De coördinaten van p_1 zijn naar volgorde der indices:

$$a_1 \sin \phi, - a_1 \cos \phi, - k, ka_1 \sin \phi, - ka_1 \cos \phi, a_1^2;$$

die van p_2 worden hieruit afgeleid door vervanging van a_1 door a_2 en van ϕ door $\phi + \alpha$. Een straal van den gezochten complex wordt voorgesteld door de vergelijkingen

$$(p_1 - kp_1) \sin \phi - (p_3 + kp_2) \cos \phi = \frac{k}{a_1} p_6 - a_1 p_3$$

en

$$(p_1 + kp_1) \sin (\phi + \alpha) - (p_3 + kp_2) \cos (\phi + \alpha) = \frac{k}{a_2} p_6 - a_2 p_3.$$

Eliminatie van ϕ levert als vergelijking van den complex:

$$\begin{aligned} & (p_1 - kp_1)^2 \sin^2 \alpha + (p_3 + kp_2)^2 \cos^2 \alpha = \\ & = \left(\frac{k}{a_1} p_6 - a_1 p_3 \right)^2 - 2 \left(\frac{k}{a_1} p_6 - a_1 p_3 \right) \left(\frac{k}{a_2} p_6 - a_2 p_3 \right) \cos \alpha + \left(\frac{k}{a_2} p_6 - a_2 p_3 \right)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Vergelijking (3) stelt den complex Ω voor, als aan de volgende 5 betrekkingen voldaan is:

$$\sin^2 \alpha = \lambda E \dots \dots \dots (4)$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{1}{E}} \dots \dots \dots (5)$$

$$a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha + a_2^2 = -\lambda B \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{k^2}{a_1^2 a_2^2} (a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha + a_2^2) = -\lambda D \dots \dots \dots (7)$$

$$k \left\{ -2 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) \cos \alpha \right\} = -\lambda (C \pm \sqrt{AE}) \dots \dots (8)$$

(5) levert 2 waarden voor k , die alleen in teeken verschillen; de volstrekte waarde is $\sqrt{-OB_1^2} = \sqrt{-OB_2^2}$. Uit (6) en (7) volgt:

$$a_1 a_2 = \sqrt{\frac{AB}{DE}} \dots \dots \dots (9)$$

uit (8), in verband met (4), (5) en (6):

$$\cos \alpha = \frac{a_1 a_2 (C - kE)}{kB} \dots \dots \dots (10)$$

Voor iedere k vindt men één waarde van $\cos \alpha$. Daar echter aan alle voorwaarden voldaan blijft als α van teeken verandert, mag aan P_1 , in plaats van P_2 , ook het spiegelbeeld P_2' van P_2 t. o. v. OP_1 worden toegevoegd. Uit (4) volgt voor iedere k één λ ; eindelijk worden a_1 en a_2 uit (6) en (7) gevonden; het zijn de stralen van de cirkels, volgens welke xOy door O_1^2 en O_2^2 gesneden wordt. Door deeling van (4) en (7) blijkt, dat de afstand van O tot $P_1 P_2$ (of ook $P_1 P_2'$) voor beide waarden van k dezelfde moet zijn. Dit was te voorzien: $P_1 P_2$ moet, als complexstraal, raken aan de complex

kegelsnede van xOy , zijnde een cirkel met O tot middelpunt. Zijn straal is :

$$r = \sqrt{\frac{-A}{E}} \dots \dots \dots (11)$$

§ 3. Om de gedachten te bepalen, onderstellen we dat A en E gelijke teekens hebben.

Voor $k = + \sqrt{\frac{A}{E}}$ worden aan iederen straal p_1 van de op O_1^2 gelegen rechts gewonden regelschaar R_1 twee stralen p_2 en p'_2 toegevoegd van de op O_2^2 gelegen rechts gewonden regelschaar R_2 , zoodat $\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_1 = a$. De complex Ω ontstaat zoowel door wenteling om Oz van de congruentie F met richtlijnen p_1 en p_2 als van F' met richtlijnen p_1 en p'_2 .

Voor $k = - \sqrt{\frac{A}{E}}$ worden aan iederen straal p_1^* van de op O_1^2 gelegen links gewonden regelschaar R_1^* twee stralen p_2^* en p'_2^* toegevoegd van de op O_2^2 gelegen links gewonden regelschaar R_2^* , zoodat de snijpunten van p_1^* en p_2^* met xOy , als ook die van p_1^* en p'_2^* van uit O onder een hoek a^* gezien worden. De complex Ω ontstaat zoowel door wenteling van de congruentie F^* met richtlijnen p_1^* en p_2^* , als van F'^* met richtlijnen p_1^* en p'_2^* .

Laat de rechte P_1P_2 door O_1^2 nog gesneden worden in Q_1 , door O_2^2 in Q_2 . Door Q_1 gaan de stralen q_1 en q_1^* van R_1 en R_1^* , door Q_2 gaan de stralen q_2 en q_2^* van R_2 en R_2^* . Wij hebben dan, dat Ω op 4 manieren is opgebouwd uit stelsels van ∞^1 congruenties (1,1), die op de volgende wijze ontstaan :

1°. door omwenteling van F met richtlijnen p_1 en p_2 , 2°. van F' met richtlijnen q_1 en q_2 , 3°. van F^* met q_1^* en p_2^* , 4°. van F'^* met p_1^* en q_2^* .

Is $C = 0$, dan volgt uit (10), dat $a^* = a$, en daar p_1^* en p_2^* dan de spiegelbeelden van p_1 en p_2 t. o. v. xOy zijn, is Ω bestand tegen spiegeling aan xOy , dus *symmetrisch*.

§ 4. Zij A_1 een punt van p_1 . De complexkegel van A_1 bestaat uit de vlakken (A_1, p_2) en (A_1, p'_2) , de singuliere straal s , die uit A_1 vertrekt, rust op p_2 en p'_2 . Beschrijft A_1 de rechte p_1 , dan doorloopt s de regelschaar q_1 , waarvan de schaar (p_1, p_2, p'_2) de toegevoegde is. Daar p_1, p_2 en p'_2 tot rechtsgewonden regelscharen op O_1^2 en O_2^2 behooren en deze oppervlakken elkaar in B_1 en B_2 aanraken, worden p_1, p_2 en p'_2 gesneden door twee isotrope lijnen B_1I en B_1J , loodrecht op Oz , zoodat I en J de cirkelpunten van xOy zijn. Brengt

men dus door één straal s van \mathfrak{q}_1 den lineairen complex C_1 , die Oz tot as heeft, dan ligt \mathfrak{q}_1 geheel in C_1 , daar zij er s , B_1I en B_2J mee gemeen heeft. Bij wenteling om Oz blijft \mathfrak{q}_1 in C_1 en vormt de doorsnede van C_1 met Ω , dus een omwentelingscongruentie (2,2). Doorloopt A_1 een rechte p_1^* , dan beschrijft s een regelschaar \mathfrak{q}_1^* , die door wenteling dezelfde congruentie voortbrengt als \mathfrak{q}_1 .

De singuliere stralen, die van de punten A_2 van O_2^2 vertrekken, vormen een dergelijke congruentie. *De singuliere stralen van Ω vormen dus 2 omwentelingscongruenties (2, 2).*

§ 5. Een omwentelingscongruentie $C(2, 2)$ ontstaat door Ω te snijden met een willekeurigen lineairen complex, die Oz tot as heeft:

$$p_6 + mp_3 = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Vervangt men in (1) p_6 door $-mp_3$, dan krijgt men:

$$A(p_1^2 - p_2^2) + Bp_3^2 - E(p_1^2 + p_2^2) = 0, \dots \dots (13)$$

waarin $B' = B - 2Cm + Dm^2$ is.

Voor het focaaloppervlak vindt men gemakkelijk:

$$AE(x^2 + y^2)^2 + B'(x^2 + y^2)(A + Ez^2) + m^2(A + Ez^2)^2 = 0 \quad (14)$$

Het bestaat dus uit twee quadratische omwentelingsoppervlakken F_1^2 en F_2^2 , die elkaar in dezelfde punten B_1 en B_2 raken als O_1^2 en O_2^2 . Snijding van $p_6 - mp_3 = 0$ met den onveranderden complex (13) geeft een congruentie met dezelfde focaaloppervlakken F_1^2 en F_2^2 . De gemeenschappelijke raaklijnen van F_1^2 en F_2^2 vormen dus twee quadratische omwentelingscongruenties, die elkanders spiegelbeelden t. o. v. xOy zijn.

§ 6. Laat een congruentiestraal s de vlakken β_1 en β_2 , die in B_1 en B_2 loodrecht op Oz staan, in $P_1\left(x_1, y_1, -\sqrt{\frac{-A}{E}}\right)$ en $P_2\left(x_2, y_2, +\sqrt{\frac{-A}{E}}\right)$ snijden. Drukt men de coördinaten van s in x_1, y_1, x_2 en y_2 uit, en substitueert ze in (12) en (13), dan krijgt men:

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 2m\sqrt{\frac{-A}{E}} \dots \dots \dots (15)$$

en

$$x_1x_2 + y_1y_2 = -\frac{AB'}{E} \dots \dots \dots (16)$$

De congruentiestralen s bepalen dus een verwantschap (1, 1) tusschen de punten der vlakken β_1 en β_2 . Doorloopt P_1 een straal van den waaier (B_1, β_1) , dan doorloopt P_2 een straal van den waaier (B_2, β_2)

en s beschrijft een regelschaar Σ . Met B_1 komt het oneindig verre punt van B_2P_2 , met B_2 dat van B_1P_1 overeen, zoodat in Σ gelegen zijn de stralen door B_1/P_2 en door B_2/P_1 . Hieruit volgt, dat Σ in B_1 en B_2 aan β_1 en β_2 raakt, zoodat Oz een symmetricas van Σ is en O het middelpunt.

Een omwentelings-congruentie (2,2) ontstaat dus door wenteling van een regelschaar om één van haar symmetricissen.

Komen alleen bestaansbare congruenties in aanmerking, dan zijn 2 soorten te onderscheiden:

1°. De regelschaar draait om een symmetricas die haar niet snijdt; dan zijn de focaaloppervlakken eenbladige omwentelingshyperboloiden.

2°. De regelschaar draait om een symmetricas, die haar snijdt; dan is een der focaaloppervlakken een omwentelingsellipsoïde, het andere een tweebbladige omwentelingshyperboloïde.

In het eerste geval heeft de aanraking van F_1^2 en F_2^2 en de regelschaar Σ plaats in onbestaansbare punten, in het tweede geval in bestaansbare punten.

In beide gevallen bestaan de doorsneden van xOy met F_1^2 en F_2^2 uit de cirkels, die de in xOy gelegen symmetricassen van Σ tot stralen hebben. Eén daarvan is in het 2^{de} geval onbestaansbaar.

Physiologie. — De Heer WENCKEBACH biedt eene mededeeling aan van den Heer D. DE VRIES REILINGH: „*Een nieuwe methode ter bepaling van de arterieele bloedsdrukking bij den mensch; terens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten.*”

(Mede aangeboden door den Heer HAMBURGER).

I. KORT OVERZICHT DER GEBRUIKELIJKE METHODEN.

De bepalingen van de arterieele bloedsdrukking bij den mensch geschieden aanvankelijk volgens de oudere methoden van VON BASCH, VON FREY, POTAIN e.a. Daardoor werd, zooals de nieuwere onderzoekingsmethoden leerden, slechts een min of meer grove schatting van de bloedsdrukking bereikt.

Een groote vooruitgang in de oplossing van het probleem werd verkregen door de vinding van RIVA-ROCCI en HILL en BARNARD d.w.z. door de methode der circulaire armoecompressie door middel van een holle manchet, waarin de drukking vermeerderd en verminderd kon worden. Werld oorspronkelijk een smalle manchet gebruikt, von RECKLINGHAUSEN toonde aan, dat de invloed der weke deelen van den arm belangrijk geringer was, wanneer een manchet gebruikt werd van minstens 13 cm. breedte. Sedert dien wordt deze breedte

manchet bijna overal gebruikt. LEONARD HILL doet de bepalingen der bloedsdrukking zelfs met een manchet van 20 cm. breedte.

Nu wordt de bloedsdrukking voornamelijk gemeten volgens twee verschillende principes, waarnaar men gewoon is de oscillatoire en de palpatoire methode te onderscheiden.

A. *Oscillatoire methode.*

Men plaatst een holle manchet om den bovenarm van den te onderzoeken persoon en doet de luchtdrukking in het inwendige dier manchet gaandeweg toenemen. Er ontstaan dan in de manchet pulsaties, wier grootte men op de een of andere wijze kan bepalen: 't zij door ze grafisch te registreeren op een draaiende trommel, 't zij door ze af te lezen op een met de manchet verbonden kwikzuil, waterkolom of anderen index.

Het eigenaardige van deze pulsaties is, dat ze grooter worden, naarmate de drukking in de manchet toeneemt, tot ze een maximale grootte hebben bereikt; en dat ze daarna bij drukvermeerdering in de manchet afnemen in grootte, om eindelijk nagenoeg te verdwijnen.

Oorspronkelijk werd aangenomen, dat de diastolische of minimale bloedsdrukking (*mBd*) in de manchet bereikt was, wanneer deze de grootste pulsaties vertoonde. Men stelde zich voor, dat dan de arterie tijdens de diastole juist volkomen gesloten werd door den manchetdruk, maar dat ze zich tijdens de systole van het hart nog ten volle kon uitzetten, zoodat op dat oogenblik de wijldeverschillen der arterie tijdens de beide hartsphasen het grootst waren.

En men rekende, dat de systolische of maximale bloedsdrukking (*MBd*) in de manchet was bereikt, wanneer deze geen of nagenoeg geen pulsaties meer vertoonde. Men nam aan, dat dan de arterie ook tijdens de systole van het hart door de manchet geheel werd dichtgedrukt, zoodat ze geen pulsaties meer op de manchet kon overbrengen.

Tegen beide redeneeringen zijn bezwaren in te brengen.

Voorreest was men het al spoedig oneens erover, welke pulsaties der manchet-lucht aanwezen, dat de *mBd* was bereikt. Oorspronkelijk was men geneigd te veronderstellen, dat op het oogenblik dat de allergrootste pulsaties werden waargenomen, in de manchet de *mBd* heerschte. Later meende men, dat de *mBd* in de manchet was bereikt, wanneer de pulsaties daarin bij stijgenden druk begonnen grooter te worden. Men stelde zich voor, dat op dat oogenblik de manchetdruk éven grooter was dan de diastolische drukking in de arterie. Daardoor zou deze arterie tijdens de diastole van het hart

een weinig ingedrukt worden. Van dat oogenblik af zouden dus de volumewisselingen van de arterie beginnen toe te nemen en deze zouden zich voortplanten op de lucht in de manchet, zoodat ook daarvan de volumewisselingen op dat oogenblik zouden toenemen (v. RECKLINGHAUSEN, ERLANGER, WYBAUW).

We komen hierop later terug, maar dienen al dadelijk te wijzen op het feit, dat op dit punt nog geen overeenstemming is verkregen en we nog steeds in het onzekere verkeerren bij welke pulsaties nu eigenlijk de *mBd* in de manchet is bereikt.

Daarbij komt nog, dat de grootte der pulsaties meestal zoo geleidelijk toe- en afneemt, dat een nauwkeurige grens tusschen groote en grootste pulsaties uiterst moeielijk is vast te stellen en er dus te veel speling overblijft voor de subjectiviteit van den onderzoeker.

Nog meer meeningsverschil bestaat er omtrent de *MBd*.

Al spoedig bleek, dat de pulsaties in de manchet nooit geheel ophielden; zelfs niet wanneer de druk daarin zeer hoog werd gemaakt. Zeer waarschijnlijk mag dat worden toegeschreven aan het feit, dat de arterie proximaal tegen de manchet aanklopt. Men trachtte nu deze kleinste pulsaties te verwaarloozen en plaatste het moment van de *MBd* dáár, waar de pulsaties kleiner begonnen te worden. Maar ook dit moment is dikwijls niet scherp te bepalen.

Vandaar dat WYBAUW, op het voetspoor van OLIVER, een dubbele manchet construeerde, welker proximale band die zoogenaamde randpulsaties moest opvangen, terwijl een afzonderlijke distale band op bijzondere wijze met een schrijfinrichting in verband stond (ERLANGER) en zoo de volumewisselingen der arterie opteckende. WYBAUW plaatste echter de beide banden der manchet vlak naast elkaar. En nu bleek ons, dat zelfs bij een druk in de 2 banden boven de *MBd*, de randpulsaties door den bovensten band toch nog op den ondersten werden voortgeplant (vgl. de curven).

Bij het tegenwoordig vrij wel algemeene gebruik van de breede manchet (alleen SAHLI gebruikt nog den smallen band) doet zich nu een tweede bezwaar voor.

Beschouwen wij alleen de *MBd*.

Is in de breede manchet een druk gemaakt, die een weinig kleiner is dan de *MBd*, dan zal de manchet reeds de arterie kunnen dichtdrukken. Immers van de drukking in de arterie zal een gedeelte worden opgevangen onder de manchet, juist doordat deze zoo breed is. Daardoor zal de drukking in de arterie aan den benedenrand der manchet kleiner worden dan die aan den bovenrand, welke laatste gelijk is aan de *MBd*. De op de manchet overgebrachte pulsaties zullen dus kleiner worden, vóódat daarin de *MBd* is

bereikt. Met SAHLI meenen wij, dat hierin een bezwaar gelegen is tegen de breede manchets. Het zal de vraag zijn, of het voordeel ten opzichte van de weeke deelen, dat de breede manchets ontegenzeggelijk bezit (v. RECKLINGHAUSEN) tegen dit nadeel opweegt. Het ware in ieder geval gewenscht, dat men onderling overeenkwam steeds een manchets van bepaalde breedte te gebruiken, opdat men onderling vergelijkbare cijfers verkreeg.

In ieder geval zal het duidelijk geworden zijn, dat zoowel bij de bepaling van de *MBd* als bij die van de *mBd* volgens deze methode veel wordt overgelaten aan de subjectiviteit van den onderzoeker. Ons bleek bij de waarnemingen, gedaan met het toestel van WYBAUW, dat beide momenten door het zoo geleidelijk grooter of kleiner worden der pulsaties, uiterst moeilijk scherp zijn af te lezen.

B. Palpatoire Methode.

Als men in de manchets den druk geleidelijk doet toenemen, zijn er bij palpatie van den distalen pols twee momenten waar te nemen. Ten eerste een oogenblik, waarop die pols kleiner wordt, en ten tweede het oogenblik, waarop deze verdwijnt. Op het eerste moment zou in de manchets de *mBd*, op het tweede de *MBd* bereikt zijn.

Immers wanneer de manchetsdruk $>$ de diastolische drukking in de arterie, dan zal de arterie tijdens de diastole van het hart even gesloten zijn. Dan zal er een zekere kracht noodig zijn om de arterie open te persen: een gedeelte der systolische polsgolf wordt dus tegengehouden, distaal wordt de pols kleiner.

Is verder de manchetsdruk $>$ de systolische drukking in de arterie, dan blijft ook tijdens de systole van het hart de arterie gesloten en wordt dus de geheele polsgolf tegengehouden: distaal is geen pols meer voelbaar.

De bezwaren, boven tegen de breede manchets te berde gebracht, gelden ook hier. Daar echter de weeke deelen bij verschillende menschen wel meer variabel zullen zijn dan het gedeelte van de polsgolf, dat onder de breede manchets wordt opgevangen, is het misschien beter een breede manchets te blijven gebruiken. Toch bestaat zeker de mogelijkheid, juist onder een breede manchets, dat, vóórdat daarin de *MBd* is bereikt, de polsgolf als golf wordt vernietigd en het bloed onder de manchets toch nog door blijft sijpelen (PACHON), wat echter aan den distalen pols door palpatie niet kan worden waargenomen. (Société de biologie, Juni 1909).

Echter zoowel tegen de bepalingen met de breede manchets als tegen die met de smalle bestaan bezwaren, die nu niet in de com-

pressiemethode, maar in het palpeeren van den distalen pols gelegen zijn. Is het moment van het wegblijven (of terugkeeren) van den pols dikwijls al moeilijk nauwkeurig waar te nemen, dat van het kleiner worden van den pols levert zeer groote moeilijkheden op voor een juiste waarneming. Zoo laat ook deze methode weer te veel over aan de subjectiviteit van den onderzoeker.

Vandaar dat SAHLI trachtte beide momenten te registreeren. Hij plaatste daartoe een sphygmograaf op den distalen pols. Aldus werd sphygmografisch het kleiner worden van den polsslag en het verdwijnen daarvan opgeteekend. SAHLI ondervond bij de toepassing dezer methode eenige moeilijkheden, die vooral het gevolg waren van de bij de circulaire compressie in den distalen arm optredende veneuze stuwung, welke moeilijkheden hij, naar het schijnt met succes, trachtte te overwinnen door stijf aansnoeren van den sphygmograaf. Ieder echter, die met den sphygmograaf vertrouwd is, SAHLI zelf in de eerste plaats, weet hoe buitengewoon voorzichtig men moet zijn met het maken van gevolgtrekkingen uit de hoogte van den sphygmografisch opgeteekenden polsuitslag. Een geringe verschuiving van den sphygmograaf, een geringe drukvermeerdering op den pelot door zwelling van den arm (veneuze stuwung!) en zooveel kleinigheden meer kunnen den vorm en de hoogte van den sphygmografischen pols totaal veranderen.

Daarom lijkt ons deze hoewel objectieve — methode geen verbetering ten opzichte van de zuiver palpatoire methode.

Over de zoogenaamde *sensatoire methode*, waarbij de patient zelf aangeeft, wanneer hij de kloppingen in zijn arterie voelt beginnen en ophouden (begin en eind der groote oscillaties), behoeven wij niet veel te zeggen. Ze is alleen uit te voeren bij intelligente patienten, voert de subjectiviteit van den patient in in de plaats van die van den onderzoeker, wat minstens even erg is, en werkt door inspanning der aandacht bloedsdrukkingverhoogend.

De *auscultatoire methode* (KOROTKOW), waarbij men distaal van de manchets een arterietoon luider en zwakker hoort worden overeenkomstig met de verschillende drukkingen, die in de manchets heerschen, zoodat op die wijze gegevens moeten worden verkregen voor de bepaling van de *Mbd* en de *mbd*, lijdt natuurlijk aan hetzelfde euvel der subjectiviteit.

En hetzelfde geldt van de *methode van EURET*, die de groote oscillaties en het verdwijnen van den pols voelt aan de arterie vlak beneden den onderrand der manchets.

VON RECKLINGHAUSEN was dan ook met geen dezer methoden tevreden en beproefde een andere methode te vinden.

Hij vult de manchet met water en registreert de drukwisselingen daarin grafisch door een HÜRTHLE'schen tonograaf. Hij neemt nu op theoretische gronden aan, dat, wanneer de druk in de manchet = de druk in de arterie, de arteriewand vrij floteert en de polscurve op de ware grootte door den tonograaf wordt opgeschreven. En tevens neemt hij aan, dat, daar op dat oogenblik de druk in de manchet = die in de arterie, de polscurve dan ook op de ware hoogte wordt opgeschreven. Hij verdeelt dan de polscurve in verschillende deelen en neemt aan, dat waar een bepaald deel het grootst wordt opgeschreven, het ook op de juiste hoogte wordt opgeschreven. Uit een op die wijze verkregen „trapecurve" construeert hij dan een absoluut sphygmogram.

SAHLI heeft op deze omslachtige methode een scherpe kritiek geleverd, die men na kan lezen in het D. Arch. f. Klin. Med. Bd LXXXI, 1904, pag. 493, en die wij hier niet in extenso zullen repeteeren. Hij toont aan, dat stuwing in het verloop van de — breede — manchet, en andere factoren, evenzooveel bronnen van fouten zijn.

v. RECKLINGHAUSEN houdt in zijn laatste publicatie zijn methode vol, hoofdzakelijk op grond daarvan, dat ze dezelfde cijfers geeft voor de bloedsdrukking als de andere methoden (Beihefte zur Med. Klinik, Hft 8, 1910). Hij vergeet echter dat juist die andere methoden door hun subjectiviteit geen voldoende vertrouwen bezitten.

Hoe het zij, overeenstemming in het probleem van de bepaling der bloedsdrukking bij den levenden mensch is allerminst verkregen. Alle methoden geven ons nog een eenigszins onbevredigend gevoel. Daarbij is speciaal v. RECKLINGHAUSEN's methode omslachtig, zijn toestel kostbaar en zijn lezing der curven niet in alle opzichten zonder bedenking.

Bij alle methoden, ook bij die van v. RECKLINGHAUSEN, schijnt willekeur van den onderzoeker niet buitengesloten.

Met opzet verzwegen wij tot nu toe een ander bezwaar: *de factor van den arteriewand*.

Meestal wordt deze factor geheel buiten rekening gelaten, daar men veronderstelt, dat ze = 0 is. Deze meening is hoofdzakelijk gegrond op onderzoekingen, aan doode arteriewanden ingesteld. Men moet met het maken van gevolgtrekkingen uit deze onderzoekingen echter zeer voorzichtig zijn. Eenigen tijd na den dood schijnt de contractietoestand van den arteriewand, en daarmee zijn spanningscoëfficiënt belangrijk toe te nemen. Onderzoekingen op dat tijdstip gedaan, zijn voor ons doel waardeloos.

Daarentegen schijnt de arteriewand vlak na den dood zeer week en samendrukbaar te zijn; maar wie zal zeggen of daarin niet reeds afstervingsverschijnselen in 't spel zijn?

En zelfs — wie zal zeggen of niet ook in den arteriewand van het levende dier, welks arterie blootgelegd werd, de contractietoestand en daarmee de samendrukbaarheid veranderd is door den operatieven ingreep?

En mag men den arteriewand niet verwaarloozen, dan worden de bepalingen der bloedsdrukking, zooals ze tot nog toe verricht zijn, nog minder betrouwbaar. Is dan bij de bepaling der bloedsdrukking volgens de methode der grootste oscillaties deze arteriewand bij de bepaalde bloedsdrukking inbegrepen of niet? Of is deze factor van den arteriewand misschien de reden van de meeningsverschillen, die er heerschen over de vraag: welke van de groote oscillaties nu juist geschreven worden op het oogenblik, dat in de manchete de *mBd* aanwezig is?

Bij de bepalingen van de bloedsdrukking, althans van de maximale, volgens de palpatoire methode is de arteriewand in de gevonden waarde vrij zeker inbegrepen.

Zou ons vergelijking der beide methoden misschien iets kunnen leeren omtrent den arteriewand? O. i. is daartoe de subjectiviteit der methoden te groot.

Na het voorgaande is het waarlijk geen wonder, dat de schattingen van den invloed van den arteriewand door verschillende onderzoekers zeer veel uiteenloopen. Zoo vond LEONARD HILL, dat de carotis van een kind samenviel bij een druk van 2 *mMHg*; HERRINGHAM en WOMACK vonden bij hun bepalingen van de samendrukbaarheid van verschillende arteries deze 4—18 *mMHg*, in twee gevallen zelfs 30—34 *mMHg*.

Nemen we eens aan, dat de factor van den arteriewand grooter is dan 0, dan is het mogelijk te begrijpen, waarom het begin der groote oscillaties en de grootste oscillaties niet bij denzelfden manchete druk vallen. v. RECKLINGHAUSEN verklaart dat, door volkomen theoretisch aan te nemen, dat de arterie niet lang genoeg gecomprimeerd wordt om volkomen dichtgedrukt te worden, wanneer in de manchete even meer dan diastolische drukking heerscht; en dat dus de volgende systolische polsgolf reeds komt, wanneer de arterie nog niet volkomen is dichtgedrukt. Dan zullen dus eerst bij een hoogere drukking in de manchete de oscillaties maximale grootte verkrijgen.

Men kan echter misschien ook zeggen, dat, wanneer in de manchete een iets hoogere dan diastolische bloedsdrukking heerscht, de arterie nog maar weinig ingedrukt wordt door den weerstand, dien de arterie-

wand biedt; dat dus eerst als de drukking in de manchiet vermeerderd wordt met het bedrag, dat noodig is om dien weerstand te overwinnen, de arterie tijdens de hartsdiastole geheel wordt dichtgedrukt, op welk oogenblik dan natuurlijk de oscillaties eerst de maximale grootte hebben bereikt.

Uit deze beschouwing zou dan kunnen volgen, dat het verschil der beide drukkingen, die overeenstemden met de grootste oscillaties en met het begin der grootte oscillaties, den weerstand van den arteriewand representeerde.

Het kan gaarne toegegeven worden, dat ook dit een volmaakt theoretische redeneering is; echter verklaart ze het geleidelijk toenemen der grootte van de oscillaties bij drukvermeerdering in de manchiet o.i. ongedwongener dan de redeneering van VON RECKLINGHAUSEN.

Te oordeelen naar de bezwaren, die in het voorgaande zijn te berde gebracht, scheen het zeer gewenscht een methode te zoeken, die naast een betrouwbare bepaling van MBd en mBd , ons een schatting veroorloofde van den invloed, dien de weerstand van den arteriewand op deze bepalingen had.

Bovendien scheen het gewenscht de methode zoo objectief mogelijk te maken, vrij van de subjectiviteit van den onderzoeker zoowel als van den onderzochte. En daar grafische methoden meestal het best voldoen aan die voorwaarde van objectiviteit, lag het voor de hand, althans bij de opstelling en uitwerking der methode, de grafische registratie te gebruiken.

Na veel zoeken hebben wij ten slotte gemeend de onderstaande methode te mogen publiceeren in de verwachting, dat ze bij nauwgezet onderzoek ook van andere zijde, zal blijken te voldoen aan de tevoren opgestelde eischen.

II. BESCHRIJVING DER METHODE.

Deze is ten slotte zeer eenvoudig. *Zij bestaat hierin, dat men wat beneden de comprimeerende manchiet gebeurt, niet palpatoir waarneemt of met den sphygmograaf opschrijft of met den stethoscoop beluistert, maar plethysmografisch opteekent.*

Men neemt een voldoende grooten, — den geheelen onderarm en hand van den patiënt bevattenden —, goed gesloten, niet lekkenden plethysmograaf. Een eenvoudige plethysmograaf van blik naar het model van Mosso is volmaakt voldoende voor ons doel. De manchiet van dezen plethysmograaf zij van dik, niet te rekbaar caoutchouc, en van die wijdte, dat ze een normalen bovenarm met geringe span-

ning omvat. Men zorgt voor een behoorlijke lengte dezer manchets, opdat ze over een afstand van b.v. 10 cM. den bovenarm omsluit. Vóór in den plethysmograaf is het buisje ingesoldeerd, waarop de caoutchoucslang past, die naar het MAREY'sche trommeltje voert, welks membraanverplaatsingen op de gewone wijze op een draaiende trommel worden opgeschreven. Het geheele plethysmografische systeem is gevuld met lucht.

Wordt op deze wijze de plethysmograaf geapliceerd, dan ziet men op de draaiende beroete trommel de volumewisselingen van den arm opgeschreven, die het gevolg zijn van den polsslag en van de ademhaling. Reeds dadelijk zij er op gewezen, dat alle bewegingen door den patient natuurlijk moeten worden vermeden, daar ook deze onmiddellijk gepaard gaan met volumewisselingen van den ingesloten arm. Psychische invloeden storen onze onderzoekingen niet of bijna niet, zooals later zal blijken.

Nu wordt om den caoutchoucband¹⁾ van den plethysmograaf de manchets gelegd, die later den arm circulair zal moeten comprimeeren. Deze manchets wordt zóó gelegd, dat ze zeker slechts dat gedeelte van den plethysmograafband omsluit, dat nauw om den bovenarm sluit, zoodat de distale rand der manchets op eenigen afstand boven het zich van den arm naar den plethysmograafrand afbuigend deel van den plethysmograafband ligt. Om daarvan zeker te zijn, is het goed om vlak boven den plethysmograafrand den arm zacht te omsnoeren met een caoutchoucbuis (deel van een maagsonde b.v.), die in die ligging vastgeklemd wordt. Dit heeft tevens het voordeel, dat het gedeelte van den plethysmograafband, dat tusschen den blikken plethysmograaf en de compressiemanchets vrij gebleven is, strak gespannen wordt en dus niet door uitwijken de plethysmografische curve kan doen mislukken. Fixatie van den plethysmograaf kan bovendien dikwijls van nut zijn.

Als compressiemanchets gebruikten wij den tweekamerigen band van WILBAUW, verbonden met een kwikmanometer. De proximale kamer van die manchets moet de zogenaamde randpulsaties opvangen, terwijl alléén de distale kamer met de schrijfinrichting is verbonden (volgens het principe van ERLANGER) en de kloppingen der omsnoerde arterie opschrijft. We hebben dus bij onze methode tevens, ter contróle, de curve opgeschreven, die berust op het principe der grootste oscillaties. Enkele malen hebben we ook de smalle compressiemanchets van RIVA-ROCCI gebruikt, verbonden met een manometer, en dan hebben we de oscillaties niet opgeschreven.

¹⁾ Om verwarringen te voorkomen zullen wij de caoutchoucmanchets van den plethysmograaf steeds: band noemen, de holle compressiemanchets steeds: manchets.

We schreven dus boven elkaar : 1. de curve volgens de oscillatoire methode 2. de curve van den plethysmograaf. Alleen de telkens in de manchets heerschende druk werd op den manometer afgelezen en steeds dadelijk in de curve opgeteekend.

Om mooie curven te verkrijgen, is het goed om telkens gedurende den tijd dat beide curven bij een bepaalden druk geschreven worden — enkele seconden — even den adem te doen inhouden. Anders is steeds de ademhaling in de plethysmografische curve meer of minder duidelijk te zien, hetgeen de aflezing wel niet onmogelijk maakt, maar toch wat bemoeielijkt. Interessant is, dat zelfs bij een druk in de compressiemanchet ver boven de *MBd*, waarbij dus zeker ook alle venen in den arm zijn dichtgedrukt, in de plethysmografische curve nog steeds de ademhaling duidelijk zichtbaar blijft. Ook dan doet iedere inademing die curve wat dalen, iedere uitademing wat rijzen! En dit is het geval, zoowel als compressiemanchet en plethysmograafband beide om den bovenarm worden geapliceerd, als wanneer de eerste om den bovenarm, de tweede om den benedenarm wordt aangelegd en dus invloed van den een op den ander geheel buitengesloten is. En eveneens treedt deze ademhalingsinvloed op, wanneer de geheele arm van den patient volkomen door een assistent wordt gefixeerd gehouden. Wij hopen dit verschijnsel in een later onderzoek te verklaren.

Op 't oogenblik moeten we volstaan met de mededeeling, dat de patient den adem alleen telkens even behoeft in te houden als men fraaie curven wenscht. De oogenblikken, die ons interesseeren laten zich overigens ook bij gewone rustige ademhaling met groote nauwkeurigheid aflezen.

Hoe sterk de plethysmograafband en de compressiemanchet den arm omsluiten doet er niet veel toe, mits men maar zorgt beneden de *mBd* te blijven. Dat is natuurlijk gemakkelijk te doen, is zelfs zonder meer regel. Door ons werd daarop geen uitzondering waargenomen, zelfs niet bij zeer dikke armen. En blijven we beneden dien druk in den aanvang, dan neemt de gaandeweg meer en meer opgepompte compressiemanchet de drukking ten slotte geheel over en komt de druk van den plethysmograafband niet meer in aanmerking. Er is echter niets tegen een ruimen band te nemen, die zelfs een dikken arm niet samensnoert, daar de compressiemanchet wel voor afsluiting van het plethysmografisch systeem naar boven zorg gaat dragen.

Na deze inleiding kunnen we overgaan tot het nemen der *proef* :

Daartoe verhoogden we den druk in de compressiemanchet *snel*, totdat deze zeker boven de *MBd* gekomen is. Dit moet snel gebeuren

om de armvenen geen gelegenheid te geven zich in belangrijke mate te vullen. Bij langzame stijging van den druk in de manchet zou dit wel geschieden, daar de venen zeker vroeger dichtgedrukt worden dan de arterien. Daarom moet men vrij snel te werk gaan. Dan sluiten zich de arterien spoedig na de venen. Eenige veneuze stuwung treedt er zeker op, maar die hindert niet. Heeft men de drukking in de manchet gebracht tot een hoogte, die zeker boven de *MBd* in de arterie gelegen is, dan laat men door een ventiel in de slang van het plethysmografisch systeem den, door de veneuze zwelling van den arm ontstane, overdruk eenvoudig ontsnappen, en begint dus de curve, terwijl in den plethysmograaf de atmosferische druk heerscht. Dan sluit men het ventiel weer goed af.

Het verdere verloop der proef laat zich het beste demonstreeren aan de hand der curven. Alle curven vertoonen een typisch verloop en zijn zeer gemakkelijk op te nemen. Mislukkingen behoeven bij eenige oefening niet voor te komen.

Nemen we als voorbeeld de curve, verkregen van J. P. V. (normaal individu, 26 jr. 17. I. 1911. fig. 1).

We begonnen met een druk in de manchet van WYBAUW van 160 mM. Hg en lieten de trommel een paar seconden draaien. Men ziet noch in de plethysmografische curve, noch in de curve van de manchet zelf een polsgolf. We hadden dus zeker een druk bereikt, die grooter was dan de *Mbd*.

Na de trommel te hebben doen stilstaan, verlaagden we de drukking tot 150 mM. Hg. Brachten we dan de trommel weer een paar seconden in rotatie, dan zagen we weer geen pulsaties.

Op die wijze lieten we daarna de drukking telkens eenige mM. Hg afnemen, en schreven de curven.

Bij 145 mM. Hg verschijnt in de curve van WYBAUW's manchet een zwakke pols, in de plethysmografische curve is nog niets te merken. Hetzelfde zien we bij 140 mM. Hg. Nu moet men opmerken, dat de plethysmografische curven bij 160, 150, 145 en 140 mM. Hg alle nagenoeg op dezelfde hoogte op de trommel geschreven zijn.

Groote verandering treedt echter op bij 135 mM. Hg. Plotseling stijgt de plethysmografische curve. *Dit beteekent dus, dat er bloed in den arm dringt.* Immers de stijging der curve beteekent omhoog gelicht worden der membraan van het MAREX'sche trommeltje. Dit beteekent druktoeneming der lucht in het plethysmografisch systeem, en deze moet het gevolg zijn van zwelling van den arm. En de arm kan wel door geen andere oorzaak zwellen dan doordat, onder WYBAUW's manchet door, bloed in den arm dringt. En als bewijs voor deze redeneering geldt de bij dezen druk geschreven plethys-

mografische curve, waarin duidelijk een polsgolfje — voor 't eerst — te herkennen is.

We hebben hier ontwijfelbaar voor ons: *het moment van de Mbd.* Echter met dien verstande, dat in die *Mbd* natuurlijk de factor van den arteriewand begrepen is. Immers deze zal meehelpen de arterie te openen.

In de oscillatoire curve is op dit moment niets bijzonders te zien, dat niet reeds bij een vorigen druk te zien was.

Nu wachten we rustig af tot de wijzer van het MAREY'sche trommeltje niet meer stijgt. Daarover verloopt eenigen tijd. Stijgt eindelijk de schrijver niet meer, dan zien we in den regel dat hij den eens bereikten stand blijft bewaren. Op uitzonderingen komen wij later terug. In geval van twijfel schrijven we een tweede, derde enz. curve bij denzelfden druk. Blijft dan werkelijk de schrijver op dezelfde hoogte, dan weten we dus, dat de arm in volumen niet meer toeneemt, dat dus het kleine polsgolfje, dat onder de compressie-manchet door slaat het volumen van den arm niet meer vermag te doen toenemen.

Dan verminderen we den druk met b.v. 5 *mMHg* (in ons geval tot 130 *mM*).

Er volgt weer een stijging der curve en de polsslag wordt duidelijker. Beide een bewijs, dat de arterie verder opengaat. In de oscillatoire curve is nog geen verandering te zien. We wachten weer kalm het einde der stijging af, schrijven eventueel nog een tweede curve (vgl. het voorbeeld).

Nu verminderden we den druk tot 127 *mMHg* en na een kort oogenblik zien we vrij snel de plethysmografische curve dalen. Wat is er gebeurd?

Tijdens de drukkingen van 135 en 130 *mM*. stroomde er, doordat de arteriën open en de venen nog gesloten waren, bloed in den arm. Dit bloed stroomde door de arteriën, door de capillairen naar de venen en zou den arm weer verlaten hebben, zoo het in de venen niet tegen de compressie-manchet was gestuit en daar was tegengehouden. Daardoor nam de hoeveelheid bloed in den arm toe en steeg de plethysmografische curve. En deze stijgt dan natuurlijk zoolang, tot er evenwicht is gekomen tusschen den druk distaal van WYBAUW's band en proximaal daarvan.

We mogen nu de arteriën + capillairen + venen als een systeem van communiceerende vaten beschouwen, althans zeker als we langzaam werken. Zoolang als de druk in de venen lager is dan die in de arteriën zal er bloed vloeien van de arteriën in de venen, en dus het volumen van den arm bij nog dichtgedrukte venen toenemen,

Dit zal gebeuren, totdat de druk in de venen gelijk geworden is aan dien in de arteriën. In de venen zal dus, als we maar langzaam genoeg werken, tenslotte de arterieele bloedsdrukking heerschen, d.w.z. de drukking van de bloedzuil zelve, waarbij de arteriewand natuurlijk niet in 't spel is.

Eerst als deze druk in de venen, die dus kleiner moet zijn dan de arterieele druk + de arteriewand, en die behalve door den venenwand ook gedragen wordt door de omgevende weefsels, grooter wordt dan de drukking in de compressiemanchet, zal het bloed onder die manchet door weer uit de venen naar het hart kunnen stroomen. Maar op dat oogenblik zal het volume van den arm weer afnemen. Immers het verval in de venen distaal en proximaal van de manchet is op dat oogenblik enorm.

Nu neemt het volume van den arm in ons geval af bij een druk van 127 *m.M.Hg.* Ook de daling van het geschreven eind curve bewijst dat.

Daar de venenwand als factor buiten rekening mag worden gelaten is *deze drukking dus de eigenlijke bloedsdrukking zonder den factor van den arteriewand.*

A fortiori mogen we de arteriën + capillairen + venen als een systeem van communicerende vaten opvatten, als we rekening houden met de woorden van LEONARD HILL: „that there are wider channels connecting the arteries and veins through which the pressure is transmitted to the veins. The existence of such wide channels is recognised by histologists.” (Further advances in physiology, 1909, blz. 143).

Oorspronkelijk wachttten we eenvoudig af, tot de schrijver van de MAREY'sche trommel niet meer steeg. Dan verlaagden we den druk. Op deze wijze verkregen we als factor voor den arteriewand bij normale personen ongeveer 15 *mM. Hg.* (40 bepalingen).

Toen kwam in onze handen het artikel van LEONARD HILL en MARTIN FLACK in het Journal of Physiology vol. XXXVIII. Deze gaan, om de nauwkeurigheid der palpatoire methode te bepalen, uit van hetzelfde idee als wij, nl. dat ten slotte in de venen dezelfde druk optreedt als in de arterien, wanneer de laatste open, de eerste afgeknepen zijn. Hun proefneming wordt het best aangehaald met hun eigen woorden: „We place one armlet round the brachial artery, and another narrower one round the forearm of the same arm — each connected with a manometer. We find the obliteration pressure with the first armlet. Suppose it is 150 *mM. Hg.* We lower the pressure in this armlet to say 145 *mM. Hg.* so that arterial blood can get through into the limb, but cannot get out of the veins of

the limb until the pressure in the veins rises above 145 mM. Hg. Allowing time for the veins to fill, we then measure the pressure in one of the superficial veins and find that it does finally reach this pressure. We raise the pressure in the second armlet, observe the pressure at the moment when the vein fills from below. One of us watches the vein and signals the moment of filling, the other reads the manometer. We repeat the observation several times. If we find the pressure in the vein reaches 145 mM. Hg, we know that the obliteration pressure was correct within 5 mM. Hg. To carry out this method a vein must be chosen which does not fill from above or at any rate quickly. With such high pressures in the veins the valves leak, and this makes quick working necessary. In cases of high pressure it is necessary to give a rest between each test as the maintenance of the first armlet at a pressure close to the obliteration pressure is rather painful.

From the above observations we conclude that the obliteration method of measuring the arterial pressure is correct within 5 mM. Hg, even in cases where the arterial wall is markedly changed from pathological causes".

Men ziet welk een verbluffende overeenkomst er is tusschen deze methode en de onze, wat het uitgangspunt betreft. En tevens ziet men, dat door de proefneming van LEONARD HILL en MARTIN FLACK bewezen is, dat men — zoo werkend — arteriën + capillairen + venen als een systeem van communicerende vaten mag beschouwen.

Hoewel HILL's bepaling van de „obliteration pressure" volgens de palpatoire methode geschiedt en dus de onnauwkeurigheden der subjectiviteit, in ons eerste hoofdstuk beschreven, bezit; en hoewel, zooals men in de beschrijving kan lezen, de bepaling van de drukking in de venen met eenige moeilijkheden gepaard gaat, lag in deze publicatie voor ons toch een aansporing om een nieuwe serie van experimenten te nemen, waarbij nog langzamer te werk werd gegaan. Hoewel we op de algemeene gevolgtrekkingen later terugkomen, kunnen we toch nu reeds zeggen, dat de factor van den arteriewand door ons waarschijnlijk eerst te hoog werd geschat, maar tevens dat de arteriewand toch niet geheel mag worden verwaarloosd.

Om tot ons geval terug te keeren, we kunnen als cijfers daar dus aangeven :

$$MBd + Aw \text{ tusschen } 140 \text{ en } 135 = 137 \text{ mM. Hg.}$$

$$MBd \quad \quad \quad \text{tusschen } 130 \text{ en } 127 = 128 \text{ mM. Hg.}$$

$$\text{Dus: } Aw \quad \quad \quad = 9 \text{ mM. Hg.}$$

Dat het dalen der plethysmografische curve werkelijk tot stand

komt, doordat het veneuze bloed onder de compressiemanchet door naar het hart wordt geperst, blijkt uit een bijzonder gedrag der oscillatoire curve, zooals dat dikwijls is te zien en vaak aan den manometer is te controleeren. Wanneer we de curve II (D. M., normaal individu, 31 jr, 6. I. 1911) bekijken, dan zien we bij 107 mM. Hg de oscillatoire curve stijgen. Dit komt daardoor, dat de venen beginnen bloed onder de compressiemanchet te persen, waardoor de druk daarin stijgt; immers het volume van den arm op de compressieplaats neemt dan toe. We zien dan ook het kwik in den manometer een paar mM. rijzen. En wanneer we nu den druk in de manchet verlagen, wordt de passage eronderdoor door het veneuze bloed geforceerd en de oscillatoire curve daalt weer (in ons geval bij 106 mM. Hg).

Het is duidelijk, dat als PACHOX gelijk heeft, nl. dat onder de breede compressiemanchet de polsgolf kan worden vernietigd bij een bepaalden druk en het bloed toch onder de manchet kan blijven doorsijpelen (vgl. blz. 1287), dat dan de palpatoire methode voor de bepaling van de $MBd + Aw$ in den steek laat; onze methode echter niet, daar ook het doorsijpelen van het bloed den arm zal doen zwellen en dus de plethysmografische curve zal doen rijzen.

Na deze niteenzettingen schijnt het ons toe, dat onze methode ons in staat stelt de $MBd + Aw$ nauwkeurig te bepalen en den factor van den Aw te schatten.

Één opmerking moet er nog worden gemaakt. We vonden evenals HILL en FLACK, dat bij hooge bloedsdrukking — maar ook alleen dan — het langzame werken pijnlijk kan worden voor den patient. En daar aangenomen wordt, dat pijn de bloedsdrukking kan verhoogen, zou het mogelijk zijn, dat onze bepaling van den Aw daardoor foutief (te gering) werd. Dit bezwaar geldt ook tegen de proeven van HILL en FLACK dus. In zulke gevallen is het dus noodig ten slotte weer den druk snel op te voeren tot even boven den te voren bepaalden $MBd + Aw$ en te zien of dan de pols weer verdwenen is. Zoo niet, dan is het noodig den druk te bepalen, waarbij de plethysmografische pols weer verdwijnt. Deze methode van werken geeft dan echter minder fraaie resultaten. Het schijnt, dat een enkele maal bij zeer hooge Bd , de Bd tijdens de langzame phase der proef een paar mM. stijgt. Bij lagere Bd echter treedt die pijn niet op.

Na nog een paar malen de curve bij lageren druk te hebben opgeschreven (120, 115, 110 mM.) om te constateeren, dat nu werkelijk geleidelijke daling bij drukvermindering plaats vindt, openen we ter bepaling van de mBd even het ventiel van het plethysmo-

grafisch systeem en laten daaruit dus den overdruk uit. We repeeteeren dat bij elke verdere drukverlaging om zoodoende de volgende curven op hetzelfde niveau geschreven te krijgen. Dit is om de volgende reden noodig.

We hadden gehoopt, dat bij het moment van de mBd zich in art. en venen iets dergelijks zou voordoen als bij dat van de MBd . Soms meenen we uit het stijgen of dalen der curve iets omtrent de mBd en den Δw te kunnen lezen, maar het bleek, dat dat bij lange na niet constant genoeg het geval was. Op vele wijzen hebben we ernaar gestreefd, maar zonder vrucht. We hebben dan ook moeten opgeven op die wijze de mBd en de $mBd + \Delta w$ te bepalen. Het gelukte ons slechts — langs anderen weg — uit de plethysmografische curve de $mBd + \Delta w$ te bepalen. Uit de reeds verkregen gegevens omtrent den Δw , kunnen we dan echter gemakkelijk de mBd alléén berekenen.

Om nu de $mBd + \Delta w$ te bepalen, gaan we als volgt te werk :

Na het ventiel weer gesloten te hebben, schreven we nog eens de curve bij 110 mM. Hg. Dan werd telkens de drukking 5 mM. Hg verlaagd, het ventiel van den plethysmograaf geopend, weer gesloten, en de curve geschreven.

Na fixatie van de geheele curve werd dan de hoogte van de polsgolf bij elken waargenomen druk gemeten. Het bleek nu, dat deze hoogte geleidelijk toenam totdat van een bepaalden druk af ze constant werd en ze eerst bij zeer lagen druk soms weer wat afnam (door bij dien druk minder goed aansluiten van de manchets).

Het spreekt van zelf, dat, nu we gegevens trachten te putten uit de hoogte van de polsgolf, deze overal op hetzelfde niveau moest worden geschreven.

De druk nu, waarbij op deze wijze werkend, we de polsgolf voor het eerst maximale grootte zagen vertoonen, is, naar ons voorkomt, de $mBd + \Delta w$.

Om dat in te zien doen we het best in omgekeerden zin — alsof we den druk van 0 af gaandeweg deden toenemen — te redeneeren.

Wij moeten dan daarbij wel in 't oog houden, dat de polscurve van den plethysmograaf een volumecurve is.

Wanneer nu de druk in de compressiemanchet lager is dan de mBd , dan gaat bij iedere hartsystole het volle volume bloed nog daaronderdoor, en wij krijgen dus in de plethysmograafcurve de volumeveranderingen te zien, die daarvan het gevolg zijn.

Dit gebeurt ook nog, wanneer juist de $mBd (+ \Delta w)$ bereikt is.

Wordt echter de druk even hooger dan die $mBd + \Delta w$, dan blijft de arterie gedurende een deel van de polsgolf gesloten. In plaats

van het volle volume bed gaat onder den band slechts door $b'ed'$ tijdens iedere hartstysole. Een gedeelte dus wordt door den druk tegengehouden, het volume bloed dat onder de manchiet doorstroomt wordt kleiner en van dat oogenblik af wordt dus de volumecurve van den plethysmograaf kleiner. Dit oogenblik ligt dus even boven de $mBd + Aw$, en het vorige moment was dus dat der $mBd + Aw$.

Soms is tevens duidelijk te zien, dat, wanneer de druk even boven de $mBd + Aw$ komt, niet alleen de polsgolf van den plethysmograaf kleiner wordt, maar dat daarin ook een diastolische pauze te bespeuren is. Immers gedurende den tijd $d'—d''$ wordt geen bloed in den arm geworpen. Zeer dikwijls althans is het laatste gedeelte van de polsgolf ($g—d$) veel horizontaler geworden. Dit verschijnsel levert dus, als het aanwezig is, een goede contrôle op voor dat van het kleiner worden van de polsgolf.

In onze curve I is de diastolische pauze niet te zien, het kleiner worden van den pols bij 80 mM. Hg echter duidelijk. In curve III is daarentegen de diastolische pauze bij 85 en vooral bij 90 mM. Hg zeer fraai te zien.

In ons voorbeeld (curve I) is dus :

$$mBd + Aw = 75 \text{ mM. Hg}$$

$$Aw \text{ (vgl. vroeger) was } 9 \text{ mM. Hg}$$

$$\text{Dus } mBd = 66 \text{ mM. Hg.}$$

De verschijnselen omtrent de grootte van den plethysmografischen pols doen zich voor, onverschillig of de manometer met de manchiet verbonden is of afgeknepen wordt, en hangen dus niet van de kwikschommelingen af. Bij gelijktijdige registratie der beide curven valt echter op, dat de laatste groote polsgolven van den plethysmograaf en de grootste oscillaties meestal bij denzelfden druk optreden, wat met onze opvattingen omtrent de beteekenis der grootste oscillaties ook volkomen strookt (vgl. Hoofdstuk I).

Wanneer men de oscillatoire curve goed bekijkt, dan ziet men hoe moeilijk met zekerheid het begin der oscillaties, die de Mbd zouden aangeven, is op te sporen. En men ziet tevens hoe het bijna ondoenlijk is begin en eind der groote oscillaties te bepalen. En volgens onze ondervinding is dit dikwijls het geval. En zooals gezegd, de oscillatiecurven zeggen ons niets omtrent den Aw .

Voor we verder gaan, dient erop te worden gewezen, dat men zich niet moet laten bedriegen door de uitzetting der lucht in den plethysmograaf door de warmte. Als men met de methode vertrouwd is, ziet men dadelijk, wat het gevolg is van het geleidelijk warm worden der plethysmograallucht en wat toegeschreven moet worden

aan het indringen van de polsgolf in den arm. Maar men kan bovendien gemakkelijk van te voren verwarmde lucht in den plethysmograaf brengen of wachten tot de lucht daarin een constante warmte heeft verkregen. Het laatste neemt tijd, maar dat is eer een voordeel dan een nadeel. Iedere eerste bepaling van de *Bd*, met welk instrument ook, geeft door psychische invloeden te hooge cijfers; en eerst de volgende bepalingen, als de patient het instrument niet meer vreest, geven constante cijfers. Gedurende het warm worden der lucht kan men dus gevoegelijk een eerste bepaling uitvoeren, waardoor de patient de vrees voor het instrument verliest en de onderzoeker zich eenigszins orienteert.

Het gaat met *Bd*-apparaten als met thermometers. De z.g. thermometers à la minute moeten even goed 10 minuten in den oksel liggen als de gewone, omdat de oksel niet eerder de lichaamstemperatuur heeft verkregen. Zoo kunnen ook geen snelle bepalingen van de *Bd* worden uitgevoerd, omdat de patient eerst den schrik voor het instrument moet verliezen. Kent de patient eenmaal het instrument, dan is ook een volgenden dag of een volgende keer de eerste bepaling betrouwbaarder.

III. VERKREGEN GEGEVENS.

In het geheel voerden we bij verschillende personen tot nu toe 172 bepalingen uit. Daarvan waren 40 bij nephritis opgenomen, 4 bij insufficiëntia aortae, 3 bij arterio-sclerose, 1 bij de ziekte van STOKES-ADAM en de rest bij tub. pulm., anaemie, arthritis, nervosisme en normale individuen. Het is ondoenlijk en onnoodig al deze cijfers hier te geven. We zullen slechts hier en daar een greep doen.

Zoo waren van ons voorbeeld de cijfers:

1. <i>J. P.</i> 17. 27 jr. (norm.)	MBd + Aw.	155	140	137	137
	MBd	145	129	128	125
	Aw.	10	11	9	12
	mBd + Aw.	75	75	75	75

De derde rij cijfers behoort dan bij curve I.

Van den patiënt, van wien curve II verkregen werd, werden ook nog een paar volledige curven opgenomen.

2. <i>D. M.</i> 31 jr. (norm.)	MBd + Aw.	115	112
	MBd	106	106
	Aw.	9	6
	mBd + Aw.	80	80

Van den patiënt van curve III (5^{de} rij):

3.	<i>H. v. L.</i> 27 jr. (norm.)	MBd + Aw.	115	125	120	115	119
		MBd	108	117	110	108	113
		Aw.	7	8	10	7	6
		mBd + Aw.	75	70	75	75	80

Van de patiënte van curve IV (3^{de} rij):

4.	<i>F. v. Sch.</i> 70 j. (art.skl.)	MBd + Aw.	154	147	145
		MBd	—	138	140
		Aw.		9	5
		mBd + Aw.	100	95	90

En tenslotte van den patiënt van curve V (3^{de} rij):

5.	<i>J. v. N.</i> 24 jr. (neph.chr.)	MBd + Aw.	147	148	152
		MBd	137	139	137
		Aw.	10	9	15
		mBd + Aw.	110	110	100

We vonden de volgende gemiddelden (met de manchets van WYBAUW):

A.	<i>Normaal</i>	15—20 jr.	21—40 jr.	41—60 jr.	boven 60 jr.	
		MBd + Aw.	114	121	132	145
		MBd.	104	112	125	139
		Aw.	10	9	7	6
		mBd + Aw.	70	75	76	86
		Polsamplitude	44	46	56	59
B.	<i>Nephritis chron.</i>					
		MBd + Aw.		162		
		MBd.		149		
		Aw.		13		
		mBd + Aw.		104		
		Polsamplitude		58		
C.	<i>Insufficiëntia Aortae</i> (manchet v. RIVA-ROCCI).					
		MBd + Aw.		157		
		MBd.		140		
		Aw.		17		
		mBd + Aw.		70		
		Polsamplitude		87		
D.	<i>Ziekte van Stokes-Adam</i> (manchet v. WYBAUW).					
		MBd + Aw.		197		
		mBd + Aw.		80		
		Polsamplitude		117		

Enkele bepalingen van den arteriewand vielen te groot uit, doordat de bepaling te snel werd uitgevoerd. Afgezien echter van die

bepalingen, viel ons op, dat de factor, die bij denzelfden persoon voor den arteriewand werd gevonden vrij constant is, zelfs bij verschillende *MBd*. Dit pleit natuurlijk sterk voor de methode.

Slechts éénmaal op de 172 bepalingen is de vaststelling van de *MBd + Aw* twijfelachtig, waarschijnlijk door den invloed van de uitzetting der plethysmograaflucht door de warmte. Alle andere bepalingen zijn volkomen scherp af te lezen.

De bepaling van de *MBd* zonder den *Aw* vereischt meer zorg en men mag zich daarvoor met een paar bepalingen niet tevreden stellen.

Bij normale menschen neemt gemiddeld de *MBd* toe met den leeftijd, eveneens de *mBd*, wat ook bekend was.

De *Aw*-factor varieert niet in die mate. Gemiddeld is ze 6–10 mM. Hg. Wanneer we dus bij normale menschen de volgens de obliteratiemethode bepaalde *MBd + Aw*, als de maximale bloedsdrukking beschouwen, maken we geen groote fout. En deze is met onze methode snel en gemakkelijk met groote nauwkeurigheid te bepalen, terwijl de bepaling van den *Aw* tijd vereischt en bij hooge bloedsdrukking wat pijnlijk is. Maar ook alleen bij hooge bloedsdrukking. Een onzer patienten met een maximale bloedsdrukking van 135 mM. Hg voelde geen pijn, een ander met een maximale bloedsdrukking van 170 mM. Hg had wel pijn.

Over 't algemeen wijken de door ons gevonden cijfers niet af van die, welke men meestal als normaal aanneemt.

Opvallend is de geringe invloed van den *Aw*, die gevonden werd bij arteriosclerose. Misschien mogen we uit ons ééne geval niet te veel concludeeren. Maar toch zou een geringe invloed van den *Aw* bij sterk uitgesproken arteriosclerose misschien niet geheel onverklaarbaar zijn. Er komen in zulk een arteriewand naast verkalkte gedeelten, die ongetwijfeld meer weerstand aan de compressie zullen bieden dan een normale wand, zeker ook bindweefselachtig gedegeneerde gedeelten voor, waarvan de elasticiteit en de weerstand juist verminderd zijn. En als deze gedeelten maar dichtgedrukt worden, zal de perifere pols verdwijnen. Deze opvatting schijnt bevestigd te worden door de — hoewel geringe — afneming der factor van den *Aw* met den leeftijd.

Sterker dan normaal is de invloed van den *Aw* veelal in de waarnemingen, die wij deden bij chronische nephritis. Ook dit behoeft niet onverklaard te blijven. Immers we mogen wel aannemen dat een gecontraheerde arterie — harde pols der nephritici — meer weerstand tegen de compressie zal bieden dan een normale arterie.

Het is merkwaardig, dat wij na deze waarnemingen een referaat vonden van een artikel van JANEWAY (Lancet, Maart, 1911), waarin

deze onderzoeker ook komt tot de overtuiging, dat de arteriewand bij arteriosklerose weinig invloed heeft op de bepaling van de bloeddrukking, een arteriewand, die in contractie verkeert, daarentegen veel!

Om kort te gaan, onze methode schijnt ons in staat te zijn betrouwbare gegevens te verschaffen omtrent M_{Bd} en m_{Bd} en een indruk te geven van de factor van den A_w .

Om gemiddelden te kunnen bepalen van de B_d bij normale menschen van verschillenden leeftijd en bij verschillende ziekten, moeten er nog meer bepalingen worden uitgevoerd.

Hetzelfde is noodig, wanneer we de resultaten, verkregen met de smalle en de breede compressiemaanchet, met elkaar willen vergelijken. Hoewel het ons voorkomt, dat met de smalle manchet hogere cijfers worden verkregen, hebben we nog niet genoeg vergelijkende bepalingen uitgevoerd, om daaromtrent iets met zekerheid te durven beweren.

Geophysica. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer C. BRAAK. „*De getijkrachten te Batavia volgens den astatischen seismograaf van WIECHERT.*”

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BLAKHUYZEN).

In een vorige mededeeling werd, uit de opteekeningen van den astatischen WIECHERT-seismograaf over het halfjaar Juli-December 1909, voor den E—W. component van het dubbeldaagsch maansgetij der bodembeweging te Batavia afgeleid :

$$0''.0114 \cos (2t - 251^\circ 53^1),$$

theoretische waarde :

$$0''.0155 \cos (2t - 270^\circ)$$

Op dezelfde wijze zijn daarna de registraties van het volgende halfjaar in bewerking genomen; daarenboven zijn voor het geheele tijdvak van één jaar de voornaamste der andere getijden berekend met uitzondering van het dubbeldaagsch zonsgetij, dat door de dagelijkse warmtegolf te sterk is gestoord.

Deze getijden zijn in volgorde hunner belangrijkheid :

dubbeldaagsch maansgetij	M_2 ,	E—W. component	
zons-maansdeclinatiegetij	K_1 ,	N—S.	„
maansdeclinatiegetij	O,	„	„
zonsdeclinatiegetij	P,	„	„
zons-maansdeclinatiegetij	K_2 ,	E—W.	„
dubbeldaagsch maansgetij	M_2 ,	N—S.	„

¹⁾ Verslagen der K. A. v. W. te Amsterdam, 29 April 1910.

De dubbeldaagsche getijden werden weder afgeleid door eerst de afstanden uit te meten tusschen de opgeteekende lijnen te 7^u en 10^u, 8^u en 11^u enz. en daarna de volgende verschillen (13—10)—(10—7) enz. te berekenen; voor de enkeldaagsche werd hetzelfde gedaan voor de uren 16^u en 10^u, 10^u en 4^u enz.

De gevoeligheid werd afgeleid uit de bepalingen van den slinger-tijd en de indicatorvergrooting, evenals vroeger in geschied. De opstelling van den toestel bleef onveranderd; voor de indicatorvergrooting werden daarom de vroegere waarden:

$$234.3 \text{ (E—W) en } 185.7 \text{ (N—S)}$$

aangenomen. Voor den gemiddelden slingertijd werd gevonden in de verschillende maanden:

	E—W	N—S
1909 Juli	10.0 ⁵	10.4
Aug.	10.1	10.3
Sept.	10.0	10.1
Oet.	9.6	9.8
Nov.	9.7	10.1
Dec.	9.6 ⁵	10.0
1910 Jan.	9.8	9.8
Febr.	10.0 ⁵	10.0 ⁵
Mrt.	9.5	9.5
April	9.7	9.7
Mei	9.5	9.5
Juni	9.1	9.0 ⁵

waaruit berekend is voor de equivalente slingerlengte van den

E—W slinger: 22.70 meter

N—S „ : 23.83 „

De hellingsverandering, overeenkomende met 1 mm. uitslag op het diagram is derhalve:

voor den E—W component: 0".0388

„ „ N—S component: 0".0466

Zooals reeds in de vorige mededeeling voor het dubbeldaagsch getij werd opgemerkt, geeft de wijze van uitmeting de dubbele amplitude behoudens deeling door den factor $1 - \cos 3\alpha$ (α = hoeksnelheid per uur), aangezien het argument in 3 uur niet 90°, maar 3° verandert.

Voor de enkeldaagsche getijden verkrijgt men de dubbele amplitude behoudens deeling door $1 - \cos 6\alpha$.

De aflezing geschiedde bij het uursein, dat gegeven wordt 5,5 minuten vóór het uur volgens middelbaren Batavia tijd; hiervoor werd het argument gecorrigeerd.

Hieronder volgen de waarden der bovengenoemde getijden, zooals ze uit de opteekening van den seismograaf werden gevonden, tevens met vermelding der theoretische waarde in de onderstelling eener absoluut harde aarde.

Tijdvak Juli 1909 tot en met Juni 1910, Noord en West zijn positief gerekend; als beginpunt van telling geldt

1 Juli 1909, 12 uur 's middags.

M_2 , E—W	gevonden waarde	$0''.01120 \cos (2t - 58^\circ.0)$ ¹⁾
	theoretische „	$0''.01544 \cos (2t - 45^\circ.5)$
M_2 , N—S	gevonden waarde	$0''.00848 \cos (2t - 356^\circ.9)$
	theoretische „	$0''.00167 \cos (2t - 315^\circ.5)$
K_2 , E—W	gevonden waarde	$0''.00277 \cos (2t - 245^\circ.8)$
	theoretische „	$0''.00229 \cos (2t - 269^\circ.8)$
O, N—S	gevonden waarde	$0''.00644 \cos (t - 38^\circ.2)$
	theoretische „	$0''.00700 \cos (t - 312^\circ.8)$
K_1 , N—S	gevonden waarde	$0''.00449 \cos (t - 313^\circ.6)$
	theoretische „	$0''.00945 \cos (t - 359^\circ.8)$
P, N—S	gevonden waarde	$0''.00645 \cos (t - 84^\circ.2)$
	theoretische „	$0''.00291 \cos (t - 9^\circ.2)$

Terwijl de E—W componenten, behoudens een iets te groote waarde van de amplitude van K_2 , weinig afwijken van hetgeen men op theoretische gronden mag verwachten, is dit geenszins het geval met den N—S component. Dat het instrument hiervan niet de schuld draagt blijkt duidelijk genoeg wanneer men de onderstaande uitdrukkingen vergelijkt, verkregen door voor den N—S component van het M_2 getij voor elk uur het getij afzonderlijk te berekenen.

10 uur	0.348	$\cos (2t - 170^\circ.4)$
11 „	0.334	$\cos (2t - 175^\circ.1)$
12 „	0.400	$\cos 2t - 177^\circ.3$
1 „	0.346	$\cos (2t - 176^\circ.5)$
2 „	0.414	$\cos (2t - 178^\circ.1)$
3 „	3.392	$\cos (2t - 184^\circ.2)$
4 „	0.420	$\cos (2t - 183^\circ.0)$
5 „	0.367	$\cos (2t - 192^\circ.4)$

¹⁾ Het verschil tusschen waargenomen en theoretisch argument wijkt af van de vroeger gevonden waarde. Dit is een gevolg van een onjuistheid in de vroegere berekening.

Voor den N—S component van het O-getij werd gevonden, telkens 2 uren bijeen nemende:

10 en 11 uur	0.123	<i>cos</i>	(<i>t</i> —199°.2)
12 „ 1 „	0.199	<i>cos</i>	(<i>t</i> —229°.6)
2 „ 3 „	0.399	<i>cos</i>	(<i>t</i> —235°.1)
4 „ 5 „	0.375	<i>cos</i>	(<i>t</i> —205°.4)

Voor al voor het M₂ getij zijn de verschillen onderling zeer gering; voor het O-getij loopen de amplituden nogal uiteen, maar wijst de overeenstemming der argumenten duidelijk uit, dat het verschil met de theoretische amplitude aan een periodisch storenden invloed van buiten moet worden toegeschreven. Wij zullen zien, dat de watergetijden in den Indischen Oceaen en in de Java-Zee als oorzaak zijn te beschouwen.

Stelt men namelijk de amplitude van het ongestoorde aantrekkingsgetij M₂ (N—S) gelijk aan $\frac{2}{3}$ der theoretische waarde, hetgeen wegens de geringe grootte van dit getij ten opzichte van de storende kracht tot geen noemenswaardige fout aanleiding kan geven, stelt men verder het argument gelijk aan het theoretische argument, dan wordt voor de storende kracht gevonden:

$$0''00772 \cos (2t - 2^\circ.3)$$

Daar het getij, indien geen vertraging aanwezig ware en dus hoogwater overeenkwam met de culminatie der fictieve ster, voor de lengte van Batavia wordt voorgesteld door:

$$R \cos 2t \quad 315^\circ.5)$$

zou, om rekenschap te geven van de gevonden storing, het kappa-getal moeten zijn voor het watergetij

$$\begin{aligned} \text{ten noorden van Batavia} & 2^\circ.3 - 315^\circ.5 = 46^\circ.8 \\ \text{„ zuiden „ „ „} & 2^\circ.3 - 315^\circ.5 + 180^\circ = 226^\circ.8. \end{aligned}$$

Voor het O-getij op dezelfde wijze te werk gaande, waarbij men weliswaar wegens de grootere waarde der amplitude een geringere nauwkeurigheid bereikt bij de gelijkstelling aan $\frac{2}{3}$ van de theoretische amplitude, vindt men voor de storende kracht:

$$0''00765 \cos (t - 75^\circ.7).$$

Daar het watergetij, voor kappa = 0, is

$$R \cos (t - 312^\circ.8)$$

zou het kappa-getal moeten zijn:

$$\begin{aligned} \text{ten noorden van Batavia} & 122^\circ.9 \\ \text{„ zuiden „ „ „} & 302^\circ.9. \end{aligned}$$

Nu is volgens VAN DER STOK ¹⁾:

	Kappagetal	Amplitude in cm.
M ₂ -getij ten Z. van Batavia	225°	49.6 ²⁾
„ „ „ N. „ „	304°	3.6 ³⁾
O „ „ Z. „ „	268°	11.7 ⁴⁾
„ „ „ N. „ „	129°	9.3 ⁵⁾

Schrijft men, hetgeen voor de hand ligt, de voornaamste storing op het M₂ getij toe aan den Indischen Oceaan, waar de dubbel-daagsche, daarentegen die op het O-getij aan de Java-Zee, waar de enkeldaagsche getijden de hoofdrol spelen, dan is de overeenstemming tusschen de uit de storingen berekende en de waargenomen kappagetallen zeer bevredigend.

Het K₁ en het P getij komen niet voor een verdere bewerking in aanmerking. Doordat de periode dezer getijden weinig verschilt van die van den middelbaren zonnetijd, treden waarschijnlijk meteorologische invloeden sterk storend op; de uitkomsten voor de verschillende uren loopen sterk uiteen. Zoo is

het K₁ getij voor 10 en 11 uur $0.167 \cos (t - 315.76)$

voor 12 en 1 uur $0.532 \cos (t - 224.08)$

het P getij voor 10 en 11 uur $0.187 \cos (t - 349.07)$

voor 12 en 1 uur $0.538 \cos (t - 145.03)$

Waarschijnlijk spelen hierbij de jaarlijksche veranderingen in de dagelijkse warmtegolf en in de sterkte van land- en zeewind een voorname rol. ⁶⁾

In de onderstelling, dat de storingen op het M₂-getij alleen aan de watergetijden mogen worden toegeschreven, kan, daar de storende kracht op den *E-W* slinger werkende een phaseverschil heeft met het getij dat weinig van 90° verschilt en zij derhalve slechts geringen invloed op de amplitude uitoefent, de *E-W* component van dit getij voor de storing worden gecorrigeerd. Raadpleegt men de homokumenekaart van VAN DER STOK ⁷⁾ dan blijkt ten zuiden van Sumatra van Padang tot Vlakkehoek het kappagetal (ten opzichte van den

1) Kon. Nederl. Meteor. Instituut. Mededeelingen en Verhandelingen n^o. 8. Elementaire theorie der getijden. Getijconstanten in den Indischen Archipel.

2) Amplitude van Tjilatjap, kappagetal volgens homokumenekaart.

3) „ „ en kappagetal volgens Edam, Tandjong Priok en Duizendeilanden.

4) „ „ „ van Tjilatjap.

5) „ „ „ volgens Edam, Tandjong Priok en Duizendeilanden.

6) Bij plotselinge versterkingen van den wind en bij het invallen van regenbuien is de windrichting uit de seismogrammen gemakkelijk af te lezen. De hierdoor te voorschijn geroepen afwijkingen bedragen op het seismogram maximaal 1 à 2 mm.

7) loc. cit.

meridiaansdoorgang te Batavia) zeer weinig van 200° te verschillen, terwijl het in straat Soenda (Telok Betong, Java's 4^e Punt, Laboean) gemiddeld 210° is. Het ligt daarom voor de hand aan te nemen dat in het gebied, dat storend op den E - H slinger werkt, het kappagetal weinig (niet meer dan $10'$) van 200° zal verschillen. Berekent men nu de storende kracht en het ongestoorde aardgetij in de onderstelling, dat $\kappa = 200^\circ$ is en dat het argument van het ongestoorde getij der bodembeweging gelijk is aan dat van het theoretisch getij, dan vindt men¹⁾

amplitude storende kracht: 0.0026

amplitude gecorrigeerd aardgetij: 0.0118

Voor de verhouding van waargenomen tot theoretische amplitude voor een absoluut harde aarde volgt hieruit de waarde 0.76.

HECKER vond voor den E - H component ook de verhouding 0.76, terwijl ORLOFF²⁾ te Jurjew met behulp van een seismograaf van ZÖLLNER de waarde 0.65 heeft afgeleid.

Vat men de bovenvermelde resultaten te zamen dan volgt daaruit wel in de eerste plaats, dat men in de keuze van stations, die voor de bepaling der aardgetijden zullen dienen, zeer voorzichtig moet zijn en dat die, welke zijn gelegen in de nabijheid van zeeën met belangrijke watergetijden, voor dit doel ongeschikt zijn. Uit de onbevredigende uitkomsten voor het K_1 en P -getij verkregen, mag verder wel de conclusie worden getrokken, dat voor de bepaling dezer getijden opstelling noodig is in een ruimte, voldoende diep in den grond gelegen om de meteorologische getijden onwerkzaam te maken.

Overigens blijkt, dat de WIECHERT-seismograaf een zeer constant en gevoelig instrument is voor de getijbepaling, hetwelk, zonder dat iets behoeft te worden veranderd aan de gewone opstelling voor seismografische doeleinden, afleiding zoowel der enkeldaagsche als der dubbeldaagsche getijden toelaat. Mits de constanten van de toestellen voldoende zorgvuldig bepaald zijn, zou het aanwezige materiaal der gunstig geplaatste seismografen van dit model reeds nu voor een getijbewerking in aanmerking komen. Op deze wijze zou zonder extrakosten de kennis van het getijvraagstuk een belangrijke schrede vooruit kunnen worden gebracht.

Voor Batavia blijkt het mogelijk te zijn om het dubbeldaagsche maansgetij der bodembeweging in E - H richting af te leiden, niet-tegenstaande de storingen der watergetijden.

Welterreden, 12 Februari 1911.

C. BRAAK.

¹⁾ Voor $\kappa = 190^\circ$ en 210° zijn de amplituden van de storende kracht respectievelijk 0.0025 en 0.0028, van het gecorrigeerde getij 0.0114 en 0.0123.

²⁾ Astronomische Nachrichten, No. 4446, Bd. 186.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*Opmerkingen over de waarde der kritische grootheden.*”

Oorspronkelijk zijn onder de benaming van *kritische grootheden* verstaan het volume, de drukking en de temperatuur van het kritisch punt. Voor de waarde dezer 3 grootheden is afgeleid $v_k = 3b_g$, $p_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b_g^2}$ en $RT_k = \frac{8}{27} \frac{a}{b_g}$. Maar bij de bepaling dezer waarden is ondersteld, dat de grootheid b , welke met het volume veranderlijk was gebleken, in het kritisch punt nog zoo weinig zou veranderd zijn, dat zij gelijk zou mogen gesteld worden aan de waarde, welke zij in oneindig groot volume heeft, en die door het teeken b_g zal voorgesteld worden. Maar tegelijk bevatte deze gelijkstelling $b_k = b_g$, de verwaarloozing van $\left(\frac{db}{dv}\right)_k$ en van $\left(\frac{d^2b}{dv^2}\right)_k$. In den loop der tijden is de waarde van nog andere grootheden, zooals die in het kritisch punt bleken te zijn, op den voorgrond getreden.

Ik heb in mijn mededeeling over Schijnassociatie (Verslag Kon. Akad. v. Wetensch. 28 Mei 1910) genoemd $\frac{pv_k}{RT_k} = \frac{1}{s}$, $\frac{RT_k}{p_k} = r s b_g$, $\left(\frac{T dp}{p dT}\right)_k = f$, $\frac{a}{v_k RT_k} = \frac{f-1}{s}$ en $\left(\frac{v}{v-k}\right)_k = \frac{f}{s}$, welke met het hierboven genoemde drietal $v_k = r b_g$ en $p_k = \frac{a}{b_g^2 (f-1)r^2}$ en $RT_k = \frac{a}{b_g} \frac{sr}{(f-1)r^2}$ tezamen een 8 tal grootheden bedraagt, die echter niet van elkander onafhankelijk zijn. Zijn door de keuze der stof de grootheden a en b_g bepaald, dan is de kennis van 3 grootheden, nl. r , s en f voldoende om ze alle te berekenen.

Uit de eigenschap van het kritisch punt volgt, dat het dat punt der isothermische lijn is, voor hetwelk de grootheden $\left(\frac{dp}{dv}\right)_T$ en $\left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_T$ gelijk 0 zijn. Twee vergelijkingen moeten dus voldoende zijn ter bepaling. Door die twee vergelijkingen worden de grootheden v_k en RT_k bepaald, en verder met behulp der vergelijking voor p zelve, de waarde van p_k . Ook de overige genoemde kritische grootheden volgen dan door eenvoudige wiskundige bewerkingen. De twee vergelijkingen ter bepaling van v_k en RT_k zijn dan, als wij voor p stellen:

$$p = \frac{RT}{v} - \frac{a}{b} + \frac{c}{v^2}$$

$$\left(\frac{dp}{dv}\right) = 0 = \frac{RT \left(1 - \frac{db}{dv}\right)}{(v-b)^2} - \frac{2a}{v^3} \dots \dots \dots (I)$$

en uit de differentiatie van I en na eliminatie van RT

$$v \frac{d^2b}{dv^2} + \frac{2}{1 - \frac{db}{dv}} = \frac{3}{2} \dots \dots \dots (II)$$

Was b als functie van v bekend, dan zou II kunnen dienen ter bepaling van v_k en met behulp daarvan zou I de waarde van RT'_k leveren. Bestond voor alle stoffen een zelfde functie $\frac{b}{b_g} = j \left(\frac{b_g}{v}\right)$, dan

zou uit II voor $\frac{b_g}{v_k}$ steeds een evengroote waarde worden gevonden.

Met andere woorden de grootheid v uit $v_k = vb_g$ zou voor alle stoffen even groot zijn. Maar dan zou ook voor alle stoffen RT'_k

een evengroote fractie van $\frac{a}{b_g}$ zijn, en p_k een evengroote fractie van

$\frac{a}{b_g^2}$. Evenzoo zou $\left(\frac{pv}{RT}\right) = \frac{1}{s}$ voor alle stoffen evengroot zijn — en

vooral door de onderzoekingen van SYDNEY YOUNG weten wij dat in de waarde van s voor de verschillende stoffen groote verschillen

bestaan. Wij zijn dus genoodzaakt de aanname dat in $\frac{b}{b_g} = j \left(\frac{b_g}{v}\right)$

de gang van $\frac{b}{b_g}$ voor alle stoffen één zelfde zijn zou te laten vallen.

Dat daardoor de vraag, wat toch de oorzaak mag zijn van de omstandigheid dat b met afnemend volume kleiner wordt, opnieuw

aan de orde gesteld moet worden is duidelijk, maar deze vraag zal ik voor het oogenblik stilzwijgend voorbijgaan. Dat de waarde van

$v = \frac{v_k}{b_g}$ kleiner is dan 3, en voor de verschillende stoffen verschillend

kau zijn, zal ik echter als zeker aannemen. En evenzoo dat v des te meer beneden 3 daalt, naarmate b sneller met v afneemt. Nemen

wij als oorzaak van deze veranderlijkheid van b met v eene werkelijke verkleining van het molekuul aan, dan zou men dit laatste

aldus kunnen zeggen: de grootheid v is in den kritischen toestand des te kleiner, naarmate het molekuul meer samendrukbaar is.

Maar wat ook als oorzaak van de variabiliteit van b moet aangemerkt worden, de wet voor deze verandering is onbekend, en de

grootheden $\frac{db}{dv}$ en $\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}$, welke in de vergelijkingen I en II voorkomen, zijn onbekend. Daardoor vervalt de mogelijkheid deze vergelijkingen te doen dienen ter bepaling van $\frac{v_k}{b_g}$ en van RT_k . Omgekeerd zullen zij echter, als v en RT_k op andere wijze bekend zijn, kunnen dienen om $\frac{db}{dv}$ en $\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}$ voor het kritisch punt te bepalen. Door het wegvallen van twee betrekkingen, welke dienst konden doen ter bepaling van $\frac{v_k}{b_g}$ en RT_k , moeten wij zoeken naar twee nieuwe grootheden welke ons daartoe dienen kunnen, waarbij zich nog voegt de omstandigheid, dat nu ook de gelijkheid van $b_k = b_g$ wegvalt. Vandaar dat nu ter bepaling van de kritische gegevens de kennis van de 3 grootheden v , f en s noodig is.

Ik zal de vergelijking van p in de eenvoudigste gedaante aannemen, n.l.

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

alleen met de bijvoeging dat b van v afhangt. Maar noch van a noch van b zal ik aannemen afhankelijkheid van T . In mijn onderzoek getiteld: „Schijnassociatie” is aangetoond dat een dergelijke afhankelijkheid van T niet kan helpen om de verschillen met het experiment te verklaren, maar dat daartoe alleen de hypothese van associatie dienen kan. Daarmede is de noodzakelijkheid weggefallen van het aannemen dat a en b temperatuurfuncties zouden zijn. Maar de mogelijkheid voor een dergelijke afhankelijkheid is natuurlijk daarmede niet tegengesproken. Ik wil hier echter onderzoeken in hoever de uitkomsten, verkregen in de eenvoudigste onderstellingen, sluiten met het experiment, en niet weder een onbekende afhankelijkheid bijv. van b met T invoeren, die natuurlijk de afleiding van bepaalde getallenwaarde zou onmogelijk maken. In mijn „Schijnassociatie” heb ik aangetoond dat waarschijnlijk deze voor de kritische grootheden, in den vorm waarin ik ze toen gebracht heb, niet van invloed is, behalve voor de grootheid $\frac{v}{v-b} = \frac{f}{s}$ in geringe mate.

Daar de invloed der schijnassociatie op de waarde der kritische grootheden zoo gering is, zal ik eenvoudigheidshalve de schijnassociatie verwaarloozen bij de afleiding der betrekkingen, welke tusschen de kritische grootheden, hetzij nauwkeurig, hetzij bij benadering, bestaan.

Alleen zal ik aan het einde de grootte van de afwijkingen, die het gevolg zijn van deze associatie, berekenen.

De vergelijking voor p naar T differentieërende, v standvastig houdende, vindt men $\left(\frac{dp}{RT}\right)_v = \frac{R}{v-b}$ of $T\left(\frac{dp}{RT}\right)_v = \frac{RT}{v-b} = p + \frac{a}{v^2}$; en daar in het kritisch punt $\left(\frac{dp}{dT}\right)_c = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{kr}$ is, verkrijgt men:

$$T\left(\frac{dp}{dT}\right)_{kr} - p = \frac{a}{v^2}.$$

In deze laatste vergelijking stelt $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{kr}$ de spanningstoename van den verzadigden damp voor, zooals deze bij de kritische temperatuur is. Men kan ook schrijven:

$$\left(\frac{T dp}{p dT}\right)_{kr} - 1 = \frac{a}{pvk^2}$$

of

$$pvk^2 = \frac{a}{v k^2 \left[\frac{T}{p} \frac{dT}{dp} - 1 \right]_{kr}}$$

En $v_k = v'_{k,j}$ stellende:

$$pvk^2 = \frac{a}{b_j^2 v'^2 \left[\frac{T}{p} \frac{dp}{dT} - 1 \right]_{kr}} \dots \dots \dots (I)$$

Voor tal van stoffen is experimenteel de spanning van den verzadigden damp tot aan T_k bepaald — en in het bijzonder zijn door SYDNEY YOUNG in „The scientific proceedings of the Royal Dublin Society (June 1910) voor een 30-tal stoffen de waarden van p medegedeeld. Deze spanningen zijn bepaald voor temperaturen tusschen T_k en circa $\frac{1}{2} T_k$.

Zij worden bij benadering aangegeven door de empirische formule:

$$-N_{eq} \log \frac{p}{pvk} = f \frac{T_k - T}{T}$$

of

$$-N_{eq} \log \alpha = f \frac{1 - m}{m}.$$

Maar de grootte f is eenigszins met m veranderlijk: te beginnen bij T_k of $m = 1$ schijnt er bij dalende waarde van m , eerst ook eenige daling van f te zijn, die echter bij $m < \frac{1}{2}$ reeds in stijging is veranderd, terwijl bij $m = \frac{1}{2}$, de waarde van m weder boven f'_{kr} is gestegen. Bij nog kleinere waarde van m wordt door het optreden

van den vasten toestand de waarneming verhinderd. Uit sommige verschijnselen heb ik besloten als waarschijnlijk, dat bijv. bij $f_k = 7$, de limietwaarde van f^* bij het absolute nulpunt tot circa 9 zou stijgen.

Uit deze empirische formule leidt men af:

$$-\frac{d\alpha}{\alpha dm} = -\frac{f_m}{m^2} + \frac{1-m}{m} \frac{df_m}{dm}$$

of

$$\frac{md\alpha}{\alpha dm} = \frac{f_m}{m} - (1-m) \frac{df_m}{dm},$$

en dus

$$\left(\frac{m}{\alpha} \frac{d\alpha}{dm} \right)_{kr} = f_k.$$

Wil men de waarde van f_k volkomen nauwkeurig bepalen, dan stuit men toch, zelfs bij de bepalingen van SYDNEY YOUNG, op zwaarigheden. SYDNEY YOUNG stelt de gedaante van p voor door de formule van BIOT, nl., $\text{Log } p = a + b\alpha^2 + c\beta^2$; over het algemeen gelukt het hem de vele, in die formule voorkomende, constanten zoo te bepalen dat de aansluiting aan zijn waarnemingen goed gelukt. Maar, al beperkt men zich tot de zoogenaamde normale stoffen — dus uitsluitende azijnzuur en de alcoholen — dan komen toch, vooral in de nabijheid van T_k merkbare verschillen voor. Verschillen van zoodanige grootte, dat zij van beteekenis worden op de te berekenen waarde van $\left(\frac{md\alpha}{\alpha dm} \right)_{kr}$. Een zeer uitvoerig onderzoek zou noodig zijn om de waarschijnlijkste waarde van f_k te bepalen. En misschien is nog de zekerste weg ter berekening van deze grootte de rechtstreeksche; nl. door bij temperaturen dicht bij T_k uit de tabel der waarnemingen af te lezen zoowel $d\alpha$ als dm en α en m . Als voorbeeld bereken ik bij ethyl-acetaat uit:

p	T
26740	245
27535	247
28370	249
28800	250
28877	250,1

Uit de twee eerste waarnemingen volgt voor $\frac{Tdp}{p dT}$ of $\frac{md\alpha}{\alpha dm}$ de waarde $\frac{795 \times 519}{27137 \times 2} = 7,6$. Uit de 3^{de} en 4^{de} waarneming:

E30 $\frac{522,5}{28585} = 7,86$. Terwijl voor de berekening uit de twee laatste

waarnemingen het verschil der temperaturen te gering is. De stijging

van p , die per graad bij $T = 246$ gelijk is aan 395 en bij $T = 249,5$ gelijk is aan 430, zou nl. bij 250,05 plotseling gelijk zijn aan 770. Zooveel zal men wel kunnen besluiten dat f_k bij ethylacetaat niet veel van 7,6 of 7,8 zal verschillen. Ik heb gemeend op deze onzekerheid in de absoluut juiste waarde van f_k te moeten wijzen als wij straks een waarschijnlijke betrekking tusschen de waarden van eenige kritische grootheden zullen aan de proef onderwerpen.

Gaan wij er nu toe over een waarde voor RT_k af te leiden. Wij doen dat met behulp van de ook uit de bepalingen van SYDNEY YOUNG af te leiden en door hem zelf telkens berekende waarde van wat dikwijls „kritische coëfficiënt” genoemd wordt; nl. de grootheid s uit de betrekking:

$$\frac{RT_k}{\rho_k v_k} = s.$$

De onzekerheid, welke in deze grootheid s bestaat, is in hoofdzaak het gevolg van de onzekerheid in de waarde van v_k . In de meeste gevallen werd v_k niet rechtstreeks bepaald, maar uit den gang van de waarde van vloeistof- en dampvolume bij temperaturen dicht bij T_k berekend. Dit kan geschieden met behulp van den regel van den rechtlijnigen diameter, of door het kenmerk $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{kr}$ toe te passen. Voor RT_k vindt men nu de waarde:

$$RT_k = \frac{a}{b_g (f_k - 1)^{s^r}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (II)$$

Uit de vergelijkingen (I) en (II) vindt men, b_g en r elimineerende,

$$\frac{(RT_k)^2}{\rho_k} = \frac{a}{f_k - 1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (III)$$

In mijn Schijnassociatie (Verslag 25 Juni 1910) heb ik de verwachting uitgesproken, dat de factor van a , nl. $\frac{s^2}{f_k - 1}$, steeds ten minste approximatief dezelfde waarde zou hebben bij alle normale stoffen, welke ook de wet van variabiliteit zou zijn voor de grootheid b . Ik ben sedert in deze meening versterkt, door het onderzoek van de waarde van $\frac{s^2}{f_k - 1}$ bij alle normale stoffen, waarvoor de grootheden s en f_k proefondervindelijk bepaald zijn.

De waarde van $\frac{s^2}{f_k - 1}$ is, als b niet met r verandert gelijk aan $\frac{64}{27}$, en wij hebben dus na te gaan of $\frac{s^2}{f_k - 1}$ steeds gelijk gevonden wordt aan deze waarde.

Ten einde zoo onbevooroordeeld mogelijk de al of niet juistheid van deze betrekking te onderzoeken, heb ik voor s en f de getallen genomen, welke in KÜENEN (Die Zustandsgleichung enz.) worden opgegeven, en dan s berekend uit

$$s = \sqrt[64]{27^{f-1}}$$

en deze waarde vergeleken met de opgegevene. De waarden van f komen voor op bladz. 142 en die voor s op bladz. 60. De getallenwaarden voor f zijn echter bij KÜENEN zoo gekozen, dat zij zouden behooren bij de vergelijking:

$$-\log_{10} \alpha = f^{\frac{1}{m}}$$

en de getallen van KÜENEN moeten dus, om de waarden van f op te leveren, bedoeld in de formule $\frac{s^2}{f-1} = \frac{64}{27}$, gedeeld worden door 0,4343.

	f'	f	s berekend	s opgegeven	
H ₂	2.10	4.835	3.01	2.94	(?) ¹⁾
Argon	2.18	5.02	3.08	2.67	
O ₂	2.50	5.757	3.36	3.49	(?)
Aethyleen	2.75	6.33	3.55	3.42	
CO ₂	2.86	6.58	3.636	3.59	
Aethaan	2.60	6	3.443	3.55	
CCl ₄	2.81	6.47	3.606	3.67	
Benzol	2.89	6.65	3.67	3.75	
Fluor-benzol	2.99	6.885	3.735	3.78	
Ether	3.01	6.93	3.75	3.81	
Esters	2.97—3.25	6.84—7.48	3.715—3.92	3.86—3.94	

In deze tabel treft vooreerst het groote verschil in berekende en opgegeven waarde voor s bij Argon — en daardoor werd ik er toe gebracht naar een oorzaak te zoeken voor dat groote verschil. Nu trof het dat ik nog voor het verschijnen van het Verslag K. A. v. W. van Februari 1911 inzage had van de drukproef, en ik dus kennis kon bekomen van de waarnemingen van KAMERLINGH ONNES en CROMMELIN, waarin opgaven voorkomen omtrent f' en s voor Argon. Daarin wordt voor s opgegeven de waarde 3,283, dus nog grooter dan in de lijst van KÜENEN. Maar daar staat tegenover dat f' veel grooter is dan hierboven is opgegeven. Neemt men de waarde van

¹⁾ Het (?) teken komt bij KÜENEN voor.

f' bij $t = -125,49$ n.l. 2,577 dan is $f' = 5,934$ en berekent men $s = 3,41$; — toch weder merkbaar grooter dan 3,283. Daardoor kwam ik er toe uit de in genoemde mededeeling voorkomende gegevens de waarde van f'_k zelve te berekenen. Vooral omdat in de opgegeven waarden van f'' een plotselinge toename voorkomt dicht bij de kritische temperatuur, wat bij andere stoffen niet in die mate het geval is. Door KAMERLINGH ONNES en CROMMELIN worden tusschen $t = -140,80$ en $t = -125,49$ vier waarden voor f'' opgegeven bij opklimmende temperaturen n.l. 2,415, 2,421, 2,457 en eindelijk 2,577. Het laatste getal heb ik nagerekend — en ik kom tot het besluit dat het te groot is. Op twee wijzen heb ik beproefd f'' en dus ook f' te bepalen. Vooreerst door tusschen de twee hoogste temperaturen Δp , ΔT en ρ en T te nemen en in de formule $f' = \frac{T \Delta p}{\rho \Delta T}$ te substitueeren. Men vindt $\Delta p = 6,611$, $\Delta T = 4,34$, $\rho = 39,1515$ en $T = 145,34$; en daaruit $f' = 5,66$ — en in de tweede plaats f'' te berekenen uit $-\log_{10} \frac{p}{p_k} = f'' \cdot \frac{T_k - T}{T}$. Men vindt dan $f'' = 2,425$ en $f' = 5,6$. De plotselinge toename in de waarde van f'' bestaat dus niet. Met $f' = 5,6$, berekent men $s = 3,29$ — wat uiterst dicht bij de gevonden waarde 3,283 ligt.

Wij hebben in dat geval dus een bijna volmaakte overeenstemming tusschen de formule, welke $\frac{s^2}{f'-1} = \frac{64}{27}$ onderstelt, en de waarneming bij een stof met zeer lage kritische temperatuur. Bij een met hooge waarde van s , n.l. ethylacetaat, waarbij $s = 3,949$ door SYDNEY YOUNG wordt gesteld, krijgen wij een even goede bevestiging als wij, zooals hierboven (bladz. 1314) gevonden is, f' stellen tusschen 7,6 en 7,8. Met $f' = 7,7$ vinden wij $s = 3,977$, terwijl SYDNEY YOUNG $s = 3,949$ opgeeft.

Alleen zou bij Helium een groote afwijking bestaan. In het bij de bespreking van Argon reeds genoemde Verslag wordt voor Helium gesteld $s = \frac{8}{3}$. Daarbij behoort $f' = 4$ of $f'' = 1,7372$ — terwijl als hoogste getal $f'' = 1,2$ wordt opgegeven. Trouwens $f' = 4$ is de laagste waarde voor f' , welke de toestandsvergelijking mogelijk stelt — tenzij men de volstrekt onbegrijpelijke onderstelling zou aannemen, dat b met v toeneemt.

Onderzoekt men de geldigheid der betrekking: $\frac{s^2}{f'-1} = \frac{64}{27} = 2,37$ bij de alcoholen en azijnzuur volgens de waarnemingen van SYDNEY YOUNG, dan treft in de eerste plaats de moeielijkheid om uit deze

waarnemingen met eenige zekerheid de waarde van f_k op te maken. Bij methylalcohol is er bij de hoogere temperaturen doorgaans een groot verschil tusschen de waarnemingen en de door SYDNEY YOUNG gebezigde formule van BIOT — verschillen die bij temperaturen, welke slechts 1 of $\frac{1}{2}$ graad verschillen grillig van teeken veranderen. Als waarschijnlijke waarde van f_k heb ik 8.35 gekozen. Daarbij zou als genoemde betrekking tusschen s en f bestond, behooren $s = 4.17$, terwijl SYDNEY YOUNG geeft $s = 4.559$. Bij ethylalcohol geldt dezelfde moeielijkheid in de bepaling van f_k , waarvoor ik meen de waarde 8.5 te moeten aannemen; daarbij zou volgens bovenstaande betrekking behooren $s = 4.215$, terwijl SYDNEY YOUNG's opgave voor s de waarde 4.026 heeft. Bij propylalcohol heb ik f_k gelijk aan 7.78 gekozen. Geheel in afwijking van het in KÜENEN voorkomende getal 3.93. Het door mij waarschijnlijk geachte getal komt bijna geheel overeen met 3.39 in plaats van 3.93. Daarbij behoort volgens bovenstaande betrekking $s = 4$, terwijl SYDNEY YOUNG $s = 3.998$ opgeeft. Getoetst aan bovenstaande betrekking zou dus propylalcohol reeds een normale stof zijn. Maar bij azijnzuur, waarbij bij lage temperaturen de verzadigde damp reeds bijna geheel uit dubbelmoleculen bestaat, komt de betrekking geheel niet uit.

Neemt men in aanmerking, dat de in de tabel hierboven overnemerd overgenomen waarden van f gemiddelden zijn, die slechts bij toeval de waarden van f_k zullen zijn — dan gevoel ik mij gerechtigd aan te nemen dat voor normale stoffen $\frac{s^2}{f-1} = \frac{64}{27}$ tenminste met zeer hoogen graad van benadering als geldig mag worden aangenomen. Ik koester dan ook de verwachting dat nader onderzoek de uitzondering voor Helium zal doen verdwijnen. Wordt evenwel die kleine waarde van f bij volgende onderzoekingen bevestigd gevonden, dan zou Helium een zeer abnormale stof moeten genoemd worden.

De grootheid a wordt dus, ten minste met hoogen graad van benadering, uit T_k en p_k bepaald door de reeds in mijn proefschrift aangegeven betrekkingen.

Ik was in mijn Schijnassociatie tot deze betrekking gekomen door de onderstelling, dat in het kritisch punt twee grootheden dezelfde waarden zouden hebben als uit de aanname van $b = \text{constant}$ volgt, nl. $sr = 8$ en $(f-1)r^2 = 27$. Dan is $s^2r^2 = 64$ en na eliminatie van r komt dan de betrekking $\frac{s^2}{f-1} = \frac{64}{27}$. Maar de na eliminatie van r verkregen betrekking kan geldig zijn, zonder dat de stand-

vastigheid van sr en $(f'-1)r^2$ geldt. Zoo kan bijv. met $sr = 7,5$ en $(f'-1)r^2 = 23,34$ dezelfde betrekking tusschen s en f' worden teruggevonden. De vraag is dus nu of beide betrekkingen ($sr = 8$ en $(f'-1)r^2 = 27$) met hoogen graad van benadering als geldig mogen worden aangenomen. Daar wel r_k , maar niet $r = \frac{r_k}{b_g}$, experimenteel bepaald kan worden, was ik op de onderstelling $sr=8$ en $(f'-1)r^2=27$ gekomen, door voor r een waarde te denken, die niet ver van de juiste kon verwijderd zijn.

Ik heb beproefd te bepalen wat er voor verschillende eigenschappen van de grootheden in het kritische punt volgen zou, als de twee genoemde betrekkingen volkomen juist zouden zijn, en wel 1° de grootheid $\frac{b_k}{b_g}$, 2° de grootheid $\left(\frac{db}{dr}\right)_k$ en 3° de grootheid $\left(\frac{r}{2} \frac{d^2b}{dr^2}\right)_k$.

1°. De grootheid $\frac{b_k}{b_g}$ wordt gevonden, door $\left(T \frac{dp}{dT}\right)_k$ te bepalen; gelijk aan $f'_k = \frac{1}{p} \frac{RT}{(r-b)_k}$, of $f'_k = \frac{r}{(r-b)_k} = \frac{r}{r - \frac{b}{b_g}}$, waaruit volgt:

$$\frac{b}{b_g} = r \left(1 - \frac{s}{f'}\right).$$

Met $rs = 8$, zou men vinden:

$$\frac{b}{b_g} = r - \frac{8}{f'}$$

Ik zal echter niet onmiddellijk $rs = 8$ onderstellen, evenmin $(f'-1)r^2 = 27$, maar $rs = c_1$, en $(f'-1)r^2 = c_2$, en c_1 en c_2 met r veranderlijk aannemen. De betrekking

$$\frac{b}{b_g} = r - \frac{rs}{f'} = r - \frac{c_1}{f'} \dots \dots \dots (IV)$$

differentieerende naar r , verkrijgt men, daar b_g niet van r afhangt;

$$\frac{db}{b_g dr} = 1 - \frac{c_1}{f'^2} \frac{df'}{dr} - \frac{1}{f'} \frac{dc_1}{dr}$$

of

$$\frac{db_k}{dr_k} = 1 + \frac{c_1}{f'^2} \frac{df'}{dr} - \frac{1}{f'} \frac{dc_1}{dr}$$

Uit $(f'-1)r^2 = c_2$ volgt $\frac{1}{f'-1} \frac{df'}{dr} + \frac{2}{r} = \frac{dc_2}{c_2 dr}$, waardoor wij komen

tot:

$$\frac{db_k}{dr_k} = 1 - \frac{2s(f'-1)}{f'^2} + \frac{c_1(f'-1)}{f'^2} \frac{dc_2}{c_2 dr} - \frac{1}{f'} \frac{dc_1}{dr}.$$

En met behulp van de betrekking $\frac{c_1^2}{c_2} = \frac{s^2}{j-1} = \text{konstant}$, of

$$2 \frac{dc_1}{c_1} = \frac{dc_2}{c_2}$$

ten slotte

$$\frac{db_k}{dr_k} = 1 - \frac{2s(j-1)}{j^2} - \frac{dc_1}{dr} \frac{j-2}{j^2} \dots \dots \dots (V)$$

De vergelijking (IV) leert de fractie kennen, welke in het kritisch punt de grootheid b is van bg . Zij blijkt, gelijk te wachten was, afhankelijk te zijn van de waarde van r voor dat punt. Mocht rs steeds gelijk 8, en $(j-1)r^2 = 27$ zijn, dan zou deze fractie geheel door r bepaald zijn, en op de volgende wijze van r afhangen:

$$\frac{b}{bg} = r - \frac{8}{1 \cdot r^2}$$

Voor $r = 3$, de grootste waarde welke r kan aannemen, vindt men $\frac{b}{bg} = 1$, gelijk ook te wachten was. Maar ofschoon deze grootheid met het afnemen van r , ook, gelijk verwacht moet worden, afneemt, is deze afname gering; zoo is bij $r = 2$ de waarde van $\frac{b}{bg} = \frac{30}{31}$.

De uit (IV) afgeleide vergelijking (V), leert de richting der raaklijn kennen aan de meetkundige plaats (IV), en zij levert voor het geval

dat sr steeds gelijk aan 8 zou zijn, voor $\frac{d\left(\frac{b}{bg}\right)}{dr}$ de waarde:

$$1 - \frac{2s(j-1)}{j^2}$$

wat voor $s = \frac{8}{3}$ en $j = 4$ gelijk is aan 0, wat voor $s = 3,77$ en $j = 7$ gelijk is aan $\frac{3,76}{49}$ en voor $s = 4$ en $j = \frac{31}{4}$ gelijk is aan $\frac{97}{961}$.

2°. De grootheid $\left(\frac{db}{dr}\right)_{kr}$. Deze grootheid wordt gevonden uit de voorwaarde, dat $\left(\frac{dp}{dr}\right)_T$ in het kritisch punt gelijk aan 0 moet zijn.

Uit $\left(\frac{dp}{dr}\right)_T = 0$, vinden wij:

$$RT \left(1 - \frac{db}{dv} \right) = \frac{2a}{(r-b)^2} = \frac{2a}{r^3}$$

of

$$1 - \left(\frac{db}{dv} \right)_{kr} = \frac{2a}{v_k RT_k} \left(\frac{r-b}{r} \right)_{kr}^2.$$

En daarin substitueerende de waarde $\frac{a}{v_k RT_k} = \frac{j-1}{s}$ en $\left(\frac{r-b}{r} \right)_{kr} = \frac{s}{j}$, welke reeds in mijn Schijnassociatie voorkomen, vindt men:

$$1 - \left(\frac{db}{dv} \right) = \frac{2s(j-1)}{j^2} \dots \dots \dots (VI)$$

Deze waarde vergelijkende met (I'), ziet men dat als c_1 , onafhankelijk van r zou zijn, en dus $c_1 = sr$ steeds strikt gelijk aan 8 zou zijn, de waarde van $\left(\frac{db}{dv} \right)_{kr}$ volkomen gelijk zou zijn aan $\frac{db_k}{dv_k}$. Maar deze twee grootheden beteekenen niet hetzelfde. De beteekenis van wat ik door $\left(\frac{db}{dv} \right)_{kr}$ heb voorgesteld is duidelijk. Wij hebben een stof met bepaalde a en b_0 . De grootheid b , die slechts bij oneindig groot volume gelijk is aan b_0 , neemt met het kleiner worden van het volume af, door welke oorzaak en volgens welke wet dan ook. Van zeer groot volume uitgaande, is de afname eerst zoo klein, dat zij praktisch verwaarloosd kan worden, en $\frac{db}{dv}$ bijna gelijk 0 mag gesteld worden.

De waarde, welke $\frac{db}{dv}$ in het kritisch punt heeft, heb ik door $\left(\frac{db}{dv} \right)_{kr}$ voorgesteld. De wijze waarop, zelfs bij stoffen met dezelfde waarde van b_0 , de grootheid b van v afhangt, blijkt verschillend te zijn, en deze omstandigheid brengt ons de vraag opnieuw aan de orde, wat toch de oorzaak van deze variabiliteit van b is. Bij het kritisch punt is $\frac{b}{b_0}$, $\frac{db}{dv}$ en zooals wij straks nader zullen nagaan $\frac{d^2b}{dv^2}$ zeer verschillend. En de verschillende wijze, waarop b van v afhangt, is oorzaak, dat de grootheden s , j en r in het kritisch punt verschillen.

$$d \left(\frac{b}{b_0} \right)$$

Maar de beteekenis van $\frac{d \left(\frac{b}{b_0} \right)}{dr}$, welke grootheid ik in (I') door $\frac{db_k}{dv_k}$ heb voorgesteld is een andere. De vergelijking (I'), waaruit zij

s afgeleid nl. $\frac{b_k}{b_g} = r - \frac{c_1}{f} = r \left(1 - \frac{s}{f} \right)$, leert $\frac{b}{b_g}$ in het kritisch punt berekenen, als voor een stof r , s en f bekend zouden zijn, en kan dus als een meetkundige plaats voor alle stoffen geldig beschouwd worden, welke ook de wet van afhankelijkheid van b met v is. Zij behoort dus niet tot eene enkele stof. Is voor een stof de afhankelijkheid van b met v gegeven, dan heeft slechts een enkel punt van deze meetkundige plaats op die stof betrekking, en wel op dat punt, waarin $\frac{b}{b_g} = f'(v)$ voor die bepaalde stof de meetkundige plaats snijdt. En kende men deze meetkundige plaats volkomen, en evenzeer de waarde van $\frac{b}{b_g}$ voor die bepaalde stof, dan zou men het kritisch punt kunnen bepalen, door te zoeken waar $\frac{b}{b_g}$ de gegeven meetkundige plaats snijdt. Voor grootere waarden van r ligt de kromme $\frac{b}{b_g}$ voor de bepaalde stof beneden de meetkundige plaats, en voor kleinere waarde van r er boven. En reeds daaruit volgt dat $\left(\frac{db}{dv} \right)_{kr}$ kleiner moet zijn dan $\frac{db_k}{dr_k}$, of $1 - \left(\frac{db}{dr} \right)_{kr} > 1 - \frac{db_k}{dr_k}$.

Door vergelijking van (V) met (VI) volgt dan, dat $\frac{dc_1}{d_1}$ positief zijn moet. Dat beteekent, dat sr slechts bij $r=3$, of bij standvastige waarde van b , gelijk 8 is; maar in alle andere gevallen, dus als b met v tegelijkertijd afneemt, kleiner dan 8 is, en dat des te meer, naarmate de variabiliteit van b sterker is.

Nu hangt de waarde van den factor van $\frac{a}{b_g}$ voor RT_k niet alleen van sr af. Deze factor is $\frac{rs}{(f-1)r^2}$ of $\frac{c_1}{c_2}$. Deze factor door F voorstellende is $\frac{dF}{Fdr} = \frac{dc_1}{c_1dr} - \frac{dc_2}{c_2dr}$. En daar wij $\frac{c_1^2}{c_2}$ standvastig vonden, is $2 \frac{dc_1}{c_1dr} = \frac{dc_2}{c_2dr}$. Bijgevolg $\frac{dF}{Fdr} = - \frac{dc_1}{c_1dr}$. Om dit resultaat te vinden, hadden wij den factor van $\frac{a}{b_g}$ ook kunnen schrijven $\frac{(rs)^2}{(f-1)r^2} \frac{1}{rs}$ of $\frac{64}{27} \frac{1}{rs}$. Is dus bij alle stoffen, waarbij b met v veranderlijk is

$rs < 8$, dan is $RT_k > \frac{8}{27} \frac{a}{b_g}$. En dit resultaat was wel op veel eenvoudiger wijze te verkrijgen geweest.

Denken wij ons daartoe twee stoffen met gegeven a en b_g — de eerste met standvastige b , de tweede met b , welke als v afneemt, kleiner wordt. Construeeren wij bij gegeven waarde van T voor beide stoffen een isotherme — dan ziet men onmiddellijk in, dat de isotherme voor de tweede stof steeds beneden die der eerste stof zal liggen. Daar bij elke waarde van v , de grootheid $v-b$ voor de tweede stof grooter is dan voor de eerste, is $\frac{RT}{v-b}$ voor de eerste stof

kleiner dan voor de tweede; en daar $\frac{a}{v^2}$ voor beide stoffen evengroot is, is $p_2 < p_1$. Bij groote volumes is b , bij de tweede stof, niet noemenswaard kleiner dan b_g , en bij groote volumes kunnen de twee isothermen bijna als samenvallend beschouwd worden. Maar toch altijd is het waar dat er verschil bestaat, en dat dit verschil met afname van het volume toeneemt, en dat dat verschil des te grooter is, naarmate de veranderlijkheid van b sterker is.

Komen wij bij een waarde van v , waarbij in de isotherme, welke boven ligt, $\frac{dp}{dv} = 0$ is, dan is in de benedenste isotherme $\frac{dp}{dv}$ positief. De grenzen voor het labiele gebied liggen bij deze dus wijder uiteen dan bij de hoogst gelegen isotherme. Maar de verschuiving dezer grenzen is aan de zijde der kleine volumes het aanzienlijkst. Bij de kritische temperatuur der eerste stof, dus bij $RT_k = \frac{8}{27} \frac{b}{b_g}$, zal bij $v = 3b_g$, voor de tweede stof $\frac{dp}{dv}$ nog positief zijn, en de temperatuur zal dus nog moeten stijgen en grooter dan $\frac{8}{27} \frac{a}{b_g}$ moeten worden, alvorens de kritische temperatuur der tweede stof is bereikt.

Al weten wij nu dat sr kleiner is dan 8 in alle gevallen, waarin b tegelijk met v kleiner wordt, en des te meer, naarmate b sneller met v verandert, wij hebben nog geen regel gevonden om de waarde van deze grootheid te bepalen. Dit zou natuurlijk wel het geval zijn, als de wet der variabiliteit van b bekend was.

Bijvoorbeeld, als $\frac{b}{b_g} = 1 - a \frac{b_g}{v}$ kon gesteld worden, wat bij benadering voor niet al te kleine volumes zou mogen, als de reden der variabiliteit van b niet bestaat in een werkelijke verkleining van het

molekuul, maar gezocht moet worden, zooals ik reeds in 1873 deed, in een schijnbare verkleining. Dan wordt (IV):

$$1 - \frac{\alpha}{r} = r - \frac{rs}{f}$$

en (VI)

$$1 - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{2s(j'-1)}{f^2}$$

en α elimineerende, de benaderde vergelijkingen:

$$1 - \frac{1}{r} = \frac{2s(j'-1)}{f^2} - 1 + \frac{s}{f}$$

of

$$\frac{1}{r} = 2 - \frac{3s}{f} + \frac{2s}{f^2} \dots \dots \dots (VII)$$

of

$$\frac{1}{sr} = \frac{2}{s} - \frac{3j'-2}{f^2} \dots \dots \dots (VIII)$$

Voor $s = \frac{8}{3}$ en $f = 4$, vinden wij natuurlijk weder $sr = 8$, maar daarbij behoort een waarde van $\alpha = 0$. Voor CO_2 vinden wij met $s = 3,64$ en $f' = 6,6$ de waarde $sr = 7,1$, welke waarde kleiner is dan ik had verwacht. Bij ether, waarbij wij $s = 3,77$ en $f' = 7$ kunnen stellen, vinden wij sr weinig verschillend van $7,1$. Kleine fouten in r en f' hebben echter grooten invloed op de waarde van deze grootheid. Men vindt voor r een waarde weinig grooter dan 1,88. Dat ik in mijn „Schijnassociatie” dus sr ook voor stoffen als ether weinig verschillend van 8 heb gesteld, zou dan te wijten zijn aan een te groote waarde voor r . Berekent men uit $1 - \frac{\alpha}{r} = r - \frac{rs}{f}$

de waarde van α of uit $1 - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{2s(j'-1)}{f^2}$, dan vindt men α weinig verschillend van $\frac{3}{s}$. Deze uitkomst zou geheel in overeenstemming zijn met wat de theorie als de waarde van α in de gebezigde benaderde formule voorspeld had voor bolvormige molekulen. Maar bij andere waarde van s en f' vindt men een andere waarde van α .

De samenhang tusschen α en f' , wordt gegeven door de formule:

$$\alpha \frac{1}{r^2} = 1 - \frac{2s(j'-1)}{f^2} \text{ en met behulp van (VII)}$$

of

$$\alpha \left\{ 2 - s \frac{3j'-2}{f^2} \right\} = 1 - \frac{2s(j'-1)}{f^2}$$

waaruit men afleidt:

$$\frac{f^2 da}{s df} = (f-2) \frac{1}{f-1} + \frac{s}{f^2} \left(3 - \frac{4}{f^2} \right) \left(2 - s \frac{3f-2}{f^2} \right)^3$$

Deze waarde van $\frac{da}{df}$ is gelijk 0, bij $f=4$ en $s = \frac{8}{3}$, maar is bij grootere waarde van f en bijbehorende waarde van s , steeds, zooals trouwens verwacht kon worden, positief. Wij hebben nl. juist de verschillende waarde van f en s aan verschillende variabiliteit van b met v toegeschreven. Maar onverklaard blijft nog het bestaan van verschillende waarde van a . Is de afwijking van den bolvorm de oorzaak? En voegt zich, voor de gevallen waarin $a > \frac{3}{8}$ is, nog een werkelijke verkleining van het molekuul bij de tot hiertoe aangenomen oorzaak voor de afname van b . Maar de aanname

$$\frac{b}{b_0} = 1 - a \frac{b_0}{r}$$

wordt geheel onwaarschijnlijk door de beschouwing van de waarde van $\frac{d^2b}{dv^2}$.

3°. De grootheid $\left(\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2} \right)_{kr}$. Deze grootheid wordt gevonden, uit de voorwaarde, dat $\left(\frac{d^2p}{dv^2} \right)_T$ in het kritisch punt = 0 is.

Vergelijking (II):

$$\frac{v}{v-b} \left(1 - \frac{db}{dv} \right) + \frac{\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}}{1 - \frac{db}{dv}} = 2$$

levert voor de waarde van $\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}$, als men $\frac{v}{v-b} = \frac{f}{s}$ en $\left(1 - \frac{db}{dv} \right) = \frac{2s(f-1)}{f^2}$ stelt:

$$- \left(\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2} \right)_{kr} = \frac{s(f-1)(f-4)}{f^3} \dots \dots \dots (IX)$$

Voor $f=4$ vindt men deze waarde weder = 0. Voor $f=7$ en $s=3.78$ is de waarde gelijk aan $0.54 \times \frac{18}{49}$ of bijna 0.2.

De vergelijking (IX) kan uit (VI) worden afgeleid, zonder dat men

toevlucht behoeft te nemen tot (II). Trouwens (VI) behoeft ook niet afgeleid te worden uit (I). Uit de betrekking $\frac{b}{bg} = r - \frac{rs}{j}$ zouden wij $\left(\frac{db}{dv}\right)_{kr}$ hebben kunnen vinden uit v door, zooals voor een standvastige stof behoort, c_1 standvastig te houden. Wij verkrijgen dan:

$$1 - \frac{db}{dv} = \frac{2s(j-1)}{j^2}$$

en door differentiatie dezer vergelijking c_2 standvastig houdende

$$-\frac{d^2b}{dv^2} dr = 2ds \frac{j-1}{j^2} + 2s \left(-\frac{1}{j^2} + \frac{2}{j^3}\right) dj$$

of

$$-\left(v \frac{d^2b}{dv^2}\right) \frac{dv}{v} = \frac{s}{j^2} \left\{ 2 \frac{ds}{s} (j-1) + 2 \left(-1 + \frac{2}{j}\right) dj \right\}.$$

Voor $\frac{dv}{v}$ schrijvende $\frac{dr}{r}$, en voor $2 \frac{ds}{s} (j-1)$ schrijvende dj , vindt men

$$-\left(\frac{vd^2b}{dv^2}\right)_{kr} = \frac{rdj}{dr} \frac{s}{j^2} \left\{ 1 - 2 + \frac{4}{j} \right\} = \frac{rdj}{dr} \frac{s}{j^3} (-j + 4),$$

en daar $\frac{dj}{j-1} + \frac{2dr}{r} = 0$ is:

$$-\left(\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}\right)_{kr} = \frac{s(j-1)(j-4)}{j^3},$$

en

$$-\left(\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}\right)_{kr} = \frac{j-4}{2j} \left(1 - \frac{db}{dv}\right)_{kr}.$$

Daar $\left(1 - \frac{db}{dv}\right)_{kr}$ weinig van 1 verschilt, heeft men in $\frac{j-4}{2j}$ een benaderde waarde voor $-\left(\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}\right)_{kr}$.

De waarde van $-\left(\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}\right)_{kr}$ is buitengemeen groot, in vergelijking van $\left(\frac{db}{dv}\right)_{kr}$ en deze laatste is ook weder groot in vergelijking van $1 - \frac{b}{bg}$. En dat, als men stelt: $\frac{b}{bg} = 1 - \alpha \frac{bg}{v}$, daarvan geen reenschap kon gegeven worden, springt vooral in het oog als men $-\left(\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dv^2}\right)_{kr}$ vergelijkt men $\left(\frac{db}{dv}\right)_{kr}$. Men vindt dan, als men $\frac{b}{bg} = 1 - \alpha \frac{bg}{v}$

stelt, $\left(\frac{db}{dr}\right) = \alpha \left(\frac{bg}{r}\right)^2$, en evenzoo $\left(-\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dr^2}\right) = \alpha \left(\frac{bg}{r}\right)^2$. De verhouding der twee genoemde waarden zou dan gelijk 1 zijn.

Men zou van de groote verhouding tusschen beide grootheden rekenschap kunnen geven door een vergelijking van den volgenden vorm :

$$\frac{b}{bg} = 1 - \alpha \left(\frac{bg}{r}\right)^n$$

Dan is $\frac{db}{dr} = n\alpha \left(\frac{bg}{r}\right)^{n+1}$ en $\left(-\frac{v}{2} \frac{d^2b}{dr^2}\right) = \frac{n(n+1)\alpha}{2} \left(\frac{bg}{r}\right)^{n+1}$, zoodat de verhouding gelijk zou zijn aan $\frac{n+1}{2}$. Ter bepaling van n heeft men dan de betrekking :

$$\frac{n+1}{2} = \frac{s(j-1)(j-4)}{1 - \frac{2s}{j^2}(j-1)}$$

Voor $n = 4$ en $s = \frac{8}{3}$ is teller en noemer gelijk 0, maar dit geval onderstelt dan ook $b = bg$. Voor $s = 3.78$ en $j = 7$ zou men vinden :

$$n + 1 = \frac{1.08 \times \frac{6}{7} \times \frac{3}{7}}{1 - 1.08 \times \frac{6}{7}} = 5.34$$

of

$$n = 4.34$$

Ter bepaling van r heeft men de vergelijkingen van bladz. (1319)

$$\frac{b}{bg} = 1 - \frac{s}{r}$$

of

$$\frac{1 - \frac{\alpha}{r^n}}{r} = 1 - \frac{s}{r}$$

of

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{s}{r} + \frac{\alpha}{r^{n+1}} = 1 - \frac{s}{r} + \frac{\frac{db}{dr}}{n}$$

of

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{s}{f} + \frac{1 - \frac{2s(f-1)}{f^2}}{n}$$

Voor $s = 3.78$ en $f = 7$ en $n = 4.34$, vindt men dan:

$$\frac{1}{r} = 0,46 + 0,01713 = 0,47713$$

of

$$r = 2,0957.$$

En deze waarde van r is wel is waar kleiner dan de schatting in mijn „Schijnassociatie”, maar slechts weinig kleiner.

Met de onderstelling, dat sr steeds gelijk 8 zou zijn, zou men vinden $r = 2,116$ — zoodat het verschil nauwelijks 1 pCr. bedragen zou. Men vindt dan ook, zooals hierboven is aangetoond, $sr < 8$ maar slechts weinig kleiner, nl. 7,9217. En voor $(f-1)r^2$ vindt men niet juist 27, maar een iets kleinere waarde nl. 26,352. Maar de vraag, wat toch de oorzaak is van de veranderlijkheid van b , is hiermede nog niet beantwoord, en $\frac{b}{b_g} = 1 - a \left(\frac{b_g}{r} \right)^n$ moet ook slechts als een empirische formule beschouwd worden, bij benadering geldig in de nabijheid van v_k .

Wij hebben nu echter nog te onderzoeken in hoever het bestaan van Schijnassociatie invloed heeft op de verkregen resultaten.

In het algemeen is:

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_v = \left(\frac{dp}{dT} \right)_{vx} + \left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT} \left(\frac{dx}{dT} \right)_v$$

En daar in het kritisch punt $\left(\frac{dp}{dT} \right)_v$ gelijk is aan $\frac{dp}{dT}$, is ook

$$T \frac{dp}{dT} = \frac{RT \left\{ 1 - \frac{n-1}{n} x \right\}}{v-b} + \left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT} \left(T \frac{dx}{dT} \right)_v$$

of

$$T \frac{dp}{dT} - p = \frac{a \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2}{v^2} + \left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT} \left(T \frac{dx}{dT} \right)_v$$

Nu hebben wij de grootheid n zoo gekozen, dat:

$$T \frac{dp}{dT} - p = \frac{a}{v^2}$$

of zoodanig dat

$$\frac{a \left(x - \frac{x^2}{2} \right)}{v^2} = \left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT} \left(T \frac{dx}{dT} \right)_v \dots \dots \dots (a)$$

Nu is de waarde van $\left(\frac{dx}{dT} \right)_v$ noodwendig negatief, en dus zal ook bij de gekozen waarde van n de waarde van $\left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT}$ negatief zijn.

Ofschoon het Ψ -vlak voor een bepaalde waarde van x minimum waarde van T_k heeft, zal een doorsnede bij gegeven waarde van v niet, zooals in den regel het geval is, beginnen met toename van p ; maar steeds afnemende waarde van p vertoonen. De waarde van $\left(T \frac{dx}{dT} \right)_v$ moeten wij bepalen door differentiatie van $\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)_{vT} = 0$ en dus uit de vergelijking:

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dx dx} \right)_T dx + \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)_{vT} dx + \left(\frac{d^2\Psi}{dx dT} \right)_v dT = 0$$

of

$$-\left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT} dx + \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)_{vT} dx - \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)_{vT} dT = 0$$

of

$$-\left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT} dx : \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)_{vT} dx - \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)_{vT} \frac{dT}{dx}$$

En daar $\varepsilon = -E x - \frac{a \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)}{v}$

$$-\left(\frac{dp}{dx} \right)_{vT} dx + \left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)_{vT} dx + \left[E - \frac{a \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)}{v} \right] \frac{dx}{T} = 0$$

Daaruit vinden wij:

$$T \left(\frac{dx}{dT} \right)_v = - \frac{E - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)}{\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)_{vT}}$$

De waarde van $\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)_{vT}$ heb ik (Verslag Juni 1910) gegeven onder den vorm:

$$\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)_{vT} = RT \left\{ \frac{1 + (n-1)x}{nx(1-x)} - \frac{a}{2vRT} \right\}$$

Maar daar ter plaatse is een fout ingeslopen, die wel is waar voor kleine waarde van x zonder invloed is, maar die ik toch verbeteren moet. Daar dit op het oogenblik ons zou afleiden van de vraag, die ons nu bezighoudt, zal ik de wijze, waarop verbetering verkregen wordt, later toonen, maar nu slechts de verbeterde waarde mededeelen. Wij moesten vinden:

$$\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{vT} = RT \left\{ \frac{1}{nn(1-x)} \left(1 - \frac{n-1}{n}x\right)^{-\frac{a}{2vRT}} \right\}$$

De waarde van $\left(T \frac{dx}{dT}\right)_r$ substitueerende in vergelijking (α) vindt men met hoogen graad van benadering (voor kleine waarde van x)

$$1 = -v \left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} \frac{\left(E \frac{vk}{a} - 1\right)}{RT} n \dots \dots \dots (\beta)$$

Schrijft men de waarde van p in den volgenden vorm:

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT \left(1 - \frac{n-1}{n}x\right)}{v-b} + \frac{a \left(x - \frac{x^2}{4}\right)}{v^2}$$

Met inachtname dat $p + \frac{a}{v^2} = T \frac{dp}{dT}$ is, vindt men voor kleine waarde van x :

$$T \frac{dp}{dT} = \frac{RT}{v-b} + v \left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT}$$

en volgens (β)

$$T \frac{dp}{dT} = \frac{RT}{v-b} - \frac{vRT}{v} \frac{1}{n \left(\frac{Evk}{a} - 1\right)}$$

of door p deelende:

$$j = s \frac{v}{v-b} - s \frac{a}{n \left(\frac{Evk}{a} - 1\right)}$$

De waarde van $\frac{v}{v-b}$ vindt men dus wel iets grooter dan $\frac{j}{s}$, maar zoo weinig dat onze voorgaande berekeningen onveranderd kunnen blijven.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer H. G. CANNegiETER: „*Ionisatie van gassen door licht, uitgestraald door Geissler'sche buizen. Onderzoek naar eventueel hierbij zich voordoende selectieve verschijnselen*”.

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

Sedert HALLWACHS¹⁾ de aandacht vestigde op het verschijnsel, dat een geïsoleerde negatief geladen zinkplaat, bij bestraling met ultraviolet licht zijn lading verliest, is deze eigenschap van het ultraviolette licht een onderwerp van studie geweest voor vele onderzoekers. Verschillende vaste stoffen en vloeistoffen betoonen zich lichtelectrisch, d. w. z. onder invloed der bestraling zenden ze negatief geladen deeltjes uit, terwijl ze zelf, indien ze aanvankelijk ongeladen zijn, een positieve lading verkrijgen.

Ook op gassen oefent het ultraviolette licht een werking uit. Deze krijgen bij bestraling een geleidingsvermogen; de werking der straling bestaat hier in een ioniseeren der gasmoleculen.

Stellen we ons de vraag, hoe we ons de werking der ethertrillingen op de moleculen der stof, die het losmaken van negatief geladen deeltjes daaruit ten gevolge hebben, moeten voorstellen, dan ligt het voor de hand hierin een resonantieverschijnsel te zien. Indien de moleculen der bestraalde stof, zij deze een vaste stof, een vloeistof of een gas, getroffen worden door trillingen, waarvan de periode overeenkomt met eigentrillingen, die de electronen in de moleculen onder bepaalde omstandigheden zelf kunnen uitzenden, dan zullen die electronen door meetrillen in zoodanige beweging kunnen geraken, dat ze uit het molecuul worden losgerukt en zich zelfstandig gaan bewegen.

Van dit standpunt bezien is het te verwachten, dat indien een bepaalde stof in lichtenden toestand lichtelectrisch werkzame stralen uitzendt, deze zelfde stof zich onder invloed van juist deze stralen sterker lichtelectrisch betoonen zal, dan wanneer zij wordt getroffen door stralen van eenige andere lichtbron; evenzoo is het vermoeden gewettigd, dat, indien de werking der straling, uitgezonden door de bovenbedoelde lichtbron op verschillende stoffen wordt onderzocht, waaronder ook de stof, die de werkzame stralen uitzendt, het effect op deze in vergelijking met dat op de andere onderzochte stoffen in dit geval sterker zal worden bevonden, dan onder andere omstandigheden. Worden dus als lichtbronnen gebruikt ontladingsbuizen, gevuld met verschillende gassen, en wordt de ionisatie gemeten door de bestraling teweeggebracht in dezelfde gassen, dan zullen de gassen naar het waargenomen effect in een bepaalde volgorde te stellen

¹⁾ WIED. ANN. 33. 301. 1888.

zijn, welke volgorde zal afhangen van de gebruikte stralingsbron. Het zal te verwachten zijn, dat steeds hetzelfde gas, als hetwelk de ontladingsbuis vult, in sterker mate den invloed der ioniseerende stralen zal ondervinden, dan een der andere gassen.

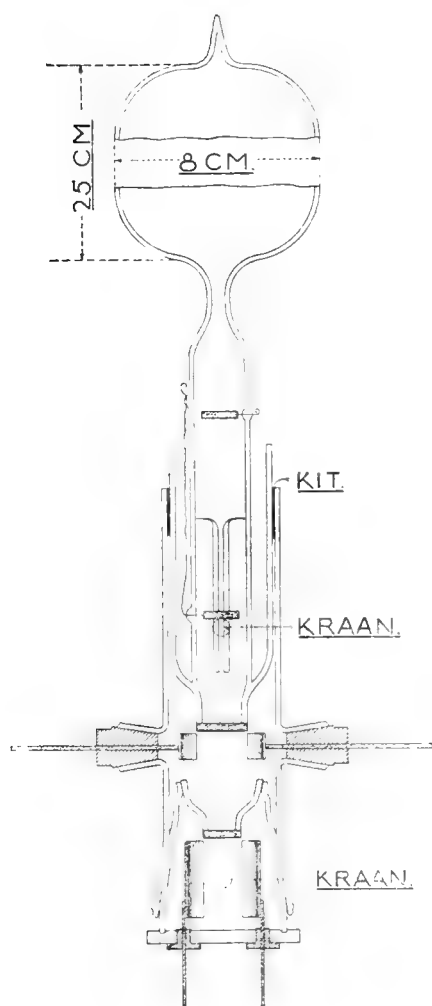
De resultaten van een onderzoek naar het bestaan van dergelijke selectieve effecten in de ionisatie van gassen onder de bovengenoemde omstandigheden, zullen in het volgende in het kort worden medegedeeld. Voor nadere bijzonderheden zij verwezen naar een dissertatie, die binnenkort zal verschijnen.

Om te onderzoeken, of een gas is geïoniseerd, kan men drie methoden volgen. Men kan in vochtig gas het bestaan van ionen aantoonen door de waterdamp op hen te laten condenseeren. Verder kan men het gas na bestraling langs een geladen geleider laten strijken, of het tusschen de platen van een condensator door laten stroomen, waarbij dan de geleider of de condensator ontladen worden. Of men kan het gas, dat zich reeds bevindt tusschen de platen van een condensator of in de nabijheid van een geladen geleider, bestralen, waarbij het, indien het geïoniseerd wordt, eveneens aanleiding zal geven tot een stroom in den condensator, of den geleider zal ontladen. Bestraling der metaaldeelen der geleiders moet in dit geval zorgvuldig worden vermeden.

Aangezien bij de eerste twee methoden de kans op foutieve resultaten tengevolge van lichtelectrische werking op vochtdeeltjes en zwevende stofjes grooter is dan bij de laatste, werd deze gekozen voor het hier beschreven onderzoek. Zij stelt tevens in staat de ionisatie te meten bij verschillende spanningen in het onderzochte gas.

Het apparaat, waarmede het onderzoek geschiedde, bestond uit drie, niet met elkaar communicerende ruimten, de ontladingsbuis, de absorptieruimte en de ionisatiekamer. Op deze wijze samengesteld gaf het tevens gelegenheid de absorptie van verschillende gassen voor de ioniseerende stralen te onderzoeken, ten einde een mogelijk verband tusschen ionisatie en absorptie te kunnen bestudeeren, benevens het eventueel bestaan van selectieve effecten ook bij de absorptie te kunnen opsporen.

De ionisatiekamer, of condensatorkamer vormt een op zichzelf staand geheel. Aan de eene zijde is zij gesloten door een ingeslepen komvormig glasstukje, waarvan de bodem bestaat uit een opgekit vlocispaatplaatje van 15 mM. diameter en 3 mM. dikte; aan de onderzijde is tegen den afgeslepen rand een spiegelglasplaat gekit, waarin twee gaten zijn geboord. Twee barnsteen



doppen, tegelijk dragers der condensatorplaten, met kit in de bedoelde gaten vastgezet, sluiten deze af. De wand der kamer is aan de buitenzijde geslepen en past als conus in een slijpstuk aan een cilindrische glazen buis, die het hoofddeel van het eigenlijke apparaat vormt. Op den mantel van het slijpstuk is een kraan gezet; in den wand der condensatorkamer bevindt zich een gaatje, dat tegenover de kraan gesteld kan worden. Op deze wijze is het mogelijk de ruimte tusschen de condensatorplaten te evacueeren en met andere gassen te vullen.

De bovengenoemde cilindrische buis verloopt aan het andere einde recht. In dit rechte einde werd de ontladingsbuis met kit vastgezet. De open ruimte tusschen de ontladingsbuis en de ionisatiekamer vormt de absorptiekamer. Deze kan eveneens leeggepompt en met verschillende gassen gevuld worden. Een paar electroden, in de

absorptiekamer geplaatst om ook hierin ionisatie te kunnen bepalen, bleken hiertoe niet geschikt, daar zich storingen, toe te schrijven aan Hallwachseffect, voordeden.

De ontladingsbuis was van het model aangegeven door LYMAN¹⁾, met inwendige capillair en ringvormige aluminiumelectroden. Zij was gesloten met een vloeispaatvenster van 20 mM. diameter en 3 mM. dikte, en voorzien van een aangesmolten mantel, passend in de cilindrische buis van het onderzoektoestel.

De inrichting van het geheele apparaat waarborgt een goede luchtdichte sluiting, zoowel van de absorptie- als van de ionisatiekamer. Het vloeispaatvenster der ontladingsbuis werd bij het inkitten van deze in het toestel op zoodanigen afstand van de condensatorkamer

¹⁾ Astrophys J. 19, 181 1906.

gehouden, dat geen lichtstralen uit de ontladingsbuis de elektroden konden treffen, ten einde fouten ten gevolge van lichtelektrisch effect op de elektroden te voorkomen.

Aangezien tijdens het onderzoek in de ontladingsbuis geen veranderingen mogen plaatsvinden, maakt de eigenschap van vele gassen, om in de ontladingsbuis onder invloed der ontladingen verbindingen aan te gaan met het metaal der elektroden, of zich, indien het gas een verbinding is van meerdere elementen, in zijn enkelvoudige bestanddeelen te splitsen, dat slechts enkele gassen voor een onderzoek als het hier beschrevene geschikt zijn.

Als onderzoeksgassen werden daarom gekozen waterstof en stikstof, terwijl tevens getracht werd met kooloxyd, niettegenstaande bij vulling met dit gas in de ontladingsbuis zelfevacuëering plaats heeft, vergelijkbare resultaten te verkrijgen. Voorzorgen werden genomen om den storenden invloed van bovengenoemd verschijnsel zoo gering mogelijk te maken. De ontladingsbuis werd daartoe voorzien van een reservoir van 10 maal den inhoud der ontladingsbuis zelve. Door verder om het reservoir een koperen bus te schuiven, omwonden met een verwarmingsspiraal, was het mogelijk het gas in het reservoir te verwarmen en daardoor den gasdruk in de ontladingsbuis weer te doen stijgen, indien deze door de zelfevacuëering was afgenomen.

Bestudeerd werd de ionisatie door bestraling met de drie lichtbronnen tweeweggebracht in dezelfde drie gassen, benevens in lucht en zuurstof. Tevens werd de absorptie der vijf genoemde gassen nagegaan en het verloop, zoowel van het effect, als van de absorptie, met afname van den gasdruk bepaald.

De metingen bij het onderzoek werden verricht met een CREMER—EDELMAXX snaar-electrometer.

Van de beide zijplaten van den condensator werd de eene op een constante potentiaal gehouden: de andere was met den electrometer verbonden. Het systeem condensatorplaat + electrometer was naar de aarde afgeleid en kon, door middel van een daarvoor gemaakte inrichting, snel van nul geïsoleerd worden. Indien het gas onder invloed der bestraling een geleidingsvermogen verkreeg, begon de geïsoleerde condensatorplaat zich te laden. De snelheid, waarmee dit geschiedde, gaf een maat voor de grootte van het geleidingsvermogen van het bestraalde gas. De tijd, dien het systeem noodig had om zich te laden tot een bepaalde potentiaal, werd met een arrêteerhorloge opgenomen.

De capaciteit van het systeem condensatorplaat + electrometer bedroeg 18 cM. Een ladingsnelheid van 1 Volt per sec. kwam dus overeen met een stroom van 20×10^{-12} Amp. in den condensator. De nauwkeurigheid, bij de metingen bereikt, bedroeg 5%.

De verwachting, dat het onderzoek selectieve effecten in de ionisatie van gassen zou aantoonen, is niet uitgekomen. Zoowel bij de waterstof-, als bij de stikstof- en kooloxydstraling werd een afhankelijkheid van het effect van den gasdruk gevonden, terwijl de onderlinge verhouding van het effect op de verschillende gassen eveneens met den gasdruk veranderlijk bleek. De grootte van deze onderlinge verhouding onder de verschillende omstandigheden is gegeven in de bijgevoegde tabel.

Deze geeft aan, dat bij hooger waarden van den gasdruk de waterstof in alle gevallen het sterkst wordt geïoniseerd, vervolgens kooloxyd, stikstof, lucht, zuurstof. Bij daling van de spanning in het onderzochte gas verandert de verhouding. Wat betreft het toenemen van het effect in elk der gassen bij afname der spanning kan worden opgemerkt, dat de lijn, die in de grafische voorstelling het verloop van genoemde verandering aangeeft, een, bij hooger drukwaarden langzaam, bij lagere in steilheid toenemend, stijgend verloop heeft. Bij zeer lagen gasdruk heeft een kleine afname van den druk een groote toename van het effect ten gevolge.

De tabel vermeldt de uitkomsten van waarnemingen, verricht met twee waterstofbuizen, gevuld tot verschillende spanningen; verder met een buis gevuld met kooloxyd en een gevuld met stikstof. De 1e, 2e en 3e kolom hebben betrekking op de verhouding van het effect gemeten resp. op waterstof, kooloxyd en stikstof, tot dat, waargenomen in de beide andere gassen, waarvan eveneens de straling is onderzocht. De 4e kolom geeft de verhouding van het effect op waterstof tot dat op lucht en zuurstof. In de 5e kolom zijn de absolute waarden der stroomsterkten gegeven, gemeten in waterstof. Het karakter en de snelheid der toename van het effect met afname van den gasdruk kan hiernaar beoordeeld worden. De getallen zijn geïnterpoleerd, en hebben niet betrekking op waarnemingen, juist bij de genoemde drukwaarden gedaan.

De omstandigheden in de absorptiekamer waren steeds dezelfde; de gasdruk hierin was steeds zoo laag, dat de werkzame stralen niet geabsorbeerd werden.

Verhouding v. h. gemeten effect	$\frac{H_2}{CO}$	$\frac{H_2}{N_2}$	$\frac{CO}{H_2}$	$\frac{CO}{N_2}$	$\frac{N_2}{H_2}$	$\frac{N_2}{CO}$	$\frac{H_2}{\text{lucht}}$	$\frac{H_2}{O_2}$	Absolute waarde van het effect op waterstof
voor	WATERSTOFSTRALING, GASSPANNING 1.2 mM.								
bij 500 mM.	1.17	1.17	0.855	1.00	0.855	1.00	6.90	55.20	3.4×10^{-12} Amp.
400 "	1.46	1.46	0.685	1.00	0.685	1.00	5.23	47.64	4.3×10^{-10} "
300 "	1.66	1.66	0.603	1.00	0.603	1.00	4.37	44.10	5.6×10^{-12} "
200 "	1.60	1.60	0.625	1.00	0.625	1.00	3.99	33.30	6.9×10^{-12} "
100 "	1.21	1.21	0.826	1.00	0.826	1.00	4.05	24.90	8.5×10^{-12} "
20 "	0.77	0.77	1.30	1.00	1.30	1.00	2.00	8.70	10.8×10^{-12} "
10 "	0.75	0.80	1.33	0.971	1.25	1.03	1.63	4.55	11.4×10^{-12} "
1.0 "	0.82	0.60	1.21	0.732	1.67	1.36	0.78	2.01	13.6×10^{-12} "
hoogvac ¹⁾	0.94	0.52	1.06	0.530	1.92	1.89	0.68	0.97	16.0×10^{-12} "
voor	WATERSTOFSTRALING, GASSPANNING 1.0 mM.								
bij 500 mM.	7.93	23.80	0.126	3.00	0.042	0.333	—	—	0.71×10^{-12} Amp.
400 "	4.00	17.33	0.250	4.33	0.058	0.231	—	—	0.78×10^{-12} "
300 "	2.82	14.10	0.355	5.00	0.071	0.200	—	—	0.85×10^{-12} "
200 "	2.30	12.40	0.435	5.40	0.081	0.185	—	—	0.93×10^{-12} "
100 "	2.06	5.25	0.485	2.55	0.491	0.392	—	—	1.05×10^{-12} "
20 "	1.54	2.59	0.649	1.68	0.386	0.590	4.4	16.5	1.32×10^{-12} "
10 "	1.49	1.84	0.671	1.23	0.543	0.813	3.4	15.0	1.35×10^{-12} "
1.0 "	1.56	1.95	0.641	1.25	0.513	0.800	2.1	2.1	1.95×10^{-12} "
hoogvac	1.07	1.29	0.938	1.21	0.774	0.834	1.0	1.0	2.40×10^{-12} "
voor	KOOLOYDSTRALING.								
bij 500 mM.	1.30	52.00	0.77	40.00	0.019	0.025	—	—	0.156×10^{-12} Amp.
400 "	1.30	22.50	0.76	17.00	0.045	0.59	—	—	0.225×10^{-12} "
300 "	1.39	8.31	0.72	6.00	0.420	0.17	—	—	0.291×10^{-12} "
200 "	1.39	5.52	0.72	4.00	0.481	0.25	—	—	0.348×10^{-12} "
100 "	1.32	3.33	0.76	2.54	0.301	0.394	8.00	—	0.420×10^{-12} "
20 "	1.21	1.90	0.83	1.58	0.526	0.632	2.52	22.50	0.510×10^{-12} "
10 "	1.15	1.56	0.87	1.38	0.641	0.724	1.84	11.59	0.585×10^{-12} "
1.0 "	1.33	1.40	0.75	1.05	0.714	0.952	0.77	4.84	0.800×10^{-12} "
hoogvac.	1.28	1.67	0.78	1.30	0.598	0.766	0.60	1.73	1.000×10^{-12} "
voor	STIKSTOFSTRALING.								
bij 500 mM.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—
100 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—
50 "	1.35	2.13	0.741	1.60	0.47	0.625	—	—	0.054×10^{-12} Amp.
20 "	1.47	1.82	0.681	1.25	0.55	0.800	—	—	0.066×10^{-12} "
10 "	1.44	1.64	0.695	1.14	0.61	0.875	—	—	0.069×10^{-12} "
5 "	1.41	1.49	0.710	1.06	0.67	0.941	—	—	0.072×10^{-12} "
1.0 "	0.98	0.89	1.02	0.90	1.13	1.11	—	—	0.090×10^{-12} "
hoogvac.	0.66	0.87	1.51	1.33	1.15	0.754	—	—	0.120×10^{-12} "

¹⁾ Hoogvacuum beteekent hier, dat de gasdruk in de condensatorkamer kleiner was dan 0.1 mM.

Anatomie. — De Heer BOLK biedt eene mededeeling van den Heer C. T. VAN VALKENBURG aan: „*De oorsprong der vezels van het corpus callosum en het psalterium.*”

(Mede aangeboden door den Heer C. WINKLER).

De embryologie, histologie en pathologische anatomie zijn er tot nu toe niet in geslaagd met zekerheid oorsprong en eindiging der balkvezels in de groote hersenschors vast te stellen. De weinig talrijke mededeelingen daaromtrent nemen dan ook eenigszins afwijkende standpunten in.

Terwijl de vroegere opvatting, dat het C. callosum eene typische commissuur zou zijn tusschen de beide hemisfeeren althans voor den mensch onwaarschijnlijk is geworden op grond van path-anat. praeparaten waarin bij balkbeledigingen asymmetrische secundaire degeneraties in de beiderzijdse mergmassa's werden gevonden, is dit voor dieren (konijn, kat, hond) door het experiment nog niet bewezen.

Onder gunstige omstandigheden is het mogelijk gedegeneerde balkvezels tot een zekere diepte in de schors te vervolgen, een enkele maal met zekerheid normale, in de schors dringende balkvezels aan te wijzen, geïsoleerd door degeneratie in naburige systemen.

Experimenteele (konijn, kat) noch pathologisch-anatomische praeparaten (mensch) stelden mij echter met zekerheid in staat uit de studie dezer vezelstraling te besluiten tot de schorslagen, waarin de balk-eindigingen indringen. De groote moeilijkheid die elke conclusie in den weg staat is de mergloosheid der uiterste vezelvertakkingen, waardoor hare degeneratie met de gebruikelijke methoden niet is aan te toonen (MARCHI, PAL).

Het behoeft geen betoog, dat de oorsprongscellen der callosum-vezels, door de methoden der mergvezelvervolgning nog minder zijn te vinden. De aangiften hieromtrent berusten uitsluitend op normaal-histologisch onderzoek.

Door middel der GOLGI-methode maakte CAJAL¹⁾ het voor kleine dieren (pasgeboren rat, konijn) waarschijnlijk, dat in de mergmassa, die de balkvezels als hoofdbestanddeel bevat, directe uitloopers indringen van pyramidecellen van verschillende grootte, alsmede collateralen van ascynders van andere schors-cellen. KÖLLIKER²⁾ die deze vondst bevestigde (muis) zag eveneens ascynders, uit polymorfe schorscellen afkomstig, zich in de streek der balkvezels

¹⁾ CAJAL: *Textura del sistema nervioso*. Tomo II. Parte 2. Pag. 145 seqq.

²⁾ KÖLLIKER: *Handbuch der Gewebelehre*. Band II. S. 664 flgg.

T-vormig deelen : een uitlooper begaf zich mediaalwaarts, vermoedelijk in de andere hemisfeer, de andere richtte zich lateraalwaarts, in de gelijkzijdige hersenhelft blijvende; KÖLLIKER houdt de laatste voor een associatievezel. De ontoereikendheid der histologische methode, in zooverre als het verloop der asylinders van bepaalde cellen slechts uiterst zelden over eene voldoende lengte te vervolgen is bracht mij weder tot het experiment. Ik ging daarbij uit van het sinds GÜDDEX algemeen vastgestelde feit dat een eel, wier asylinder is doorsneden, regressieve veranderingen ondergaat, onder omstandigheden te gronde gaat, althans met de gewone kleurmethode niet meer is aan te toonen.

Het is bekend, dat de grootte en de snelheid dezer regressieve veranderingen van allerlei zaken afhankelijk zijn : van den afstand der laesie tot de oorspronggevende cel, van het aantal collateralen dat tusschen cel en verwondingsplaats door den asylinder is afgegeven, van de verhouding der cel tot hare eigen onmiddellijke omgeving en wellicht van nog meer factoren.

Ik moest mij dus voorbereiden op de mogelijkheid na balkdoorsnijding geen celverlies in de schors te kunnen waarnemen, en vooral bedacht zijn op het gevaar uit een eventueel te vinden celverlies de gevolgtrekking te maken dat de verloren cellen de éénige oorsprongsplaatsen der balkvezels zouden zijn. Naast proefnemingen van katten en konijnen wier groote hersenen ik na verschillende balklaesies volgens mergvezeldegeneratiemethoden onderzocht en die mij, zooals boven vermeld is, evenmin als andere onderzoekers ¹⁾ tot de oplossing der gestelde vraag brachten, verrichtte ik na dezelfde operaties celkleuringen. Van den balk werden verschillende deelen sagittaal doorsneden (splenium, middenstuk, genu); de eene hemisfeer werd volgens NISSL (toluidinblauw), de andere helft afwisselend volgens PAL en v. GIESON gekleurd. Ter vergelijking dienden overeenkomstige sneden van normale dieren.

Aangezien het in deze mededeeling vooral om het beginsel te doen is, wil ik alleen in hoofdzaak de resultaten vermelden van 2 operaties één bij een kat, wier achterste balkhelft, één bij een konijn wier voorste balkhelft sagittaal werd doorsneden in de middellijn (tusschen falx en mediale wand eener hemisfeer).

De fotografieën zijn genomen van de schors der hemisfeer aan welke niet de minste nevenbeschadiging kon worden gevonden.

¹⁾ MURATOFF : Secund. Degenerat. n. Durchschneidung des Balkens N. Ztrbl. 1893
 LO MONACO & BALDI : Sulle degener. conseq. al taglio longitud. del corp. call Arch.
 d. farmac. speriment. Nov. 1904.

Kat N°. 3. 22 III. 1909.

Doorsneden werd bij een kleine volwassen kat, iets minder dan de achterste helft van het corp. callosum. Een zeer geringe prolaps van de mediale zijde der linker hemisfeer is schijnbaar de eenige nevenlaesie. Na de operatie heeft het dier gedurende de eerste uren eenige neiging bij het loopen zich naar links te wenden. Den volgende dag bestaat er, buiten eene algemeene lusteloosheid en eene te geringe bewegingsvaardigheid, geen enkele afwijking dan eene ongelijkheid der oogspelen ten voordeele der linker.

Na 8 dagen zijn alle ziekteverschijnselen verdwenen, zoowel in neurologisch als in psychisch opzicht.

Het dier wordt na 4 maanden gedood.

De operatie blijkt overeenkomstig de bedoeling te zijn uitgevoerd, afgezien van een gering verweekingshaardje in den gyr. splenialis sinister, dat ternauwernood het hier instralende merg bereikt. Het onder het doorgesneden balkgedeelte liggende psalterium is tevens sagittaal gekliefd. De dorsale grens van de tusschenhersenen is niet geraakt. De balklengte bedraagt 12 mm., waarvan de caudaalste 7 mm. sagittaal zijn doorsneden, zoodat het frontale einde der snede tot achter het distale eind der *fissura cruciata* reikt, voor zoover deze laatste op de mediale hemisfeerwand zich voortzet. De verweekingshaard in de schors begint $1\frac{1}{2}$ mm. achter het proximale eind der snede, is 8 mm. lang en 4 mm. breed. In verband met den hoek dien de lengteas van het c. call. en de dorsale hemisfeervlakte in haar mediane lijn, met elkaar maken, raakt een loodlijn op het (doorgesneden) achterste spleniumeinde ongeveer de achtergrens der primaire laesie aan het schorsoppervlak. Hieruit ziet men, dat het voorste derde deel van de *area striata* voorzoover deze op de mediale hemisfeerwand ligt, primair gelaedeerd is. Ik voeg er dadelijk bij, dat in verband hiermede het voorste derde deel (in 18 van de 54 betreffende coupes) van het linker corp. genicul. ext. zijne groote cellen heeft verloren, en dat het zgn. oppervlakkige merg van het linker corpus quadrigeminum anterius eenig vezelverlies vertoont. De ventrikel is aan de zijde der laesie verwijld, als 't ware met een knik dorsaalwaarts getrokken naar de ruimte die anders door den, thans gedegeneerde, balk wordt doorloopen. Duidelijk zichtbaar is het onderscheid in de samenstelling van het tapetum met die bij den mensch. De gedegeneerde balkvezels maken bij de kat slechts een zeer gering deel daarvan uit, doch verspreiden zich gedeeltelijk dorsaal van de sagittale occipitale strata blijvende, gedeeltelijk deze doorklievende, spoedig naar de laterale, en mediale, vooral *dorsale* schors. Het tapetum in engeren zin wordt hier haast geheel gevormd door de substance grise subépendymaire van DÉJÉRINE, die

blijkbaar in samenhang staat met den *fasciculus subcallosus* (MURATOFF).

Door de gebruikte kleuringsmethode kon de rechter hemisfeer alléén voor cel-onderzoek gebruikt worden; de schorsveranderingen van de linker, voorzoover die volgens v. GIESOX gekleurd was, werden alleen in dat deel in verband met de balklaesie beschouwd, dat geheel buiten het operatiegebied lag (occipitaalpool).

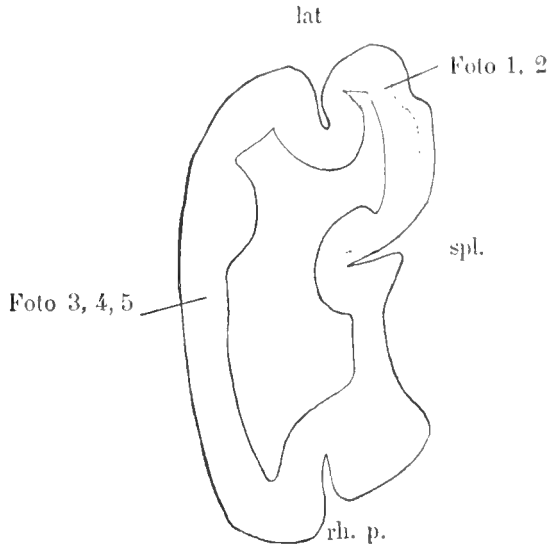


Fig. 1a.

Figuur 1 stelt voor een doorsnede door de schors van den gyrus splenialis eener normale kat. De juiste plaats is op de bijgaande omtrekteekening (fig. 1a) aangegeven.

De fotografie toont de duidelijke en typische laagverdeeling der zogenaamde visuele zône (veld 17 BRODMANN) gekarakteriseerd door: de moeilijke onderscheidbaarheid der lagen 2 en 3 of, wil men, het ontbreken van laag 2; door de splitsing der inwendige korrellaag in drie boven elkaar gelegen lagen waarvan de twee bovenste bij de kat moeilijk te scheiden zijn (IV $a + b$). Op de grens van IV $a + b$ en IV c is een rij vrij groote polygonale cellen duidelijk. Onder IV c volgt dan de lamina ganglionaris V, waarin niet talrijke maar groote, goed ontwikkelde pyramidencellen, terwijl in de laag der polymorfe cellen (VI) nog eene onderscheiding mogelijk is naar de meer hoekige cellen meer perifeer, en de meer ovale naar het centrum toe.

Vergelijken we hiermede *figuur 2*, naar eene fotografie der volkomen homologe plaats in de rechter hemisfeer der geopereerde kat. (De eenigszins verschillende uitgevallen toluidinblauwkleuring veroorzaakt een onderscheid in tint tusschen beide foto's.

Lagen I tot III vertoonen geene afwijkingen in celrijkdom. Ook laag IV vertoont de normale breedte; twijfelachtig (in verband met het kleurverschil) is het of hier een verlies aan tusschensubstantie heeft plaats gehad. De cellen zelve zijn in voldoende getal aanwezig; vele vertoonen echter lichte veranderingen (op de foto onzichtbaar), als abnorme kernligging, te homogene kleuring, en andere 't zij van regressieven aard, 't zij kenteekenen dat de elementen bezig zijn zich van eene funktiestoornis te herstellen. Duidelijk is een te groot aantal zoogenaamde trawantcellen, die bovendien veel meer dan in normale schors de neiging hebben de zenuwcellen in te denken; soms liggen er 4 à 6 zulke cellen dicht op een licht wankleurige zenuwcel, in deze streek goed zichtbaar met name aan de grootere stervormige cellen.

Zeer in 't oogvallend zijn de veranderingen in laag V der subgranulaire pyramidencellen. Deze elementen die in het normale praeparaat door hunne grootte en fraaie kleurbaarheid (tigroid) dadelijk de aandacht trekken, zijn in fig. 2 meerendeels hetzij onzichtbaar 't zij onherkenbaar veranderd. Praktisch gesproken ontbreken ze hier bijna geheel. Intusschen is deze rij cellen, ook in normale kattenhersen niet continu door de geheele area striata, in 't bijzonder niet overal waar deze op de laterale zijde der hemisfeer overgrijpt (gyr. entolateralis). Ook is zij bij het geopereerde dier niet op alle plaatsen, waar zij normalerwijs behoort voor te komen, in gelijke mate gedegeneerd als op de plaats die fig. 2 voorstelt.

De praeparaten der andere hersenhelft, voor zoverre deze naar v. GIESON gekleurd waren, vertoonden een volkomen overeenkomstige laesie der infragranulaire pyramidencellen. Bovendien was hier duidelijk een vermindering der fijne vezels tot in laag IV. Aangezien deze hemisfeer echter, gelijk gezegd, primair licht gekwetst was in den gyr. splenialis en dus de oorzaak van dit vezelverlies niet volstrekt zeker vaststaat, ga ik daarop verder niet in.

De diepste schorslaag (VI) ten slotte vertoont eveneens veranderingen. Het is echter niet wel mogelijk een beslist celverlies vast te stellen. Een groot aantal elementen heeft min of meer geleden: celvorm, kernligging, kleurwijze, verhouding ten opzichte van gliacellen zijn bij vele der polymorfe cellen van dien aard dat hieraan niet getwijfeld kan worden. Vergeleken met de gevonden veranderingen in laag IV zijn die van laag VI intensiever, betreffen hier meer de cellen direkt. Dienovereenkomstig vindt men hier de *werkzame* gliacellen doorgaans — ten getale van 2, 4 of meer — aan en op de cellichamen zelve liggen, terwijl deze in laag IV voor een goed deel tusschen de cellen in lagen.

Men vindt gliacellen overigens in alle stadia: rustend, werkzaam, en kort na volbrachten arbeid, welke toestanden zooals men weet¹⁾, vooral hunne uitdrukking vinden in de gedaante en de verschillende kleurbaarheid in het protoplasma der gliacel.

Figuur 3 stelt eene schorsdoorsneê voor uit den gyr. ectolateralis op de plaats in fig. 1 aangegeven, van een normale kat.

De laminatie is hier zooals men ziet, eene andere dan in de area striata. De hoofdkenmerken zijn in onderscheid van deze laatste: Alle zes lagen (volgens BRODMANN) zijn afzonderlijk aanwezig.

De dikte van laag II en III is aanzienlijker dan de som dezer lagen, die zich als één voordoen, in de area striata. In het diepste deel van III bevinden zich eene rij grootere pyramidencellen, onmiddellijk boven de lam. granularis interna (IV). Deze laatste is matig ontwikkeld, en enkelvoudig, en wordt naar het centrum toe opgevolgd door laag V waarin fraai ontwikkelde pyramidencellen, iets minder groot dan de infragranulaire van veld 17, maar talrijker dan deze. Daarbeneden treft men een vrij breede lamina multiformis aan, met spoelvormige, meer ronde, of hoekige cellen.²⁾

De overeenkomstige doorsnede door de r-hemisfeer der geopereerde kat vertoont in laag IV en VI veranderingen van denzelfden aard als in de hiervoor beschreven coupes door de area striata. Geringe celveranderingen, in het bijzonder eene verhoogde activiteit der vermeerderde neurogliacellen, zijn nog in het diepste deel der supra-granulaire pyramiden (III) waarneembaar.

Evenals in de area striata zetelt de voornaamste cel-afwijking in laag V. Om deze aan te toonen heb ik een deel der coupe van *figuur 3* afzonderlijk vergroot gefotografeerd (*figuur 4*). Men ziet daarin, schuin door de afbeelding verloopend, de groote cellen van laag V, die men gemakkelijk in de overzichtsfoto (fig. 3) terug zal vinden. Vergelijkt men hiernede nu *figuur 5*, die de volkomen overeenkomstige plaats in dezelfde vergrooting weergeeft bij de geopereerde kat, dan vindt men in de ook hier eenigszins schuin door de foto verloopende vijfde laag slechts weinig gekleurde infragranulaire pyramidencellen, terwijl de weinige die zichtbaar zijn, duidelijk geleden hebben: ze zien er klompig uit, vertoonen geen uitsteeksels of daarmee overeenkomende beginstukken. Een duidelijke tegenstelling

¹⁾ Zie E. DE VRÈS. *Exper. Untersuch. über die Rolle der Neuroglia. etc. Arbeiten aus v. MONAKOWS-Institut 1909.*

²⁾ Verder frontaalwaarts, in één dwarsvlak met het splenium corp. call. is de bouw der schorslagen van den gyr. ectolater. geheel anders; men vindt dan subgranulair tusschen de gewone groote pyramidencellen reusachtige exemplaren van soortgelijken vorm.

hiermee vormen de op de foto nog zichtbare supragranulaire cellen, die meerendeels (niet alle) een geheel normale gedaante vertoonen (rechts boven aan).

De tusschen de infragranulaire pyramidencellen liggende elementen van laag V zijn evenzeer door het proces getroffen: ze zijn stellig wel minder talrijk dan in de normale coupe; fijnere histologische veranderingen in de bewaarde cellen zijn hier moeilijker vast te stellen.

In laag VI zijn een massa cellen veel meer homogeen gekleurd dan in het contrôlepraeparaat, terwijl ze bovendien dichter opeen liggen, waardoor ze in schijn talrijker zijn. Een celverlies kan ik echter hierin niet aantoonen.

Konijn n^o. 11.

26 X '09. Doorsnijding van het voorste deel van het corpus callosum.

Het dier herstelde zich spoedig van de narcose, en vertoonde in zijn doen en laten niets bijzonders. Het eenige wat bij nader onderzoek opviel was de zeer onvoldoende, doorgaans geheel afwezige oogknipreflex bij beschijning met fel licht (booglamp). *Als* de reflex optreedt treedt hij beiderzijds op.

Het dier wordt 9 XI '09 gedood, leefde dus slechts 14 dagen.

Getroffen is het voorste derde deel van den balk; de snede dringt door in den rechter thalamus opticus. Aan de linker hemisfeer, noch aan de linker tusschenhersenen is een spoor van letsel zichtbaar. De linker hersenhelft wordt volgens NISSE, de rechterhelft met den thalamus volgens MARCHI behandeld.

Het laatste gedeelte geeft voor het onderhavige onderzoek geene aanwijzingen van belang. De door osmium gekleurde mergschede-korrels zijn zeer fijn en niet verder dan tot in de diepste schorslagen met zekerheid te vervolgen.

De schors der knaagdieren vertoont met die der carnivoren vrij aanzienlijke algemeene verschillen. Het geheele neopallium door vindt men ook daar, waar eene afgrenzing der afzonderlijke lagen goed is door te voeren, dat minstens de helft der celbestanddeelen een rond, blaasvorming karakter vertoont. Aan goedgekleurde praeparaten blijken deze de lagen II, IV en VI bijna geheel te vullen.

Eene bijzonderheid is tevens — waarop BRODMANN¹⁾ reeds wees — dat in de voor alle zoogdieren karakteristieke *area gigantopyramidalis* (Veld 4; „motorische zône”) de reuspyramidencellen ten eerste niet „reusachtig” zijn (ze worden door naburige infragranu-

¹⁾ BRODMANN: Vergleichende Localisationslehre etc. Berlin 1909.

laire pyramiden in grootte overtroffen), en ten tweede dat deze niet in eigenlijken zin infragranulair zijn. De lam. granul. interna, die bij zoogdieren in 't algemeen hier ontbreken moet, is bij konijnen hoewel in mindere mate toch aanwezig en wordt door de infragranulaire „reus”pyramiden doorkliefd, die zich dus periferwaarts begeeven.

foto 7, 8, 9.



Fig. 6a.

vertoont. Daar de sneerichting iets frontaal-geneigd was, zijn alle lagen iets breder dan met de werkelijkheid overeenstemt.

Men ziet het groote verschil tusschen de cellen der lagen III en V en die der lagen II, IV, VI; de groote breedte der multiforme 6e laag is evenzeer duidelijk. Het tusschengelegen deel in het praeparaat is met sterkere vergrooing opnieuw afgebeeld in *figuur 7*. De foto is dicht onder laag V afgesneden.

Vergelijken we met deze afbeelding een foto der overeenkomstige plaats uit de schors van het geopereerde konijn (*figuur 8*) dan zien we, afgescheiden van het dikteverschil der lagen, die door de snêerichting verklaard wordt, het volgende :

De bovenste cellagen tot en met III bevatten normale cellen, goed gevormd, met spitse, naar de periferie gekeerde uitsteeksels, waaruit veelal gemakkelijk met de loupe dendrieten te vervolgen zijn.

Ook in laag IV kan men, met geringe vergrooing, duidelijk normale, bijna ronde cellen zien liggen, met zwak of niet gekleurd protoplasma, waarin de donkere kern. Aan deze celpraeparaten was het mij, ook bij sterkere vergrooing, niet mogelijk in laag IV stellige veranderingen 't zij in zenuwcellen, 't zij in neurogliaelementen, aan te toonen. In laag V daarentegen valt eene groote afwijking terstond in 't oog. Het geringer aantal der infragranulaire pyramiden bevat slechts een enkele cel die als normaal zou kunnen gelden. Zonder twijfel zijn een deel dezer elementen onzichtbaar (verdwe-

Op den uitersten rechterhoek van *figuur 6* is dit zichtbaar.

Men vindt hier bij zwakke vergrooing afgebeeld het deel van de schors, zooals dat op *fig. 6a* is aangegeven; het ligt in één dwarsvlak met het voorste deel van het corp. callosum, waar dit de mediaanlijn nog bijna overschrijdt.

Onmiddellijk lateraal aan de distaalste punt der „motorische zône” aansluitend ligt een veld, dat de karakteristieke 6 lagen zeer fraai

nen \dot{z}), terwijl de aanwezige met enkele uitzonderingen zeer hebben geleden. Niet alleen de tegenstelling met de overeenkomstige cellen bij het gezonde dier maakt dit duidelijk, maar eveneens voor wien nog mocht twijfelen, de vergelijking met de goed gevormde supragranulaire pyramiden uit hetzelfde praeparaat. De veranderingen beperken zich hier zeer overwegend tot de cellen zelve, aan wie niet zoo zeer kernverschuivingen of indeuking door gliaclementen als wel verlies van vorm op te merken valt. Met uitzondering van 3 of 4 exemplaren die althans in beginsel hun vorm met het buitenwaarts gerichte puntvormige uitsteeksel bewaard hebben zijn de overige infragranulaire cellen, voorzoover ze bewaard zijn, klompig, homogeen gekleurd, schijnen op den weg ter skleroseering. In hoeverre dit laatste juist is, of deze toestand voorbijgaande is en voor normalere verhoudingen zal plaats maken, daaromtrent waag ik geen beslissing. Steunende op ander experimenteel materiaal schijnt de laatste mogelijkheid mij de waarschijnlijkste.

In laag VI, die op *fig.* 8 bijna geheel is afgebeeld, kon ik met zekerheid geene veranderingen aantoonen.

De bovenvermelde eigenaardigheid der rodentia, wat betreft de ordening der cellagen in Veld 4, maakt het oordeel over celveranderingen, vooral over celverlies in deze streek moeilijk, in 't bijzonder waar het geldt te bepalen welke de schorslaag is, die getroffen is. Tusschen de „gigantopyramiden” dezer zône, en de overige er tusschen in gelegen pyramidencellen is eene onderscheiding (afgezien wellicht van fijnere zuiver histologische kenmerken, die de door mij gebruikte methode niet kan aantoonen) onmogelijk met stelligheid door te voeren.

Dat er in veld 4 minder pyramidecellen voorkomen, is wel stellig; vooralsnog moet ik mij echter van eene nadere aanduiding onthouden.

Extirpatie van het frontaalste vierde deel der hersenschors van een konijn -- waarbij het rhinencephalon gespaard werd -- had een resultaat dat niet van het bovenvermelde na balkdoorsnijding afweek :

Konijn 16. 16 XI, '09.

Het voorste vierdedeel der rechter hemisfeer werd, als bovengemeld, geëxtirpeerd. Vooraf was met een zwakken faradischen stroom de grens bepaald van het gebied, van waaruit bewegingen zijn op te wekken. Deze bewegingen beperken zich tot gekruiste facialisbewegingen (snorharen!) en gekruiste kauwbewegingen; bewegingen in den linker voorpoot zijn uiterst gering en niet te analyseeren (er werd een zeer zwakke stroom gebruikt. R. A. 120 m.m.). Het aldus grof afgegrensde gebied werd ruim (d. i. het mes werd iets distaler ingezet) geëxtirpeerd. Na de narcose is de linker oogspleet 1,5 m.m.

wijder dan de rechter; de linker voorpoot verbetert de hem gegeven passieve, foutieve, houdingen (dorsum manus op den bodem) niet, de rechter onmiddellijk.

Reeds den volgenden dag zijn deze verschijnselen verdwenen. Het dier is verder volkomen normaal en sterft aan eene enteritis in den nacht van 10 op 11 Dec.; het leefde dus 24 dagen. De voorste helft der linker hemisfeer wordt volgens NISSL behandeld. Het blijkt dat de laesie beperkt is gebleven tot het bedoelde gebied.

De omstandigheid dat het dier reeds eenigen tijd dood was, en aan eene infectieziekte had geleden, maakt dat men met de kleuringsresultaten eenigszins voorzichtig moet zijn, en alleen datgene mag accepteren, wat van de meer specifieke reactie der cellen op de kleurstof onafhankelijk is. Enkele schijnbare misvormde, wankleurige of bijna niet gekleurde cellen mogen daarom niet meetellen.

Dit in rekening brengende, blijft evenwel (zie figuur 9) nog zeer duidelijk eene verandering in laag V, die wat den aard van de behouden cellen betreft, zich niet schijnt te onderscheiden van den toestand bij het vorig konijn.

Er zijn er echter méér gekleurd ¹⁾ en bovendien zijn de gekleurde niet beperkt tot de directe buurt van laag IV, maar komen ook voor, hoezeer in minder aantal, op de grens van laag VI.

Zooals boven werd vermeld, trof het mes niet alleen den balk, maar ook de onderliggende *psalteriumvezels* bij Kat n°. 3. De celveranderingen, welke eventueel van deze laesie het gevolg moesten zijn, zijn te zoeken in den ammonshoorn.

Inderdaad zijn daar de welbekende groote pyramidencellen ten deele op typische wijze veranderd. Terwijl een groot deel daarvan (links van de pijl op figuur 10) geheel normaal is van vorm en structuur, zooals figuur 11 doet zien (hetzelfde praeparaat bij sterkere vergrooting), zijn de cellen rechts van de pijl afwijkend, zooals uit fig. 12 duidelijk wordt. Normale ammonspyramidencellen zoowel van kat als konijn (bij het eerste dier zijn ze veel grooter van stuk) kleuren zich met toluidinblauw zeer fraai; het type is polygonaal, met eenigszins afgeronde hoeken; de kern is groot, en zeer licht of niet blauw getint; het kernlichaampje donkerblauw ²⁾.

Vergelijkt men daarmede de cellen der rechterhelft van den ammonshoorn van figuur 10, zooals ze in fig. 12 sterker vergroot zijn afgebeeld, dan vindt men in nagenoeg geen enkele cel een kern met kernlichaampje zichtbaar; het protoplasma der cellen is homo-

¹⁾ Om dit te beoordeelen is natuurlijk de geheele serie te bestudeeren.

²⁾ Ik zie hier af van de histologische verschillen der door GOLGI, CAJAL, KÖLLIKER e.a. onderscheiden pyramidencellen die tot den Ammonshoorn i. e. z. behooren.

geen, donkergekleurd. De aan haast alle cellen nog aanwezige uitloopers zijn lomp en grof; enkele cellen hebben het typische doornappelachtige uitzicht van gekwetste gangliencellen. Zeer merkwaardig is dat zieke en ongedeerde cellen zich niet, of in slechts zéér geringe mate, in een zelfde afdeeling bevinden; beider terrein is haast lijnscherp gescheiden. De afgrenzing is zoo duidelijk, dat ze zelfs aan v. GIESON praeparaten onmiddellijk in 't oog valt. Ik wil daartoe niet de linker ammonshoorn van kat 3 aanhalen, aangezien het bezwaar dat de hemisfeer dezer zijde primair gelaedeerd was, zou kunnen worden geopperd. Maar bij een konijn, welks achterste balkdeel met onderliggende vezels¹⁾ (o. a. psalterium) getroffen was is hetzelfde aan v. GIESON praeparaten zeer duidelijk. De nauwkeurige afgrenzing van getroffen en niet getroffen cellen hoop ik naderhand te geven.

De overige elementen van het cornu ammonis — de fascia dentata cellen — vond ik niet veranderd. Ook de ammonspyramiden in ventralere ligging waren ongeschonden bij kat 3. Het aangehaalde konijn vertoonde — in verband met de afwijkende liggingsverhoudingen der ammonsfornix van rodentia tegenover carnivoren — de verdeling der aangedane cellen eenigszins anders; in beginsel maakt dit geen verschil.

Men dient zich m.i. bij het beoordeelen der resultaten van proefnemingen als de medegedeelde te stellen op het reeds door von GUDDEN aangewezen standpunt. Eene cel, die na doorsnijding van een ascylander te gronde gaat, geeft dien ascylander oorsprong. De uitbreiding aan de interpretatie van te gronde gaande cellen gegeven n.l. dat deze ook kunnen zijn de elementen *naar welke* de doorgesneden ascylander leidt is onder omstandigheden stellig juist, maar geldt alleen voor pasgeboren-geopereerde dieren, wellicht ook in geval van sommige zeer lang bestaande laesies, of in enkele exceptioneele, nog niet nader verklaarde gevallen (cellen van den nucl. ventralis acustici die te gronde gaan na perifere octavuslaesie).

In zóóverre is de door mij toegepaste methode van opereeren op volwassen dieren verkieselijk, als zij althans omtrent het verband tusschen de doorgesneden en de tegrondegegane cellen in 't algemeen geen twijfel laat.

Waar derhalve in de hersenschors, aan seriesneden onderzocht, op regelmatige wijze cellen ontbreken, die bij niet-geopereerde dieren aanwezig zijn, daar moeten deze cellen als oorsprongselementen van doorgesneden vezels van het corpus callosum gelden.

1) Fornix beiderzijds normaal.

Een tweede stelregel bij de waardeering van celdegeneraties na asycylinderdoorsnijdingen is, dat men geen totale verdwijning der oorsprongscellen kan verwachten, wanneer tusschen de plaats der laesie en de oorsprongseel van den asycylinder belangrijke collateralen ontspringen. We mogen dus aannemen dat met de verloren gegane schorszenuwcellen buiten den balkvezel niet nog andere eenigermate belangrijke cellulifugale vezels in verbinding staan. De met zekerheid verdwenen zenuwcellen in de grootehersenschors beperken zich tot de subgranulaire pyramidenlaag (laag V BRODMANN). De eenige laesie, die invloed zou kunnen hebben op de cellen der met Nissl's methode onderzochte hemisfeeren is in de verrichte operatie uitsluitend de balkdoorsnijding, waarbij eventueel nog de schorsverwonding der contralaterale hemisfeer is te rekenen, maar welke laatste alleen door middel van den balk haren invloed op de elementen der onderzochte zijde zou kunnen doen gelden. Dit laatste is bij uitsluiting het geval bij de operatie van konijn 16, bij welk dier alleen een deel der schors werd verwijderd. Uit dit alles volgt derhalve zonder twijfel dat de genoemde subgranulaire pyramidencellen oorsprong geven aan balkvezels.

Het onderzoek toonde bovendien aan, dat in verschillende lagen veranderingen voorkwamen van minder ernstigen aard: veranderingen aan de cellichamen zelve — waarbij het oordeel: degeneratie of naderend herstel niet stellig kon worden gegeven —, en tusschen deze in: verlies der intercellulaire molekulare stof, ophooping van actieve gliaclementen.

Experimenten in andere deelen van het zenuwstelsel verricht, bewijzen dat doorsnijding van asycylinders ook dan invloed heeft op de oorsprongscellen, wanneer belangrijke zijtakken tusschen de plaats der laesie en de moedereel door den asycylinder worden afgegeven. De veranderingen die dan worden aangetroffen in het cellichaam zijn voorbijgaand en verdwijnen na korteren of langeren tijd geheel of grootendeels ¹⁾. Deze reactie- en regeneratietijd is natuurlijk verschillend naar gelang van velerlei anatomische en fysiologische omstandigheden. Dat er cellen van deze soort, van wie dus een balkvezel *als collateral* afkomstig is, zich bevinden onder degene die beschadigd werden aangetroffen, is zeer waarschijnlijk. Ik ben geneigd daartoe bijvoorbeeld sommige stervormige cellen, tusschen de verbrede

¹⁾ Het is bekend dat de reuspyramiden van veld 4 („motorische zône”) verdwijnen wanneer te voren de pyramidenbaan is doorsneden. Hierin ligt dus reeds eene sterke aanwijzing dat de in dit gebied ontspringende balkvezels van andere cellen dan de reuspyramiden afkomstig zijn. Ik hoop dit aan ander materiaal binnenkort te kunnen bewijzen.

laag IV der area striata te rekenen, wellicht ook cellen uit de polymorfe laag VI. Men dient echter in 't oog te houden dat soortgelijke veranderingen — met name de aanwezigheid van gliaclementen in verschillende activiteitsstadia — ook optreden waar vezels en vezel-eidigingen zijn te gronde gegaan. Op grond van vondsten aan mergschede- of Marchipraeparaten is het verloop dezer laatste niet volkomen na te gaan. De omstandigheid, dat eene duidelijk vermeerderde werkzaamheid der neurogliacellen aangetroffen werd, ook waar van gangliencelveranderingen weinig viel te bespeuren (laag IV, ook zelfs laag III (kat) maakt het aannemelijk, dat balkvezels onder anderen óók tot in, of zelfs boven, de inwendige korrelaag opstijgen. Dat ze, op weg daarheen, tevens in de diepere lagen (V en VI) eind-collateralen afgeven wordt door dezelfde gliaverhoudingen in gelijksoortige omgeving waarschijnlijk gemaakt.

Over de *wijze van verbinding* der beide hemisfeeren: of de balkvezels alleen tusschen symmetrische plaatsen verlopen of dat ze ongelijkwaardige schorsstreken verbinden, leeren de medegedeelde experimenten niets met zekerheid. Stellige secundaire veranderingen in gebieden die van de symmetrische velden der andere hersenhelft door de operatie niet waren gescheiden, heb ik niet kunnen vinden ook niet in geval van schorslaesies. Intusschen zijn de proefnemingen van de laatste soort wellicht van te groven aard.

De resultaten der gedeeltelijke *psalterium*doorsnijding zijn gemakkelijker te overzien. Het eenige volkomen duidelijke gevolg was de beschreven en afgebeelde, zonder twijfel voorbijgaande, verandering in een deel der Ammon-pyramiden. Merkwaardig is de uiterst geringe gliawoekering in de secundair gelaedeerde streek. We mogen hieruit de gevolgtrekking maken dat het psalterium, voor zoover dit tusschen de beide ammonformaties in, onder achter- en middenstuk van de balk ligt, uit vezels bestaat, die collateralen van andere — fimbria, fornix — vezels zijn. Waar ze eindigen, is op grond mijner experimenten niet uit te maken.

Omtrent den *vezelloop* der bestanddeelen van het *C. callosum* leeren de proeven, dat dit zich bij kat en konijn zeer overwegend richt naar de dorsale en dorsolaterale streken der hemisfeer.

Een tapetum corp. callosi wordt alleen gevormd op den lateralen ventrikel: waar deze tevens de onderhoorn (van antropomorfisch standpunt beschouwd) in zich opneemt, op de dwarsche doorsnede dus een verticaal gerekte spleet vormt, bezit hij alleen dorsolateraal een vezellaag op de substance subépendymaire, die den naam van balktapetum eenigermate verdient. Vandaar wenden zich de vezels — voorzoover ze niet al eerder dorsaalwaarts trokken — lateraal.

De gevolgtrekking ligt dus voor de hand dat -- met name in de occipitale streek -- vooral of uitsluitend in de dorsale, (mediale en laterale) schorsgedeelten, celveranderingen enz. te vinden zullen zijn na balkdoorsnijding. Het feit dat ik mijne voorbeelden uitsluitend aan deze windingen of velden ontleende, staat dan ook in verband met de omstandigheid dat de secundaire afwijkingen in de ventralere schorsstreken niet, of veel minder overtuigend waren aan te toonen.

De degeneratie in de *jimbria* is in het mergschedepreparaat niet aan te toonen. Voor een deel is dit toe te schrijven aan de omstandigheid dat de psalteriumvezels, die natuurlijk voor een deel ontaard moeten zijn, betrekkelijk weinig merghoudend zijn in normalen toestand. Hun verval is aan VAN GIESON-praeparaten zichtbaar door de te diffuus-roodachtige kleuring der fimbriadoorsnede.

Bezien we de verkregen resultaten van een gemeenschappelijk standpunt, dan moet vooraf worden herinnerd aan het feit dat bij alle mammalia principieel drie commissuursystemen het verkeer tusschen beide groote-hersenhelften onderhouden. De door EDINGER en ELLIOT SMITH geïmagineerde, door ARIËNS KAPPERS¹⁾ konsekvent doorgevoerde en uitgebreide nomenklatuur volgende, zijn te onderscheiden: vezels verloopende tusschen beide secundaire reukgebieden de *palaeopallia*: *pars olfactoria commissurae anterioris*; vezels verloopende tusschen beide tertiaire reukgebieden, de *archipallia* (d.z. de ammoniformaties): *psalterium*; vezels tusschen beide hersenschors na aftrek der genoemde streken, de *neopallia*, (d.z. voor de meeste mammalia het overgrootste deel van den hersenmantel): *pars temporalis comm. ant. + corp. callosum*. De archicommissuur en het callose deel der neocommissuur zijn door mijn experimenten in onderzoek genomen.

Beide ontspringen uitsluitend in cellen beneden de inwendige korrellaag, wanneer men KAPPERS' (t. a. p.) uiterst aannemelijke opvatting huldigt van de ontstaanswijze der ammoniformatie der mammalia uit die van lagere dieren (reptiliëen).

Deze twee commissuursystemen hebben derhalve dezelfde horizontale lokalisatie voor hun oorsprongsplaatsen als in dit opzicht onderzochte projectiestelsels, maar stammen voor zoover het den balk betreft, of in 't geheel niet, of slechts voor een deel (als collateralen) uit *dezelfde* eelementen als deze laatste, terwijl voor het onder den balk gelegen psalteriumdeel moet worden aangenomen dat *alle* vezels zijtakken zijn der ammonale projectie neurieten²⁾.

¹⁾ ARIËNS KAPPERS en THEUNISSEN, Die Phylogenese des Rhinencephalons etc. Folia Neurobiologica, Bd. I.

²⁾ Hoe het in dit opzicht staat met de *pars temporalis* der voorste commissuur („ventrale balk“) zal, naar ik hoop, blijken uit het door I. DE VRIES in het Centraal Instituut voor hersenonderzoek te bewerken proefschrift, dat zich met de commissuurstelsels bij de muis bezighoudt.

In fysiologisch opzicht levert het gevondene een anatomisch substraat voor de nauwverbonden, gelijktijdige werkzaamheid der beide hemisfeeren bij alle verrichtingen, welker aandrijvende prikkel in de subgranulaire lagen der hersenschors zijn laatste, „perifeerste” corticale uitgangspunt heeft. Aan den anderen kant bewijst de aangetoonde eindiging van vele balktakjes in hogere schorslagen (tot in laag III en laag IV) dat de van de overzijde gekomen prikkel samenwerkt met de hooger-corticale voorbereiding voor de te innerveeren lichamelijke verrichting.

Bovendien wijzen onze resultaten op de waarschijnlijkheid, dat de neopalliale commissuur, wier vezels voor een groot deel uit *eigen* cellen ontspringen, een hooger en graad van differentieering, onafhankelijkheid, heeft bereikt dan de oude archipalliale, welker funktioneering onder alle omstandigheden gebonden schijnt aan de werkzaamheid der uit de *gemeenschappelijke* cellen ontspringende projektievezels.

Dat bovendien in de rij der zoogdieren met den steeds — in quantitatief opzicht — zich sterker ontwikkelenden balk een kwalitatief gewichtiger invloed van de eene hemisfeer op de andere ontstaat is mede zeer aannemelijk. Reeds tusschen kat en konijn is het duidelijk dat bij het eerste dier de gevolgen der balkdoorsnijding tot in hogere lagen der schors zijn te vervolgen dan bij het laatste; en deze veranderingen moeten op rekening gesteld worden van het te gronde gaan van balkeindigingen.

Terwijl nu desniettemin met de gebruikelijke onderzoeksmethoden bij katten ¹⁾ eenigen tijd na de balkdoorsnijding geen enkele stoornis meer te vinden is, treffen we deze bij bestaande balkhaarden doorgaans duidelijk aan bij den mensch.

Het corpus callosum bij den mensch is — ook relatief — grooter dan dat van eenig zoogdier. En tevens is bij hem — voor 't eerst onder de mammalia — opgetreden eene differentiatie ten opzichte der funktie, der beide hemisfeeren.

De hogere funktioneele waarde der linker grootehersenhelft uit zich o. a. daarin, dat bij haarden in de voorste helft van de balk bewegingsstoornissen van hogere orde (*apraxie*) optreden in de linker lichaamshelft, die door de rechter hemisfeer wordt beheerscht. Zoo ergens, dan is het hier reeds, uit fysiologisch standpunt gezien, duidelijk dat de balkeindigingen te vinden zijn in die cortexlagen waarin vooral de prae-innervatorische werkzaamheid plaats heeft.

Zonder twijfel moeten ook bij de hogere zoogdieren, wier balk doorsneden is, eventueel voorbijgaande, maar toch standvastige ziekte-

¹⁾ En zelfs bij apen, zie LÉVY — VALENSI: Le corps calleux etc. Thèse de Paris 1910

symptomen aanwezig zijn. Ze zijn echter voor het klinisch onderzoek onvindbaar tot nu toe. De asymmetrische grootehersenfunktie van den mensch, gevoegd bij de mogelijk geworden toepassing van fijnere onderzoekingsmethoden, brengt in geval van gestoorde samenwerking der hemisfeeren stoornissen aan het licht, zooals ze door LIEPMANN, HELBRONNER e. a. zijn beschreven. Dat ook de anatomie, de wijze der balkvezeleindiging vooral den aard der waargenomen verschijnselen begrijpelijk maakt volgt reeds uit hetgeen bij de kat werd gevonden. Dat bij den mensch nog gecompliceerdere konnexies bestaan, is geenszins nit te sluiten. Nauwkeurige cytoarchitektonische studie van hersenschorsen, wier balkverbindingen vóór den dood werden onderbroken, zullen ons daaromtrent licht kunnen verschaffen.

Anatomie. — De Heer BOLK biedt eene mededeeling aan van den Heer C. T. VAN VALKENBURG: „*Over mesencefale kern en wortel van den N. Trigemini.*”

(Mede aangeboden door den Heer C. WINKLER).

De eenige der ons bekende herzenzenuwkernen van den mensch, omtrent wier funktie wij volstrekt niets met zekerheid weten, is de mesencefale celgroep uit welke een deel der trigeminusvezelen ontspringt. Histologie, anatomie, embryologie, experiment, en klinische waarneming met pathologisch-anatomisch onderzoek: geen van alle zijn er tot nu toe in geslaagd het raadsel der beteekenis dezer kern te ontsluitieren.

Terwijl, na een tijdperk, waarin men der bewuste kern en wortel sensibele funkties toeschreef (MERKEL, MEYNERT, WERNICKE), tot voor kort algemeen haar motorisch karakter als vaststaand werd aangenomen op grond van degeneratieproeven vooral (FOREL, BREGMAN, H. v. GUDDEN, SCHUZO-KURE), ten deele naar aanleiding van histologisch onderzoek (KÖLLIKER, CAJAL e. a.), zijn in den allerlaatsten tijd weer stemmen opgegaan voor den sensibelen aard dezer cellen, het afferente karakter harer uitsteeksels (JOHNSTON, v. LONDEN).

Waar de zaken zóó staan, kan men a priori verwachten, dat de meeningen over de beteekenis in engeren zin der mesencefale kern, d. i. over de perifere organen met welke zij door hare uitsteeksels in verband staat of op welke organen zij, eventueel langs een omweg inwerkt, nog meer uiteen zullen loopen. Het schijnt zelfs nutteloos deze meeningen te bespreken, zoolang daaraan iedere anatomische basis ontbreekt.

Het kostelijke hulpmiddel van het experiment kon zelfs hierin tot nu toe geen licht verschaffen. Alle onderzoekers zijn het er over eens dat eene degeneratie der cellen van de mesencephale Quintuskern, als deze niet met andere laesies gecompliceerd is, geen waarneembare stoornissen veroorzaakt.

En voor sommige bij het leven opgeteekende afwijkingen, die door enkele waarnemers in verband werden gebracht met eene ontarding der genoemde kern, die post mortem naast andere degeneraties werd gevonden, is de afhankelijkheid van eene funktiestoornis van den nucl. mesenceph. Trigemini weinig waarschijnlijk gebleken (MENDEL, TOOTH, HAGELSTAM, HOMÉN).

Eene door mij gedane pathologische waarneming richtte mijne opmerkzaamheid op de hier aangeroerde vraag en werd aanleiding tot het onderzoek, waarvan ik de resultaten mij veroorloof mede te deelen ¹⁾.

De pathologische waarneming is de volgende. Eene vrouw leed sinds 12 jaren aan een subduraal haematoom achter de rechter oogholte. Alle in de fissura orbitalis superior intredende zenuwen waren door den tumor zoodanig gedrukt, dat er bestond: ophthalmoplegia completa dextra en eene typische anaesthesie in het gebied van den eersten trigeminustak. Alle overige hersenzenuwen — afgezien van eene lichte linkszijdige mondfacialisparese van supranucleairen oorsprong — waren intact; in 't bijzonder funktioneerden de 2^{de} en 3^{de} Trigeminustak geheel normaal. Na den dood werd in den rechter mesencephalen quintuswortel eene partieele degeneratie aangetroffen; en na zorgvuldige telling bleek dat het aantal der bijbehorende cellen tegenover links tot op $\frac{3}{5}$ verminderd was.

De door het haematoom tot degeneratie gebrachte vezels van den mesencephalen wortel konden niet in den motorischen trigeminustak verloopen; evenmin in Ram. II of III sensibilis. Ze moesten daarentegen te zoeken zijn óf in Ram. I Trigemini of althans retroorbitaal wóó gelegen zijn, dat de tumor ze kon vernietigen.

Deze vondst is in tegenspraak met de bovenvermelde, haast algemeen gehuldigde opvatting eener motorische funktie, die de middenhersenvezelen in de pars minor s. motoria lokalizeert. Aan den anderen kant sluit zij eene motorische funktie niet uit, al *kennen* we ook geen trigeminusbestanddeelen van dit karakter, die in den Ram I of althans retroorbitaal aanwezig zouden zijn.

Ik heb dus, hoezeer zij daartoe ook uitlokte, mijne waarneming niet als een *bewijs* voor den sensiblen aard van althans een deel der

¹⁾ Eene uitvoerige beschrijving verschijnt in de Folia neurobiologica.

mesene. kern, meenen te mogen opvatten. Wat mij hiervan weerhield, was, naast de onzekerheid van het perifere verloop der gedegeneerde vezels (in of buiten den stam van Trig. I) en naast de kleine mogelijkheid dat ook *in* Trig. I motorische vezelen zouden kunnen verlopen, de verhouding van den mesencefalen wortel tot zijn kern. Afferente zenuwvezelen eindigen in het centrale zenuwstelsel, zonder eenige mij bekende uitzondering, met (fijne) vertakkingen aan de periferie eener eel (of dringen, als men de neuronentheorie niet aanhangt, daar in door). Nimmer staan ze in direkte gemeenschap met deze cel op de wijze van een ontspringenden ascylinder of op de wijze die we van de spinale ganglia kennen. Wanneer inderdaad de mesencefale quintuscellen sensibel van natuur zijn, vertoonen ze eene uitzondering, en eene fenomenale uitzondering, op de overal elders regelmatig aan te treffen verhoudingen. JOHNSTON¹⁾ accepteert nu inderdaad deze uitzondering, en hij grondt zijn geloof op de dorsale ligging der cellen (boven den sulcus limitans van His) op haar spinaal gangliencelachtig uiterlijk, op eene door hem vermoede analogie met dorsale reuscellen bij amphioxus e.a. (die hij voor sensibel houdt) en ten slotte op de uitredingswijze van den mesene. wortel, waarvan hij voor enkele visschen en zoogdierembryonen meende te kunnen aantoonen, dat ze met de pars major (sensibilis) plaats heeft.

Ik meende voorzichtig te doen deze motieven, die zooals men ziet, niet alle eene evengroote bewijskracht hebben, niet te zwaar te laten wegen, en heb mij daarom, waar pathologie en experiment mij voorloopig niet verder brachten, tot de vergelijkende anatomie gewend.

Ik onderzocht vertegenwoordigers van cyclostomen, selachii, teleostei, amphibiën, reptilieën, vogels, zoogdieren.

Van deze laatste exemplaren der Ordes der: monotremen, marsupialia, insektivoren, chiropteren, edentaten, rodentia, carnivoren (fissipedia en pinnipedia) cetaceeën, ungulaten, primaten.

Onder alle groepen is er slechts één bij welke een mesencefaal trigeminusgedeelte niet aanwezig is: die der *cyclostomen* (*Petromyzon planeri*). Deze waarneming is in overeenstemming met die van TRETJAKOFF,²⁾ die echter in het frontaalste deel der Quintuskern bij de petromyzonlarve het analogon der middenhersenkern van hoogere vertebraten zoekt. Ammocoetes ken ik niet, maar voor *Petromyzon*

¹⁾ JOHNSTON. The Radix mesencephalica Trigemini. Journ. of compar. Neurol. and Psychol. 1909.

²⁾ TRETJAKOFF, Das Nervensystem von Ammocoetes, Journ. of Comp. Neurol. and Psychol. 1909.

kan ik dit vermoeden niet deelen. Zekers weet ik daaromtrent overigens niet te zeggen.

Alle andere vertebraten, die ik onderzocht, van selachii tot den mensch, bezitter: een mesencefale trigeminuskern en een bijbehorenden wortel. Aan mergschede-praeparaten is evenmin als aan karmijn- of van Giesonpraeparaten ooit de overgang van ascylinders uit de betreffende cellen in de rad. mesenc. waarneembaar. Mogelijk is de vaststelling van dit feit aan volgens CAJAL of BIELSCHOWSKY behandelde zilverpraeparaten, waarvan ik me heb overtuigd bij haaien (*Acanthias vulgaris*),¹⁾ vogels (*kipembryonen*)²⁾ en zoogdieren (*konijn* en *kat*).

De wortel bereikt dan de laterodorsale, daarna laterale grens van het centrale buisgrijs van den aquaeductus Sylvii, loopt behoudens enkele uitzonderingen, lateraal van den ongekruiden trechleariswortel distaalwaarts, tot dat hij zich geheel of volgens anderen gedeeltelijk — na afgifte (bij de meeste dieren) van collateralen aan de motorische V-kern, met den nerv. trigeminus buiten de oblongata (pons) begeeft.

In den bouw der cellen bestaan zekere variaties. Bij alle zoogdieren — uitgezonderd marsupialia en wellicht monotremata — zijn de cellen zonder onderscheid op dwarsche coupes rond of elliptisch, naar de richting waarin ze worden getroffen. Hieraan ontleenen zij uiterlijke gelijkenis met spinaalgangliencellen, waarop reeds werd gezinspeeld. Bij alle andere diersoorten keert deze vorm terug, maar doorgaans gemengd met elementen van meer polygonale gedaante; eene uitzondering hierop vormen vogels, sommige reptilieën, amphibieën³⁾, waar alleen ronde, resp. ovoïde cellen gevonden worden.

Bij buidelkieren (*Didelphys* sterker dan *Makropus*) vindt men de beide soorten gemengd, haast op dezelfde wijs als onder de reptilieën bij *Chelone midas*. Bij visschen overheerschen de plomp-polyedrische cellen; vaak zien ze er op karmijn of haematoxylinpraeparaten uit als logge klompen protoplasma.

Bij goed gelukte zilverimpregnatie vindt men in hersenen van jonge zoogdieren (kat, rat, konijn) volgens CAJAL aan sommige cellen, buiten het uitsteeksel dat de mesencefale wortel meê zal vormen, meerdere, meest korte uitsteeksels. Hetzelfde kon ik bij enkele cellen van *Acanthias*, en van *Rajaembryonen* waarnemen, evenals vroeger

1) In het Anatomisch Kabinet te Leiden. (Prof. BOEKE).

2) In het Anatomisch Laboratorium te Groningen. (Prof. VAN WIJHE).

3) Volgens P. RAMON, Trab. biol. Madrid, T. III, p. 153. Het gelukte mij niet bij rana of salamandra deze cellen te zien te krijgen.

HELD aan zoogdierenembryonen, en P. RAMON bij vogels, reptiliëen en amphibiëen.

Men is nu gewend aan al deze cellen tezamen den naam van *nucl. mesencephalicus trigemini* te geven, ofschoon wellicht de door WALLENBERG en EDINGER gebruikte naam van *nucl. magnocellularis tecti* verkieslijker ware. Aangezien echter uit het complex dezer cellen in elk geval de vezelbundel, die wij *radix mesencephalica trigemini* plegen te noemen, afkomstig is, de celgroep zelve morfologisch onmogelijk in ondergroepen te verdeelen is, kan men de bedoelde elementen der verschillende diersoorten zonder bezwaar voorloopig homologiseeren.

Als m.i. noodzakelijke voorbereiding voor een eventueel te vormen oordeel omtrent de fysiologische beteekenis der mesencefale kern en wortel, heb ik mij inzonderheid beziggehouden met de bepaling der ligging van de cellen in proximodistale richting, en met de wijze van uittrekking der wortelvezels uit den hersenstam. Terwijl ik voor de uitvoerige motiveering mijner uitkomsten (lijsten van cel-tellingen) naar het aangehaalde, weldra verschijnende artikel moet verwijzen, mogen de hoofdzaken door figuren toegelicht, hier worden meegedeeld.

Vïsschen. Bij alle vertebraten, niet-zoogdieren, zijn de mesencefale quintuscellen inderdaad zooals haar naam aanduidt, tot de middenhersen beperkt. Het orale begin der kern valt ter hoogte der commissura posterior, de caudaalste cellen reiken tot in de dwarsvlakken der trochleariskern. Eén zeer in 't oogvallende uitzondering op dezen regel wordt gevormd door den toestand bij de *teleostei* (fig. 2). Wanneer men de kernligging dezer dieren vergelijkt met die bij *selachii* (fig. 1), dan vallen twee zaken op te merken.



Fig. 1. *Scyllium canicula*. verlaten, maar bovendien liggen deze cellen bij teleostei (*lophius piscatorius*, *gadus morrhua*, *hippoglossus*, *abramis*, *trutta*) zeer veel dichter oopen en vormen meer in den gebruikelijken zin van het woord een zenuwkern. Men treft ze aan onmiddellijk frontoventraal van, en verder ventraal van den ventriculus lobi optici, die bij deze dieren zeer veel sterker is ontwikkeld dan bij haaiachtigen: ze blijven dus, ten opzichte van den hersenstam in zijn geheel wel in het dorsale deel liggen, nemen echter eerder eene plaats in op den overgang van tectum naar tegmentum. Geheel in

overeenstemming met de ligging bij selachii is de situatie op de grens der ventrikellholte, aan, of wel in het ependym daarvan: bij

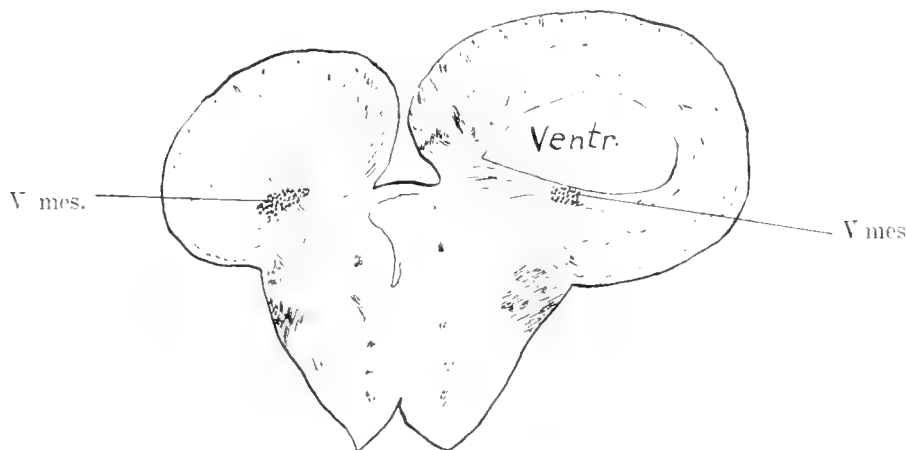


Fig. 2. *Lophius piscatorius*.

scyllium ziet men vooral op sagittale coupes de cellen de ependymlaag voor zich uit buigen, waardoor ze vaak bijna in de holte schijnen te hangen (fig. 3). Op deze laatste figuur kan men tevens



Fig. 3. *Scyllium canicula*.

een indruk krijgen van de frontocaudale afmeting der kern op een niet ver van de mediaanlijn gelegen coupe.

De studie eener serie van dwarsneden leert dat de frontaalste cellen in het voorste deel van het tectum opticum optreden, en dat de caudaalste in het velum medullare anticum, nog vóór het optreden der trochleariskern aangetroffen worden. De kompakte kern der teleostei daarentegen strekt zich over geen grooteren sagittalen afstand uit dan $\pm 250 \mu$ (*lophius*). Wat de verdeling der cellen bij de

selachii betreft, de grootste getallen op één dwarscoupe treft men aan in het derde en vierde vijfde deel der sagittale afmeting van de kern. Zeer belangrijk zijn echter de verschillen niet met de ervóór en erachter gelegen afdeelingen.

De uittredingswijze der respect. mesencefale wortels uit de hersenstam is bij beide dierklassen verschillend, en onderscheidt zich bovendien van die bij hogere dieren. Bij *scyllium canicula* vond ik verhoudingen van zeer bijzonderen aard, die mogelijk van principieel gewicht kunnen zijn voor de beantwoording van het in den aanvang genoemde vraagstuk, zoodat ik deze aan eenige figuren zal trachten te verduidelijken.

Nadat de celuutsteeksels zich laterodorsaal van den aquaedukt tot een tamelijk samenhangend bundeltje hebben vereenigd en distaal zijn getrokken, ziet men, frontaalwaarts van de intrede der sensible trigeminuswortel, waaraan het ganglion gasseri (G.G.) zichtbaar is, zich van dit bundeltje eene vezelmasa afscheiden en zich naar de periferie der oblongata begeven, waar zij uittreedt (fig. 4). Onmiddellijk ventraal



Fig. 4. *Scyllium canicula*.

ervan, maar duidelijk ervan gescheiden, is het frontaalste stammetje van den motorischen trigeminuswortel in zijn mediaalste deel getroffen. Dit laatste stammetje wordt door een nieuw, gelijksoortig, op precies dezelfde hoogte verloopend stammetje van den mot. V wortel, 4 sneden verder caudaalwaarts, opgevolgd, nog altijd begeleid door de uittredende mesencefale wortelvezels, die ongeveer 250 μ dorsaler verlopen (fig. 5). Op geen der beide praeparaten is eene vereeniging der met de nog extrabulbaire sensible vijfde zenuw (waaraan het gangl. Gasseri zichtbaar is) stellig waar te nemen.

Reeds de volgende - caudalere -- coupe vertoont geen nittredende middenhersenvezels meer, terwijl de mot. V stam op dezelfde, rela-

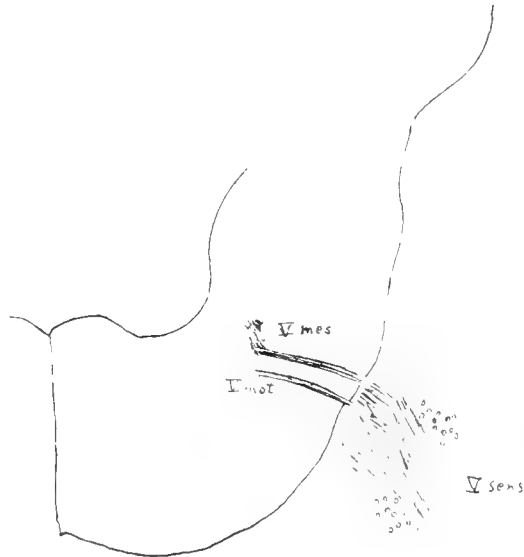


Fig. 5. Scyllium canicula.

tieve, plaats ligt. Dorsaal van dezen laatste ziet men de schuin getroffen, nog overgebleven mesencefale wortel (fig. 6). Zes sneden

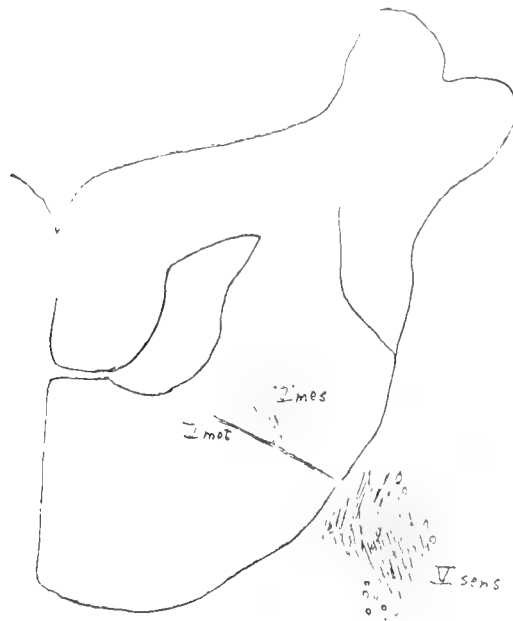


Fig. 6. Scyllium canicula.

verder distaalwaarts, als van den motorischen V stam slechts het grootste, naar de mot. kern gekeerde, deel nog wordt getroffen,

richten zich de genoemde schreefgetroffen bundels lateraal van den nerv. mot. V lateroventraalwaarts. Op deze snede (fig. 7) begint de

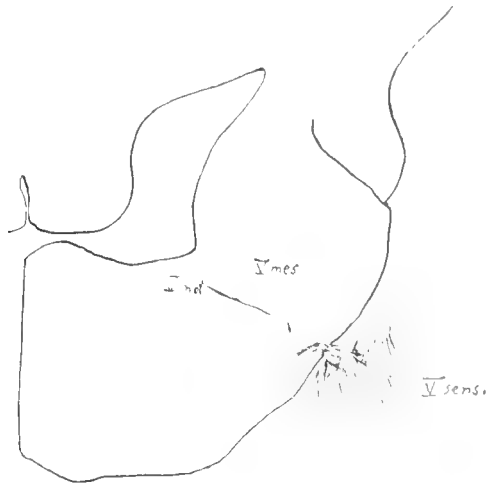


Fig. 7. *Scyllium canicula*.

sensible V wortel zijn intrede. Steeds meer en meer naderen de lateroventraalgerichte mesencefale vezels de periferie, en ze treden 9 sneden distaal van fig. 7 door de pia mater, zich mengend tusschen de bestanddeelen van den sensiblen trigeminuswortel (fig. 8).



Fig. 8. *Scyllium canicula*.

Ook nu nog schijnt de mesencefale quintuswortel niet geheel uitgeput. Men ziet althans nog enkele der in zijn areaal verlopende vezels in de oblongata verder distaalwaarts trekken, dicht bij de

dorsomediale pool der radix spinalis trigemini, van welke ze in caudalere vlakken niet meer te scheiden zijn.

Bij *Teleostei*, met name *lophius piscatorius*, is de zaak veel eenvoudiger. De radix mesencephalica is hier minder compact; ze wordt gevormd door eenige dunne, 4 of 5, mergbundeltjes, van welke zich, als de sensible trigeminuswortel reeds bezig is in te treden, slechts los samenhangende vezels afscheiden om dorsaal van de intredende sens. zenuw, respect. tusschen de dorsaalste vezels daarvan, buiten



Fig. 9. *Lophius piscatorius*.

de oblongata te geraken. Eenige (4) sneden verder distaalwaarts verlaat ook de nerv. V mot. den hersenstam; ook deze begeeft zich in het dorsale deel der hier intredende sensibel V vezels, altijd ventraal van den mesencephalen quintus, duidelijk daarvan gescheiden (fig. 9). Verder caudaalwaarts is van een restant der radix mesencephalica niets meer te vinden.

Amphibiëën. Volgens PEDRO RAMOX (l.c.) liggen de oorsprongscellen van den mesencephalen quintuswortel dezer dieren in het tectum opticum, dicht bij het ependym van den ventr. lob. opt., eenigszins verstrooid, lateraalwaarts, zelfs om den ventr. lob. opt. heen verschoven; herinneren dus in laatstgemeld opzicht eenigszins aan den toestand bij teleostei.

De wortelvezels verloopden op de gewone wijze distaalwaarts, wendden zich echter eerst — grootendeels — naar de periferie in een dwarsvlak waar de sensibel trigeminus reeds intreedt. Ze blijven daarbij ventraal in dezen laatste, en worden op hun beurt begeleid door den motorischen V-wortel, waarvan ze duidelijk gescheiden zijn (*rana*, fig. 10). Een klein restant der rad. mesencephalica trekt — evenals bij scyllium en op dezelfde relatieve plaats — caudaalwaarts; het is weldra niet meer afzonderlijk te onderscheiden.

Reptiliëën. Men treft hier, wat de ligging der cellen der grootcellige dakkern betreft, verschillende toestanden aan bij vertegenwoordigers der *lacertilia*, *ophidia*, *crocodilidae*, *cheloniu* die zonder twijfel samenhangen met den algemeenen bouw van het tectum opticum der dieren, vooral voorzoover deze beïnvloed wordt door den achteronder in de ventrikelruimte zich opdringenden *torus semicircularis* die vooral bij *crocodilidae* zoo duidelijk is. Een indruk daarvan geeft

fig. 11. Men ziet hier op dwarseche doorsnede de rangschikking der mesencefale quintuscellen bij *alligator sklerops*. Enkele cellen liggen

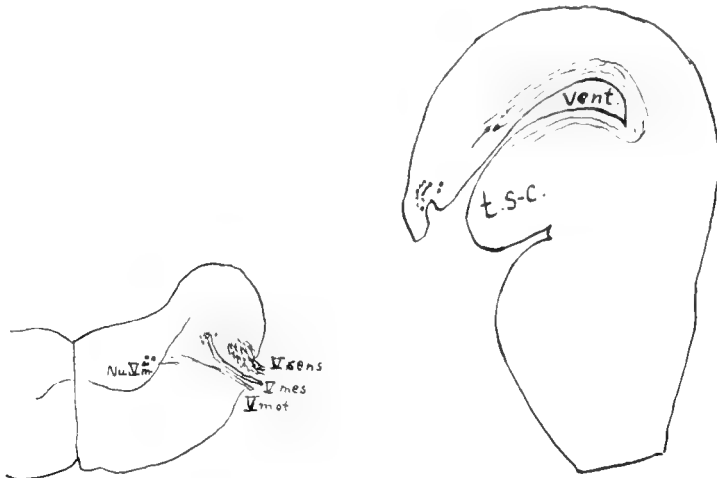


Fig. 10. *Rana temporaria*.

Fig. 11. *Alligator sklerops*.

t. s. c. = torus semicircularis

in de ependymlagen die den ventrikel omgeven. De meeste liggen, te dezer hoogte, mediaan, vormen met die van de overzijde tezamen meestal één, ongepaarde kern. Dit laatste is ook en vooral, zeer duidelijk bij *chelone midas*, waarvan fig. 12, in de streek van het caudale deel der commissura posterior, een voorstelling geeft. Duidelijk is hier de plumpe genaante der cellen, waartusschen eene minderheid van ronder uiterlijk; deze laatste worden in distalere dwarsvlakken relatief talrijker.



Fig. 12. *Chelone midas*.

Bij *varanus salvator*, noch bij *eumeces murinus* vindt men deze ongepaarde mediaan liggende kern zoo fraai terug; slechts weinig cellen raken hier van weerszijden de mediaanlijn. Zoowel lacertilia als ophidia bezitten haast uitsluitend ronde, of peervormige mesencef. quintuscellen; de plomp-hoekige elementen der hydrosaurii ontbreken geheel of bijna. De verdeeling der cellen in sagittale afmeting geeft eene eenigszins andere verdeeling der reptilieën: *alligator sklerops* vertoont de sterkste ontwikkeling der kern in het frontaalste tectum-deel (fig. 13), *eumeces murinus* in het distaalste (fig. 14), *varanus salvator* (van wien in dit opzicht *chelone midas* niet belangrijk afwijkt) bezit dakkerncellen die vrij gelijkmatig verdeeld zijn over het tect. opt. (fig. 15). De uittreding van den middenhersenwortel is bij alle onderzochte reptilieën in beginsel gelijk. Het duidelijkst was ze in mijne praeparaten van *varanus salvator* en *boa constrictor*. De betreff. vezels van *varanus* beginnen pas een gedeelte periferiewaarts te zenden als de sens. trigeminus reeds bezig is in te treden. Zelfs als een groot deel van den spinalen quintuswortel reeds gevormd is, ook als deze in volle ontwikkeling binnen de oblongata ligt, bereiken de uittredende mesencef. V vezels de periferie, of liever het ventrale gedeelte der rad. spinalis V. Ventraal, en afgescheiden ervan, ligt de uittredende motorische trigeminuswortel. (fig. 16).

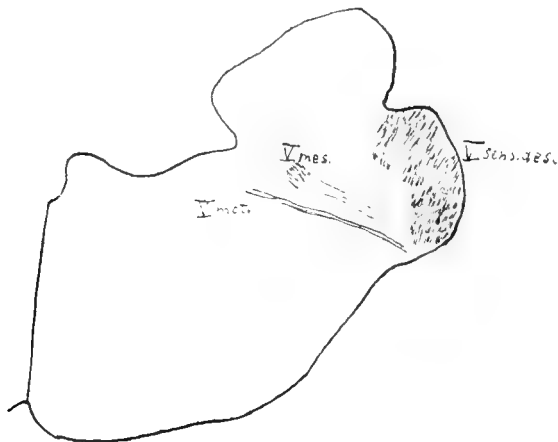


Fig. 16. *Varanus salvator*

Bij de overige reptilieën is de toestand dezelfde; alleen bij *boa* was het mij mogelijk met *zekerheid* een caudaalwaarts trekkend restant der met den mesencef. V wortel verloopende vezels aan te toonen, aan de mediodorsale grens der subst. gelat. Rolando rad. spinalis V.

Vogels. De buitengewone ontwikkeling van het tectum opticum in

lateroventrale ombuiging, en de verdunning der lamina commissuralis teeti, waarin ternauwernood naast en tusschen de commissuurvezels nog plaats is voor cellen, bewerkt de laterale ligging der mesencef. quintuseellen boven den ventr. lob. optici zooals fig. 17 vertoont;

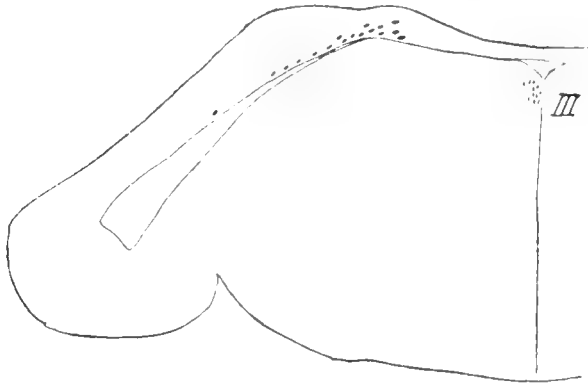


Fig. 17. *Ciconia alba*.

alleen in het oraalste deel der kern is eene ligging boven den eigenlijken aquaedukt mogelijk; hier reiken de cellen dan ook tot de mediaanlijn, zonder dat echter de typische ongepaarde mediane kern wordt gevormd als bij hydrosaurii en selachii. De celvorm is blaasachtig, rond. Over de uitbreiding der mesencef. V vezels is het oordeel moeilijk. Men ziet uit de radix mesencef. vezels naar de motorische V kern gaan; hoe de overigen de periferie bereiken is aan normale praeparaten (*ciconia*, *chrysomitris*) niet stellig te zeggen.

Zoogdieren. Zonder op alle bijzonderheden van elke onderzochte orde afzonderlijk in te gaan, worden hier alleen de meest sprekende punten van overeenkomst en verschil medegedeeld. De door CAJAL (l.c.) gemaakte onderscheiding in *nucleus inferoposterior* en *nucl. superoanterior* binnen de grenzen der mesencephale V kern is voor vele mammalia door te voeren, vooral voor rodentia, die voornamelijk door CAJAL onderzocht werden (konijn, rat). Bij de twee laatste zoogdier-orde (monotremata en marsupialia) gaat deze onderscheiding niet op. Het bij andere mammalia (monodelphia) distaalwaarts van de middenhersenen gelegen kerndeel ontbreekt bij didelphia geheel of bijna geheel. Bij *Echidna hystrix* vindt men haast geen enkele mesencef. V cel lateraal van den aquaedukt, veel minder van den 4den ventrikel. Verscheidene zijn iets van de middellijn af, dorsaal van den aq. Sylvii geschoven, de overgrootste meerderheid ligt in alle dwarsvlakken aan de mediaanlijn; vergl. fig. 18, (vlak van de

Trochlearis-kern). Vóór de kruising der nervi trochlearis is de kern uitgeput.

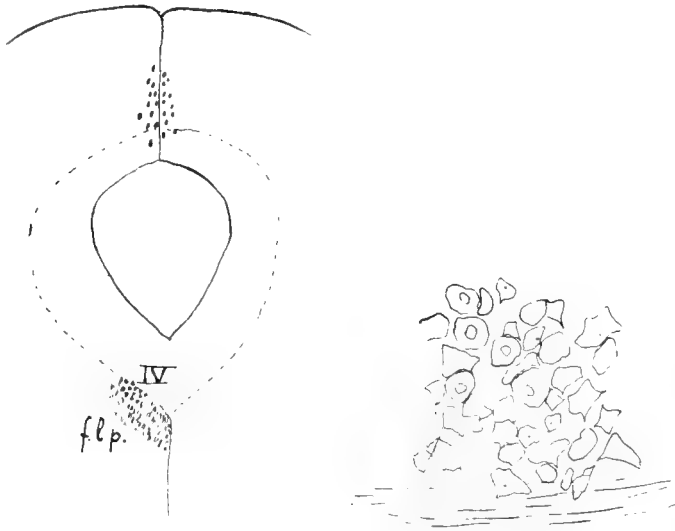


Fig. 18. *Echidna hystrix*. Fig. 19. *Didelphys marsupialis*.

Marsupialia vertoonen een dergelijken toestand, hoewel hier een enkele cel reeds lateraal van het rostraalste deel v. d. 4den ventrikel komt te liggen, bij *makropus* duidelijker dan bij *didelphys*.

Bij het laatstgenoemde dier is de combinatie der beiderzijdsche dorsaal gelegen kernen tot een ongepaarde mediane in het rostraal deel van het tectum (streek der comm. post.) duidelijk. In fig. 19 ziet men hiervan eene afbeelding. Zeer in 't oogvallend is hier — sterker dan bij *echidna* — dat de nucl. magnocellularis tecti uit twee soorten elementen bestaat: meer ronde, ovoïde, blaasvormige en plomp-polyedrische. Vergelijkt men fig. 19 (*didelphys marsupialis*) met fig. 12 (*chelone midas*) dan treft de overeenkomst tusschen buidelrat en schildpad onmiddellijk. Een derde buideldier waarvan het Herseninstituut een sagittale serie bezit, geeft gelegenheid de overeenkomst in proximodistale afmeting tusschen zijn tectale V kern en die van *chelone* of *varanus* op te merken (fig. 20: *onychogale frenata*, te vergelijken met fig. 15 Nijlvaraan). Het verloop en de uittrekking der mesenc. V vezelen biedt weinig bijzonders aan. In de streek der motorische V-kern verliest de middenhersenwortel verscheiden vezels aan deze laatste, de overige maken eene distaal convexe bocht, en treden in het ventraalste deel der reeds in de oblongata opgenomen rad. spinalis trigemini, duidelijk gescheiden, en dorsaal, van den motorischen V wortel. (*Makropus robustus*, fig. 21).

Alle overige zoogdieren vertoonen nu, zoowel in de verdeling der cellen in één dwarsvlak als in hare caudo-orale distributie, in



Fig. 21. Makropus robustus.

meerdere of mindere mate de volgende principieele afwijkingen: 1. de cellen zakken van het tectum, langs de grens van het centrale buisgrijs om den aquaedukt ventraalwaarts; 2. de cellen trekken, als 't ware langs hare uitsteeksels distaalwaarts, en komen tot dichtbij resp. in de dwarsvlakken der motorische V-kern te liggen. Van dit laatste geeft figuur 22, eene sagittale doorsnede, lateraal van den ventrie. quartus, door den hersenstam van de *rat*, een goed denkbeeld. Bij den mensch treffen we ongeveer gelijke verhoudingen aan; bij de meeste andere zoogdieren blijven de cellen iets frontaal van de kauwkern; de nucl. infero-posterior (CAJAL) ligt dan iets caudaal van de trochlearisuittreiding naast den vierden ventrikel (kat, paard).

De ligging der cellen in het dwarsvlak vertoont ook slechts gradueele onderlinge verschillen. Een echte mediaan-dorsaal gelegen kern als bij *didelphia* vindt men nergens. Toch is bij één diergroep (*carnivora*

pinnipedia), van welke ik *phoca vitulina* onderzocht eene duidelijke neiging in die richting waar te nemen. De algemeene toestand is

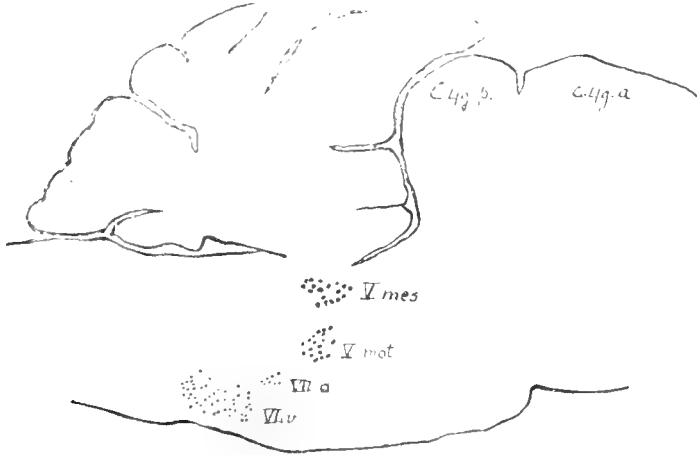


Fig. 22. *Mus rattus*.

hier dat de cellen dorsaal blijven liggen, en in de streek der commissura posterior herinnert de ligging van enkele, flink ontwikkelde cellen ten zeerste aan de besproken medianekern (fig. 23). De



Fig. 23. *Phoca vitulina*.

naverwante kat vertoont daarvan niets, hoewel in het algemeen de cellen iets dorsaler aan den rand der subst. grisea centralis liggen dan bij rodentia, insectivora en mensch.

Over den loop van den middenhersenwortel kan ik kort zijn. Bij alle zoogdieren loopt hij lateraal van den ongekruiden nervus trochlearis distaalwaarts: alleen bij carnivoren (kat) en bij chiropteren (vleermuis) loopt hij mediaal daarvan; bij vele rodentia loopt de trochlearis tussehen de V-cellen en de bijbehoorende vezels door; volgens HULLES¹⁾ is ditzelfde bij het zwijn het geval. Een goed geïsoleerde uittreding is slechts zelden waar te nemen doordat de vezels weinig kompakt naar de periferie loopen en door de kauwkern schijnbaar worden onderbroken. Waar de vervolging der mesene. vezels stellig mogelijk is (*tamandua tetradactyla*), is de uittreding in het ventrale deel der rad. spinalis trigemini, duidelijk; bij dit dier is eene ruimtelijke scheiding van den ventraler loopenden motorischen quintuswortel gemakkelijk te herkennen.

Wat men bij alle overige zoogdieren ziet, is dat vezels uit de streek der rad. mesenceph. zich ventrolateraalwaarts wenden en dichtbij de motor. zenuw de periferie bereiken. Deze laatste treedt onveranderlijk ventraal van de sensibele, resp. van de rad. spinalis, door de pia; de mesencefale vezels komen in ieder geval *niet* ventraal van den motorischen wortel te liggen.

De resultaten van dit onderzoek samenvattende, zijn dit de conclusies:

1. Bij alle dieren, waar de uittreding van den mesencefalen quintuswortel met zekerheid te vervolgen is, geschiedt deze *dorsaal van den motorischen wortel*.

2. Bij al deze dieren (voor *scyllium canicula* z. o.) treedt hij uit *tussehen de vezels van den sensibelen trigeminuswortel*, bij teleostei wellicht iets dorsaal daarvan. Of hij extra bulbair voor een deel met den sensibelen wortel en zijn vertakkingen loopt, is onzeker, maar het wordt door de vermelde pathologische waarneming althans niet onwaarschijnlijk.

3. Bij *scyllium canicula* treedt de mesencefale quintuswortel op twee verschillende manieren uit; één deel, oraal van den sensibelen wortel, één deel op de wijze als sub 2. vermeld. Het eerste deel wordt evenzeer door een ventraler liggenden motorischen V-stam begeleid.

¹⁾ HULLES: Vergl. Anatomie der cerebr. Trigeminiwurzel. Obersteiners Arbeiten 1908.

4. De *primitieve ligging* der mesencefale quintuskern is *dorsaal* in het tectum opticum, niet distaalwaarts daarvan. De variaties daarin bij lagere dieren zijn voor een deel aan bouwverschillen van de middenhersenen toe te schrijven. Bij de laagste zoogdieren (monotremata en marsupialia) vindt men deze ligging in hoofdzaak terug. Tevens is bij marsupialia vooral (didelphys) de opbouw der kern uit 2 verschillende celsoorten duidelijk, evenals bij sommige reptilien; terwijl bij visschen de ééne celvorm (plomp-polyedrisch), bij hoogere zoogdieren en vogels de andere (rond, ovoid, blazig) overheerscht of uitsluitend aanwezig is.

5. De *distale uitbreiding* der kern, het sterkst bij insektivora, rodentia en primates (mensch) is vermoedelijk als de verst gevorderde differentieering te beschouwen, die derhalve meer met bijzondere biologische functies moet samenhangen dan in 't algemeen met de hoogte door de betreff. dieren ingenomen op den phyletischen ladder.

6. Omtrent de functie der mesencefale quintuskern volgt uit het vergelijkend anatomisch onderzoek niets met zekerheid, hoezeer ook het dorsale intreden — ten opzichte van den motorischen wortel — der radix mesencephalia eene sensible functie zou doen vermoeden. Echter treedt ook bij teleostei de motorische V-wortel niet ventraal van den sensibelen uit, en treedt bij alle dieren de nerv. trochlearis geheel dorsaal buiten den hersenstam, zoodat uit het genoemde anatomische feit geen stellige conclusies zijn te trekken.

Ditzelfde is van de dorsale ligging der kern te zeggen, ook o.a. met 't oog op de dorsale ligging der trochleariskern bij cyclostomen (ammocoetes en petromyzon).

Het vraagstuk der beteekenis van het mesencefale gedeelte van den nervus trigeminus blijft dus onopgelost.

De Voorzitter verzoekt den Heer J. W. MOLL om, in medewerking met den Heer B. SYMONS, die daartoe door de letterkundige Afdeeling werd aangewezen, zich te willen belasten met het opstellen van een adres van gelukwensch aan Rektor en Senaat van de Kon. Frederiks-Universiteit te Christiania en van de Kon. Universiteit te Breslau ter gelegenheid van de herdenking van het 100-jarig bestaan der Universiteiten, respectieijk den 5—6 September en den 1—3 Augustus a.s. De Heer MOLL verklaart zich daartoe bereid.

Daar de vereenigde vergadering der beide Afdeelingen van de Akademie zal gehouden worden op Zaterdag 29 April a.s. wordt, op voorstel van den Voorzitter, besloten de April-vergadering der Afdeeling vast te stellen op Vrijdag 28 April a.s.

De Heer L. Bolk biedt voor de bibliotheek aan een exemplaar van de dissertatie van Mej. ANNA F. A. S. VAN WESTRIENEN: „*Die vergleichende Teratologie der dicephalen Doppelbildungen.*”

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

- In het Verslag der Vergadering van 25 Februari 1911 :
- pg. 1194 r. 13 v. o. staat fig. 5 lees fig. 1 Pl. III.
- „ 1197 „ 19 „ „ „ $B = 0,00061$, lees $B = - 0,000061$.
- „ „ 7 „ „ „ 2,75 uit q_{KD} , lees 2,75) uit q_{KD} .
- „ 1199 „ 8 „ „ „ $T_1 > T_k$, lees $T_1 < T_k$.
- „ „ 19 „ „ „ $T_K a$, lees T_K, a .
- „ 1202 „ 5 „ „ „ 0.003 „ 0.005.
- „ 1205 „ 4 „ „ „ $a = 54$, lees $\beta r = a = 54$.
- „ 1206 „ 8 „ „ „ III, lees 111.
- „ „ „ „ P_a „ P_b .
- „ 1207 „ 7 en 8 v. o. behooren de °-teekens te vervallen.
-

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Vrijdag 28 April 1911.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 1372.
In Memoriam JOHANNES BOSSCHIA, p. 1374.
Verslag van de Commissie van advies omtrent de inrichting en plaatsing van bliksemafleiders op de St. Janskerk te Gouda, p. 1379.
Verslag van de Commissie van advies omtrent een schrijven van den Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel van 20 Maart 1911 ten geleide van een afschrift van een rapport, uitgebracht door het Hoofd van den Phytopathologischen Dienst aan den Directeur-Generaal van den Landbouw inzake eene internationale bestrijding van plantenziekten, p. 1380.
J. P. VAN DER STOK: „De dagelijksche variatie van wind en barometerstand in verband met die van den gradiënt der luchtdrukking”, p. 1381.
W. H. JULIUS: „De lijnen H en K in het spectrum van de verschillende deelen der zonneshijf”, p. 1395.
C. EYKMAN: „De voeding der Trappisten”. (Naar aanleiding van de door hem aangeboden dissertatie van den Heer L. H. VAN ROMUNDE), p. 1406.
J. Th. BORNWATER: „Over de werking van oxalylechloride op aminen en amidn”. (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en P. VAN ROMBERGH), p. 1408.
M. W. BELJERINCK: „Een proefneming met maagsareine”, p. 1412.
L. E. J. BROUWER: „Over de structuur der perfecte puntverzamelingen”. (2e mededeeling. (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 1416.
J. A. BARRAU: „De omwentelingsoppervlakken of cilinders van den tweeden graad der niet-Euclidische ruimte”. (Aangeboden door de Heeren J. CARDINAAL en P. H. SCHOUTE), p. 1426.
P. VAN ROMBURGH: „Additieverbindingen van m. dinitrobenzol”, p. 1432.
J. L. HOORWEG: „Over het prikkeleffect bij levende organismen”. (Aangeboden door de Heeren H. ZWAARDEMAKER en W. H. JULIUS), p. 1433.
W. KAPTEYN: „Over de middelpunten der integraalkrommen van differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde en den eersten graad”, p. 1446.
J. D. VAN DER WAALS: „Opmerkingen over de grootte der volumina van de coëxisterende fasen van een enkele stof”, I. p. 1458.
W. J. DE HAAS: „Isothermen van twee-atomige gassen en hun binaire mengsels. VIII. Controlebepalingen met den volumenometer”. (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ), p. 1468. (Met 3 platen).
H. KAMERLINGH ONNES: „Verdere proeven met vloeibaar helium”, p. 1479.
J. J. VAN LAAR: „Iets over den vasten toestand”, VII. (Slot). (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en F. A. H. SCHREINEMAKERS), p. 1481.
Aanbieding van Boekgeschenken, p. 1482.
Errata, p. 1482.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Kennisgevingen van de Heeren C. H. WIND en Th. H. MAC GILLAVRY, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 8 April 1911 met bericht dat de benoemingen van de Heeren H. A. LORENTZ, D. J. KORTEWEG en J. D. VAN DER WAALS, respectievelijk tot Voorzitter, Onder-Voorzitter en Secretaris der wis- en natuurkundige Afdeeling van de Kon. Akademie van Wetenschappen door H. M. de Koningin zijn bekrachtigd.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Missive van denzelfden Minister dd. 1 April 1911 met verzoek te willen mededeelen of aan de Afdeeling Nederlandsche geleerden bekend zijn — en zoo ja, welke — bereid om buiten bezwaar van 's Rijks Schatkist de Nederlandsche Regeering te vertegenwoordigen bij het in September 1912 te Washington en New York te houden VIII^{ste} Internationaal Congres voor toegepaste scheikunde.

De behandeling van deze missive wordt aangehouden tot de September-vergadering

4°. Missive van denzelfden Minister dd. 30 Maart 1911 met verzoek om bericht en raad over een den Minister gezonden request van de Heeren J. L. W. P. MATLA en G. J. ZAALBERG VAN ZELST, beiden te 's Gravenhage, die, naar aanleiding van eene hun bij schrijven van den Secretaris der wis- en natuurkundige afdeeling dd. 1 Maart j.l. gedane mededeeling, dat § 10 van het Reglement van orde voor die Afdeeling bepaalt dat de Akademie zich niet verklaart over de waarde van eenig haar ter beoordeeling toegezonden boekwerk, tenzij daartoe door de Regeering uitgenoodigd, den Minister verzoeken de Akademie te machtigen een onderzoek in te stellen naar de waarde van het door hen geschreven en uitgegeven boek: „Het geheim van den dood. II. Dynamistographie”.

Aan den Minister zal geantwoord worden dat de Afdeeling gaarne versoond zal blijven van het uitspreken van een oordeel over dit boekwerk en zich daarom veroorlooft van de door den Minister verleende machtiging geen gebruik te maken.

5°. Missive van denzelfden Minister dd. 4 April 1911, waarbij wordt toegezonden de tekst eener circulaire, welke, met betrekking tot de voorgenomen nasporingen van den Heer Dr. GEYL voor het samenstellen van een geschiedenis der geneeskunde hier te lande,

vanwege het Departement van Binnenlandsche Zaken is uitgegaan tot de beheerders van eenige rijks- en gemeentearchieven in ons land. De Minister verzoekt den inhoud dezer circulaire ook ter kennis te brengen van de Commissie uit de Akademie, die ingesteld is om blijvend toezicht te houden op dezen arbeid van Dr. GEYL en haar, in verband met deze aangelegenheid, die mededeelingen te doen, welke in het ministerieele schrijven nader worden aangeduid.

Aan dit verzoek van den Minister is voldaan.

6°. Missive van Z. Exc. den Minister van Koloniën dd. 22 April 1911, waarin de Minister verklaart thans gaarne gebruik te willen maken van het aanbod, hem gedaan in het schrijven der wis- en natuurkundige Afdeeling van 19 Januari 1910, om te zijner beschikking te stellen de in het Archief der Akademie berustende afschriften der oorspronkelijke rapporten van den Oberbergrat C. B. R. STIFFT naar aanleiding van een mijnbouwkundig onderzoek der eilanden Curaçao, Aruba en Bonaire.

De afschriften zijn aan den Minister gezonden met verzoek ze, na gebruikmaking, weer te doen terugkeeren in het Archief der Akademie.

7°. Schrijven van Mejuffrouw A. J. BOSSCHA, waarin deze kennis geeft dat haar vader, wijlen de Heer J. BOSSCHA, rustend lid der Afdeeling, den 15^{den} April j. l. te Heemstede is overleden.

Dit schrijven werd met een brief van rouwbeklag beantwoord.

De Voorzitter zegt naar aanleiding daarvan het volgende:

Mijne Heeren!

Wij hebben het verlies te betreuren van een man, die langer dan een der thans levenden, immers gedurende bijna eene halve eeuw, aan onze Akademie is verbonden geweest, en die, uitblinkende in het vak zijner studie, door zijne veelzijdige bemoeiingen krachtig den bloei der wetenschap in Nederland heeft bevorderd.

Op 18 November 1831 te Breda geboren, ontving

JOHANNES BOSSCHA

zijne opleiding aan het Gymnasium te Amsterdam, en werd, na eenigen tijd aan het Deventersche Athenaeum de lessen van VAN DER WILLIGEN te hebben gevolgd, in 1850 te Leiden als student ingeschreven. RIJKE, VERDAM en KAISER waren daar zijne leermeesters en vooral de laatste oefende een bezielenden en nooit vergeten invloed op hem uit. Hij voltooide zijne studiën op 31 Maart 1854 met een proefschrift „De galvanometro differentiali” en werd, na een kort verblijf te Berlijn, tot assistent aan het Natuurkundig Laboratorium te Leiden aangesteld. Hier vond hij de gelegenheid tot omvangrijke experimenteele onderzoekingen, eene gelegenheid, die hem in later jaren, te midden van tijdroovende en belangrijke maatschappelijke werkzaamheden, veelal zou ontbreken.

Van 1860 tot 1863 was hij hoogleraar aan de Kon. Militaire Akademie, en daarna 10 jaren lang inspecteur van

het pas door THORBECKE's wet in het leven geroepen Middelbaar Onderwijs. Vervolgens werd hem in 1873 het hoogleeraarsambt in natuurkunde aan de Polytechnische School, en 5 jaren later als directeur de leiding dezer instelling opgedragen. Hij verliet Delft in 1885, om nog vele jaren, tot 1909, zijne krachten aan de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, als haar secretaris te wijden.

Ik kan nu niet schetsen, hoe vruchtbaar BOSSCHA's werkzaamheid in al de ambten tot welke hij geroepen werd, geweest is, en moet mij er toe bepalen, U te herinneren aan zijn zuiver wetenschappelijken arbeid en wat daarmede onmiddellijk samenhangt. Zijne eerste onderzoekingen vielen in een tijd van opgewekt leven op natuurkundig gebied. Eerst kort geleden had de groote wet van het behoud van arbeidsvermogen algemeene erkenning gevonden, en menige gevolgtrekking waartoe zij leidde, wachtte nog op experimenteele bevestiging. WILLIAM THOMSON, de latere Lord KELVIN, had er op gewezen dat de electromotorische kracht van een galvanisch element in absolute maat kan worden afgeleid uit de hoeveelheden warmte die beantwoorden aan de scheikundige werkingen waarvan de electriciteitsbeweging in het element vergezeld gaat. Het was deze uitkomst, voor de ontwikkeling der natuurkunde van fundamenteele beteekenis, die BOSSCHA door zijne metingen over het element van DANIELL op de proef stelde en op zeer bevredigende wijze bevestigd vond. Bij de verhandeling „Ueber die mechanische Theorie der Elektrolyse”, die naast het verslag van dit onderzoek tal van beschouwingen over verwante vragen bevat, sloten zich eenige andere aan, die alle getuigen van BOSSCHA's vermogen, dat wij steeds in hem hebben bewonderd, om ingewikkelde verschijnselen tot klaarheid te brengen. Van zijn helder oordeel gaf hij evenzoo blijk in zijne discussie der metingen van REGNAULT aangaande de uitzetting van kwik, de dampspanning van water en de soortelijke warmte dezer vloeistof, waardoor hij er veel toe

bijdroeg, de beteekenis dezer klassieke onderzoekingen in het ware licht te stellen:

Zijn eigen meesterschap in het doen van hoogst nauwkeurige waarnemingen toonde BOSSCHA in zijn werk over de standaardmeters. Toen in 1872 eene internationale commissie bijeenkwam, die middelen zou beramen om aan de deelnemende staten betrouwbare kopieën van de te Parijs bewaarde standaarden van meter en kilogram te verschaffen, was hij met STAMKART afgevaardigde der Nederlandsche Regeering. Men kwam overeen dat het uitgebreide werk zou worden uitgevoerd door de Fransche Afdeeling der commissie met den bijstand van een internationaal permanent comité. Van dit laatste, dat zich in 1873 en 74 naar Parijs begaf, was BOSSCHA secretaris en toen, weder een jaar later, voor de beslissing over verschillende vragen eene diplomatieke meterconferentie noodig werd geacht, werd hij als technisch adviseur aan den vertegenwoordiger van Nederland toegevoegd. Gij weet dat de conferentie over één belangrijk punt niet tot eenstemmigheid heeft kunnen geraken, nl. over de al of niet wenschelijkheid der stichting van een internationaal instituut, zooals het naderhand te Breteuil is gevestigd. Naar BOSSCHA's overtuiging zou zulk eene instelling niet bevorderlijk zijn aan het doel dat men beoogde, en was het met het oog op hetgeen reeds bereikt was, niet gerechtvaardigd, een geheel nieuwen weg in te slaan. Toen, ondanks de bestrijding van hem en eenige anderen, het voorstel om tot de stichting over te gaan, was aangenomen, en in verband daarmee de meterconventie tot stand kwam, heeft Nederland zich, overeenkomstig BOSSCHA's advies, niet daarbij aangesloten.

Intusschen heeft onze regeering gebruik gemaakt van haar recht om twee standaardmeters, een voor het gebruik hier te lande, en een voor de koloniën te verkrijgen. Zij droeg BOSSCHA, STAMKART en OUDEMANS op, met de hulp der Fransche Afdeeling de daarvoor noodige werkzaamheden te verrichten. Het onderzoek, toen door onze landgenooten vol-

bracht en bestaande in eene vergelijking der beide staven, rechtstreeks met den „mètre des archives” en bovendien met een der andere nieuwe standaarden, mag voorzeker als een model beschouwd worden. Laat ik er bijvoegen dat het BOSSCHA aanleiding gaf tot belangrijke beschouwingen over de beeldvorming in optische instrumenten.

Ik zal niet uitweiden over de verdere natuurkundige onderzoekingen van BOSSCHA, die op zoo uiteenlopende onderwerpen als b.v. de dubbeltelegraphie en de capillaire werkingen betrekking hadden, over de eervolle plaats, die hij door zijne geheele persoonlijkheid onder de Nederlandsche natuuronderzoekers innam, over het gezag dat in vragen van wetenschappelijken aard aan zijn oordeel werd toegekend; voor vele jongeren was hij een welwillend raadgever, en de natuurkundigen beschouwden hem als hun aangewezen leidsman. Ook stip ik slechts aan welk aandeel hij heeft gehad in de reorganisatie van het Meteorologisch Instituut en in de werkzaamheden van de commissie voor graadmeting en waterpassing, waaraan hij tot in het laatst van zijn leven heeft deelgenomen. Maar ik mag niet nalaten hulde te brengen aan zijne onverpoosde zorg voor de uitgave der werken van CHRISTIAAN HUYGENS, te minder omdat aanvankelijk deze Akademie daarbij betrokken is geweest. Tot de uitgave toch werd, in 1882, door onze Afdeling, op initiatief van ons medelid H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN de eerste stoot gegeven, en wij hebben ons hartelijk verheugd over het welslagen en den geregelden voortgang der groote onderneming, waarvoor de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen op de meest onbekrompen wijze de middelen beschikbaar heeft gesteld.

Met zijne geestdriftige vereering van het genie en de persoonlijkheid van HUYGENS, eene vereering waaraan hij meermalen met de hem eigene welsprekendheid uiting heeft gegeven, voelde BOSSCHA zich in hooge mate tot deze taak aangetrokken; hij heeft er, evenals vóór hem BIERENS DE HAAN,

al zijne krachten aan gegeven en er zich tot op den laatsten dag van zijn leven mede bezig gehouden. Trouwens, ook op andere wijze heeft hij getoond, in de geschiedenis der wetenschap levendig belang te stellen. Bijzonder lief was het hem, een historisch onrecht te kunnen herstellen, of, zooals met zijne nasporingen over VAN MARUM's proeven en denkbeelden, de beteekenis van een Nederlandschen onderzoeker te kunnen doen uitkomen.

Wij zullen zijne nagedachtenis als die van een voortreffelijk geleerde, van een edel, rijkbegaafd man in eere houden. Wat de wetenschap en het vaderland hem te danken hebben, zal niet vergeten worden.

Natuurkunde. — De Heer HAGA leest het volgende verslag:

In onze handen werd gesteld eene missive van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken, dato 9 Januari j.l. No. 115 Afd. K. W., waarin de Wis- en Natuurkundige Afdeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen verzocht werd aan de Commissie voor de Restauratie van de St. Janskerk te Gouda een advies te geven betreffende de inrichting en plaatsing van bliksemafleiders op dat kerkgebouw.

Ten einde zich van de haar opgedragen taak te kwijten heeft Uwe Commissie zich Vrijdag 24 Maart naar Gouda begeven waar de heer J. TH. J. CUYPERS, waarnemend Architect van de Rijksmuseumgebouwen, haar met de meeste nauwgezetheid alle inlichtingen verstrekt heeft, noodig voor haar advies.

Uwe Commissie is van oordeel dat het inderdaad zeer gewenscht is de kerk tegen mogelijke bliksemschade beter te beveiligen.

Op het oogenblik is ééne opvangstang op den toren geplaatst; een koperen kabel gaat langs de oostzijde van den toren over de nok van het middenschip, over het koor en gaat langs den buitenmuur in den grond; met dezen kabel verbonden zijn nog drie opvangstangen: ééne op het koor, ééne op de transeps en ééne midden tusschen transeps en toren.

De volgende uitbreiding meent de Commissie te moeten voorstellen:

1o. het aanbrengen van een afleider van roodkoperband (b. v. 25×4 m.M.) in verbinding met de opvangstang op den toren, welke afleider, volgens den kortst mogelijken weg langs de westzijde van den toren gaande, verbonden wordt aan een roodkoperen in het grondwater geplaatste aardplaat (1 M^2).

2o. de drie horizontale lijsten boven den torentrans en de beide afleiders metalliek te verbinden.

Is hierdoor de toren zeer voldoende beveiligd, zoo kan, wat de kerk zelve betreft, met voordeel partij getrokken worden van de vrij aanzienlijke en met elkander in geleidend verband staande metaal-massa's, gevormd door de nokbekleding, gooten, killen, hoekkepers en regenpijpen, benevens van drie zinken waterbakken waarvan twee zich bevinden op de zolders van de zijbeuken en de derde op den zolder van het koor; deze bakken zijn door een metalen buis met elkaar in verbinding, terwijl de bak op de noorderzijbeuk aan de waterleiding verbonden is; des zomers zijn de bakken met water gevuld en staan dus met de aarde in goed geleidend verband.

Uit deze bakken komen afvoer- en overloopbuizen uit op het zijvlak van het dicht bij hen gelegen dak, zoodat het aangewezen is

3o. deze buizen met de naastbijzijnde goot goed metalliek te verbinden en 4o. ook de buis tusschen de bakken op een paar plaatsen met den kabel op de nok te verbinden.

5o. den top van de kruisbloem op den hoek van het transept met een roodkoperen band te bekleeden, welke band met de looden nokbedekking verbonden wordt.

Verder zal eene betere verbinding der metaalmassa's onderling, ten einde het te beschermen gebouw te plaatsen als onder een goed geleidende en met de aarde in verbinding staande kooi, worden verkregen door

6o. het aanbrengeu. eenige meters boven den grond, van een roodkoperen band om alle zijbeuken behalve om die aan de westzijde, waar constructie moeilijkheden zich voordoen en waar, door de nabijheid van den toren, minder gevaar te duchten is — ; in dezen band op te nemen de ijzeren rasterwerken ter bescherming aangebracht voor de gebrandschilderde vensters en hem in metallieke verbinding met de waterafvoerbuizen te brengen, terwijl hij aan ieder der vier buitenste hoeken van de zijshepen met een grondplaat van $\frac{1}{2}$ M² verbonden wordt. In plaats van de grondplaat bij de noorderhoek kan met voordeel van de daar dichtbijzijnde waterleidingsbuis gebruik worden gemaakt.

7o. Het zal noodig zijn, de groote, tijdelijk aangebrachte, transept-ankers te verbinden met de dicht er bij gelegen regenpijpen.

Uwe Commissie oordeelde het overbodig bijzondere voorzorgen te treffen voor het orgel, de gasleiding, het koorhek en de ijzeren balken in de kerk, die van betrekkelijk kleine afmeting, niet met elkander verbonden en ver van de buitenmuren verwijderd zijn.

H. A. LORENTZ.

W. H. JULIUS.

P. ZEEMAN.

H. HAGA.

Het verslag zal aan Z. Exc. worden toegezonden.

Plantkunde. — De Heer WENT leest het volgende Verslag.

Door den Voorzitter van Uwe Afdeling werd in handen van de ondergeteekenden gesteld een missive van den Heer Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel d.d. 20 Maart l.l., N^o. 2728, Directie van den Landbouw, ten geleide van een afschrift van een rapport uitgebracht door het Hoofd van den Phytopathologischen Dienst aan den Heer Directeur-Generaal van den Landbouw inzake een internationale bestrijding van plantenziekten. Dit advies wijkt in verschillende opzichten af van het schrijven door Uwe afdeling op 10

November 11. terzelfder zake gericht tot den Heer Minister van Binnenlandsche Zaken.

Het komt den ondergeteekenden voor, dat de afdeeling dit schrijven voor kennisgeving zou kunnen aannemen, zonder dat daarmee te kennen gegeven werd, dat de zienswijze van de Afdeeling in deze zaak wijziging heeft ondergaan. Immers, de Minister vraagt niet nader overleg naar aanleiding van het advies van het Hoofd van den Phytopathologischen Dienst, maar deelt uitdrukkelijk mede dat „de bezwaren, door dezen hoofdambtenaar tegen de aangegeven „wijze van doen geopperd, door hem worden gedeeld.” Onder deze omstandigheden is er voor de Afdeeling geen aanleiding, op de zaak terug te komen.

Amsterdam,

Delft,

Utrecht,

} April 1911.

HUGO DE VRIES.

M. W. BELJERINCK.

F. A. F. C. WENT.

De Afdeeling vereenigt zich met de conclusie van het verslag.

Meteorologie. — De Heer VAN DER STOK doet eene mededeeling over: „*De dagelijksche variatie van wind en barometerstand in verband met die van den gradiënt der luchtdrukking.*”

I. De dagelijksche variatie van den wind, een verschijnsel dat niet alleen bij kuststations in den vorm van land- en zeewind, maar overal en meestal duidelijk merkbaar is, is nog weinig bestudeerd.

Voor een deel is dit te wijten aan den tijdroovenden arbeid, die aan eene berekening der dagelijksche variatie uit uur- of termijnwaarnemingen van den wind is verbonden; maar ook wanneer die arbeid aan het onderzoek wordt ten koste gelegd, is de verkregen kennis nog weinig bevredigend.

De invloed toch van de aswenteling der aarde en die der wrijving doet zich hierbij in sterke mate gelden en veroorzaakt eene zóó gecompliceerde verhouding tusschen oorzaak en gevolg, nl. de verandering van den gradiënt der drukking aan de eene en de variatie van den wind aan de andere zijde, dat men, zonder de theorie te hulp te roepen, daaromtrent uit de waarnemingen niets kan leeren en vaak tot geheel en al onjuiste gevolgtrekkingen is gekomen.

Voor vele kustplaatsen, b.v. Helder, die aan de punt van een landtong gelegen zijn, is het moeilijk à priori te zeggen, hoe en in welke richting de gradiënt in den loop van den dag verandert, terwijl het ook voor landstations, als de Bilt, omgeven door landstreken

van zeer verschillende warmteabsorptie en uitstraling, niet mogelijk is omtrent dien gradiënt eenvoudige en aannemelijke onderstellingen te maken.

Nog moeilijker zou het zijn de veranderlijkheid van den gradiënt met de verschillende jaargetijden na te gaan, daar bij kustplaatsen de zeestrooming en de temperatuur van het zeewater in de omgeving, bij landstations het verschil in physische gesteldheid van de omliggende landerijen een niet ondergeschikte rol spelen.

Alleen voor het geval van een station, gelegen in een uitgebreide landstreek van homogenen aard, zou de eenvoudige hypothese eener zich van oost naar west, met de zon, voortplantende golfing dienst kunnen doen, en alleen in dit geval zou men uit de dagelijkse variatie van den barometerstand een besluit kunnen trekken omtrent de variatie van den gradiënt, mits ook de wet der veranderlijkheid met de geografische breedte bekend ware.

In de meeste gevallen echter zal de verandering van den gradiënt het geringst zijn, dáár waar de verandering van de drukking het grootst is en omgekeerd, zoodat het mechanisme meer overeenstemming vertoont met hetgeen er geschiedt wanneer twee *stationnaire*, op een afstand van elkander gelegen bronnen van periodieke drukveranderingen in wisselwerking treden, dan met dat eener zich *voortplantende* golfing.

Het zal dus meestal niet geoorloofd zijn om uit de dagelijkse variatie van den barometerstand voor een bepaald station gevolgtrekkingen af te leiden omtrent den gradiënt en evenmin zou het mogelijk zijn om het aantal der stations in zulk eene mate te vermeerderen en de nauwkeurigheid der waarneming tot zulk een peil op te voeren, dat men langs experimenteelen weg tot nadere kennis van de gradiëntverandering zou kunnen geraken.

De omgekeerde weg zal dus moeten worden ingeslagen en men zal uit de bekende variatie van den wind de onbekende grootte en variatie van den gradiënt moeten trachten op te sporen ¹⁾, hetgeen natuurlijk alleen met behulp eener mechanische theorie der lucht-beweging kan geschieden.

2. Indien men, met verwaarloozing van mogelijke en waarschijnlijke vertikale bewegingen, alleen rekening houdt met de omwenteling der aarde en den wrijvingsinvloed evenredig stelt aan de snelheid, dan kan de verhouding tusschen gradiënt en luchtbeweging voorgesteld worden door de, ook door anderen ¹⁾, gebezigde uitdrukkingen :

¹⁾ Zie b.v. OBERBECK's bekende verhandeling over cyclonale luchtbeweging. Ann. d. Phys. u. Ch. 1882, 17, (128—148).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + nau + lv &= - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - nar + lu &= - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

In deze formules zijn y en v beschouwd als gericht naar het noorden, x en u naar het oosten.

- $a = 2 \cos \varphi$
- $\varphi =$ poolsafstand
- $n =$ hoeksnelheid der aarde.
- Stelt men

$$l = kn$$

dan neemt de form. (1), voor het geval van een periodiek veranderlijken gradiënt, na deeling door n , den vorm aan :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{\partial v}{\partial t} + av + kv &= - \frac{1}{qn} \frac{\partial p}{\partial y} = H_1 \cos (qn - \lambda_1) \\ \frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial t} - av + ku &= - \frac{1}{qn} \frac{\partial p}{\partial x} = H_2 \cos (qn - \lambda_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

De amplituden H_1 en H_2 zijn dus evenredig aan de amplituden van den gradiënt naar noord en oost, q is de orde der te beschouwen periode.

Stelt men de componenten van de snelheid der luchtdeeltjes voor door :

$$\left. \begin{aligned} v &= A \cos (qnt - C_1) \\ u &= B \cos (qnt - C_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

dan vindt men uit (2) en (3) :

$$\left. \begin{aligned} H_1 \sin \lambda_1 &= -qA \cos C_1 + aB \sin C_2 + kA \sin C_1 \\ H_1 \cos \lambda_1 &= qA \sin C_1 + aB \cos C_2 + kA \cos C_1 \\ H_2 \sin \lambda_2 &= -qB \cos C_2 - aA \sin C_1 + kB \sin C_2 \\ H_2 \cos \lambda_2 &= qB \sin C_2 - aA \cos C_1 + kB \cos C_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

waaruit de volgende, betrekkelijk eenvoudige formules, geschikt voor berekening van H en λ volgen, als de windvariatie en de wrijvings-coëfficiënt bekend zijn :

$$\left. \begin{aligned} H_1 \sin (\lambda_1 - C_1) &= -qA - aB \sin \Delta \\ H_1 \cos (\lambda_1 - C_1) &= kA + aB \cos \Delta \\ H_2 \sin (\lambda_2 - C_2) &= -qB - aA \sin \Delta \\ H_2 \cos (\lambda_2 - C_2) &= kB - aA \cos \Delta \\ \Delta &= C_1 - C_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

en verder :

$$\left. \begin{aligned} H_1^2 - H_2^2 &= (k^2 + q^2 - a^2)(A^2 - B^2) + 4ka AB \cos \Delta \\ H_1^2 + H_2^2 &= (k^2 + q^2 + a^2)(A^2 + B^2) + 4qa AB \sin \Delta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

De formules (3) kunnen worden voorgesteld door een ellips, waarvan de resulterende snelheid den voerstraal vormt en wier lange as met de y, r (noord) richting (geteld in den zin van de beweging der wijzers van een uurwerk) een hoek α maakt, bepaald door de uitdrukking:

$$\tan \alpha = \frac{2 AB \cos \Delta}{A^2 - B^2} \quad \dots \quad (7)$$

Ook de gradiëntvector kan, naar grootte en richting, worden voorgesteld door een ellips, wier lange as met de noordrichting een hoek maakt, bepaald door de formule:

$$\tan 2 \alpha' = \frac{2 H_1 H_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2)}{H_1^2 - H_2^2} \quad \dots \quad (8)$$

Uit (4) vindt men:

$$\left. \begin{aligned} H_1 H_2 \sin (\lambda_1 - \lambda_2) &= (k^2 + q^2 + a^2) AB \sin \Delta + qa (A^2 + B^2) \\ H_1 H_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) &= (k^2 + q^2 - a^2) AB \cos \Delta - ka (A^2 - B^2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hieruit volgt als men stelt:

$$\tan 2 m = \frac{2 ak}{k^2 + q^2 - a^2} \quad \dots \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tan 2 \alpha' &= \tan (2\alpha - 2m) \quad \dots \quad (11) \\ m &= \alpha - \alpha'. \end{aligned}$$

Ofschoon dus in het algemeen aan den afwijkingshoek tusschen gradiënt en windrichting bij periodiek veranderlijken gradiënt geen bepaalde waarde kan worden toegekend en deze eene zeer gecompliceerde functie is van den tijd, bestaat er (wanneer men de bruikbaarheid der form. (1) aanneemt), wel een constant verschil in richting m tusschen de maximum waarde dier grootheden, bepaald door (10) en dus afhankelijk van de wrijving (k) en veranderlijk met de orde (q) der schommeling.

Ware de afwijkingshoek m bekend, dan zou uit (10) de waarde van k en daarmee de wrijvingscoëfficiënt kn kunnen worden afgeleid.

3. Wanneer men van verschillende plaatsen op aarde de dagelijksche schommeling van den barometerstand berekent, dan blijkt terstond dat de enkeldaagsche variatie aanmerkelijk verschillend is, zoowel naar grootte als naar phase, in de verschillende jaargetijden en, ook voor dicht bij elkander gelegen plaatsen als de Bilt, Helder en Vlissingen, aanmerkelijk uiteenloopt.

TABEL I.

Dagelijksche variatie van den Barometerstand (1902—1910).

de Bilt.

	mm.		mm.
Winter	0.0447	$\cos(nt - 178^\circ)$	$+ 0.1805 \cos(2nt - 295^\circ)$
Voorjaar	0.0097	$\cos(nt - 177^\circ)$	$+ 0.2049 \cos(2nt - 301^\circ)$
Zomer	0.0238	$\cos(nt - 79^\circ)$	$+ 0.1665 \cos(2nt - 311^\circ)$
Najaar	0.0305	$\cos(nt - 135^\circ)$	$+ 0.2001 \cos(2nt - 296^\circ)$
Jaar	0.0214	$\cos(nt - 147^\circ)$	$+ 0.1864 \cos(2nt - 300^\circ)$

Helder.

Winter	0.0431	$\cos(nt - 93^\circ)$	$+ 0.1976 \cos(2nt - 309^\circ)$
Voorjaar	0.1942	$\cos(nt - 59^\circ)$	$+ 0.2087 \cos(2nt - 313^\circ)$
Zomer	0.2200	$\cos(nt - 59^\circ)$	$+ 0.1856 \cos(2nt - 324^\circ)$
Najaar	0.1391	$\cos(nt - 72^\circ)$	$+ 0.2255 \cos(2nt - 304^\circ)$
Jaar	0.1472	$\cos(nt - 65^\circ)$	$+ 0.2038 \cos(2nt - 313^\circ)$

Vlissingen.

Winter	0.1321	$\cos(nt - 190^\circ)$	$+ 0.2079 \cos(2nt - 315^\circ)$
Voorjaar	0.0369	$\cos(nt - 49^\circ)$	$+ 0.2268 \cos(2nt - 308^\circ)$
Zomer	0.0994	$\cos(nt - 55^\circ)$	$+ 0.2109 \cos(2nt - 317^\circ)$
Najaar	0.0267	$\cos(nt - 122^\circ)$	$+ 0.2366 \cos(2nt - 307^\circ)$
Jaar	0.0314	$\cos(nt - 121^\circ)$	$+ 0.2196 \cos(2nt - 312^\circ)$

De dubbeldaagsche variatie daarentegen, uitvoerig onderzocht in de bekende werken van HANN en ANGOT, vertoont over de geheele aarde een opmerkelijke eenvormigheid: de amplitude neemt regelmatig, van ongeveer 1 mM. bij den aequator, af naar de polen; te Batavia wordt de dagelijksche variatie weergegeven door de uitdrukking:

$$0.63 \cos(nt - 64^\circ.5) + 1.00 \cos(2nt - 290^\circ)^1$$

De phase vertoont wel, zooals uit Tabel I blijkt, kleine verschillen in de verschillende jaargetijden, en te Batavia is de phase iets geringer dan die bij de drie Nederlandsche stations, maar nergens verschilt zij veel van 300° , zoodat de hoogste stand overal ongeveer te 10 u. vm. en nm. wordt waargenomen. Volgens de theorie, het eerst door KELVIN geopperd, later door MARGULES mathematisch uitgewerkt, moet deze regelmatige variatie worden toegeschreven aan eene vrije schommeling van de geheele atmosfeer in een eigen

¹⁾ Observations. Vol. XXVIII (1866—1905). p. 97.

periode van 12 uur, die wederom haar aanleiding vindt in den dubbeldaagschen term der variatie van de luchttemperatuur.

Zulk eene schommeling van den dampkring in zijn geheel kan worden beschouwd als een zich van oost naar west met de snelheid c der warmtegolf voortplantende dubbeldaagsche drukkinggolf, die voorgesteld kan worden door de uitdrukking :

$$p = E \cos \left(2nt - C + \frac{2nx'}{c} \right)$$

Neemt men verder aan, overeenkomstig de waarneming ¹⁾, dat

$$E = E_0 \sin^3 \varphi ,$$

dan wordt

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x=0} = - \frac{\partial p}{R \partial \varphi} = - \frac{3E \cos \varphi}{R \sin \varphi} \cos (2nt - C)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = - \frac{2En}{c} \sin (2nt - C)$$

en daar

$$\frac{n}{c} = \frac{1}{R \sin \varphi} ,$$

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x=0} = \frac{3E \cos \varphi}{R \sin \varphi} \cos (2nt - C)$$

$$- \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{2E}{R \sin \varphi} \cos (2nt - C - 90^\circ).$$

Hieruit blijkt dat, volgens deze theorie :

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 270^\circ$$

en

$$H_1 = \frac{3}{2} H_2 \cos \varphi .$$

Voor alle plaatsen gelegen op hoogere breedte dan $41^\circ 49'$, waarvoor

$$\frac{3}{2} \cos \varphi = 1 ,$$

is dus $H_1 > H_2$, waaruit volgt dat daar (volgens 8)

$$a' = 0.$$

Op plaatsen wier breedte grooter is dan 42° ligt dus de lange as der gradiëntellips in de noord-zuidrichting ; op 42° breedte is $H_1 = H_2$ en wordt de ellips een cirkel, ten zuiden daarvan ligt de lange as der ellips in de oost-westrichting ; aan den aequator is $H_1 = 0$ en de ellips tot een rechte lijn (oost-west) afgeplat.

Is E — zooals waarschijnlijk is — niet precies evenredig aan de derde macht van $\sin \varphi$, dan verandert daarmede natuurlijk ook de grens van 42° .

¹⁾ JAERISCH. Zur Theorie der Luftschwankung. Meteor. Zeitschr. 24, 1907, p. 481.

4. In twee kortelings verschenen publicaties heeft GOLD¹⁾ deze theorie aan de waarneming getoetst; hij sloeg hierbij den volgenden weg in: als bekend wordt gesteld de gradiëntvariatie, afgeleid uit de dubbeldaagsche variatie van den barometerstand; uit (1) of, wat op hetzelfde neerkomt, uit (4) worden dan de vier windeconstanten A , B , C_1 en C_2 berekend en daarna, door aan k de waarden 0, $\frac{1}{2}$ en 1 toe te kennen, de verkregen uitkomsten met die der waarneming vergeleken.

Het is duidelijk dat deze methode tot zeer geompliceerde en moeilijk te behandelen uitdrukkingen voor de windvariatie leidt en dat de omgekeerde weg, nl. uit te gaan van de bekende windvariatie en daaruit de variaties van den barometerstand af te leiden, veel eenvoudiger is en evengoed tot het doel leidt.

Indien men GOLD's formules berekent voor eene breedte van 52° , de gemiddelde breedte van Nederland, dan vindt men:

	v	u
$k = 0$	$45 \cos(2nt - 33^\circ)$	$44 \cos(2nt - 123^\circ)$
$k = 1$	$28 \cos(2nt - 343^\circ)$	$27 \cos(2nt - 72^\circ)$
$k = \frac{1}{2}$	$17 \cos(2nt - 328^\circ)$	$16^5 \cos(2nt - 55^\circ)$

Aan deze uitdrukkingen is de dubbeldaagsche barometervariatie van de Bilt ten grondslag gelegd, de amplituden zijn uitgedrukt in cm. p. sec.

Gemiddeld, over het gansche jaar, leert de waarneming, voor twee Nederlandsche stations:

	v	u
de Bilt	$16.8 \cos(2nt - 333^\circ)$	$17.4 \cos(2nt - 65^\circ)$
Terschellinger bank	$11.1 \cos(2nt - 334^\circ)$	$11.9 \cos(2nt - 56^\circ)$

De overeenstemming tusschen theorie en waarneming is zeer bevredigend, aanmerkelijk beter dan voor de twee door GOLD berekende gevallen: het bergstation Säntis en St. Helena, hetgeen misschien aan de bijzondere ligging dezer stations is te wijten.

Bij St. Helena, waar de draaiing van den windvector tegengesteld moet zijn aan de beweging der wijzers van een uurwerk (links), geschiedt zelfs de draaiing rechts, alsof St. Helena op noordelijke breedte gelegen ware. De windellips moet echter, zooals boven werd aangestipt, op deze geringe breedte (16° S) zeer afgeplat zijn, zoodat de draaiing van den wind een vrij onzeker kenmerk is.

1) E. GOLD. The relation between periodic variations of pressure, temperature and wind in the atmosphere. Phil Mag. 1909, p. 26—109.

Id. Note on the connexion between the periodic variations of windvelocity and of atmospheric pressure. Publ. Meteor. Office, 203, 1910.

Voor de Nederlandsche stations blijkt de theorie in zulk eene mate toepaslijk te zijn, dat het doel dezer publicatie: de bepaling van den wrijvingscoëfficiënt uit de dubbeldaagsche beweging van wind en barometerstand om daarna, met behulp der gevonden waarden, de enkeldaagsche variatie van den gradiënt uit de windvariatie af te leiden, bereikbaar schijnt. Tot dit onderzoek bestond des te meer aanleiding omdat vooral de gedurende 25 jaren voortgezette reeks van zeer goede windwaarnemingen, gedaan a. b. van het lichtschip Terschellingerbank, hiertoe uitmuntend materiaal kon leveren. Tevens is het van belang na te gaan, hoe de gradientvariatie bij twee zoo verschillend gelegen plaatsen als de Bilt en Terschellingerbank, verloopt.

5. In Tabel II vindt men de dagelijksche variatie van den wind voor de twee genoemde stations te zamen gesteld.

TABEL II, dagelijksche variatie van den Wind in
em. p. sec., $t = 0 =$ Middag.

de Bilt, N. Br. $52^{\circ}6'$, L. G. $5^{\circ}11'$ uurwaarn. (1903—1908).

Winter	$v = 15.1 \cos (nt - 260^{\circ}) + 10.4 \cos (2nt - 279^{\circ})$	
	$u = 11.5 \cos (nt - 17^{\circ}) + 12.1 \cos (2nt - 33^{\circ})$	
	$\Delta = 243^{\circ}$	$\Delta = 246^{\circ}$
Voorjaar	$v = 71.4 \cos (nt - 256^{\circ}) + 21.8 \cos (2nt - 337^{\circ})$	
	$u = 52.7 \cos (nt - 14^{\circ}) + 21.8 \cos (2nt - 74^{\circ})$	
	$\Delta = 242^{\circ}$	$\Delta = 263^{\circ}$
Zomer	$v = 95.6 \cos (nt - 261^{\circ}) + 27.7 \cos (2nt - 358^{\circ})$	
	$u = 86.1 \cos (nt - 25^{\circ}) + 22.5 \cos (2nt - 79^{\circ})$	
	$\Delta = 236$	$\Delta = 279^{\circ}$
Najaar	$v = 40.7 \cos (nt - 264^{\circ}) + 14.9 \cos (2nt - 316^{\circ})$	
	$u = 30.3 \cos (nt - 19^{\circ}) + 16.2 \cos (2nt - 56^{\circ})$	
	$\Delta = 245^{\circ}$	$\Delta = 260^{\circ}$
Jaar	$v = 55.6 \cos (nt - 260^{\circ}) + 16.8 \cos (2nt - 333^{\circ})$	
	$u = 45.0 \cos (nt - 21^{\circ}) + 17.4 \cos (2nt - 65^{\circ})$	
	$\Delta = 259^{\circ}$	$\Delta = 268^{\circ}$

Lichtschip Terschellingerbank, N. Br. $53^{\circ}27'$, L. G. $4^{\circ}52'$
wachtwaarn. magnetisch., (1884—1908).

Winter	$v = 3.9 \cos (nt - 344^{\circ}) + 11.8 \cos (2nt - 319^{\circ})$	
	$u = 3.1 \cos (nt - 293^{\circ}) + 11.1 \cos (2nt - 56^{\circ})$	
	$\Delta = 51^{\circ}$	$\Delta = 263^{\circ}$

Bij deze methode komen de verschillen van A en B en de waarde van $\cos \Delta$ niet in de rekening voor en men zou bovendien, met behulp van (12) de waarde van k kunnen berekenen zonder tweedemachts vergelijking, als indien men form. (10) bezigt.

Dit voordeel is echter slechts schijnbaar daar, als $A = B$ en $\Delta = 270^\circ$, $\beta = -1$ wordt, zoodat de gezochte grootheid γ uit de form. (13) wegvalt; voor eene breedte van 52° nadert M inderdaad zeer dicht tot de eenheid (0.986), zoodat ook in dit opzicht overeenkomst bestaat tusschen theorie en waarneming.

Het is dus noodzakelijk een ander gegeven aan de theorie te ontleenen dan $\alpha' = 0$ en, daar, zoowel uit wind- als uit barometerwaarnemingen, de hoekwaarden zeker zuiverder kunnen worden bepaald dan de amplituden, en de verhouding

$$H_1 = \frac{2}{3} H_2 \cos \varphi$$

ook slechts bij benadering juist kan zijn, stellen wij dat

$$\lambda_1 = C, \lambda_2 = C + 90^\circ$$

of m. a. w. het probleem wordt aldus gesteld; welke waarde moet aan k worden toegekend opdat er, overeenkomstig de theorie, overeenstemming besta tusschen de hoekwaarden der windvariatie (C_1 en C_2) en die der barometervariatie (C) voor de dubbeldaagsche variatie. Daar men op deze wijze niet één, maar feitelijk twee gegevens aan de theorie ontleent, kunnen, met behulp der theorie, ook twee waarden van k worden afgeleid. Neemt men deze te samen, dan vindt men gemakkelijk de formule.

$$k = (2 - a) \frac{B \sin \sigma_2 - A \cos \sigma_1}{A \sin \sigma_1 + B \cos \sigma_2}$$

$$\sigma_1 = C - C_1, \sigma_2 = C - C_2$$

Is k bekend, dan kunnen met behulp der form. (10), drie verschillende waarden voor den afwijkingshoek m worden afgeleid nl. m_2 voor dubbeldaags-periodieken wind, m_1 voor enkeldaags-periodieken wind, m_0 voor niet periodieken, constanten wind.

Voor de laatste grootheid vindt men uit form. (10)

$$\tan m_0 = \frac{a}{k},$$

dezelfde waarde die in OBERBECK's theorie der cyclonen geldt voor het uitwendig deel eener cycloon en ook, zooals direct uit (2) volgt, voor constanten wind en reethlijnige isobaren.

In Tabel III vindt men de aldus berekende waarden van k en m te zamen gesteld.

TABEL III.

Waarden van den wrijvingsfactor k en den afwijkingshoek m .
de Bilt.

	Winter	Voorjaar	Zomer	Najaar	Jaar
$k =$	0.834	0.514	0.455	0.900	0.627
$m_2 =$	20°.0	21°.2	19°.9	25°.3	23°.0
$m_1 =$	53°.4	63°.5	65°.9	51°.7	59°.5
$m_0 =$	62°.1	73°.0	74°.9	60°.3	68°.3 ¹⁾

Terschellingerbank.

$k =$	1.648	0.657	0.608	1.101	0.940
$m_2 =$	26°.0	24°.4	23°.8	26°.7	27°.0
$m_1 =$	39°.0	59°.3	61°.0	47°.5	50°.6
$m_0 =$	44°.3	67°.8	69°.3	55°.6	59°.7

De wrijvingscoëfficiënt $l = nk = k \times 7.3 \times 10^{-5}$ wordt dan
de Bilt $\left. \begin{array}{ccccc} 6.09 & 3.75 & 3.32 & 7.57 & 4.58 \end{array} \right\} \times 10^{-5}$
Terschellingerbank $\left. \begin{array}{ccccc} 12.03 & 4.80 & 4.44 & 8.05 & 6.86 \end{array} \right\} \times 10^{-5}$

OBERBECK stelt, willekeurig, $l = 12 \times 10^{-5}$, WIEN ²⁾ $l = 8 \times 10^{-5}$.

6. Met behulp der form. (5) kunnen, nu k bekend is, gemakkelijk de grootheden H en λ worden berekend. Dit is alleen uitgevoerd voor de enkeldaagsche beweging, daar deze berekening voor de dubbeldaagsche geen beteekenis zou hebben. Stelt men

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = G_y \text{ (gradiënt)}, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = G_x$$

voorts

$$\frac{1}{Q} = \frac{KT}{p_0}$$

waarin Q_x de dichtheid der lucht, K de gasconstante, T de absolute temperatuur der lucht en p_0 de gemiddelde luchtdrukking, uitgedrukt in mM. kwikdrukking, voorstellen, dan heeft men voor

$K = 2.87 \times 10^6$, $T = 283^\circ$, $p_0 = 760$, $n = 7.3 \times 10^{-5}$
de grootheden H te deelen door

$$1.464 \times 10^{10}$$

om den gradiënt te verkrijgen, uitgedrukt in mM. kwikdrukking per

¹⁾ Langs een geheel anderen weg, nl. uit synoptische weerkaarten vindt VAN EVERDINGEN voor de Bilt een afwijkingshoek van 69° . Phys. Z. S. 9, 1908. Verh. d. D. Phys. Ges., 1908.

²⁾ WIEN. Lehrbuch der Hydrodynamik, 1900, p. 294.

eM., of door 1319 als men den gradiënt, op de gebruikelijke wijze, per 111 K.M. wenscht te meten.

Ten einde het gebruik van zeer kleine getallen in de tabellen te vermijden is deze deeling niet uitgevoerd en worden de amplituden H als gradiënt beschouwd.

In Tabel IV vindt men de aldus berekende dagelijksche variatie van den gradiënt. Voor Terschellingerbank zou de richting van den resulteerenden gradiënt geteld zijn van af het magnetisch Noorden, daar alle windwaarnemingen a. b. der lichtschepen miswijzend gedaan worden.

TABEL IV.

Enkeldaagsche variatie van den gradiënt, tijd geteld van af middag,

H_1 naar Noord, H_2 naar Oost.

R. L. Draaiing naar rechts en links.

	de Bilt.	Terschellingerbank. (magnetisch)
Winter	$H_1 = 4.5 \cos(nt - 273^\circ.3) R.$ $H_2 = 22.5 \cos(nt - 42^\circ.5)$ $\Delta = 230^\circ.8$	$H_1 = 12.3 \cos(nt - 305^\circ.1) L.$ $H_2 = 8.1 \cos(nt - 211^\circ.3)$ $\Delta = 93^\circ.8$
Voorjaar	$H_1 = 3.1 \cos(nt - 35^\circ.0) R.$ $H_2 = 92.5 \cos(nt - 44^\circ.3)$ $\Delta = 350^\circ.7$	$H_1 = 12.2 \cos(nt - 300^\circ.7) R.$ $H_2 = 23.3 \cos(nt - 25^\circ.2)$ $\Delta = 275^\circ.5$
Zomer	$H_1 = 36.5 \cos(nt - 53^\circ.4) L.$ $H_2 = 129.3 \cos(nt - 42^\circ.5)$ $\Delta = 10^\circ.9$	$H_1 = 23.5 \cos(nt - 346^\circ.2) R.$ $H_2 = 32.4 \cos(nt - 355^\circ.5)$ $\Delta = 350^\circ.7$
Najaar	$H_1 = 16.6 \cos(nt - 273^\circ.1) R.$ $H_2 = 61.0 \cos(nt - 46^\circ.1)$ $227^\circ.0$	$H_1 = 11.9 \cos(nt - 330^\circ.2) R.$ $H_2 = 18.9 \cos(nt - 354^\circ.9)$ $\Delta = 335^\circ.3$
Jaar	$H_1 = 5.5 \cos(nt - 7^\circ.8) R.$ $H_2 = 79.3 \cos(nt - 43^\circ.4)$ $\Delta = 324^\circ.4$	$H_1 = 14.6 \cos(nt - 312^\circ.3) R.$ $H_2 = 20.0 \cos(nt - 0^\circ.3)$ $\Delta = 312^\circ.0$

Uit Tabel II blijkt dat bij dit lichtschip gedurende den winter, de wind tegen de zon in draait, in tegenstelling met hetgeen in de andere jaargetijden geschiedt, terwijl bij de Bilt de draaiing altijd rechts is, zooals in normale gevallen, wegens den invloed der aardrotatie, het geval moet zijn.

Deze afwijking is geen toevallige, te wijten aan onnauwkeurigheid der waarneming, in verband met de kleinheid der amplituden; ook bij het lichtschip Haaks en bij Helder is in den winter de draaiing links inplaats van rechts; bij Helder ook in het najaar.

De resultaten der bewerking voor Helder worden hier echter niet gegeven omdat de wrijvingscoëfficiënt, afgeleid op de boven omschreven wijze, nog geen vertrouwbare resultaten opleverde, zoodat de reeks der gebruikte windwaarnemingen nog vergroot moet worden. Trouwens op alle kustplaatsen waar de zee ten zuiden, het land ten noorden is gelegen moet althans de gradiënt links draaijen. Hieruit volgt echter nog niet, dat ook de windrichting tegen zon moet veranderen. Stelt men in de form. (5) $H_1 = 0$, zoodat alleen de oost-west gradiënt zich kan doen gelden, dan blijkt dat de wind toch met zon draait en de mogelijkheid van een links draaienden gradiënt, die een rechts draaienden wind tot gevolg heeft, is dus niet uitgesloten.

Zulk een geval doet zich voor in den zomer bij de Bilt waar de gradiënt links draait terwijl de wind zeer duidelijk met zon verandert.

Ook bij de Bilt bestaat er, zooals uit de phasenverschillen Δ der Tabel IV blijkt, een aanmerkelijk verschil tussehen voorjaar en zomer aan de eene, winter en najaar aan de andere zijde; in de beide eerstgenoemde jaargetijden is het phaseverschil zeer klein en nadert derhalve de ellips tot een rechte lijn, in de laatstgenoemden is de ellips aanmerkelijk minder afgeplat.

Een duidelijker beeld van den toestand leveren de tabellen V en VI, waarin de elementen der wind- en gradiëntellipsen zijn gegeven; hierbij bestaat tevens de gelegenheid om voor de miswijzing der windwaarnemingen te corrigeeren door 14° van de hoekwaarden af te trekken.

TABEL V.

Windellips der enkeldaagsche variatie.

de Bilt.

	a	b	α	$\beta_{t=0}$	T
Winter	16.5	9.3	151°	103°	2.28
Voorjaar	77.8	42.7	152°	109°	2.65
Zomer	123.1	37.3	139°	101°	3.41
Najaar	43.8	25.2	153°	98°	2.34
Jaar	62.9	34.1	146°	103°	2.84

Terschellingerbank. (rechtwijzend).

	a	b	α	$\beta_{1=0}$	T u
Winter	4.5	2.1	21°	350°	0.52
Voorjaar	21.5	17.5	131°	83°	2.61
Zomer	32.7	18.7	100°	81	0.54
Najaar	13.5	7.3	93°	75°	0.51
Jaar	16.5	11.7	95°	78°	0.39

TABEL VI.

Gradiëntellips der enkeldaagsche variatie.

de Bilt.

	a	b	α	θ_0	T u
Winter	22.7	3.4	97°	89°	2.75
Voorjaar	92.5	2.7	89°	88°	2.94
Zomer	134.3	6.5	74°	89°	3.51
Najaar	62.1	12.0	101°	89°	3.23
Jaar	79.4	3.2	87°	85°	3.27

Terschellingerbank (rechtwijzend).

	a	b	α	θ_0	T u
Winter	12.3	8.0	342°	302°	8.43
Voorjaar	23.4	12.1	72°	68°	1.04
Zomer	39.9	3.1	40°	41°	23.35
Najaar	21.9	4.3	45°	47°	0.41
Jaar	22.8	9.5	44°	50°	0.63

De elementen der ellips zijn uit de form.

$$v = A \cos (nt - C_1) \quad C_1 - C_2 = L$$

$$u = B \cos (nt - C_2)$$

afgeleid door middel der bekende formules :

$$\operatorname{tang} 2 \alpha = \frac{2 AB \cos L}{A^2 - B^2} \quad a^2 + b^2 = A^2 + B^2$$

$$a^2 - b^2 = \frac{A^2 - B^2}{\cos 2 \alpha} \quad \cos \theta_0 = \frac{B \cos C_2}{A \cos C_1}$$

$$\operatorname{tang} T = \operatorname{tang} \left(\frac{C_1 + C_2}{2} + \chi \right) \quad \operatorname{tang} \chi = \frac{\operatorname{tang} \varphi - 1}{\operatorname{tang} \varphi + 1} \cot \frac{\Delta}{2}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{B}{A} \cot \alpha.$$

θ_0 is dan de hoek, dien de voerstraal maakt met de noordas op den middag, T is de tijd waarop de voerstraal de richting a der groote as heeft, of, indien de ellips tot een rechte lijn wordt, het moment waarop de grootste waarde wordt bereikt.

Uit deze tabellen blijkt, dat de gradiëntellips, voor beide stations en in alle jaargetijden, zoozeer tot een rechte lijn nadert, dat een graphische voorstelling niet dan op groote schaal zou kunnen worden gegeven.

Eene verklaring van de veranderlijkheid van wrijvingscoëfficiënt en afwijkingshoek met de jaargetijden zou niet moeilijk te geven zijn; maar daar zulk eene verklaring noodzakelijk zou moeten berusten op een vooropgestelde opvatting omtrent de mechanische beteekenis van den ingevoerden wrijvingscoëfficiënt en hieromtrent velerlei opvattingen mogelijk zijn, schijnt het wenschelijk nader onderzoek af te wachten alvorens hieromtrent nadere uitspraak te doen, en meerdere reeksen van wind- en barometerwaarnemingen te bewerken voor plaatsen gelegen onder zeer verschillende omstandigheden.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over:
„De lijnen H en K in het spectrum van de verschillende deelen der zonneschijf”.

§ 1. *Oorzaken van lijnverplaatsingen.*

Men kent tegenwoordig vier oorzaken, waardoor heldere of donkere lijnen van het zonnespectrum in plaats kunnen verschillen met de overeenkomstige emissielijnen, zooals die bij laboratoriumproeven worden waargenomen: beweging in de gezichtslijn, drukking, magnetische velden, anomale dispersie. Welke van die oorzaken in elk bepaald geval vermoedelijk de meest werkzame is, kan slechts worden beslist op grond van een vergelijkend onderzoek naar de physische mogelijkheid der gevolgtrekkingen, waartoe de verschillende onderstellingen ons leiden. Beproeft men bijv. de vier verklaringsbeginselen toe te passen op de sterke lijnverplaatsingen, die somtijds in het spectrum van protuberanties worden waargenomen, dan blijkt al spoedig dat zoowel het tweede als het derde beginsel hier niet tot bevredigende voorstellingen leiden kan, zoodat men na voortgezet onderzoek nog slechts te beslissen zal hebben tusschen het eerste en het vierde. Van de algemeene verschuiving der Fraunhofersche lijnen naar rood, die toeneemt van het centrum naar den rand der zonneschijf, kan noch het beginsel van DOPPLER, noch dat

van ZEEMAN rekenschap geven; daar moet dus de opvatting van het verschijnsel als een effect van drukking in hare gevolgen vergeleken worden met die, welke het aan anomale dispersie toeschrijft.

In enkele gevallen bestaat omtrent den oorsprong van zekere lijnverplaatsingen nauwelijks grond voor twijfel. Niemand zal aarzelen, de stelselmatige verschillen tusschen de spectra van den oost- en den westrand der zon aan beweging in de gezichtslijn toe te schrijven; of twijfelen aan den magnetischen oorsprong der splitsing van lijnen in het vlekenspectrum, voor zoover daarbij de kenmerkende polarisatieverschijnselen werkelijk zijn waargenomen. Maar die gevallen, waarin reeds op den eersten blik slechts één verklaring mogelijk schijnt, zijn zeldzaam. Het zou onjuist zijn, nu bijv. ook de verbreding der vlek-lijnen geheel aan magnetischen invloed te willen toeschrijven, terwijl wij andere oorzaken kennen, die eveneens zulk een verbreding kunnen teweegbrengen. In den regel werken verschillende invloeden samen, en zal de waarschijnlijke *hoofdoorzaak* van een zonneverschijnsel slechts langs indirecten weg, door uitsluiting, gevonden worden, d.w.z. doordat andere verklaringen voeren tot denkbeelden, die met algemeene physische begrippen in botsing komen. En de overblijvende verklaring zal natuurlijk des te waarschijnlijker zijn, naarmate zij ongedwongener aansluit bij deze of gene theorie, die reeds vele andere zonneverschijnselen in onderlingen samenhang doet overzien.

§ 2. *Verschijselen, waargenomen bij de calciumlijnen H en K.*

Een merkwaardig geval van stelselmatige lijnverplaatsingen, dat zich voordoet bij de calcium-lijnen *H* en *K*, werd in 1894 beschreven door DESLANDRES, in 1896 door JEWELL, en is in den laatsten tijd zeer nauwkeurig bestudeerd op Mount Wilson door CHARLES E. ST. JOHN ¹⁾, en te Meudon door H. DESLANDRES ²⁾. Het hoofdkarakter van deze verschijnselen is, dat in het spectrum van de middelste deelen der zonneshijf de smalle donkere lijnen H_3 en K_3 naar het rood verschoven zijn, de breedere, lichte lijnen H_2 en K_2 naar het violet; dat deze verschuivingen kleiner worden naarmate men den rand nadert, en dat daarentegen de breedte dier lijnen grooter wordt van het centrum naar den rand. Voor verdere bijzonderheden verwijzen wij naar de verhandeling van ST. JOHN.

Uit invloeden van drukking of van magnetische krachten kunnen de eigenaardigheden van het verschijnsel onmogelijk worden verklaard. ST. JOHN, die de anomale dispersie buiten beschouwing laat,

¹⁾ CHARLES E. ST. JOHN. *Astrophysical Journal*. **32**, 36—82, (1910).

²⁾ H. DESLANDRES, *C. R.* **152**, 233—239, (1911).

is dan ook, evenals DESLANDRES en JEWELL, zoo vast overtuigd, hier met gevolgen van beweging in de gezichtslijn te doen te hebben, dat hij de resultaten zijner voortreffelijke waarnemingen beschrijft onder den titel: „The general circulation of the mean- and high-level calcium vapor in the solar atmosphere”.

In de volgende bladzijden zal echter blijken, dat men al de door DESLANDRES en ST. JOHN beschreven eigenschappen van de lijnen *H* en *K* kan uitleggen als gevolgen van anomale dispersie. Men is dus gelukkig *niet genoodzaakt* aan te nemen, dat in de zonne-atmosfeer voortdurend twee tegengesteld gerichte vertikale stroomingen van calciumdamp worden onderhouden, die elkander ontmoeten, of wellicht passeeren, met snelheden, 30 à 60 maal grooter dan de snelheid der heftigste stormwinden op aarde — en die daarbij de waterstof en de overige chromosfeergassen onaangeroerd laten! De verklaring uit anomale dispersie stuit niet op zulke moeilijke physische denkbeelden, en biedt het voordeel, dat zij zich ongedwongen aansluit bij eene theorie, die reeds een groot aantal andere verschijnselen verbindt.

§ 3. *De invloed der anomale verstrooiing op de lichtverdeling.*

Het licht uit de dieper gelegen deelen der zon, dat een uitgestrekte selectief absorbeerende atmosfeer te doorloopen heeft, wordt daarin, behalve door absorptie, ook door *verstrooiing* verzwakt. Wel is waar is de verstrooide energie (in tegenstelling met de geabsorbeerde) slechts van voortplantings-richting veranderd, niet van aard; zij moet dus ten slotte toch in den oorspronkelijken vorm het hemellichaam verlaten. Maar omdat voortdurend een deel ervan naar de stralingsbron terugkeert, kan men zich de zaak zóó voorstellen, dat door de verstrooiing de uitstraling *verlangzaamd* wordt, en in zooverre, per tijdseenheid berekend, verzwakt.

Voor lichtsoorten, die in golflengte weinig van het geabsorbeerde licht verschillen, is de verstrooiingscoëfficiënt aanmerkelijk grooter dan in de overige deelen van het spectrum, daar zijn bedrag (volgens RAYLEIGH) evenredig is aan het kwadraat van de refractie-constante, en deze laatste groote absolute waarden heeft in de nabijheid van absorptielijnen. Derhalve moet de omgeving der absorptielijnen meer door verstrooiing verzwakt zijn dan de rest van het spectrum, en is dus de duisterheid der Fraunhofersche lijnen voor een deel het gevolg van anomale dispersie.

Hoe deze opvatting van het zonnenspectrum voortvloeit uit de electronentheorie, vindt men elders uitgewerkt ¹⁾. Enkele uitkomsten moeten wij hier in herinnering brengen.

¹⁾ W. H. JULIUS. Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmassa's. Versl. Natuurk. Afd. XIX, 1007, (1911).

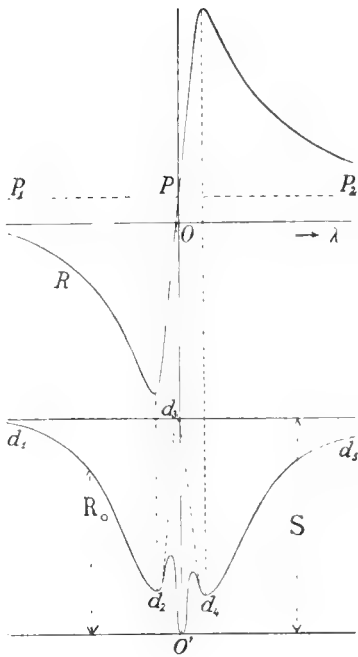


Fig. 1.

De kromme lijn, die de refractieconstante $R = \frac{n-1}{\Delta}$ als functie van λ voorstelt, heeft in de omgeving van een absorptielijn de gedaante, afgebeeld in de bovenste helft van fig. 1. Zij nadert aan weerskanten asymptotisch tot de bijna horizontale lijn P_1P_2 , door welke de loop der refractieconstante van de gasmassa zou worden weergegeven als zich niet bij $O(\lambda = \lambda_0)$ een absorptielijn bevond. Vergelijkt men met elkander de absolute waarden der ordinaten van de kromme R in paren van punten, die op gelijke afstanden links en rechts van O liggen, dan ziet men dat zij steeds aan den rechter kant grooter zijn dan aan den linker kant. Alle effecten dus, die toenemen met de absolute waarde van $n-1$, zullen aan den rooden

kant der lijn zich sterker vertoonen dan aan den violetten kant. Dit geldt derhalve 1° voor het lichtverlies door verstrooiing, 2° voor de sterkte van het verstrooide licht, 3° voor de grootte der *afwijsselingen* van lichtsterkte die, bij ongelijkmatige dichtheid der middenstof, uit *straalkromming* kunnen voortvloeien. Er volgt uit dat gemiddeld (d. w. z. afgezien van plaatselijke onregelmatigheden) zoowel de Fraunhofersche lijnen als de chromosfeerlijnen asymmetrisch zijn t. o. v. de juiste plaatsen der emissielijnen, en wel zóó, dat hunne zwaartepunten een weinig verschoven zijn naar het rood. Men kan gemakkelijk aantoonen dat dit effect moet toenemen van het centrum naar den rand der zonneshijf. Het stemt in karakter geheel overeen met de stelselmatige lijnverplaatsingen, die in de laatste jaren door HALE en ADAMS, FABRY en BUISSON, en anderen beschreven zijn en door hen als het gevolg van drukking in de omkeerende laag worden opgevat. Bezwaren tegen hunne opvatting, en argumenten ten gunste van de verklaring uit den vorm der dispersiekromme, heb ik in vroegere mededeelingen aangevoerd ¹⁾. Daarbij werd nog geen rekening gehouden met het deel der dispersiekromme, dat tussehen het minimum en het maximum ligt, daar dit gebied bij de meeste Fraunhofersche lijnen te eng is, om het met de tegenwoordig gebruikte spectraalinrichtingen te kunnen onderscheiden. Maar wij willen het thans in

¹⁾ Versl. Natuurk. Afd. XVIII, p. 913, (1910); „Le Radium”, VII, Oct. 1910.

de beschouwing opnemen, omdat dit bij enkele breede lijnen toepassing schijnt te vinden.

De onderste helft van fig. 1 (afgeleid uit de dispersietheorie) toont, voor de omgeving van een alleenstaande absorptielijn, de intensiteit R_0 van het licht dat door de zonneatmosfeer wordt doorgelaten, wanneer voor alle beschouwde golflengten de sterkte van het invallende licht S bedraagt. De invloed der *verstrooiing* is zichtbaar in den loop der (gedeeltelijk gestreepte) kromme lijn $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5$; die der *absorptie* in dien van het toegevoegde deel tusschen d_2 en d_4 , met de steile inzinking bij O' . Slechts van enkele gassen, welke in de zonneatmosfeer sterk vertegenwoordigd zijn, schijnt het absorptievermogen van zoodanigen aard te wezen, dat het minimum en het maximum in de dispersiekromme ver genoeg van elkander liggen, om de verschijnselen van het daartusschen gelegen gebied waarneembaar te maken. Waar dit het geval is, voert de dispersietheorie, zooals l.e. werd aangetoond, vanzelf tot de gevolgtrekking dat het „zwaartepunt” van de centrale donkere lijn naar rood verschoven moet zijn, terwijl de schijnbare emissielijn, die berust op het geringer zijn der verstrooiing voor de lichtsoorten tusschen d_2 en d_4 , een verschuiving naar violet moet vertoonen. Deze uitkomst stemt geheel overeen met het algemeene verschijnsel, dat in het spectrum der centrale deelen van de zonnenschijf door DESLANDRES, JEWELL, en ST. JOHN bij de lijnen H_3 en K_3 , H_2 en K_2 is waargenomen.

§ 4. De invloed der anomale refractie op de lichtverdeling.

Om in te zien, hoe het effect zich wijzigen zal naarmate men den rand der zonnenschijf nadert, moeten wij op eene andere bijzonderheid van de lichtvoortplanting onze aandacht vestigen. De anomale dispersie heeft namelijk niet slechts anomale *verstrooiing* ten gevolge, maar tevens, overal waar de dichtheid der middenstof ongelijkmatig is, anomale *refractie*.

Laten wij voorloopig buiten beschouwing de „ongelijkmatigheden op groote schaal” die door min of meer „geordende” dichtheidsgradienten gekenmerkt zijn (waarmee men vermoedelijk in zonnevlekken te doen heeft)¹⁾, en stellen wij ons den gemiddelden toestand der zonneatmosfeer zóó voor, dat daarin wel betrekkelijk steile dichtheidsgradienten in alle richtingen voorkomen (als in de verwarmde lucht boven een kachel), maar die van punt tot punt snel en onregelmatig veranderen, telkens wisselend van teeken. Een zeer uitgestrekte gaslaag, in een dergelijken toestand verkeerende,

¹⁾ Versl. Nat. Afd. XVIII, p. 189, (1909).

moet eenigszins den indruk maken van een troebel medium. Het optisch effect van zulk een atmosfeer zal tot op zekere hoogte vergelijkbaar zijn met wat men te zien krijgt, als een lichtbron bekeken wordt door een glazen bak, waarin bijv. water en glycerine door-eengeroerd en nog niet volkomen gemengd zijn. Deze „verstrooiing door refractie” is, evenals de moleculaire verstrooiing, bijzonder sterk voor lichtsoorten uit de naaste omgeving der absorptielijnen. De uitwerking der anomale refractie kan dus in vele gevallen van denzelfden aard zijn als die der anomale verstrooiing, en voegt zich dan eenvoudig daarbij.

Maar wij moeten het onderscheid tusschen de twee processen niet uit het oog verliezen. De sterkte der effecten van anomale refractie hangt af van de mate waarin *dichtheidsverschillen* worden aangetroffen. Zij kan dus op verschillende plaatsen van de zonneshijf zeer uiteenlopend zijn ¹⁾, terwijl de sterkte van het moleculair verstrooiingseffect meer gelijkmatig verdeeld is, en slechts geleidelijk toeneemt van het centrum naar den rand. En ten tweede heeft somtijds de *richting* der dichtheidsgradienten een grooten invloed op de sterkte van het licht, dat in een gegeven richting nittreedt. Ook deze oorzaak van ongelijkheid in de lichtverdeling ontbreekt bij het verstrooiingsproces.

Onderzoeken wij op grond van deze gegevens, welke verandering de lichtverdeling in het algemeen, en in het bijzonder het uiterlijk der calciumlijnen, ondergaan moet bij overgang van het centrum naar den rand der zonneshijf.

Die veranderingen hangen natuurlijk ten nauwste samen met het feit, dat in de centrale deelen der schijf de lichtbron nagenoeg symmetrisch achter de atmosfeer ligt, in de randdeelen niet.

Een punt M (fig. 2), ergens in de atmosfeer der zon, zal door een waarnemer die zich op de lijn MA bevindt, gezien worden op het midden der zonneshijf, door een waarnemer op de lijn MB echter niet ver van den rand. Voor den laatstgenoemden waarnemer is de omgeving van M veel minder sterk verlicht dan voor den eerstgenoemden. Daaruit volgt dat M uit de richting bM bijv. slechts

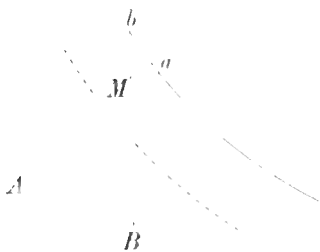


Fig. 2.

¹⁾ Hierdoor wordt waarschijnlijk de onregelmatige lichtverdeling in spectro heliogrammen grotendeels beheerscht.

half zooveel licht ontvangt als uit de richting aM . Hoe, voor een bepaalde lichtsoort, de bestralingssterkte in M varieert met de richting, kan men gemakkelijk vinden, als de hoofd-verdeeling der lichtsterkte op de zonneshijf bekend is.

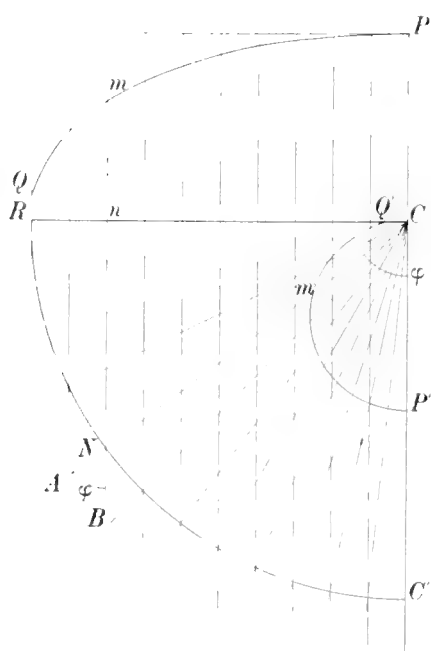


Fig. 3.

$P'Q'$, die het doorlatingsvermogen der zonne-atmosfeer als functie van den uittredingshoek φ voor de gekozen lichtsoort weergeeft. Met behulp van deze figuur kunnen wij nu verder voor een punt

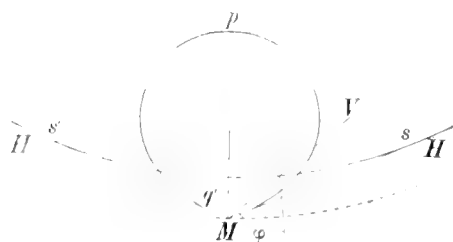


Fig. 4.

M (fig. 4) in de buitenste laag der zonne-atmosfeer de „bestralingskromme” vinden. Wij behoeven daartoe slechts op elken (binnen den hoek $H'MH$ gelegen) voerstraal MV , die de fotosfeer onder een hoek φ met de normaal snijdt, de met die waarde van φ corresponderende

In fig. 3 toont PQ , volgens spectro-fotometrische bepalingen van H. C. VOGEL¹⁾, den gang der lichtsterkte (voor golven tusschen 405 en 412 $\mu\mu$) van het centrum C naar den rand R der zonneshijf. Laat RNC' een doorsnede van het fotosfeeroppervlak voorstellen, en de waarnemer zich op grooten afstand in de richting CC' bevinden, dan blijkt dat bijv. uit N , dus onder een hoek $ANB (= NCC' = \varphi)$ met de normaal op de fotosfeer, gemiddeld een lichtsterkte, evenredig aan de ordinaat nm , de zonne-atmosfeer doordringt. Wij zetten nu op den voerstraal CN een stuk $Cm' = nm$ uit, en doen hetzelfde op alle voerstralen der fotosfeerdoorsnede. Zoo ontstaat de kromme

waarde van φ corresponderende

¹⁾ H. C. VOGEL, Ber. der Berl. Akad., 1877, S. 104.

in, dat zij vrijwel hetzelfde karakter behouden zal voor dieper gelegen punten der atmosfeer ¹⁾).

Wat nu betreft de *oorzaak* der algemeene vermindering van lichtsterkte naar den rand, ligt het voor de hand, die vooral te zoeken in de verstrooiing (zoowel in de moleculaire verstrooiing, als in die welke op refractie berust). Aan verstrooiing toch zijn alle lichtsoorten meer of minder onderhevig, aan absorptie waarschijnlijk slechts die, wier trillingsgetallen zéér dicht bij de eigen-frequenties der atmosfeergassen liggen ²⁾).

Het breeder worden van de Fraunhofersche lijnen naar den rand toe bewijst, dat voor lichtsoorten die anomale dispersie ondergaan, de vermindering der intensiteit van het centrum naar den rand grooter is, dan voor het weinig breekbare licht uit lijnvrije deelen van het spectrum. Derhalve zal de bestralingskromme van een punt *M* der zonneatmosfeer voor de sterk breekbare lichtsoorten uit de omgeving eener absorptielijn een meer langwerpige, eivormige gedaante hebben, dan die, welke wij in fig. 4 uit de waarnemingen van VOGEL voor gemiddeld violet licht hebben geconstrueerd. Dit beduidt, dat bijvoorbeeld van lichtsoorten, corresponderende met de plaatsen d_2 of d_4 van fig. 1, de intensiteit waarmee zij een punt *M* treffen nog sterker varieeren zal met de richting waaruit zij de fotosfeer verlieten, dan dit voor het gemiddelde licht het geval is.

Diezelfde lichtsoorten (bij d_2 of d_4) zijn tevens in bijzonder hooge mate aan *verandering van voortplantingsrichting* onderhevig, wanneer zich in *M* dichtheidsgradiënten bevinden. Hadden wij niet met anomale *refractie*, doch alleen met anomale *verstrooiing* te doen, dan zouden wij een bepaalde lichtsoort op een bepaalden afstand van den zonsrand overal in dezelfde sterkte aantreffen. De refractie echter veroorzaakt ongelijkmatigheid. En de kans dat wij, naar een deel *M* van de zonneatmosfeer kijkende dat zich op gegeven afstand binnen den rand projecteert, daar duidelijke verschillen van licht-

1) Bij deze ontwikkeling hebben wij alleen maar gebruik gemaakt van het *waargenomen* feit der lichtvermindering naar den rand, zonder eenige hypothese in te voeren betreffende de oorzaak daarvan. De uitkomst sluit tevens de rechtvaardiging in van het uitgangspunt onzer vroegere beschouwingen over stralenloop in de zonne-atmosfeer (Versl. Nat. Afd. XVIII, 183, 1909; Physik. Zeitschr. **11**, 58, 1910). Sommige astrofysici hebben daartegen bezwaren geopperd. Voor zoover zij die gronden op de meening, dat een punt binnen de zonne-atmosfeer uit alle richtingen, die de fotosfeer treffen, evenveel licht (per eenheids-element van lichaams-hoek) ontvangt, dus dat een cirkelboog *sps* de bestralingskromme zou voorstellen, verzuimden zij rekening te houden met het genoemde eenvoudige waarnemingsresultaat.

2) Versl. Nat. Afd. XIX, p. 1014, (1911).

sterkte aantreffen, neemt toe met de absolute waarde van $n-1$. Uit deze omstandigheid kan men bijv. verklaren, dat in een reeks van spectroheliogrammen, genomen met verschillende lichtsoorten die binnen de K_1 -lijn telkens nader bij K_3 gekozen worden, de contrasten toenemen.

§ 5. *De samenwerking van de twee genoemde invloeden.*

De vraag, hoe de dispersietheorie uitlegging geeft van het ontstaan der zoo veranderlijke lichte lijn K_2 , die op een emissielijn gelijk, moet nu op grond van het bovenstaande aldus worden beantwoord.

Er zijn twee oorzaken waardoor de helderheid kan toenemen als men K_3 nadert.

De eene berust op de aanwezigheid der twee kleine (ongelijke) maxima van de R_0 -kromme in fig. 1, die een vermindering van het lichtverlies door verstrooiing aanduiden. Deze invloed werkt nagenoeg gelijkmatig in alle punten, evenver van 't centrum gelegen; zij laat zich vooral gelden op het midden der zonneshijf; want naarmate wij den rand naderen zal het verstrooide licht zelf een grootere procentische bijdrage tot den totalen uit tredenden lichtbundel leveren, en moeten dus die twee kleine toppen van de R_0 -kromme in beteekenis afnemen. Het gedeelte van het effect, dat aan deze eerste oorzaak te danken is, is zwak, zelfs op de middelste deelen der schijf, maar het is constant van aard; steeds openbaart het zich als een smalle, dubbele K_2 -lijn, die naar violet verschoven is, terwijl de K_3 -lijn een kleine verplaatsing toont naar rood.

De andere oorzaak berust op refractie in onregelmatige dichtheidsgradiënten. De refractie kan op het midden der zonneshijf slechts *vermindering* van helderheid tengevolge hebben, en wel in de sterkste mate voor de meest breekbare golven, corresponderende met d_2 en d_4 ; K_2 blijft dan tusschen die plaatsen begrepen, en is dus altijd betrekkelijk smal. Maar op eenigen afstand van het middelpunt, waar voor iedere golflengte de gemiddelde lichtsterkte geringer is dan in het centrum, kunnen dichtheidsgradiënten teweegbrengen dat loodrecht uit de fotosfeer gekomen stralen zich naar den waarnemer toebuigen, en dus plaatselijk grootere helderheid doen ontstaan.

Nu zijn het vooral weer de meest breekbare lichtsoorten, bij d_2 en d_4 gelegen, waarvan men de laatstgenoemde uitwerking verwachten moet. Dat wil zeggen: op de niet-centrale plaatsen der schijf zal de *refractie* tot de vorming van de K_2 -lijn hier en daar heldere stukken bijdragen, wier maxima van intensiteit het meeste kans hebben om met de plaatsen d_2 en d_4 van het spectrum samen te vallen. Dit effect combineert zich met het bovengenoemde verstrooi-

ings-effect. Gemiddeld zullen derhalve de beide componenten van K_2 verder van elkander liggen dan op 't midden der schijf.

Nadert men den rand, dan neemt, zooals wij zagen, het eerste, door verstrooiing beheerschte, deel van het effect in sterkte af, terwijl het tweede, door refractie beheerschte, in beteekenis wint. Dientengevolge groeit de gemiddelde afstand der componenten van K_2 aan, en wordt aan den rand gelijk aan dien tusschen d_2 en d_4 . De invloed der twee kleine toppen van de R_0 -kromme, waaraan op 't midden der schijf de K_2 -lijn in hoofdzaak te danken was, is nabij den rand verdwenen. Daardoor is K_2 breeder dan in 't midden. Bovendien zijn ook de verplaatsingen van K_3 en K_2 naar rood en violet bij het naderen van den rand langzamerhand verminderd; want zij hingen af van de asymmetrie der kleine toppen. De punten d_2 en d_4 , die aan den rand de gemiddelde plaatsen der beide componenten van K_2 bepalen, liggen op gelijke afstanden van de ware absorptielijn.

§ 6. *Zwakke punten der nieuwe en der oude verklaringwijze.*

Terwijl al deze gevolgtrekkingen uit de dispersietheorie over het geheel genomen in behoorlijke overeenstemming zijn met de resultaten der waarnemingen, mogen wij de punten waar tegenstrijdigheid bestaat of schijnt te bestaan allerminst uit het oog verliezen. Slechts door leemten op te zoeken, opent men zich de kans om tot betere inzichten te komen.

Zoo verdient het opmerking dat er volgens de theorie reden bestaat om aan den zonerand asymmetrie van K_2 te verwachten, indien namelijk, zooals wij onderstelden, de absolute waarde van $n - 1$ grooter is bij d_4 dan bij d_2 ; en dan zou de roode component, voor zoover het verschijnsel aan anomale refractie te danken is, iets sterker moeten zijn dan de violette. Nu zegt echter ST. JOHN ¹⁾: „On the plates 1 m.m. from the limb the emission components are very broad and strong, and, as far as the eye can judge, symmetrical”. Maar bij metingen op een 30-tal uitgekozen platen vond hij, dat juist de violette kant gemiddeld $0,0074 \text{ \AA}$ breeder was dan de roode. Het verschil is wel is waar klein, doch als het blijkt algemeen te bestaan, niet op toeval (keus der platen bijv.) te berusten, dan blijft onze theorie, op haar tegenwoordig standpunt, de verklaring schuldig — tenzij wij hier misschien juist te doen hebben met het geval van asymmetrie der dispersiekromme, dat beschreven is in § 3 mijner mededeeling in de vergadering van Januari j.l. ²⁾.

¹⁾ ST. JOHN. l. c. p. 54.

²⁾ Versl. Nat. Afd. XIX, pag. 1012. (1911).

Nog op eene andere tekortkoming, die wellicht bestaat, meet ik de aandacht vestigen.

Uit gepubliceerde reproducties van spectrogrammen, verkregen te Meudon en op Mount Wilson, krijg ik den indruk, dat de gemiddelde afstand der helderste plaatsen van de K_2 -componenten aan den rand grooter is dan op lichtsterke flocculi en faculae die bijv. midden tusschen het centrum en den rand gelegen zijn. Toch zou, indien onze verklaring juist is, ook in het laatstgenoemde geval de gemiddelde plaats der helderste deelen van de componenten bijna geheel bepaald moeten worden door de ligging, in het spectrum, van de punten d_2 en d_4 , omdat de bijdrage die het *verstrooiings*-effect tot de helderheid levert, en die zich in het spectrum, o.a. ter plaatse van de tusschengelegen topjes der R_0 -kromme openbaart, in flocculi betrekkelijk gering is. Wij zouden, m. a. w., verwachten dat K_2 in het spectrum van lichtsterke flocculi en faculae gemiddeld niet minder breed was dan aan den rand ¹⁾. Mocht er in dit opzicht werkelijk tegenspraak blijken te bestaan tusschen waarneming en theorie, en mocht dan een nadere uitwerking van de dispersietheorie niet voeren tot de conclusie, dat de afstand der punten d_2 en d_4 moet toenemen van het centrum naar den rand, dan zou wederom een zwak punt van het verklaringsbeginsel zijn aangetoond.

Ten slotte moet nog gewezen worden op enkele gevolgen, voortvloeiende uit de verklaring, die DESLANDRES, JEWELL en ST. JOHN van de eigenaardigheden der lijnen H en K geven.

Een van de m. i. groote moeilijkheden, waarin men geraakt door de bedoelde lijnverplaatsingen aan stijgende en dalende stroomingen toe te schrijven, is in den aanvang van dit opstel reeds genoemd: Hoe is het mogelijk, dat andere chromosfeergassen door die hevige, overal in de zonneatmosfeer heerschende orkanen van calciumdamp in het geheel niet worden meegesleept?

Verder dringt zich de vraag op, welke de krachten zijn, die zóó groote snelheden aan de, gelijktijdig bestaande, stijgende en dalende stroomen geven, en die speciaal op het *calcium* werken, daarentegen niet, of althans in véél geringere mate, op andere gassen? Hier bestaat zeer zeker behoefte aan een hulphypothese.

Er zijn nog meer bezwaren, die men eveneens met behulp van bijzondere hypothesen uit den weg zou moeten ruimen. Het breeder worden van K_2 naar den rand schrijft men toe aan de doorloopende vermeerdering der dikte van de werkzame laag van stralenden

¹⁾ Bij de metingen waaruit ST. JOHN de toename der breedte van K_2 en K_3 naar den rand afleidde, heeft hij de plaatsen waar zich heldere faculae en flocculi bevonden, opzettelijk vermeden. Zie l. c. p. 48 en 50.

calciumdamp. Daarbij wordt ondersteld dat een merkbaar deel van den bundel calciumlicht, die tot ons komt, inderdaad een afstand van 16000 à 62000 kilometers²⁾ heeft afgelegd door een laag der selectief absorbeerende zonnegassen, waarin de gemiddelde drukking geschat wordt op één (aardsche) atmosfeer.³⁾ Dit denkbeeld is moeilijk overeen te brengen met de heerschende theorie aangaande verstrooiing en absorptie van licht. Bovendien zou men op grond van de door ST. JOHN gegeven verklaring verwachten, dat K_2 tevens lichtsterker moest worden van het centrum naar den rand. Dit nu is niet het geval. Slechts in vergelijking met de omliggende deelen van het spectrum neemt K_2 in betekenis toe, maar de absolute lichtsterkte neemt beslist af. Om spectrogrammen van ongeveer gelijke dichtheid te verkrijgen, heeft ST. JOHN nabij den rand een 4 à 5 maal langeren belichtingstijd noodig gehad, dan nabij het centrum. De verklaring kan dus alleen gehandhaafd blijven als men een oorzaak aanwijst, waardoor de chromosfeerstraling, in van het centrum der zonneshijf naar den rand toenemende mate, verzwakt wordt. Men zou bijvoorbeeld kunnen onderstellen dat buiten de chromosfeer in betrekkelijk dunne laag een middenstof aanwezig is, bedield met de eigenschap om alle lichtsoorten in zekere mate te absorbeeren.

Hulphypothesen als de hier genoemde behoeven niet te worden ingevoerd, wanneer men de verschijnselen, die de calciumlijnen vertoonen in het spectrum van de verschillende deelen der zonneshijf, verklaart uit de theorie der voortplanting van het licht door uitgestrekte gasmassa's.

Physiologie. — De Heer EYKMAN biedt voor de bibliotheek aan een exemplaar van het proefschrift van den Heer L. H. VAN ROMUNDE: „*De voeding der Trappisten*” en doet daarover een mededeeling.

De Heer VAN ROMUNDE heeft in vier verschillende tijden van het jaar, telkens ongeveer een week, in een trappistenklooster doorgebracht, om de levenswijze en voeding der monniken te bestudeeren. Zulk een klooster is een wereldje op zich zelf, waar iedereen een eigen ambacht uitoefent; zoo had men daar een schoenmakerij, een boekdrukkerij, een boterfabriek, een bakkerij, een koperslagerij, een kaarsenfabriek, een schrijnwerkerij en een schilderswerkplaats. De lichamelijke arbeid, dien de paters verrichten, kan gerekend worden

²⁾ ST. JOHN. l. c. p. 66.

³⁾ ST. JOHN. l. c. p. 43.

tot de 1e à 2e, die van de leekbroeders tot de 3e arbeidscategorie van RUBNER.

De voeding is gedurende 70 dagen van het jaar een zuiver plant-aardige, overigens een lacto-vegetarische. Brood, aardappelen en karnemelksche pap vormen de hoofdschotels, verder wat groenten, zoomede kleine hoeveelheden zuivelproducten, olie en azijn. Eindelijk als versnaperingen bier, koffie en een weinig fruit.

Deze sobere voeding komt derhalve in hoofdzaak overeen met die der minst gegoede arbeiders hier te lande, terwijl de voorwaarden voor het verzamelen van betrouwbare gegevens uit den aard der zaak voor v. R. bij uitstek gunstig waren, veel gunstiger dan in den regel bij waarnemingen in arbeiderskringen het geval is.

Hij vond nu, dat de behoefte aan voedsel bij zijn proefpersonen niet onbelangrijk grooter was dan door RUBNER, die op dit gebied bij ons als autoriteit geldt, wordt opgegeven en beter overeenstemt met hetgeen te dien aanzien door Amerikaansche en Zweedsche onderzoekers gevonden is. Dit moge blijken uit de navolgende cijfers, welke de gemiddelde warmtewaarde in calorien van het dagelijks genoten voedsel aangeven voor een lichaamsgewicht van \pm 70 K.G.

Arbeidscategorie.	RUBNER Duitsland.	ATWATER Amerika.	HULTGREN & LANDERGREN Zweden.	v. ROMUNDE Nederland.
1e. lichte arbeid	2630	3520	—	} 3500 (paters)
2e. matige >	3120	4060	3470	
3e. zware >	3660	—	4850	4540 (broeders)

De gemiddelde hoeveelheid eiwit in het voedsel der paters bedroeg 130 gr. en der broeders 155 gr.

Op verschillende gronden wordt door v. R. betoogd, dat er bij zijn proefpersonen geen sprake was van overmatige voeding. Hij meent dan ook dat de werkelijke behoefte weinig geringer is dan de door hem gevonden bedragen aangeven en stelt die in ronde cijfers voor de paters op 3300 en voor de broeders op 4250 calorien.

Tevens concludeert hij, aangezien de zeer eentonige kost met smaak genuttigd en goed geutiliseerd werd, dat voor den arbeidenden mensch het voedsel niet die afwisseling en smaakstreeling behoeft te bieden, welke veelal als nuttig en noodig geprezen worden.

Ook omtrent de *kreatinineuitscheiding* der proefpersonen zijn waarnemingen gedaan, welke, in overeenstemming met die van PERELHARING en VERPLOEGH, leerden dat de hoegrootheid daarvan in geen direkt verband staat tot den aard en de hoeveelheid van het genoten voedsel, noch met de mate van den verrichten arbeid.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT doet eene mededeeling namens den Heer J. Th. BORNWATER. „*Over de werking van Oxalylechloride op aminen en amiden*”.

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBERGH)

Zooals bekend is werken zuurchloriden, evenals op ammoniak, ook op primaire en secundaire aminen, onder vorming van primaire mono- en di-alkylamiden, en op primaire eenvoudige amiden en alkylamiden, onder vorming van secundaire eenvoudige- en alkylamiden.

Met het chloride van het oxaalzuur, het oxalylechloride, zijn echter nog weinig proeven genomen, zelfs nadat de bereiding een goede en daardoor het oxalylechloride handelsproduct is geworden. STAUDINGER haalt als terloops aan, dat het oxalylechloride met aminen oxamiden vormt en geeft als voorbeeld hiervan het aniline, dat hij ter quantitative bepaling van het oxalylechloride aanwendt. Ook TASKER en JONES vermelden alleen, dat oxalylechloride krachtig werkt op primaire en secundaire aminen.

Ik heb mij, op verzoek van Prof. FRANCHIMONT, met een aantal aminen en amiden overtuigd, dat de werking soms gemakkelijk, soms moeilijk plaats heeft; ook wel eens uitblijft of een andere richting neemt, zoodat in plaats van oxalylderivaten carbonylderivaten ontstaan.

Zoo kreeg ik met piperidine in aetherische oplossing, bij de gewone temperatuur, het oxalylpiperidide; evenzoo met aniline het oxanilide, met o.nitraniline het oxalyldi(o.nitraniline), met m.nitraniline het oxalyldi(m.nitraniline), met p. nitraniline het oxalyldi(p.nitraniline).

Met 1.2.4.dinitraniline werd bij gewone temperatuur geen werking waargenomen; hier moest gekookt worden en werd benzol als oplosmiddel genomen. Dit leidde tot de vorming van oxalyldi(1.2.4.dinitraniline). Met trinitraniline werd onder deze omstandigheden geen reactie verkregen.

Verder bleek, dat men, ook bij het oxalylechloride, volgens de methode van HARTWIG FRANZEN kan werken en gebruik maken van de chloorwaterstofzure verbindingen der aminen. Door deze in benzol met oxalylechloride te koken tot de chloorwaterstofontwikkeling ophoudt, worden eveneens gemakkelijk oxamidderivaten verkregen. Deze methode heeft, behalve het voordeel dat de chloorwaterstofzure aminen makkelijker te verkrijgen zijn, ook nog dit dat men minder amine noodig heeft en dat de reactie kalm en zonder bijzondere voorzorgsmaatregelen verloopt.

Ik constateerde dit bij het hydrochloride van aniline, dat oxanilide en bij dat van piperidine, dat oxalypiperidide gaf.

Tot de aminen behooren ook de esters der aminozuren en ik beproefde volgens de laatstgenoemde methode uit hunne chloorwaterstofzuren verbindingen oxalylderivaten te krijgen¹⁾, hetgeen zeer gemakkelijk gelukte bijv. bij den chloorwaterstofzuren glycocollaethylester

waardoor oxalyldi(glycocollaethylester) $\left| \begin{array}{l} \text{CONH CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5 \\ \text{CONH CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5 \end{array} \right.$ verkregen

werd, in fraaie naalden bij 143° C. smeltend. Eenzelfde resultaat werd bereikt met den chloorwaterstofzuren glycyglycinaethylester. Deze le-

verde oxalyldi(glycyglycinaethylester) $\left| \begin{array}{l} \text{CO NH CH}_2\text{CO NH CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5 \\ \text{CO NH CH}_2\text{CO NH CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5 \end{array} \right.$

in fraaie glanzende blaadjes, smeltend bij 250° C., die de zoogenaamde biurectreactie vertoonen.

Reeds zijn eenige andere chloorwaterstofzuren verbindingen der aminozuren esters op dezelfde wijze behandeld met even goeden uitslag. Zoo die van den α -aminopropionzuren methylester, waardoor oxalyldi-

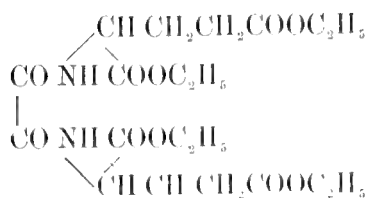
$\text{CH}_3\text{CH}(\text{NH})\text{COOCH}_3$
 $\left| \begin{array}{l} \text{CO} \\ \text{CO} \end{array} \right.$
 (α -aminopropionzuren methylester) werd verkregen

$\text{CH}_3\text{CH}(\text{NH})\text{COOCH}_3$
 in kleine witte naaldjes. Verder die van den diglycyglycinaethylester, waardoor oxalyldi(diglycyglycinaethylester)

$\left| \begin{array}{l} \text{CO NH CH}_2\text{CO NH CH}_2\text{CO NH CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5 \\ \text{CO NH CH}_2\text{CO NH CH}_2\text{CO NH CH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5 \end{array} \right.$
 ontstond als zijdeglanzende fijne naaldjes met een smeltpunt of ontledingspunt bij 302° C. Zij geven een roodviolette biurectreactie.

Ook van de aminoderivaten der tweebasische zuren werd een voorbeeld genomen, n.l. de chloorwaterstofzuren glutaminezuren diaethylester, welke oxalyldi(glutaminezuren diaethylester)

1) De bovengenoemde methode van HARTWIG FRANZEN kon ook met succes toegepast worden ter bereiding der chlooracylderivaten der aminozuren esters. Zoo verkreeg ik door chlooracetylchloride in benzol met chloorwaterstofzuren glycocoll-ester te koken chlooracetylglycinaethylester en met chloorwaterstofzuren glycyglycinaethylester chlooracetylglycyglycinaethylester. Beide met zeer goede opbrengst, zoodat deze methode de voorkeur verdient boven de door FISCHER aangewende ter verkrijging der chlooracylderivaten der polypeptiden, zoowel om de betere opbrengst als om de minder omslachtige wijze van werken.



opleverde als uiterst fijne haarvormige kristallen met smeltpunt $94^{\circ}.5$ C.

De verkregen verbindingen zouden van beteekenis kunnen worden voor de kennis der eiwitstoffen. Bekend toch is, dat reeds vóór veertig jaren SCHÜTZENBERGER uit alle eiwitstoffen, door deze te splitsen met barietwater, oxaalzuur kreeg. Bijv. uit:

Kippeneiwit	5,7 %	bariumoxalaat	=	2,22 %	oxaalzuur
„	12,5	„	„	4,87	„
Caseïne	17,5	„	„	6,82	„
Serum (uit paardenbloed)	16,5	„	„	6,43	„
Fibrine (uit paardenbloed)	11,5	„	„	4,48	„
Hemiproteïne	14,7	„	„	5,73	„
Plant aardige fibrine (gluten)	8,0	„	„	3,12	„
Osseïne	5,0	„	„	1,95	„
Wol	20,4	„	„	8,14	„
Haar	19,4	„	„	7,74	„
Vischlijm	11,3	„	„	4,50	„
Fibroïne uit zijde	8,1	„	„	3,23	„
Chondrine	11,4	„	„	4,44	„
Gelatine	8,9	„	„	3,55	„

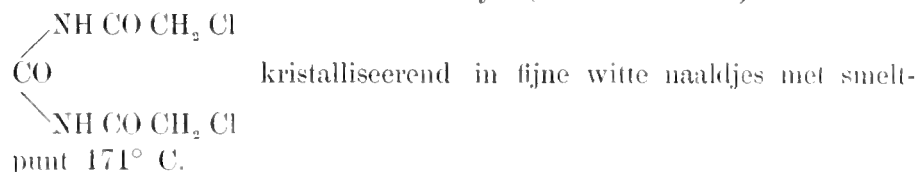
Aan deze productie van oxaalzuur, dat ook uit andere stoffen dan oxalylderivaten bijv. mesoxaalzuurderivaten zou kunnen ontstaan, is in den laatsten tijd geen aandacht geschonken.

Daar nu de bovengenoemde reactie met alle tot nog toe onderzochte chloorwaterstofzure verbindingen van aminozure esters schijnt plaats te hebben, mag men verwachten, dat van de polypeptiden in het algemeen dergelijke oxalylverbindingen verkregen zullen kunnen worden, die als bouwstenen van het eiwitmolecuul zouden kunnen worden aangezien.

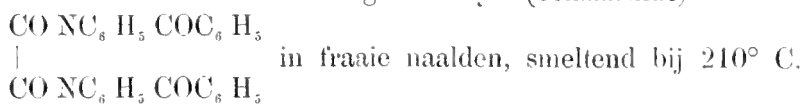
Ook aan de productie van koolzuur bij de splitsing der eiwitstoffen wordt weinig aandacht geschonken en toch zouden, evenals de oxalylverbindingen der polypeptiden, ook hunne carbonylverbindingen bouwstenen van het eiwitmolecuul kunnen zijn. Voorloopige proeven

met eenvoudige amiden leerden, dat bij de werking van oxalychloride geen oxalylderivaten verkregen werden, maar carbonylderivaten, daar het oxalychloride in sommige gevallen zich als bron van chloor-kooloxyde gedraagt.

Zoo verkreeg ik met acetamide door koking in benzol diacetylureum en met chlooracetamide het carbonyldi(chlooracetamide)



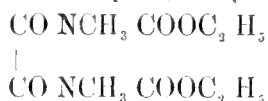
Met benzamide ontstond dibenzoylureum,
met benzanilide daarentegen oxalyldi(benzanilide)



Acetaethylamide gaf oxalyldi(acetaethylamide) $\left\{ \begin{array}{l} \text{CO N (C}_2\text{H}_5) \text{ CO CH}_3 \\ \text{CO N (C}_2\text{H}_5) \text{ CO CH}_3 \end{array} \right.$

in fraaie kristallen, smeltend bij 130° C.

Terwijl aethylurethaan carbonyldi(aethylurethaan) leverde, kreeg ik met methylaethylurethaan oxalyldi(methylaethylurethaan)



in helder witte naalden, smeltend bij 67° C.

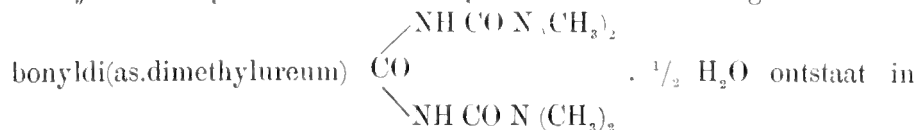
Het schijnt dus, dat bij mono-alkylamiden de reactie tot oxalylderivaten, bij eenvoudige amiden tot carbonylderivaten leidt.

Met ureum, dat ook tot de amiden mag gerekend worden, werden verkregen, in aether bij de gewone temperatuur, parabaanzuur en

vermoedelijk het ware oxalyldiureïde $\begin{array}{l} \text{CO NH CO NH}_2 \\ \text{CO NH CO NH}_2 \end{array}$, verschillend

van het door GRIMAUX bereide „amide d'un acide oxalybiurétique”, dat in de Deutsche literatuur abusievelijk oxalyldiureïde genoemd wordt. Het door mij verkregen oxalyldiureïde vertoont, naast volslagen onoplosbaarheid in alle gebruikelijke oplosmiddelen, geen biurethereactie.

Symmetrisch dimethylureum, zoowel in aether bij de gewone temperatuur als in benzol gekookt, gaf het bekende cholestrophaan terwijl met asymmetrisch dimethylureum in benzol gekookt car-



bijzonder fraai gevormde prismatische kristallen, smeltend bij 140° C.

Mikrobiologie. — De Heer M. W. BELDERINCK biedt eene mededeeling aan: „*Een proefneming met maagsarcine*”.

Voor eenige jaren deed ik een mededeeling aangaande een methode om uit tuingrond een anaërobe gistingssarcine te verkrijgen en deze verder te kultiveeren. ¹⁾ Daar het mikroskopische beeld en de afmetingen der zoo verkregen sarcine geheel overeenstemden met die van de maagsarcine, ²⁾ waarvan zulk een nauwkeurige beschrijving door SURINGAR ³⁾ is gegeven, had ik toen reeds getracht de identiteit van beide te bewijzen door overeenkomstige proeven als met tuingrond uit te voeren met materiaal, dat maagsarcine bevatte, welk materiaal ik te danken had aan Prof. VAN LEERSUM te Leiden. Deze proeven waren evenwel mislukt. Ook een latere volgens mijn aanwijzingen te Leiden uitgevoerde proef bleef zonder gevolg.

Meenende, dat de reden dezer mislukking gelegen kon zijn in een te sterke aëratie van het infectiemateriaal waardoor de anaërobe maagsarcine alle groeikracht verloren had, bestond er aanleiding juist daarop te letten bij het doen van een nieuwe proef, waartoe de heer VAN LEERSUM mij in het Akademisch Ziekenhuis te Leiden opnieuw in de gelegenheid stelde.

Het bleek, dat de onderstelling juist was geweest: bij overbrenging van den maaginhoud met de sarcine in een daarvoor geschikte kultuurvloeistof, zóó spoedig, dat het contact met de lucht als uitgesloten kon worden beschouwd, was het mogelijk den groei en de gisting op krachtige wijze door te doen gaan.

De proef werd op de volgende wijze uitgevoerd.

Eenige fleschjes van omstreeks 130 c.M.³ inhoud werden volkomen gevuld met kokend heet moutextrakt, dat door flink koken geheel van lucht bevrijd was. Het moutextrakt was bereid door omstreeks 20 gr. meel van eestmout met 80 gr. water op te weeken, één uur bij 63° C. te versuikeren, te koken en te filtreren. Enkele fleschjes werden aangezuurd met fosforzuur tot 5 cM³ N per 100 cM³ extrakt, andere tot 12 cM³ en weder andere werden niet aangezuurd. Het aanzuren geschiedde omdat de ondervinding met grond-sarcine

¹⁾ Verslag van de zitting der Akademie van 25 Februari 1905, verschenen 8 Maart 1905. Archives Néerlandaises Sér. 2, T. 9. pag. 199, 1905.

²⁾ Ontdekt door GOODSIR, History of a case in which a fluid, periodically ejected from the stomach, contained vegetable organisms of an undescribed form. With a chemical analysis of the fluid by Wilson. Edinburgh Medical and Surgical Journal T, 57, pag. 430, 1842. Wilson zegt in het maagsap azijnzuur gevonden te hebben, maar spreekt niet van melkzuur, dat feitelijk door de sarcine wordt voortgebracht.

³⁾ De Sarcine (*Sarcina ventriculi* GOODSIR), Leeuwarden 1865.

geleerd had, dat deze het hooge zuur veel beter verdraagt dan alle andere in den grond voorkomende mikroben, zoodat hetzelfde verwacht kon worden ten aanzien van de maagsarcine, indien deze inderdaad identiek met de grondsarcine is. Het verdere verloop der proeven bewees, dat ook deze verwachting juist was.

De voor de proef bestemde fleschjes werden in gesloten toestand afgekoeld tot omstreeks 40° C. en eerst geopend op het oogenblik, dat het infectiemateriaal beschikbaar was. Dit laatste bestond uit den maaginhoud van een lijder aan stenosis oesophagi. Omstreeks 5 cM^3 daarvan werden in elk fleschje gebracht ¹⁾ en wel zoo spoedig na het uitpompen uit de maag, dat dit materiaal nog geen tijd had gehad zich met de buitenlucht te verzadigen en ook niet belangrijk beneden lichaamstemperatuur had kunnen afkoelen. Mikroskopisch waren er zeer vele sarcinen in te herkennen, terwijl andere mikroben nauwelijks te vinden waren; wel schenen er vele gisteellen in voor te komen, maar deze bleken dood te zijn en waren blijkbaar van de gist afkomstig, gebruikt voor de bereiding van het brood, door den patiënt als broodpap gegeten. Ook overblijfselen van aardappelen en rijst waren in den maaginhoud herkenbaar.

Onmiddellijk na het uitpompen was ook met dezen maaginhoud een fleschje geheel gevuld, dat daarna met een kurk was afgesloten en in een thermostaat bij 37° werd geplaatst. Het resultaat daarvan was, dat zich in dit fleschje reeds na enkele minuten een zoo krachtige gisting voordeed, dat de kurk er afgeworpen werd. Daar de gisting bij mikroskopisch onderzoek bleek een reine sarcinegisting te zijn was door deze eenvoudige proef voor het eerst aangetoond, dat de maagsarcine niet anders dan een anaërobe gistingssarcine kon wezen.

De zuurtiter van het heldere filtraat van den maaginhoud, die hierbij was gebruikt, bedroeg volgens de mededeeling van den heer VAN LEERSUM $3.8 \text{ cM}^3 \text{ N}$ per 100 cM^3 vloeistof, met phenolphthaleïne als indicator, terwijl vrij zoutzuur niet aanwezig scheen, zoodat het zuur hoofdzakelijk het door de sarcine zelve afgescheiden melkzuur moet zijn geweest, hetgeen ook zeer wel mogelijk is, daar de grondsarcine bij laboratoriumsproeven gemakkelijk in meelpappen groeit, die eenigszins versuikerd zijn en daarin omstreeks $4 \text{ cM}^3 \text{ N}$ melkzuur per 100 cM^3 vormen kan. De opvallende reinheid der sarcinegisting in dezen gemengden maaginhoud, waarin verrassender wijze, noch melkzuur fermenten noch alcoholgisten waren te vinden en die wel door de aanwezigheid van vrij maar sterk verdund zout-

¹⁾ Bij het inbrengen in de fleschjes bleef het infectiemateriaal grootendeels op de warme kultuurvloeistof drijven, tengevolge van de sterke ontwikkeling van de gistingsgassen door de maagsarcine gevormd.

zuur verklaarbaar zou zijn geweest, omdat dit zuur veel beter door de sarcine dan door de overige microben wordt verdragen, is mitsdien nog niet geheel opgehelderd.

De op de beschreven wijze voorbereide fleschjes kwamen te Delft aan op een temperatuur van omstreeks 25° C. en werden daar onmiddellijk in een thermostaat van 35° C. geplaatst. Het gevolg was, dat in alle zonder uitzondering, dus zoowel bij afwezigheid van zuurals in de fleschjes met 5 en die met 12 cM^3 N fosforzuur, reeds na eenige uren een duidelijke gisting merkbaar was. Deze is langzamerhand krachtiger geworden en na omstreeks 18 uren had zich de sarcine zoo zeer vermeerderd, dat op den bodem der fleschjes zich een dikke laag van deze zoo karakteristische mikrobe had afgezet, waarvan een rijke stroom gistingsgassen, bestaande uit koolzuur en waterstof, naar boven steeg. Deze toestand bleef omstreeks 24 uren bestaan eer de gisting belangrijk verminderde.

Mijn vermoeden, dat de vroegere proeven alleen mislukt waren omdat de maaginhoud bij het overzenden van Leiden naar Delft te sterk afgekoeld en geaëreerd was, is dus gebleken juist te zijn en er kan nu geen twijfel meer bestaan, dat de grondsarcine der waterstofgistingen identiek met de maagsarcine is.

Het is niet onbelangrijk nog op te merken, dat bij deze proef de zuurtoevoeging aan de kultuurvloestof onnoodig was gebleken, daar de sarcinegisting ook in de fleschjes zonder zuur was doorgegaan. In deze fleschjes werden echter reeds na 18 uren kultuurtijd vele melkzuurstreptokokken en lactobacillen zichtbaar, hetgeen in de met fosforzuur bedeelde fleschjes volstrekt niet het geval was. Alleen de laatste konden dus voor de voortzetting der gisting door overenten in een nieuwe hoeveelheid kultuurvloestof gebruikt worden, zonder gevaar, dat de sarcine door de melkzuurfermenten overwoekerd en verdrongen zou worden. Evenals bij de aardsarcine is het dan ook hier gelukt door een paar maal overenten van de beschreven kultuurvloestof, aangezuurd met fosforzuur tot 13 cM^3 N per 100 cM^3 , binnen een tijdsverloop van drie dagen, tot een zoo volkomene zuivere kultuur der sarcine te geraken, dat het overenten daarvan in het moutextrakt zonder zuur mogelijk werd, zonder dat eenige andere mikrobe daarbij tot ontwikkeling kwam.

De aldus verkregen gisting is zeer krachtig geworden en is niet te onderscheiden van de beste gistingen met grondsarcine.

Nu de identiteit van maagsarcine en grondsarcine is vastgesteld, blijft nog het verdere vraagstuk bestaan, hoe de grondsarcine zich voedt en vermeerdert bij de lage temperatuur en onder de overige levensvoorwaarden van den aardbodem, welke blijkbaar zoo geheel ver-

schillend moeten wezen, zoowel van die in den maaginhoud als in de beschreven, aan koolhydraten en allerlei stikstofverbindingen zoo rijke kultuurvloeistoffen en bij temperaturen gelegen tusschen 35° en 40° C.

Het antwoord op deze vraag hoop ik bij een latere gelegenheid te geven. Dat de sarcine slechts accidenteel in den grond en in de modder van de slooten zou voorkomen en zich daarin niet zou vermeerderen, kan bij de zeer groote algemeenheid ervan niet worden aangenomen; bij het laboratorium te Delft kon de sarcine bijvoorbeeld gemakkelijk tot op 70 c.M. diep in alle aardlagen worden aangetoond.

Waarom de sarcine in de zieke maag tot ontwikkeling kan komen, hangt, naar het mij toeschijnt samen met de gemakkelijheid, waarmede dit organisme in meelpap groeit ondersteund door de afwezigheid van veel zoutzuur, dat onder normale omstandigheden alle mikrobengroei belemmert. Men behoeft slechts wat grof gemalen roggemeel met water te mengen en in een thermostaat bij 30° à 35° C. te plaatsen om er zeker van te zijn na 24 uur in de massa, die dan in een sterke coli-aërogenes gisting verkeert, met het mikroskoop ook vele maagsarcinepakketten in een toestand van krachtige vermeerdering te vinden en blijkbaar afkomstig van het niet gesteriliseerde graan, waarop zij in het stof voorkomen, dat daarop bij het oogsten gestoven is. De sarcinen toch kunnen het drogen zeer goed doorstaan.

Ofschoon de maagsarcine op zichzelf niet schadelijk, hoogstens hinderlijk door de waterstofvorming zijn kan,¹⁾ verdient het toch opgemerkt te worden, dat de ontwikkeling daarvan bij afwezigheid van koolhydraten onmogelijk is, zoodat het verdwijnen uit de maag spoedig zou moeten volgen op een vleeschdieet, indien dit laatste niet om andere redenen zou behoeven vermeden te worden. Ook een melkdieet zou dit gevolg moeten hebben, zoowel indien de melk verzuurd was door melkzuurfermenten als zonder voorafgaande zuring. Zoo gelukte het bij laboratoriumsproeven volstrekt niet sarcinen in karnemelk te kultiveeren en zelfs zoete melk, aangezuurd met verschillende hoeveelheden melkzuur of fosforzuur, gaf slechts bij enkele proeven een zwakken sarcinengroei. Bij afwezigheid van zuur bleek in ruwe melk de groei der sarcinen geheel onmogelijk, wegens de verdringing van dit organisme door andere mikroben.

1) Het periodieke braken, in sommige gevallen van maagsarcine waargenomen, kan samenhangen met de ophooping van waterstof in de maag.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer L. E. J. BROUWER: „*Over de structuur der perfecte puntverzamelingen*” (tweede mededeeling¹⁾).

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

§ 1.

Een verdere uitbreiding van het Cantorsche hoofdtheorema.

Het bewijs, in § 2 der eerste mededeeling gegeven voor het Cantorsche hoofdtheorema en zijn Schoenfliesse uitbreiding, voert onveranderd tot de volgende eigenschap:

STELLING 1. *Een welgeordende puntverzameling in R_n , waarvan elk punt een eindigen afstand bezit van de door alle volgende punten gevormde verzameling, is aftelbaar.*

Hieruit wordt in den volgenden vorm een veralgemeening van het Cantorsche hoofdtheorema verkregen, waarschijnlijk de ruimste, waarvoor het vatbaar is:

Wanneer een afgesloten puntverzameling wordt vervangen door een er in bevatte afgesloten deelverzameling, zullen we zeggen, dat de eerste verzameling wordt *afgebrokkeld*.

Een fundamenteaalreeks van afgesloten puntverzamelingen zullen we *afbrokkelend* noemen, als elke volgende een deel der voorafgaande is. Al deze puntverzamelingen bezitten een afgesloten grootste gemeene deelverzameling, die we de *grensverzameling* der afbrokkelende fundamenteaalreeks noemen.

Onder een *induceerbare eigenschap van afgesloten puntverzamelingen* zullen we verstaan een eigenschap, die, wanneer alle elementen eener afbrokkelende fundamenteaalreeks haar bezitten, eveneens voor de grensverzameling dier reeks geldt.

Uit stelling 1 volgt dan:

STELLING 2. *Zij μ een afgesloten puntverzameling in R_n , die de induceerbare eigenschap α bezit, dan kan ze door een aftelbaar aantal afbrokkelingen van een bepaalde soort β worden teruggebracht tot een afgesloten puntverzameling μ_1 , die de eigenschap α eveneens bezit, doch haar door elke verdere afbrokking van de soort β verliest.*

Deze stelling is voor allerlei specialiseeringen vatbaar.

Kiezen we b.v. als eigenschap α de afgeslotenheid zonder meer, en als afbrokking van de soort β het afsplitsen van een geïsoleerd punt resp. geïsoleerd stuk, dan komt het Cantorsche hoofdtheorema resp. zijn Schoenfliesse uitbreiding voor den dag.

Tot een andere specialiseering komen we op de volgende wijze:

¹⁾ Voor de eerste mededeeling zie deze Verslagen, dl. XVIII, p. 833.

Een continuum C heet naar ZORETTI¹⁾ *irreductibel tusschen P en Q* , als het puntenpaar (P, Q) wel tot C , maar tot geen enkel deelcontinuum van C behoort.

Hieromtrent bestaat de volgende, door JANISZEWSKI²⁾ en MAZURKIEWICZ³⁾ bewezen stelling:

Zij C een willekeurig continuum, P en Q twee van zijn punten, dan bevat C een tusschen P en Q irreductibel deelcontinuum.

Deze eigenschap nu komt eveneens als specialisering van stelling 2 voor den dag, door n.l. daarin als eigenschap α te lezen de eigenschap van P en Q te bevatten en tevens continu te zijn, en als afbrokkeling van de soort β de meest algemeene afbrokkeling.

§ 2.

De structuur der afgesloten stukverzamelingen.

In § 3 der eerste mededeeling is bewezen, dat alle perfecte stukverzamelingen hetzelfde geometrische ordetype bezitten, n.l. het gemeenschappelijke ordetype der lineaire, nergens dichte, perfecte puntverzamelingen. Een analoge stelling geldt voor de afgesloten stukverzamelingen.

In § 3 der eerste mededeeling hebben we n.l. de stukverzameling μ , die daar als perfect werd aangenomen, gesplitst in twee zoodanige afgesloten verzamelingen μ_0 en μ_2 , dat $\delta(\mu_h) \leq \delta(\mu)$ en $\alpha(\mu_0, \mu_2) \geq \delta(\mu)$; vervolgens elke μ_h in twee zoodanige afgesloten verzamelingen μ_{h0} en μ_{h2} , dat $\delta(\mu_{hk}) \leq \delta(\mu_h)$ en $\alpha(\mu_{h0}, \mu_{h2}) > \delta(\mu_h)$; enzoovort. Voor onbepaalde aangroeiing der indexrijen I convergeerden dan de μ_f 's gelijkmatig tot de stukken van μ , en we konden een één-één-duidige continue correspondentie tot stand brengen tusschen de stukken van μ en een nergens dichte perfecte verzameling van reële getallen tusschen 0 en 1, waarbij voor elk dier getallen de cijferrij achter de komma in het drietallig stelsel overeenkwam met de indexrij van het corresponderende stuk van μ .

Is echter μ een afgesloten, niet perfecte stukverzameling, dan kan de splitsing van een willekeurige μ_F in μ_{F0} en μ_{F2} op dezelfde wijze worden uitgevoerd, met de eenige uitzondering, dat een μ_F , die uit een enkel stuk bestaat, tevens optreedt als μ_{f0} , terwijl μ_f ² vervalft. Ook dan convergeeren voor onbepaalde aangroeiing der indexrijen F de μ_f 's gelijkmatig tot de stukken van μ , en we kunnen

1) Annales de l'École Normale, 1909, p. 485.

2) Comptes Rendus, t. 151, p. 198.

ibid., p. 296.

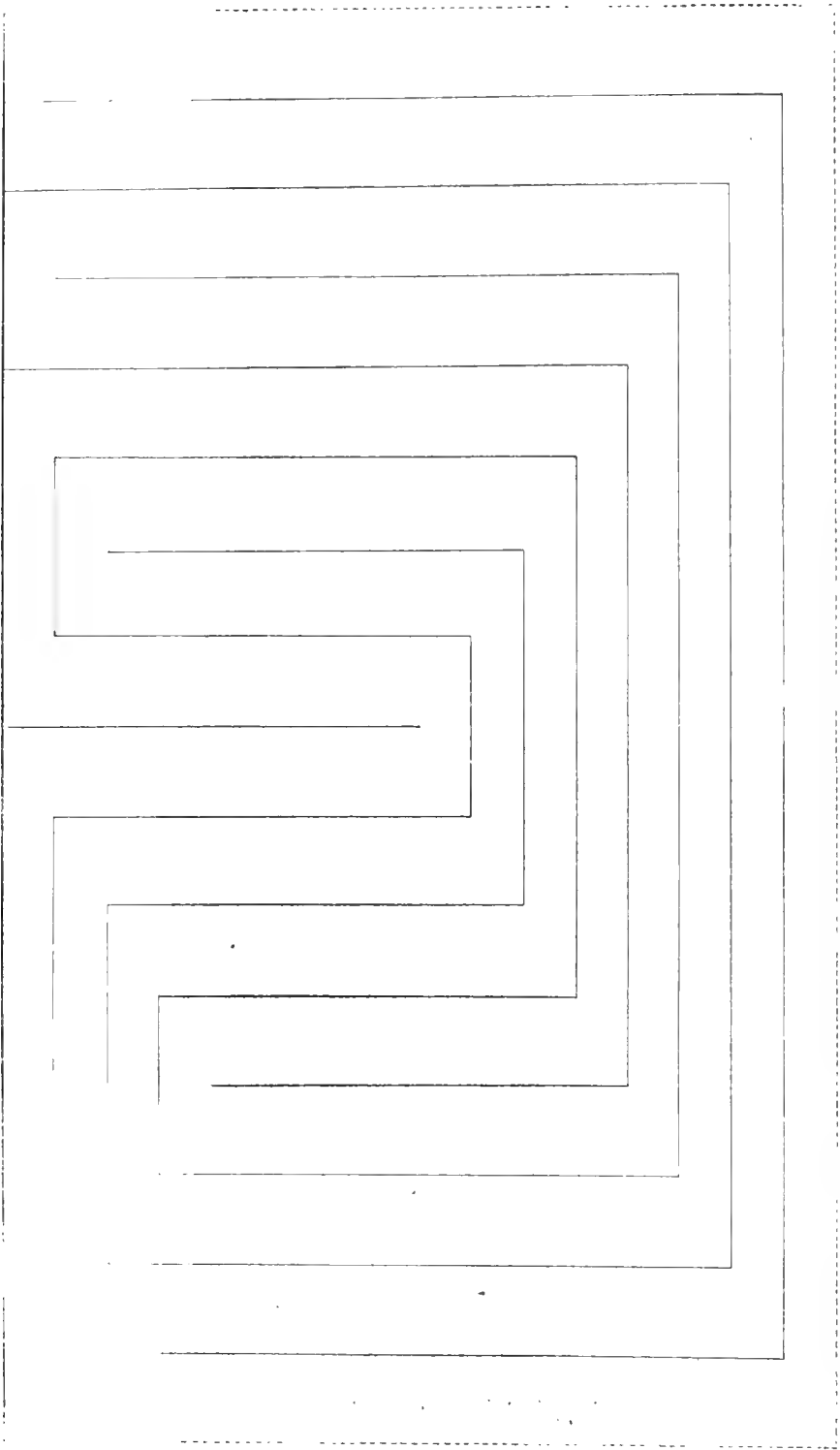


Fig. 1.

een één-éénduidige continue correspondentie tot stand brengen tusschen de stukken van μ en een nergens dichte afgesloten verzameling van reële getallen tusschen 0 en 1, waarbij voor elk dier getallen de cijferrij achter de komma in het drietallig stelsel overeenkomt met de indexrij van het corresponderende stuk van μ .

Zoodat we hebben bewezen:

STELING 3. *Elke afgesloten stukverzameling in R_n bezit het geometrische ordetype eener lineaire, nergens dichte, afgesloten puntverzameling.*

§ 3.

De verdeling van het vlak in meer dan twee gebieden met gemeenschappelijke grens.

Bij een vroegere gelegenheid¹⁾ heb ik een verdeling van het vlak in drie gebieden met gemeenschappelijke grens geconstrueerd, en tevens medegedeeld, dat door een passende wijziging der daar gevolgde methode een verdeling in een willekeurig eindig aantal, of zelfs in oneindig veel gebieden met gemeenschappelijke grens kan tot stand worden gebracht. Die gewijzigde methode zal ik thans uiteenzetten.

Ze sluit aan bij de l. c. p. 423 en 424 van Bd. 68 der Math. Ann. geconstrueerde figuur 2 (Tafel I), die we in het volgende de *hoofdfiguur* zullen noemen.

We beginnen met de hoofdfiguur te vereenvoudigen, door den rooden band weg te laten, en de dikte der zwarte banden tot nul te reduceeren. Deze gecontrabeerde zwarte banden zullen we in het volgende „*steundraden*” noemen, en we trekken elke daarvan door het midden van den door alle voorgaande steundraden bepaalden witten band, zooals hier in figuur 1 voor de eerste vier steundraden is uitgevoerd.

Den rechthoekigen omtrek van figuur 1 zullen we aanduiden door k , den omtrek met zijn binnengebied tezamen door K . Den omtrek met de steundraden tezamen zullen we het *skelet* der figuur noemen. Twee willekeurige punten van het skelet bezitten de eigenschap, dat ze door een perfekte samenhangende *deelverzameling* van het skelet kunnen worden verbonden.

We denken nu in figuur 1 een horizontale doorsnede l aangebracht, die alle verticale lijnsegmenten der steundraden snijdt, bepalen de punten van l door hun *abscis*, d. w. z. hun afstand van het linker eindpunt van l , en kiezen de lengte van l als eenheid van lengte.

Dan is de abscis van het snijpunt van l met den eersten steundraad

¹⁾ Vgl. „*Zur Analysis Situs*”, Mathem. Annalen, Bd. 68, p. 422—434.

$\frac{1}{2}$, zijn de abscissen der snijpunten van l met den tweeden steundraad $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$, met den derden steendraad $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ en $\frac{7}{8}$, enzovoort.

De verzameling der snijpunten, die het systeem der steundraden op l bepaalt, bezit dus als abscissen de verzameling der draalbreuken tusschen 0 en 1.

Twee punten van F' zullen we *direct coherent* noemen, als ze kunnen worden verbonden door een perfecte samenhangende deelverzameling van F' , die geen punt met het skelet gemeen heeft. Twee punten, die met eenzelfde punt direct coherent zijn, zijn ook onderling direct coherent. De verzameling der punten, die met een gegeven punt direct coherent zijn, noemen we een *coherentiedraad*.

De abscissen der snijpunten van l met een coherentiedraad vormen een getallenverzameling, die we een *direct coherente getallenverzameling* noemen. Twee getallen behooren dan en slechts dan tot eenzelfde direct coherente getallenverzameling, wanneer hetzij hun som hetzij hun verschil een duale breuk is.

De verzameling der coherentiedraden bezit de machtigheid van het continuüm.

Van deze figuur 1 kunnen we nu een veralgemeening tot stand brengen, door telkens in den door de eerste n steundraden bepaalden witten band den $(n+1)^{\text{den}}$ steendraad niet juist door het midden te leggen, maar in elk deelkanaal op willekeurigen afstand van de randen, daarbij echter zorg blijvende dragen, dat niet alleen de nieuwe steendraad in alle deelkanalen van dien witten band indringt, maar ook al zijn vertikale segmenten de lijn l snijden.

In deze algemeenere figuur kunnen nu verschillende segmenten van coherentiedraden tot banden zijn uitgedijd, zoodat we hier liever van *coherentiebanen*, dan van coherentiedraden spreken moeten.

En als we elk punt van F' , dat zich met het skelet laat verbinden door een buiten zijn eindpunt het skelet niet ontmoetend lijnsegment, aan het skelet toevoegen, komt deze bewerking hierop neer, dat ook in het skelet, evenals in de coherentiedraden, zekere segmenten tot banden uitdijen. In dit nieuwe skelet moeten we dus ook liever van *steunbanen*, dan van steundraden spreken.

In de algemeenere figuur blijven we aan de punten en intervallen, waarin l door de n^{de} steunbaan gesneden wordt, als „coördinaten” toekennen dezelfde getallen $\frac{2k+1}{2^n}$, die in figuur 1 voor de overeenkomstige snijpunten van l met den n^{den} steendraad als abscissen

optraden, en elk punt of interval, dat op l door een coherentiebaan wordt uitgesneden, krijgt als coördinaat het getal behoorend bij den Schnitt, dien het in de bij de steunbanen behoorende coördinaten bepaalt. De coördinaat is dus langs l een nergens dalende continue functie der abscis, en heeft evenals deze de aanvangswaarde 0, en de eindwaarde 1.

We abstraheeren nu een oogenblik van de figuur, en kiezen een willekeurig eindig of een aftelbaar oneindig aantal direct coherente getallenverzamelingen uit. De daartoe behoorende getallen noemen we *speciale getallen*, en bepalen een coördinaatfunctie van de zoeven beschreven soort, die elke speciale getalwaarde voor een interval van abscissen, doch elke andere getalwaarde (0 en 1 inclus) slechts voor een enkele abscis bezit.

Hierna stellen we ons ten doel, de veralgemeende figuur 1 op zoodanige wijze te construeeren, dat de bij de speciale direct coherente getallenverzamelingen behoorende coherentiebanen overal een eindige dikte hebben, terwijl de dikte der segmenten van het skelet en van de overige coherentiebanen overal nul is. Uitgaande van de reeds bepaalde coördinaatfunctie, die we op l aangebracht denken, gelukt dit op de volgende wijze:

Den eersten steundraad construeeren we door het punt van l met de coördinaat $\frac{1}{2}$, en we verbinden elke twee punten resp. intervallen van l , wier coördinaten tot gemiddelde $\frac{1}{2}$ hebben, om den eersten steundraad heen en binnen k door elkaar niet ontmoetende, tweemaal rechthoekig omgebogen draden resp. banden, daarbij zorg dragende, dat de tot die draden en banden behoorende horizontale segmenten op de uit het eindpunt van den eersten steundraad op de horizontale bovengrens van B' neergelaten loodlijn een overal dichte verzameling van punten en intervallen uitsnijden.

Daarna construeeren we den tweeden steundraad zoodanig door de punten van l met de coördinaten $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$, dat hij de reeds geconstrueerde rechthoekig omgebogen draden en banden niet kruist, en verbinden we elke twee punten resp. intervallen van l , wier coördinaten tot gemiddelde $\frac{3}{4}$ hebben, en beide $> \frac{1}{2}$ zijn, om den tweeden steundraad heen en binnen k door elkaar niet ontmoetende, tweemaal rechthoekig omgebogen draden resp. banden, daarbij zorg dragende, dat de tot deze draden en banden behoorende horizontale segmenten op de uit het eindpunt van den tweeden steundraad op de grondlijn

van l' neergelaten loodlijn een overal dichte verzameling van punten en intervallen uitsnijden.

Vervolgens construeren we den derden steundraad zoodanig door de punten van l met de coördinaten $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ en $\frac{7}{8}$, dat hij de reeds geconstrueerde rechthoekig omgebogen draden en banden niet kruist, en verbinden we elke twee punten resp. intervallen van l , wier coördinaten tot gemiddelde $\frac{3}{8}$ hebben, en beide tusschen $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}$ liggen, om den derden steundraad heen en binnen k door elkaar niet ontmoetende, tweemaal rechthoekig omgebogen draden resp. banden, daarbij zorg dragende, dat de tot deze draden en banden behoorende horizontale segmenten op de uit het eindpunt van den derden steundraad op de grondlijn van l' neergelaten loodlijn een overal dichte verzameling van punten en intervallen uitsnijden.

Op deze wijze voortgaande, bereiken we, dat de „speciale” coherentiebanen overal een eindige dikte, en de overige coherentiebanen en het skelet overal een dikte nul bezitten. De binnengebieden der speciale coherentiebanen liggen tezamen overal dicht in l' , en *deze binnengebieden bezitten alle dezelfde grens.*

Kiezen we de coördinaatfunctie op l zoodanig, dat ze niet alleen elke speciale getalwaarde, maar ook de waarde van een willekeurige niet met 0 of 1 samenvallende duaalbreuk voor een interval van abscissen bezit, dan kan de zoeven beschreven constructie der veralgemeende figuur I ongewijzigd worden herhaald, met het eenige onderscheid, dat in plaats van steundraden steubanden optreden. Deze bepalen tezamen met het complementaire gebied van l' een gebied G , dat dezelfde grens g bezit, als de binnengebieden der coherentiebanden.

Het geheele vlak is dus door dit continuüm g verdeeld in gebieden met een gemeenschappelijke grens; het aantal dezer gebieden kan al naar de keuze der speciale direct coherente getallenverzamelingen zoowel eindig als oneindig zijn.

Noemen we twee punten van g , die kunnen worden verbonden door een *deel*continuüm van g , *direct coherent in g* , en noemen we de verzameling der met een gegeven punt in g direct coherente punten een *nerf* van g , dan levert het skelet der figuur en evenzoo elke coherentiedraad *één* *nerf* van g , elke coherentieband *twee* *nerven* van g .

Nemen we slechts *één* speciale direct coherente getallenverzameling aan, dan levert de laatst uitgevoerde constructie een gesloten kromme, die zich wel in twee oneigenlijke, maar niet in twee eigenlijke

kurvenbogen laat verdeelen, onder welke categorie weer valt de hoofdfiguur, waarvan we zijn uitgegaan.

§ 4.

De onmogelijkheid van een lineaire ordening der punten van een irreductibel continuüm.

Door ZORETTI is onlangs een methode uiteengezet, om de punten van een irreductibel continuüm op analoge wijze als die van een lijnsegment lineair te ordenen ¹⁾.

Deze methode kan echter op verschillende in het boven geciteerde artikel „*Zur Analysis Situs*” geconstrueerde continua niet worden toegepast.

Na hierop te zijn gewezen, heeft ZORETTI een methode van meer beperkte draagwijdte gegrond op de volgende stelling ²⁾:

„Gegeven een irreductibel continuüm C en een punt c van C , dan kan men op één bepaalde manier C verdeelen in drie puntverzamelingen C_1 , C_2 en Γ , die de volgende eigenschappen bezitten: C_1 en C_2 zijn samenhangend en hebben alleen het punt c gemeen; Γ wordt gevormd door de gemeenschappelijke grenspunten van C_1 en C_2 . De beide puntverzamelingen $C_1 + \Gamma$ en $C_2 + \Gamma$ zijn irreductibele continua.”

Uit deze stelling zou volgen, dat men, zoo niet alle, dan toch een belangrijk deel der punten van C lineair kan ordenen, en dat men C op analoge wijze als een lijnsegment kan verbrokkelen in een onbepaald groot aantal lineair geordende „deelbogen”, twee willekeurige waarvan dan en slechts dan met elkaar samenhangen, als ze in de lineaire rangorde onmiddellijk op elkaar volgen.

Intusschen kan ook deze stelling niet gehandhaafd blijven, als we haar aan onze hoofdfiguur toetsen.

Kiezen we n.l. de daarin voorgestelde gesloten kromme als irreductibel continuüm C , dan wordt òf $C_1 + \Gamma$ òf $C_2 + \Gamma$ identiek met C , en reduceert òf C_2 òf C_1 zich tot het enkele punt c , zoodat de verdeling van C illusoor wordt.

Dat alle pogingen, om door successievelijke verbrokkeling van zulk een continuüm zijn punten lineair te ordenen, moeten mislukken, volgt hieruit, dat de verbrokkeling slechts kan worden uitgevoerd binnen de grenzen van een enkel systeem van direct coherente punten, dus de lineaire ordening in elk geval tot punten van een enkele *nerf* onderling beperkt moet blijven.

1) Annales de l'École Normale, 1909, p. 485—497.

2) Comptes Rendus, t. 151, p. 202.

En zelfs hiervan zou men bij het algemeenste irreductibele continuüm niet zeker zijn. Immers in een systeem van binnen C direct coherente punten kan weer bevat zijn een irreductibel continuüm C' , dat in een verzameling van de machtigheid van het continuüm van binnen C direct coherente puntsystemen uiteenvalt. Enzoo voort.

§ 5.

Een veralgemeening der stelling van JORDAN.

De stelling van JORDAN luidt, dat het één-éénduidige continue beeld van een cirkel een gesloten kromme is, d. w. z. het vlak verdeelt in twee gebieden, waarvan het de gemeenschappelijke grens is.

De voor de hand liggende uitbreiding dezer stelling, dat het één-éénduidige continue beeld eener gesloten kromme weer een gesloten kromme is, is nog niet bewezen. Echter laat zich voor een bijzonder soort van gesloten krommen een gedeeltelijk resultaat bereiken, dat we in het volgende uiteenzetten.

Zij C een willekeurig gegeven gesloten kromme, en stellen we het cyclische ordetype der uit het binnengebied van C bereikbare punten voor door $c\eta_i$. Een in $c\eta_i$ willekeurig gegeven Schnitt s bepaalt twee „Schnittcontinua” σ_l en σ_r , waartoe $c\eta_i$ links resp. rechts van s convergeert. De aan σ_l en σ_r gemeenschappelijke punten vormen een afgesloten puntverzameling σ , die we „de bij den Schnitt s behoorende aanhechting” zullen noemen.

HULPSTELLING. *Binnen C kan een buiten zijn eindendvoudige kurvenboog worden geconstrueerd, waarvan het eene einde zich tot een enkel punt binnen C reduceert, en het andere einde in de aanhechting σ berast is.*

BEWIJS. Zij M een in het binnengebied van C willekeurig aangenomen punt, en a_1, a_2, a_3, \dots een fundamenteaalreeks van onbepaald afnemende, in het binnengebied van C verlopende enkelvoudige kurvenboogjes, wier eindpunten op $c\eta_i$ ter weerszijden van den Schnitt s liggen. Deze reeks bevat een zoodanige tot een enkel punt P van σ convergeerende deelreeks b_1, b_2, b_3, \dots , dat elke b_n door $C + b_{n-1}$ van M wordt gescheiden. We kunnen dan M en P door een zoodanige enkelvoudige kurvenboog z verbinden, die een oneindig aantal der b_x in de volgorde hunner indices elk éénmaal snijdt, en daarbij van hun naar M gekeerde zijde op hun naar s gekeerde zijde overgaat. Stellen we de reeks der op deze wijze gesneden b_x voor door d_1, d_2, d_3, \dots , en zij z_n de tusschen d_n en d_{n+1} besloten deelboog van z , D_n het kruisingspunt van z met d_n , A_n resp. B_n het linker resp. rechter eindpunt van d_n , φ_n resp. ψ_n de

door de bij A_n en A_{n+1} resp. B_n en B_{n+1} behoorende Schnitte in C bepaalde kurvenboog, q_n resp. τ_n het door den enkelvoudigen kurvenboog $A_n D_n D_{n+1} A_{n+1}$ resp. $B_n D_n D_{n+1} B_{n+1}$ afgesneden deel van het binnengebied van C , u_n resp. v_n de in τ_n resp. q_n liggende deelverzameling van \mathcal{G}_n resp. \mathcal{H}_n . We kunnen dan D_n en D_{n+1} verbinden door een enkelvoudigen kurvenboog t_n , die geheel in het tusschen d_n en d_{n+1} besloten deel van het binnengebied van C verloopt, en zich niet verder dan een zekeren voor onbepaald aangroeiende n onbepaald afnemenden maximumafstand ε_n van $z_n + u_n + v_n$ verwijderd. Deze bogen t_n vormen tezamen een enkelvoudigen kurvenboog, die aan de gestelde eischen voldoet.

STELLING 4. *Als de gesloten kromme C door de in \mathcal{C}_i aangebrachte Schnitte s_1 en s_2 in twee eigenlijke (d. i. niet met C identieke) kurvenbogen C_1 en C_2 verdeeld wordt, vormen de aan C_1 en C_2 gemeenschappelijke punten een niet samenhangende puntverzameling C_{12} .*

BEWIJS. Zij σ_1 resp. σ_2 de bij s_1 resp. s_2 behoorende aanhechting, dan kunnen we volgens de zooeven bewezen hulpstelling uit een in het binnengebied van C willekeurig aangenomen punt M twee in het binnengebied van C verloopende en elkaar buiten hun einden niet ontmoetende enkelvoudige kurvenbogen trekken naar in σ_1 resp. σ_2 bevatte einden e_1 en e_2 . Deze kurvenbogen stellen we voor door r_1 en r_2 (zie de schematische fig. 2), en het grootste deelecontinuum

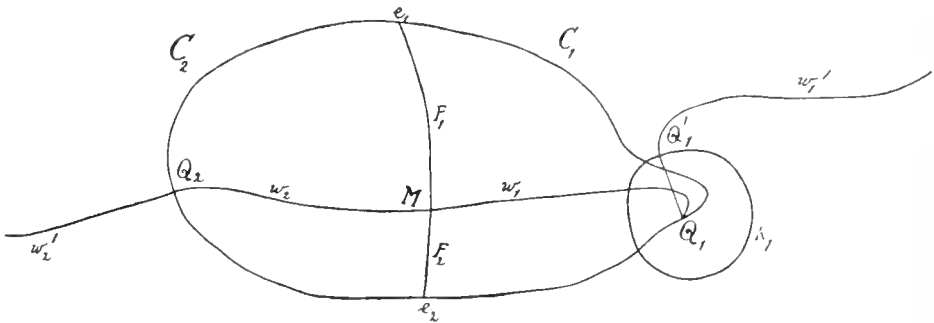


Fig. 2.

van C_{12} , dat e_1 resp. e_2 bevat, door p_1 resp. p_2 . Zij Q_1 resp. Q_2 een tot C_1 , maar niet tot C_2 , resp. een tot C_2 , maar niet tot C_1 behoorend punt van \mathcal{C}_i . We kunnen dan uit M naar Q_1 en Q_2 in het binnengebied van C verloopende, en nòch elkaar nòch r_1 of r_2 buiten M ontmoetende wegen w_1 en w_2 construeeren. Deze wegen worden in het binnengebied van C door r_1 en r_2 gescheiden.

Zij z_1 een om Q_1 als middelpunt beschreven eirkeltje, dat met zijn binnengebied tezamen $C_2 + r_1 + r_2$ niet ontmoet, en w_1' een geheel zoowel in het buitengebied van C als in het buitengebied van z_1

verloopende weg, die het oneindige met een punt Q_1 van α_1 verbindt. Dan vormt w'_1 tezamen met gedeelten van w_1 en van den straal $Q_1Q'_1$ van α_1 een weg l_1 , die M met het oneindige verbindt, en buiten M de verzameling $C_2 + r_1 + r_2$ niet ontmoet.

Op dezelfde wijze kunnen we een weg l_2 construeeren, die M met het oneindige verbindt, voor een zeker begingedeelte langs w_2 valt, en buiten M de verzameling $C_1 + r_1 + r_2$ niet ontmoet.

Omdat r_1 en r_2 in de omgeving van M door w_1 en w_2 worden gescheiden, worden e_1 en e_2 in het volledige vlak, hetzij l_1 en l_2 elkaar buiten M ontmoeten of niet, door $l_1 + l_2$ gescheiden.

En daar $l_1 + l_2$ geen punt van C_{12} bevat, worden ook p_1 en p_2 in het volledige vlak door $l_1 + l_2$ gescheiden. Derhalve kunnen p_1 en p_2 niet identiek zijn, en is C_{12} geen continuüm.

Daar verder twee eindige continua, wier gemeenschappelijke punten een niet samenhangende puntverzameling vormen, in het vlak meer dan één gebied bepalen ¹⁾, volgt uit stelling 4 onmiddellijk :

STELLING 5. *Het één-éénduidige, continue beeld eener gesloten kromme, die zich in twee eigenlijke kurbogen laat verdeelen, bepaalt in het vlak meer dan één gebied.*

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. BARRAU. „*De Omwentelingsoppervlakken of Cilinders van den tweeden graad der niet-Euclidische Ruimte*”.

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE)

In de hyperbolische ruimte is elk tweedegraadsoppervlak, waarvan de doorsnijdingskromme met het absolute tweedegraadsoppervlak Ω onttaardt in twee kegelsneden (e.q. nog verder) zoowel *omwentelingsoppervlak* als *cilinder*, met dien verstande, dat de snijlijn van de vlakken der onttaardingsproducten *cilinderas* is, hare wederkeerige poolrechte ten opzichte van Ω echter *omwentelingsas*.

In de eene beschouwingswijze ontstaat het oppervlak als meetkundige plaats eener kegelsnede, wentelend om eene harer assen ²⁾; in de andere als meetkundige plaats eener onveranderlijke kegelsnede, waarvan een der middelpunten eene rechte doorloopt, waarop haar

¹⁾ Dit blijkt, als we de gemeenschappelijke punten der beide continua splitsen in twee op eindigen afstand van elkaar liggende afgesloten puntverzamelingen c_1 en c_2 , uit de bewijsvoering van Mathem. Annalen, Bd. 68, p. 430.

²⁾ Verg. STORY: On non-Euclidean Properties of Conics (*Amer. Journal of Mathematics*, vol V, p. 358). Zijne terminologie wordt hier gevolgd.

vlak steeds loodrecht blijft, terwijl hare punten vlakke banen beschrijven. Het is duidelijk dat, door het aannemen dezer bepaling van cilinder, die als kegel met top op oneindigen afstand, welke er in de Euclidische meetkunde mee samenvalt, wordt losgelaten.

Naarmate nu de omwentelingsas metrisch reëel is (d. w. z. een reëel gedeelte heeft binnen Ω) en dus de cilinderas ideëel, dan wel omgekeerd, zal men het oppervlak meer natuurlijk als omwentelingsoppervlak, dan wel als cilinder, aanmerken (klassen A en B), terwijl eene overgangsklasse C gevormd wordt door de gevallen, waarin beide assen toegevoegde raaklijnen aan Ω zijn.

Is het oppervlak projectief reëel (d. i. metrisch reëel of ideëel), dan zijn de vlakken der ontaardingen (projectief) òf reëel, òf toegevoegd complex, de beide assen zijn dus in elk geval projectief reëel. Elk vlak door de cilinderas snijdt het oppervlak volgens eene kegelsnede in dubbele raking met Ω , dat is volgens een *cirkel* naar hyperbolische maat. Is deze doorsnijding metrisch reëel, dan is ze een (eindige) *cirkel*, een *grenscirkel* of eene *afstandslijn*, naar gelang het oppervlak zich laat rangschikken in klasse A, C of B¹⁾. *Daarmede is dus een eerste stelsel van cirkeldoorsneden voor elk oppervlak gegeven.*

Nu bezit echter een algemeen oppervlak van den tweeden graad vier stelsels van cirkeldoorsneden, namelijk de raakvlakken aan de vier *focalkegels* (kegels uit den bundel, door Ω en het oppervlak bepaald). Van deze vier stelsels worden er in ons geval twee door het genoemde eerste stelsel opgeslorpt, er zijn er dus in het algemeen nog twee te verwachten, die echter ideëel of imaginair kunnen zijn (in welk geval we ze niet zullen beschrijven), of wel zich vereenigen kunnen.

Wij geven nu eene opsomming der mogelijke typen van deze oppervlakken, onder opneming der omwentelingskegels, met weglating echter der zuiver ideëele vormen²⁾.

A. EIGENLIJKE OMWENTELINGS-OPPERVLAKKEN.

Cilinderas reëel (of onbepaald), eerste stelsel van (eindige) cirkels.

I. Beide ontaardingsvlakken metrisch reëel.

1. *Omw.-kegel met reëelen top en reëele as.*
2. *Omw.-kegel met ideëelen top en reëele as.*

¹⁾ Enkele oppervlakken vallen in meer dan eene klasse.

²⁾ Natuurlijk worden reeds bekende vormen op de plaats, waar zij in deze classificatie passen, opnieuw opgenomen.

Heeft een keelcirkel met middelpunt in den top van 1 en een stelsel van *afstandslijnen* in raakvlakken aan kegel 1.

3. *Omw.-hyperboloïde eerste soort.*

Tweebladig, niet rechtlijnig¹⁾ oppervlak, vallend tussehen 1 en de ontaardingsvlakken. Verdeelt de ruimte (binnen Ω) in één buitengebied (in den gewonen projectieven zin) en twee binnengebieden.

4. *Omw.-hyperboloïde tweede soort.*

Tweebladig, niet rechtlijnig oppervlak, vallend buiten de ontaardingsvlakken. Eén binnengebied, twee buitengebieden.

5. *Omw.-hyperboloïde derde soort.*

Eenbladig, rechtlijnig oppervlak, tussehen 1 en 2. Ontstaat door wenteling eener reële rechte om eene reële as. Heeft een keelcirkel en een stelsel van *afstandslijnen* in raakvlakken aan 1.

6. *Omw.-hyperboloïde vierde soort.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak, buiten 2. Heeft een keelcirkel en twee stelsels van *afstandslijnen*, resp. in raakvlakken aan 1 en 2.

II. Een ontaardingsvlak metrisch reëel (D_1), een rakend aan Ω (b.v. in P).

7. *Omw.-grenskegel* (top in Ω , reële as).

8. *Omw.-hyperbolische paraboloid eerste soort.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak, tussehen 7 en D_1 . Rechten uit P (binnen 7) snijden eerst het oppervlak, daarna D_1 .

9. *Omw.-hyperbolische paraboloid tweede soort.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak buiten D_1 . Rechten uit P (binnen 7) snijden eerst D_1 , daarna het oppervlak.

10. *Omw.-hyperbolische paraboloid derde soort.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak, buiten 7. Heeft een stelsel van *afstandslijnen* in raakvlakken aan 7.

III. Een ontaardingsvlak metrisch reëel, een ideëel.

11. *Omw. semi-hyperboloïde.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak.

IV. Beide ontaardingsvlakken ideëel.

12. *Verlengde omw. ellipsoïde.*

Gesloten oppervlak.

V. Ontaardingsvlakken toegevoegd imaginair.

13. *Afgeplatte omw. ellipsoïde.*

Gesloten oppervlak.

VI. Een ontaardingsvlak ideëel, een rakend aan Ω .

¹⁾ d. w. z. zonder reële rechten.

14. *Omv. elliptische paraboloid.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak.

VII. Beide ontaardingsvlakken rakend aan Ω .

15. *Cirkecilinder.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak. De doorsnijlingskromme met Ω is ontaard in een scheeven vierhoek, het oppervlak valt ook onder B . De beide assen zijn gelijkwaardig, de ideële draagt een bundel doorsneden volgens eindige cirkels, de reële volgens afstandslijnen.

VIII. Ontaardingsvlakken ideël, samenvallend

16. *Bol.*

Gesloten oppervlak, ∞^2 stelsels van eindige cirkels.

IX. Ontaardingsvlakken rakend aan Ω , samenvallend.

17. *Grensbol.*

Eenbladig, niet rechtlijnig oppervlak, valt ook onder C . ∞^2 stelsels van cirkels, daaronder ∞^1 stelsels van grenscirkels.

X. Ontaardingsvlakken reël samenvallend.

18. *Afstandsvlak.*

Meetk. plaats van punten op vasten afstand aan weerszijden van een vlak. Tweebladig, niet rechtlijnig oppervlak; een binnengebied, twee buitengebieden. Valt ook onder B en C , ∞^2 stelsels van cirkels, zoowel als van afstandslijnen, ∞^1 stelsels van grenscirkels.

B. EIGENLIJKE CILINDER-OPPERVLAKKEN.

Omwentelingsas ideël (of onbepaald), eerste stelsel van afstandslijnen.

De oppervlakken 15 en 18.

XI. Ontaardingsvlakken reël.

19. *Omwentelingskegel met ideëlen top en ideële as.*

Tweebladig oppervlak, een binnengebied, twee buitengebieden. Cilinder met in twee rechten ontaarde richtkromme.

In den met Ω gevormden bundel is nog een tweede kegel van hetzelfde type.

20. *Hyperbolische cilinder eerste soort.*

Tweebladig, niet rechtlijnig oppervlak. Een binnengebied, twee buitengebieden. Bezit een tweede stelsel van *afstandslijnen* in raakvlakken aan een der kegels 19.

21. *Hyperbolische cilinder tweede soort.*

Tweebladig, rechtlijnig oppervlak. Ontstaat door wenteling eener reële rechte om eene ideële as.

XII. Ontaardingsvlakken toegevoegd imaginair, doch niet rakend aan Ω , (vergel. VII).

22. *Elliptische cilinder.*

Eenbladig, niet rechte lijnig oppervlak. In den bundel met Ω bevindt zich een ideëele kegel, welks raakvlakken het oppervlak snijden volgens een stelsel van eindige *cirkels*. Deze vlakken maken gelijke hoeken (aan weerszijden) met het baanvlak van de groote as der richtellips ¹⁾.

C. OVERGANGSKLASSE.

Assen raken Ω , eerste stelsel van grenscirkels.

De oppervlakken 17 en 18.

XIII. *Ontaardingsvlakken reëel.*

23. *Omw.kegel met ideëelen top, as rakend aan Ω .*

24. *Grensomw. hyperbolische parabolöide eerste soort.*

Eenbladig, rechte lijnig oppervlak, vallend tusschen 23 en de ontaardingsvlakken. Ontstaat door wenteling eener reëele rechte om eene as, rakend aan Ω .

25. *Grensomw. hyperbolische parabolöide tweede soort.*

Eenbladig, niet rechte lijnig oppervlak buiten 23. Heeft een stelsel van *afstandslijnen* in raakvlakken aan 23.

26. *Grensomw.-hyperbolische parabolöide derde soort.*

Tweebladig, niet rechte lijnig oppervlak binnen 23, doch buiten de ontaardingsvlakken. Eén binnengebied, twee buitengebieden.

XIV. *Een ontaardingsvlak reëel, een rakend aan Ω .*

27. *Grensomw.-semicirculaire parabolöide.*

Eenbladig, niet rechte lijnig oppervlak.

XV. *Ontaardingsvlakken toegevoegd imaginair.*

28. *Grensomw.-elliptische parabolöide.*

Eenbladig, niet rechte lijnig oppervlak.

In de elliptische ruimte gelden dezelfde beschouwingen, doch Ω is imaginair, ten gevolge waarvan het aantal gevallen beperkter blijft.

Vooreerst is nu de ruimte eindig — elk oppervlak is dus gesloten.

Voorts zijn de beide assen steeds reëel, zoodat elk omw.-oppervlak even natuurlijk een cilinder is.

Ten slotte bestaat er slechts één reëel type van kegelsnede, waaruit het oppervlak kan ontstaan: de ellips. Ze heeft drie middelpunten (waarvan een in het binnengebied) en drie assen (waarvan een in het buitengebied). Er is ook slechts één cirkeltype.

De oppervlakken bezitten — indien niets nader wordt gezegd — slechts het eerste stelsel van cirkeldoorsneden.

¹⁾ In de Euclidische meetkunde ontaardt dit quadratische stelsel in twee lineaire (bundels van evenwijdige vlakken).

Wij kunnen nu onderscheiden :

I. Ontaardingsvlakken reëel, verschillend.

1. *Afgeplatte omw.-ellipsoïde.*

Niet rechtlijnig. Ontstaat door wenteling der ellips om die haar snijdende as, welke, in het binnengebied gemeten, de kortste is.

II. Ontaardingsvlakken reëel samenvallend.

2. *Bol.*

Niet rechtlijnig. Meetkundige plaats van punten op vasten afstand van gegeven punt, alsook van een gegeven vlak. ∞^2 stelsels cirkeldoorsneden.

III. Ontaardingsvlakken imaginair, niet rakend aan Ω .

3. *Omw.-kegel.*

4. *Verlengde omw.-ellipsoïde.*

Niet rechtlijnig, ontstaat bij wenteling der ellips om de in het binnengebied langste as.

5. *Elliptische cilinder.*

Rechtlijnig oppervlak, ontstaat door wenteling der ellips om de buitenas; evenzoo door wenteling eener rechte om eene andere, waarvan ze geene Cliffordsche parallelle is. De raakvlakken aan den, tot den met Ω gevormden bundel behoorenden, kegel (van type 3) vormen een (quadratisch) tweede stelsel van cirkeldoorsneden.

Het oppervlak heeft eene keel en een aequator, in onderling loodrechte vlakken gelegen.

IV. Ontaardingsvlakken imaginair, rakend aan Ω .

6. *Cirkelcilinder.*

Rechtlijnig oppervlak. Beide assen zijn gelijkwaardig, het oppervlak ontstaat op twee wijzen door wenteling van een cirkel om de buitenas; evenzoo op twee wijzen door wenteling eener rechte om eene as, waarvan ze Cliffordsche parallelle is. Het bezit twee stelsels van cirkels (in vlakkenbundels door beide assen). De cirkels van elk stelsel zijn onderling gelijk; het oppervlak is, op twee wijzen, meetk. plaats der punten met vasten afstand tot eene gegeven rechte (elk der assen). Zijn die twee afstanden gelijk, dus elk $\frac{\pi}{4}$, dan verdeelt het oppervlak de elliptische ruimte in twee congruente deelen ¹⁾.

¹⁾ Evenzoo wordt de elliptische ruimte van oneven dimensietal R_{2n+1} in twee congruente deelen verdeeld door de quadratische R_{2n} welke de punten bevat op vasten afstand $= \frac{\pi}{4}$ van eene gegeven vlakke R_n , zoowel als van hare wederkerige pool R_n ten opzichte van Ω_{2n} .

Scheikunde. — De Heer P. VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan over: „*Additie-verbindingen van m. Dinitrobenzol.*”

De verhoogde belangstelling, die de gekleurde verbindingen van polynitro-lichamen met aromatische aminen ondervinden, geeft mij aanleiding, er de aandacht op te vestigen, dat ook m. dinitrobenzol in staat is, met verschillende aminen fraai gekleurde, gekristalliseerde additieproducten te leveren, zooals ik reeds vele jaren geleden terloops mededeelde ¹⁾.

In het algemeen echter vormen zich deze verbindingen minder gemakkelijk en vele zijn minder bestendig dan die van het s. trinitrobenzol. Daardoor laat het zich waarschijnlijk verklaren, dat NOELTING en SOMMERHOFF ²⁾ er niet in geslaagd zijn, zulke producten af te zonderen. KREMANN ³⁾ heeft het evenwicht tusschen aniline en m. dinitrobenzol bestudeerd en geeft aan, dat er in de literatuur geene opgaven over het bestaan van eene verbinding tusschen deze stoffen voorkomen, ofschoon ik loc. cit. reeds vermeldde, dat ik deze had afgezonderd.

Lost men m. dinitrobenzol bij verwarming in aniline op, dan kleurt de vloeistof zich intensief rood en na bekoeling kristalliseert er eene fraai roode verbinding in groote kristallen uit, die bij 41°—42° (in een capillair buisje) smelten. Volgens KREMANN ligt het smeltpunt bij 40°. De verbinding bestaat uit een gelijk aantal moleculen der componenten. Laat men de kristallen aan de lucht liggen, dan verliezen zij het aniline.

Analyse: Gev.: 64.1⁰/₀ C₆H₄(NO₂)₂. Ber.: 64.3⁰/₀.

Dimethyl p. toluidine geeft met m. dinitrobenzol verwarmd eene intensief gekleurde oplossing, waaruit bij bekoeling eene bij 43° smeltende, bijna zwart gekleurde verbinding kristalliseert, die in een open glas na eenige dagen geheel ontleed is.

Analyse: Gev.: 55.07⁰/₀ C₆H₄(NO₂)₂.

Theorie voor 1 mol. C₆H₄(NO₂)₂ + 1 mol. C₇H₇N(CH₂)₂ 55.4⁰/₀.

Met α-naphthylamine, in alcoholische oplossing, vormt m. dinitrobenzol eene in roode naalden kristalliseerende verbinding, smeltpunt 67°. Stikstofbepaling: Gev. 13.47⁰/₀. Berekend voor gelijke moleculen 13.5⁰/₀.

Dimethyl-β-naphthylamine geeft, in alcoholische oplossing, eveneens donkerroode naalden van eene verbinding, die uit gelijke moleculen der componenten bestaat, en bij 52°—53° smelt.

Stikstofbepaling: gev. 12.62⁰/₀ N. Berekend: 12.39⁰/₀.

Tetramethylmetaphenyleendiamine ⁴⁾ vormt, zoowel door er het

¹⁾ R. 6, 366 (1887).

²⁾ B. 39, 76 (1906).

³⁾ M 25, 1298 (1904).

⁴⁾ R. 7, 3 (1888).

dinitrobenzol in op te lossen als in alcoholische oplossing — dan echter minder gemakkelijk — een zeer donker granaatroode verbinding, die bij 58° smelt.

Analyse: Gev. 50.1 % $C_6H_4(NO_2)_2$. Berekend voor



Met benzidine geeft metadinitrobenzol zwarte kristallen, die vrij bestendig zijn. Door zoutzuur worden zij ontleed. Het smeltpunt is 128°.

Analyse: Gevonden 47.6% $C_6H_4(NO_2)_2$. Berekend voor gelijke moleculen 47.73%.

Met tetramethylbenzidine in alcoholische oplossing verkrijgt men slechts in geringe hoeveelheid een donker gekleurde verbinding; de componenten kristalliseeren in hoofdzaak uit.

Daarentegen geeft 4.4' tetramethyldiaminodiphenylmethaan¹⁾ een fraaie, in platen of compacte kristallen kristalliseerende, granaatroode verbinding, die bij 76° smelt en waarin op 1 mol. dinitrobenzol, 2 mol. van het amine voorkomen.

Analyse: Gev. 25.2%, 25% $C_6H_4(NO_2)_2$. Berekend 24.85%.

4.4'. Tetramethyldiaminobenzophenon geeft in alcoholische oplossing zeer fraaie, helder roode platen. Smeltpunt: 91°. In deze verbinding echter vindt men *twee* mol. dinitrobenzol op 1 mol. base.

Analyse: Gev. 55.4% $C_6H_4(NO_2)_2$. Berekend: 55.6%.

Met vele andere vloeibare aromatische aminen geeft m. dinitrobenzol sterk gekleurde oplossingen; eveneens verkrijgt men met talrijke vaste aminen in alcoholische oplossing meer of minder sterke kleuring. Het zal waarschijnlijk wel mogelijk blijken een aantal dezer additieproducten in vasten toestand af te scheiden.

Utrecht.

Org. Chem. Lab. der Univ.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. L. HOORWEG. „*Over het prikkeffect bij levende Organismen*”.

(Mede aangeboden door den Heer W. H. JULIUS).

In het volgende wensch ik eenige opmerkingen te maken naar aanleiding van eene verhandeling van HILL (1) ten doel hebbende eene uitbreiding te geven aan de theorie van NERNST (2) omtrent de electrische prikkeling van levende organismen.

Herinnerd zij, dat ik reeds van het jaar 1890 af mij met dit onderwerp heb bezig gehouden, toen ik in het Ned. Tijdschrift voor

¹⁾ R. 7, 228 (1888).

Geneeskunde (3) proeven mededeelde over de contractie van de menschelijke spieren door condensator-ontladingen en daarbij een eenvoudig verband aanwees tusschen de capaciteit C van den gebruikten condensator en de potentiaal P , waartoe men dezen moest laden om eene minimale contractie op te wekken. Dit verband wordt uitgedrukt door de formule:

$$P = aR + \frac{b}{C} \dots \dots \dots (1)$$

waarin R den galvanischen weerstand van de keten en a en b twee constanten voorstellen.

Dezelfde formule was ook toepasselijk op de vroeger verrichte condensatorproeven van DUBOIS (4) te Bern en bleek later ook door te gaan voor de talrijke condensatorproeven door WEISS, HERMANN (5) en anderen verricht, op allerlei verschillende organen. Vooral het uitgebreide en nauwkeurig onderzoek van HERMANN heeft de juistheid van formule (1) bevestigd. Zoo men slechts de proeven met groote condensators uitsluit, is, hoewel HERMANN zelf ook nog in eene latere verhandeling (24) het blijft ontkenen, de overeenstemming zeer voldoende.

De graphische voorstelling van deze formule is een hyperbolische kromme, die voor zeer kleine waarden van C zeer hoog opklimt en voor zeer groote waarden van C langzamerhand nadert tot eene rechte lijn, evenwijdig aan de as.

Men kan met deze formule de hoeveelheid electriciteit $Q = CP$ berekenen, die voor eene minimale contractie noodig is en vindt dan, dat deze hoeveelheid voor afnemende waarden van C regelmatig afneemt: de graphische voorstelling van Q is eene rechte lijn. Voor de electricische energie $E = 5CP^2$ vindt men getallen, die voor eene bepaalde waarde van C eene minimale waarde bereiken, waarvoor dus het orgaan het allergevoeligst is.

Men kan, daar $i = \frac{I}{R}$ is, de formule (1) ook aldus schrijven:

$i = a + \frac{b}{CR}$ en daar CR de tijd-constante t van den condensator voorstelt, wordt zij

$$i = a + \frac{b}{t} \dots \dots \dots (2)$$

in welken vorm zij tegenwoordig veel door LA PICQUE en zijne leerlingen wordt aangewend.

LA PICQUE (6) schrijft de formule ook dikwijls aldus:

$$P = \beta \left(1 + \frac{\tau}{t} \right) (3)$$

en noemt dan β de *rhéobase* en τ de *chronaxie* van het praeparaat. Al deze proeven van LA PICQUE en zijne leerlingen bewijzen ook weder de juistheid van formule (1).

Wanneer men de formule (1) met C vermenigvuldigt wordt zij

$$CP = aCR + b$$

en daar CP de hoeveelheid electriciteit Q en CR de tijdconstante t van den condensator beteekent, krijgt de formule de volgende gedaante:

$$Q = at + b (4)$$

van welke formule WEISS (7) en LA PICQUE (4) hebben aangetoond dat zij bij groote benadering ook doorgaat voor het prikkeleffect van zeer kort durende constante stroomen. Ook KEITH LUCAS (9) die zeer vele nauwkeurige proeven met kort durende constante stroomen heeft verricht, vindt overal de hyperbolische kromme van formule (1) terug. Eveneens later GILDEMEISTER en WEISS in PFLÜGERS Archiv. Bd. 130.

Men kan dus aannemen dat de formule (1) door de proeven zoo degelijk bewezen is, dat eene theorie of wet, die tot uitkomsten leidt, die met deze formule in strijd zijn, niet kan worden gehandhaafd.

Dit is de reden, dat ik reeds in 1891 de toen nog algemeen aangenomen wet van DUBOIS-REYMOND heb verworpen.

De wet van DUBOIS-REYMOND zegt, dat elk prikkeleffect het gevolg is van verandering van de stroomsterkte en dat de grootte van het effect evenredig is aan de snelheid waarmede die verandering

intreedt, of in eene formule: $\epsilon = a \frac{di}{dt}$.

Maar deze formule, toegepast op condensator proeven, leidde tot geheel verkeerde uitkomsten en daarom heb ik (10) deze formule door de volgende vervangen $\epsilon = aie^{-\beta t}$.

Dit geldt voor het elementair effect ϵ terwijl het totale effect y der prikkeling wordt gevonden door:

$$y = a \int_0^T ie^{-\beta t} dt (5)$$

waarin a en β twee constanten zijn, afhankelijk van den aard der weefsels.

a is nu de coëfficiënt, die de oorspronkelijke gevoeligheid van het praeparaat aanwijst,

β is de coëfficiënt, die aanwijst met welke snelheid de oorspronkelijke gevoeligheid met den tijd afneemt.

Ik neem dus aan 1o. dat het prikkeleffect evenredig is met i zelve en 2o. dat iedere volgende prikkel een kleiner effect heeft dan de voorgaande, dat er dus in iederen prikkel iets is dat het effect vermindert.

Deze formule (5) levert nu dadelijk voor condensators de formule (1) in den volgenden vorm:

$$P = \frac{m\beta}{\alpha} R + \frac{m}{\alpha} \cdot \frac{1}{C} \dots \dots \dots (6)$$

waarin m de constante prikkel is, noodig voor het minimale effect.

Wanneer men (6) schrijft in de gedaante van (3) dan ziet men dadelijk dat de *rhéobase* van LA PICQUE (hier voorgesteld door $\frac{m\beta R}{\alpha}$) de waarde van P voorstelt voor zeer groote waarde van C , terwijl de *chronaxie* van LA PICQUE niets anders is dan het omgekeerde van mijn coëfficiënt β .

Nog zij hier vermeld, dat op het internationaal Congres voor electrologie, in Sept. 1910 te Barcelona gehouden, besloten is voor het onderzoek der gevoeligheid van zenuw- en spieren mijne condensator-methode aan te wenden en de coëfficiënten α en β als algemeene maat voor die gevoeligheid aan te nemen. De Spaansche Regeering heeft toen ook een prijs van 1000 fres. uitgelooft voor het beste instrumentarium, dat voor die proeven noodig is.

Voor het prikkeleffect van kortdurende constante stroomen levert (5) de formule:

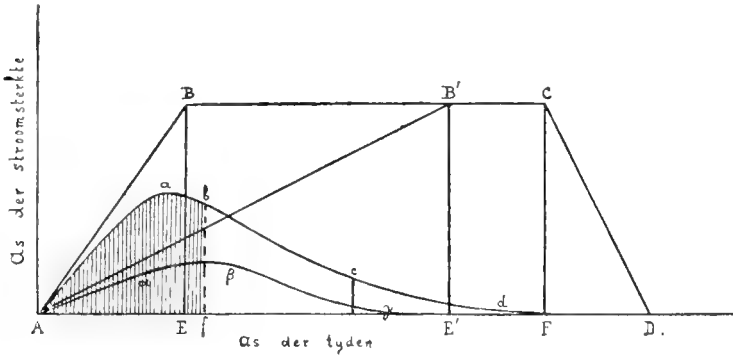
$$I = \frac{\alpha}{1 - e^{-\beta t}} \dots \dots \dots (7)$$

eene formule, die later door LA PICQUE (11) zelfstandig is afgeleid en die beter dan de formule (4) met de proeven voor kortstondige constante stroomen overeenkomt.

Niet alleen voor deze twee gevallen, maar ook voor alle andere manieren van electriche prikkeling levert de formule (5) goede resultaten op, zooals ik nog eens uitvoerig in TELLERS Archief (2) heb aangetoond. Ook verklaart zij zeer gemakkelijk het zoogenaamde langzame „Einschleichen” van een sterken constanten stroom en daar dit verschijnsel groote moeilijkheden oplevert in andere theoriën, wil ik nog even mijne verklaring aangeven (13).

Zij $A B C D$ de graphische voorstelling van een galvanischen stroom, die in den tijd AE tot stand komt, gedurende den tijd EF constant blijft en daarna bij C afgebroken wordt. Deze stroom, in een gevoelig

praeparaat gevoerd, zal daarin een prikkeleffect te weeg brengen, dat op ieder oogenblik evenredig is met de tijdelijke stroomsterkte i , maar dat ook, volgens den term $e^{-\beta t}$, geregeld met den tijd afneemt en dus



voorgesteld kan worden door de kromme $Aabcd$ die eerst toeneemt en later snel afneemt en tot de as nederzinkt. Het totaal prikkel-effect wordt nu voorgesteld door het oppervlak van de figuur ingesloten tusschen de kromme $Aabcd$ en de horizontale as. Voor eene minimale contractie is een bepaald oppervlak noodig. Gewoonlijk is dat een deel van het geheele oppervlak, b. v. het stuk $Aabf'A$, maar, is de angewende stroom zwak, dan kan het zijn, dat het geheele oppervlak $Aabcd$ niet voldoende is. Hetzelfde zal ook gebeuren al is de stroom zeer sterk, maar de opstijging zeer langzaam, b. v. langs de lijn AB' in plaats van langs de lijn AB , want dan daalt de perceptie-kromme $Aa\beta\gamma$, lang voor dat de stroom zijn constante waarde verkregen heeft, op nul en is het prikkelend oppervlak te klein.

Voor wisselstromen geeft de formule (5) een prikkeleffect, dat met het aantal wisselingen eerst toeneemt en dan weder afneemt. Zij wijst dus op het bestaan van eene optima frequentie waarvoor het orgaan het allergevoeligst is. Welnu, deze optima frequentie is duidelijk gevonden door d'ARSONVAL (14), PRÉVOST & BATELLI (15), v. KRIES (16), WIEN (17) en anderen. Daarenboven vond WERTHEIM SALOMONSON (18) zelfs voor zeer hooge frequenties, uitkomsten die met mijne formule overeenstemmen.

Na al deze uitkomsten meende ik nu te mogen hopen aan het onderzoek naar het prikkeleffect een vasten grondslag te hebben gegeven. En dat was het doel van mijn onderzoek! Maar het was mij niet onbekend dat de formule (5) evenals de formule (1) in den grond maar eene empirische formule was. Eene verklaring, waarom

alle organismen zich volgens dien regel gedroegen, was niet gegeven. Een redelijke vraag bleef dus over: hoe komt het prikkeleffect tot stand?

Hierop is in 1899 een antwoord gegeven door NERNST, den beroemden physico-chemicus van Berlijn, in eene verhandeling (19) waarin hij zegt: Ieder organisch weefsel bevat electrolieten en in electrolieten kan niet anders voorkomen dan beweging van ionen. Deze beweging der ionen moet dus de oorzaak zijn van het prikkeleffect.

Deze stoute woorden uitgesproken door een man van gezag maakten algemeen een diepen indruk.

Echter was NERNST in den beginne alleen in staat deze redeneering nit te werken voor *wisselstroom* en geraakte daarbij tot eene formule zoo geheel afwijkende van de gewone, dat velen met mij deze poging als mislukt beschouwden. Maar op grond van nieuwe proeven van BARRATT (20) en REISS (21) kwam NERNST in 1908 nog eens op de zaak terug en verdedigde in eene uitvoerige verhandeling met al de kracht van zijn groot talent het vroeger gevondene „Quadratwurzengesetz”, paste de berekening ook toe op de prikkels door constante stroomen van zeer korten duur en later (22) ook op condensator ontladingen, verzamelde in 19 Tabellen alle proeven van v. KRIES, REISS, WEISS, LA PICQUE, enz., liet zien, hoe al deze proeven, goed gerangschikt, het Quadratwurzengesetz schitterend bevestigden en legde uit, hoe mogelijke afwijkingen van die wet gemakkelijk verklaard konden worden uit een zekere „Accommodation” van het organisme.

Het scheen alsof alle moeilijkheden met een slag waren weggevaagd en dat de physiologen niets beters te doen hadden, dan de theorie van NERNST in alle hare consequenties aan te nemen.

Het prikkeleffect van condensator ontladingen moest evenredig worden aan den wortel uit de electriche energie, dat van den kortdurenden stroom aan den wortel uit den tijd, bij wisselstroomwerking moest de optima frequentie naar het rijk der fabelen verwezen worden, kortom alles moest anders worden! Met dien toestand kon ik natuurlijk geen vrede hebben en daarom heb ik in alle bescheidenheid geprotesteerd (23) tegen deze overheersching van de theorie over de feiten.

Spoedig echter zijn ook bij anderen bezwaren tegen de „Quadratwurz” wet opgerezen en wel juist bij de drie physiologen, die het meest op dit gebied hebben gewerkt, nl. bij HERMANN, LA PICQUE en bij KEITH LUCAS.

HERMANN (24) oppert vele bezwaren tegen de gevolgtrekkingen van NERNST en LA PICQUE (25) ontwikkelt al spoedig eene eigene,

afwijkende theorie, terwijl hij bij zijne vele condensator-proeven steeds gebruik maakt van de formules (2) en (3), die feitelijk uit mijne formule (1) zijn afgeleid. Ook KEITH LUCAS kon zich, hoewel het grondbeginsel van NERNST toejuichende, evenmin met de consequenties vereenigen en heeft daarom zijn vriend HILL, een degelijk mathematicus, overgehaald om de berekeningen van NERNST nog eens over te doen, uitgaande van een algemeener standpunt. In een uitvoerige verhandeling in het Journal of Physiology van 1908 heeft HILL zich op uitstekende wijze van die taak gekweten. NERNST had voor de eenvoudigheid in zijne berekeningen aangenomen, dat de tweede electrode op oneindigen afstand van de eerste was verwijderd en beschouwde daarom alleen de concentratie-veranderingen aan de eerste electrode. Dit is een geval dat nooit voorkomt en daarom heeft HILL eene meer algemeene onderstelling gemaakt, nl. dat de beide electroden op een afstand van a c.M. van elkander staan en dat nu de concentratie-verandering gevraagd wordt, in een punt op x c.M. van de eerste electrode verwijderd. Verder wordt geheel gerekend volgens NERNST. Welnu, in deze betere onderstelling wordt de berekening wel meer omslachtig en meer ingewikkeld, maar het resultaat is ook verrassend. Want de „Quadratwurzel” wet is geheel verdwenen, ten minste voor het prikkeffect van kortdurende constante stroomen, dus juist voor dat geval waarvoor NERNST zelf beweerd heeft, dat zij het beste moest doorgaan. Voor de minimale intensiteit I , bij dergelijke kortdurende stroomen noodig, vindt nl. HILL de

$$\text{formule: } I = \frac{\lambda}{1 - \mu \theta^t} \dots \dots \dots (8)$$

waarin λ , μ en θ constanten en t den tijd der prikkeling voorstelt.

Deze formule lijkt oppervlakkig niet veel op de mijne, maar zoo men opmerkt, dat volgens HILL (l. c. pag. 20) θ de beteekenis

heeft van $e^{-\frac{k\pi^2}{a^2}}$ en dus θ^t gelijk staat met de uitdrukking $e^{-\frac{k\pi^2}{a^2}t}$ dan ziet men dat, $\frac{k\pi^2}{a^2} = \beta$ stellende, de formule (8) van mijne formule

(7) alleen verschilt, door de aanwezigheid van den coëfficient μ die in mijne formule = 1 is. Verder blijkt uit de opgave van HILL, dat

μ eene waarde heeft variërende tusschen $\frac{8}{\pi^2}$ of 0.81 en $\frac{4}{\pi}$ of 1.27

en dus eene gemiddelde waarde van 1.04 en dan wordt het onderscheid met mijne formule zoo gering, dat het proefondervindelijk uiterst moeilijk zal zijn te beslissen welke dezer beide formules de ware is.

KEITH LUCAS past nu, in eene verhandeling volgende op die van HILL, de formule (8) op een groot aantal proeven van hem zelven en van LA PICQUE toe, toont aldus de juistheid er van aan en berekent dan de waarde θ of liever van $\log. \theta$ voor verschillende organen. LUCAS vereenigt dan in een tabel (i.e. pag. 245) al de verschillende zoo gevonden waarden van $\log. \theta$ en hecht groote waarde aan de beteekenis van deze grootheid. Ook ik doe dat gaarne, want uit het bovenstaande volgt gemakkelijk dat $\log. \theta = -\beta \log e$ dus op een constanten factor na is $\log. \theta$ niets anders dan mijn coëfficiënt β .

Volgens mijne proeven (26) en in mijne eenheden is voor de motorische zenuwen van den kikvorsch $\beta = 1100$, waaruit volgt $\log. \theta = -0.47$ terwijl KEITH LUCAS (i.e. pag. 246) vindt uit zijne eigen proeven $\log. \theta = -0.33$ en uit die van LA PICQUE $\log. \theta = -0.42$.

Voor de directe prikkeling van de spieren van den kikvorsch vond ik: $\beta = 88$ waaruit volgt $\log. \theta = 0.038$ terwijl KEITH LUCAS (i.e. pag. 245) hiervoor getallen geeft schommelende tusschen 0.027—0.113. De overeenstemming is dus voldoende te achten. Tegelijk blijkt uit het groote verschil van 0.027 en 0.113 dat, zooals ik reeds menigmaal heb opgemerkt, bij deze soort van proeven de waarnemingsfouten veel grooter zijn dan men meestal wel denkt.

Voor verschillende weefsels geeft LUCAS in ronde getallen de verhouding van $\log \theta$, aldus (i.e. pag. 245)

zenuwvezel	0.3
spiervezel	0.07
hartspier	0.0005

Zoo men deze getallen vergelijkt met den duur der refractaire periode (zie later) dan blijkt dat hoe langer de refractaire periode, hoe kleiner $\log. \theta$ of β . Voor planten, die eene zeer lange latente periode bezitten, moet dus β bijzonder klein zijn.

Het schijnt dus mogelijk, mijne uitkomsten met die van HILL en dan ook met het hoofdbeginsel van de theorie van NERNST te vereenigen. Maar er zijn bezwaren:

1°. Voor condensatorontladingen worden de berekeningen van HILL buitengewoon omslachtig en onmogelijk lijkt het mij toe de zoo goed geconstateerde formule (1) daaruit af te leiden.

2°. Voor wisselstroommen is het resultaat evenmin bevredigend. Wel blijkt uit de formule van HILL dat i/n niet constant is, zooals NERNST wil, maar het verband tusschen beide grootheden i en n wordt bijzonder ingewikkeld.

3°. Heeft HILL bijzonder veel moeite om het bovenvermelde feit van het onmerkbaar langzame insluipen van sterke stroommen te

bovengenoemde feiten, dat ik recht heb de formule (9) te behouden.

Nu is volgens HILL (l. c. pag. 196) de concentratieverandering veroorzaakt door een constanten stroom van zeer korten duur:

$$c = c_0 + \frac{ri}{k} \left(\frac{a}{2} - x \right) - \frac{4ri}{k} \cdot \frac{a}{\pi^2} e^{-\frac{k\pi^2 t}{a^2}} \cos \frac{\pi x}{a}$$

Zoo men dus volgens NERNST het tijdelijk prikkeleffect evenredig stelt aan de concentratieverandering met den tijd, dan wordt:

$$\varepsilon = f \frac{dc}{dt} = \frac{4ri}{a} f e^{-\frac{k\pi^2 t}{a^2}} \cos \frac{\pi x}{a}$$

en hierin stellende

$$\frac{4rf}{a} \cos \frac{\pi x}{a} = a \text{ en } \frac{k\pi^2}{a^2} = \beta$$

verkrijgt men de formule

$$\varepsilon = a i e^{-\beta t}$$

en daaruit volgens (9) mijne formule (5)

$$y = a \int i e^{-\beta t} dt.$$

Het is dus mogelijk mijne wet uit de berekening van HILL af te leiden, zoo men slechts de formule (9) er bij aanwendt, en naar mijne meening is deze onderstelling eenvoudiger en natuurlijker dan wanneer men met HILL moet aannemen, dat voor het prikkeleffect het uiteenvallen van een hypothetische stof in een bepaalde hoeveelheid noodig is.

Deze afleiding van mijne formule verkies ik nu boven degene, die ik vroeger heb gegeven, omdat, zooals HILL terecht opmerkt, in die vroegere afleiding ook nog de 2^e electrode op oneindigen afstand van de eerste was aangenomen.

Men mag dus nu aannemen dat mijne formule (5) in de gewijzigde theorie van NERNST haren oorsprong vindt en dan zijn daarmee een groot aantal moeilijkheden in eens weggeruimd.

Tegelijk is dan een helder licht geworpen op de beteekenis van de coefficient β , want uit de formule $\beta = \frac{k\pi^2}{a^2}$, volgt dat β bepaald wordt door den diffusie-coëfficient k .

De extinctie-coëfficient β wijst aan, dat er in iederen prikkel iets is, dat de gevoeligheid van het orgaan voor een volgenden prikkel vermindert. Het blijkt nu, dat de oorzaak van dat verschijnsel moet worden gezocht in de diffusie der ionen, die voortdurend het door den electrischen stroom veroorzaakt concentratieverschil tracht op te heffen.

Deze verklaring zal iedereen bevredigen.

HILL (l. c. pag. 222) legt ook uit dat door diezelfde diffusie der ionen de *openings-contracties* ontstaan, die optreden bij het plotseling afbreken van een galvanischen stroom. In dat geval bewegen zich de ionen in tegengestelde richting.

Maar is dat terugstroomen der ionen na het ophouden van den stroom feitelijk niet hetzelfde, wat men vroeger den polarisatiestroom noemde?

Ik zie het onderscheid niet; en dan is de verklaring, die HILL van de *openingsschokken* geeft, geene andere dan die ik reeds in 1893 uit mijne wet afleidde en die nog vroeger, geheel op empirische gronden, gegeven was door TIGERSTEDT (30) en GRÜTZNER (31).

Men zou ook in navolging van NERNST aldus kunnen redeneeren. Ieder irriteabel weefsel is polariseerbaar: in deze polarisatie moet dus de oorzaak van het physiologisch effect gelegen zijn.

Dit is de theorie o.a. van TSCHAGOWITZ (32), die daaruit direct mijne formule (1) afleidt.

Hij zegt: polariseeren beteekent een condensator laden.

Zoo men dus een condensator ontladtd door een organisch weefsel dan staat het gelijk met het ontladen van een condensator met capaciteit C in een anderen met een capaciteit c , en men heeft de formule

$$C'P = C'p + cp$$

waarin P het aantal volts waarmede C geladen was en p het aantal volts van de polarisatie van het orgaan. Voor een minimale contractie moet p altijd constant zijn derhalve:

$$P = p + \frac{cp}{C} \text{ of } P = a + \frac{b}{C}$$

Ook LA PICQUE en anderen beschouwen de polarisatie van de weefsels als de oorzaak van den electrischen prikkel.

Reeds vroeger (33) heb ik getracht de formule (5) ook op andere dan electrische prikkels toe te passen; o.a. op de prikkeling van het netvlies door het licht, van het gehoororgaan door het geluid, van den tastzin door het gevoel. Voor het laatste bestaan zeer nauwkeurige proeven van DE FREY en KUSSOW (34) en de resultaten daarvan konden ook uit mijne formule (5) voldoende verklaard worden.

Ook de verschijnselen bij het zien en het hooren werden toen uit mijne formule (5) afgeleid, maar de toen gegevene afleiding kan mij nu niet meer bevredigen.

Uit de toen gevondene formules zou n.l. volgen dat β buitengewoon groot moest zijn en dit wordt tegengesproken door het feit dat de lichtindruk op het netvlies $\frac{1}{8}$ seconde blijft voortduren. Dit wijst juist op eene kleine waarde van β .

Hier moet dus eene andere afleiding gevonden worden. Wij beschouwen nu de werking van het licht niet meer als die van een snel wisselenden wisselstroom maar als een constanten prikkel van verschillende intensiteit I die wij kunnen uitdrukken bv. in Meterkaarsen en passen daarop direct de formule (5) toe:

$$y = \alpha I \int e^{-\beta t} dt$$

maar nemen aan dat de coëfficiënt α afhankelijk is van de golflengte, zoodat het netvlies eene verschillende gevoeligheid bezit voor licht van dezelfde lichtsterkte maar van verschillende golflengte. De formule wordt dan voor zeer kleine waarden van T

$$y = \alpha I T$$

geheel overeenkomstig met de proeven van KÖNIG en DIETERICI (35).

Hetzelfde resultaat is gevonden door BLAAUW (36) bij zijne proeven over de heliotropie van planten. Hierbij treedt dezelfde kromming op (l. c. pag. 21) zoo men licht van 1255 Meterkaarsen gedurende $\frac{1}{55}$ sec. laat inwerken of wel licht van 0.025 Meterkaarsen gedurende 15 minuten. Nu is, zooals blijkt uit den langen latenten tijd, die bij planten noodig is om de inwerking zichtbaar te maken, somtijds (l. c. pag. 18) een uur, bij de proeven op planten β al bijzonder klein en zoo wij dus $\beta = 0$ stellen, wordt de formule (5), ook voor langdurige inwerkingen

$$y = \alpha I T$$

wat juist de mathematische voorstelling is van het door BLAAUW en FRÖSCHEL (38) gevonden feit dat het product I en T altijd constant blijft.

Ongeveer gelijktijdig met BLAAUW deed in het Botanisch Laboratorium te Utrecht Mejuffrouw C. J. PEKELHARING (37) proeven over de kromming van wortels onder den invloed van zwaartekracht en middelpuntvliedende kracht. Hierbij bleek dat het prikkeleffect evenredig was aan de drukking, die onder den invloed dezer krachten het celsap op het protoplasma of op den celwand uitoefent. Zoo men deze drukking voorstelt door D *dynes* dan wordt de formule (5)

$$y = \alpha D \int_0^T e^{-\beta t} dt$$

wat wegens de bijzondere kleinheid van β weder overgaat in

$$y = \alpha DT$$

Dit is het resultaat, door Mejuffr. PEKELHARING gevonden, nl. dat om dezelfde kromming te verkrijgen steeds drukking maal presentatietijd constant moet blijven. Ook voor de geotropie der planten geldt dus de formule (5).

Tegelijk blijkt nu dat het niet juist is, zooals FRÖSCHEL (38) en BLAAUW beweren, dat iedere prikkelperceptie evenredig is aan de verbruikte energie. Bij de geotropie toch stelt DT het product voor van een kracht met een tijd en is dus daar ten minste het prikkeleffect volstrekt niet evenredig met de energie.

Omgekeerd zijn de proeven van BLAAUW en Mej. PEKELHARING weder bewijzen voor de juistheid der formule (9).

L I T E R A T U U R.

1. HILL, Journal of Physiology, 1910. Vol. 40, pag. 190.
2. NERNST, Pflügers Archiv. 1908. Bd. 122, pag. 275.
3. HOORWEG, Ned. Tijdschrift voor Geneeskunde, 1891. Deel 2, n^o. 23.
4. DUBOIS, Untersuch über die Phys. Werk der Condensatorenl., Bern, 1883.
5. HERMANN, Pflügers Archiv. 1906. Bd. 111, pag. 537.
6. LA PICQUE, Journal de Phys. et de path. générale, 1911. Tome 35
7. WEISS, Archives italiennes de Biologie, 1907. Tome 35.
8. LA PICQUE, Journal de phys. et de path. générale. 1903, pag. 854.
9. KEITH LUCAS, Journal of Physiology. 1907. Vol. 36 en volgende.
10. HOORWEG, Pflügers Archiv, 1891, Bd. 52, pag. 87.
11. LA PICQUE, Comptes rendues de la Société de biologie, 1909. Tome 67, pg. 280.
12. HOORWEG, Archives de Teyler, 1909. pag. 1.
13. HOORWEG, Deutsches Archiv. f. klin. Med. 1893, Bd. 51. pag. 193.
14. D'ARSONVAL, Arch. de phys. norm. et path. 1893, pag. 401.
15. PRÉVOST, Journal de phys. et de path. générale. Tome 2, pag. 255.
16. v. KRIES, Ber. der Naturf. Gesellsch. in Freiburg i. B. Bd. 8.
17. WIEN, Wiedemann Annalen, 1901.
18. WERTHEIM SALOMONSON, Pflügers Archiv. Bd. 106. S. 140.
19. NERNST, Göttinger Nachrichte, Math. Phys. Classe, 1899. Heft. 1, S. 403.
20. BARRATT. Zeitschrift für Electro-therapie, 1904. Bd. 6. S. 403.
21. REISS, Pflügers Archiv, 1907. Bd. 117, S. 5.
22. EUCKEN, Pflügers Archiv. 1908. Bd. 123, S. 454.
23. HOORWEG, Pflügers Archiv. 1908. Bd. 124 en 1910. Bd. 133.
24. HERMANN, Pflügers Archiv. 1909. Bd. 127.
25. LA PICQUE, Journal de phys. et de path. générale. 1911. Tome 13 p. 22 en p. 43.
26. HOORWEG, Comptes rendues du 4ieme Congrès d'électrobiologie, 1908, Amsterdam, pag. 47.
27. STEINACH, Pflügers Archiv. 1905. Bd. 125. S. 339.
28. GOTCH, Journal of Physiology, 1910. Vol. 40, pag. 272.
29. KEITH LUCAS. Journal of Physiology, 1910. Vol. 41. pag. 368.
30. TIGERSTEDT. Mith. physiol. Labor. Stockholm 1882.
31. GRÜTZNER, Breslauer ärztlich. Zeitschr. 1882. n^o. 23.
32. TSCHAGOWITZ, Pflügers Archiv. 1908. Bd. 125.
33. HOORWEG, Archives de Teyler 1901. Serie II. Tome VII.
34. v. FREY und KUSSOW. Abhandl. der Kön. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. 1896.
35. HELMHOLTZ. Handb. der physiol. Optik. 1896.
36. BLAAUW, Die Perzeption des Lichtes Utrecht 1909.
37. PEKELHARING, Onderzoekingen over de perceptie van de zwaartekracht. Utrecht, 1909.
38. FRÖSCHEL Sitz. ber. d. K. Akad. der Wissensch. Wien. 1908.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN biedt een mededeeling aan:
*„Over de middelpunten der integraalkrommen van differentiaal-
 vergelijkingen van de eerste orde en den eersten graad”.*

1. Wanneer men de singulariteiten bestudeert van de reële krommen die voldoen aan eene differentiaalvergelijking van den vorm $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$ waarin P en Q polynomia in x en y met reële coëfficiënten voorstellen, ontmoet men behalve knoopen en zadelpunten ook brandpunten. Deze laatste kunnen somtijds overgaan in punten waar omheen een reeks gesloten krommen voorkomen en worden dan middelpunten genoemd. Wanneer dit het geval zal zijn is theoretisch opgelost, maar stuit praktisch op groote moeilijkheden.

Wij stellen ons nu voor de bovenstaande differentiaalvergelijking te onderzoeken in het eenvoudige geval dat P en Q polynomia van den tweeden graad zijn en alle gevallen te bepalen waarin men hier middelpunten kan verwachten in plaats van brandpunten.

2. Denken we den oorsprong verlegd naar het punt waarvan beoordeeld moet worden of het een brandpunt of een middelpunt is, dan kan de vergelijking steeds herleid worden tot den vorm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{y + ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

waarin a, b, c, a', b', c' , willekeurige reële constanten voorstellen.

Merken we op dat door de substitutie

$$\xi = hx + ky \quad \eta = -kx + hy$$

deze vergelijking overgaat in

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-\xi + a'\xi^2 + 2\beta'\xi\eta + \gamma'\eta^2}{\eta + \alpha\xi^2 + 2\beta\xi\eta + \gamma\eta^2}$$

waarin

$$(h^2 + k^2)^2 \alpha = ah^3 + (a' + 2b)h^2k + (2b' + c)hk^2 + c'k^3$$

$$(h^2 + k^2)^2 \beta = bh^3 - (a - b' - c)h^2k - (a' + b - c')hk^2 - b'k^3$$

$$(h^2 + k^2)^2 \gamma = ch^3 - (2b - c')h^2k + (a - 2b')hk^2 + a'k^3$$

$$(h^2 + k^2)^2 a' = a'h^3 - (a - 2b')h^2k - (2b - c')hk^2 - ck^3$$

$$(h^2 + k^2)^2 \beta' = b'h^3 - (a' + b - c')h^2k + (a - b' - c)hk^2 - bk^3$$

$$(h^2 + k^2)^2 \gamma' = c'h^3 - (2b' + c)h^2k + (a' + 2b)hk^2 - ak^3$$

Men kan nu over h en k zoo beschikken dat de coëfficiënten $\alpha \beta \gamma a' \beta' \gamma'$ aan twee voorwaarden voldoen. Kiezen we

$$\alpha + \gamma = \lambda \quad a' + \gamma' = 0$$

dan is

$$\begin{aligned} (h^2 + k^2) \lambda &= (a + c) h + (a' + c') k \\ 0 &= (a' + c') h - (a + c) k \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$h = \frac{a+c}{\lambda} \quad k = \frac{a'+c'}{\lambda} \dots \dots \dots (1)$$

Hierin stelt λ een bepaald gekozen getal voor dat niet nul kan zijn.

We mogen dus uitgaan van de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + a'x^2 + 2b'xy - a'y^2}{y + ax^2 + 2bxy + cy^2} = \frac{-x+Y}{y+X}$$

waarin nog $c = a - \lambda$ zoude kunnen gesteld worden. Wij zullen echter van deze conditie geen gebruik behoeven te maken.

Volgens de theorie van POINCARÉ¹⁾ is nu hier de oorsprong een middelpunt wanneer het mogelijk is homogene functies F_i van graad i te bepalen die voldoen aan de volgende oneindige reeks vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} x \frac{\partial F_3}{\partial y} - y \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 2xX + 2yY \\ x \frac{\partial F_4}{\partial y} - y \frac{\partial F_4}{\partial x} &= X \frac{\partial F_3}{\partial x} + Y \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ x \frac{\partial F_5}{\partial y} - y \frac{\partial F_5}{\partial x} &= X \frac{\partial F_4}{\partial x} + Y \frac{\partial F_4}{\partial y} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Zijn deze voorwaarden alle vervuld, dan is de oorsprong een middelpunt en is de integraal

$$x^2 + y^2 + F_3 + F_4 + F_5 + \dots = Constante$$

waarin de reeks convergeert totdat de gesloten kromme, door deze vergelijking voorgesteld, door het eerstvolgende singuliere punt gaat.

3. Beginnen we met deze oneindige reeks vergelijkingen op een andere wijze te schrijven. Daartoe merken we op dat wanneer er

eene homogene functie F_n van x en y bestaat en $x \frac{\partial F_n}{\partial y} - y \frac{\partial F_n}{\partial x}$

den factor $xX + yY$ bevat, deze factor ook deelbaar moet zijn op

$X \frac{\partial F_n}{\partial x} + Y \frac{\partial F_n}{\partial y}$. Is toch

$$x \frac{\partial F_n}{\partial y} - y \frac{\partial F_n}{\partial x} = (xX + yY) P_{n-3}$$

en

¹⁾ Journ. de Math. (1885) p. 173.

$$Y \frac{\partial F_n}{\partial y} + X \frac{\partial F_n}{\partial x} = U$$

dan kan men uit deze, en de bekende vergelijking

$$y \frac{\partial F_n}{\partial y} + x \frac{\partial F_n}{\partial x} = nF_n$$

de differentiaalquotienten elimineeren. Dit geeft

$$(xX + yY)(xY - yX)P_{n-3} - U(x^2 + y^2) + n(xX + yY)F_n = 0$$

dus moet U deelbaar zijn door $xX + yY$.

Stellen we

$$U = (xX + yY)P_{n-2}$$

dan heeft men dus

$$(xY - yX)P_{n-3} - (x^2 + y^2)P_{n-2} + nF_n = 0 \quad \dots \quad (3)$$

We kunnen de vergelijkingen (2) dus schrijven

$$x \frac{\partial F_2}{\partial x} - y \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2(xX + yY)$$

$$x \frac{\partial F_4}{\partial y} - y \frac{\partial F_4}{\partial x} = X \frac{\partial F_3}{\partial x} + Y \frac{\partial F_3}{\partial y} = (xX + yY)P_1$$

$$x \frac{\partial F_5}{\partial y} - y \frac{\partial F_5}{\partial x} = X \frac{\partial F_4}{\partial x} + Y \frac{\partial F_4}{\partial y} = (xX + yY)P_2$$

enz.

waarin P_i eene homogene functie van x en y van graad i voorstelt.

Om deze voorwaarden nog verder te herleiden, merk ik op dat uit

$$X \frac{\partial F_{n+2}}{\partial x} + Y \frac{\partial F_{n+2}}{\partial y} = (xX + yY)P_n$$

$$x \frac{\partial F_{n+2}}{\partial y} - y \frac{\partial F_{n+2}}{\partial x} = (xX + yY)P_{n-1}$$

volgt

$$\frac{\partial F_{n+2}}{\partial x} = xP_n - YP_{n-1}$$

$$\frac{\partial F_{n+2}}{\partial y} = XP_{n-1} + yP_n$$

derhalve is

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ xP_n - YP_{n-1} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ XP_{n-1} + yP_n \right\}$$

of

$$x \frac{\partial P_n}{\partial y} - y \frac{\partial P_n}{\partial x} = X \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + Y \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) P_{n-1}.$$

Merkt men nu op dat $P_n = 2$, dan kan men de voorwaarden (2) vervangen door deze

$$\left. \begin{aligned} x \frac{\partial P_1}{\partial y} - y \frac{\partial P_1}{\partial x} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) P_0 \\ x \frac{\partial P_2}{\partial y} - y \frac{\partial P_2}{\partial x} &= X \frac{\partial P_1}{\partial x} + Y \frac{\partial P_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) P_1 \\ x \frac{\partial P_3}{\partial y} - y \frac{\partial P_3}{\partial x} &= X \frac{\partial P_2}{\partial x} + Y \frac{\partial P_2}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) P_2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (4)$$

enz.

4. Gaan we nu onderzoeken of het mogelijk is eene oneindige reeks functies P_i te bepalen die voldoen aan de voorwaarden (4).

Hier is

$$X = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad Y = a'x^2 + 2b'xy - a'y^2$$

dus

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 2(a + b')x - 2(b - a')y.$$

Stelt men nu

$$P_1 = p'_0x + p'_1y$$

dan vindt men gemakkelijk

$$p'_0 = 4(a' - b) \quad p'_1 = 4(a + b').$$

De functie P_1 waarvoor wij eenvoudiger mogen schrijven

$$P_1 = (a' - b)x + (a + b')y = p_0x + p_1y$$

bestaat dus altijd. Onderzoeken we nu of er eene functie P_2 bestaat.

Stellen we

$$P_2 = q_0x^2 + q_1xy + q_2y^2$$

dan moet

$$\begin{aligned} q_1 &= (3a + 2b')p_0 + a'p_1 \\ 2q_2 - 2q_0 &= (4b - 2a')p_0 + 2(a + 2b')p_1 \\ -q_1 &= cp_0 + (2b' - 3a')p_1. \end{aligned}$$

Hier wordt dus vereischt de voorwaarde

$$(3a + 2b' + c)p_0 + 2(b - a')p_1 = 0$$

of

$$(a' - b)(a + c) = 0.$$

Nu onderstelden we reeds $a + c \neq 0$, derhalve is de eerste noodzakelijke voorwaarde

$$a' - b = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

Is deze vervuld dan is $p_0 = 0$ $p_1 = a + b'$

$$q_1 = b(a + b')$$

$$2q_2 - 2q_0 = 2(a + 2b')(a + b').$$

Men kan nu q_0 willekeurig kiezen bijv. $q_0 = 0$ en vindt dan

$$P_2 = (a + b')[bxy + (a + 2b')y^2].$$

$$3s_3 - 3s_1 = 3cr_0 + 3br_1 + (3a + 6b')r_2 + 3br_3$$

$$4s_4 - 2s_2 = 2cr_1 + (2a + 8b')r_3$$

$$-s_2 = cr_2 - 3br_3.$$

Hieraan kan alleen voldaan worden wanneer

$$3s_1 + (3s_3 - 3s_1) + 3(-s_2) = 0$$

of

$$(5a + 2b' + c)r_0 + 2br_1 + (a + 2b' + c)r_2 - 2br_3 = 0$$

d. i.

$$b(a + c)(2b' - 3a - 5c) = 0. \dots \dots (7)$$

Deze voorwaarde valt uiteen in drie voorwaarden die wij afzonderlijk zullen behandelen.

6. Stellen we in de eerste plaats

$$a' = b \text{ volgens (5) en } b = 0 \text{ volgens (7).}$$

We hebben dus te onderzoeken of de oorsprong een middelpunt is voor de integraalkrommen van

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 2b'xy}{y + ax^2 + cy^2}$$

Deze vergelijking is gemakkeijk oplosbaar. Stelt men toch

$$\frac{x^2}{2} = t \quad 1 - 2b'y = z$$

dan moet

$$\frac{dt}{dz} = \frac{a}{b'z} \quad t = \frac{1}{8b'^2} \cdot \frac{2b' + c - 2(b' + c)z + cz^2}{z}$$

Een particuliere integraal is hier

$$t = a + \beta z + \gamma z^2$$

waarin

$$a = -\frac{2b' + c}{8ab'^2} \quad \beta = -\frac{2(b' + c)}{8b'^2(b' - a)} \quad \gamma = \frac{c}{8b'^2(2b' - a)}$$

De algemeene integraal is dus

$$\{x^2 - 2(a + \beta + \gamma) + 4b'(\beta + 2\gamma)y - 8b'^2\gamma y^2\} (1 - 2b'y)^{-\frac{a}{b'}} = const.$$

die voor kleine waarden van x en y ontwikkeld kan worden in den vorm

$$x^2 + y^2 + 2ax^2y + \frac{1}{3}(4a + 4b' + 2c)y^3 \dots = const.$$

In dit geval ligt dus zeker een middelpunt in den oorsprong van coördinaten.

7. Stellen we in de tweede plaats

$$a' = b \text{ volgens (5) en } a + c = 0 \text{ volgens (7)}$$

Hier wordt de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + bx^2 + 2bxy - by^2}{y + ax^2 + 2bxy - ay^2}$$

Deze vergelijking bezit drie particuliere integralen van den vorm

$$y = Ax + B$$

want substitueert men deze waarde en stelt de coëfficiënten der verschillende machten van x gelijk nul, dan komt

$$A(2bA - aA^2 + a) = 2b'A - bA^2 + b$$

$$A(2bB + A - 2aAB) = 2b'B - 2bAB - 1$$

$$AB(1 - aB) = -bB^2$$

Men heeft dus

$$B = -\frac{A}{aA - b}$$

en

$$aA^3 - 3bA^2 + (2b' - a)A + b = 0.$$

Noemen wij de wortels dezer vergelijking A_1, A_2, A_3 en de corresponderende waarden van $B: B_1, B_2, B_3$ en onderzoeken of de algemeene integraal geschreven kan worden

$$(y - A_1x - B_1)^{\lambda_1} (y - A_2x - B_2)^{\lambda_2} (y - A_3x - B_3)^{\lambda_3} = \text{const.}$$

of

$$(y - y_1)^{\lambda_1} (y - y_2)^{\lambda_2} (y - y_3)^{\lambda_3} = \text{const.}$$

Hiervoor is noodig en voldoende ¹⁾ dat

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \left\{ \frac{\lambda_1}{y - y_1} + \frac{\lambda_2}{y - y_2} + \frac{\lambda_3}{y - y_3} \right\}$$

deelbaar zij door $y + ax^2 + 2bx - ay^2$.

Dit vereischt, zoo men onder τ een constanten factor verstaat:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a\tau$$

$$\lambda_1(y_2 + y_3) + \lambda_2(y_1 + y_3) + \lambda_3(y_1 + y_2) = -(1 + 2bx)\tau$$

$$\lambda_1 y_2 y_3 + \lambda_2 y_1 y_3 + \lambda_3 y_1 y_2 = ax^2 \tau$$

of zoo men y_1, y_2 en y_3 door hunne waarden vervangt

$$(a) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a\tau$$

$$(b) \quad \lambda_1(A_2 + A_3) + \lambda_2(A_1 + A_3) + \lambda_3(A_1 + A_2) = -2b\tau$$

$$(c) \quad \lambda_1(B_2 + B_3) + \lambda_2(B_1 + B_3) + \lambda_3(B_1 + B_2) = -\tau$$

$$(d) \quad \lambda_1 A_2 A_3 + \lambda_2 A_1 A_3 + \lambda_3 A_1 A_2 = a\tau$$

$$(e) \quad \lambda_1(A_2 B_3 + A_3 B_2) + \lambda_2(A_1 B_3 + A_3 B_1) + \lambda_3(A_1 B_2 + A_2 B_1) = 0$$

$$(f) \quad \lambda_1 B_2 B_3 + \lambda_2 B_1 B_3 + \lambda_3 B_1 B_2 = 0$$

Daar nu

¹⁾ KORKINE Math. Ann. 48, p. 350.

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{3b}{a}, \quad A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 = \frac{2b' - a}{a}, \quad A_1A_2A_3 = \frac{b}{a}$$

zoo kan men de vergelijkingen (a) (b) en (c) schrijven

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -a\tau \\ \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 &= -b\tau \\ \lambda_1A_2A_3 + \lambda_2A_1A_3 + \lambda_3A_1A_2 &= a\tau \end{aligned}$$

waaruit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\tau}{N} (A_2 - A_3) (aA_1^2 - 2bA_1 - a) \\ \lambda_2 &= \frac{\tau}{N} (A_3 - A_1) (aA_2^2 - 2bA_2 - a) \\ \lambda_3 &= \frac{\tau}{N} (A_1 - A_2) (aA_3^2 - 2bA_3 - a) \end{aligned}$$

zijnde

$$N = A_1^2(A_2 - A_3) + A_2^2(A_1 - A_3) + A_3^2(A_1 - A_2).$$

Uit de waarden van B_1, B_2, B_3 volgt verder gemakkelijk dat

$$\begin{aligned} B_1 &= \sigma(aA_1^2 - 2bA_1 - a) \\ B_2 &= \sigma(aA_2^2 - 2bA_2 - a) \\ B_3 &= \sigma(aA_3^2 - 2bA_3 - a) \end{aligned}$$

waarin σ een factor die nog onbepaald is.

Om deze te bepalen schrijven we in de derdemachtsvergelijking voor A

$$A = \frac{bB}{aB - 1}$$

dan komt

$$2a(ab' - b^2) B^3 + (3b^2 - 4ab' - a^2) B^2 + 2(a + b') B - 1 = 0$$

dus is

$$B_1 + B_2 + B_3 = -\frac{3b^2 - 4ab' - a^2}{2a(ab' - b^2)}$$

Hiermede vindt men

$$\sigma = \frac{1}{2(b^2 - ab')}.$$

Nu is

$$\begin{aligned} aA_1 - b)(aA_2 - b)(aA_3 - b) &= N_1N_2N_3 = \\ &= a^3A_1A_2A_3 - a^2b(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3) + ab^2(A_1 + A_2 + A_3) - b^3 = \\ &= 2b(b^2 - ab') = \frac{b}{\sigma} \end{aligned}$$

en daarmede

$$\lambda_1 = \frac{\tau}{bN} A_1(A_2 - A_3)N_1N_2$$

$$\lambda_2 = \frac{\tau}{bN} A_2(A_3 - A_1)N_1N_2$$

$$\lambda_3 = \frac{\tau}{bN} A_3(A_1 - A_2)N_1N_2$$

Toonen we nu aan dat met deze waarden ook aan de vergelijkingen (e) (e') en (f') voldaan wordt.

Met deze waarden en de waarden $B_i = \frac{A_i}{N_i}$ wordt het eerste lid van (e)

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{bN} A_1(A_2 - A_3) [2aA_2A_3 - b(A_2 + A_3)] + \\ & + \frac{\tau}{bN} A_2(A_3 - A_1) [2aA_1A_3 - b(A_1 + A_3)] + \\ & + \frac{\tau}{bN} A_3(A_1 - A_2) [2aA_1A_2 - b(A_1 + A_2)] = \\ & = - \frac{\tau}{N} [A_1(A_2^2 - A_3^2) + A_2(A_3^2 - A_1^2) + A_3(A_1^2 - A_2^2)] = -\tau. \end{aligned}$$

Verder wordt het eerste lid van (e')

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{bN} A_1(A_2 - A_3) A_2A_3 [a(A_2 + A_3) - 2b] + \\ & + \frac{\tau}{bN} A_2(A_3 - A_1) A_1A_3 [a(A_1 + A_3) - 2b] + \\ & + \frac{\tau}{bN} A_3(A_1 - A_2) A_1A_2 [a(A_1 + A_2) - 2b] = 0 \end{aligned}$$

en het eerste lid van (f')

$$\frac{\tau}{bN} \{A_1A_2A_3(A_2 - A_3) + A_1A_2A_3(A_3 - A_1) + A_1A_2A_3(A_1 - A_2)\} = 0.$$

De algemeene integraal is dus

$$(y - A_1x - B_1)^2 (y - A_2x - B_2)^2 (y - A_3x - B_3)^2 = Const.$$

waarin

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 &= (A_2 - A_3) (aA_1^2 - 2bA_1 - a) : \\ & (A_3 - A_1) (aA_2^2 - 2bA_2 - a) : (A_1 - A_2) (aA_3^2 - 2bA_3 - a). \end{aligned}$$

Had nu de derdemachtsvergelijking in A twee geconjugueerd imaginaire wortels dan zouden de corresponderende particuliere integralen y_1 en y_2 ook geconjugueerd imaginair zijn en zoude de algemeene integraal slechts reëel kunnen zijn wanneer $\lambda_1 = \lambda_2$. Dit zoude echter vorderen $b'a + b' = 0$ wat uitgesloten is daar deze gevallen reeds

Art. 6 en Art. 4 behandeld zijn. Wij moeten dus den eisch stellen dat de wortels der derdemachtsvergelijking alle reëel zijn. In deze onderstelling is nu gemakkelijk te zien dat de gevonden integraal voor kleine waarden van x en y weer ontwikkeld kan worden in den vorm

$$x^2 + y^2 + F_3 + F_4 + \dots = \text{Const.}$$

Derhalve is ook in dit geval de oorsprong een middelpunt.

8. Stellen we in de derde plaats

$$a' = b \text{ volgens (6) en } 2b' = 3a + 5c \text{ volgens (7).}$$

Onderzoeken we nu de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + bx^2 + (3a + 5c)xy - by^2}{y + ax^2 + 2bxy + cy^2} = \frac{-x + Y}{y + X}$$

Hier is $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 5(a + c)x$ en, wanneer wij constante factoren weglaten

$$P_0 = 2$$

$$P_1 = y$$

$$P_2 = bxy + (4a + 5c)y^2$$

$$P_3 = -\frac{b}{3}(a + 2c)x^3 + b^2x^2y + b(8a + 9c)xy^2 + \\ + \frac{1}{3}(4a^2 + 115ac + 3b^2 + 75c^2)y^3.$$

Ook van het bestaan van

$$P_4 = s_0x^4 + s_1x^3y + s_2x^2y^2 + s_3xy^3 + s_4y^4$$

zijn we verzekerd, terwijl

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = -\frac{b}{3}[8a^2 + 10ac + 3b^2 + 10c^2]$$

$$s_2 = 12b^2(a + c)$$

$$s_3 = b[44a^2 + 107ac + 3b^2 + 66c^2]$$

$$s_4 = \frac{1}{6}[308a^3 + 1245a^2c + 57ab^2 + 1675ac^2 + 69b^2c]$$

Verder moeten de coëfficiënten van

$$P_5 = t_0x^5 + t_1x^4y + t_2x^3y^2 + t_3x^2y^3 + t_4xy^4 + t_5y^5$$

voldoen aan de voorwaarden

$$\begin{aligned}
t_1 &= (9a + 5c)s_0 + bs_1 \\
2t_2 - 5t_0 &= 8bs_0 + (11a + 10c)s_1 + 2bs_2 \\
3t_3 - 4t_1 &= 4cs_0 + 5bs_1 + (13a + 15c)s_2 - 3bs_3 \\
4t_4 - 3t_2 &= 3cs_1 + 2bs_2 + (15a + 20c)s_3 + 4bs_4 \\
5t_5 - 2t_3 &= 2cs_2 + bs_3 + (17a + 25a)s_4 \\
-t_4 &= cs_3 - 4bs_4
\end{aligned}$$

Deze zijn daardoor geheel bepaald. Stelt men nu

$$P_6 = u_0x^6 + u_1x^5y + \dots + u_6y^6$$

dan moet

$$\begin{aligned}
u_1 &= (10a + 5c)t_0 + bt_1 \\
2u_2 - 6u_0 &= 10bt_0 + (12a + 10c)t_1 + 2bt_2 \\
3u_3 - 5u_1 &= 5ct_0 + 7bt_1 + (14a + 15c)t_2 + 3bt_3 \\
4u_4 - 4u_2 &= 4ct_1 + 4bt_2 + (16a + 20c)t_3 + 4bt_4 \\
5u_5 - 3u_3 &= 3ct_2 + bt_3 + (18a + 25c)t_4 + 5bt_5 \\
6u_6 - 2u_4 &= 2ct_3 - 2bt_4 + (20a + 30c)t_5 \\
-u_5 &= ct_4 - 5bt_5.
\end{aligned}$$

Dit vordert

$$5u_1 + (3u_3 - 5u_1) + (5u_5 - 3u_3) + 5(-u_5) = 0$$

of

$$-\frac{20}{3}bt_1 + (10a + 6c)(2t_2 - 5t_0) + \frac{4}{3}b(3t_3 - 4t_1) +$$

$$+\frac{1}{3}(34a + 30c)(4t_4 - 3t_2) + 4b(5t_5 - 2t_3) + \frac{1}{3}(190a + 210c)(-t_4) = 0$$

d.i.

$$(a + c)[2bs_0 + (11a + 9c)s_1 + 6bs_2 + (17a + 27c)s_3 - 14bs_4] = 0$$

of

$$b(a + c)(ax + b^2 + 2c^2) = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Is $b = 0$ dan is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + (3a + 5c)xy}{y + ax^2 + cy^2}$$

die reeds in Art. 5 behandeld is.

Is $a + c = 0$, dan is de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + bx^2 - 2axy - by^2}{y + ax^2 + 2bxy - ay^2}$$

die in Art. 7 besproken werd.

Is $ac = -b^2 - 2c^2$, dan wordt de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cx + bcx^2 - (3b^2 + c^2)xy - by^2}{cy - (b^2 + 2c^2)x^2 + 2bcxy + c^2y^2}$$

Om deze vergelijking op te lossen vragen we of zij als particuliere integraal een kegelsnede

$$x^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

toelaat. Dan moet de vergelijking

$$\frac{x + Hy + G}{Hx + By + F} = \frac{-cx + bce^2 - (3b^2 + c^2)xy - bcy^2}{cy - (b^2 + 2c^2)x^2 + 2bcxy + c^2y^2}$$

identiek zijn met

$$(x^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C)(ax + \beta y) = 0.$$

Dit is het geval voor $\alpha = -(b^2 + c^2)$, $\beta = 0$

$$H = \frac{c}{b}, \quad B = \frac{c^2}{b^2}, \quad G = 0, \quad F = \frac{c}{b^2}, \quad C = \frac{c^2}{c^2(b^2 + c^2)}$$

dus voldoet de kegelsnede

$$(bx + cy)^2 + 2cy + \frac{c^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

Op dezelfde wijze onderzoekende of voldaan kan worden door een kromme van den derden graad, zoo vindt men als particuliere integraal

$$(bx + cy)^3 + 3cy(bx + cy) + 3cy + \frac{c^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

Hieruit vindt men nu dat de algemeene integraal is

$$\left\{ (bx + cy)^3 + 3cy(bx + cy) + 3cy + \frac{c^2}{b^2 + c^2} \right\}^2 = Const. \\ \times \left\{ (bx + cy)^2 + 2cy + \frac{c^2}{b^2 + c^2} \right\}^3.$$

Voor kleine waarden van x en y vindt men nu weer dat deze integraal zich laat ontwikkelen in den vorm

$$x^2 + y^2 + F_3 + F_4 + \dots = Const$$

Ook hier is dus de oorsprong een middelpunt.

Resumeerende vinden wij dus, dat wanneer de differentiaal vergelijking herleid is tot den vorm

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + a'x^2 + 2b'xy - a'y^2}{y + ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

de oorsprong een middelpunt is alleen in de volgende vier gevallen

1. $a' = b$ en $a + b' = 0$
2. $a' = b = 0$
3. $a' = b$ $a + c = 0$ en de wortels van $aA^3 - 3bA^2 + (2b' - a)A + b = 0$ reëel
4. $a' = b$, $2b' = 3a + 5c$ en $ac + b^2 + 2c^2 = 0$.

In de overige gevallen is de oorsprong een brandpunt voor de reëele integraalkrommen.

Natuurkunde. — De Heer J. D. VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan: „*Opmerkingen over de grootte der volumina van de coëxisterende fasen van een enkele stof.*” (I).

De kromme lijn, welke de voorstelling is van de volumina der coëxisterende fasen als functie van T is in groote trekken bekend. Het is een kromme, welke in het kritisch punt een maximum bezit bij een volume, dat gelijk is aan v_{b_g} . De waarde van v zou bij stoffen, waarbij de grootte b niet variabel is, gelijk zijn aan 3. Maar bij stoffen, waarbij b wel met het volume veranderlijk is, is v kleiner dan 3. Naarmate deze veranderlijkheid sterker is zal v kleiner zijn, en bij benadering gevonden kunnen worden uit de betrekking $sv = 8$; of nauwkeuriger, iets kleiner dan 8. In het kritisch punt ontmoeten elkander de vloeistoftak en de dampnak. Bij die ontmoeting heeft de kromme een vloeiend verloop. Ofschoon deze kromme lijn experimenteel slechts bepaald kan worden bij temperaturen boven het vriespunt, bestaat er alle grond om de beide takken te beschouwen als theoretisch bestaande ook bij lagere temperaturen. Zelfs bij temperaturen boven het vriespunt daalt het vloeistofvolume beneden de waarde van b_g . By ether bijv. is volgens de bepalingen van SYDNEY YOUNG het coëxisterend vloeistofvolume bij 0° het $\frac{1,3583}{3,81}$ gedeelte van het kritisch volume, terwijl de waarde van b_g niet veel verschillen kan van het $\frac{1}{2,1}$ gedeelte van v_k . En bij lagere temperaturen is dit geregeld het geval. Aan den dampkant neemt bij het dalen der temperatuur het volume voortdurend toe wegens het in sterke mate dalen van de drukking, en steeds nauwkeuriger is de betrekking vervuld: $pv = RT$. Dit geldt zoowel voor anormale als voor normale stoffen. Zelfs bij azijnzuur, mits men in het oog houdt, dat daarbij de waarde van R voor bi-azijnzuur bedoeld wordt, en men azijnzuur niet als een associeerende maar als een dissocieerende stof beschouwt. Maar zoolang het volume nog eindige waarde heeft, is er nog afwijking van de wet der volkomen gassen, en de waarnemingen van SYDNEY YOUNG (Proc. Royal Dublin Society, June 1910) bevatten een kostbare bijdrage om over de oorzaak van die afwijking in het klare te kunnen komen.

Dat er afwijking bestaan zal, is natuurlijk volgens de toestandsvergelijking te wachten, zelfs al zou men schijnassociatie geheel buiten rekening laten. Maar de grootte der afwijking zou in dat geval nauwkeurig kunnen berekend worden. De vraag kan nu beantwoord worden of er behalve deze oorzaak van afwijking nog een

tweede aanwezig is — en of het aanwezig zijn van schijnassociatie, zelfs in zoo groote volumes als die der verzadigde dampen, moet aangenomen worden en voldoende is ter verklaring van gevonden verschillen.

Laat men schijnassociatie buiten rekening, dan zou gelden:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

of

$$\frac{vp}{RT} = \frac{v}{v-b} - \frac{a}{vRT}$$

of

$$1 - \frac{vp}{RT} = \frac{a}{vRT} - \frac{b}{v-b} \dots \dots \dots (a)$$

Voor de herleiding, welke ik het tweede lid der vergelijking (a) zal laten ondergaan, verwijs ik naar mijn „Schijnassociatie” en naar mijn mededeeling in het Verslag der vorige maand.

Voor de grootheid $\frac{a}{vRT}$ zal ik schrijven $\frac{v_k a}{v v_k RT_k} \frac{T_k}{T}$, of $\frac{v_k f_k - 1}{v} \frac{T_k}{s} \frac{1}{T}$; en ofschoon f_k niet absoluut nauwkeurig te bepalen is, en dit ook met s het geval is, kennen wij toch $\frac{f_k - 1}{s}$ vrij nauwkeurig. Schrijven

wij $\frac{T}{T_k} = m$, dan vinden wij:

$$\frac{a}{vRT} = \frac{v_k f_k - 1}{v} \frac{1}{s} \frac{1}{m}$$

De waarde van $\frac{pv}{RT}$ geeft SYDNEY YOUNG bij zijn waarnemingen in zeer veel gevallen zelf op. In de laatste kolom van zijn talrijke tabellen geeft hij n.l. de verhouding van de werkelijke tot de theoretische densiteit van den verzadigden damp. Door theoretische densiteit verstaat hij die, welke beantwoorden zou aan de formule $\frac{pv'}{RT} = 1$. Zoo geeft hij voor ether van 0° voor die verhouding het getal 1,028. Dit beteekent dus dat voor verzadigden damp van ether bij 0° de waarde van $\frac{pv}{RT}$ gelijk is aan $\frac{1}{1,028}$. Door substitutie in vergelijking (a), hebben wij te onderzoeken of

$$1 - \frac{1}{1,028} = \frac{v_k f_k - 1}{v} \frac{1}{s} \frac{1}{m} - \frac{b}{v-b}$$

Nu is gebleken (zie Verslag Maart 1911) dat zelfs bij het kritisch

volume b slechts onbeduidend van b_0 afwijkt. A fortiori zal dit bij groote dampvolumes het geval zijn; en wij kunnen dus schrijven:

$$1 - \frac{1}{1,028} = \frac{v_k}{r} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{m} - \frac{b_0}{v_k r} - \frac{r}{b_0} \right\}$$

of, met invulling van de door SYDNEY YOUNG bepaalde waarden van v_k en r :

$$1 - \frac{1}{1,028} = \frac{3,81}{1209} \left\{ \frac{6}{3,813} - \frac{466,8}{273} - \frac{1}{r} - \frac{r}{v - b_0} \right\}.$$

Voor $\frac{v}{v - b_0}$ kunnen wij, nu het zulke groote volumes betreft, wel zonder bezwaar de eenheid stellen, en r zal bij ether ook niet veel verschillen van $\frac{8}{s}$, en dus $\frac{1}{r}$ gelijk gesteld kunnen worden aan 0,48.

De waarde van het eerste lid is gelijk aan 0,0273, en die van het tweede lid circa 0,007. Doet men dergelijke berekeningen bij hoogere temperaturen, bijv. voor ether bij 100° , dan vindt men voor de waarde van het eerste lid een grooter getal, n.l. 0,172, en evenzoo voor het tweede lid een grooter getal, n.l. 0,107. Het verschil is echter grooter geworden. Eerst bij veel hoogere temperatuur zou dit verschil weder kleiner worden — maar de verhouding zou steeds naderen tot de eenheid. Bij T_k is de waarde van het eerste lid gelijk aan $1 - \frac{1}{s}$, en evenzoo zou na eenige herleiding het tweede lid deze waarde aannemen. En wat hier voor ether is opgemerkt, geldt bijna onveranderd voor alle door SYDNEY YOUNG onderzochte stoffen, al is er in de getallenwaarde eenig verschil, waarover hierna nader gehandeld zal worden.

Schrijft men het tweede lid in den oorspronkelijken vorm:

$$\frac{a}{rRT} - \frac{b}{v - b},$$

dan zou de meening kunnen opkomen, dat, door voor a een temperatuurfunctie te nemen, welke met afnemende waarde van T grooter wordt, het aangewezen verschil zou kunnen worden weggenomen. Dit is echter slechts schijn, en dit is een der redenen, waarom ik voor $\frac{a}{rRT}$ den vorm heb gekozen $\frac{v_k f_k - 1}{v} \frac{1}{s} \frac{1}{m}$. Dat dit slechts schijn is, en dat wij, door voor a een dergelijke functie van T te stellen, gevaar loopen het verschil nog grooter te maken, kan aldus worden aangetoond.

Stellen wij n.l. voor a in de plaats $af \left(\frac{T_k}{T} \right)$, dan hebben wij:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{aq}{r^2} \left(\frac{T_k}{T} \right)$$

$$T \frac{dp}{dT} = \frac{RT}{v-b} + \frac{a}{r^2} \varphi' \left(\frac{T_k}{T} \right) \frac{T_k}{T}$$

en

$$T \frac{dp}{dT} - p = \frac{a}{r^2} \left\{ \varphi' \left(\frac{T_k}{T} \right) \frac{T_k}{T} + \varphi \left(\frac{T_k}{T} \right) \right\}$$

en

$$\frac{T}{p} \frac{dp}{dT} - 1 = \frac{a}{pv} \varphi \left(\frac{T_k}{T} \right) + \frac{T_k}{v} \varphi' \left(\frac{T_k}{T} \right)$$

Bij T_k hebben wij dus:

$$\frac{j_k-1}{s} = \frac{a}{v_k T_k m} \{ \varphi + \varphi' \}_{kr}$$

Voor $\varphi \left(\frac{T_k}{T} \right) = \left(\frac{T_k}{T} \right)^m$ wordt $\frac{a}{v_k R T_k} = \frac{j_k-1}{s} \frac{1}{1+\mu}$, en bijgevolg:

$$\frac{a \left(\frac{T_k}{T} \right)^m}{v R T} = \frac{r_k-1}{v} \frac{j_k-1}{s} \frac{1}{1+\mu m^m}$$

Vergelijken wij deze waarde met die welke wij verkregen, in de onderstelling van standvastige a , dan zien wij dat zij

$$(1+\mu) m^m$$

maal kleiner is. Deze uitdrukking kan zoowel grooter dan 1 als kleiner dan 1 zijn. Voor $\mu = 1$ wordt zij $2m$; en dus voor alle waarden van m boven $\frac{1}{2}$, wordt de waarde, die wij grooter gewenscht hadden, in tegendeel kleiner.

Evenmin zou de onderstelling dat b een temperatuursfunctie is, bij kunnen dragen om $\frac{a}{v R T}$ grooter te maken. In dat geval zouden wij vinden:

$$\frac{a}{v R T} = \frac{r_k}{v} \left\{ \frac{j_k-1}{s} - \frac{r_k}{(v_k-b_k)^2} \left(\frac{db}{dT} \right)_k \right\} \frac{1}{m}$$

De verklaring van dit schijnbaar paradoxaal resultaat is natuurlijk daarin te zoeken, dat als a een temperatuursfunctie zou zijn geweest, ook j_k-1 veel grooter zou geweest zijn, en wij kunnen dit als een indirect bewijs aanmerken, dat de grootheid a geen temperatuursfunctie is.

Wij hebben de oorzaak dat vergelijking (a) niet geldt dus elders

te zoeken, en de vraag te stellen of het bestaan van schijnassociatie rekenschap kan geven van de gevonden verschillen.

Uit den vorm voor p , in het geval van schijnassociatie, nl.

$$p = \frac{RT}{v-b} \left\{ 1 - \frac{n-1}{n} x \right\} - \frac{a \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2}{v^2}$$

leiden wij af:

$$1 - \frac{pv}{RT} - \left(\frac{a}{vRT} - \frac{b}{v-b} \right) = x \left\{ \frac{v}{v-b} \frac{n-1}{n} - \frac{a}{vRT} \left(1 - \frac{x}{4} \right) \right\}.$$

Bij de toepassing dezer formule zullen wij, als het groote dampvolumes betreft, wel b gelijk mogen stellen aan b_g en $\frac{v}{4}$ in het tweede lid mogen verwaarloozen, en wij zullen dus deze formule schrijven onder den vorm:

$$1 - \frac{pv}{RT} - \frac{v_k}{v} \left(\frac{f_k - 1}{sm} - \frac{1}{r} \frac{c}{v-b_g} \right) = x \left\{ \frac{v}{v-b_g} \frac{n-1}{n} - \frac{v_k (f_k - 1)}{v sm} \right\}. \quad (\beta)$$

Zoolang v groot is ten opzichte van v_k kan natuurlijk $\frac{v}{v-b_g} = 1$ gesteld worden.

Deze vergelijking (β) kan dienen om de waarde van x in den verzadigten damp te berekenen.

De waarde van het eerste lid van (β) is volgens de genoemde waarnemingen in de volgende tabel voor ether gegeven.

0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
0,0203	0,0219	0,026	0,0335	0,037	0,0375	0,043
70°	80°	90°	100°	110°	120°	
0,052	0,058	0,064	0,066	0,0675	0,07	
130°	140°	150°	160°	170°	180°	
0,071	0,07	0,062	0,057	0,045	0,016.	

Bij T_k moet dit verschil wel niet gelijk 0 zijn, maar toch slechts een kleine fractie van x_k , gelijk ik aan het slot van mijn mededeeling in de vorige maand heb aangetoond. Deze berekende waarden kunnen niet als volkomen juist worden beschouwd; vooral om de onzekerheid in de waarde van v en van f_k . Deze laatste grootheid heb ik gelijk 7 gesteld. Waarschijnlijk is het getal 0,016 bij 180° te laag.

De factor van x in vergelijking (β) is de waarde van $-\frac{dv}{dx_{vT}} \frac{1}{RT}$,

ten minste met hoogen graad van benadering. Bij zeer lage temperatuur is de limietwaarde gelijk aan $\frac{n-1}{n}$. Bij het stijgen van T neemt deze grootheid af. Maar wij hebben tot zoodanige waarde van n besloten, $n > f$, dat de factor van x zelfs bij T_k nog positief is.

Neemt men $n = 9$, dan zou bij 0° graden $x = 0,023$ zijn, en met stijgende temperatuur klimmen en de volgende waarde aannemen:

	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
x	0,088	0,095	0,103	0,113	0,12	0,122	0,13	0,136.

Deze waarden van x wijken niet al te zeer af van de formule;

$$\log_{10} \frac{x_k}{x} = 1,2 \frac{1-m}{m}$$

en wijzen dan op een waarde van $x_k = 0,16$.

Maar deze betrekking kan niet gelden tot in de onmiddellijke nabijheid van $m = 1$. Dan zou de kromme lijn, welke den gang van x als functie van m voorstelt, de lijn $m = 1$ onder een scherpen hoek snijden, terwijl zij daaraan rakend moet verlopen. Dit volgt

dan ook uit de differentiaalvergelijking, welke $\frac{T dx}{x dT}$ doet afhangen

van twee termen, waarvan een eenige malen $\frac{T dr}{v dT}$ bedraagt. Daar

$\frac{T dx}{v dT}$ bij $T = T_k$ oneindig groot is, zal ook $\frac{T dr}{v dT}$ oneindig groot zijn.

De factor van $\frac{T dr}{v dT}$ is echter klein. De afronding der x lijn zal dus aan de dampzijde van den top minder breed zijn — en $x_k = 0,16$ zal als een benaderde waarde mogen beschouwd worden.

Ook bij andere door SYDNEY YOUNG onderzochte stoffen heb ik een dergelijk onderzoek ingesteld — en in hoofdzaak een dergelijke reeks van waarden voor x gevonden, met kleine verschillen in den gang, die misschien later stof tot onderzoek opleveren.

Voor normaal pentaan, dat met bijzondere zorg onderzocht schijnt te zijn, daar tot in de onmiddellijke nabijheid van T_k bepalingen zijn gedaan, heb ik den vorm voor x geheel nauwkeurig voorgesteld en aan de proefondervindelijke bepalingen getoetst. De kritische temperatuur wordt opgegeven gelijk aan $197,2^\circ$ en metingen zijn gedaan bij:

$196^\circ, 196,5^\circ, 196,8^\circ, 197^\circ$ en $197,1^\circ$.

De nauwkeurige vorm voor x is de volgende:

$$\frac{r}{v-b} - \frac{v_k(f-1)}{v sm} - \frac{pv}{RT} = x \left\{ \frac{n-1}{n} \frac{r}{v-b} - \frac{v_k(f-1)}{v sm} \left(1 - \frac{x}{4} \right) \right\}$$

De waarden van f' heb ik gelijk 7, die van $s = 3,766$, die van $b = 2,05$ en van $n = 9$ genomen, en daarmede vindt men dan voor de waarde van het eerste lid:

$$0,019, 0,023, 0,019, 0,01, 0,023.$$

Voor den factor van x vindt men:

$$0,0193, 0,0176, 0,0146, 0,012, 0,0129$$

en voor x 0,1 0,13, 0,13, 0,083, 0,18

Bedenkt men hoeveel getallenwaarden, die niet absoluut nauwkeurig bekend zijn, voor de berekening hebben moeten dienen, en in hoe sterke mate een fout in de metingen op het gering bedrag der vormen, waardoor x bepaald moet worden, invloed heeft dan zal de overeenstemming bevredigend moeten genoemd worden.

Ik heb dit onderzoek ondernomen 1° om te zien of in de waarnemingen steun te vinden zou zijn voor het bestaan van schijn-associatie, maar voornamelijk 2° om te beproeven te vinden, waaraan het anormale van de alcoholen toe te schrijven is. Daarom heb ik ook getracht de waarde van x te bepalen voor ethyl-alcohol.

Dezelfde redenen die mij tot het bestaan van schijn-associatie in het algemeen deden besluiten, bestaan ook bij alcohol. Daar zeer dicht bij T_k , bijv. bij T slechts $0,6^\circ$ verschillend van $T_k = 516,1$, $\frac{T dp}{p dT} - 1$ niet merkbaar zal verschillen van $f_k - 1$, en $\frac{p'}{p_k}$ uiterst weinig verschillen van 1; zoodat als vereenvoudiging kan gevraagd

worden of $\frac{r_1 v_2}{v_k^2}$ gelijk aan $1 + (1-m)$ of gelijk aan $1 + \sqrt{1-m}$ ge-

vonden wordt. Nu vinden wij voor alcohol bij $1 - m = \frac{0,6}{516,1} = 0,001164$,

de waarde van $\frac{r_1 v_1}{v_k^2} = 1,025$. Nu is $0,025$ zeker niet gelijk aan $0,001164$, maar van de orde van $\sqrt{1-m} = 0,034$. Men behoeft $v_k = 3,63$ door SYDNEY YOUNG opgegeven, slechts gelijk $3,61$ aan te nemen om de waarde $0,025$ tot $0,34$ te brengen. Men heeft dus reden om even als bij de zoogenaamde normale stoffen ook bij alcohol te verwachten, dat in den verzadigden damp een waarde voor x zal worden gevonden. Ik herinner er hier aan, dat ik reeds veel vroeger ook bij waterdamp van 100° tot het bestaan van molekuulcomplexen heb besloten. Anders zou het volume, dat theoretisch gelijk zou zijn aan 1689 niet gedaald zijn tot 1649 — een daling te groot om aan het bestaan van a en b in de toestandsvergelijking te kunnen worden toegeschreven.

Men vindt dan ook op de bovenstaande wijze te werk gaande, in den verzadigden damp van alcohol een waarde van x , en in de

waarde van x een gang, welke niet veel afwijkt van dien, welke bij normale stoffen voorkomt. Trouwens ook in de betrekking, welke ik in mijn mededeeling der vorige maand tusschen de kritische groot-heden meen gevonden te hebben, nl. $\frac{s^2}{f_{-1}} = \frac{64}{27}$ gedraagt alcohol zich normaal. Met $f_k = 7,9$, tot welke waarde ik besloot uit SYDNEY YOUNG's waarnemingen berekent men $s = 4,04$, terwijl YOUNG daarvoor, als door de waarnemingen bepaald, de waarde 4,026 opgeeft.

Past men ter berekening van x formule (7) toe, n.l.

$$\left(\frac{r}{r-b_g} - \frac{r_k f_{-1}}{r sm} - \frac{pv}{RT} \right) : x \left(\frac{n-1}{n} - \frac{r}{r-b_g} - \frac{r_k f_{-1}}{r sm} \right)$$

dan stuit men wel op eenige onregelmatigheden bij ethylalcohol.

Zoo wordt voor $\frac{pv}{RT}$, zoowel bij 0° als bij 10°, 20°, 30°, en 40°,

opgegeven een even groote waarde gelijk aan $\frac{1}{1,003}$. Bij 0° is

$\frac{r_k}{r} = \frac{3,63}{30140} = 0,00012$, wat $\frac{f_{-1}}{sm}$ maal genomen gelijk is aan $1,714 \times 1,89 \times 0,00012 = 0,00039$, en dus als men zich tot cijfers in de 3^{de} decimaal beperkt, te klein is om in rekening te komen.

Bij 0° zou men dan vinden $x = \frac{n}{n-1} 0,003$. Bij 40°, als $\frac{r_k}{r}$ gestegen

is tot $\frac{3,63}{3170}$, zou men x kleiner vinden en nauwelijks $\frac{n}{n-1} 0,001$.

Maar al stapt men over deze onregelmatigheid heen, dan treft het toch dat x bij 40° blijkbaar zooveel kleiner is bij alcohol dan het bij ether in die omstandigheden zijn zou, en dit brengt dus op de gedachte dat x bij alcohol sneller daalt met de temperatuur dan dat bij ether het geval is, of misschien bij alle temperaturen kleiner is.

Dit laatste schijnt bij hoogere temperaturen weinig het geval te zijn.

Zoo vindt men de waarde van het eerste lid voor alcohol bij 130° gelijk aan 0,044 terwijl deze waarde bij ether bij een volume dat evenveel maal het kritisch volume bedraagt, wat tusschen 60° en 70° het geval is, gelijk is aan 0,05. Bij 190° neemt het 1^{ste} lid een maximumwaarde aan, welke gelijk is aan 0,067, welke maximumwaarde bij ether slechts weinig grooter is. En deze maximumwaarde komt bij beide stoffen voor bij volumes, die circa evenveel malen het kritisch volume zijn.

De slotsom is dus dat alcohol, wat de verzadigde dampvolumes betreft, zich niet merkbaar onderscheidt van de zoogenaamde normale stoffen. Maar methylalcohol gedraagt zich wel normaal, èn in de

waarde van $\frac{s^2}{f-1}$, en in de waarde van $\frac{v_1 v_2}{v_k^2}$ dicht bij T_k . Bij een waarde van $1-m = 0,0029$, en $\sqrt{1-m} = 0,054$, is $\frac{v_1 v_2}{v_k^2}$ reeds gelijk aan 1,14.

Past men ook bij methylalcohol, voor den verzadigden damp, de formule toe :

$$r - b_g - \frac{v_k f - 1}{r - sm} - \frac{pr}{RT} = -x \frac{r \left(\frac{dp}{dx} \right)_{rT}}{RT}$$

en berekent men uit de gegevens van SYDNEY YOUNG de waarde van het eerste lid, dan vindt men evenals bij al de andere stoffen wel het bestaan van een maximumwaarde, maar deze ligt veel dichtër bij T_k , en is veel grootër. Men vindt dan voor de waarde van het eerste lid bij de volgende reeks van temperaturen :

0°	40°	120°	200°	210°	220°	225°	230°
0,009	0,028	0,072	0,094	0,124	0,154	0,126	0,119

Het maximum komt voor bij $m = \frac{493}{513}$, terwijl dit bij ether voorkomt bij $m = \frac{403}{466,8}$. Ook in de volumes is groot verschil. Bij methylalcohol is $\frac{v_k}{v} = \frac{3,674}{11,58}$ en bij ether $\frac{3,63}{27,49}$. Als dit afwijkende in het gedrag van methylalcohol ook aan associatie, hetzij schijn-associatie of werkelijke, moet worden toegeschreven, dan komt deze stof toch in zoover met alle andere overeen, dat er een waarde voor $\left(\frac{dp}{dx} \right)_{rT}$ is, dat deze zelfs tot T_k negatief is, en dat de positieve waarde van $\frac{r \left(\frac{dp}{dx} \right)_{rT}}{RT}$ met het klimmen der temperatuur afneemt en bij T_k zelf uiterst klein is geworden. Maar x_k zal veel grootër zijn dan bij de andere stoffen.

Maar zelfs, al beperkt men zich tot de normale stoffen, dan blijkt de waarde van x_k veel grootër te zijn, dan ik vermoedde, toen ik mijn „Schijnassociatie” schreef. Wel heb ik toen bijgevoegd, dat ik niet durfde beweren, dat de daar genoemde waarden juist zouden zijn. En onmiddellijk na het verschijnen van mijn mededeeling heb ik ingezien dat alle toen voor x genoemde getallenwaarden herziening zouden eischen, waarmede ik in deze mededeeling een begin heb gemaakt. Enkele van de toen genoemde waarden zouden zelfs labiele fasen geven, wat ik later hoop aan te toonen. Bij de beoordeeling

van de grootte der waarde van x ook in den verzadigden damp, mag men niet over het hoofd zien, dat als men een molekuulcomplex als een samengesteld molekuul beschouwt, het aantal samengestelde molekulen het n^{de} gedeelte van deze waarde van x bedraagt. Het aantal enkelvoudige en het aantal samengestelde molekulen staat dan tot elkander als $1 - x$ tot $\frac{x}{n}$.

Ten slotte een opmerking over de grootte van $-\frac{T dv}{v dT}$ voor de verzadigde dampphasen. Schrijven wij $\frac{pv}{RT} = \varepsilon$, waarin ε de waarde is, welke men verkrijgt, als men de getallen uit de laatste tabel van SYDNEY YOUNG op de eenheid deelt. Bij zeer lage temperaturen is deze waarde slechts weinig kleiner dan 1, bijv. bij ether van 0° circa $1 - 0,028$. Bij het stijgen der temperatuur neemt ε af, en is bij T_k gedaald tot $\frac{1}{s}$. Uit $\frac{pv}{RT} = \varepsilon$ leidt men af:

$$\frac{T dp}{p dT} + \frac{T dx}{v dT} - 1 = \frac{T d\varepsilon}{\varepsilon dT}$$

waaruit volgt:

$$-\frac{T dv}{v dT} = \frac{T dp}{p dT} - 1 = \frac{T d\varepsilon}{\varepsilon dT}$$

Nu is $\frac{T d\varepsilon}{\varepsilon dT}$ een negatief getal, en $-\frac{T d\varepsilon}{\varepsilon dT}$ is bij zeer lage temperaturen uiterst klein. Bij het nulpunt der temperatuur zou de waarde gelijk 0 zijn, en zelfs bij $m = \frac{1}{2}$ is zij nog kleiner dan bijv. $\frac{1}{4}$.

Maar zij stijgt voortdurend en bij T_k , waarbij $-\frac{T dv}{v dT}$ oneindig groot is, zal zij ook oneindig groot moeten zijn. Er is dus ook een temperatuur, waarbij zij gelijk 1 is. Men kan uit de tabel van SYDNEY YOUNG berekenen bij welke temperatuur dit plaats vindt, en waarbij dus $-\frac{T dv}{v dT} = \frac{T dp}{p dT}$ is. Deze temperatuur beantwoordt aan $m = 0,79$.

Bij de verschillende stoffen varieert m slechts weinig. Wij komen nader op deze temperatuur terug, als wij ze beschouwen zullen als de temperatuur, waarbij het produkt pv maximumwaarde heeft.

De grootte $-\frac{T dv}{v dT}$ is dus beneden deze temperatuur kleiner dan $\frac{T dp}{p dT}$, maar in het interval $m = 0,78$ tot $m = 1$, is zij groter, met snelheid aangroeiend, naarmate men dichter tot T_k nadert.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N^o. 121 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. W. J. DE HAAS: „*Isothermen van tweeatomige gassen en hun binaire mengsels.* VIII. *Controle-bepalingen met den volumenometer.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

§ 1. *Inleiding.* Met het oog op het bepalen van de samendrukbaarheid van de dampen van waterstof noodigde Prof. KAMERLINGH ONNES mij uit, den voor deze metingen bestemden volumenometer (zie Med. N^o. 84) in studie te nemen. In het volgende wordt dit onderzoek medegedeeld. Het omvat tevens de in Med. N^o. 117 vermelde, ten behoeve van de bepaling omtrent de compressibiliteit der dampen van waterstof aangebrachte, verbeteringen, voor welke aldaar nader naar onze latere publicatie betreffende dat onderzoek werd verwezen.

De beoogde bepalingen stellen zeer hooge eischen aan de metingen met den volumenometer.

Terwijl bij de in mededeeling N^o. 117 beschreven onderzoekingen de uit den dilatometer in den volumenometer gelaten gassen volumetrisch gemeten konden worden onder vrij hoogen druk ($1-\frac{1}{2}$ atmosfeer) en derhalve die drukmeting slechts op 0.05 m.m. zeker behoefde te zijn, is het wenschelijk bij de onderzoekingen naar de samendrukbaarheid van waterstof bij zeer lage temperatuur (-259 tot -252°), tot op een vijfduizendste van hun bedrag drukken te meten, die tot 10 cM. dalen, zoodat eene nauwkeurigheid van 0.02 mM. noodig wordt. Deze zeer lage te meten drukken stellen zeer verhoogde eischen aan de druksbepaling. Mijn onderzoek had in 't bijzonder ten doel na te gaan op welke wijze aan dezen verhoogden eisch kon worden voldaan ¹⁾ en de zekerheid te verkrijgen dat dit bereikt was.

§ 2. *Constanten.* I. *Bepaling der volumina.*

Zooals in Med. N^o. 117 § 3 reeds werd vermeld, werd de in Med. N^o. 84 beschreven nauwkeurige volumenometer van het cryogeen laboratorium ²⁾ aan een hernieuwde calibratie onderworpen, waardoor tevens eene vergelijking met de in Med. N^o. 88 en N^o. 92 vermelde mogelijk werd en een oordeel geveld kon worden over de te bereiken

¹⁾ Eene discussie van de toenmaals bereikte nauwkeurigheid werd door KEEZOM in Meded. N^o. 88 (1903) gegeven.

²⁾ De volumenometer met hulptoestellen is afgebeeld op de linkerhelft van Pl. I Meded. N^o. 117, waarbij behoort fig. 1 Pl. I Med. N^o. 84 met wijzigingsfiguurtje deze Mededeeling Pl. I fig. 2. Zie verder § 4 dezer Mededeeling met Pl. I fig. 2. Voor de opstelling van volumenometer, schaal, kathetometer enz. zie Med. N^o. 117. Voor den thermostaat zie § 5 dezer Mededeeling.

nauwkeurigheid. Er werd een fijn uitgetrokken tuit met capillaire kraan onderaan den luchtvanger bij Eb_0 (Pl. I, Med. N^o. 84) aan-geblazen. De calibraties geschieden met kwik, waarmede het toestel bij hoog vacuum gevuld werd. Tijdens de calibraties werd de temperatuur van den volumenometer met behulp van den thermostaat (zie § 5) op $\frac{1}{40}^{\circ}$ constant gehouden ¹⁾).

TABEL I.
Volumina tusschen de merken.

	Afzonder- lijke bepa- lingen.	Gemiddelde	Afwijking van gemid- delde	Vorige calibratie (1902).	Onderlinge afwijking van beide calibraties.
Bol Eb_2 ²⁾	microliter				
1e calib.	25220	25229	1/5000		
2e „	25233				
3e „	25226				
4e „	25236				
Bol I.					
1e calib.	252584	252589	1/50000	252555	1/8000
2e „	252594				
Bol II.					
1e calib.	253565	253550	1/17000	253572	1/12000
2e „	253537				
Bol III en IV.					
1e calib.	505640	505640 ³⁾	1/2000000	505650	1/50000
2e „	505640 ⁶⁾				
Bol V.					
1e calib.	252854	252845	1/25000	1) Niet te ver- gelijken.	
2e „	252837				

¹⁾ Alvorens tot calibratie over te gaan werd het toestel uit- en inwendig gereinigd. Daarbij werd het schermje Eg_1 (Pl. I, Med. N^o. 84) door een nieuw vervangen en werden de glazen vensters van den mantel alvorens op nieuw ingezet te worden op hun optische eigenschappen onderzocht.

²⁾ Deze calibraties zijn in 1902 niet verricht.

De bollen Eb_1 (I, II, III, IV en V van fig. 1 Pl. I Med. N^o. 117) werden ieder twee maal, het hulpbolletje Eb_2 (verg. Pl. I Med. N^o. 84) en het halsje Eb_3 werden ieder viermaal gecalibreerd. Uit de volgende tabel waar de oude en nieuwe calibraties samengesteld zijn (de calibraties zijn alle op 20° C. herleid) blijkt door hunne uitstekende overeenstemming dat de methode der schermpjes geheel betrouwbaar is, daar sinds Med. N^o. 84 (1902) de stand der schermpjes aan de halsjes bevestigd geene veranderingen heeft ondergaan. Tevens blijkt dat de volumemeter in staat stelt volumina op $\frac{1}{10000}$ nauwkeurig te meten, mits de inhoud der kwikmenisci met voldoende zekerheid bekend is.

§ 3. *Bepaling der optische constanten.*

Wegens 1^o den prismatischen vorm der venstertjes, 2^o den niet verticalen stand van hunne voorvlakken, moet eene optische correctie aan de hoogteaflezingen in den volumemeter aangebracht worden. De correctie, welke het laatst genoemd werd, kan worden opgevat als te bestaan uit twee deelen, 1^o die ten gevolge van de afwijking van 90° van de helling in het invalsvlak van de lengteas van den toestel met den horizon, 2^o die ten gevolge van den hoek α_i die het voorvlak op eene door i aangegeven plaats maakt met de lengteas van den toestel.

Van deze wordt de eerste telkens bepaald met behulp van de afwijking van een bij inspelen aan de lengteas parallel schietlood of van een waterpas, dat op een loodrecht op de lengteas aangebracht vlak geplaatst is. Zoowel het laatstbedoelde vlak als het merk voor het schietlood zijn onwrikbaar aan den toestel verbonden. Men kan bij voldoende zorgvuldige waarneming van het schietlood eene nauwkeurigheid van 0.01 m.M. in de correctie aan de hoogteaflezing bereiken. Door het waterpas bij deze bepaling af te lezen kan men verder de meer eenvoudige aflezing van het waterpas voor de waarneming van het schietlood in de plaats stellen. Voor het geval, dat men niet verder dan 0.05 m.M. wil gaan, is een eenvoudige waarneming van het schietlood voldoende.

De hoeken der voorvlakken van de venstertjes op de door i aangegeven plaatsen met de lengteas zijn constanten van den toestel, die alleen wanneer de glaasjes afgenomen worden opnieuw moeten worden bepaald. De correctie aan de aflezingen ten gevolge van dezen hoek kan op tweeërlei wijze worden bepaald.

1^{ste} Methode. De correctie bij 't aflezen door een zuiver horizontalen lichtbundel aan te brengen, wanneer de lengteas van den toestel

zuiver verticaal gesteld is, bedraagt bij kleinen invalshoek:

$$\lambda \left(\theta - \frac{\theta}{n_{1,2}} \right)$$

waarin λ de lengte van den weg, die het licht in water doorloopt van het merk waarop ingesteld is, tot de voorzijde der vensters (bij de gebruikte toestel 8 cM.), θ de hoek¹⁾ van de normaal op de venstertjes met het horizontale vlak en $n_{1,2}$ de brekingsindex lucht, water. De hoek θ wordt met een aanslagwaterpas bepaald. Hierbij werd gebruik gemaakt van het waterpas van een kathetometer van de Société Genevoise (1 schaaldeel = 0,06). Het werd geplaatst op eene hulpinrichting (Pl. II fig. 1), die bestaat uit een nauwkeurig cilindrisch afgedraaiden arm R , rechthoekig bevestigd op eene stevige koperen plaat P . Deze plaat kon met behulp van 3 verstelbare schroeven, a , b en c , tegen een nauwkeurig verticaal gemaakt glazen vergelijkingsvlak zoodanig geplaatst worden, dat het op den arm R geplaatste niveau inspeelde. Werd vervolgens de aanslaghaak tegen de glazen venstertjes van den volumemeter gedrukt, dan kon men na het niveau weer te hebben laten inspelen uit het aantal omwentelingen van den verdeelden schroefkop van de schroef c , in verband met den van te voren bepaalden spoed en uitgemeten afstand van de punt van schroef c tot de lijn $a-b$ de hoek θ bepalen.

Uit deze volgt onmiddellijk met inachtneming van den brekenden hoek van het venstertje (de toepassing van het aanslagwaterpas onderstelt, dat de kromming verwaarloosd mag worden, hetgeen bij nauwkeurigheden tot op 0,05 m.M. bij spiegelglas wel altijd het geval zal zijn) de afleesfout.

De uitkomsten zijn medegedeeld in Tab. III kolom II (p. 1477).

De bij onze proeven gebruikte hulpinrichting voor het waterpas heeft nog niet toegelaten eene nauwkeurigheid grooter dan die welke overeenkomt met eene fout van ongeveer 0,3 (d. i. eene correctie van 0,01 m.M.) met voldoende zekerheid te verkrijgen.

De 2^e methode ter bepaling van de afleesfouten bestaat in het meten van de hoogten der middelste strepen op de schermpjes wanneer geen water in den mantel aanwezig is en eveneens wanneer zulks wel het geval is. Deze meting is eenvoudigheidshalve teruggebracht tot de meting van de hoogteverandering bij een der strepen

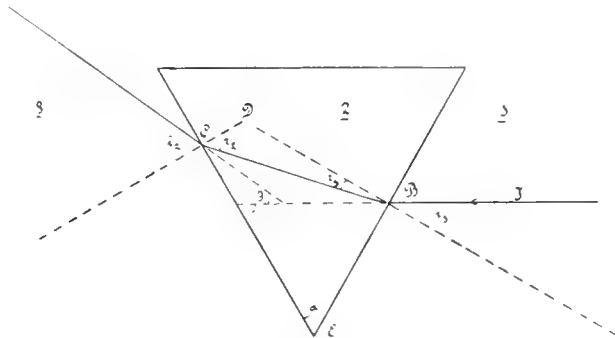
¹⁾ Men overtuigt zich gemakkelijk er van, dat voor eene nauwkeurigheid tot op 0,01 m.M. eene afwijking van den horizontalen stand van den kijker tot 1' (bij een afstand van kijker objectief tot merk waarop ingesteld wordt van ± 45 cM.) en de afwijking van het licht door het glas der halsjes, wanneer deze met zorg zijn vervaardigd, niet in aanmerking komt.

en de meting van de afstandsverandering der andere strepen tot deze ééne. Bij het meten der verschillen in hoogte van één streep toeh, moest telkenmale bij het in- en uitlaten der ongeveer 8 e.M. dikke waterlaag, de kathetometer in zijn geheel verplaatst worden om ingesteld te kunnen worden op den standaardmeter aan welks onveranderlijke opstelling en bescherming tegen temperatuurwisseling alle mogelijke zorg besteed werd.

Eene absolute hoogtemeting wordt door dit telkenmale verplaatsen van den kathetometer zeer tijdroovend, terwijl de bepaling van de verandering der afstanden van twee middelste strepen betrekkelijk eenvoudig is. Wat de bepaling zelve van de verandering van den afstand van elke streep tot de fundamenteele betreft, zij werd, ter betere verzekering van onveranderlijkheid in de op verschillende wijze waargenomen lengte, teruggebracht tot de meting van de veranderingen der onderlinge afstanden van telkens twee opvolgende middelste strepen.

De glazen vensters van den volumenometer worden in het volgende ook indien de stukken gekromd zijn) als prisma's beschouwd en wel met dien verstande, dat ieder der gedeelten (ook van eenzelfde glasplaat) waardoor men naar de schermpjes ziet een eigen brekenden hoek heeft. Deze brekende hoeken α_1 , α_2 enz. (geprojecteerd in het vlak dat bij de hoogtemeting met het verticale vlak door de as van den kijker zal samenvallen) werden te voren bepaald.

Onderstaande figuur stelt een ter bevordering van de duidelijkheid der teekening (waarin de lichtstraal geprojecteerd is op het vertikale



vlak door de as van den kijker) sterk overdreven prismatisch venster voor. De invallende straal die de horizontaal gestelde as van den kathetometerkijker doorloopt zij I . De middenstoffen zijn aangegeven door de indices 1, 2 en 3. De totale afwijking welke de straal ondergaat door de breking aan 't grensvlak 1.2 en 2.3 zij β_0 voor het merk

m_0 waarvoor bij de verdere ontwikkeling, zoolang er slechts van ééne plaats sprake is, eenvoudigheidshalve β geschreven zal worden.

Men heeft dan daar

$$\beta = i_1 \div i_2 = a \\ \beta = (n_{1,2} - 1) a \div r_2 (n_{3,2} - n_{1,2}).$$

Is de volumemetermantel niet gevuld met water, dan volgt

$$\beta = (n_{1,2} - 1) a.$$

Derhalve is de optische correctie aan te brengen aan een streeps-
allezing op de schermplaat, de afstand van 't voorvlak der glazen
vensters tot de schermplaat A noemend,

$$A r_2 (n_{3,2} - n_{1,2}).$$

Dit verschil is bij één middelste streep en wel die op het middelste
schermplaat vele malen gemeten. Bij het middelste schermplaat om
de afwijkingfouten ten opzichte der andere strepen zoo klein
mogelijk te maken. Bij deze metingen is rekening gehouden met
het feit dat de volumemeter bij het inlaten van water in zijn
geheel zakt. Deze dalingen zijn telkenmale gemeten door een tweeden
kijker van den kathetometer op een merk van den volumemeter
te viseeren.

Laten verder de indices l en v bij $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ enz. aangeven of deze
hoeken bij leegen of vollen volumemetermantel bedoeld zijn en
voor de verschillende r_1 en r_2 evenals voor de β geschreven worden
 r_{01}, r_{11} enz. en r_{02}, r_{12} , enz., dan geldt voor de gemeten afstanden
bij leegen mantel b.v.

$$A (\beta_{1l} - \beta_{2l}) = A n_{1,2} \{ (r_{11} - r_{21}) + (r_{12} - r_{22}) \} - A (a_1 - a_2)$$

en voor gevulden mantel

$$A (\beta_{1v} - \beta_{2v}) = A n_{1,2} (r_{11} - r_{21}) + A n_{3,2} (r_{12} - r_{22}) - A (a_1 - a_2).$$

De telkenmale gemeten afstanden $A (\beta_{1l} - \beta_{2l})$ en $A (\beta_{1v} - \beta_{2v})$ twee
aan twee van elkaar aftrekkend en het verschil J noemend vindt
men de vergelijkingen

$$r_{02} = \frac{V_{01}}{A} \frac{1}{n_{3,2} - n_{1,2}} + r_{1,2} \\ r_{12} = \frac{V_{12}}{A} \frac{1}{n_{3,2} - n_{1,2}} + r_{22} \\ r_{22} = \frac{V_{23}}{A} \frac{1}{n_{3,2} - n_{1,2}} + r_{32} \\ r_{32} = \frac{V_{34}}{A} \frac{1}{n_{3,2} - n_{1,2}} + r_{42}.$$

In deze vergelijking bijv. de eene direct bij m_3 gemeten waarde

$r_{3,2}$ substitueerend vindt men achtereenvolgens $r_{2,2}$ enz., waarna de opt. afwijkingen berekend worden b.v. voor m_1 uit

$$A(n_{1,2} - 1) a_1 + A r_{12}(n_{3,2} - n_{1,2})$$

De zoo bepaalde getallen zijn medegedeeld in Tab. III kolom III (p. 1477).

§ 4. *Controlemetingen.*

Eensdeels ter verificatie der verkregen uitkomsten, anderdeels ter controle van het goede temperatuurevenwicht tusschen de verschillende met kwik gevulde deelen van het toestel werden de in § 3 Med. N^o. 117 (Juni 1910) aangeduide controlemetingen bij druk-evenwicht van het kwik in de communicerende vaten volumometerbuis en manometerbuis uitgevoerd. Daartoe werd het bovengedeelte van volumometerbuis en manometerbuis in verbinding gebracht en telkenmale het kwik opgedreven zóó dat het niveau in een der halsjes van den volumometer stond, klem l_9 (Pl. I fig. 1 verg. Pl. I Med. N^o. 117) gesloten ter vermindering van de door windstooten en beweging in 't gebouw veroorzaakte schommelingen in de kwikmassa der kwikpeer Q_1 (verg. Pl. I Med. N^o. 117). Steeds werd gezorgd voor een goed vacuum boven de twee corresponderende kwikniveaus. Dit ter vermindering van hinderlijke en zich niet snel genoeg uitwisselende gasuitzettingen in den volumometer en manometer. Daar bij de bovenste halsjes kwikkolommen van ongeveer 1 M. in hydrostatisch evenwicht moesten verkeerden, vereischte het temperatuurevenwicht der kwikkolommen bijzondere zorg. De manometerbuis werd daartoe omgeven door een watermantel welke met een tweetal caoutchouestoppen onwrikbaar aan de manometerbuis bevestigd werd. Om de optische correcties welke deze mantel onvermijdelijk medebracht zoo klein mogelijk te houden werden de caoutchouestoppen excentrisch doorboord, zóó dat de watermantel aan de zijde waardoorheen afgelezen moest worden, het dunste was. Op de achterzijde van de manometerbuis werden ter bepaling der optische correcties een 15-tal fijne streepjes geëtst. Deze streepjes werden weder kathetometrisch afgelezen met vollen en leegen manometermantel. Iedere bepaling werd een 16-tal malen herhaald. Daar de waterlaag resp. luchtlaag waardoor afgelezen werd slechts een 4-tal m.M. bedroeg kon bij onveranderlijken stand van den kathetometerkijker door middel van een afleesoculair het verschil telkens direct gemeten worden. Parallaxe-fouten werden hierbij vermeden doordat de helft van het objectief van den kijker bedekt was door een glazen plaat, die optisch even dik was als de waterlaag van den

manometermantel. Bij vollen mantel werd waargenomen door de onbedekte helft van het objectief, bij leegen door de bedekte helft. De optische fout door de glasplaat veroorzaakt werd afzonderlijk gemeten. Op deze wijze werden de optische afwijkingen door den manometermantel veroorzaakt gemakkelijk op 0.005 m.M. nauwkeurig bepaald. Hieruit blijkt dat het gebruik van een dergelijken mantel zeer aan te bevelen is, terwijl de optische correctie slechts ongeveer 0,03 m.M. blijkt te bedragen en dus veelal verwaarloosd zal kunnen worden.

De manometermantel werd van ouden gevoed door water uit den thermostaat (zie § 6). Boven stroomt het water uit door een verbindingsbuis welke zorgvuldig tegen warmteuitwisseling met de omgeving beschut is, onder in den volumenometermantel. Temperatuurschommelingen in het voedingswater geven derhalve in de kwikkolommen elkaar althans ten deele opheffende fouten, iets waar men bij onafhankelijke voeding of vertakking van den toevoer niet op rekenen kan.

Daar het moeilijk is den temperatuurgradient in het meetvertrek onder $\frac{1}{2}^{\circ}$ per Meter te doen dalen en hij dikwijls grooter is en derhalve het kwik in de peer en caoutchoueslangen licht een andere temperatuur aanneemt dan de in de mantels aanwezige massa's, is het bovenuit den volumenometer stroomende water benut om het uit de peer naar den volumenometer of de manometerbuis stroomende kwik voor te warmen resp. te koelen. Daartoe zijn de korte caoutchoue buizen verbonden met het groote glazen τ -stuk. De verticale stang van deze τ is wijd opgeblazen ter verkrijging van een groot warmte-uitwisselingsvlak. Deze verticale stang van het τ -stuk is omgeven door de twee koperen buizen in Pl. I, fig. 1 geteekend.

Het afstroomwater uit den volumenometermantel wordt vertakt en stroomt dan onder in de buizen en verlaat bij I_1 en I_2 het toestel.

Door deze inrichting zijn onaangename convectiestroomen en geleidingsverschijnselen in de kwikmassa's geëlimineerd.

Vermeld zij ten slotte dat alle onderdeelen zorgvuldig tegen warmte-wisselingen zijn ingepakt.

Na deze voorzorgen werden een groot aantal bepalingen der menisci-hoogten bij communicateerde vaten gedaan. De capillaire depressies werden afgeleid uit KELVIN'sche grafische constructies. Een gemiddelde capillaireconstante werd hierbij aangenomen. Na behoorlijke aanbrenging der temperatuur- en capillairecorrecties werden de optische correcties als resteerd hoogteverschil berekend. In Tabel II zijn de uit verschillende aflezingen gemiddelde gegevens, die tot een der bepalingen van de optische constante met behulp van de methode

der communiceerende vaten voor merk m_0 hebben geleid, vereenigd. De gemiddelden van alle bepalingen zijn opgenomen in Tabel III, kolom IV.

TABEL II.

Controlemeting bij merk m_0 (Pl. I. Med. N^o. 117).

Hals merk m_0					Tijd. 1 u. 45. temp. { onder 16,05 ⁵ boven 16,07
	libel.	Kath. meter schaal.	Oculair- kop.	pijl- men.	volumenm. mantel
Volumenom.top.men.	10	79,924	21,25	} 0,181	Tijd. 1 u. 45. temp. { onder 16,02 manometer mantel { boven 16,10
„ bas. „	10	78,843	21,25		
Manometer top. men.	10		21,20	} 0,188	
„ bas. „	10		20,37		
Volumenom.top.men. (gemiddeld uit 7 af- lezingen).	10		21,25		
Manometer top. men. (gemiddeld uit 7 af- lezingen).	10		21,21		
Manometer top. men.	10		21,20	} 0,182	Tijd. 2 u. 15. temp. { onder 16,13 volumenm. mantel { boven 16,13
„ bas. „	10		26,29		
Volumenom.top.men.	10	79,924	21,27	} 0,184	Tijd. 2 u. 15. temp. { onder 16,13 manometermantel { boven 16,14
„ bas. „	10	78,840			
					Capillair depr.
					Volumenom. Manom.
				1 u. 45	0.144 mM. 0.045
				2 u. 15	0.148 0.043
				Gemiddeld	1.146 0.044
Correctie ten gevolge van capill. depr.					-0.102
Correctie ten gevolge van temp.versch. comm. vaten.					
				1 u. 45	geene
				2 u. 15	0.014
				Gemiddeld	+0.007
Optische correctie manom. mantel (zie p. 1475)					-0.04 ⁰
Werkelijk waargenomen hoogteverschil (4 273 mM.)					0.014
Waaruit optische corr. volumemeter					-0.121

Daar aan het bestaan van drukevenwicht niet getwijfeld kan worden laat de vergelijking van de op deze wijze gevonden optische correcties met die volgens de methode van het aanslagwaterpas en

het verwijderen van het water uit den mantel gevonden (kolom II en III van Tabel III), onmiddellijk oordeelen over de nauwkeurigheid der drukk bepaling.

Deze blijkt, wanneer op al het vorige gelet wordt, tot op 0.02 m.M. en in gunstige gevallen tot op 0.01 m.M. gewaarborgd te zijn en het is dus mogelijk kwikdrukken van 10 c.M. op 1/10000 zeker te meten.

Ten slotte dient nog vermeld, dat de rand der menisci in den volumemeter aan de voorzijde afgelezen werd. Deze wijze van aflezen leverde, daar er betrekkelijk weinig licht in den volumemetermantel te brengen was, en daardoor de aflezingen aan de zijkanten van de volumemeterbuis bezwaarlijk waren, scherpe bepalingen, daar steeds door behoorlijke verlichting met een gloeilamp de rand van den meniscus te zien was als een scherpe lijn alwaar een aantal reflexen eindigden. Bij deze wijze van aflezen werd, daar de voorrand van den meniscus ongeveer 8 m.M. dicht bij het objectief van den kijker was dan de top van de meniscus, ter vermindering van parallaxe-fouten eenzelfde kunstgreep gebruikt als reeds boven aangeduid is bij de correctiebepalingen van de manometerbuis. Voor het objectief van den kijker en aan de kijkerbuis stevig bevestigd waren glaasjes aangebracht zooals in fig. 2, pl. II aangegeven is. De optische verkorting van den weg der lichtstralen bedroeg ongeveer 8 m.M. Door naar elkaar toe of van elkaar afdraaien der glaasjes om de as kon de instelling nauwkeuriger parallaxevrij gemaakt

TABEL III.

Vergelijking der verschillende metingen.

Hals	Methode I	Methode II	Controlebepalingen
Eb_{s_2}	- 0.132mM	- 0.13 ³	- 0.12 ¹
Eb_{s_1}	- 0.132	- 0.13 ³	- 0.12 ²
Eb_7	- 0.132	- 0.13 ³	- 0.15 ³
Eb_6	- 0.159	- 0.14 ⁶	- 0.15 ³
Eb_4	+ 0.03 ⁶	+ 0.15 ¹	+ 0.04 ¹
Eb_3	+ 0.03 ⁵	1)	+ 0.05 ⁰

1) Methode II kon op dit schermpje niet toegepast worden. De methode veronderstelt zeer reine en droge schermpjes. Aan deze laatste voorwaarde kon hier niet worden voldaan daar bij aftappen van water uit den mantel dit onderste schermpje vochtig gehouden werd door het water, dat terugbleef doordat het niveau van de aftapkraan slechts weinig onder het streepje op het schermpje gelegen was.

worden. De top van den meniscus werd door de glazen afgelezen, de rand door het onbedekte deel van het objectief. De optische afwijkingen door de glazen van dit toestel en door het reeds boven vermelde bij de manometerbuis gebruikte, waren te voren nauwkeurig bepaald.

§ 6. *De thermostaat.* De bij de controlemetingen en bij reeds gedane, nog te publiceeren, metingen van de compressibiliteit van waterstof bij gewone temperatuur, gebruikte thermostaat was in hoofdzaak de in Med. N^o. 70 beschrevene. Voor de beschrijving van dit toestel zij dus in de eerste plaats daarheen verwezen.

Eenige wijzigingen zijn evenwel aangebracht. Zij beoogden :

1^o. Grootere standvastigheid der temperatuur gedurende een geruimer tijdsverloop en derhalve minder toezicht.

2^o. Gemakkelijker instelling der vereischte temperatuur.

De vaten zijn dezelfde gebleven. Achter het groote vat is een cilindrisch klein vat aangebracht. De koperen spiraal met xyloreguleator in vat *B* (zie Pl. III) is vervangen door een (voorloopig) glazen die in weinig windingen (3) van den bodem van vat *B* naar het hoogste gedeelte loopt. Deze spiraal is van onder omgebogen en eindigt in den gasreguleator. Door een zijbuis door middel van slijpstukken staat de spiraal in verbinding met een groot thermometervat. Een caoutchouc tusschenzetsel zorgt er voor dat het systeem trilling kan verdragen. Het thermometervat en de spiraal zijn gevuld met chloroform en kwik. Het kwik is op de figuur zwart aangegeven. Chloroform biedt als thermometervloeistof het voordeel van kleine soortelijke warmten, kleinen samendrukkingsefficient, gepaard aan vrij grooten uitzettingsefficient (vergel. Meded. N^o. 70 III § 3). De spiraal bevat ongeveer 100, het vat ongeveer 600 c. c. M. chloroform. De totale massa van het kwik kan door middel van kraan *S*_p gewijzigd worden.

De werking van het toestel is in 't kort de volgende: De glazen spiraal regelt evenals de koperen in de Pl. van Meded. N^o. 70 III de temperatuur in 't bad *B*, het groote vat *C* verkleint de temperatuurschommelingen belangrijk. Het thermometervat dat bij een zeer groot volume een klein oppervlak heeft, is voor deze schommelingen niet gevoelig. Wel evenwel voor een veranderlijke integraaltemperatuur. Loopt derhalve bv. tengevolge van een voortdurend stijgen van de kamertemperatuur de temperatuur in 't vat *C* een weinig op, dan zal uit het thermometervat door *S*_p kwik vloeien naar de spiraal, de regelvlam wordt kleiner en het water stroomt op een lagere doch door de spiraal constant gehouden temperatuur het groote vat binnen, zoodoende de opname van warmte door de wanden van het groote vat grootendeels neutraliseerend.

Het tweede beoogde doeleinde is, zooals gemakkelijk is in te zien, ook bereikt. Immers, de thermostaat stelt zichzelf na 't aansteken der vlammen in op een temperatuur die nagenoeg geheel bepaald is door de massa kwik in het toestel aanwezig. De bruikbaarheid van den toestel is dan ook belangrijk vergroot. Ter beoordeeling der werking van het apparaat zijn hieronder de temperaturen op eenige meedagen gegeven. De temperatuur is opgenomen onmiddellijk voor het instroomen van het water in den manometermantel.

	12 u. 15	12 u. 45	2 u. 15	3 u. 5	4 u. 55
22 Mrt. 11	16.04	16.07	16.07	16.07	16.07
	3 u. 40	3 u. 55	4 u. 20	4 u. 45	5 u. 25
30 Mrt. 11	19.00	19.00	19.00	19.00	19.00
					6 u.
					19.05

Zooals men ziet is de temperatuur uren lang nauwkeuriger dan op 0.01° onveranderd gebleven.

In hoeverre van deze nauwkeurigheid partij kan worden getrokken om de temperatuur van den volumemeter standvastig te houden hangt, welks bescherming trouwens nog verbeterd kan worden, af van de standvastigheid van de kamertemperatuur. Wordt aan de laatste de noodige zorg besteed, zoo gelukt het gewoonlijk de geleidelijke verandering in temperatuur van den volumemeter binnen $0,03$ per uur te houden ¹⁾ en blijft de zekerheid van eene temperatuurbeplating op $0,02$ te stellen.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling n^o. 120b uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „*Verdere proeven met vloeibaar helium. C. Over de verandering van den galvanischen weerstand van zuivere metalen bij zeer lage temperaturen enz. IV, De weerstand van zuiver kwik bij heliumtemperaturen.*”

§ 1. *Inleiding.* Sedert de vorige mededeeling (December 1910) is het gelukt vloeibaar helium uit den toestel waarin het bereid werd over te brengen in een daaraan verbonden vat, waarin de toestellen voor proeven gedompeld kunnen worden, een *heliumthermostaat*. In een volgende Mededeeling zal eene uitvoerige beschrijving van de getroffen inrichting, die betrouwbaar gebleken is, worden gegeven. Intusschen bestaat er alle aanleiding tot eene voorloopige mededeeling omtrent enkele der eerste metingen, die met behulp van dezen toestel zijn verricht en bij welke ik wederom over de zeer gewaardeerde hulp van de Heeren Dr. DORSMAN en G. HOLST mocht beschikken.

¹⁾ Bij vergelijking van kwikzuilen als in Tab. II kan met een 10 maal geringer standvastigheid worden volstaan.

Deze bepalingen toch hebben de verrassende uitkomsten, tot welke de vorige metingen omtrent de verandering van den galvanischen weerstand met de temperatuur voerden, uitgebreid en bevestigd. In de eerste plaats werd daarbij, wat tot nog toe niet opzettelijk geschied was, geconstateerd, dat vloeibaar helium tot de voortreffelijke isolatoren behoort. Dit was van belang omdat de proeven over den weerstand verricht waren met naakte draden, hetgeen veronderstelt, dat het helium den galvanischen stroom niet merkbaar geleidt.

§ 2. *De weerstand van goud bij heliumtemperaturen.* In de tweede plaats werd een schakel van de redeneering, welke mij er in *B* §3 van *Med.* N^o. 119 toe bracht aan te nemen, dat de weerstand van zuiver goud bij het kookpunt van vloeibaar helium reeds onmerkbaar klein wordt, getoetst door den weerstand van den met *Au_{III}* gemerkten gouddraad, welke in de genoemde mededeeling naar aanleiding van de metingen met platina door extrapolatie geschat was, in vloeibaar helium te bepalen. Binnen de grenzen der waarnemingsfouten, die weliswaar bij deze proef grooter waren dan bij de vorige metingen, werd thans die waarde door meting bevestigd gevonden. De slotsom, dat het verschil van den weerstand van zuiver goud bij heliumtemperaturen met nul binnen de grens van experimenteele nauwkeurigheid (zuiverheid, afwezigheid van invloed van bewerking) valt, wordt hierdoor zeer versterkt.

§ 3. *De weerstand van zuiver kwik.* De derde meest belangrijke bepaling had betrekking op den weerstand van kwik. In *Med.* n^o. 119 werd de weerstand van vast kwik weergegeven door eene met behulp van de voorstelling der weerstandsvibratoren afgeleide formule, waarbij een zoodanig trillingsgetal r aan de vibratoren werd toegekend, dat $\beta r = a = 30$ werd ($\beta = \text{PLANCK's getal } 4.864.10^{-11}$).

Op grond van die voorstelling liet zich voorspellen 1^o dat bij het kookpunt van helium zuiver kwik wel een veel kleineren weerstand dan bij waterstoftemperaturen zou hebben, doch dat het bedrag voldoende bleef om experimenteel te worden bepaald. 2^o. dat de weerstand dan nog niet onafhankelijk van de temperatuur zou zijn, en 3^o. dat bij de zeer lage temperaturen, die met onder gereduceerden druk verdampend helium te bereiken zijn, de weerstand binnen de grenzen der experimenteele nauwkeurigheid nul zou worden.

De proef heeft de voorspelling ten volle bevestigd. Terwijl de weerstand bij 13^o.9 K nog 0.034 van het bedrag van den tot 0^o C. ge-extrapoleerden weerstand van vast kwik is, bedraagt hij bij 4^o.3 K. nog slechts 0.0013 en is hij bij 3^o K. tot minder dan 0.0001 van dit bedrag gedaald.

Het experimenteële feit, dat men een zuiver metaal in den toestand kan brengen waarbij de galvanische weerstand nul is geworden, althans niet merkbaar daarvan verschilt, is zeker op zich zelf van groot belang. Daarbij geeft de bevestiging mijner voorspelling¹⁾ een belangrijken steun aan de meening, waartoe ik gekomen was, dat de weerstand van zuivere metalen (als platina, goud, kwik en dergelijke althans) door de energie van PLANCK'sche vibratoren in stralingsevenwicht, (zooals EINSTEIN voor de theorie der specifieke warmte der vaste stoffen heeft ingevoerd en NERNST reeds op de specifieke warmte van gassen heeft toegepast) wordt bepaald.

Wat nu het daarbij voor de weerstands-vibratoren aangenomen trillingsgetal (men zou kunnen zoeken uit den weerstand eigen trillingsgetallen af te leiden) betreft, zoo verdient het zeker opmerking, dat de golflengte in het luchtledig, die met de trilling der kwik-weestands vibratoren overeenkomt, ongeveer 0,5 m.m. bedraagt, terwijl RUBENS juist dezer dagen heeft gevonden, dat een kwiklamp uiterst langgolvige trillingen afgeeft, die ongeveer 0,3 m.m. golflengte hebben. Op deze wijze wordt onverwacht een brug gelegd tusschen de verandering van den galvanischen weerstand met de temperatuur en de langgolvige emissie der metalen.

De zooeven vermelde uitkomsten omtrent den galvanischen weerstand van kwik kunnen, als berustende op een enkele proef, nog slechts onder voorbehoud worden medegedeeld. Terwijl ik over het onderzoek dat tot deze uitkomsten heeft geleid spoedig eene uitvoerige mededeeling hoop te doen, en nieuwe proeven worden voorbereid, die het bereiken van eene grootere nauwkeurigheid zullen veroorloven, scheen het mij wenschelijk al vast met een enkel woord den oogenblikkelijken stand van het vraagstuk aan te geven.²⁾

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*lets over den vasten toestand*”. VII (*Slot*).

(Zal in het Verslag van de volgende vergadering verschijnen.)

1) In verband met hare afleiding zij nog opgemerkt, dat zich het thermo-element goud zilver in vloeibaar helium geheel zoo gedroeg als de proeven met vloeibare waterstof (KAMERLINGH ONNES en CLAY Med. N^o 107b) deden verwachten.

2) In deze meening wordt ik bevestigd nu ik bij het ter perse gaan afdrucken ontvang van de belangrijke verhandeling van NERNST, die bij de voortzetting van het in Meded. N^o. 119 vermelde onderzoek naar de specifieke warmte ook onafhankelijk van mij tot het aannemen van verband tusschen de energie van vibratoren en den galvanischen weerstand is gekomen, en van die, bevattende de uitwerking van dit denkbeeld door LINDEMANN.

Voor de bibliotheek wordt aangeboden:

1. door den Heer C. EYKMAN een exemplaar der dissertatie van den Heer L. H. VAN ROMUNDE getiteld: „De voeding der Trappisten”.
2. door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN een exemplaar van het „Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden, van 21 September 1908 tot 18 September 1910, uitgebracht door E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.”

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

In het Verslag der Vergadering van 28 Jan. 1911 :

- p. 1042 r. 16 v. o. leze men : *Methode. I. De densimeter*
p. 1047 r. 14 v b. „ „ : *Methode. II. De volumenometer.*

In het Verslag der Vergadering van 25 Februari 1911 :

- p. 1191 r. 2 v. b. in plaats van deze leze men de zeer kleine.
r. 3 „ „ „ „ „ die „ „ die afwijken van
degene die.
- p. 1202 r. 13 v. o. „ „ „ *AuIII* leze men *AuV*.
„ 6 „ „ „ „ „ *AuV* „ „ *AuIII*
„ „ „ „ „ hoogerem leze men minder hoogen.
„ 5 „ „ leze men: 0.015 % bijmengsel tegen 0.005 %
bij *AuV*.
- p. 1206 r. 19 v. o. in plaats van 104 leze men 108.
p. 1207 r. 4 v. b. „ „ „ 379.86 „ „ 372.86.
r. 9 v. o. „ „ „ 77.29 „ „ 77.93.
„ „ „ 20.8 „ „ 20.18.
r. 7 „ „ „ „ „ 0.264 „ „ 0.279.

REGISTER.

- AARDALKALIMETALEN (Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in 't bijzonder voor Alkali-en). 216. 475. 1114.
- Aardkunde.** Uitnoodiging tot bijwoning van het XIe internationaal Geologisch Congres te Stockholm. 2.
- J. H. BONNEMA: „Diluviale zwerfsteenen van het eiland Borkum”. 136. 141.
 - Bericht dat de Heer G. A. F. MOLENGRAAFF benoemd is tot gedelegeerde op het XIe internationaal Geologisch Congres te Stockholm. 348. Verslag hierover. 490.
 - Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1910. 1069.
 - L. RUTTEN: „Over Orbitoiden uit de omgeving der Balik Papan-baai (Oostkust van Borneo)”. 1143.
- ABDUCENS (The migrations of the motor cells of the Trigemini —) and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 138.
- ABSORPTIE (Selectieve) en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmasa's. 1007.
- ABSORPTIELIJNEN (De magnetische splitsing van) in verband met het spectrum der Zonnevlekken. 3de mededeeling. 233.
- ACET-PAR- EN MET-ALDEHYDE (Over het unaire, tri-moleculaire, pseudo-ternaire stelsel). 272.
- ACETALDEHYD-alcohol (Over het stelsel). 233.
- ACHTERPOOT (Over vorm en ligging der dermatomen van den). 307.
- (Over rangschikking en variabiliteit der dermatomen van den). 463.
 - (Een bijdrage tot de dermatomerie van den) van den hond. 1115.
- ADDITIE-VERBINDINGEN van m. dinitrobenzol. 1432.
- ADEMHALING (Over den invloed der) op den pols. 8.
- AETHER-ANTHRACHINON-NAPHTHALINE (Kritische verschijnselen in het ternaire stelsel). 204.
- AKADEMIEN (Verslag over de 4de algemeene vergadering der Internationale Associatie der). 138.
- ALCALOIDGEHALTE (Over het) in de bladeren van Cinchona's. 119.
- ALKALI- EN AARDALKALIMETALEN (Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in 't bijzonder voor). 216. 475. 1114.
- ALLOTROPIE (Bevestiging van de nieuwe theorie van het verschijnsel). I. 802.
- AMINEN en Amidén (Over de werking van Oxalychloride op). 1408.
- AMINO- en Ureopropyleen-ureïne. 645.
- AMSTEL (MEJ. J. VAN) en G. VAN ITERSON JR. Over het temperatuuroptimum van physiologische processen. 106. II. 534.

- Anatomie.** Verslag over eene verhandeling van den Heer C. U. ARIËNS KAPPERS: „The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres”. 138.
- L. BOLK: „Over de ontwikkeling van het verhemelte en de beteekenis van de tandlijst bij den mensch”. 146.
- C. T. VAN VALKENBURG: „Over den nucleus facialis dorsalis, nucleus trigemini posterior, nucleus trochlearis posterior”. 181.
- L. BOLK: „Over de ontwikkeling der Hypophyse van de primaten in 't bijzonder bij Tarsius en den mensch”. 667.
- W. G. HUET: „Aanteekeningen over de trochlearis- en oculomotorius-kern en den trochlearis-wortel bij lagere vertebraten”. 981.
- J. J. L. D. BARON VAN HOËVELL: „Aanteekeningen over de reticulair cellen bij eenige verschillende vertebraten”. 988.
- C. T. VAN VALKENBURG: „De oorsprong der vezels van het corpus callosum en het psalterium”. 1337.
- C. T. VAN VALKENBURG: „Over de mesencefale kern en wortel van den N. trigeminus”. 1352.
- ANILIEN** (Over de nitratie van) en van eenige anilieden. 1070.
- ANOMALE DISPERSIE** (Waarnemingen betreffende) van het licht in gassen. (1ste mededeeling). 1275.
- ANOMALE VERSTROOING** (Selectieve absorptie en) van het licht in uitgestrekte gasmassa's. 1007.
- ARGON** (Coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden van). 390.
- (Berekening van de kritische dichtheid van). 390.
- (Isothermen van) tusschen $+20^{\circ}$ C. en -150° C. 582.
- (Het gedrag van) ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden. 1177.
- ARIËNS KAPPERS** (C. U.). Zie KAPPERS (C. U. ARIËNS).
- ARISZ** (W. H.). Over het verband van prikkel en effect bij phototropische krommingen van kiemplantjes van *Avena sativa*. 1254.
- ARTERIEWAND** (Een peging om den invloed van den) op de bloedsdrukking te schatten. 1284.
- AS. HEPTACHLOORPROPAAN** (De synthese van) uit tetrachloor-aethyleen en chloroform onder medewerking van aluminiumchloride. 776.
- ASSENHOEK** (Over de bepaling van den optischen) uit den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak in eene willekeurige kristalnsede. 1165.
- ATLAS photographique des formes du relief terrestre** (Programma van een). 718.
- AVENA SATIVA** (De invloed der temperatuur op den geotropischen praesentatietijd bij). 380.
- (Over het verband van prikkel en effect bij phototropische krommingen van kiemplantjes van). 1254.
- Bacteriologie.** J. H. F. KOHLBRUGGE: „Zuurvormende lucht- en rijstbacteriën de oorzaak der kippen-Beri beri”. 968.
- BAKHUYZEN** (E. F. VAN DE SANDE). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. PANNEKOEK: „Onderzoekingen over den bouw van den melkweg”. 243.

- BAKHUYZEN (H. G. VAN DE SANDE). Verslag over de 4de algemeene vergadering der Internationale Associatie der Akademien. 138.
- Verslag omtrent een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om advies over de besluiten van het in November 1909 te Londen bijeengekomen Internationaal Wereldkaart Comité. 352.
- BAKTERIËN (Vetsplitsing door). 689.
- (Pigmenten als oxydatieprodukten door) gevormd. 1092.
- BALIK PAPAN-BAAI (Oostkust van Borneo) (Over Orbitoiden uit de omgeving der). 1143.
- BARENNE (J. G. DUSSEK DE). De strychninewerking op 't centrale zenuwstelsel. De segmentaire, streng lokale strychnine-vergiftiging der dorsale ruggemergsmechanismen: een bijdrage tot de dermatomerie van den achterpoot van den hond. 1115.
- BAROMETERSTAND (De dagelijksche variatie van wind en) in verband met die van den gradiënt der luchtdrukking. 1381.
- BARRAU (J. A.). De omwentelingsoppervlakken of cilinders van den tweeden graad der niet-Euklidische ruimte. 1426.
- BATAVIA (Voorloopig bericht omtrent het in het jaar 1909 te) aangevangen onderzoek der hoogere luchtlagen. 161.
- (De getijkrachten te) volgens den astatischen seismograaf van WIECUERT. 1304.
- BEMMELËN (J. M. VAN). Bericht dat hij ontslag neemt als lid en secretaris der Geologische Commissie. 612.
- Bericht van overlijden. 1211.
- BEMMELËN (W. VAN) en C. BRAAK. Voorloopig bericht omtrent het in het jaar 1909 te Batavia aangevangen onderzoek der hoogere luchtlagen. 161.
- BERESTËYN (M. H. VAN). Over de toepassing der methode van DARWIN op eenige samengestelde getijden. 544.
- BERGANSTUS (F. L.). Een nieuwe formule om den coëfficiënt van zelfinductie voor lange solenoïden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen. 1133.
- BERI-BERI (Zuurvormende lucht- en rijstbacteriën de oorzaak der kippen-). 968.
- BETH (H. J. E.). De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen (3de gedeelte) 748.
- BEIJERINCK (M. W.). Aanbieding eener mededeeling van Mej. J. VAN AMSTEL en Prof. G. VAN ITERSOK JR.: „Over het temperaturoptimum van physiologische processen”. 106. II. 534.
- Rapport in zake de bestrijding der plantenziekten door het Internationale Instituut van Landbouw te Rome. 491.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. W. NIEUWENHUIS: „Individualiteit en erfelijkheid bij eene lagere schimmel (*Trichophyton albiscicans*)”. 504.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. W. Nieuwenhuis: „Wijze om microorganismen uit één cel te kweken”. 522.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer N. L. SÖHNGEN: „Vetsplitsing door bacteriën”. 689.
- Pigmenten als oxydatieproduct door bacteriën gevormd. 1092.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer N. L. SÖHNGEN: „Microben-lipase”. 1263.

- BEIJERINCK (M. W.). Verslag over een door den Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel toegezonden rapport van het Hoofd van den phytopathologischen Dienst inzake eene internationale bestrijding van plantenziekten. 1380.
- Een proefneming met maagsarcine. 1412.
- BINAIRE STELSEL (Over de continue samenhang tusschen de driephasenlijnen, welke de evenwichten tusschen de beide componenten in vasten toestand respect. naast vloeistof en damp aangeven in een). 229.
- BINAIRE MENGSELS (Isothermen van éénatomige stoffen en hunne). VI. Coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden van argon; berekening van de kritische dichtheid van argon. 390. VII. Isothermen van argon tusschen $+20^{\circ}$ C. en -150° C. 582. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden. 1177.
- (Isothermen van twee-atomige gassen en hun). VIII. Controle-bepalingen met den volumemeter. 1468.
- BINAIRE STELSLS (Over dampdrukken in) bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen. 1022.
- BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van). Zie MINISTER van Binnenlandsche Zaken.
- BLAAUW (A. H.) — Bericht van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken dat aan den Heer —, die met een subsidie uit het Buitenzorg-fonds naar Buitenzorg zal vertrekken ook een rijkssubsidie verleend is. 348.
- BLADEREN (Over het alcaloïde-gehalte in de) van Cinchona's. 119.
- BLAUPOT TEN CATE (H. S.) — Toezending van een overdrukje van den Heer — over de daling van den bodem van Nederland. 480.
- BLIKSEMAFLEIDERS (Verzoek om advies over de inrichting en plaatsing van) op de St. Janskerk te Gouda. 878. Verslag hierover. 1379.
- BLOEDLICHAAMPJES (Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode), in 't bijzonder voor alkali- en aardalkalimetalen. 216. 475. 1114.
- BLOEDSDRUKKING (Een nieuwe methode ter bepaling van de) bij den mensch; tevens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten. 1284.
- BODEM van Nederland (Over de daling van den). 480.
- BOEKE (J.) en K. W. DAMMERMAN. De Saccus vasculosus der visschen een receptief nerveus orgaan en niet een klier. 62.
- BOEKGESCHENKEN (Aanbieding van). 136. 345. 875. 1065. 1208. 1370. 1482.
- BOEREMA (J.) en H. HAGA. De electromotorische kracht van het WESTON-normaal-element. 621.
- BÜESEKEN (J.) en H. J. PRINS. De synthese van as. heptachloorpropaan uit tetrachloor-aethyleen en chloroform onder medewerking van aluminiumchloride. 776.
- BÜESEKEN (J.) en A. SCHWEIZER. De snelheid der ringopening in verband met de samenstelling der onverzadigde ringsystemen. 495.
- BOIS (H. E. J. G. DU). Een verbeterde halfringelectromagneet. II. 397.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. J. ELIAS: „Over het ZEEMAN-effect bij emissielijnen in eene richting, schuin ten opzichte van de krachtlijnen”. 402.
- BOLK (L.). Over de ontwikkeling van het verhemelte en de beteekenis van de tandlijst bij den mensch. 146.

- BOLK (L.)**. Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. T. VAN VALKENBURG: „Over den nucleus facialis dorsalis, nucleus trigemini posterior, nucleus trochlearis posterior”. 181.
- Over de ontwikkeling der Hypophyse van de primaten in 't bijzonder bij Tarsius en den mensch. 667.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. G. HUET: „Aanteekeningen over de trochlearis- en oculomotorius-kern en den trochlearis-wortel bij lagere vertebraten”. 981.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. L. D. BARON VAN HOEVELL: „Aanteekeningen over de reticulair cellen bij eenige verschillende vertebraten”. 988.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. T. VAN VALKENBURG: „De oorsprong der vezels van het corpus callosum en het psalterium”. 1337.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. T. VAN VALKENBURG: „Over mesencefale kern en wortel van den N. trigeminus”. 1352.
- BONNEMA (J. H.)**. Diluviale zwerfsteenen van het eiland Borkum. 136. 141.
- BOOLE STOTT (Mrs. A.)** — Verslag over eene verhandeling van — „Geometrical deduction of semi-regular from regular polytopes and space fillings”. 3.
- BOOLE STOTT (Mrs. A.)** en P. H. SCHOUTE. Over wederkeerigheid in verband met halfregelmatige polytopen en netten. 373.
- BORKUM** (Diluviale zwerfsteenen van het eiland). 136. 141.
- BORNWATER (J. TH.)**. Over de werking van Oxalychloride op aminen en amiden. 1408.
- BOSSCHA (J.)**. Bericht van overlijden. 1373.
- BRAAK (C.)** en W. VAN BEMMELEN. Voorloopig bericht omtrent het in het jaar 1909 te Batavia aangevangen onderzoek der hoogere luchtlagen. 161.
- De getijkrachten te Batavia volgens den astatichen seismograaf van WIECHERT. 1304.
- BRESLAU** (Uitnoodiging tot bijwoning van de feestelijke herdenking van het 100 jarig bestaan der Universiteit te). 1068.
- BROUWER (L. E. J.)**. Over continue vectordistributies op oppervlakken. 3de mededeeling. 36.
- Over één-éénduidige continue transformatie van oppervlakken in zichzelf. 3de mededeeling. 737.
- Over de structuur der perfecte puntenverzamelingen. 2de mededeeling. 1416.
- BRUYN (H. E. DE)**. Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1910. 1069.
- BUBANOVIC (F.)** en H. J. HAMBURGER. Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in 't bijzonder voor alkali- en aardalkalimetalen. 216. 1114.
- BUBANOVIC (F.)**, H. J. HAMBURGER en J. DE HAAN. Over den invloed van jodoform, chloroform en andere in vet oplossende stoffen op de phagocytose. 891.
- BÜCHNER (E. H.)**. Onderzoekingen over het radiumgehalte van gesteenten. I. 210. II 939.
- BUIGING** van een stootgolf door een spleet volgens de theorie van KIRCHHOFF. 427.
- (Berekening van de eindintegraal voorkomende in bovengenoemde verhandeling). 437.

- BUITENZORG-FONDS (Bericht van den Minister van Binnenlandse Zaken dat aan den Heer A. H. BLAAUW, die met een subsidie uit het) naar Buitenzorg zal vertrekken ook een rijkstoelage is verleend. 348.
- Verslag van den Heer J. KUYPER over onderzoekingen door hem verricht aan het Departement van Landbouw te Buitenzorg. 350.
- BURCK (W.). Bericht van overlijden. 480.
- BUYTENDIJK (F. J. J.). Het zuurstofverbruik van het zenuwstelsel. 608, 615.
- Over de negatieve variatie bij den nervus acusticus veroorzaakt door een geluid. 612.
- CALCIUM (Over den invloed van geringe hoeveelheden) op de beweging der Phagocyten. 12.
- CALCIUMCHLORIDE (Over een bevorderenden invloed van) en van darmwand-extract op de Trypsine-werking. 1104.
- CANNEGIETER (H. G.). Ionisatie van gasen door licht, uitgestraald door Geissler'sche buizen. Onderzoek naar eventueel hierbij zich voordoende selectieve verschijnselen. 1331.
- CARDINAAL (J.). Verslag over eene verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semi regular from regular polytopes and space fillings”. 3.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. A. BARRAU: „De omwentelingsoppervlakken of cilinders van den tweeden graad der niet-Euklidische ruimte”. 1426.
- CASSEL (Uitnoodiging van het Verein für Naturkunde te) tot bijwoning van de feestelijke herdenking van het 75-jarig bestaan. 1211.
- CAVOLINI (FILIPPO) — Uitnoodiging tot bijwoning van de plechtige herdenking van den sterfdag van (—) op 13—14 September 1910. 349.
- CEL (Reinkulturen uit één onder het mikroskoop geïsoleerde). 721.
- CELLEN (Aanteekeningen over de reticulaire) bij eenige verschillende vertebraten. 958.
- CHAIX (EMILE). Toezending van een voorloepig programma van een „Atlas photographique des formes du relief terrestre”. 718.
- CHLOORWATERSTOFDIAMINOACETON (Over de reactieproducten van kaliumisocyanaat en). Amino- en ureopropyleenureïne. 645.
- CHLOOR-zwavel-dioxyde (Over het stelsel). 293.
- CHLOROFORM (Over den invloed van jodoform,) en andere in vet oplossende stoffen op de phagocytose. 894.
- CHRISTIANA (Uitnoodiging tot bijwoning der feestelijke herdenking van het 100-jarig bestaan der Universiteit te). 1068.
- CILINDERS van den tweeden graad (De omwentelingsoppervlakken of) der niet-Euklidische ruimte. 1426).
- CINCHONA'S (Over het alcaloïde-gehalte in de bladeren van). 119.
- CLAY (J.). Invloed van elektrische trillingen op platina spiegels (Cohaerer-werking). 718.
- CLOSTERIUM EHRENBERGII MEN. (Over de kernstructuur en de karyokinose bij). 170.
- COEFFICIENT van zelfinductie (Een nieuwe formule om den) voor lange solenoïden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen. 1133.

- COËXISTEERENDE PHASEN (Opmerkingen over de grootte der volumina van) van een enkele stof. I. 145S.
- COHAERER-WERKING (Invloed van electriche trillingen op platina-spiegels) 718.
- COHEN (ERNST) — Verzoek om bericht en raad over een subsidieaanvraag van den Heer Prof. — voor het samenstellen van de Tables physico-chimiques. 349. Verslag hierover. 613.
- COL D'OLEN (Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken over het bedrag uit te keeren aan den geleerde, die zal worden uitgezonden naar het laboratorium op den). 2.
- (Mededeeling van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat Z. Exc. goedkeurt de uitzending van den Heer F. A. STEENSMA te Utrecht naar het wetenschappelijk laboratorium op den). 348.
- (Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht en raad betreffende overdracht van de wetenschappelijke laboratoria op den) aan de Italiaansche Regeering. 348. Verslag hierover. 352. Bericht dat de overdracht door de Nederlandsche Regeering wordt goedgekeurd. 479.
- COMPONENTEN (Over de continue samenhang tusschen de driephasenlijnen, welke de evenwichten tusschen de beide) in vasten toestand respect. naast vloeistof en damp aangeven in een binair stelsel. 229.
- CONGRES (Uitnoodiging van het Bestuur van het XIe internationaal geologisch te Stockholm. 2. Bericht dat de heer G. A. F. MOLENGRAFF benoemd is tot gedelegeerde der Regeering op het XIe internationaal geologisch Congres. 348. Verslag hierover. 490.
- (Circulaire van het uitvoerend comité van het 1ste internationaal entomologisch). 2.
- (Toezending van bescheiden betreffende het 14de Vlaamsche Natuur- en Geneeskundig). 349.
- voor toegepaste scheikunde (Internationaal). Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht of er Nederlandsche geleerden zijn bereid te worden afgevaardigd naar het —. 1372.
- CONIQUES (Sur un système de) de l'espace. 942.
- CONTINUE SAMENHANG (Over de) tusschen de driephasenlijnen, welke de evenwichten tusschen de beide componenten in vasten toestand respect. naast vloeistof en damp aangeven in een binair stelsel. 229.
- CORPUS CALLOSUM (De oorsprong der vezels van het) en het psalterium. 1337.
- CRÖMMELIN (C. A.). Isothermen van één-atomige stoffen en hunne binaire mengsels. VI. Coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden van argon; berekening van de kritische dichtheid van argon. 390.
- CRÖMMELIN (C. A.) en H. KAMERLINGH ONNES. Isothermen van één-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VII. Isothermen van argon tusschen $+20^{\circ}$ C. en -150° C. 582. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden. 1177.
- CUCURBITACEËN (Het mechanisme der wateropname door de zaden der). 600.
- DAMMERMAN (K. W.) en J. BOEKE. De Saccus vasculosus der visschen een receptief nerveus orgaan en niet een klier. 62.

- DAMPDICHTHEDEN van argon (Coëxisterende vloeistof- en); berekening van de kritische dichtheid van argon. 390.
- DAMPDRUKKEN (Over) in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen. 1022.
- DARMWAND-EXTRACT (Over een bevorderenden invloed van calciumchloride en van) op de Trypsine-werking. 1104.
- DARWIN (Over de toepassing der methode van) op eenige samengestelde getijden 544.
- DERMATOMEN van den achterpoot (Over vorm en ligging van de). 307.
— (Over rangschikking en variabiliteit der). 462.
- DERMATOMERIE (Een bijdrage tot de) van den achterpoot van den hond. 1115.
- DERRID (Over de physiologische werking van het). 704.
- DIAMETER (De rechte lijnige) van zuurstof. 344. 1039.
- DICHTHEID van argon (Berekening van de kritische). 390.
- Dierkunde.** Circulaire van het uitvoerend Comité van het 1ste internationaal entomologisch Congres. 2.
— J. BOEKE en K. W. DAMMERMAN: „De *Saccus vasculosus* der visschen een receptief nerveus orgaan en niet een klier”. 62.
— MAX WEBER: „Een nieuw geval van ouderlijke zorg voor de nakomelingen bij visschen”. 629.
— A. A. W. HUBRECHT: „De jonge kiemblaas van *Eutheria* en *Matheria*”. 1236.
— G. C. J. VOSMAER: „Opmerkingen omtrent het geslacht *Spirastrella*”. 1243.
- DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (Over de middelpunten der integraalkrommen van) van de eerste orde en den eersten graad. 1416.
- DIMORPHIE (Over de oorzaak der) bij *Oenothera nanella*. 733.
- DINITROBENZOL (Additie-verbindingen van m.). 1432.
- DINITRODIALKYLANILINEX (Over de inwerking van salpeterig zuur op). 955.
- DISSOLUTION (Les phénomènes critiques de) des mélanges de constituants normaux étudiées sous pression variable. 562.
- DOORLATINGSVERMOGEN (Het) van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in 't bijzonder voor alkali- en aardalkalimetalen. 216. 475. 1114.
- DRIEPHASENDRUKKINGEN (Over de bepaling van) in het stelsel zwavelwaterstof-water. 1057.
- DRIEPHASENLIJNEN (Over de continue samenhang tusschen de), welke de evenwichten tusschen de beide componenten in vasten toestand respect. naast vloeistof en damp aangeven in een binair stelsel. 229.
- DUBBELPUNTEN eener c_6 van 't geslacht 0 of 1. 634.
- DUBSKY (J. v.) en A. P. N. FRANCHIMONT. Over de reactieproducten van kaliumisocyanat en chloorwaterstofdiaminoaceton. Amino- en ureopropyleenureïne. 645.
- DUSSER DE BARENNE (J. G.). Zie BARENNE (J. G. DUSSER DE).
- EINDINTEGRAAL (Over de berekening van de) voorkomende in de verhandeling van Dr. C. H. WIND: „Buiging van een stootgolf door een spleet volgens de theorie van KIRCHHOFF”. 437.
- EINDPUNTEN (Over kritische) in ternaire stelsels. 295.
- ELECTROMAGNEET (Een verbeterde halfring-). II. 397.

- ELEKTRISCHE en magnetische krachten (Beschouwingen over lichtstraling onder den gelijktijdigen invloed van), en eenige naar aanleiding daarvan genomen proeven. 1ste gedeelte. 957.
- ELECTROMOTORISCHE KRACHT (De) van het WESTON-normaalement. 621.
- ELIAS (G. J.). Over het ZEEMAN-effect bij emissielijnen in eene richting, schuin ten opzichte van de krachtlijnen. 402.
- ELLIPTISCHE FUNCTIES (Toezending van een programma voor een prijsvraag betreffende eene verhandeling over de kritisch historische methode voor de ontwikkeling van de theorie der). 1068.
- EMISSIELIJNEN (Over het ZEEMAN-effect bij) in eene richting, schuin ten opzichte van de krachtlijnen. 402.
- EMMETROPISATIE (Lensmetingen en). 364.
- ERFELJKHEID (Individueit en) bij eene lagere schimmel (*Trychophyton albiscicans*). 504.
- ERRATUM. 345. 609. 716. 875. 1208. 1376. 1482.
- EUKLIDISCHE RUIMTE (De omwentelingsoppervlakken of cilinders van den tweeden graad der niet-). 1426.
- EUTHERIA en Matheria (De jonge kiemblaas van). 1236.
- EVENWICHT (Het) vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen. 2de mededeeling. 32.
- EVENWICHTEN in het stelsel: Water- Natriumsulfaat- Natriumchlorid- Kopersulfaat- Koperchlorid. 1222.
- EVENWICHTSSTAND (De schommelingen om een) bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen. (3de gedeelte). 748.
- EYKMAN (C.). Aanbieding der dissertatie van den Heer L. H. VAN ROMUNDE: „De voeding der Trappisten”. 1406.
- FACIALIS (The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and) in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 138.
- FLORA of Tegelen (A further investigation of the pliocene). 262.
- FLUORBENZOËZUREN (De drie isomere) en eenige hunner derivaten. 197.
- FORSTER (J.). Bericht van overlijden. 480.
- FRANCHIMONT (A. P. N.). Over stikstof (of nitrilo) — trimethylnitraminomeethyleen. 501.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. TH. BORNWATER: „Over de werking van oxalychloride op aminen en amiden”. 1408.
- FRANCHIMONT (A. P. N.). en J. V. DUBSKY. Over de reactieproducten van kalium-isocyanaat en chloorwaterstofdiaminoaceton. Amino- en Ureo-propyleenureïne. 645.
- FREDHOLM (Over de integraalvergelijkingen van). 932.
- FUNCTIES (Infinitesimale iteratie van wederkeeringe). 2de mededeeling. 27.
- GASMASSA'S (Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte). 1007.
- GASSEN (Waarnemingen betreffende anomale dispersie van het licht in). 1ste mededeeling. 1275.
- (Ionisatie van) door licht uitgestraald door Geissler'sche buizen. 1331.
- (Isothermen van tweeatomige) en hun binaire mengsels. VIII. Controle-bepaling met den volumemeter. 1468.

- GELUID (Over de negatieve variatie bij den nervus acusticus veroorzaakt door een). 642.
- GEOLOGISCHE COMMISSIE (Bericht dat de Heer J. M. VAN BEMMELEN ontslag neemt als lid en Secretaris der). 612.
- Jaarverslag (der) over het jaar 1910. 1069.
- Geophysica.** Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om advies over de besluiten van het in November 1909 te Londen gehouden Internationaal Wereldkaart Comité. 352.
- C. E. A. WICHMANN: „Over de vulkanische uitbarsting van het eiland Tcon (Tijau) in 1659”. 376.
- M. H. VAN BERESTEYN: „Over de toepassing der methode van DARWIN op eenige samengestelde getijden”. 544.
- C. BRAAK: „De getijkrachten te Batavia volgens den astatischen seismograaf van WIECHERT”. 1304.
- GESLACHT 0 of 1 (Dubbelpunten eener c_6 van 't). 634.
- GESTEENTEN (Onderzoekingen over het radiumgehalte van). I. 210. II. 939.
- GETIJDEN (Over de toepassing der methode van DARWIN op eenige samengestelde). 544.
- GETIJKKRACHTEN (De) te Batavia volgens den astatischen seismograaf van WIECHERT). 1304.
- GEYL (Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken over de toekenning van een Rijkssubsidie aan Dr.) voor door hem te verrichten nasporingen in archieven en bibliotheken. 1210. 1372.
- GODEAUX (LUCIEN). Sur un système de coniques de l'espace. 942.
- GOUDA (Verzoek om advies over de inrichting en plaatsing van bliksemafleiders op de St. Janskerk te). 875. Verslag hierover. 1379.
- GRONDBORINGEN (Bericht van den Hoofdingenieur-Directeur van 's Rijks Waterstaat in de 10de directie over een 36-tal). 612.
- GRIJNS (G.). Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in het bijzonder voor alkali- en aardalkalimetalen. 475.
- HAAAN (J. DE), H. J. HAMBURGER en F. BUBANOVIC. Over den invloed van jodoform, chloroform en andere in vet oplossende stoffen op de phagocytose. 894.
- HAAAS (W. J. DE). Isothermen van twee-atomige gassen en hun binaire mengsels. VIII. Controle-bepalingen met den volumemeter. 1468.
- HAGA (H.). Verslag over een subsidieaanvraag van den Heer Prof. ERNST COHEN voor het samenstellen van de Tables physico-chimiques. 613.
- HAGA (H.) EN J. BOEREMA. De electromotorische kracht van het WESTON-normaal-element. 621.
- Rapport over de plaatsing van bliksemafleiders op de St. Janskerk te Gouda. 1379.
- HALE (GEORGE E.). Bekrchtiging zijner benoeming tot buitenlandsch lid. 2.
- Dankzegging voor zijne benoeming. 138.
- HALOGEENEERING (Over de) der monohalogenbenzolen. 185.
- HAMBURGER (H. J.). Over den invloed van geringe hoeveelheden calcium op de beweging der Phagocyten. 12.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. HEKMA: „Over een bevorderenden invloed van calciumchloride en een darmwand-extract op de Trypsine-werking”. 1104.

- HAMBURGER (H. J.) en F. BUBANOVIC. Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in 't bijzonder voor alkali- en aardalkalimetalen. 216. 1114.
- HAMBURGER (H. J.), J. DE HAAN en F. BUBANOVIC. Over den invloed van jodoform, chloroform en andere in vet oplossende stoffen op de phagocytose. 894.
- HARTOGS (J. C.), A. F. HOLLEMAN en T. VAN DER LINDEN. Over de nitratie van anilien en van eenige anilieden. 1070.
- HASSELT (E. H. VAN). Over de physiologische werking van het derrid. 704.
- HEKMA (E.). Over een bevorderenden invloed van calciumchloride en van darmwand-extract op de Trypsine-werking. 1104.
- HELIUM (Verdere proeven met vloeibaar). 875. 1187. 1479.
- HERTZ (PAUL). Ueber die kanonische Gesamtheit. 824.
- HOEKPENTEN (Over het verband tusschen de) van een bepaald zesdimensionaal polytoop en de rechten van een kubisch oppervlak. 356.
- HOEVELL (J. J. L. D. BARON VAN). Aanteekeningen over de reticulaire cellen bij eenige verschillende vertebraten. 988.
- HOFF (J. H. VAN 't). Bericht van overlijden. 1211.
- HOLLEMAN (A. F.). Aanbieding eener mededeeling van Mej. ADA PRINS: „Kritische verschijnselen in het ternaire stelsel: aether-anthrachinon-naphthaline”. 204.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. H. BÜCHNER: „Onderzoekingen over het radiumgehalte van gesteenten”. I. 210. II. 939.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en H. L. DE LEEUW: „Over het unaire, trimoleculaire, pseudo-ternaire stelsel acet., par- en met-aldehyde”. 272.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en H. L. DE LEEUW: „Over het stelsel acetaldehyd-alcohol”. 283.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en W. J. DE MOOY: „Over het stelsel chloorzwaveldioxyde”. 293.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren J. BOESEKEN en A. SCHWEIZER: „De snelheid der ringopening in verband met de samenstelling der onverzadigde ringsystemen”. 495.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. E. C. SCHEFFER: „Over de bepaling van de driephasendrukkingen in het stelsel zwavelwaterstof-water”. 1057.
- HOLLEMAN (A. F.), J. C. HARTOGS en T. VAN DER LINDEN. Over de nitratie van anilien en van eenige anilieden. 1070.
- HOLLEMAN (A. F.) en T. VAN DER LINDEN. Over de halogeeneering der monohalogenbenzolen. 188.
- HOLLEMAN (A. F.) en I. J. RINKES. Over de monohalogeeneering van phenol. 67.
- HOLLEMAN (A. F.) en J. H. SLOTHOUWER. De drie isomere fluoorbenzoëzuren en eenige hunner derivaten. 497.
- HOND (Experimenteele onderzoekingen over segmentaal-innervatie van de huid van den). 6de mededeeling. 307. 7de mededeeling. 462.
- (Een bijdrage tot de dermatometrie van den achterpoot van den). 1115.

- HOOGWERFF (S.). Verslag over een subsidieaanvraag van den Heer Prof. ERNST COHEN voor het samenstellen der Tables physico-chimiques. 613.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren: J. BOËSEKEN en H. J. PRINS: „De synthese van heptachloorpropaan uit tetrachloor-aethyleen en chloroform onder medewerking van aluminium-chloride”. 776.
- HOORWEG (J. L.). Over het prikkeleffect bij levende organismen. 1433.
- HUBRECHT (A. A. W.). Aanbieding eener mededeeling van de Heeren J. BOEKE en K. W. DAMMERMAN: „De saccus vasculosus der visschen een receptief nerveus orgaan en niet een klier”. 62.
- De jonge kiemblaas van Eutheria en Matheria. 1236.
- HUET (W. A.). Aanteekeningen over de trochlearis- en oculomotorius-kern en den trochlearis-wortel bij lagere vertebraten. 981.
- HUID van den hond (Experimenteele onderzoekingen over segmentaal-innervatie van de). 6de mededeeling. 397. 7de mededeeling. 462.
- Hygiëne** (Circulaire van de in 1911 te Dresden te houden internationale tentoonstelling voor). 138.
- HYPAPHORINE en het verband dezer stof met Tryptophaan. 1250.
- HYPOPHYSE (Over de ontwikkeling der) van de primaten in 't bijzonder bij Tarsius en den mensch. 667.
- INDIVIDUALITEIT en erfelijkheid bij eene lagere schimmel (Trichophyton albiscians). 504.
- INSECTEN (De oorzaak der voedselkeus bij plantenetende). 594.
- INTÉGRAALKROMMEN (Over middelpunten der) van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en den eersten graad. 1446.
- INTEGRAALVERGELIJKINGEN van FREDHOLM (Over de). 932.
- INTEGREREN van reeksen (Over het termsgewijze). 924.
- IONISATIE van gassen door licht, uitgestraald door Geissler'sche buizen. 1331.
- ISOTHERMEN van argon tusschen $+20^{\circ}\text{C}$. en -150°C . 582.
- van één-atomige stoffen en hunne binaire mengsels. VI. Coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden van argon; berekening van de kritische dichtheid van argon. 390. VII. Isothermen van argon tusschen $+20^{\circ}\text{C}$. en -150°C . 582. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden. 1177.
- van twee-atomige gassen en hunne binaire mengsels. VIII. Controlebepalingen met den volumenometer. 1468.
- ITERATIE (Infinitesimale) van wederkeerige functies. 2de Mededeeling. 27.
- ITERTSON JR (G. VAN) en Mej. G. VAN AMSTEL. Over het temperatuuroptimum van physiologische processen. 106. II. 534.
- JODOFORM (Over den invloed van), chloroform en andere in vet oplossende stoffen op de phagocytose. 894.
- JONG (A. W. K. DE). Bekrchtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.
- Dankzegging voor zijne benoeming. 349.
- JULIUS (W. H.). Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmassa's. 1907.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. L. BERGANSIUS: „Een nieuwe formule om den coëfficient van zelfinductie voor lange solenoïden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen”. 1133.

- JULIUS (W. H.).** Aangebieding eener mededeeling van den Heer H. G. CANNEGIETER: „Ionisatie van gassen door licht uitgestraald door Geissler'sche buizen. Onderzoek naar eventueel hierbij zich voordoende selectieve verschijnselen". 1331.
 — Verslag over de plaatsing van bliksemalleiders op de St. Janskerk te Gouda, 1379.
 — De lijnen *H* en *K* in het spectrum van de verschillende deelen der zonneschijf. 1395.
 — en B. J. VAN DER PLAATS. Waarnemingen betreffende anomale dispersie van het licht in gassen. (1ste mededeeling). 1275.
- KALIUMISOCYANAAT** (Over de reactieproducten van) en chloorwaterstofdiaminoaceton Amino- en ureo-propyleenureïne. 645.
- KAMERLINGH ONNES (H.).** Zie ONNES (H. KAMERLINGH).
- KANKER** (Inzending door den Heer A. P. L. VAN LANGERAAD van een gesloten manuscript behelzende een overzicht van zijne studiën enz. op het gebied van den). 878.
- KANONISCHE GESAMTHEIT** (Ueber die). 824.
- KAPPERS (C. U. ARIËNS).** (Verslag over eene verhandeling van den Heer.) The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 138.
- KAPTEYN (W.).** Aangebieding eener mededeeling van den Heer M. J. VAN UVEN „Infinitesimale iteratie van wederkeerige functies". 2de mededeeling. 27.
 — Over de integraalvergelijkingen van FREDHOLM. 932.
 — Over de berekening van de eindintegraal voorkomende in de verhandeling van den Heer C. H. WIND: „Buiging van een stootgolf door een spleet volgens de theorie van KIRCHHOFF". 437.
 — Over de middelpunten der integraalkrommen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en den eersten graad. 1446.
- KARYOKINOSE** (Over de kernstructuur en de) bij Closterium Ehrenbergii Men. 170.
- KATZ (J. R.).** Onderzoekingen over de analogie tusschen opzwellen en mengen. 649, 781.
- KERNSTRUCTUUR** (Over de) en de karyokinose bij Closterium Ehrenbergii Men. 170.
- KIEMBLAAS** (De jonge) van Eutheria en Matheria. 1236.
- KIEMPLANTJES** (Over het verband van prikkel en effect bij phototropische krommingen van) van Avena sativa. 1254.
- KOHLBRUGGE (J. H. F.).** Zuurvormende lucht- en rijstbacteriën de oorzaak der kippen-Beri-beri. 968.
- KOHNSTAMM (PH.).** Over de osmotische temperaturen en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal. 864.
 — en L. S. ORNSTEIN. Over het warmtetheorema van NERNST. 848.
 — en F. E. C. SCHEFFER. Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheden. 875, 878.
 — en J. TIMMERMANS. Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen. 1022.
- KOLONIËN** (Minister van). Zie MINISTER van Koloniën.
- KORTEWEG (D. J.).** Aangebieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Over continue vectordistributies op oppervlakken". 3de mededeeling. 36.
 — Aangebieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER: „Over éénéénduidige, continue transformaties van oppervlakken in zich zelf". (3de mededeeling). 737.

- KORTWEG (D. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. J. E. BETH : „De schommelingen van een evenwichtsstand bij het bestaan eener lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen”. 3de gedeelte. 748.
- Bekrchtiging zijner benoeming tot Onder-Voorzitter. 1372.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER : „Over de structuur der perfecte puntenverzamelingen”. 2de mededeeling. 1416.
- KORTHALS-FONDS (P. W.) — Brief van Administrateurs van het — met kennisgeving dat dit jaar weder een som van *f* 600.— beschikbaar is ter bevordering der kruidkunde. 138. Toezending van het bedrag. 480.
- KRACHTLIJNEN (Over het Zeeman-effect bij emissielijnen in eene richting, schuin ten opzichte van de). 402.
- KRISTALDOORSNEDEN (Over de oriëntering van mikroskopische). 787.
- (Over de oriëntering van). 1161.
- Kristallographie.** J. SCHMUTZER : „Over de oriëntering van mikroskopische kristaldoorsneden”. 787.
- J. SCHMUTZER : „Over de oriëntering van kristaldoorsneden”. 1161.
- J. SCHMUTZER : „Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak in eene willekeurige kristalsnede”. 1165.
- J. SCHMUTZER : „Over de vaststelling van de richting van een onbekend vlak uit zijne traces in twee georiënteerde kristalsneden”. 1176.
- KRISTALSNEDE (Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak in eene willekeurige). 1165.
- KRISTALSNEDEN (Over de vaststelling van de richting van een onbekend vlak, uit zijne traces in twee georiënteerde). 1176.
- KRITISCHE GROOTHEDEN (Opmerkingen over de waarde der). 1310.
- KROMMINGEN (Over het verband van prikkel en effect bij phototropische) van kiemplantjes van *Avena sativa*. 1254.
- KRUIDKUNDE (Brief van Administrateurs van het P. W. Korthals-Fonds met kennisgeving dat dit jaar weder een som van *f* 600.— beschikbaar is ter bevordering der). 138.
- KRUYT (H. R.). Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen. 2de mededeeling. 32.
- KUYPER (J.). Verslag van zijne onderzoekingen verricht gedurende zijn verblijf aan het Departement van Landbouw te Buitenzorg. 350.
- LAAR (J. J. VAN). Iets over den vasten toestand. V. 405. VI. 675. VII. 1481.
- LANGERAAD (A. P. L. VAN). Inzending van een gesloten manuscript behelzende „een overzicht van zijne studiën enz op het gebied van den kanker”. 878.
- LANDBOUW, Nijverheid en Handel (Minister van). Zie MINISTER van Landbouw, Nijverheid en Handel.
- LEERSUM (P. VAN). Over het alcaloïde-gehalte in de bladeren van *Cinchona*'s. 119.
- LEEUW (H. L. DE) EN A SMITS. Over het unaire, tri-moleculaire, pseudo-ternaire stelsel acet., par- en met-aldehyde”. 272.
- Over het stelsel acetaldehyd-alcohol. 283.

- LEEUW (H. I. DE) en A. SMITS. Bevestiging van de nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie. I. 802.
- LELY (C.). Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om advies over de besluiten van het in November 1909 gehouden Internationaal Wereldkaart Comité. 352.
- Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1910. 1069.
- LENSMETINGEN en Emmetropisatie. 364.
- LICHT (Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het) in uitgestrekte gasmassa's. 1007.
- (Waarnemingen betreffende anomale dispersie van het) in gassen. (1ste mededeeling). 1275.
- (Ionisatie van gassen door), uitgestraald door Geissler'sche buizen. 1331.
- LICHTSTRALING (Beschouwingen over) onder den gelijktijdigen invloed van elektrische en magnetische krachten, en eenige naar aanleiding daarvan genomen proeven. 1ste gedeelte. 957.
- LINDEN (T. VAN DER) en A. F. HOLLEMAN. Over de halogeneering der monohalogeenebenzolen. 188.
- , A. F. HOLLEMAN en J. C. HARTOGS. Over de nitratie van anilien en van eenige anilieden. 1070.
- LINEAIRE RELATIE (De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige) tusschen de trillingsgetallen. (3de gedeelte). 748.
- LORENTZ (H. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Iets over den vasten toestand”. V. 405. VI. 675. VII. 1481.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. S. ORNSTEIJN: „Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer”. I. 809. II. 947.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer PAUL HERTZ: „Ueber die kanonische Gesamtheit”. 624.
- Bekrachtiging zijner benoeming tot Voorzitter. 1372.
- Rapport over de plaatsing van bliksemafleiders op de St. Janskerk te Gouda. 1379.
- LUCHT- EN RIJSTBACTERIËN (Zuurvormende) de oorzaak der kippen-Beri-beri. 968.
- LUCHTDRIUKKING (De dagelijksche variatie van wind en barometerstand in verband met den gradiënt der). 1381.
- LUCHTLAGEN (Voorloopig bericht omtrent het in het jaar 1909 te Batavia aangevangen onderzoek der hoogere). 161.
- LUIK (Mededeeling van de oprichting van het Institut électrotechnique te). 349.
- LIJNEN *H* en *K* (De) in het spectrum van de verschillende deelen der zonnenschijf. 1395.
- MAAGSARCINE (Een proefneming met). 1412.
- MAGNETISCHE KRACHTEN (Beschouwingen over lichtstraling onder den gelijktijdigen invloed van elektrische en), en eenige naar aanleiding daarvan genomen proeven. 1ste gedeelte. 957.
- MAGNETISCHE SPLITSING (De) van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken 3de mededeeling. 233.
- MAJCEIN (GEORGE). On quartic curves of deficiency zero with a rhamphoid curve and a node. 768.

- MATHERIA (De jonge kiemblaas van Eutheria en). 1236.
- MATHIAS (E.) en H. KAMERLINGH ONNES. De rechthoekige diameter van zuurstof. 344. 1039.
- MATLA (J. L. W. P.) en G. J. ZAALBERG VAN ZELST (Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht en raad omtrent een request van de Heeren). 1372.
- MECHANISCHE GRONDSLAGEN (Eenige opmerkingen over de) der warmteleer. I. 809. II. 947.
- MÉLANGES (Les phénomènes critiques de dissolution des) de constituants normaux étudiés sous pression variable. 562.
- MELKWEI (Onderzoekingen over den bouw van den). 243.
- MENGBAARHEID der vloeistoffen (Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke). 1022.
- MENGEN (Onderzoekingen over de analogie tussehen opzwellen en). 649. 781.
- MENGGKRISTAL-SYSTEMEN (Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire). 2de mededeeling. 32.
- MENSCH (Over de ontwikkeling der hypophyse van de primaten in 't bijzonder bij Tarsius en den). 67.
- (Over de ontwikkeling van het verhemelte en de beteekenis van de tandlijst bij den). 146.
- (Een nieuwe methode ter bepaling van de bloedsdrukking bij den); tevens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten. 1284.
- MESENCEFALE KERN en wortel (Over) van den N. trigeminus. 1352.
- Meteorologie.** W. VAN BEMMELN en C. BRAAK: „Voorloopig bericht omtrent het in het jaar 1909 te Batavia aangevangen onderzoek der hoogere luchtlagen”. 161.
- J. P. VAN DER STOK: „De dagelijksche variatie van wind en barometerstand in verband met die van den gradiënt der luchtdrukking”. 1381.
- METERCONVENTIE (Verzoek om bericht en raad van den Minister van Binnenlandsche Zaken omtrent de wenschelijkheid der toetreding van Nederland tot de in 1875 gesloten internationale). 1210.
- METHODE (Een nieuwe) ter bepaling van de bloedsdrukking bij den mensch; tevens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten. 1284.
- METHYLEEN (Over stikstof (of nitrilo)-tri-methylnitramino-). 501.
- MICROBEN-LIPASE. 1263.
- Microbiologie.** A. W. NIEUWENHUIS: „Individualiteit en Erfelijkheid bij eene lagere schimmel (*Trichophyton albiscians*). 504.
- A. W. NIEUWENHUIS: „Wijze om microorganismen uit één cel te kweeken.” 522.
- N. L. SÖHNGEN: „Vetsplütsing door bacteriën.” 689.
- S. L. SCHOUTEN: „Reinkulturen uit één onder het mikroskoop geïsoleerde cel.” 721.
- M. W. BEIJERINCK: „Pigmenten als oxydatieproducten door bacteriëngevormd.” 1092.
- N. L. SÖHNGEN: „Microben-lipase.” 1263.
- M. W. BEIJERINCK: „Een proefneming met maagsarcine.” 1412.
- MICROORGANISMEN (Wijze om) uit één cel te kweeken. 522.
- MIDDELPUNTEN (Over) der integraalkrommen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en den eersten graad. 1446.
- MIKROSKOOP (Reinkulturen uit één onder het) geïsoleerde cel. 721.

- MINISTER van Binnenlandsche Zaken.** Mededeeling van de bekrachtiging door H. M. de Koningin van de benoeming van den Heer GEORGE E. HALE tot buitenlandsch lid en van den Heer A. W. K. DE JONG tot correspondent. 2.
- Bericht over het bedrag, uit te keeren aan den geleerde, die zal worden uitgezonden naar het laboratorium op den Col d'Olen. 2.
 - Bericht dat Z.Exc. goedkeurt de uitzending van den Heer F. A. STEENSMA, lector te Utrecht, naar het wetenschappelijk laboratorium op den Col d'Olen. 348.
 - Bericht dat aan den Heer Dr. A. H. BLAAUW, die met een toelage uit het Buitenzorg-fonds naar Buitenzorg zal vertrekken, ook een rijkssubsidie verleend is. 348.
 - Bericht dat de Heer G. A. F. MOLENGRAAFF benoemd is tot gedelegeerde op het 11de internationaal Geologisch Congres te Stockholm. 348.
 - Toezending van ontvangen courantenuitknipsels betreffende radium. 348, 480.
 - Verzoek om bericht en raad betreffende de besluiten van het in November 1909 te Londen bijeengekomen internationale wereldkaart-comité. 348. Verslag hierover. 352.
 - Verzoek om bericht en raad omtrent een schrijven van den Heer A. Mosso betreffende overdracht van de wetenschappelijke laboratoria op den Col d'Olen aan de Italiaansche Regeering. 349. Verslag hierover. 352. Bericht dat de overdracht door de Nederl. Regeering wordt goedgekeurd. 479.
 - Toezending van bescheiden betreffende het 14de Vlaamsche Natuur- en Geneeskundig Congres. 349.
 - Verzoek om bericht en raad omtrent een request van den Heer Prof. ERNST COHEN om subsidie voor het samenstellen der Tables physico-chimiques. 349. Verslag hierover 613.
 - Toezending van een overdruk uit „de Ingenieur” van den Heer H. S. BLAUPOT TEN CAË over de daling van den bodem van Nederland. 480.
 - Verzoek om advies over de inrichting en plaatsing van bliksemafleiders op de St. Janskerk te Gouda. 878. Verslag hierover. 1379.
 - Verzoek om bericht en raad omtrent de wenschelijkheid der toetreding van Nederland tot de in 1875 gesloten internationale meterconventie. 1210.
 - Bericht dat aan Dr. GEYL een rijkssubsidie van f 2500.— is verleend ten behoeve van door hem te verrichten nasporingen in archieven en bibliotheken. 1210, 1372.
 - Bekrachtiging van de benoemingen van de Heeren H. A. LORENTZ, D. J. KORTEWEG en J. D. VAN DER WAALS tot Voorzitter, Onder-Voorzitter en Secretaris. 1372
 - Verzoek om bericht en raad of er Nederlandsche geleerden zijn, bereid te worden afgevaardigd naar het in September 1912 te Washington en New-York te houden VIIIste Internationaal Congres voor toegepaste scheikunde. 1372.
 - Verzoek om bericht en raad omtrent een request van de Heeren J. L. W. P. MATLA en G. J. ZAALBERG VAN ZELST. 1372.
- MINISTER van Kolonien.** Verzoek om toezending van de in het Archief berustende afschriften der oorspronkelijke rapporten van Oberbergrat C. B. R. STIFT over een mijnbouwkundig onderzoek der eilanden Curaçao, Aruba en Bonaire. 1373.

- MINISTER van Landbouw, Nijverheid en Handel. Toezending van een uitgebracht rapport van het Hoofd van den phytopathologischen Dienst inzake internationale bestrijding van plantenziekten. 1210. Verslag hierover. 1380.
- MOLEKULOPEENHOOPING (Schijnassociatie of). 78. II. 549.
- MOLENGRAAFF (G. A. F.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. H. BONNEMA: „Diluviale zwerfsteenen van het eiland Borkum”. 136. 141.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer CLEMENT REID en Mrs ELEANOR M. REID: „A further investigation of the pliocene flora of Tegelen.” 262.
- Bericht van zijne benoeming tot gedelegeerde der Regeering op het XIde internationaal Geologisch Congres te Stockholm. 348. Verslag hierover. 490.
- MOLL (J. W.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. VAN WISSELINGH: „Over de kernstructuur en de Karyokinesis bij Closterium Ehrenbergii Men”. 170.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer ED. VERSCHAFFELT: „De oorzaak der voedselkeus bij plantenetende insecten”. 594.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer ED. VERSCHAFFELT: „Het mechanisme der wateropname door de zaden der Cucurbitaceën”. 600.
- MONOHALOGEENBENZOLEN (Over de halogeeneering der). 188.
- MONOHALOGEENEERING (Over de) van phenol. 67.
- MOOY (W. J. DE) en A. SMITS. Over het stelsel chloor-zwavel-dioxyde 293.
- MOSCOU (Gesellschaft für die Beförderung der experimentellen Wissenschaften und deren praktischen Anwendungen des Namens „Christoph Ledenzow”). Bericht van de oprichting. 138.
- MOSSO (ANGELO). Bericht van overlijden. 718.
- MOTOR CELLS (The migrations of the) of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 138.
- Natuurkunde.** J. D. VAN DER WAALS: „Schijnassociatie of molekulopeenhooping”. 78. II. 549.
- P. ZEEMAN en B. WINAWER: „De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken.” 3de mededeeling. 233.
- E. MATHIAS en H. KAMERLINGH ONNES: „De rechtlijnige diameter van zuurstof.” 344. 1039.
- C. A. CROMMELIN: „Isothermen van één-atomige stoffen en hunne binaire mengsels. VI. Coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden van argon; berekening van de kritische dichtheid van argon.” 390.
- H. E. J. G. du Bois: „Een verbeterde halfring-electromagneet.” II. 397.
- G. J. ELIAS: „Over het ZEEMAN-effect bij emissielijnen in eene richting, schuinen opzichte van de krachtlijnen.” 402.
- J. J. VAN LAAR: „Iets over den vasten toestand.” V. 405, VI. 675, VII. 1481.
- C. H. WIND: „Buiging van een stootgolf door een spleet, volgens de theorie van KIRCHHOFF.” 427.
- JEAN TIMMERMANS: „Les phénomènes critiques de dissolution des mélanges de constituants normaux étudiés sous pression variable.” 562.
- H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Isothermen van éénatomige gassen en hunne binaire mengsels. VII. Isothermen van argon tusschen + 20° C. en — 150° C.” 582.

- Natuurkunde.** H. HAGA en J. BOEREMA : „De electromotorische kracht van het WESTON-normaalelement.” 621.
- J. CLAY : „Invloed van elektrische trillingen op platinaspiegels (Cohaerer-werking).” 718.
- L. S. ORNSTEIN : „Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer.” I. 809. II. 947.
- PAUL HERTZ : „Ueber die kanonische Gesamtheit.” 825.
- PH. KOHNSTAMM en L. S. ORNSTEIN : „Over het warmtetheorema van NERNST.” 848.
- PH. KOHNSTAMM : „Over osmotische temperaturen en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal.” 864.
- PH. KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER : „Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheden.” 875, 878.
- H. KAMERLINGH ONNES : „Verdere proeven met vloeibaar helium.” 875, 1187, 1479.
- P. ZEEMAN : „Beschouwingen over lichtstraling onder den gelijktijdigen invloed van elektrische en magnetische krachten, en eenige naar aanleiding daarvan genomen proeven.” 1ste gedeelte. 957.
- W. H. JULIUS : „Selectieve absorptie en anomale verstrooiing van het licht in uitgestrekte gasmassa's.” 1007.
- PH. KOHNSTAMM en J. TIMMERMANS : „Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen.” 1022.
- F. L. BERGANSIUS : „Een nieuwe formule om den coëfficiënt van zelfinductie voor lange solenoiden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen.” 1123.
- H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN : „Isothermen van éénatomige stoffen en van hunne binaire mengsels. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden.” 1177.
- W. H. JULIUS en B. J. VAN DER PLAATS : „Waarnemingen betreffende anomale dispersie van het licht in gassen.” (1ste mededeeling). 1275.
- J. D. VAN DER WAALS : „Opmerkingen over de waarde der kritische groottheden.” 1310.
- H. G. CANNEGIETER : „Ionisatie van gassen door licht uitgestraald door GEISSLER'sche buizen. Onderzoek naar eventueel hierbij zich voordoende selectieve verschijnselen.” 1331.
- W. H. JULIUS : „De lijnen H en K in het spectrum van de verschillende deelen der zonneshijf.” 1395.
- J. D. VAN DER WAALS : „Opmerkingen over de grootte der volumina van de coëxisterende fasen van een enkele stof.” I. 1458.
- W. J. DE HAAS : „Isothermen van tweeatomige gassen en hun binaire mengsels. VIII. Controle-bepalingen met den volumemeter.” 1468.
- NEDERLAND (Over de daling van den bodem van). 480.
- NERNST (Over het warmtetheorema van). 848.
- NERVUS ACUSTICUS (Over de negatieve variatie bij den) veroorzaakt door een geluid. 642.
- NERVUS TRIGEMINUS (Over mesencefale kern en wortel van den). 1352.
- NETIEN (Over wederkeerigheid in verband met halfregelmatige polytopen en). 373.

- NIEUWENHUIS (A. W.). Individualiteit en Erfelijkheid bij eene lagere schimmel (Trichophyton albiscans). 504.
- Wijze om microörganismen uit één cel te kweken. 522.
- NITRATIE (Over de) van anilien en van eenige anilieden. 1070.
- NORMAALELEMENT (De electromotorische kracht van het Weston-). 621.
- NUCLEUS facialis dorsalis (Over den), nucleus trigeminus posterior, nucleus trochlearis posterior. 181.
- OCULOMOTERIUS-KERN (Aanteekeningen over de trochlearis- en) en den trochlearis-wortel bij lagere vertebraten. 981.
- OENOTHERA NANELLA (Over de oorzaak der dimorphie bij). 733.
- OMWENTELINGS-COMPLEXEN (Quadratische) en omwentelingscongruenties (2,2). 1280.
- OMWENTELINGSOPPERVLAKKEN (De) of cilinders van den tweeden graad der niet-Euklidische ruimte. 1426.
- ONNES (H. KAMERLINGH). Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. A. CROMMELIN: „Isothermen van éénatomige stoffen en hunne binaire mengsels. VII. Coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden van argon; berekening van de kritische dichtheid van argon”. 390.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. CLAY: „Invloed van electrische trillingen op platinaspiegels (Cohaerer-werking)”. 718.
- Verdere proeven met vloeibaar helium. 876, 1187, 1479.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. J. DE HAAS: „Isothermen van tweeatomige gasen en hun binaire mengsels. VIII. Controle-bepalingen met den volumenometer.” 1468.
- ONNES (H. KAMERLINGH) en C. A. CROMMELIN. Isothermen van éénatomige gassen en hunne binaire mengsels VII. Isothermen van argon tusschen $+20^{\circ}$ C. en -150° C. 582. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden. 177.
- ONNES (H. KAMERLINGH) en E. MATHIAS. De rechtlijnige diameter van zuurstof. 344. 1039.
- OPPERVLAK (Over het verband tusschen de hoekpunten van een bepaald zesdimensionaalpolytoop en de rechten van een kubisch). 355.
- OPPERVLAKKEN (Over continue vectordistributies op). 3de mededeeling 36.
- (Over één-éénduidige continue transformaties van) in zichzelf. (3de mededeeling). 737.
- OPZWELLEN en mengen (Onderzoekingen over de analogie tusschen). 649. 781.
- ORBITOÏDEN (Over) uit de omgeving der Balik Papan-baai (Oostkust van Borneo). 1143.
- ORGANISMEN (Over het prikkeleffect bij levende). 1433.
- ORIENTEERING (Over de) van mikroskopische kristaldoorsneden. 787.
- (Over de) van kristaldoorsneden. 1161.
- ORNSTEIN (L. S.). Eënjige opmerkingen over de mechanische grondslagen der warmteleer. I. 809. II. 947.
- ORNSTEIN (L. S.) en PH. KOHNSTAMM. Over het warmtetheorema van NEERNST. 848.

- OSMOTISCHE TEMPERATUREN (Over) en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal. 864.
- OXALYLCHLORIDE (Over de werking van) op aminen en amidën. 1408.
- ONYDATIEPRODUKTEN (Pigmenten als) door bacteriën gevormd. 1092.
- Palaeontologie.** CLEMENT REID en Mrs. ELEANOR M. REID: "A further investigation of the pliocene flora of Tegelen". 262.
- PANNEKOEK (A.). Onderzoekingen over den bouw van den melkweg. 243.
- PEKELIARING (C. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. R. KATZ: „Onderzoekingen over de analogie tusschen opzwellen en mengen". 649, 781.
- PHAGOCYTEN (Over den invloed van geringe hoeveelheden calcium op de beweging der)." 12.
- PHAGOCYTOSE (Over den invloed van jodoform, chloroform en andere in vet oplosende stoffen op de). 894.
- PHENOL (Over de monohalogeneering van). 67.
- Physiologie.** K. F. WENCKEBACH: „Over den invloed der adembaling op den pols." 8.
- H. J. HAMBURGER: „Over den invloed van geringe hoeveelheden calcium op de beweging der Phagocyten." 12.
- Mej. J. VAN AMSTEL en G. VAN ITERSÓN JR.: „Over het temperatuuroptimum van physiologische processen." 106.
- H. J. HAMBURGER en F. BUBANOVIC: „Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in 't bijzonder voor alkali- en aardalkalimetalen" 216, 1114.
- C. WINKLER en G. A. VAN RIJNBEEK: »Experimenteële onderzoekingen over segmentaal-innervatie van de huid van den hond." 6de mededeeling. 307. 7de mededeeling 462.
- Verslag over het verzoek van Prof. A. Mosso om de wetenschappelijke laboratoria op den Col d'Olen over te dragen aan de Italiaansche Regeering. 352.
- W. P. C. ZEFMAN: „Lensmetingen en Emmetropisatie." 364.
- G. GRIJNS: „Het doorlatingsvermogen van onder physiologische voorwaarden verkeerende roode bloedlichaampjes, in het bijzonder voor alkali- en aardalkalimetalen." 475. II. 534.
- F. J. J. BUYTENDIJK: „Over het zuurstofverbruik van het zenuwstelsel." 608, 615.
- F. J. J. BUYTENDIJK: „Over de negatieve variatie bij den nervus acusticus veroorzaakt door een geluid." 642
- J. R. KATZ: „Onderzoekingen over de analogie tusschen opzwellen en mengen." 649, 781.
- E. H. VAN HASSELT: „Over de physiologische werking van het derrid." 704.
- G. VAN RIJNBEEK: „Unisegmentale reflexen." 778.
- H. J. HAMBURGER, J. DE HAAN en F. BUBANOVIC: „Over den invloed van jodoform, chloroform en andere in vet oplosbare stoffen op de phagocytose." 894.
- C. WINKLER: „Een tumor in het pulvinar thalami optici. Een bijdrage tot de kennis van het zien van vormen." 914.
- E. HEKMA: „Over een bevorderenden invloed van calciumchloride en van darmwand-extract op de Trypsine-werking." 1104.

Physiologie. J. G. DUSSER DE BARENNE: „De strychnine-werking op 't centrale zenuwstelsel. De segmentaire, streng lokale strychnine-vergiftiging der dorsale rugge-mergs mechanismen. Een bijdrage tot de dermatomerie van den achterpoot van den hond.” 1115.

— D. DE VRIES REILINGH: „Een nieuwe methode ter bepaling van de arterieele bloedsdrukking bij den mensch; tevens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten.” 1234.

— Aanbieding der dissertatie van den Heer L. H. VAN ROMUNDE: „De voeding der Trappisien.” 1406.

— J. L. HOORWEG: „Over het prikkeleffect bij levende organismen.” 1433.

PHYSIOLOGISCHE PROCESSEN (Over het temperatuuroptimum van). 106. II. 534.

PIGMENTEN als oxydatieprodukten door bacteriën gevormd. 1092.

PLAATS (B. J. VAN DER) en W. H. JULIUS. Waarnemingen betreffende anomale dispersie van het licht in gassen. (1ste mededeeling). 1275.

PLACE (T.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. P. C. ZEEMAN: „Lens-metingen en Emmetropisatie.” 364.

PLANTENZIEKTEN (Rapport van de Commissie in zake de bestrijding der) door het Internationaal Instituut van Landbouw te Rome. 491.

— (Toezending van een afschrift van het rapport van het Hoofd van den phytopathologischen Dienst inzake eene internationale bestrijding van). 1210. Verslag hierover 1380.

Plantkunde. C. VAN WISSELINGH: „Over de kernstructuur en de karyokinose by *Closterium Ehrenbergii* Men.” 170.

— Verslag van de onderzoekingen van den Heer J. KUYPER verricht gedurende zijn verblijf aan het Departement van Landbouw te Buitenzorg. 350.

— A. A. L. RUTGERS: „De invloed der temperatuur op den geotropischen praesentatietijd bij *Avena sativa*”. 380.

— Rapport van de Commissie in zake de bestrijding der plantenziekten door het Internationale Instituut van Landbouw te Rome. 491.

— ED. VERSCHAFFELT: „De oorzaak der voedselkeus bij plantenetende insecten”. 594.

— ED. VERSCHAFFELT: „Het mechanisme der wateropname door de zaden der Cucurbitaceën”. 600.

— H. H. ZEIJLSTRA FZ.N.: „Over de oorzaak der dimorphie bij *Oenothera nanella*”. 732.

— W. H. ARISZ: „Over het verband van prikkel en effect bij phototropische krommingen van kiemplantjes van *Avena sativa*”. 1254.

PLATINA-SPIEGELS (Invloed van electriche trillingen op) (Cohaerer-werking). 718.

POLS (Over den invloed der ademhaling op den). 5.

POLYTOOP (Over het verband tusschen de hoekpunten van een bepaald zesdimensionaal) en de rechten van een kubisch oppervlak. 356.

POLYTOPEN en netten (Over wederkeerigheid in verband met halfregelmatige). 373.

POLYTOPES (Verslag over eene verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semi regular from regular) and space fillings”. 3.

- POTENTIAAL (Over osmotische temperaturen en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen). 864.
- (Thermodynamische) en reactiesnelheden. 875. 878.
- PRAESENTATIETIJD (De invloed der temperatuur op den geotropischen) bij *Avena sativa*. 380.
- PRIKKEL en effect (Over het verband van) bij phototropische krommingen van kiemplantjes van *Avena sativa*. 1254.
- PRIKKELEFFECT (Over het) bij levende organismen. 1433.
- PRIMATEN (Over de ontwikkeling der hypophyse van de) in 't bijzonder bij *Tarsius* en den mensch. 667.
- PRINS (MEJ. ADA). Kritische verschijnselen in het ternaire stelsel: aether-anthraquinon-naphthaline. 204.
- PRINS (H. J.) en J. BÖESEKEN. De synthese van as. heptachloorpropan uit tetrachloor-aethyleen en chloroform onder medewerking van aluminiumchloride. 776.
- PSALTERIUM (De oorsprong der vezels van het corpus callosum en het). 1337.
- PULVINAR THALAMI OPTICI (Een tumor in het). 914.
- PUNTENVERZAMELINGEN (Over de structuur der perfekte). 2de mededeeling. 1416.
- QUARTIC CURVES (On) of deficiency zero with a rhamphoid curve and a node. 768.
- QUADRUPELINVOLUTIE (Een) in het platte vlak en een daarmede verbonden tripelinvolutie. 52.
- RADIUM (Toezending van door den Minister van Binnenlandsche Zaken ontvangen courantenuitknipsels betreffende). 348. 480.
- RADIUMGEHALTE (Onderzoekingen over het) van gesteenten. I. 210. II. 939.
- REACTIEPRODUCTEN (Over de) van kaliumisocyaan in chloorwaterstofdiaminoacetone. Amino- en ureopropyleenureïne. 615
- REACTIESNELHEDEN (Thermodynamische potentiaal en). 875. 878.
- REEKSEN (Over het termsgewijze integreren van). 924.
- REFLEXEN (Unisegmentale). 778.
- REID (CLEMENT) en Mrs. ELEANOR M. REID. A further investigation of the pliocene flora of Tegelen. 262.
- REILINGH (D. DE VRIES). Een nieuwe methode ter bepaling van de bloeddrukking bij den mensch; tevens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten. 1284.
- REINKULTUREN uit één onder het mikroskoop geïsoleerde cel. 721.
- RHAMPHOID CURVE (On quartic curves of deficiency zero with a) and a node. 768.
- RICCI (P. MATTEO) — Circulaires betreffende een nationale huldiging van de nagedachtenis van —. 350.
- RINGOPENING (De snelheid der) in verband met de samenstelling der onverzadigde ringsystemen. 495.
- RINKES (I. J.) en A. F. HOLLEMAN. Over de monohalogeeneering van phenol. 67.
- ROMBURGH (P. VAN). Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. R. KRUYT: „Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen”. (2de mededeeling). 32.
- Over de inwerking van salpeterig zuur op dinitrodialkylanilinen. 955.

- ROMBURGH (P. VAN). Hypaphorine en het verband dezer stof met tryptophaan. 1250.
— Additieverbindingen van m. dinitrobenzol. 1132.
- ROME (Rapport van de Commissie inzake de bestrijding der plantenziekten door het internationale Instituut van Landbouw te). 451.
- ROMUNDE (L. H. VAN). De voeding der Trappisten. 1406.
- ROOT-FIBRES (The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their). 138.
- ROUAAN (Uitnodiging van den Maire van) tot bijwoning van het Congrès du Millénaire Normand. 480.
- RUGGEMERGS MECHANISMEN (De segmentale, streng lokale strychuine-vergiftiging der dorsale). 1115.
- RUTGERS (A. A. L.). De invloed der temperatuur op den geotropischen praesentatielijd bij *Avena sativa*. 380.
- RUTTEN (L.). Over Orbitoiden uit de omgeving der Balik Papan-baai (Oostkust van Borneo). 1143.
- RIJNBEEK (G. A. VAN). Unisegmentale reflexen. 778.
- RIJNBEEK (G. A. VAN) en C. WINKLER. Experimenteële onderzoekingen over segmentaal-innervatie van de huid van den hond. 6de mededeeling, 307. 7de mededeeling. 462.
- RIJSTBACTERIËN (Zuurvormende lucht- en) de oorzaak der kippen-Beri-beri. 968.
- SACCUS VASCULOSUS (De) der visschen een receptief nerveus orgaan en niet een klier. 62.
- SALPETERIGZUUR (Over de inwerking van) op dinitrodialkylanilinen. 955.
- SANDE BAKHUYZEN (E. F. VAN DE). Zie BAKHUYZEN (E. F. VAN DE SANDE).
- SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE). Zie BAKHUYZEN (H. G. VAN DE SANDE).
- SCHIEFFER (F. E. C.). Over de continue samenhang tusschen de driephasenlijnen, welke de evenwichten tusschen de beide componenten in vasten toestand respect. naast vloeistof en damp aangeven in een binair stelsel. 229.
— Over de bepaling van driephasendrukkingen in het stelsel zwavelwaterstof-water. 1057.
— en PH. KOHNSTAMM. Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheden. 875. 878.
- Scheikunde.** H. R. KRUYT: „Het evenwicht vast-vloeibaar-gas in binaire mengkristal-systemen”. 2de mededeeling. 32.
— A. F. HOLLEMAN en I. J. RINKES: „Over de monohalogeneering van phenol”. 67.
— P. VAN LEERSUM: „Over het alcaloïde gehalte in de bladeren van *Cinchona*’s”. 119.
— A. F. HOLLEMAN en T. VAN DER LINDEN: „Over de halogeneering der monohalogenbenzolen”. 188.
— Mej. ADA PRINS: „Kritische verschijnselen in het ternaire stelsel aether-anthra-chinon-naphthaline”. 204.
— E. H. BÜCHNER: „Onderzoekingen over het radiumgehalte van gesteenten”. I. 210.
— F. E. C. SCHIEFFER: „Over de continue samenhang tusschen de driephasenlijnen, welke de evenwichten tusschen de beide componenten in vasten toestand respect. naast vloeistof en damp aangeven in een binair stelsel”. 229.
— A. SMITS en H. L. DE LEEUW: „Over het unaire, trimoleculaire, pseudo-ternaire stelsel acet-, par- en met-aldehyde”. 272.

- Scheikunde.** A. SMITS en H. L. DE LEEUW: „Over het stelsel acetaldehyd-alcohol”. 283.
- A. SMITS en W. J. DE MOOY: „Over het stelsel chloor-zwaveldioxyde”. 293.
- A. SMITS: „Over kritische eindpunten in ternaire stelsels”. 296.
- J. BOËSEKEN en A. SCHWEIZER: „De snelheid der ringopening in verband met de samenstelling der onverzadigde ringsystemen”. 495.
- A. F. HOLLEMAN en J. H. SLOTHOUWER: „De drie isomere fluoorbenzoëzuren en eenige hunner derivaten”. 497.
- A. P. N. FRANCHIMONT: „Over stikstof (of nitrolo)- tri-methylnitraminomethyleen”. 501.
- A. P. N. FRANCHIMONT en J. V. DUBSKY: „Over de reactieproducten van kaliumisocyaan en chloorwaterstofdiaminoacet. Amino- en ureo-propyleenureïne”. 615.
- J. BOËSEKEN en H. J. PRINS: „De synthese van as. heptachloorpropaan uit tetrachloor-aethyleen en chloroform onder medewerking van aluminiumchloride”. 776.
- A. SMITS en H. L. DE LEEUW: „Bevestiging van de nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie”. I. 802.
- PH KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER: „Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheid”. 878.
- P. VAN ROMBURGH: „Over de inwerking van salpeterigzuur op dinitrodialkylanilinen”. 955.
- F. E. C. SCHEFFER: „Over de bepaling van de driefasendrukkingen in het stelsel zwavelwaterstof-water”. 1057.
- A. F. HOLLEMAN, J. C. HARTOGS en T. VAN DER LINDEN: „Over de nitratie van anilien en eenige anilieden”. 1070.
- F. A. H. SCHREINEMAKERS: „Evenwichten in het stelsel: Water-natriumsulfaat-natriumchlorid-kopersulfaat-koperchlorid”. 1222.
- P. VAN ROMBURGH: „Hypaphorine en het verband dezer stof met trytophaan”. 1250.
- Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht of er Nederlandsche geleerden zijn bereid te worden afgevaardigd naar het Internationaal Congres voor toegepaste Scheikunde in September 1912 te Washington en New York te houden. 1372.
- J. TH. BORNWATER: „Over de werking van Oxalylechloride op aminen en amiden”. 1408.
- P. VAN ROMBURGH: „Additie-verbindingen van m. diinitrobenzol”. 1432.
- SCHIMMEL (*Trichophyton albiscans*) (Individualiteit en Erfelijkheid bij eene lagere). 504.
- SCHMUTZER (J.). Over de oriëntering van mikroskopische kristaldoorsneden. 787.
- Over de oriëntering van kristaldoorsneden. 1161.
- Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak in eene willekeurige kristalsnede. 1165.
- Over de vaststelling van de richting van een onbekend vlak uit zijne traces in twee georiënteerde kristalsneden. 1176.
- SCHOMMELINGEN (De) om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen. (3de gedeelte). 748.
- SCHOUTE (P. H.). Verslag over eene verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semi regular from regular polytopes and space fillings”. 3.

- SCHOOTE (P. H.). Over het verband tusschen de hoekpunten van een bepaald zesdimensionaal polytoop en de rechten van een kubisch oppervlak. 356.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. VAN DER WOUDE: „Dubbelpunten eener c_6 van 't geslacht 0 of 1". 634.
 - en Mrs. A. BOOLE STOTT. Over de wederkeerigheid in verband met halfregelmatige polytopen en netten. 373.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer LUCIEN GODEAUX: „Sur un système de coniques de l'espace". 942.
- SCHOUTEN (S. L.). Reinkulturen uit één onder het mikroskoop geïsoleerde cel. 721.
- SCHREINEMAKERS (F. A. H.). Verslag over een subsidieaanvraag van den Heer Prof. ERNST COHEN voor het samenstellen der Tables physico-chimiques. 613.
- Evenwichten in het stelsel: Water-natriumsulfaat -natriumchlorid -kopersulfaat -koperchlorid. 1222.
- SCHWEIZER (A) en J. BOËSEKEN. De snelheid der ringopening in verband met de samenstelling der onverzadigde ringsystemen. 495.
- SCHIJNASSOCIATIE of molecuulopeenhooping. 78. II. 549.
- SEGMENTAAL-INNervATIE (Experimenteele onderzoekingen over) van de huid van den hond. 6de mededeeling. 307. 7de mededeeling. 462.
- SEISMOGRAAF van WIECHERT (De getijkrachten te Batavia volgens den astatischen). 1304.
- SLOTHOUWER (J. H.) en A. F. HOLLEMAN. De drie isomere fluoorbenzoëzuren en eenige hunner derivaten. 497.
- SMITS (A.). Over kritische eindpunten in ternaire stelsels. 296.
- en H. L. DE LEEUW. Over het unaire, tri-moleculaire, pseudo-ternaire stelsel acet-, par- en met-aldehyde. 272.
 - Over het stelsel acetaldehyd-alcohol. 283.
 - Pevestiging van de nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie. I. 802.
 - en W. J. DE MOOY. Over het stelsel chloor-zwavel-dioxyde. 293.
- SÜHNGEN (N. L.). Vetsplitsing door bacteriën. 689.
- Microben-lipase. 1263.
- SOLENOIDEN (Een nieuwe formule om den coëfficiënt van zelfinductie voor lange) met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen. 1133.
- SPACE FILLINGS (Verslag over eene verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semi regular from regular polytopes and"). 3.
- SPECTRUM (De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het) der zonnevlekken. 3de mededeeling. 233.
- (De lijnen *H* en *K* in het) van de verschillende deelen der zonneschijf. 1395.
- SPIRASTRELLA (Opmerkingen omtrent het geslacht). 1243.
- SPRONCK (C. H. H.) Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. H. F. KOHLBRUGGE: „Zuurvormende lucht- en rijstbacteriën de oorzaak der kippen-Beri-beri". 968.
- STEENSMA (F. A.) — Mededeeling van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat Z.Exc. goedkeurt de uitzending van den Heer — naar het wetenschappelijk Laboratorium op den Col d'Olen. 345.

- STELSEL acet-, par- en met-aldehyde (Over het unaire, tri-moleculaire, pseudo-ternaire). 272.
- acetaldehyd-alcohol (Over het). 283.
 - chloor zwaveldioxyde (Over het). 293.
 - Water-natriumsulfaat -natriumchlorid -kopersulfaat -koperchlorid (Evenwichten in het). 1222.
 - Zwavelwaterstof-water (Over de bepaling van driephasendrukkingen in het). 1057.
- Sterrenkunde.** A. PANNEKOEK: „Onderzoekingen over den bouw van den melkweg”. 245.
- STIKSTOF (of nitrido) — trimethylnitraminomethyleen (Over). 501.
- STOFFEN (Isothermen van éénatomige) en hunne binaire mengsels. VI. Coëxisterende vloeistof- en dampdichtheden van argon; berekening van de kritische dichtheid van argon. 390. VII. Isothermen van argon tusschen + 20° C. en — 150° C. 582. VIII. Het gedrag van argon ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden, 1177.
- STOK (J. P. VAN DER). Aanbieding eener mededeeling van den Heer M. H. VAN BERESTEYN: „Over de toepassing der methode van DARWIN op eenige samengestelde getijden”. 544.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. BRAAK: „De getijkrachten te Batavia volgens den astatischen seismograaf van WIECHERT”. 1304.
 - De dagelijksche variatie van wind en barometerstand in verband met die van den gradiënt der luchtdrukking. 1381.
- STOOTGOLF (Buiging van een) door een spleet, volgens de theorie van KIRCHHOFF. 427.
- (Berekening van de eindintegraal voorkomende in bovengenoemde verhandeling). 437.
- STOTT (Mrs. A. BOOLE). Zie BOOLE STOTT (Mrs. A.).
- STRYCNINE-VERGIFTIGING (De segmentale streng lokale) der dorsale ruggemergsmechanismen. 1115.
- STRYCNINE-WERKING (De) van 't centrale zenuwstelsel. 1115.
- SYNTHESE (De) van as heptachloorpropaan uit tetrachloor-aethyleen en chloroform onder medewerking van aluminiumchloride. 776.
- TABLES PHYSICO-CHIMIQUES (Verzoek om bericht en raad over een subsidieaanvraag van den Heer Prof. ERNST COHEN voor het samenstellen der). 349. Verslag hierover. 613.
- TANDLIJST (Over de ontwikkeling van het verhemelte en de beteekenis van de) bij den mensch. 146.
- TARSICUS (Over de ontwikkeling der hypophyse van de primaten in 't bijzonder bij) en den mensch. 667.
- TEGELEN (A further investigation of the pliocene flora of). 262.
- TEMPERATUUR (De invloed der) op den geotropischen praesentatietijd bij *Avena sativa*. 380.
- TEMPERATUUROPTIMUM (Over het) van physiologische processen. 106. II. 534.
- TÉON (Tijau) (Over de vulkanische uitbarsting van het eiland) in 1659. 376.
- TERNAIRE STELSEL (Kritische verschijnselen in het): aether-anthrachinon-naphthaline. 204.
- TERNAIRE STELSELS (Over kritische eindpunten in). 296.

- THEORIE (Bevestiging van de nieuwe) van het verschijnsel allotropie. I. 802.
 — van KIRCHHOFF (Buiging van een stootgolf door een spleet, volgens de). 427.
 — (Berekening van de eindintegraal voorkomende in bovengenoemde verhandeling). 437.
- TIMMERMANS (JEAN). Les phénomènes critiques de dissolution des mélanges de constituants normaux étudiés sous pression variable. 562.
- TIMMERMANS (J.) en PH. KOHNSTAMM. Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen. 1022.
- TOESTAND (Iets over den vasten). V. 405. VI. 675. VII. 1481.
- TOULOUSE (Bericht dat de bibliotheek der Universiteit te) door brand vernield is en verzoek om toezending van een nieuw stel van de uitgaven der Akademie. 612.
- TRANSFORMATIES (Over één-éénduidige continue) van oppervlakken in zich zelf. (3de mededeeling). 737.
- TRAPPISTEN (De voeding der). 1406.
- TREUB (M.). Bericht van overlijden. 450.
- TRICHOPHYTON ALBISCANS (Individualiteit en Erfelijkheid bij eene lagere schimmel). 504.
- TRIGEMINUS (The migrations of the motor cells of the), Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres. 138.
- TRILLINGEN (Invloed van electricische) op platina-spiegels (Cohaerer-werking). 718.
- TRILLINGSGETALLEN (De schommelingen om een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de). (3de gedeelte). 748.
- TRIPELINVOLUTIE (Een quadrupelinvolutie in het platte vlak en een daarmede verbonden). 52.
- TROCHLEARIS- en oculomotorius-kern (Aanteekeningen over de) en den trochlearis-wortel bij lagere vertebraten. 981.
- TRYPSINE-WERKING (Over een bevorderenden invloed van calciumchloriede en van darmwand-extract op de). 1104.
- TRYPTOPHAAN (Hypaphorine en het verband dezer stof met). 1250.
- TUMOR (Een) in het pulvinar thalami optici. 914.
- UITBARSTING (Over de vulkanische) van het eiland Tóon (Tijau) in 1659. 376.
- UVEN (M. J. VAN). Infinitesimale iteratie van wederkeerige functies. 2de mededeeling. 27.
- VALKENBURG (C. T. VAN). Over den nucleus facialis dorsalis, nucleus trigemini posterior, nucleus trochlearis posterior. 181.
 — De oorsprong der vezels van het corpus callosum en het psalterium. 1337.
 — Over mesencefale kern en wortel van den N. trigeminus. 1352.
- VALLAURI (THOMAS). Toezending van het programma der Vallauri-prijzen ingesteld door —. 1068.
- VARIATIE (Over de negatieve) bij den nervus acusticus veroorzaakt door een geluid. 642.
- VECTORDISTRIBUTIES (Over continue) op oppervlakken. 3de mededeeling 36.
- VERGADERING (Vaststelling der December —). 716.
 — (Vaststelling der April —). 1369.
- VERHEMELTE (Over de ontwikkeling van het) en de beteekenis van de tandlijst bij den mensch. 146.

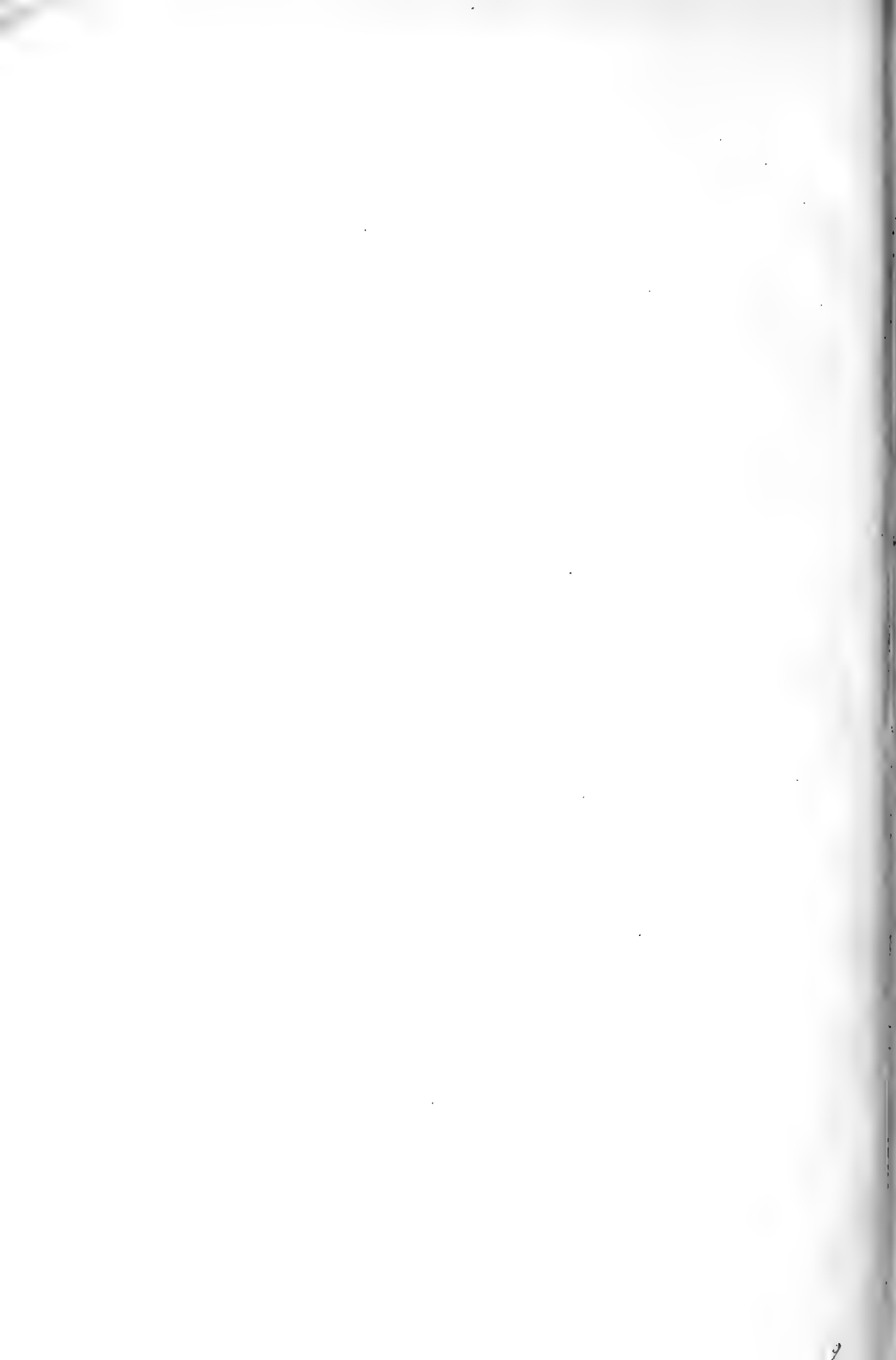
- VERSCHAFFELT (ED.). De oorzaak der voedselkeus bij plantenetende insecten. 594.
 — Het mechanisme der wateropname door de zaden der Cucurbitaceën. 609.
- VERTEBRATEN (Aanteekeningen over de trochlearis- en oculomotorius-kern en den trochleariswortel bij lagere). 981.
 — (Aanteekeningen over de reticulare cellen bij eenige verschillende). 988.
- VERTEBRATES (The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of) and the differences in the course of their root-fibres. 138.
- VETSPLITSING door bacteriën. 689.
- VEZELS (De oorsprong der) van het corpus callosum en het psalterium. 1337.
- VISSCHEN (De saccus vasculosus der) een receptief nerveus orgaan en niet een klier. 62.
 — (Een nieuw geval van ouderlijke zorg voor de nakomelingen bij). 629.
- VLAK (Een quadrupelinvolutie in het platte) en een daarmede verbonden tripelinvolutie. 52.
 — (Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig) in eene willekeurige kristalsnede. 1165.
 — Over de vaststelling van de richting van een onbekend) uit zijne traces in twee georiënteerde kristalsneden. 1176.
- VLOEISTOF- en dampdichtheden (Coëxisterende) van argon; berekening van de kritische dichtheid van argon. 390.
- VLOEISTOFFEN (Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der). 1022.
- VOEDSELKEUS (De oorzaak der) bij plantenetende insecten. 594.
- VOLUMINA (Opmerkingen over de grootte der) van de coëxisterende fasen van een enkele stof. I. 1458.
- VOLUMENOMETER (Controlebepalingen met den). 1468.
- VOSMAER (G. C. J.). Opmerkingen omtrent het geslacht *Spirastrella*. 1243.
- VRIES (HUGO DE). Rapport inzake de bestrijding der plantenziekten door het Internationale Instituut van Landbouw te Rome. 491.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. H. ZEYLSTRA FZn: „Over de oorzaak der dimorphie bij *Oenothera nanella*”. 732.
 — Verslag over een door den Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel toegezonden rapport van het Hoofd van den phytopathologischen Dienst inzake internationale bestrijding van plantenziekten. 1380.
- VRIES (JAN DE) Een quadrupelinvolutie in het platte vlak en een daarmede verbonden tripelinvolutie. 52.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer GEORGE MAJCN: „On quartic curves of deficiency zero with a ramphoid cusp and a node”. 768.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. WOLFF: „Quadratische omwentelingscomplexen en omwentelingscongruenties (2.2)”. 1280.
- VRIES REILINGH (D DE). Zie REILINGH (D. DE VRIES).
- WAALS (J. P. VAN DER). Schijn-associatie of molecuuloepenhoojing. 78. II, 549.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. E. C. SCHEFFER: „Over de continue samenhang tusschen de drie fasenlijnen, welke de evenwichten tusschen beide componenten in vasten toestand respect. naast vloeistof en damp aangeven in een binair stelsel”. 229.

- WAAALS (J. D. VAN DER). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SMITS: „Over kritische eindpunten in ternaire stelsels”. 296.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer JEAN TIMMERMANS: „Les phénomènes critiques de dissolution des mélanges de constituants normaux étudiés sous pression variable”. 562.
- Verslag over een subsidieaanvraag van den Heer Prof. ERNST COHEN voor de samenstelling der Tables physico-chimiques. 613.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren A. SMITS en H. L. DE LEEUW: „Bevestiging van de nieuwe theorie van het verschijnsel allotropie”. I. 802.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren PH. KOHNSTAMM en L. S. ORNSTEIN: „Over het warmtetheorema van NERNST”. 848.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Over de osmotische temperaturen en de kinetische beteekenis van den thermodynamischen potentiaal”. 864.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren PH. KOHNSTAMM en F. E. C. SCHEFFER: „Thermodynamische potentiaal en reactiesnelheden”. 875.
- Aanbieding eener mededeeling van de Heeren PH. KOHNSTAMM en J. TIMMERMANS: „Over dampdrukken in binaire stelsels bij gedeeltelijke mengbaarheid der vloeistoffen”. 1022.
- Opmerkingen over de waarde der kritische grootheden. 1310.
- Bekrachtiging zijner benoeming tot Secretaris. 1372.
- Opmerkingen over de grootte der volumina van de coëxisterende fasen van een enkele stof. I. 1458.
- WARMTELEER (Eenige opmerkingen over de mechanische grondslagen der). I. 809. II. 947.
- WATER - natriumsulfaat - natriumchlorid - kopersulfaat - koperchlorid (Evenwichten in het stelsel). 1222.
- WATEROPNAME (Het mechanisme der) door de zaden der Cucurbitaceën. 600.
- WARMTETHEOREMA van NERNST (Over het). 848.
- WATERSTAAT (Missive van den Hoofdingenieur-Directeur van 's Rijks —) in de 10de directie van een 36-tal grondboringen. 612.
- WEBER (MAX). Een nieuw geval van ouderlijke zorg voor de nakomelingen bij visschen. 629.
- WEDERKEERIGHEID (Over) in verband met halfregelmatige polytopen en netten. 373.
- WENCKEBACH (K. F.). Over den invloed der adembaling op den pols. 8.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer D. DE VRIES REILINGH: „Eene nieuwe methode ter bepaling van de arterieele bloedsdrukking bij den mensch; tevens een poging om den invloed van den arteriewand daarop te schatten”. 1284.
- WENT (F. A. F. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. A. L. RUTGERS: „De invloed der temperatuur op den geotropischen praesentatietijd bij *Avena sativa*”. 350.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. L. SCHOUTEN: „Reinkulturen uit één onder het mikroskoop geïsoleerde cel”. 721.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. H. ARISZ: „Over het verband van prikkel en effect bij phototropische krommingen van kiemplantjes van *Avena sativa*”. 1254.

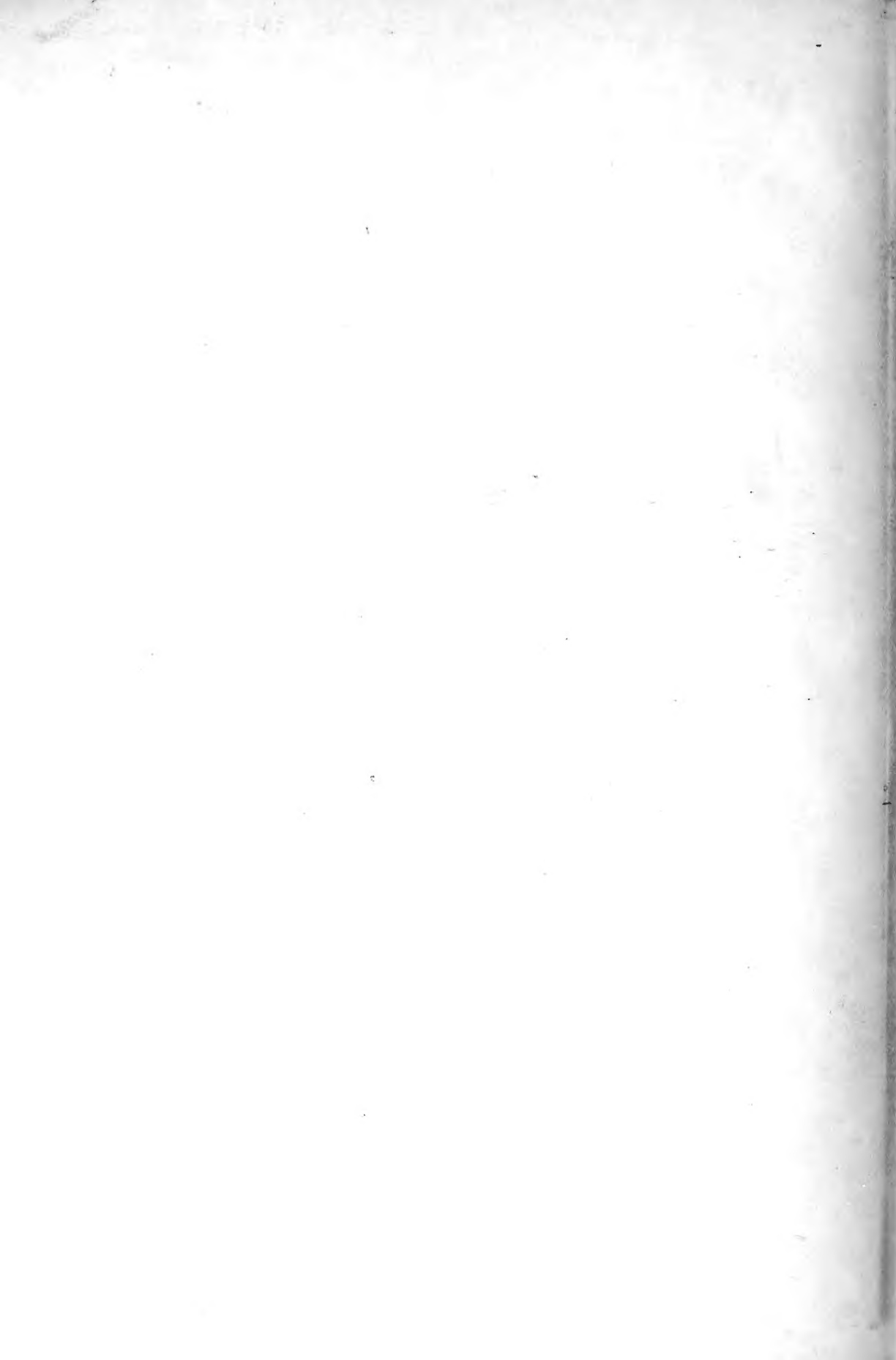
- WENT (F. A. F. C.). Verslag over een door den Minister van Landbouw, Nijverheid en Handel toegezonden rapport van het Hoofd van den phytopathologischen Dienst inzake internationale bestrijding van plantenziekten. 1380.
- WERELDKAART COMITÉ. Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht en raad betreffende de besluiten van het in November 1909 te Londen bijeengekomen Internationaal Wereldkaart-Comité. 348. Verslag hierover. 352.
- WESTON - normaalelement (De electromotorische kracht van het). 621.
- WET der overeenstemmende toestanden (Het gedrag van argon ten opzichte van de). 1177.
- WICHMANN (C. E. A.). Over de vulkanische uitbarsting van het eiland Téon (Tjau) in 1659. 376.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de oriëntering van mikroskopische kristaldoorsneden”. 787.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. RUTTEN: „Over Orbitoiden uit de omgeving der Balik Papan-baai (Oostkust van Borneo)”. 1143.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de oriëntering van kristaldoorsneden”. 1161.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de bepaling van den optischen assenhoek uit den uitdoovingshoek ten opzichte van de trace van een willekeurig vlak in eene willekeurige kristaldoorsnede”. 1165.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. SCHMUTZER: „Over de vaststelling van de richting van een onbekend vlak uit zijne traces in twee georiënteerde kristalsneden”. 1176.
- WIECHERT (De getijkrachten te Batavia volgens den astatischen seismograaf van). 1304.
- WINAWER (B) en P. ZEEMAN. De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken. 3de mededeeling. 233.
- WIND (C. H.). Verslag over een verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om advies over de besluiten van het in November 1909 te Londen bijeengekomen Internationaal Wereldkaart-Comité. 352.
- Buiging van een stootgolf door een spleet, volgens de theorie van KIRCHHOFF. 427.
 - Berekening van de eindintegraal voorkomende in bovengenoemde verhandeling. 437.
- WIND en barometerstand (De dagelijksche variatie van) in verband met die van den gradiënt der luchtdrukking. 1381.
- WINKLER (C.). Verslag over eene verhandeling van den Heer C. U. ARIËNS KAPPERS: „The migrations of the motor cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres”. 139.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. VAN RIJNBEEK: „Unisegmentale reflexen”. 778.
 - Een tumor in het pulvinar thalami optici. Een bijdrage tot de kennis van het zien van vormen. 914.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. G. DUSSE DE BARENNE: „De strychnine-werking op 't centrale zenuwstelsel. De segmentaire, streng lokale strychnine-vergiftiging der dorsale ruggemerge-mechanismen. Een bijdrage tot de dermatomerie van den achterpoot van den hond. 1115.

- WINKLER (C.) en G. A. VAN RIJNBERK. Experimenteele onderzoekingen over segmentaal-innervatie van de huid van den hond. 6de mededeeling. 307. 7de mededeeling. 462.
- Wiskunde.** Verslag over eene verhandeling van Mrs. A. BOOLE STOTT: „Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings”. 3.
- M. J. VAN UVEN: „Infinitesimale iteratie van wederkeerige functies”. 2de mededeeling. 27.
- L. E. J. BROUWER: „Over continue vectordistributies op oppervlakken”. 2de mededeeling. 36.
- JAN DE VRIES: „Een quadrupelinvolutie in het platte vlak en een daarmede verbonden tripelinvolutie”. 52.
- P. H. SCHOUTE: „Over het verband tusschen de hoekpunten van een bepaald zesdimensionaal polytoop en de rechten van een kubisch oppervlak”. 356.
- Mrs. A. BOOLE STOTT en P. H. SCHOUTE: „Over wederkeerigheid in verband met halfregelmatige polytopen en netten”. 372.
- W. KAPTEYN: „Over de berekening van de eindintegraal voorkomende in de verhandeling van Dr. C. H. WIND: „Buiging van een stootgolf door een spleet volgens de theorie van KIRCHHOFF”. 437.
- W. VAN DER WOUDE: „De dubbelpunten eener c_6 van 't geslacht 0 of 1”. 634.
- L. E. J. BROUWER: „Over één-éénduidige continue transformaties van oppervlakken in zichzelf”. 3de mededeeling. 737.
- H. J. E. BETH: „De schommelingen van een evenwichtsstand bij het bestaan eener eenvoudige lineaire relatie tusschen de trillingsgetallen”. 3de gedeelte. 748.
- GEORGE MAJCEK: „On quartic curves of deficiency zero with a ramphoid cusp and node”. 768.
- J. C. KLUYVER: „Over het termgewijze integreeren van reeksen”. 924.
- W. KAPTEYN: „Over de integraalvergelijkingen van PÄEDHOLM”. 932.
- LUCIEN GODEAUX: „Sur un système de coniques de l'espace”. 942.
- Toezending van een programma voor een prijsvraag over eene verhandeling over de kritisch-historische methode voor de ontwikkeling van de theorie der elliptische functies. 1068.
- J. WOLFF: „Quadratische omwentelings-complexen en omwentelingscongruenties (2,2)”. 1280.
- L. E. J. BROUWER: „Over de structuur der perfekte puntenverzamelingen”. 2de mededeeling. 1416.
- J. A. BARRAU: „De omwentelingsoppervlakken of cilinders van den tweeden graad der niet-Euklidische ruimte”. 1426.
- W. KAPTEYN: „Over de middelpunten der integraalkrommen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en den eersten graad”. 1446.
- WISSELINGH (C. VAN). Over de kernstructuur en de karyokinese bij *Closterium Ehrenbergii* Men. 170.
- WOLFF (J.). Quadratische omwentelingscomplexen en omwentelingscongruenties (2,2). 1280.
- WOUDE (W. VAN DER). Dubbelpunten eener c_6 van 't geslacht 0 of 1. 634.

- W I J H E (J. W. V A N). Verslag over eene verhandeling van den Heer C. U. ARIËNS KAPPERS: „The migrations of the motor-cells of the Trigemini, Abducens and Facialis in the series of vertebrates and the differences in the course of their root-fibres”. 138.
- Z A A L B E R G V A N Z E L S T (G. J.) en J. L. W. P. M A T L A (Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht én raad over een request van de Heeren). 1372.
- Z E E M A N - E F F E C T (Over het) bij emissielijnen in eene richting, schuin ten opzichte van de krachtlijnen. 402.
- Z E E M A N (P.). Verslag over een subsidieaanvraag van Prof. ERNST COHEN voor het samenstellen van de Tables physico-chimiques. 613.
- Beschouwingen over lichtstraling onder den gelijktijdigen invloed van elektrische en magnetische krachten, en eenige naar aanleiding daarvan genomen proeven. 1ste gedeelte. 957.
- Rapport over de plaatsing der bliksemafleiders op de St. Janskerk te Gouda. 1379.
- en B. W I N A W E R. De magnetische splitsing der absorptielijnen in verband met het spectrum der zonnevlekken. 3de mededeeling. 233.
- Z E E M A N (W. P. C.). Lensmetingen en Emmetropisatie. 364.
- Z E L F I N D U C T I E (Een nieuwe formule om den coëfficiënt van) voor lange solenoiden met vele draadlagen met groote nauwkeurigheid te berekenen. 1133.
- Z E N U W S T E L S E L (Het zuurstofverbruik van het). 608. 615.
- (De strychninewerking op 't centrale). 1115.
- Z E R O (On quartic curves of deficiency) with a rhamphoid curve and a node. 768.
- Z E Y L S T R A F Z N. (H. H.) Over de oorzaak der dimorphie bij *Oenothera nanella*. 733.
- Z I E N van vormen (Een bijdrage tot de kennis van het). 914.
- Z O N N E S C H I J F (De lijnen *H* en *K* in het spectrum van de verschillende deelen der). 1395.
- Z O N N E V L E K K E N (De magnetische splitsing van absorptielijnen in verband met het spectrum der). 3de mededeeling. 233.
- Z U U R S T O F (De rechtlignige diameter van). 344. 1039.
- Z U U R S T O F V E R B R U I K (Het) van het zenuwstelsel. 608. 615.
- Z W A A R D E M A K E R (H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. J. J. B U Y T E N D I J K : „Over het zuurstofgebruik van het zenuwstelsel”. 608. 615.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. J. J. B U Y T E N D I J K : „Over de negatieve variatie bij den nervus acusticus veroorzaakt door een geluid”. 642.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. H. V A N H A S S E L T : „Over de physiologische werking van het derrid”. 704.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. L. H O O R W E G : „Over het prikkeffect bij levende organismen”. 1433.
- Z W A V E L W A T E R S T O F - w a t e r (Over de bepaling van driephasenlijnen in het stelsel). 1057.
- Z W E R F S T E E N E N (Diluviale) van het eiland Borkum. 136. 141.







Q
57
A522
dl 19
gdl 2

Akademie van Wetenschappen,
Amsterdam. Afdeeling voor
de Wis- en Natuurkundige
Wetenschappen
Verslag van de gewone
vergaderingen

Physical &
Applied Sci.
Serials

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

STORAGE

