PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMI TERTII PARS I.

COLONIÆ ALLOBROGUM,

Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Bibliop.

MDCCLX.

SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO GASTONI DE ROHAN DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO & PRINCIPI ARGENTINO

&c. &c. &c.

Commentarium perpetuum in hunc

Celeberr. Is. Newtoni Tractatum

D. D. D.

Thomas Le Seur *&* *Franciscus* Jacquier.

MONITUM.

PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Libros tres totidem voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis nostri parte fueramus polliciti. Cur tertium NEWTONI Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ sunt praeclara de fluxu & refluxu maris opera quae anno 1740. à Celeberrimâ Parisiensi Academiâ praemio fuêre condecorata. Tot & tam eximia in hisce operibus continentur, quae non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, sed etiam ad generales attractionis leges universamque Astronomiam referuntur, ut Clariss. Vir D. J. L. CALANDRINUS cujus consilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, si praedicta opuscula iis adjungeremus propositionibus quas de fluxu & refluxu maris habet NEWTONUS; quod quidem commodè fieri non poterat, nisi tertium librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religiosè servemus legem, sine quâ honestus scriptor nemo esse potest, ut scilicet nihil insigne ex aliquo Auctore in usum nostrum convertamus, quin ei quod suum est, dùm locus occurrit, tribuatur, specialem nihilominùs grati animi significationem profiteri volumus Clarissimis omnique

lau-

laude nostrâ majoribus Viris DD. CASSINI, De MAIRAN, De MAUPERTUIS, quorum præclaris inventis plurimùm debent hæc nostra Commentaria. Sed tanta sunt in universum hocce nostrum opus prælaudati Clariss. D. J. L. CALANDRINI beneficia, ut huic Doctissimo Viro pares meritis gratias referre non possimus.

Jam sub prælo est altera & ultima Commentariorum nostrorum pars; quia verò nullus est tam mediocris ingenii, quem usus & exercitatio non edoceant, hinc factum est ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice simul cum reliquâ tertii Libri parte justi voluminis molem component.

Datum Romæ
in Conv^tu^. SSæ. Trinitatis
Anno 1742.

PP.

PP. LE SEUR ET JACQUIER

DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro telluris motæ hypothesim assumit. Auroris propositioncs aliter explicari non poterant, nisi eâdem quoque factâ hypothesi. Hinc alienam coacti sumus gerere personam. Cæterum latis à summis Pontificibus contrà telluris motum Decretis nos obsequi profitemur.

EDI-

EDITORIS
MONITUM.

Ntelleximus quosdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis PP. Le Seur *&* Jacquier, *quasi sæplus* Newtoni *mentem non attigissent; ne autem ipsis vitio vertatur quod concesserunt ob ipsorum absentiam ab urbe in quâ liber edebatur, ut nempe quæcumque viderentur corrigenda, ab Editore ipso mutarentur, sive levia sive gravia forent, monendum puto, me Autorum diligentiam & Doctrinam nusquam desiderasse, correctiones quas feci levissimi esse momenti, nec esse tales ut propter ipsas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur, & asterisco notatas fuisse, non quod aliquid laudis exinde speraverim, sed quia si illic aliquid vitii irrepserit, æquum est ut in Editorem, non in Autores ea culpa transferatur; Ne similibus cavillationibus occasio in posterum detur, tales distinctionis notulæ non adhibebuntur in IIª hujus Voluminis parte, in quâ speramus calculos* Newtonianos *circa Lunam potissimum satis intricatos, in apertam lucem expositum iri.*

IN-

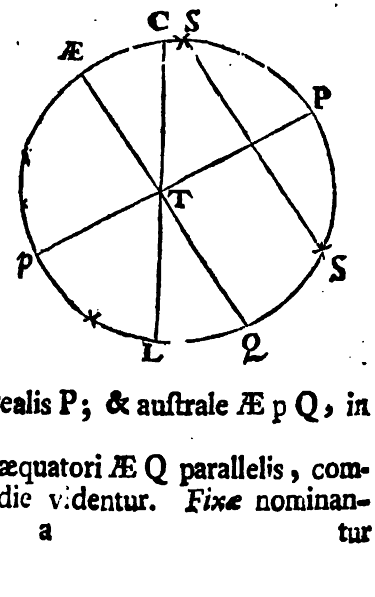
INTRODUCTIO AD TERTIUM LIBRUM *Philoſophiæ Naturalis* IS. NEWTONI.

CAPUT PRIMUM.

Quale oculo nudo appareat mundi ſyſtema, paucis exponitur; & prima Aſtronomiæ Elementa breviter revocantur.

1. FIGURA telluris eſt propemodùm ſphærica, & ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum ſtagnantium ſuperficiei perpendicularis eſt) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eclipſes Lunares in quibus umbra terreſtris, in quamcumque cœli plagam vergat, eſt ſemper ad ſenſum circularis. CAP. I.

2. Spectatori terreſtri cælum apparet tanquam ſuperficies ſphærica concava, ſtellis plurimis diſtincta, cujus ipſe ſpectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occaſum æquabiliter convertitur, & 24 circiter horis integram revolutionem abſolvit. Puncta illa oppoſita P & p circà quæ rotari videtur ſphæra, *Poli* mundi dicuntur, quorum is qui nobis conſpicuus eſt, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipſi verò oppoſitus p antarcticus ſeu auſtralis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *Axis mundi* vocatur.

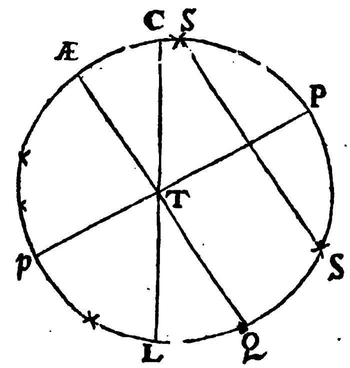


Æquator ſivè *æquinoctialis* eſt circulus ſphæræ cæleſtis maximus cujus poli iidem ſunt cum polis mundi; proindéque ſphæram mundanam dividit in duo hemiſphæria, Boreale Æ P Q, in quo eſt polus borealis P; & auſtrale Æ p Q, in quo eſt polus auſtralis p.

3. Stellæ ſingulæ, ut S, in circulis S s æquatori Æ Q parallelis, communi ſphæræ cæleſtis motu revolvi quotidie videntur. *Fixæ* nominan-

CAP. I. tur quæ eandem inter sese distantiam perpetuò servant; *Erraticæ* verò seu *Planetæ* vocantur quæ distantias suas à fixis in dies mutant & motu proprio ferri conspiciuntur. Planetæ sunt septem suis propriis signis notati, videlicet Sol ☉, Luna ☽, Mercurius ☿, Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ & Saturnus ♄; Terræ verò signum est hoc ♁.

4. *Ellipsica* est circulus sphæræ maximus quem centrum solis motu proprio ab occasu ad ortum singulis annis describere videtur. Hic circulus Æquatorem obliquè intersecat sub angulo inclinationis Æ T C, graduum 23 ½ circiter. Puncta duo opposita in quibus æquator & ecliptica sese mutuò secant, *Æquinoctialia* dicuntur quod sole in iis posito dies ubique terrarum nocti æqualis sit, & indè tempus quo Sol punctum alterutrum æquinoctiale attingit, vocatur æquinoctium. Punctum æquinoctiale vernale est undè Sol motu proprio versùs polum borealem ascendit in Eclipticâ, autumnale verò undè Sol versùs polum australem descendit, ideóque æquinoctium est vernale vel autumnale. Puncta *Solstitialia* sunt Eclipticæ puncta duo opposita quæ à punctis æquinoctialibus toto circuli quadrante distant, quæque proindè maximè recedunt ab æquatore & in quibus ascensus Solis suprà æquatorem & descensus infrà eundem terminatur. Horum punctorum prius æstivum appellatur quo nimirum terminatur Solis ascensus suprà æquatorem; posterius brumale vel hybernum. Dicuntur solstitialia quod sole in iis versante, per aliquot dies ex eodem Horizontis puncto oriri, & è regione, in eodem puncto occidere videatur. Tempus quo Sol puncta solstitialia ingreditur, vocatur Solstitium, quod ideò vel æstivum vel brumale est.



Signum celeste est duodecima pars eclipticæ & in 30 gradus rursus dividitur. Primi Signi principium est in puncto æquinoctiali vernali à quo signa ab occasu in ortum juxtà motum proprium Solis numerantur. Sex sunt borealia per borealem eclipticæ partem distributa, hisque nominibus ac characteribus designata: Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊, Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam australia, videlicet Libra ♎, Scorpius ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♑, Aquarius ♒, Pisces ♓. Aries, Taurus ac Gemini, quæ inter punctum æquinoctiale vernum & punctum solstitiale æstivum continentur, dicuntur signa vernalia; Cancer, Leo, Virgo à solstitiali æstivo ad æquinoctiale autumnale numerata appellantur æstiva; Libra, Scorpius & Sagittarius autumnalia;

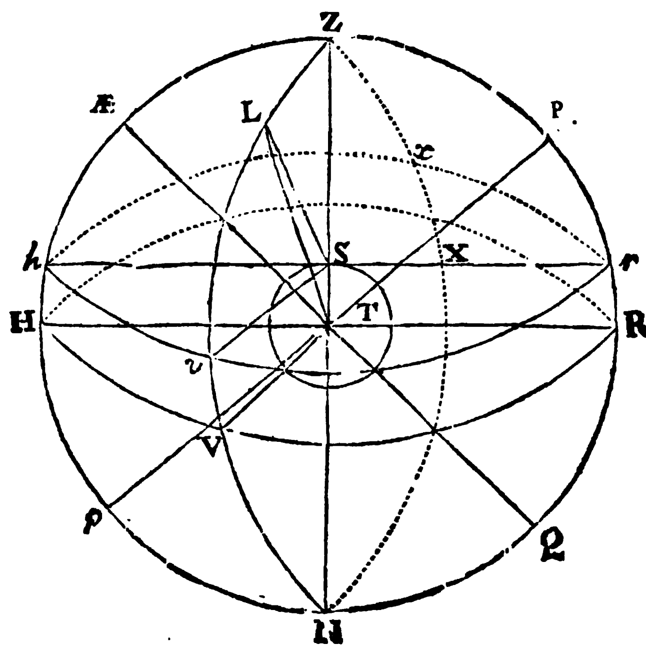
lia; Capricornus, Aquarius & Piſces, hyberna. Signa aſcendentia à punćto ſolſtitiali hyberno ad æſtivum, deſcendentia verò à ſolſtitiali æſtivo ad hybernum computantur. CAP. I.

5. *Zodiacus* eſt ſphæræ cæleſtis portio ſeu zona duobus circulis Eclipticæ parallelis & gradibus 8 vel 9 hinc indè ab Eclipticâ diſtantibus terminata, ſub quâ planetæ omnes motus ſuos abſolvunt. Dum planeta ab occaſu in ortum ſeu ſecundum ordinem ſignorum, aut quod idem ſonat, in ſigna conſequentia, nimirùm ab ariete ad taurum, à tauro ad geminos &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cùm ipſius motus proprius ceſſare videtur, ſeu dum planeta in eodem cœli punćto morari per aliquot dies cernitur, eumdem ſitum fixarum reſpectu ſervans, ſtationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrà ſignorum ordinem ſeu in antecedentia, ut à tauro ad arietem, ab ariete ad piſces &c. proprio motu incedit.

6. Luna & Sol ſunt ſemper directi; at cæteri planetæ tum ſuperiores, videlicet, Saturnus, Jupiter & Mars, tum inferiores, nimirum, Venus & Mercurius, directi, deindè ſtationarii & poſteà retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in conſequentia peragrant, ſunt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum ſuam abſolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 & horis 7 circiter, Venus autem & Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ità conſtanter comitantur ut Venus nunquam ultrà 47 circiter gradus, nec Mercurius ultrà 28 à Sole digrediantur, id eſt, angulus maximus ſub quo diſtantia Veneris aut Mercurii à Sole è Terrâ conſpicitur, gradus 47 vel 28 nunquam ſuperat.

7. *Circuli declinationis* ſeu *circuli horarii* ſunt circuli maximi per mundi polos tranſeuntes & proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel punćti cujuſlibet in ſphærâ mundanâ *declinatio* eſt arcus circuli declinationis inter ſidus vel datum punćtum & æquatorem interceptus. *Aſcenſio recta* ſideris eſt arcus æquatoris inter punćtum æquinoctiale vernum & circulum declinationis ſideris illius comprehenſus ac ſecundum ordinem ſignorum numeratus. *Circuli latitudinis* ſiderum ſunt circuli ſphæræ maximi per polos eclipticæ & per ſidera tranſeuntes, atquè ideò Eclipticæ perpendiculares. Hinc *Latitudo* ſideris eſt arcus circuli latitudinis inter ſidus & Eclipticam interceptus. *Longitudo* ſideris eſt arcus eclipticæ ab arietis initio versùs ortum ſeu in conſequentia uſquè ad latitudinis circulum numeratus. Punćtum interſectionis Eclipticæ cum circulo latitudinis ſideris dicitur locus ſideris Eclipticus ſive locus in Eclipticâ, vel locus ad Eclipticam reductus.

CAP. I. 8. Si per locum quemvis S in superficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta Z S N quæ sphæræ cælesti occurrat in Z & N, punctum Z dicitur loci S *Zenith* seu vertex, & punctum N vocatur ejusdem loci *Nadir*. *Horizon sensibilis* seu apparens loci S, est sphæræ circulus h v r x centrum habens in S, & polos in Z & N. *Horizon*



rationalis seu verus est circulus H V R X, centrum habens in T, & polos in Z & N, ideòque horizonti sensibili parallelus.

Circulus verticalis est circulus quilibet maximus Z V N X per Zenith atquè Nadir & per aliud quodcumque punctum in sphærâ mundanâ transiens, ideóque horizonti perpendicularis.

Meridia-

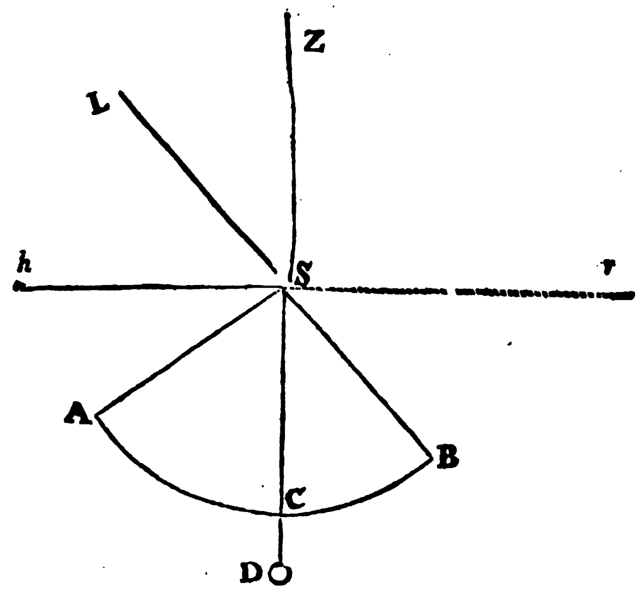
Meridianus est circulus verticalis P Z N R per polos mundi P & p transiens, ac proindè æquatori perpendicularis & circulos omnes æquatori parallelos bifariam dividens. Intersectio plani Meridiani cum plano horizontis H R vel h r dicitur *Linea Meridiana*. Circulus *Verticalis primarius* est ille verticalis qui per polos meridiani transit. Sit Z V N X verticalis primarius horizontem rationalem H V R X intersecans in V & X, quem meridianus etiam secat in H & R. Puncta quatuor R, X, H, V dicuntur *cardines mundi*; punctum quidem R in hemisphærio boreali cardo *Septentrionis*, H cardo *Meridiei*, V ad partes Orientis cardo *Orientis* & punctum oppositum X cardo *Occidentis*. CAP. I.

9. Distantia horizontis apparentis ab horizonte vero sivè telluris semidiameter S T, sensibilis non est, si conferatur cum stellarum (Lunâ ferè solâ exceptâ) distantiis, & ideò terra respectu sphæræ stellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam hujus sphæræ centrum considerari potest. Nam omnes ferè Astronomorum observationes id supponunt, & computa indè inita cum phænomenis cælestibus quadrant. Porrò quemadmodum singula terræ loca pro centro sphæræ stellarum usurpari possunt, ità fingi potest in spatiis cœlestibus sphærica superficies cujus tanta sit diameter ut illius respectu evanescat Solis vel stellæ datæ à Tellure distantia, & hujus sphæræ centrum poterit collocari indifferenter vel in terrâ vel in sole aut in spatio intermedio.

10. *Altitudo poli P suprà horizontem* est meridiani arcus P R à polo ad horizontem interceptus. Ea semper æqualis est arcui Z Æ à vertice Z ad æquatorem Æ Q intercepto; Nam si ex circuli quadrantibus Z P R & Æ Z P subducatur arcus communis Z P, remanebunt arcus æquales Æ Z & P R. *Altitudo æquatoris suprà horizontem* est arcus meridiani Æ H, inter æquatorem & horizontem interceptus; æqualis est complemento altitudinis poli seu arcui Z P, quod, ablato ex quadrantibus H Æ Z & Æ Z P communi arcu Æ Z manifestum est. *Altitudo apparens* sideris vel puncti cujuslibet L in sphærâ mundanâ, est angulus L S v, sub quo ex centro S horizontis sensibilis videtur arcus L v circuli verticalis per L ducti usquè ad horizontem sensibilem h v r x. Altitudo vera puncti L est angulus L T V, seu ipsius mensura arcus L V in circulo verticali per L ducto usquè ad horizontem rationalem H V R X. Undè (9) stellarum fixarum & solis altitudines apparentes & veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phænomena quæ suprà retulimus, & alia quæ deinceps referemus, observari potuerint, paucis exponemus; & quidem ab observatione altitudinis apparentis siderum quæ præcipuum

CAP. I. totius Astronomiæ fundamentum est, initium ducemus. Circuli quadrans SAB cujus limbus ACB in gradus & minuta divisus est, ità statuitur ut filum SCD pondere D tensum ideòque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut sidus L cujus altitudo observanda est, per dioptras aut per telescopium lateri SB affixum videatur in eodem latere SB producto. Quo facto, habetur arcus AC, mensura altitudinis apparentis LSh; nam cùm filum è quadrantis centro S pendens sit semper in plano verticali, quadrans ASB erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. XI.) ideòque hr ad SD perpendicularis, erit intersectio

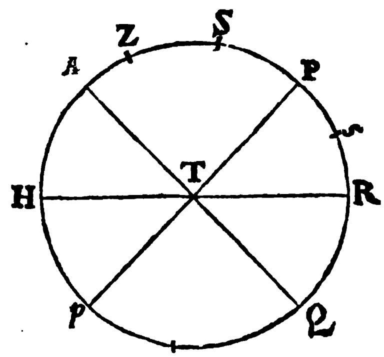


horizontis sensibilis & plani verticalis per L ducti, atquè angulus LSh sideris L altitudo apparens. Sed si ab angulis rectis LSA, & hSD, subducatur communis hSA, remanent æquales anguli LSh & ASC; hujus verò mensura est arcus AC.

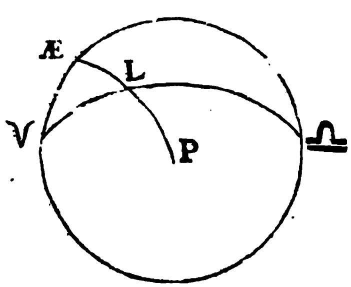
12. Hinc describi potest linea meridiana suprà quam si statuitur perpendiculariter quadrans circuli, observari poterit altitudo meridiana sideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ suprà horizontem eminent & qui arcus diurni dicuntur, bifariam secat (per El. XI. 19. & 4., & El. III. 30.) cùm sit illis circulis & horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, & propterea si in circulo quolibet diurno sumantur puncta duo hinc indè orientem & occi-

occidentem versùs à meridiano æquidistantia, ea puncta erunt suprà horizontem sensibilem æquè alta, & contrà si æquè alta sint, à meridiano hinc indè æquidistabunt. Quarè si stellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo observetur versùs orientem, & deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem & expectetur donec stella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte intersectiones comprehensum, erit linea meridiana. CAP. I.

13. Datis per observationes duabus ejusdem stellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis S R, s R, dantur poli P & æquatoris Æ Q altitudines P R & Æ H suprà horizontem H R. Nam datis arcubus S R & s R datur eorum differentia S s; & quia stella S circulum describit æquatori parallelum (3) cujus P est polus, erit S P = s P; undè datur P s, cui si addatur s R, habebitur arcus P R altitudo poli. Est autem H Æ æqualis arcui Z P seu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò H Æ altitudo æquatoris.



14 Datâ stellæ S altitudine meridianâ S R cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio S Æ; est enim arcus S Æ æqualis differentiæ arcuum Æ P R & S R. Sic observando quotidiè altitudinem meridianam centri Solis, & indè eruendo ipsius declinationem, determinatum est planum eclipticæ & ejus ad æquatorem inclinatio seu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa est 23 ½ grad. aut verius 23°. 29'. Datâ autem inclinatione eclipticæ ad æquatorem cum solis declinatione, datur ascensio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, ♈ Æ ♎ æquator, ♈ L ♎ ecliptica, & P L Æ, circuli quadrans æquatori perpendicularis in Æ, & datis in triangulo sphærico Æ ♈ L rectangulo in Æ, latere seu declinatione Solis L Æ, & angulo Æ ♈ L, 23° 29', dantur latus ♈ Æ ascensio recta solis, seu puncti L, & latus ♈ L quod est ejusdem longitudo, imò datur etiam angulus Æ L ♈, quem circulus declinationis efficit cum Eclipticâ; Cùm verò præter angulum Æ ♈ L, data fuerit longitudo ♈ L, dabitur tum ♈ Æ ascensio recta, tum Æ L, declinatio.



15. Si

CAP. I.

15. Si quotidie obſervetur meridiana Solis altitudo, atquè indè eruantur ipſius declinatio, aſcenſio recta & longitudo, dabuntur motus Solis in Ecliptica, motus puncti declinationis in Æquatore; & temporis momenta quibus declinatio vel nulla eſt vel maxima, ſeu dabuntur Æquinoctiorum & Solſtitiorum momenta (4). Porrò obſervatum eſt nec longitudinem nec aſcenſionem rectam ſolis uniformiter creſcere & proindè dies ſolares eſſe inæquales. Nam dies ſolaris eſt tempus unius revolutionis diurnæ ſolis à meridiano ad eundem meridianum; dies ſidereus ſeu primi mobilis (qui ſemper idem manet) eſt tempus revolutionis diurnæ ſtellæ fixæ à meridiano ad eumdem. Undè cùm Sol motu proprio ab occaſu in ortum feratur, ſi ſtella fixa & Sol in eodem meridiano ſimul obſerventur, ſtella ad eumdem meridianum priùs redibit quàm Sol qui motu proprio versùs orientem tendit. Attamen ſi aſcenſio recta Solis ex ipſius motu proprio in Ecliptica uniformiter creſceret, dies Solares, licet diebus ſidereis longiores, eſſent tamen inter ſe æquales; Quarè cùm Solis aſcenſio recta non augeatur uniformiter, neceſſe eſt ut dies Solares inæquales ſint. Simili modo collatis inter ſeſe Æquinoctiorum & Solſtitiorum obſervationibus deprehenſum eſt Solem intervallo 8 ferè dierum diutiùs morari in ſignis borealibus quàm in ſignis auſtralibus; ac tandem comparando antiquas obſervationes ad determinandum momenta æquinoctiorum vel ſolſtitiorum cum recentioribus, definita eſt quantitas anni æquinoctialis, ſivè tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinoctio ad idem æquinoctium, vel ab uno ſolſtitio ad idem ſolſtitium progreditur, & ab Authoribus Calendarii Gregoriani *La Hirio*, *Caſſino* & *Blanchinio* inventa eſt $365^{dier.}\ 5^{hor.}\ 49'$.

16. Datâ quantitate anni æquinoctialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc eſt motus qui Soli competeret ſi uniformiter in Ecliptica ferretur. Eſt enim ut $365^{d.}\ 5^{h.}\ 49'$ ad tempus datum, ità 360° quos Sol anni æquinoctialis tempore deſcribit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hâc proportione arcus eclipticæ anno communi $365^{dier.}$ deſcribendus eſt XI Signorum $29^{\circ}.\ 45'\ 40''$, die uno eſt $59'\ 8''\ 20'''$, horâ unâ eſt $2'\ 28''$, minuto uno eſt $2''\ 28'''$.

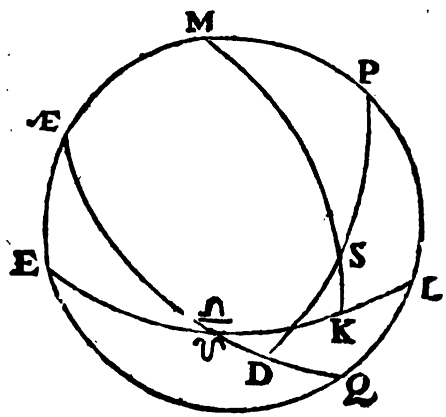
Arcus æquatoris qui dato tempore ſub Meridiano tranſit, ſimili modo invenietur; nam quæratur arcus æquatoris dato tempore ſidereo ſub meridiano tranſiens, dicendum eſt: ut 24 horæ ſidereæ ad tempus datum, ità 360 grad. ad arcum quæſitum, is ergo horâ unâ erit 15°; minuto uno primo $15'$, minuto ſecundo $15''$. Cùm autem Sol die uno deſcribat motu proprio medio ad Æquatorem revoluto arcum $59'\ 8''\ 20'''$ ab occaſu ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore ſolari medio ſub Meridiano tranſiens, dicatur ut 24 horæ Solares ad datum tempus Solare, ità 360°

59'

59′ 8″ 20‴ ad arcum quæſitum. His igitur proportionibus tempus ſolare medium vel tempus ſidereum convertitur in gradus æquatoris & contrà. Facilè autem patet ex dictis diem ſolarem medium æqualem eſſe 24 horis ſidereis cum 3′ 56″ 32‴. CAP. I.

17. Si obſervetur altitudo meridiana Solis & dato ante vel poſt meridiem tempore obſervetur etiam altitudo meridiana ſtellæ alicujus, ſtellæ hujus dabuntur declinatio & aſcenſio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus aſcenſio recta (14) & tempore quod inter duas obſervationes intercedit in arcum æquatoris converſo (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas obſervationes elapſo per Meridianum tranſit; hic arcus addatur vel ſubducatur aſcenſioni rectæ Solis, & ſumma vel differentia erit aſcenſio recta ſtellæ. Declinatio autem ſtellæ ex ipſâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod ſi centrum Solis & centrum ſtellæ in meridiano ſimul reperiantur, eadem eſt utriuſque aſcenſio recta.

18. Datis declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ, dantur ipſius longitudo & latitudo. Sunto Æ Q æquator, E L ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S ſtella, P S D quadrans circuli declinationis, & M S K, quadrans circuli latitudinis. Quæruntur arcus ♈ vel ♎ K & K S. In triangulo P S M datur latus P M ſeu diſtantia polorum P & M 23° 29′, datur quoque latus P S declinationis S D complementum & angulus M P S ſeu Æ P D, cujus menſura eſt arcus Æ D datus ob datos per aſcenſionem rectam arcum ♈ D vel ♎ D & quadrantem Æ ♈. Quarè (per trig. ſphær.) invenitur latus M S latitudinis S K complementum & angulus M, cujus menſura eſt arcus K L; ex circuli quadrante ♈ L vel ♎ L ſubducatur K L, & dabitur ♈ K longitudo ſtellæ S. Hinc etiam facilè patet quomodo datis longitudine ♈ K & latitudine K S ſtellæ S, inveniri poſſit ipſius aſcenſio recta & declinatio. Nam dato ♈ K datur K L, & indè datur angulus S M P; & dato S K, datur S M, undè cùm datum ſit M P, dantur in triangulo S M P latus P S complementum declinationis & angulus Æ P D, cujus eſt menſura Æ D, ex quâ ſi auferatur quadrans Æ ♈, dabitur aſcenſio recta ♈ D.

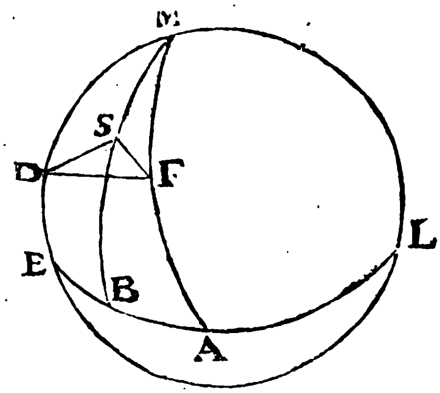


19. Ex hujuſmodi obſervationibus & calculis inventum eſt, fixa-

CAP. I.

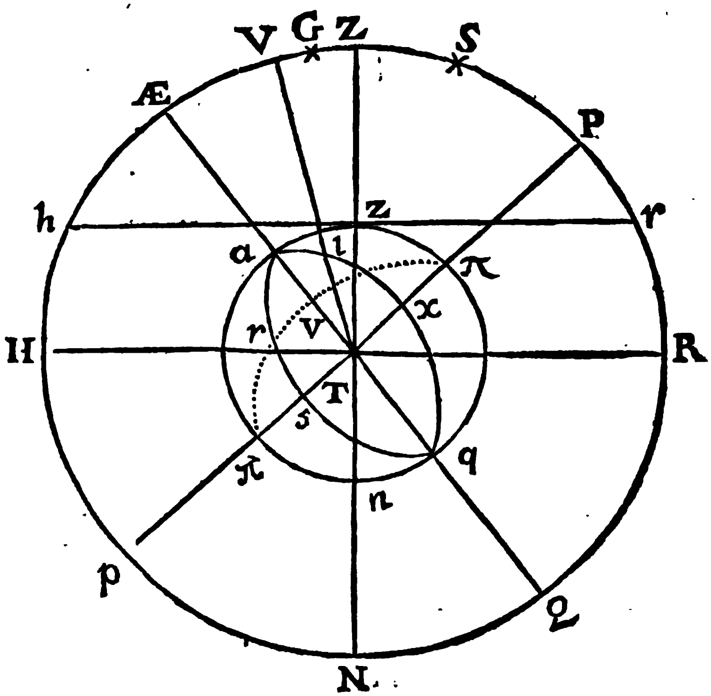
rum latitudines immutabiles esse, longitudines verò per singulos annos 50 secundis, & per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifestum fit stellas fixas motu proprio sed lentissimo in circulis eclipticæ parallelis progredi in consequentia, aut si stellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinoctialia singulis annis in antecedentia moveri per arcum 50″, atquè hæc est præcessio æquinoctiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinoctio ad idem æquinoctium citiùs revertatur quàm à stellâ fixâ ad eandem. Annus igitur Solaris æquinoctialis brevior est anno Solari sidereo, hoc est brevior est tempore unius revolutionis Solis à stellâ fixâ ad eandem fixam; differentia est 20′ 17″ quo tempore Sol motu proprio arcum 50″ conficit. Est ergò annus sidereus 365 dier. 6 hor. 9′ 17″.

20. Stellarum distantiam dicimus arcum circuli maximi inter stellarum centra comprehensum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectâ à centris stellarum ad oculum spectatoris ductæ efficiunt. Si ope semicirculi vel quadrantis observentur distantiæ stellæ alicujus ab aliis duabus stellis quarum longitudo & latitudo notæ sunt, illiùs quoque longitudo & latitudo dabuntur. Nam esto ecliptica E L, polus ejus M, stellæ notæ longitudinis & latitudinis S & F, tertia stella D. Ducantur tres circuli latitudinis M D E, M S B & M F A, sintque datæ distantiæ D S & D F. Quia dantur latitudines S B & F A stellarum S & F, dabuntur earum complementa S M & F M cum angulo B M A, cujus mensura est arcus B A, differentia longitudinis stellarum S & F, & ideò in triangulo S F M, dabitur S F, cum angulo M S F. Datis in triangulo D S F, tribus lateribus dabitur angulus D S F, & si ex 360° seu quatuor angulis rectis subducatur summa angulorum datorum D S F & F S M, dabitur angulus D S M, cum quo & notis lateribus D S & S M, reperientur latus M D complementum quæsitæ latitudinis stellæ D, & angulus E M B cujus mensura est arcus E B, differentia longitudinum stellarum D & S; hæc autem observationes distantiarum Astrorum inter se propter Astrorum continuam conversionem non facilè ad summam acribeiam perducuntur.



21. Sit Π z æ π q telluris globus per cujus centrum T transit axis mundi P p. Loci z sit horizon sensibilis h r, horizon rationalis H R, &

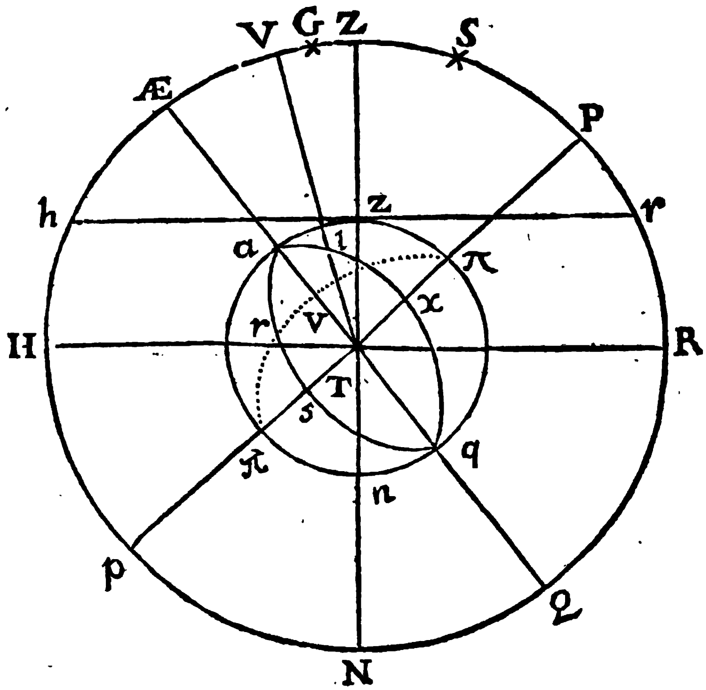
& meridianus P Z H N. His ità constitutis, axis telluris dicitur pars Π π, axis mundi P p telluris superficie terminatâ in punctis Π & π, quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœlesti P nobis conspicuo subjectus borealis vel arcticus, alter π australis vel antarcticus appellatur. Intersectio plani æquatoris cœlestis cujus est diameter Æ Q, cum telluris superficie, sivè circulus maximus æ s q x, cujus poli sunt Π & π, dicitur æquator terrestris aut etiam circulus æquinoctialis vel κατ᾽ἐξοχὴν linea. Latitudo loci cujusvis z in superficie terræ est distantia ejus ab æquatore, si- CAP. I.



vè est meridiani terrestris arcus z æ inter locum z & æquatorem æ z q x interceptus. Undè patet latitudinem loci z in superficie terræ numero graduum æqualem esse declinationi cœlesti verticis Z ejusdem loci, seu elevationi poli P R. Nam arcus P R & Z Æ, sunt æquales (10) & arcus Z Æ ac z æ similes; Per locum in superficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus Π r π æquatorem æ s q x secans in r: dicaturque Π r π primus meridianus, & loci cujusvis alterius z longitudo dicetur æquatoris arcus r æ inter meridianum primum Π r π & meridia-

CAP. I. ridianum z æ π q loci z interceptus atquè ab occaſu ad ortum numeratus.

22. Si per trigonometriam menſuretur diſtantia z l duorum locorum z & l ſub eodem meridiano ſitorum & ope quadrantis circuli ex iisdem locis obſerventur diſtantiæ S Z & S V, ſtellæ fixæ S à locorum verticibus Z & V, dabitur telluris ſemidiameter z T. Nam datis arcubus S V & S Z, dabitur eorum differentia vel ſumma V Z, & hinc



datur arcus l z qui arcui V Z ſimilis eſt. Quarè per obſervationes aſtronomicas notum erit quot gradus vel minutæ in arcu l z contineantur, & per trigonometricas menſuras ejuſdem arcûs longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis menſuris notis data erit, & indè inferendo ut numerus minutorum in arcu l z contentorum ad 360° ſeu ad 21600′; ità longitudo l z menſuris notis expreſſa ad circulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo invenietur ſemidiameter z T.

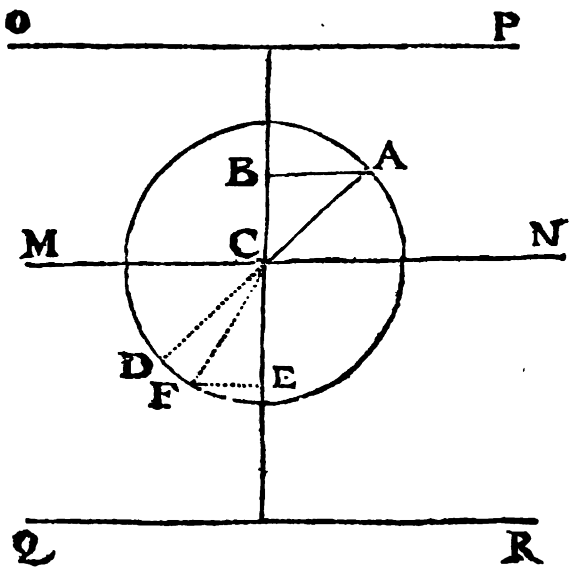
CAPUT

CAP. II.

CAPUT II.

Siderum refractio & parallaxis breviter explicantur.

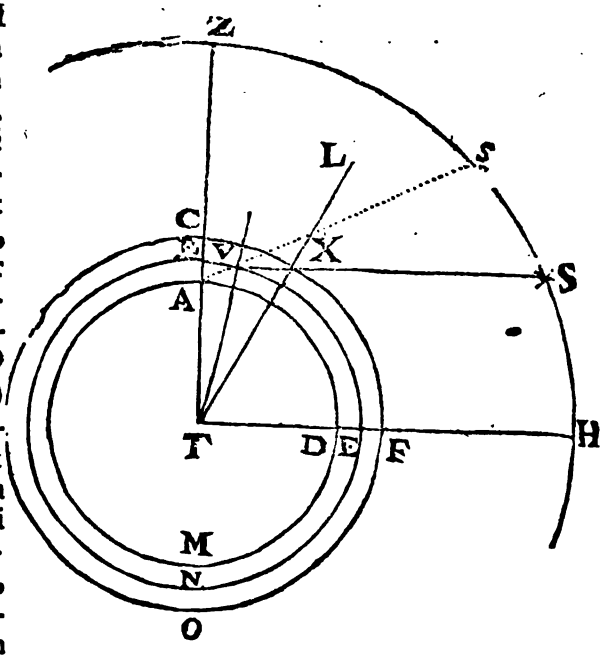
23. SIt M N plana superficies quâ aer rarior M O P N aerem densiorem contingit. Radius lucis per rectam A C propagatus



ex aere rariori in densiorem obliquè transeat per punctum C & indè feratur per C E, per C ducatur B F ad M N perpendicularis, experientiâ certum est radium A C in aere densiori non propagari per rectam continuam A C D, sed in puncto C ità refrangi per C E accedendo ad perpendicularem B C F, ut sinus anguli cujusvis A C B sit semper ad sinum anguli E C F in datâ ratione. A C dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, C E radius refractus, A C B angulus inclinationis, E C F angulus refractus, & D C E angulus refractionis.

 24. Si

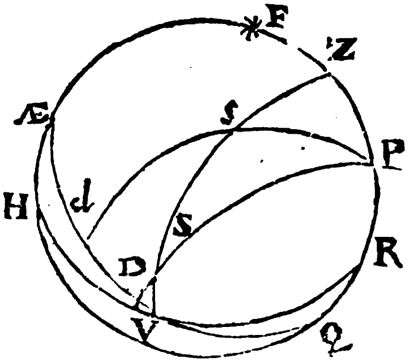
CAP. II. 24. Si atmoſphæra C X F O M A terræ A D M circumfuſa, diviſa intelligatur in innumeras ſuperficies ſphæricas telluris ſuperficiei concentricas C X F O, B V E N aer inter duas hujuſmodi ſuperficies contentus & aeris ſuperioris pondere compreſſus eò denſior erit quò minùs à telluris centro T diſtabit. Sit Z S H circulus verticalis ex centro telluris T deſcriptus, arcus S H altitudo ſideris S ſuprà horizontem rationalem T H, & Z S diſtantia ſideris à vertice Z. Si radius lucis S X è ſidere S propagatus incidat in atmoſphæram in X, is refringetur in X per X V accedendo ad ſemidiametrum T X ſuperficiei ſphæricæ C X F O perpendicularem (23) & quoniam aëris denſitas in V major eſt quàm in X, radius in puncto V, ſuperficiei B V E rursùs refringetur accedendo ad T V, atquè ità continuò incurvabitur & in lineam X V A versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta A s, circulo verticali Z H occurrens in s, & quoniam radius lucis S X V A oculum ſpectatoris in A ingreditur ſecundum directionem tangentis A s, ſidus, quod eſt reverâ in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim eſt ex opticâ objectum videri in eâ rectâ ſecundùm quam fit directio radiorum oculos ingredientium.



25. Producatur T X ad L, ut ſit S X L angulus inclinationis radii S X in atmoſphæram incidentis, & V X T angulus refractus, data erit ratio ſinûs anguli S X L ad ſinum anguli V X T (23) ac proindè ſinus angulorum inclinationis erunt ſemper ut ſinus angulorum refractorum. Quarè ſideris in vertice Z conſtituti, ubi nullus eſt angulus inclinationis, nulla erit refractio, & ſiderum in æqualibus à vertice diſtantiis ſitorum, ubi æquales ſunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis igitur, Lunæ, fixarum ac ſiderum omnium extrà terreſtrem atmoſphæram conſtitutorum, in paribus à vertice diſtantiis refractiones ſunt æquales.

26. Si-

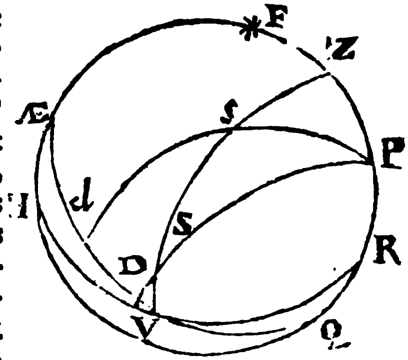
26. Siderum refractio ad singulos altitudinis gradus, observatione definiri potest. Esto HR horizon, P polus mundi, Æ Q æquator, PZH Meridianus, ZSV circulus verticalis, PSD & Psd, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propè Zenith constitutæ observetur altitudo meridiana HF, quæ à refractione libera est, & indè eruatur ejus declinatio FE (14). Deindè observetur ejusdem stellæ in S positæ altitudo quælibet SV; & ope horologii oscillatorii notetur tempus quod inter primam & secundam observationem intercedit, & inveniatur



arcus æquatoris ÆD qui eo tempore per meridianum transiit (16). Stella quæ ob refractionem in loco altiori s apparet sit reverâ in S, erit PSD circulus declinationis stellæ in S constitutæ, & in triangulo PZS, dabitur angulus ZPS, cujus mensura est arcus ÆD cum latere PZ quod est distantia poli à vertice & latere PS, quod est declinationis DS seu ÆF complementum, undè invenitur latus ZS cum altitudine SV, complemento lateris ZS. Si ergò ex altitudine observatâ SV, subducatur altitudo inventa SV, quæ à refractione libera est, dabitur arcus Ss, refractio stellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. *De la Hire* in tabulis Astronomicis observavit refractiones siderum diversis anni tempestatibus, in pari altitudine easdem esse exceptis refractionibus circà horizontem quas nonnullis inconstantiis obnoxias expertus est, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipsis observationibus deductam constituit, quam postea correxit D. *Cassinus*, & eâ correctâ utuntur Astronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmosphæram incidentium obliquitas cum sideris à vertice distantiâ crescit, iisdem observationibus invenit refractiones siderum à vertice ad horizontem usquè ubi maximæ sunt, continuò augeri; at quod ex alienis observationibus supponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æstate, longè majores esse quàm in zonis temperatis, id minimè verum esse ostendunt accuratiores observationes ab Academicis Parisiensibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Parisiensibus æquales invenerunt. Vide Domini *De Maupertuis* nobilissimum opus de figurâ telluris per observationes ad circulum polarem definitâ.

27. Refractio sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem ac latitudinem efficit; & arcus circuli maximi quo sideris declinatio, ascensio recta, longitudo & latitudo minuitur vel augetur per re-

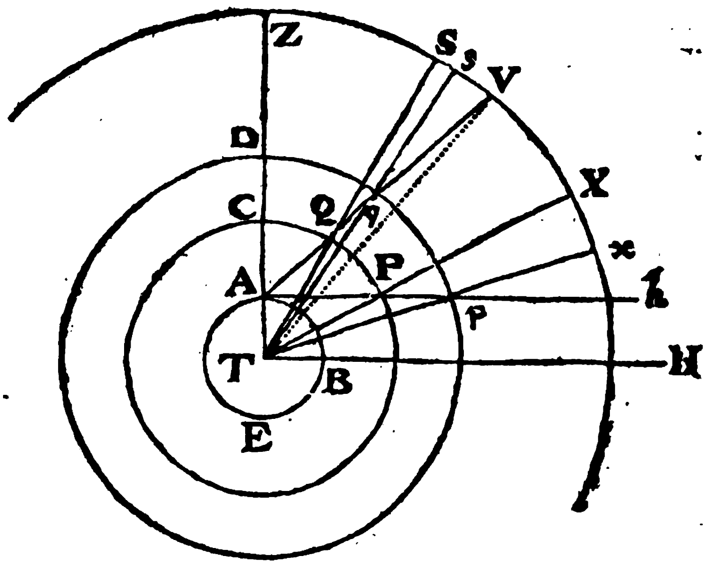
CAP. II. fractionem, dicitur refractio declinationis vel ascensionis rectæ &c.; at ex datâ altitudinis refractione aliæ refractionum species inveniri possunt. Nam in figurâ superiori dantur in triangulo s Z P latera Z s & Z P cum angulo s Z P & indè reperitur latus s P cum angulo s P Z cujus mensura est arcus Æ d, undè cùm detur arcus Æ D, dabitur arcus d D refractio ascensionis rectæ sideris S; & quia dantur arcus d s & D S, dabitur etiam horum arcuum differentia, quæ est refractio declinationis. Sed datis declinatione & ascensione rectâ puncti cujusvis in sphærâ mundanâ, dantur ipsius latitudo & longitudo (18); patet igitur quomodo latitudinis & longitudinis refractiones possint inveniri.



28. Jam de *Parallaxibus* pauca nobis delibanda sunt. Cætera, ubi opus fuerit, suis locis exponemus. Itaque distantia locorum in sphærâ cælesti ad quæ sidus vel phænomenon quodvis è superficie telluris & ex ejus centro spectatum refertur, sivè arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus, ipsius sideris aut phænomeni parallaxis appellatur, quæ proindè nulla est nisi terræ semidiameter sensibilem habeat rationem ad distantiam sideris à terrâ. Sit T centrum telluris ac cœli; A oculus in superficie terræ; Z zenith loci A; Q sidus vel phænomenon quodvis, C Q P verticalis per Q transiens; Z S X H verticalis in superficie sphæræ cælestis; A B E verticalis in superficie terræ; T H horizon rationalis & A h horizon sensibilis. His ità constitutis, locus physicus sideris Q, est punctum illud in quo sideris centrum hæret. Locus opticus apparens seu visus est punctum V in superficie sphæræ cælestis, in quo recta ex oculo A per centrum sideris Q ducta terminatur. Locus opticus verus est punctum S in superficie sphæræ cælestis in quo terminatur recta linea T Q S ex terræ centro T per Q ducta. *Parallaxis* est arcus S V sive differentia duorum locorum opticorum. *Angulus parallacticus* qui plerumque etiam *Parallaxis* vocatur, est angulus A Q T quem in centro sideris efficiunt rectæ A Q & T Q ex oculo A & ex centro terræ T ad sideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ & parallaxis simpliciter dicitur, est differentia inter distantiam Z V à zenith Z ex loco A visam & distantiam veram Z S, sivè est arcus S V in circulo verticali Z S V H, undè manifestum est altitudinem sideris veram per parallaxim minui & ejus à vertice distantiam augeri, atquè ideò parallaxim esse refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis est parallaxis X h, sideris P in horizonte sensibili A h apparentis.

29.

29. Parallaxis S V est mensura anguli parallactici A Q T. Jungatur T V, & angulus externus A Q T æqualis erit duobus internis oppositis Q T V & Q V T; sed angulus Q V T sivè A V T, evanescente A T respectu T V, nullus est (9), ergò angulus parallacticus A Q T æqualis est angulo Q T V, seu S T V, cujus mensura est arcus S V. CAP. II.

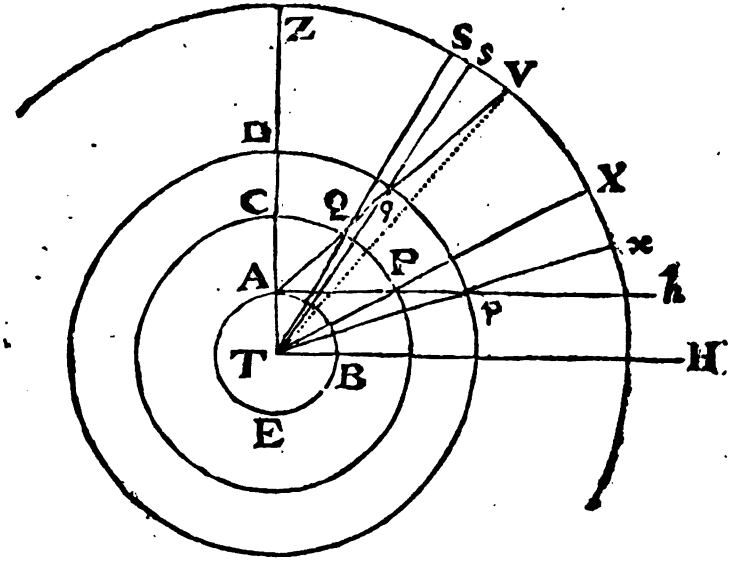


30. Manente sideris à centro terræ distantiâ, sinus parallaxeos est ad sinum distantiæ visæ sideris à vertice in ratione datâ semidiametri telluris ad distantiam sideris à centro terræ. Nam in triangulo A Q T, est A T ad Q T in ratione sinûs anguli parallactici A Q T seu sinus parallaxeos ad sinum anguli T A Q sivè ad sinum distantiæ visæ Z V à vertice, & ideò, datis A T & Q T, data est ratio sinuum illorum. Hinc verò sequitur sideris in vertice Z, constituti parallaxim esse nullam, eandem crescere cum distantiâ à vertice & in horizonte fieri maximam. Sequitur quoquè sinus parallaxium in paribus sideris à centro terræ distantiis esse ut sinus distantiarum visarum à vertice, & ideò si detur parallaxis sideris in aliquâ à vertice distantiâ, dabitur in aliâ quâvis distantiâ à vertice.

31. Datâ sideris Q, parallaxi A Q T, cum angulo Z A V seu distantiâ apparente à vertice, datur in semidiametris terræ tum distantia Q T sideris Q à centro terræ, tum distantia ejus A Q à loco A. Dato enim angulo Z A Q datur T A Q complementum illius ad duos re-

 ctos,

CAP. II. ctos, undè, ob datum etiam angulum A Q T. dantur tres anguli trianguli Q A T, ex quibus datur ratio laterum inter se. Hinc datâ sideris P parallaxi horizontali, si inferatur ut sinus parallaxeos ad sinum totum, ità semidiameter telluris A T ad quartum obtinebitur distantia P T sideris à centro terræ ob angulum T A P rectum.



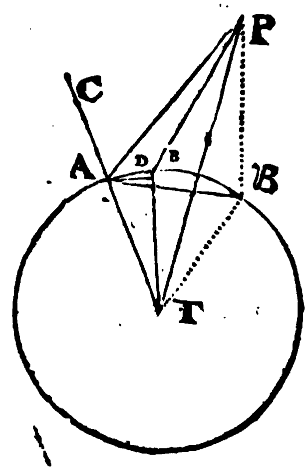
32. Sinus parallaxeon siderum Q & q in æqualibus distantiis apparentibus è vertice, sunt in ratione reciprocâ distantiarum siderum à centro terræ. Etenim ut sinus parallaxeos A Q T, ad sinum anguli Z A V, ita est A T ad Q T, & ut sinus anguli Z A V, ad sinum parallaxeos A q T, itâ q T ad A T, ideòque ex æquo, sinus parallaxeos A Q T est ad sinum parallaxeos A q T ut q T ad Q T. Ex quo etiam sequitur siderum in eâdem altitudine apparente existentium, hujus majorem esse parallaxim quod minùs distat à centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum est, sideris declinationem; ascensionem rectam, longitudinem & latitudinem mutat; & eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum species, sic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis & latitudinis; illud quoque observandum est, sideris in meridiano existentis nullam esse ascensionis rectæ refractionem nec parallaxim; cùm enim altitudinis refractio sidus attollat, & altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano

seu

ſeu circulo declinationis (per hyp.) aſcenſio recta indè non mutatur. Similiter ſi circulus verticalis in quo ſidus reperitur, ſit ad eclipticam perpendicularis, nulla erit longitudinis refractio nullaque parallaxis; nam in hoc caſu circulus verticalis eſt ſimul circulus latitudinis, & ſiderum in eodem latitudinis circulo exiſtentium longitudo eſt eadem. CAP. II.

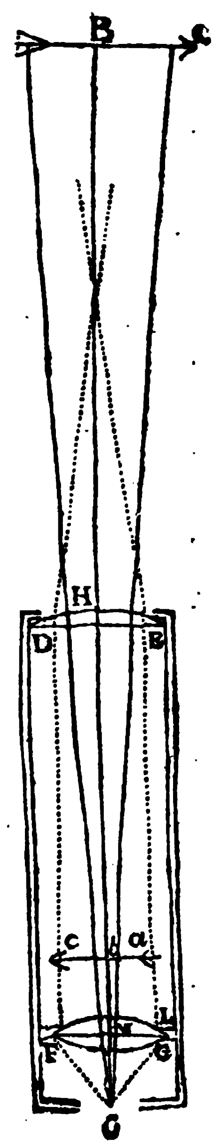
34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in ſuperficie terræ, ſeu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos intercepto, datur tempus quo Sol vel ſtella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno tranſit (16); & indè definiri poteſt utrum obſervationes in illis duobus locis habitæ, reſpondeant eidem temporis abſoluti momento an non. Facilè idem innoteſcit per Lunæ & Jovis Satellitum eclipſes; eodem enim momento temporis eclipſis initium ac finis, & macularum in Lunâ notarum immerſio in umbram vel emerſio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conſpici poſſunt, videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His poſitis ſi ex locis duobus A & B, quorum diſtantia A B D data eſt, Phænomeni vel ſideris P in plano verticali A P B T, exiſtentis altitudines apparentes & à refractionibus liberæ obſervatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis & diſtantia à centro terræ P T. Nam per obſervationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus C A P, diſtantia apparens ſideris à vertice, & indè datur angulus P A T, anguli C A P complementum ad duos rectos, eodemque modo per obſervationem in loco B factam invenitur angulus P B T. Sed dato arcu A D B, datur angulus A T B & hinc in triangulo iſoſcele A T B, dantur anguli æquales T A B & T B A. Quarè dantur etiam in triangulo A B P, anguli P A B, & P B A quos latera P A & P B efficiunt cum chordâ A B. Ergò triangula duo A B T & A B P dantur ſpecie ac proindè datur ratio P B ad B T, & quia datis angulis A B T & A B P datur angulus P B T, ductâ rectâ P T, dabuntur in triangulo P T B, angulus T B P, & ratio laterum T B & B P, atquè ideò triangulum hoc ſpecie dabitur. Innoteſcet igitur tum angulus parallacticus B P T, tùm diſtantia P T, ſeu ejus ratio ad telluris notam ſemidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri poteſt parallaxis ſideris aut Phænomeni vel quieſcentis vel utlibet moti. Verùm Aſtronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unicus obſervator in eodem loco manens ſiderum



CAP. II. motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes potest determinarè. De his, ubi è re visum fuerit, dicemus. Vid. *Keill.* in Introductione ad veram Astronomiam.

CAPUT III.

De Telescopii ac Micrometri usu & Phænomenis horum Instrumentorum beneficio observatis pauca.



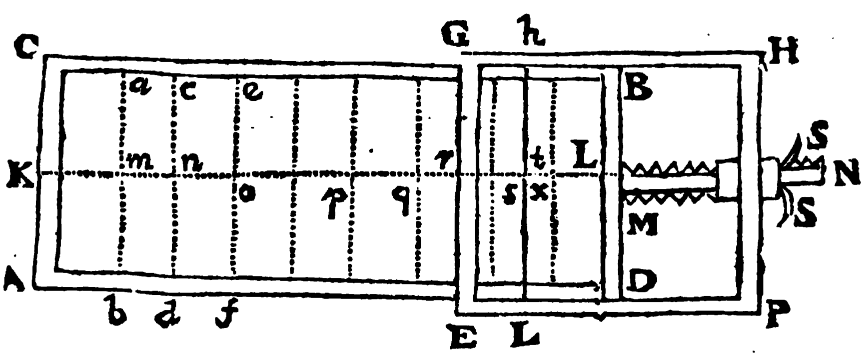
35. Sit Telescopium Astronomicum D F G E, vitrum objectivum D E, oculare F G; objectum A C; itá remotum ut radii qui ex singulo illius puncto in totam vitri objectivi superficiem incidunt, pro parallelis possint usurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, à vitro objectivo ità franguntur ut post vitrum D E coeant in unum punctum a, quod est puncti A imago, & similiter punctum C pingitur in c, totumqué objectum A C in a c, situ inverso, estque c a foci locus in quo proindè oculus O, trans vitrum oculare F G, videt objectum A C, seu ipsius imaginem a c. Hinc si in foci loco c a positum sit corpus aliquod opacum, oculus illud distinctè videbit tanquam objecto A C, seu potiùs imagini ejus a c contiguum.

36. Sit B O Radius ad A C normalis & per centra H & M vitrorum transiens, ideóque irrefractus. Jungatur recta A O, & objectum A B, oculo nudo videretur sub angulo A O B, estque proindè angulus A O B, magnitudo apparens objecti A B. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b & a parallelè propagati colliguntur à vitro oculari F G in ejus foco O ubi oculus versatur, pars objecti A B, seu ejus imago a b, videtur sub angulo M O L, & (per probl. 31. *Element. Dioptr.* Clariss. *Wolf.*) distantia foci lentis objectivæ H b, est ad distantiam foci lentis ocularis b M, ut angulus M O L ad angulum A O B, seu ut magnitudo apparens imaginis a b ad magnitudinem apparentem objecti A B nudo oculo visi, ex quo pa-

tet

tet quod in eodem Telescopio magnitudines apparentes objectorum sunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco positarum & trans vitrum oculare visarum. CAP. III.

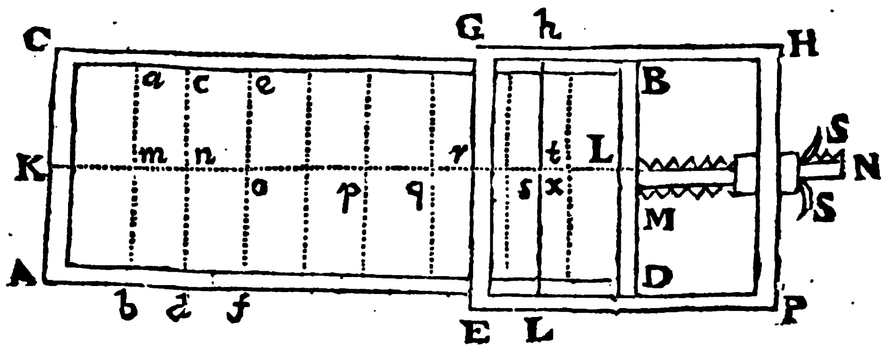
37. His positis, facile est micrometri usum intelligere. Est autem micrometrum instrumentum quod in foco lentis objectivæ telescopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum semisse non superant, dimetiendas. Illius constructionem quam D. *De-la-Hire* in tabulis Astronomicis veluti usibus Astronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Constat ex duobus quadris rectangulis quorum alterum ABCD, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum semisse & latitudinem unius pollicis cum semisse. Hujus quadri, latera longa AD, CB, in partes æquales & tertiâ parte unius pollicis inter se distantes dividuntur, ità tamen ut lineæ ductæ per singu-



las divisiones sint ad latera AD, CB, perpendiculares. Hisce divisionibus fila serica benè tensa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur filum sericum K L, dictum transversale, quod ad angulos rectos fila parallela modò descripta a b, c d, e f, &c. secet & in medio laterum A C, B D glutinatur. Alterum quadrum E F G H cujus longitudo E F non superat unum pollicem cum semisse, ita priori accommodatur ut ejus latera E F, G H, moveantur super latera A D, C B, alterius quadri, nec ab ipso separentur. Facies hujus secundi quadri quæ divisam faciem prioris respicit, filo etiam serico & tenso h L, instruitur, quod, cùm movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eaque superlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè M N, lateri B D, longioris quadri affigitur, cujus striatum receptaculum lateri F H alterius adhæret & in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejusque receptaculum auriculis S, S instructum ità inter se aptari debent ut receptaculum & quadrum E H. ne minimùm quidem moveri possit, nisi receptaculi motu conversionis.

 Qua-

CAP. III. Quadrum A B C D, telescopii cujusvis longitudinis tubo in distantiâ foci objectivæ lentis ità aptatur ut ipsius quadri planum perpendiculare sit ad telescopii axem. His ità constitutis, telescopium in cœlum convertatur & ità disponatur ut duæ stellæ fixæ quarum distantia apparens in minutis secundis aliundè nota sit, sint in filo transversali K L, positæ, verseturque cochlea donec filum mobile h L, per centrum x, stellæ unius transeat, alterius stellæ centro m, vel n, existente in alio filo a b, vel c d. Hâc observatione notum erit cuinam distantiæ apparenti respondeat longitudo m x, vel n x, in lineis & lineæ partibus data, & indè per proportionis regulam, observatâ quâlibet aliâ siderum distantiâ



n q, dabitur angulus sub quo hæc distantia nudo oculo videretur, inferendo sic: ut m x vel n x ad n q, ità distantia apparens stellarum duarum m, vel n, & x ad distantiam apparentem punctorum n & q. Moveatur jam quadrum E F G H ope receptaculi striati donec filum ejus sericum h l, exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque positio auricularum receptaculi & iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri E F G H proximo filo alterius congruat, vel, quod idem est, moveatur quadrum E F G H, per spatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi & partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi & partium ejus quæ singulis minutis primis & secundis ex noto superiùs toto intervallo debentur.

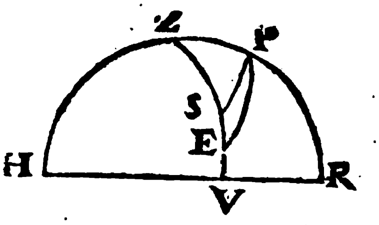
38. Ubi diameter planetarum erit observanda, directo telescopio cum micrometro ad planetam ità disponantur fila movendo telescopium ut sideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum Planetæ contingat. Manifestum est, ex distantiâ cognitâ inter fila micrometri

quæ

quæ planetam comprehendunt, notam fieri Planetæ diametrum apparentem. CAP. III.

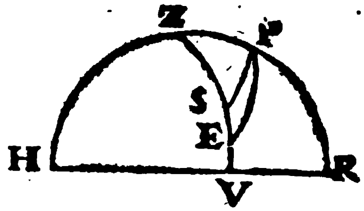
39. Datâ declinatione & ascensione rectâ stellæ fixæ, inveniri potest alterius stellæ declinatio & ascensio recta, modò tamen duæ illæ stellæ transire vicissim possint per campum telescopii immoti. Ità enim disponantur fila parallela micrometri, ut motus diurnus stellæ, quæ alteram præcedit, fiat super unum ex illis V G. Super a b, in quo situ filum c d, exponet portionem exiguam paralleli quem stella describit, & filum K L illud ad angulos rectos intersecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo stella præcedens filo transversali occurrit in m. Similiter immoto telescopio observetur tempus appulsûs alterius seu sequentis sideris ad idem filum transversale seu circulum declinationis, & si intereà filum parallelum mobile h L, sideri huic aptetur, immoto manente micrometro ope distantiæ m x, filorum a b & h L, distantiam apparentem inter parallelos siderum duorum quæ est differentia declinationis siderum, obtinebimus. Sed si differentia temporis inter utriusque sideris transitum per filum transversale in minutâ tam primâ quàm secundâ gradus convertatur (16) differentiam ascensionalem siderum habebimus.

40. Hæc observatio supponit nullum esse sideris motum proprium nullamque parallaxim. Si sidus motum proprium habeat, illum oportet ex observationibus determinare quoad declinationem & ascensionem rectam, illiùsque rationem habere. Quo peracto, si aliqua sit sideris parallaxis, poterit ità reperiri. Observetur sideris ad meridianum appellentis ascensio recta quæ parallaxi obnoxia non est (33), & differentia inter hanc ascensionem rectam sideris in meridiano existentis, & ascensionem rectam ejusdem sideris alibi existentis observatam, erit parallaxis ascensionis rectæ, ex quâ parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim H R horizon, H Z R meridianus, Z zenith, P polus mundi, Z S E V circulus verticalis, S sidus observatum in loco S & deindé in meridiano, E locus sideris visus, S locus verus, & ideò S E parallaxis altitudinis; S P & P E circuli declinationis. Datur, (per hyp.) angulus S P E, cujus mensura est parallaxis ascensionis rectæ sideris observata. Datur etiam punctum illud quod est intersectio æquatoris & meridiani tempore observationis sideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum R Z H & circulum declinationis P E interceptus qui est mensura anguli Z P E. Quarè in triangulo Z P E, dantur latus Z P distantia poli à vertice, & latus Z E distantia visa



sideris

sideris à vertice cum angulo Z P E. Innotescet igitur angulus P Z E ab angulo Z P E, subducatur datus S P E, & dabitur angulus Z P S. Denique in triangulo Z P S, ex datis angulis P Z S & Z P S, cum latere Z P, dabitur latus Z S, vera sideris à vertice distantia quæ ex visâ Z E, ablata relinquet S E parallaxim altitudinis.



41. Telescopium maculas quamplurimas variabiles quæ super corpus Solis incedere videntur ostendit, ex earum motu solem circà proprium axem 25 ½ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem & Terram positione phases diversæ conspiciuntur phasibus Lunaribus similes ità ut partem illuminatam Soli constanter obvertat.Ættereà Mercurius & Venus tanquam maculæ nigræ & rotundæ discum Solis trajicere visi sunt. Undè notum factum est, Planetas illos esse corpora opaca à Sole illustrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ observatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ, Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes, ut & Jupiter ipse, corpora opaca lumen suum à Sole mutuantia; nam Jove inter ipsas & Solem diametraliter interposito, lumine privantur & cælo sereno evanescunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem & Jovem transit, ejus umbra instar maculæ nigræ ac rotundæ observatur in ipso Jovis disco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur & circà eum revolutiones suas agunt lumineque privantur, dum radii Solares à Saturni corpore opaco intercipiuntur. *Hugenius* ex propriis observationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nusquam cohærente cum corpore Saturni & ad Eclipticam inclinato; quæ hypothesis, si ità nunc potest appellari, non solùm Phænomenis ab *Hugenio* observatis, sed & aliis plurimis quæ magnâ diligentiâ à *Cassino* & *Maraldo* observata fuêre, satisfacit. Tandem per telescopium stellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebulosas dicunt, & integra via lactea, nihil aliud sunt quam plurimarum stellarum, quæ oculo non distinguuntur, congeries. Novæ quoque in cælis stellæ apparent, & quæ antè videbantur, nonnunquam inconspicuæ fiunt, illarum quædam apparitionis & disparitionis periodos habent quæ quamdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo sub initio apparitionis crescit & sub finem decrescit.

42. Si sæpius observetur tum motus Solis in Eclipticâ (15) tum ipsius diameter apparens (39) quàm fieri potest accuratissimè, circà datum punctum in plano describi poterit curva similis orbitæ quam Sol circà terram percurrere videtur. Nam cùm diametri Solis apparentes

sint

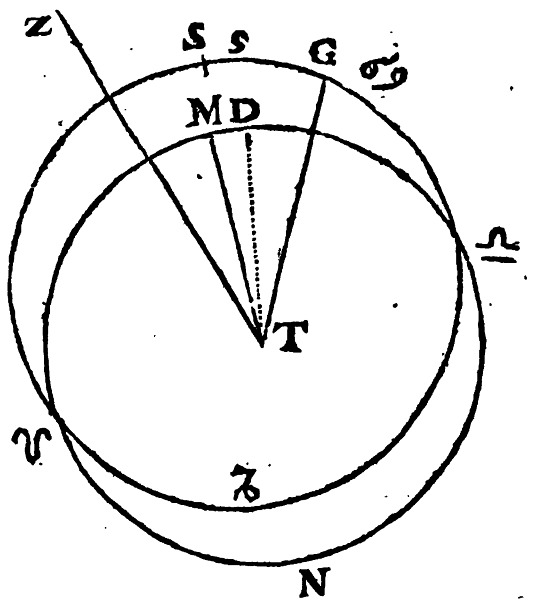
ſint reciprocè ut ipſius à tellure diſtantiæ, ex datis diametris apparentibus dantur diſtantiarum rationes, & ex dato Solis motu in Eclipticâ dantur anguli inter illas diſtantias contenti. Si verò ex hujuſmodi obſervationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipſius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verrit, eſſe temporibus proportionales, Soliſque orbitam non multum differre à circulo & haberi poſſe pro ellipſi cujus umbilicum alterum occupat terra. Eſt autem Solis diameter apparens maxima 32 40″, & minima 31′ 36″ juxtà D. *Caſſini* in Tabulis Aſtronomicis; & ideò maxima diſtantia Solis à terrâ eſt ad diſtantiam minimam ut 32′ 40″ od 31′ 36″, ſivè ut 1960 ad 1896 circiter, ſive 245 ad 237. Ex ſimilibus obſervationibus, tum diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipſius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas deſcribere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaquè obſervetur locus Solis in Eclipticâ quandò tum ipſius velocitas tum diameter apparens minima eſt, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis, & collatis plurium annorum obſervationibus innoteſcet Apogæi motus annuus qui juxtà D. *Caſſini* eſt 1′ 2″ & indè per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc ſi tempore quovis obſervetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis & ipſius anomalia vera ex quâ eruetur ejuſdem anomalia media (*per ſchol. ad prop.* 31. *lib.* 1.) ac proindè longitudo media habebitur tempore obſervationis. Hæc longitudo media aſſumatur tanquam radix ſeu principium motuum mediorum Solis, & tempus obſervationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum, & dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, & indè habebitur ipſius longitudo media, & diſtantia ejus media ab Apogæo ſeu anomalia media dabitur, ex quâ deindè eruetur anomalia coæquata, ac proindè longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares ſunt inæquales (15), neceſſe eſt ut tempus apparens quod diebus ſolaribus conſtat, fluat etiam inæquabiliter. Differentia quæ eſt inter tempus apparens ſeu verum, & tempus æquabile ſeu medium, dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens & viceverſâ, ideóque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero & contrà.

CAP. III.

45. Sit T, Cœli & Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii. ♈ M ♎ N æquator, ♈ S ♋ ♎ ♑ Ecliptica, S Sol, ♈ S Solis longitudo vera, ♈ S ejusdem longitudo media, cui æqualis capiatur arcus æquatoris ♈ M, & ♈ D sit Solis ascensio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M & D radii æquatoris T M & T D qui semper moveantur cum punctis M & D, in consequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui fit ab oriente in occidentem, transit; si punctum D ascensionis rectæ Solis etiam æquabiliter progrederetur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares seu revolutiones singulæ puncti D à circulo horario T Z ad eundem, essent æquales, & tempus apparens à medio non differret. Sed cùm motus ascensionis rectæ D, inæquabilis sit, dies & horæ Solares sunt quoquè inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occasu ad ortum, & ideò motus illius constitui potest pro mensurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media ♈ S vel æqualis est ascensioni rectæ ♈ D vel eâ major est aut minor. In primo casu punctum M coincidit cum puncto D, in secundo casu est ultrà D, versùs orientem, & in tertio casu est citrà D, versùs occidentem. Temporis absoluti momentum quo punctum M coincidit cum puncto D, sumatur tanquam principium à quo tempus apparens & tempus medium incipiunt computari & quo simul coincidunt; & in aliis casibus tempus apparens à medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus solare conversi (16); Nam dum punctum D, est sub meridiano T Z, horâ 12ª computatur in loco cujus meridianus est T Z, & ubi punctum M distat à puncto D, arcus M D, in tempus solare conversus, dabit differentiam inter meridiem apparentem & meridiem medium qui contingit quandò punctum M est in meridiano T Z.



46.

46. Itaquè tempus medium in apparens sic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato respondens (44) indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta (14), si hæc major est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa subtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur si minor est. At tempus apparens in medium ità mutatur. Tempus apparens tanquam medium consideratur, & inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tùm media, tum vera, & indè eruitur longitudinis veræ ascensio recta; si hæc mediam Solis longitudinem superat, differentia in tempus solare conversa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ ascensio recta minor est mediâ Solis longitudine, differentia in tempus solare conversa à tempore apparente subducitur. Quod si media Solis longitudo æqualis sit ascensioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio, nullâque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifesta sunt; si enim punctum D est orientalius puncto M, hoc citiùs ad meridianum TZ pervenit quàm illud, ac proinde hora 12ª temporis medii computatur, cùm nondum est meridies temporis apparentis, & contrarium contingit, si punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam medio ad locum Solis inveniendum; cùm enim tempus apparens non multum differat à tempore medio, differentia inter ascensionem rectam & longitudinem mediam Solis est, quam proximè eadem, sivè per tempus medium, sivè per tempus apparens inquiratur.

CAP. III.

47. Jam verò si tempore quovis apparente observetur Solis ascensio & longitudo vera, indèque eruatur ipsius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, & hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus semel constitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in Eclipticâ & contrà. Exposuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum sit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium usurpetur & quæratur locus Solis verus huic correspondens (44); Deindè longitudini Solis sic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur, & ità prodibit locus Solis tempori apparenti respondens. Facile est ex dictis problema inversum solvere, seu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco respondens invenire.

CAP. III.

48. Nec opus eſt ut moneamus eaſdem eſſe motuum cæleſtium apparentias, ſive cœlum omne cum ſtellis circà tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, ſive terra circà proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti ſupponatur immoto cœlo; ſive etiam terra immota maneat & Sol proprio motu ab occaſu ad ortum feratur, ſeu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in Ecliptica. Nam in utrâque ſuppoſitione diametri apparentes & velocitates relativæ ſunt eædem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maximè spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi scholiis quibusdam philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maximè fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque lucis & sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem systematis mundani. De hoc argumento composueram librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in propositiones, more mathematico, ut ab iis solis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propositiones ibi quàm plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit si quis definitiones, leges motuum & sectiones tres priores libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc librum de mundi systemate, & reliquas librorum priorum propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

De Mundi Systemate

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I. (a).

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quàm quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant.

DIcunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideóque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quâtenus fieri potest.

Uti respirationis in homine & in bestiâ; descensus lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in terrâ & in planetis.

RE-

(a) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima est, ne Philosophia in vana abeat opinionum commenta, causæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quàm quæ reverâ existunt & quæ phænomenis explicandis sufficiunt; undè si velimus cum evidentiâ ac certitudine philosophari, omnes hypotheses negligendæ nobis sunt; hypothesis enim si legitima est, causæ quidem possibilitatem, minimè verò existentiam adstruit, cùm effectus idem pluribus modis produci possit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab Experimentis & indè Mathematicâ viâ procedendo spes non affulget, hypothesibus quibusdam particularibus uti licet ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum Astronomi varias adhibuerunt hypotheses ut phænomena cælestia prædicere & accuratius observare, atquè ità veras eorum causas conjectando investigare possent. Altera pars regulæ, ea scilicet quæ præscribit non plures admittendas esse rerum naturalium causas quàm quæ eorum phænomenis explicandis sufficiunt, manifesta est; nam cùm vera effectûs causâ per experientiam semel inventa est, & matheseos ope præsertim demonstratum est causæ illius eam esse vim quæ ad effectum producendum sufficiat, liquet aliam quamlibet causam esse inutilem.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem somnia temerè confingenda non sunt, nec à naturæ analogiâ recedendum est, cùm ea simplex esse soleat & sibi semper consona. Extensio corporum non nisi per sensus innotescit, nec in omnibus sentitur: sed quia sensibilibus omnibus competit, de universis affirmatur. Corpora plura dura esse experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium, & inde non horum tantùm corporum quæ sentiuntur, sed aliorum etiam omnium particulas indivisas esse duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia esse, non ratione, sed sensu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem esse proprietatem corporum universorum. Corpora omnia mobilia esse, & viribus quibusdam (quas vires inertiæ vocamus) perseverare in motu vel quiete, ex hisce corporum visorum proprietatibus colligimus. Extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras esse & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc est fundamentum philosophiæ totius. Porro corporum partes divisas & sibi mutuò contiguas ab invicem separari posse, ex phænomenis novimus, & partes indivisas in partes minores ratione distingui posse (b) ex mathematicâ certum est. Utrum verò partes illæ dis-tinctæ

(b) 50. * *Ex mathematicâ certum est.* Demonstrationes passim reperiuntur apud eos autores qui de materiæ divisibilitate tractant; ut ex incommensurabilitate lateris quadrati & ejus Diagonalis &c.

DE MUNDI SYSTEMATE

tinctæ & nondum divisæ per vires naturæ dividi & ab invicem separari possint, incertum est. At si vel unico constaret experimento quod particula aliqua indivisa, frangendo corpus durum & solidum, divisionem pateretur: (c) concluderemus vi hujus regulæ, quòd non solum partes divisæ separabiles essent, sed etiam quod indivisæ in infinitum dividi possent.

Denique si corpora omnia in circuitu terræ gravia esse in terram, idque pro quantitate materiæ in singulis, & lunam gravem esse in terram pro quantitate materiæ suæ, & vicissim mare nostrum grave esse in lunam, & planetas omnes graves esse in se mutuo, & cometarum similem esse gravitatem in Solem, per experimenta & observationes astronomicas universaliter constet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in se mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate universali, quàm de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœlestibus nullum experimentum, nullam prorsus observationem habemus. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minimè affirmo. Per vim insitam intelligo solam vim inertiæ. Hæc immutabilis est. (d) Gravitas recedendo à terrâ, diminuitur.

RE-

(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ*; seu ex analogiâ naturæ quæ simplex esse solet & sibi semper consona. * Hinc patet differentia *Newtonianismi* & hypotheseos Atomorum; Atomistæ necessariò & Metaphysicè atomos esse indivisibiles volunt, ut sint corporum Unitates; Metaphysicam hanc quæstionem missam facit NEWTONUS, & huc redit ejus sententia: Si illæ partes quas Deus condidit indivisas, quæque ideo sunt corporum Physica Elementa seu Physicæ Monades, frangendo dividerentur; tunc exinde edocti, statueremus eas posse dividi, ideoque ulterius ulteriusque sine fine divisibiles esse diceremus, omnem hâc de re Theoriam Metaphysicam experimentis facile postponentes. Hæc etiam fluunt ex *Lockii*, de ratione quâ agnoscimus qualitates essentiales, Doctrinâ; Ignoramus planè, inquit ille, quænam qualitates cum subjecti naturâ sint conjunctæ si rem Metaphysicè spectemus; sed fit ut experientiâ Magistrâ, has aliasve qualitates ad universa subjecta quæ ad eamdem Classem referimus, pertinere deprehendamus, aut saltem ad omnia in quæ experimenta instituere licuit, & eas essentiales dicere lubuit. Hinc infert NEWTONUS, eâdem istâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoscendas eas qualitates, eâdem etiam regulâ in rebus Philosophicis uti debemus ubi experientiâ quidem, sed minus obviâ ac vulgari, similem Inductionem instituere dabitur. Adjungit quidem præter eam Inductionem, caracterem hunc Metaphysicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eâdem ratione quâ remittuntur, aboleri possent, sicque Universorum corporum qualitates non amplius forent.

(d) * *Gravitas recedendo à terra diminuitur*, ut infrà demonstrabitur.

REGULA IV.

In Philosophiâ experimentali, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

(c) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheses.

(c) * *Hoc fieri debet.* Hanc regulam in quæstionibus opticis hoc ferè modo exponit NEWTONUS. In Physicis non secus ac in Mathematicis Scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica priùs est usurpanda quàm synthetica mathodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo posita est ut adhibeantur experimenta atquè observationes ex quibus deindè per inductionem conclusiones generales deducantur, non obstantibus contrariis hypothesibus, nisi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas esse contigerit. Nam quod hypotheses spectat, eæ in Philosophiâ experimentali locum habere non debent. Quamvis ratiocinia ab experimentis & observationibus per inductionem deducta ad stabiliendas modo demonstrativo conclusiones generales satis non sint, hic tamen ratiocinandi modus est omnium quos rerum natura admittere possit optimus, isque eò tutior reputari debet quò generalior est inductio; Si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem conclusionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus necessariis limitanda erit atquè restringenda conclusio. Hujus analyseos auxilio à compositis ad simplicia, à motibus ad vires producentes, & generatim ab effectibus ad eorum causas perveniri potest. Quod ad synthesim pertinet, hæc causas cognitas atquè probatas tanquam principia assumit quorum ope phænomena indè nota explicantur. 51.

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

(f) *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

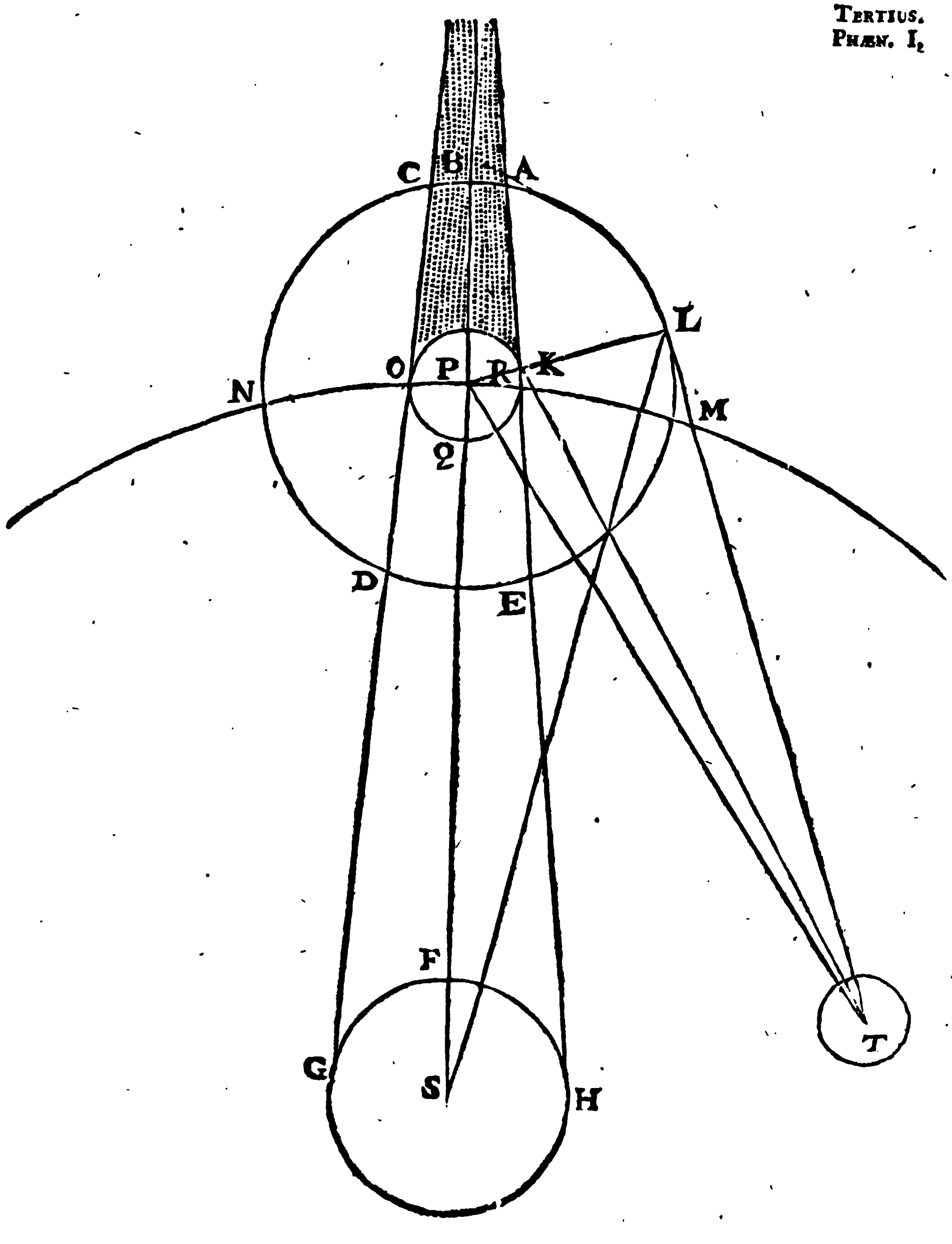
(f) 51. * *Planetæ circumjoviales.* *Lemma*..... Satellitum Jovis & Saturni orbes ac motus determinare.

Sit H F G H Sol, cujus centrum S, T Terra; K O Q Jupiter vel Saturnus circà Solem S describens orbitam M P N, A C D E L orbita satellitis; radii Solis extremi G O, H R paulo plusquam dimidium planetæ P illustrant, & producti umbram conicam R A C O terminant, cujus axis est recta S P B per Solis & Planetæ centra transiens. Dum satelles in orbitâ suâ L C D E girans, conum umbrosum attingit in A, in umbram immergitur & cessat videri; deindè ex umbrâ emergens in C rursus apparet. Attamen satellitum Saturni, ob nimiam illorum à Sole & Tellure distantiam, eclipses observari huc usquè non potuerunt, sed omnium satellitum Jovis eclipses è terrâ conspici possunt, cum hoc tamen discrimine quod immersiones & emersiones quarti & tertii & nonnunquam secundi in eâdem eclipsi cernantur, primi verò immersio tantum vel emersio observari possit. Sit jam satelles in L, & ductis è terrâ T rectis T P, T L, angulus P T L, dicitur elongatio seu digressio geocentrica satellitis L à Planetâ primario P. Ducatur etiam recta T K discum primarii Planetæ tangens in K, & angulus P T K erit semidiameter primarii è tellure visa seu apparens, ideòque elongatio geocentrica erit ad semidiametrum apparentem ut angulus P T L ad angulum P T K. Observatis pluribus hujusmodi elongationibus geocentricis & semidiametris apparentibus, iisque inter se collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio anguli P T L ad angulum P T K maxima est, & hoc modo observatum est elongationes maximas geocentricas ejusdem satellitis in variis orbitæ suæ locis æquales esse inter se quam proximè. ideòque satellites describunt circulos Planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi elongatio maxima est, P K est quamproximè ad P L, ut angulus P T K ad angulum P T L, ob datam rationem horum angulorum & datam quoquè semidiametrum P K, datur & P L, seu distantia satellitis à centro primarii. Angulus P S L sub quo è centro Solis S videretur distantia satellitis à centro primarii P, dicitur ejus elongatio heliocentrica quæ maxima est, cùm angulus S P L rectus est. Quia verò P L data est, elongationes maximæ heliocentrica & geocentrica æquales sunt, ubi planeta P à Sole & terrâ æquè distat.

Cognitis orbitarum diametris; tempora periodica satellitum inveniri possunt per eorum eclipses maximæ durationis, atquè etiam per transitum satellitis aut umbræ illius per medium discum Planetæ primarii. Nam cùm radius circuli sit æqualis arcui grad. 57. 29578, (*lib.* 1. *not.* 372.) & data sit ratio radii P L ad diametrum Planetæ primarii O R, erit quamproximè ut P L ad O R, ità gradus 57 .29578. ad numerum graduum arcûs exigui C A, qui ferè æqualis est diametro O R, ob parallelas O C, R A. Fiat deindè ut numerus graduum aut partium gradûs C A vel O R ad gradus 360, ità tempus quo describitur C A vel O R ad tempus periodicum satellitis, quod ità dabitur. Supposità

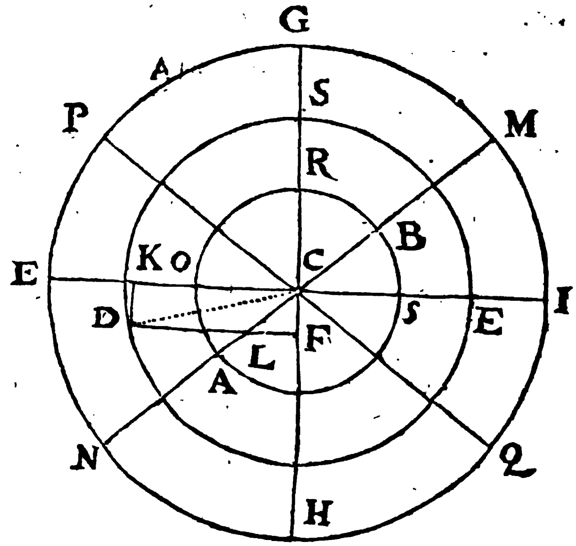
Theo-

LIBER TERTIUS.
PHÆN. I.



DE MUNDI SYSTEMATE.

Theoriâ primarii Planetæ per obſervationes determinatâ, tempora periodica inveniuntur menſurando intervalla temporis inter duas ſatellitum conjunctiones ; vel etiam inter duas digreſſiones maximas.



52. 52. Satellitum à centro Jovis diſtantias obſervandi & in diametri partibus æſtimandi triplicem methodum deſcribit Clariſſ. *Caſſinus* in Elementis Aſtronomiæ anno 1740. editis.

1. Sit A R B Jupiter , D S E D orbita ſatellitis , micrometro capiatur diameter Jovis A B , deinde ubi ſatelles in maximâ elongatione verſatur , capiatur diſtantia D C , inter centrum Jovis C , & ſatellitem D , quo facto , diſtantia D C , conferatur cum diametro Jovis , habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum eſt teleſcopium in cujus foco aptantur fila quatuor , quorum duo G H , E I ſeſe perpendiculariter ſecent , reliqua duo N M , P Q his ad angulos ſemirectos inſiſtant in communi ſectione C. Quibus ità paratis dirigatur teleſcopium & continuò vertatur , donec centrum Jovis C , motu diurno unum ex his filis, putà E I , percurrere videatur, in quo ſitu filum G H circulum aliquem horarium repræſentabit. Obſervetur deinde differentia temporis inter appulſum centri Jovis & appulſum ſatellitis in maximâ ſuâ elongatione verſantis. ad eundam circulum horarium G H , differentia temporis convertatur in gradus & minuta , ità ut quatuor minutis horariis reſpondeat gradus unus , habebitur portio D F vel K C , circuli paralleli Jovis. Obſervetur etiam differentia temporis inter appulſum ſatellitis ad L , & appulſum ad F , quæ differentia ſimili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur , habebitur L F , cui æqualis eſt F C , ob angulos L C F , F L C, ſemirectos. Datis verò D F & F C , datur D C. Jam conferatur D C , cum diametro Jovis A B vel O S , cujus diametri menſura habebitur , ſi tempus quo diameter per filum horarium G H tranſit , in gradus & minuta convertatur, utriuſque diametri D C , O C obtinebitur ratio , & eorumdem abſoluta magnitudo in gradibus circuli maximi ſphæræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis , dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli , ità numerus graduum & minutorum in arcu circuli paral-

Conſtat ex obſervationibus aſtronomicis. (g) Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt aſtronomi; & idem ex tabulâ ſequente manifeſtum eſt. LIBER TERTIUS. PHÆNOMEN. I.

(h) *Satellitum jovialium tempora periodica.*

$1^d.18^h.27'.34''$ $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

(i) *Diſtantiæ ſatellitum à centro jovis.*

Ex obſervationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis
Townlei *per microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini *per teleſcop.*	5	8	13	23	
Caſſini *per eclipſ. ſatell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
(l) *Ex temporibus periodicis.*	5,667	9,017	14,384	25,299	

Elon-

paralleli ad numerum graduum & minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur, eſſe reciprocè ut circulorum radios, ex elementis patet.

3°. In Eclipſibus Satellitum centralibus, dum nempe duratio eſt omnium maxima, obſervetur tempus quod ab ingreſſu centri ſatellitis in diſcum Jovis uſquè ad illius egreſſum interfluxit. Deindè fiat, ut tempus periodicum ſatellitis ad tempus moræ in diſco Jovis, ità 360° ad quartum proportionalem, hoc eſt, ad gradus quos continet arcus æqualis diſco Jovis, ſatellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) inferatur, ut ſinus ſemiſſis ejuſdem arcûs ad ſinum totum, ità ſemidiameter Jovis ad ſemidiametrum orbitæ ſatellitis, ideóque comparari poterit ſemidiameter Jovis cum ſemidiametro orbitæ ſatellitis, hoc eſt, cum diſtantiâ ſatellitis à centro, ac proindè habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus ſemidiametri Jovis.

Quod Saturnum ſpectat; ſolis oculis Teleſcopio adjutis diſtantias ſatellitum à centro Saturni cum diametro annuli comparare ſolent Aſtronomi. 52.

(g) * *Orbes horum planetarum* (51).

(h) * *Satellitum Jovialium tempora periodica* (ibid.).

* In noviſſimo *Caſſini* Opere ſuprà laudato tempora Periodica paulo majora conſtituuntur; ſcilicet, primus Satelles, 62'', 2us. Sat., 4' 12''; 3us. Sat., 17'; 4us. Sat., 1 h, 32', 58'', tardius revolutiones ſuas abſolvere ſtatuuntur; illæ autem differentiæ totius temporis Periodici reſpectu minimæ ſunt, maximæ enim differentiæ non excedunt trecenteſimam partem durationis totius revolutionis.

(i) * *Diſtantiæ ſatellitum à centro Jovis* (52).

(l) * *Ex temporibus periodicis.* NEWTONUS computum iniit hoc modo. Aſſumpſit diſtantiam obſervatam primi Satellitis $5\frac{2}{3}$, ſeu 5'667, & deindè per tempora pe-

 riodi-

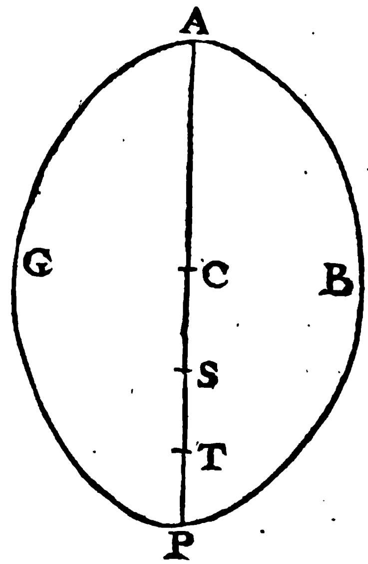
DE MUNDI SYSTEMATE.

Elongationes ſatellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut ſequitur. (m) Elongatio maxima heliocentrica ſatellitis quarti à centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis à terrâ diſtantiâ 8'. 16'' circiter. Ea ſatellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eâdem jovis à terrâ diſtantiâ 4'. 42''. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eâdem jovis à terrâ diſtantiâ ex temporibus periodicis prodeunt 2'. 56''. 47''', & 1'. 51''. 6'''.

Diameter jovis micrometto in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & (n) ad mediocrem jovis à ſole vel terrâ

riodica etiam obſervata quæſivit aliorum Satellitum diſtantias, ſupponendo quadrata temporum periodicorum cubis diſtantiarúm proportionalia. Nam ſi Logarithmi temporum periodicorum primi & ſecundi Satellitis dicantur l, L, & Logarithmi diſtantiarum d, D, erit $2\,l$ ad $2\,L$, arithmeticè ut $3\,d$ ad $3\,D$, ideóque $2\,l + 3\,D = 2\,L + 3\,d$, undè invenitur $D = d + \frac{2\,L}{3} - \frac{2}{3}\,l$. Eſt autem $d = 0{,}7533532$, $\frac{2}{3}L = 2{,}324591$, & $\frac{2}{3}l = 2{,}1228512$, quarè habetur $D = 0{,}955093$, cui reſpondet numerus 9,07, uti NEWTONUS invenit; & ità inveniuntur cæterorum Satellitum diſtantiæ per eorum tempora periodica.

(m) 53.* *Elongatio maxima heliocentrica* ſatellitis in mediocri Jovis à Sole diſtantiâ æqualis eſt ipſius elongatioui maximæ geocentricæ in mediocri diſtantiâ ejuſdem Jovis à Terrâ. Sit enim A B P G orbita Jovis, Sol in S, A aphelium Jovis, P perihelium, T Terra, erit A S maxima diſtantia Jovis à Sole, S P minima; A T verò maxima diſtantia Jovis à Terrâ, P T minima, & ideò mediocris diſtantia Jovis à Sole ſeu $\frac{1}{2}$ A P $= \frac{1}{2}$ A S $+ \frac{1}{2}$ S P, & mediocris diſtantia Jovis à Terrâ erit $\frac{1}{2}$ A T $+ \frac{1}{2}$ T P $= \frac{1}{2}$ A P. Quarè duæ illæ mediocres diſtantiæ ſunt æquales, ideóque elongationes maximæ heliocentricæ & geocentricæ in mediocribus illis diſtantiis ſunt etiam æquales.



(n) 54.* *Et ad mediocrem Jovis à Sole.* Datur poſitio lineæ ducta ab oculo ſpectatoris ad Jovem tempore obſervationis, râ distantiam reducta, semper minor prodiit quàm 40″, nunquam minor quàm 38″, sæpius 39″. In telescopiis brevioribus hæc diameter est 40″ vel 41″. (°) Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectioribus telescopiis quàm in brevioribus & minus perfectis. Tempora

nis, & per theoriam Solis, datur etiam positio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; unde datur angulus his duabus lineis interceptus, seu elongatio Jovis à Sole. Insuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ, & ideò notus est angulus quem comprehendunt duæ lineæ à centro Solis ductæ ad Jovem & ad Terram seu oculum observatoris. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus est in oculo spectatoris seu in Terrâ, alter in Sole & tertius in Jove, dantur anguli omnes, & exindè datur ratio laterum seu ratio distantiæ Jovis à Sole ad distantiam Jovis à Terrâ tempore observationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex observationibus constitutam, ratio distantiæ Jovis à Sole tempore observationis ad ipsius distantiam mediocrem à Sole vel à Terrâ. Quarè datur ratio distantiæ Jovis à Terrâ tempore observationis ad distantiam ejus mediocrem à Sole vel à Terrâ. Sed diametri apparentes Iovis è Terrâ visi sunt inter se inversè ut distantiæ Jovis à Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore observationis ad diametrum apparentem in mediocri distantiâ Jovis à Terrâ vel Sole.

(o) 55. * *Nam Lux Jovis.* NEWTONUS prop. 7. lib. 1. *Optices*, experimentis & calculo invenit quod, si ex puncto lucido in axem telescopii posito ad ingentem distantiam. radii in vitrum objectivum incidant axi paralleli, distincta & minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, est circulus, non verò punctum ut esse deberet, obstante nimirum non tantum vitri sphæricitate, sed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ Lux ea dilatatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obvertitur, cujusque sphæricitas diametrum habet 100 ped. seu 1200 digit. apertura verò 4 digit. diameter circelli qui ex vitri sphæricitate oritur erit ad diametrum ejusdem circelli maximè distincti qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, seu ut 1 ad 1200; distincta siquidem ejus puncti lucidi imago & maximè splendida continet partem 250^{am}. aperturæ vitri objectivi optimè elaborati, neglectâ luce debili & subobscurâ quæ imaginem illam circumdat. Undè in Telescopio cujus apertura est 4 digit. & longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare visa occupat 2″ 4‴ vel 3″, & in Telescopio cujus apertura est duorum digitorum & longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago 5″ vel 6″. Itaque in Telescopio optimo *Hugeniano* 123 ped. error erit circiter 2″ in minoribus major. 55.

* In Telescopiis autem rectè constitutis sive secundum Theoriam Prop. 56. Dioptrices *Hughenii*, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet spatium super retinâ, sed imago ipsius objecti in Telescopiis majoribus majus occupat spatium in retinâ, idque secundum rationem Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum. Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus Telescopiis quàm in minoribus, in ratione nempe inversâ Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum.

Hæc omnia ex Doctrinâ *Newtonianâ* circa colores ita jam sunt cognita ut ea fusiùs & accuratiùs demonstrare necessarium non judicemus.

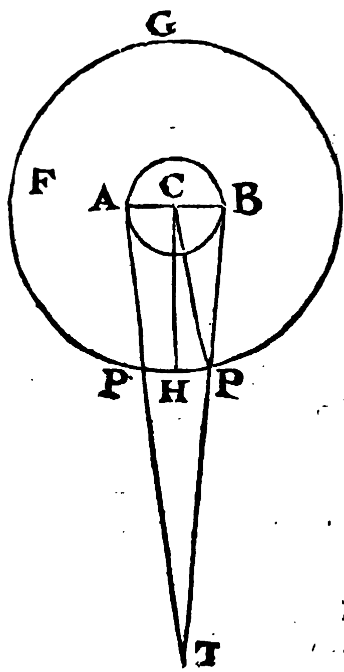
DE MUNDI SYSTEMATE

pora quibus ſatellites duo, primus ac tertius, tranſibant per corpus jovis, ab initio ingreſſus ad initium exitus, & ab ingreſſu completo ad èxitum completum, obſervata ſunt ope teleſcopii ejuſdem longioris. Et (p) diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit per tranſitum primi ſatellitis $37\frac{1}{8}''$, & per tranſitum tertii $37\frac{3}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi ſatellitis tranſiit per corpus jovis, obſervatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus à terrâ diſtantiâ prodiit $37''$ circiter. Aſſumamus diametrum ejus eſſe $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ ſatellitis primi, ſecundi, tertii, & quarti æquales erunt ſemidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 reſpectivè.

PHÆ-

56. 56. *Hugenius* planetarum lucem obſtaculo quodam intercipiens majores invenit planetarum diametros quàm ab aliis micrometro definitum eſt; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideóque latius propagari videtur. Contrariam ob cauſam fit quod planetæ in Sole viſi, dilatatâ luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole, *Hevelio*, *Galletio* & *Hallejo* obſervantibus, non ſuperavit $12''$ vel $15''$, & Venus *Crabirio* ſolum $1'\ 3''$, *Horroxio* $1'\ 12''$ occupare viſa eſt, quæ tamen juxtà menſuras *Hevelii* & *Hugenii* extrà diſcum Solis captas implere debuiſſet $84''$ ad minimum. Sic & Lunæ diameter apparens quæ anno 1682, paucis diebus antè & poſt Eclipſim Solis menſurata fuit in obſervatorio Pariſienſi $31'\ 30''$, in ipsâ Eclipſi non ſuperabat $30'$ vel $30'\ 5''$. Quarè patet diametros planetarum extrà Solem minuendas eſſe, & intrà Solem augendas minutis aliquot ſecundis.

(p) 57. * *Et diameter Jovis in mediocri &c.* Sit T tellus, A B diameter Jovis, P F G M orbita ſatellitis, ductis è terrâ radiis T A, T B fere parallelis, dum ſatelles deſcribit arcum P p; videbitur è terrâ deſcribere diametrum Jovis A B cui æqualis eſt arcus P p quamproximè, propter diſtantiæ T P magnitudinem. Datis autem tempore periodico & tempore quo deſcribitur P p, datur ratio P p ad totum circulum; ſeu datur arcus P p; in gradibus vel partibus gradus, & inde datur dimidius arcus P H, hincque habetur angulus P C H ſeu A P C. Jam verò datur P C ob datas per obſervationem elongatio-



PHÆNOMENON II.

Planetas circumsaturnios, radiis ad saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.

(†) *Cassinus* utique ex observationibus suis distantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satellitum saturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 18'. 27''$. $2^d. 17^h. 41'. 22''$. $4^d. 12^h. 25'. 12''$. $15^d. 22^h. 41' 14''$. $79^d. 7^h. 48'. 00''$.

Distantiæ satellitum à centro Saturni in semidiametris annuli.

Ex observationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis.	1,93	2,47.	3,45.	8.	23,35.

Quarti satellitis elongatio maxima à centro Saturni ex observationibus colligi solet esse semidiametrorum octo quamproximè.

gationes maximas satellitum à centro Jovis in mediocri Jovis à Tellure distantiâ; quarè, si fiat A B ad P C ut duplus sinus anguli dati P C H, ad sinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis seu angulus A T B, sub quo videtur in mediocri ejus à Tellure distantiâ. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per transitum umbræ hanc diametrum percurrentis.

(†) *Cassinus utique &c.* Hæc ex Philosophicis Transactionibus *n.* 187. sunt deprompta: Exigua quædam est horum differentia à numeris quos in Elementis Astronomiæ assignat *Cassinus* filius; ille ita determinat satellitum Sat. Tempora Periodica, & distantias.

Primi $1^d. 21^h. 18'. 27''$. 1. 933. &c.
Secundi $2^d. 17^h. 44'. 22''$. 2. 5.
Tertii $4^d. 12^h. 25'. 12''$. 3. 5. 57
Quarti $15^d. 22^h. 34'. 38''$. 8.
Quinti $79^d. 7^h. 47'. 0''$ 23. paulo plus.

Observat autem primi & secundi satellitis distantias à Saturno æstimatione solummodo potuisse determinari; motibus verò eorum satis accuratè nunc cognitis ex unius nempe quarti cognitâ distantiâ 8 semi-Diametrorum annuli per Regulam *Kepleri* reliquorum distantias posse exquiri, atquè ita inveniri.

Distantia primi 1. 93.
Secundi 2. 47.
Tertii 3. 45.
Quarti (ex observat.) 8.
Quinti 23. 23.

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum observationibus immediatis, ut sine errore sensibili adhiberi possint. *Elem. Astr. Tom. I. pag.* 640. *& seq.*

DE MUNDI SYSTEMATE.

mè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro ſaturni, micrometro optimo in teleſcopio *Hugeniano* pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ ſatellitum à centro ſaturni in ſemidiametris annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et (q) inde diameter annuli in mediocri ſaturni à terrâ diſtantiâ eſt 42″, & diameter ſaturni 18″. (r) Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quàm in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter ſaturni haud major quàm 16″.

PHÆ-

57. (q) * *Et indè diameter annuli.* Quia diametri apparentes ſunt in diſtantiarum ratione reciprocâ, datis diametro annuli diebus Maii 28 & 29 anno 1719, & diſtantiâ Saturni à terrâ iiſdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri diſtantiâ Saturni à terrâ: hæc autem diameter prodiit 42″; ſed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3. ad 7 (per obſ.) quarè diameter Saturni in mediocri à terrâ diſtantiâ eſt 18″.

(r) * *Hæc ita ſunt* (55). * Si in hoc Teleſcopio Lux erratica ſubtendat angulum duorum ſecundorum, fiet diameter annuli 40″ & Saturni 16″ ut revera ſunt in ratione 5 ad 2. hinc autem ut id obiter notemus, cùm Parallaxis Solis in diſtantiâ terræ mediocri à Sole ſit 10″ ſive diameter Telluris à Sole tunc viſa ſit 20″, diſtantia verò mediocris terræ à Sole ſit ad mediocrem diſtantiam Saturni à Terrâ vel à Sole, quod idem eſt (n 53.) ut 100 ad 954, hinc Diameter terræ erit ad Diametrum annuli ut 100 ad 1908, ſive ut 1 ad 19 & ad Diametrum ipſius Saturni ut 1 ad $7\frac{3}{5}$.

Pariter, cùm Diameter Jovis in mediocri ejus à Sole diſtantiâ ſit $37\frac{1}{4}''$ ſitque mediocris diſtantia terræ ad mediocrem diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52; erit Diameter terræ, ad Diametrum Jovis ut 1 ad $\frac{52 \times 37\frac{1}{4}}{200}$ Sive ut 1 ad 9. 685; ſicque Diameter Jovis eſt circiter dimidia Diametri annuli Saturni, & eſt ad ipſius Saturni Diametrum ut 5 ad 4. Solis autem Diameter vera eſt circiter Decupla Diametri Jovis.

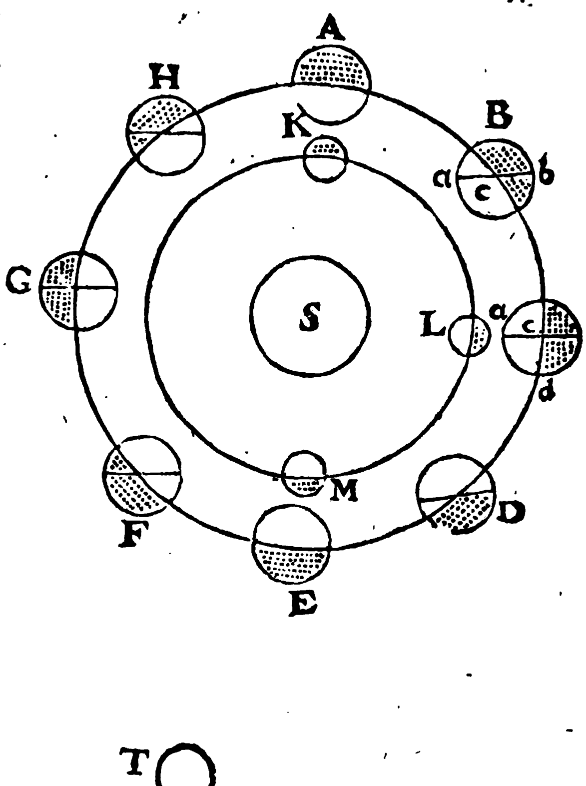
PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios, mercurium, venerem, martem, jovem & saturnum orbibus suis solem cingere.

Mercurium & venerem circa solem revolvi ex (f) eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plenâ facie lucentes ultra solem siti sunt; dimidiatâ è regione solis; falcatâ cis solem, per discum

(f) * *Ex eorum phasibus Lunaribus.* Si Veneris faciem telescopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole plenâ facie fulgere cernitur, deindè phases habere phasibus Lunaribus simillimas partemque illuminatam Soli constanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur, & nonnunquam per discum Solis ad modum maculæ nigræ & rotundæ transit, nunquam verò Soli opponitur, neque ab eo digreditur ultrà gradus 47. Eadem ferè de Mercurio observantur quantùm licet per ejus exiguitatem, cum hoc tamen discrimine quod ejus elongationes maximæ à Sole 28 gradus nunquam superent. Sunt igitur Venus & Mercurius corpora opaca & rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obversa illustratur, & pars altera à Sole aversa lumine privatur. Undè cùm Venus & Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemisphærium obscurum telluri T obvertant, hemisphærium verò illustratum Soli S, necesse est ut in illâ conjunctione inter solem & tellurem constituantur; è contrà ubi in alterâ proximè sequenti conjunctione in A vel K versantur, totam faciem illustratam & Soli obversam è tellure T, observamus, hinc necesse est ut tunc temporis Sol S, inter ipsos atquè tellurem. T positus sit. Ubi verò Venus aut Mercurius à Sole digreditur, primum gibbosa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, posteà falcata fit & denique tota obscuratur ut in locis B, C, D, F, & contrariâ ratione splendescere in locis, F, G, H, videtur. Si verò ex tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per

17.

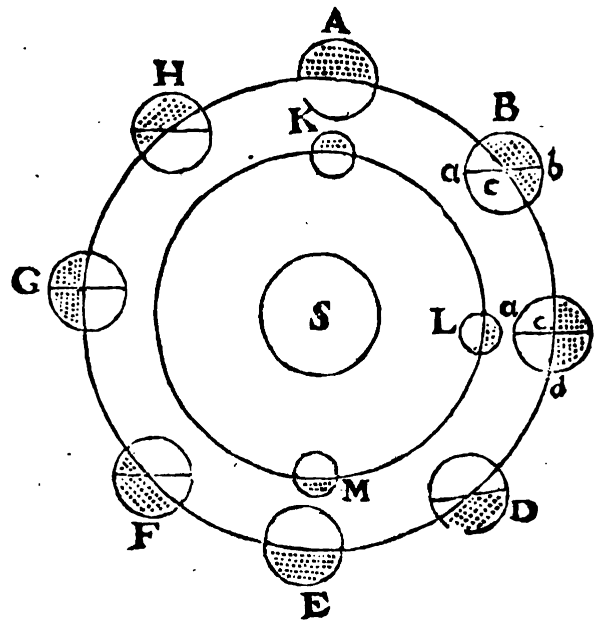


centrum Veneris transiens; ea pars tantum apparet quæ est inter planum a c & planum c d, undè cùm projectio plani C c d, sit ellipsis, hinc gibbosa apparet planetæ pars visa in B, in C dimidiata, & in D, falcata &c., quia à puncto A, con-

DE MUNDI SYSTEMATE.

discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex martis quoque plenâ facie prope solis conjunctionem, & gibbosâ in quadraturis, certum est, quod is solem ambit. De jove etiam & saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce à sole mutuatâ splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

PHÆ-



conjunctionis superioris cum Sole, elongatio seu angulus A T B, crescit usquè ad situm C è regione Solis, ubi digressio maxima est & deindè decrescit in D, atque evanescit in E, ac posteà rursùs crescit usquè ad G, ac deindè decrescit & denique rursùs evanescit in A. Evidens ergò est quod Venus & Mercurius circà Solem revolvantur in orbitis quæ tellurem excludunt. Jam cùm maximæ elongationes Veneris à Sole majores sint elongationibus maximis Mercurii, necesse est ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter & Saturnus Soli S oppositis, è tellure M in E plenâ facie lucentes conspiciuntur, ideóque tellus tunc temporis inter solem & planetas illos colloca-

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & vel solis circa terram vel terræ circa solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ mediocrium distantiarum à sole.

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. (t) Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive sol circa terram, sive terra circa solem revolvatur. Ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter astro-

locatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindéque partem illustratam soli ac terræ obvertentes, sunt ultrà solem positi; deindè verò digrediuntur à Sole, & Mars quidem in quadrato cum Sole aspectu ut in C, aliquantulum gibbosus apparet, quod hemisphærium ipsius illustratum & soli obversum non possit totum terræ sensibiliter obverti, quia non satis magna est ejus à tellure distantia. At Jupiter & Saturnus cùm longiùs à Sole & tellure distent, hemisphærium illuminatum Soli ac telluri semper obvertunt sensibiliter; nam cùm (ex obs.) Mars Jovem, & Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, necesse est ut orbita Saturni orbitam Jovis, & hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ terram & solem ambiant. Quia verò diametri apparentes planetarum superiorum multò minores videntur in oppositionibus quàm in conjunctionibus planetarum, & distantiæ à terrâ sunt ut diametri apparentes inversè, necesse est ut orbitæ Martis, Jovis & Saturni sint telluri admodum excentricæ.

(t) 58. * *Eadem utiquè sunt tempora periodica.* Tempora periodica planetarum circà solem hoc modo possunt inveniri. Observentur planetarum oppositiones & conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta è Sole videtur in loco qui oppositus est loco Solis è terrâ visi, undè dato Solis loco datur planetæ locus in cœlo. Jam verò observatis pluribus oppositionibus cum temporum intervallis inter singulas oppositiones interceptis, datur tempus quo planeta circà solem motu vero describit angulos ad solem inter oppositiones contentos, & per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus seu revolutionem unam absolvit. Tempore periodico ità crassè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore satis longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppositiones valdè dissitæ iisque addatur arcus necessarius ut planeta ac idem orbitæ suæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratiùs, supponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quàm fixæ. Sufficit verò in his NEWTONI Phænomenis ut hæc tempora, neglectis minutiis, definiantur. 58.

Potest etiam tempus periodicum determinari per observationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla est, planeta versatur in plano Eclipticæ, seu in nodo orbitæ suæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla est, observando illam antequam nulla sit & ubi decrescit, aut postquam nulla fuit & ubi crescit, atquè per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quandò nulla fuit. Si itaque observetur hoc modo tempus elapsum inter appulsum planetæ ad nodum, & reditum ejusdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; constat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59. Longitudo ac latitudo planetæ observari-

DE MUNDI SYSTEMATE.

aſtronomos univerſos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ ſequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

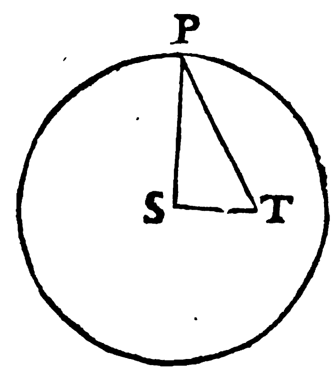
Planetarum ac telluris diſtantiæ (u) *mediocres à ſole.*

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De

59. ſervari poſſunt (*per not.* 17. 18. 20.) & indè determinatur tempus Syzigiarum, cùm videlicet longitudo planetæ non differt à longitudine ſolis quo tempore fit conjunctio, vel differt ſemicirculo ut in oppoſitione. Quod Mercurium ſpectat, determinatur ipſius conjunctio inferior cum ſole per ipſius tranſitum in diſco ſolis qui vicibus octo obſervatus fuit, dum tranſitus Veneris ſemel tantum viſus eſt, in his verò non ſupponitur telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ, & ex obſervatis pluribus locis planetæ è Sole viſis per oppoſitiones vel conjunctiones aut per digreſſiones, dantur etiam ipſius motus veri, ac proindè dantur differentiæ inter motus veros & motus medios. Indè verò determinantur aphelia & perihelia planetarum cum ipſorum excentricitate, atquè conſtrui poſſunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri poteſt eorum locus in propriâ orbitâ. Quæ omnia quomodò ex obſervationibus determinari poſſint independenter ab hypotheſibus, Tom. I. Element. Aſtronom. expoſuit celeberrimus *Caſſinus*.

(u) 60. * *Diſtantiæ mediocres à Sole.*



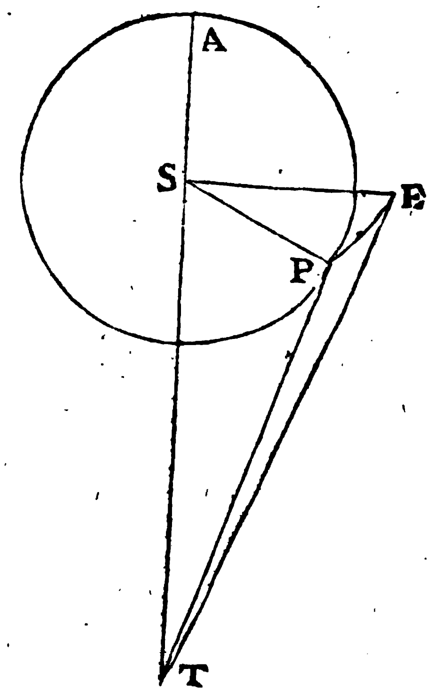
Planetarum diſtantiæ à Sole per obſervationes poſſunt definiri. Hic autem non quæruntur abſolutæ diſtantiæ planetarum à Sole, ſed ſolummodò rationes illarum diſtantiarum ad diſtantias ſolis à tellure. Itaque ſit Sol in S, terra quieſcens vel mota in T, planeta in P; obſervetur locus planetæ in cœlo, & per theoriam Solis, dabitur locus Solis tempore obſervationis ſeu poſitio lineæ T S, undè datur angulus S T P. Quæratur etiam locus plane-

tæ

(x) De distantiis mercurii & veneris à sole disputandi non est locus, cùm hæ per eorum elongationes à sole determinentur. De distantiis etiam superiorum planetarum à sole tolli- tur

61.

tæ P, in propriâ orbitâ per theoriam planetæ, & quia datur locus terræ T è Sole visus atque locus planetæ P, dabitur angulus P S T. In triangulo igitur P S T, dantur tres anguli, ac proindè datur etiam ratio laterum P S & S T; sed, per theoriam Solis, datur ratio S T ad mediocrem distantiam Solis à terrâ, & per theoriam planetæ P, datur ratio distantiæ S P, ad mediocrem distantiam planetæ à Sole, ergò dabitur ratio distantiæ mediocris planetæ à Sole ad distantiam mediocrem Solis à terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri possunt, & prætereà observationes possunt fieri dum planeta est propè nodos, ubi ferè in plano Eclipticæ versatur.



(x) 61. * *De distantiis Mercurii & Veneris.* Sit A B P orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ suâ elongatione. Quia orbita Veneris est ferè circularis, linea T P tanget orbitam in P, ideóque angulus S P T, rectus. Undè est ut sinus totus ad sinum elongationis maximæ seu anguli observati S T P, ità distantia Solis à Terrâ S T ad distantiam S P, Veneris à Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur à Sole ultrà 47° 30′ & ejus elongationes maximæ nunquam minores sunt gradibus 45° 30′. Quarè angulus S P T est ferè rectus. Si verò considerare velimus inclinationem orbitæ Veneris, sit latitudo Veneris ex tellure observatâ P T E, è Sole visa P S E, E punctum in Eclipticâ, erit ut P S ad P T, ità tangens latitudinis P T E, ad tangentem latitudinis P S E. Nam ob angulos E P T & E P S rectos, est P T ad P E ut sinus totus ad tangentem anguli P T E; & similiter P S ad P E ut sinus totus ad tangentem anguli P S E, ideóque ut P S ad P T, ità tangens anguli P T E ad tangentem anguli P S E, quarè dabitur angulus iste cum recto E P S, & ideò erit S P ad S E ut sinus anguli S E P, complementi P S E ad rectum ad sinum anguli P S E, dabitur ergò S E, seu ratio ejus ad S T, sicque observatis variis distantiis S P, dabitur mediocris; quia verò datur ratio S T ad mediocrem distantiam Solis à terrâ tempore observationis, dabitur ratio distantiæ mediocris Veneris ad distantiam mediocrem Solis à terrâ. Mercurii distantiæ à terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas à Sole, sed quia orbita Mercurii est admodum excentrica, si Mercurius sit in P, in maximâ digressione, per observationem notus fit oportet angulus S T P & per Theoriam motuum Mercurii angulus P S T unde deducetur angulus T P S, quia angulus ille rectus non est, unde tandem cætera determinentur ut in Venere, neglectus minutiis.

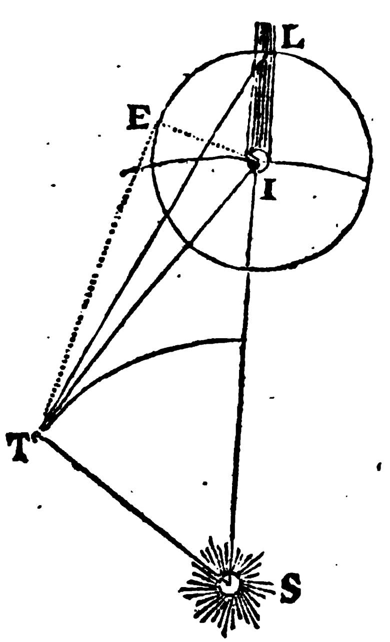
De Mundi Systemate.

tur omnis disputatio per eclipses satellitum jovis. (y) Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter se collatis determinatur distantia jovis.

PHÆ-

62. (y) 62. * *Etenim per Eclipses Jovis determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica.*

* Sit S Sol; T terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ I L transiens: Ex Terrâ T observetur in partibus semi-Diametri Jovis, distantia centri Jovis à Satellite in umbram sese immergente & ex eâ emergente, medium inter eas distantias erit distantia à centro Jovis ad Satellitem in medio umbræ immersum in partibus semi-Diametri Jovis, eadem distantia in minutis & secundis observari poterit, eritque mensura anguli I T L; Ducatur T E tangens ad orbitam satellitis, & I E quæ erit in E T perpendicularis, quia cognoscitur ratio maximæ elongationis hujus satellitis ad semi-Diametrum Jovis, & hic habetur in secundis semi Diameter Jovis habebitur in secundis angulus I T E sub quo apparere deberet linea I E, si Satelles foret in maximâ suâ elongatione eo temporis momento; sed ex Trigonometricis, est sinus anguli I T E, ad sinum totum sive sinum anguli E, ut est I E ad T I, rursus in Triangulo T I L est I L (sive I E ipsi æqualis) ad T I ut sinus anguli observati I T L ad sinum anguli T L I; Itaque ut sinus anguli I T E ad sinum totum, ita sinus anguli I T L ad sinum anguli T L I sive T L S; unde in Triangulo T L S, cognito per observationem angulo S T L & invento ut



indicatum est, angulo T L S, habetur angulus T S L, qui additus vel detractus è longitudine Heliocentricâ terræ dat Jovis Heliocentricam longitudinem. Q. E. I.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in periheliis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, & (z) in jove apprimè demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias à sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

(z) *Et in Jove apprimè demonstratur.* Nam per eclipses satellitum determinatur locus Jovis è Sole visus ejusque à Sole distantia, & ideò collatis plurium eclipsium observationibus, habetur motus verus Jovis in propriâ orbitâ circà Solem; & orbita ipsa describi potest; undè quemadmodum de Sole diximus (43) patet Jovem describere areas temporibus proportionales circà Solem. 62.

DE MUNDI SYSTEMATE

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum jovis, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

PAtet pars prior propositionis per phænomenon primum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per phænomenon primum, & corollarium sextum propositionis quartæ ejusdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA. II.

Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respicere solem, & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior propositionis per phænomenon quintum, & propositionem secundam libri primi: & pars posterior per phænomenon quartum, & propositionem quartam ejusdem libri. Accuratissimè autem demonstratur hæc pars propositionis per (a) quietem apheliorum. Nam aberratio quàm minima à ratione duplicatâ (*per corol.* I. *prop.* XLV. *lib.* I.) motum apsidum

62. (a) * *Per quietem apheliorum.* * Astronomi motus cœlestes calculant referendo Astra ad Eclipticam, cujus initium per intersectionem æquatoris & Eclipticæ determinatur; sed illud initium fixum non est, & propter axis terræ nutationem intersectio illa in antecedentia fertur 51 circiter secundis singulo anno, hinc fixæ totidem secundis progredi videntur. Aphelia Planetarum etiam progredi videntur respectu ejus initii Eclipticæ, progreditur ergo singulo anno.

sidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Vim, quâ luna retinetur in orbe suo, respicere terram, & esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per phænomenon sextum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per motum tardissimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minutorum trium in consequentià, contemni potest. Patet enim (*per corol.* I. *prop.* XLV. *lib.* I.) quod si distantia lunæ à centro terræ sit ad semidiametrum terræ ut D ad 1; vis à quâ motus talis oriatur sit reciprocè ut $D2\frac{4}{243}$, id est, reciprocè ut ea

Aphelium terræ	- - -	62″.
Saturni	- - -	78″.
Jovis	- - -	57″.
Martis	- - -	72″.
Veneris	- - -	86″.
Mercurii	- - -	80″.

Sed multum abest quàm ut ille Apheliorum motus, certissime determinetur, & uniformis esse deprehendatur; ex observationibus motûs Aphelii terræ nunc plus procedere quàm 50″ nunc minus deprehenditur, unde quidam Astronomi non alium esse ejus motum præter motum ipsius initii Eclipticæ censent. Pariter ex observationibus Aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari, aliquando retrocedere, ex. gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis ferè 33 retrocessisse testatur *Cassinus*. Aphelium Jovis ad motum fixarum proximè accedere videtur, &c. Unde constat, Aphelia quamproximè quiescere, & eam quantitatem exiguam motûs ipsis assignati quæ excedit motum fixarum, forte observationum erroribus deberi, forte actioni mutuæ vicinorum Planetarum inter se; sic cùm anno 1703 Saturnus & Jupiter conjuncti fuerint, & cùm nonnisi quinque annis nonaginta gradibus à se mutuo discedant, patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem & Saturnum erat versatus, ejusque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; Posito autem quod reverà vis Solis in Saturnum decrescat secundum quadrata distantiarum, & Jovis interpositione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propositione XLV. primi Libri habebitur angulum Apsidis imæ cum summâ esse $180^{gr.}\sqrt{\frac{1+X}{1+3X}}$ sed $\frac{1+X}{1+3X}$ est fractio ideóque ille angulus est minor $180^{gr.}$ regreditur itaque Apsis ex his hypothesibus planè ut observatione constat: Unde non obscurè colligitur Apheliorum fixarum respectu quies (semotis his accidentalibus causis) ac per consequens quod vires quibus Planetæ ad Solem retrahuntur, sunt in duplicatâ distantiarum ratione accuratè, siquidem si vel unâ sexagesimâ parte accederet ratio à duplicatâ ad triplicatam, Apsides tribus ad minimum gradibus progrederentur, ut demonstratum fuit in fine primi Coroll. Prop. 45^{æ}. Lib. I.

62.

De Mundi Systemate.

ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quàm duplicatâ inversè, sed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quàm ad triplicatam accedit. Oritur verò ab actione solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. (b) Actio solis quâtenus lunam distrahit à terrâ, est (c) ut distantia lunæ à terrâ quamproximè; (d) ideoque (per ea quæ dicuntur *in corol.* 2. *prop.* XLV. *lib.* I.) est ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglectâ solis vi tantillâ, vis reliqua quâ luna

62. (b) * *Actio Solis quâtenus Lunam distrahit à terrâ.* * Motus Apogæi Lunaris uniformis non est, sed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quiescit, sed ita ut omnibus compensatis progrediatur, & octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; Pariter & actio Solis quâ Lunam distrahit à terrâ non est continua, actio Solis Lunam à terrâ distrahit dum Luna à Syzygiâ non plus quàm 55. gradibus hinc inde discessit, circa quadraturas verò actio Solis cum terræ attractione consentit, Lunamque ad terram attrahit, sed tunc & debilior est & per pauciores gradus agit, quàm circa Syzygias, hinc effectus qui resultat pendet ex actione Solis quâ Luna distrahitur. (*Lib. I. Prop. LXVI. Cor.* 6. 7. 8. *cum notis*).

(c) * *Est ut distantia Lunæ à Terrâ quam proximè.* * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta Lunaris Orbitæ successivè obvertuntur Soli, & versantur in Syzygiâ, postea verò in quadraturâ, & cùm ea orbita non sit circulus cujus terra sit centrum, patet puncta Syzygiarum & quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore terræ; Jam verò vis quâ Sol distrahit Lunam à terrâ, in Syzygiis, sicut & vis quâ Sol Lunam attrahit terram versus in Quadraturis, crescit secundum distantias Lunæ à terrâ, in iis autem punctis præcipua est Solis actio ad Apogæum Lunæ movendum, unde effectus resultans pendebit à differentiâ earum actionum quæ erit sicut distantia Lunæ à terrâ: Vel ut melius res concipiatur, fingatur Orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter à terrâ distantibus, ita ut singulum punctum Orbitæ Lunaris sit simul in Syzygiâ & quadraturâ; cùm actio Solis in Syzygia, sicut & actio Solis in quadraturâ, sit ut distantiæ Lunæ à terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut distantia Lunæ à terrâ, sed effectus differentiæ earum actionum erit idem ac id quod resultabit ex translatione dicti puncti per Syzygiam & postea per Quadraturam: hinc si motus Apogæi medius assumatur, is pendebit ab actione quæ erit ut distantia Terræ à Lunâ; addit autem NEWTONUS quàm proxime propter actionem in punctis inter Syzygias & quadraturas, sed quæ parum hanc rationem turbant; nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna distrahitur à Terrâ magis recederet ab hac ratione, actiones compositæ sese mutuò destruunt & in punctis à Syzygiis aut à quadraturis non remotis actio Solis sequitur proxime easdem rationes ac in ipsis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quâtenus Lunam distrahit à terrâ, est proximè ut distantia terræ à Lunâ.

(d) * *Ideoque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I.* * Dicitur in eo Corollario, quod si ex vi decrescente secundum quadrata distantiarum auferatur vis quæ crescat secundum ipsas distantias; quæ sit ad priorem ut 1 ad 357.45, motus progressivus Apogæi erit 1^{d}. 31$'$. 28$''$. in singulâ revolutione; motus autem progressivus Apogæi Lunaris est circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitia debet esse ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 sive ut 1. ad 178.725.

LIBER TERTIUS. PROP. IV. THEOR. IV.

lunâ retinetur in orbe erit reciprocè ut D^2. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propositione sequente.

Corol. Si (e) vis centripeta mediocris quâ luna retinetur in orbe augeatur primò in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ semidiametri terræ ad mediocrem distantiam centri lunæ à centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad superficiem terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitate in terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris à terrâ in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundùm *Ptolemæum* & plerosque Astronomorum 59, secundùm *Vendelinum* & *Hugenium* 60, secundùm *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, secundùm *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & secundùm *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Ast *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones solis & lunæ (omnino (f) contra naturam lucis) majores quàm fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, (g) auxerunt parallaxin lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecimâ vel decimâ quintâ parte

te

(e) * *Si vis centripeta mediocris.* Quoniam vis ablatitia Solis est ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, si vis ablatitia Solis sit 1, erit vis centripeta Lunæ $178\frac{29}{40}$, ideóque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ reverâ retinetur in orbitâ suâ per vim terræ minutam actione Solis $177\frac{29}{40}$. Quarè si vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret si nulla esset actio Solis. Hinc posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis seu distantiæ à centro terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in superficie terræ, dicendum est ut quadratum semidiametri terræ ad quadratum distantiæ mediocris centri Lunæ à centro terræ, ità vis centripeta ad quartum, quod erit vis in superficie terræ.

62;

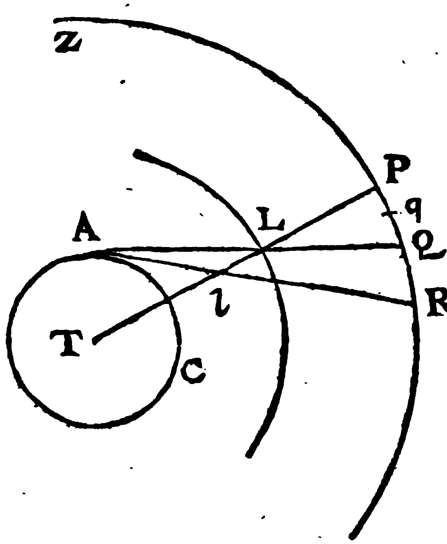
(f) * *Omninò contra naturam lucis* (25).

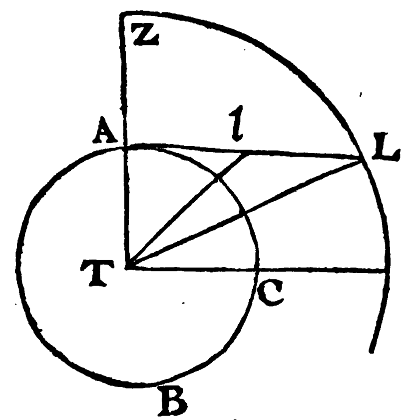
(g) * *Auxerunt parallaxim Lunæ.* Tantùm augeri parallaxim Lunæ quantùm augetur refractio, patet si determinetur pa-

ralla-

De Mundi Systemate.

te totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & (h) distantia evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium, ferè ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum in syzygiis; & lunarem periodum respectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur; atque ambitum terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti (i) à *Gallis* mensurantibus definitum est: &



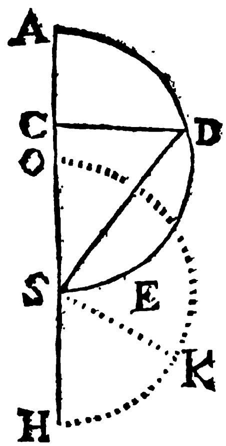


62; rallabis Lunæ, quod ità præstari potest. Sit ACT, tellus cujus ceutrum T, observetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q à refractionibus libera, & ex tabulis eruatur pro tempore observationis longitudo & latitudo Lunæ; deindè (per trigon.) quæratur ipsius declinatio, habebitur ejus distantia à vertice Z seu locus P è terræ centro T visus, differentia PQ seu angulus PLQ aut æqualis ALT est parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q è loco A visus à refractione liber, quoniam refractio auget altitudinem, sit locus visus q, Q q metietur refractionem, undè arcus Qq addendus est arcui Pq ut habeatur parallaxis tota PQ; si verò refractio major assumatur ut qR, parallaxis erit major, nempè PR; quasi Luna esset in l; undè tantum augetur parallaxis quantum refractio ipsa.

(h) * *Distantia evadet.* Sit T centrum terræ & angulus ALT parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum LAT rectum, erit semidiameter terræ AT ad distantiam mediocrem Lunæ à terrâ TL, ut sinus parallaxeos mediocris ad sinum totum. Est autem parallaxis ista 58′ circiter. Jam ducatur Tl, sitque angulus AlT 63′ vel 62′, ob refractionem malè constitutam, erit Tl ad Tl ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideoquè cùm sit juxtà *Tychonem* Tl = $56\frac{1}{2}$ semid. terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ità $56\frac{1}{2}$ ad $60\frac{23}{58}$ vel $61\frac{43}{116}$. Quarè si corrigatur error qui ex refractione malè constitutâ oritur, distantia mediocris Lunæ à terrâ evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semid. terrestr.

(i) * *A mensurantibus Gallis*, A Picar-

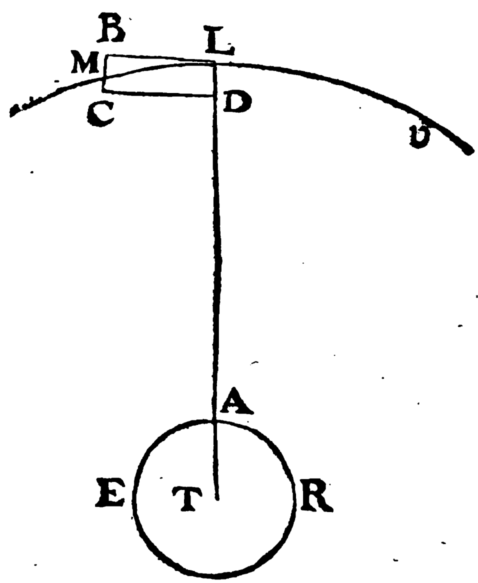
& si luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (*per corol. prop.* III.) in orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. (k) Colligitur hoc ex calculo vel per propositionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propositionis quartæ ejusdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti



card nimirum inventum est gradui circuli maximi terrestris respondere hexapedas 57060 seu ped. Paris. 342360. Quarè inferatur (22) ut numerus graduum arcus distantiæ duorum locorum ad 360°. seu peripheriam integram, ità idem arcus in milliaribus aut pedibus expressus ad ambitum telluris in eàdem mensurâ inveniendum, sicque definitum est ambitum telluris esse ped. Paris. 123249600 ejusque proindè diameter est ped. Paris. 39231566.

(k) 63. * *Colligitur hoc per propositionem XXXVI. lib. I.* * In hâc Propositione 36. sit S centrum terræ S A distantia mediocris Lunæ à Terrâ, S O dimidium ejus distantiæ mediocris, velocitas quâ corpus revolvi potest in circulo O K H erit ad velocitatem Lunæ in propriâ orbitâ ut $\sqrt{2}$ ad 1, sit X arcus quem Luna in propriâ orbitâ uno minuto primo describit, erit $X\sqrt{2}$ arcus O K eodem tempore descriptus in circulo O K H & area O K S erit $\frac{1}{2}SO \times X\sqrt{2}$, æqualis areæ $ASD = \frac{1}{2}AS \times CD$ (nam ob exiguitatem arcûs A D pro rectâ sumi potest sive $\frac{1}{2}SO \times X\sqrt{2} = SO \times CD$ unde est $CD = \frac{X}{\sqrt{2}}$, sed est S C ad C D ut C D ad A C, ergo $AC = \frac{CD^2}{SC} = \frac{X^2}{2SC}$ sed S C est proximè æqualis S A, ergo $AC = \frac{X^2}{2SA}$; rursus sit 1 ad p ut radius ad circumferentiam, orbitæ Lunaris Peripheria erit $p\,SA$, & quoniam tota à Luna describitur tempore 27^d. 7^h. 43$'$. sive minutis 39343; erit arcus $X = \frac{p\,SA}{39343}$ & AC 63.
$= \frac{p^2\,\overline{SA}^2}{2 \times 39343^2 \times SA} = \frac{p^2\,SA}{3095743298}$, est verò $\frac{p\,SA}{60}$ ambitus terræ qui pedum 1232496000 ex *Picarto* adsumptus fuit; ideoque $p\,SA = 7394976000$; unde divisione factâ est $AC = 2.388756\,p$, sed Radius est ad Peripheriam ut 1 ad 6.283185 &c. unde tandem habetur $AC = 15.00878$ &c. Alter autem calculus ex Cor. 9. Prop. IV. deductus ita se habet.

minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cùm vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ distantiæ ratione inversâ, ideoque ad superficiem terræ major sit partibus 60×60 quàm ad lunam; corpus vi illâ in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ descendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis, longitudo est pedum trium Parisien-



63. Sit R A E terra; cujus centrum T; V L orbita Lunæ cujus pars L M à Lunâ percurritur minuti unius primi intervallo. Quoniam Luna periodum suam respectu fixarum complet diebus 27, hor. 7. minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur, hoc est, minutis primis 39343, erit L M, $\frac{1}{39343}$ totius peripheriæ. Porrò ambitus terræ est ped. Parif. 123249600. unde dabitur orbitæ Lunaris circumferentia quæ ejus est sexagecupla 7394976000. ped. Parif. quæ si dividatur per 39443, quotus dabit longitudinem arcûs à Lunâ minuto primo descripti pedibus Parisiensibus expressam, scilicet 187964. ped. circiter cujus quadrato 35330465296 per diametrum diviso, quæ est pedum 2353893976 habebitur sinus versus L D ped. Parif. 15.0093 &c. proximè ut priori calculo.

* Sed ex Corollario propositionis præcedentis, vis quâ Luna retinetur in orbe suo augeri debet in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ ut corrigatur vis ejus per Solis actionem diminutionem, & spatia per diversas vires iisdem temporibus percursa sunt ut illæ vires, ergo linea A C inventa $15^{ped.}009$ est ad spatium quod Luna demptâ vi Solis describeret ut $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ illud ergo spatium est $15^{ped.}0934$: quæ $\frac{934}{10000}$ pedis efficiunt accuratè pollices 1. lin. $1\frac{4}{9}$.

risiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut observavit *Hugenius*. Et ([l]) altitudo, quam grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) ([m]) ideoque est pedum Parisiensium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis quâ luna in orbe suo retinetur, si descendatur in superficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg: I. & II.) est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab eâ diversa esset, corpora viribus utrisque conjunctis terram petendo duplo velocius descenderent, & spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses $30\frac{1}{6}$: omninò contra experientiam.

LIBER TERTIUS. PROP. IV. THEOR. IV.

([n]) Calculus hic fundatur in hypothesi quod terra quiescit. Nam si terra & luna moveantur circum solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis, distantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri potest *per prop.* LX. *lib.* I.

Scho-

(l) * *Et altitudo.* (471. lib. I.).

(m) * *Ideóque est ped. Parif.* (ibid.).

(n) 64. * *Calculus hic fundatur in hypothesi quod terra quiescit.* † Undecimâ Sectione Libri I. quæsivit NEWTONUS qualis orir etur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (sicut res se habet) attractione mutuâ in se agunt, & demonstravit Propositione 58 & 59. Quod si è duobus corporibus se mutuo attrahentibus & circa commune gravitatis centrum Ellipses similes describentibus, alterutrum sit nostra sedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos Ellipsim describere videretur; illud eâdem vi centripetâ eamdem Ellipsim circa nos, si immoti reverâ foremus, nonnisi longiori tempore describeret, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos motos revolvi videretur, foret ad tempus quo circa nos *immotos* revolveretur, in ratione subduplicatâ corporis Centralis immoti ad summam duorum Corporum revolventium; Unde, manente eâdem gravitatis Lege, Ellipsis quæ describeretur circa nos *immotos* eodem tempore quo describitur Ellipsis relativa circa nos *motos*; minor foret quàm ea Ellipsis relativa, & ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc Ellipsis describitur, sive (ex hyp.) quadratum temporis quo describitur Ellipsis relativa circa nos, est ad quadratum temporis quo Ellipsis relativæ ellipsi æqualis circa nos verè immotos describitur, ut Cubus semi Axis Ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad Cubum semi Axis Ellipsis majoris descriptæ circa corpus etiam immotum, & quæ Ellipsi relativæ est æqualis, sed illa tempora erant in subduplicatâ ratione massæ corporis immoti 64.

 moti

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium.

Demonſtratio propoſitionis ſic fuſius explicari poteſt. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate ſaturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem planetarum à *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro terræ, per prop. 1. hujus. Et ſi earum infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorùm montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in terram, idque eâdem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in terram more corporum in verticibus montium, eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius deſcenderet. Qua-

65. moti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ergo, ut maſſa corporis immoti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ſic Cubus ſemi-Axis Ellipſeos minoris deſcriptæ circa corpus immotum ad cubum ſemi-axis Ellipſis majoris reverâ deſcriptæ; Hinc cùm hactenus immotam terram ſuppoſuerimus Lunamque revolventem tempore; quo reverâ revolvitur, & ſemi axem orbitæ Lunaris 60 ſemi Diametrorum terræ aſſumſerimus, ſitque maſſa terræ ad maſſam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut Cubus 60. ad Cubum ſemi axeos ejus Ellipſeos quam (manente eadem gravitatis Lege eodemque tempore Periodico) Luna relativè deſcribet circa terram dum ipſa terra mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverâ revolvetur; ille ergo ſemi Axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus Radix Cubica eſt 60.47 ferè $60\frac{1}{2}$ ut habet NEWTONUS.

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ ſuâ revolvitur circà tellurem, ità aliud quodvis grave ex puncto extrà telluris ſuperficiem ſecundum rectam horizontalem ſatis validè projectum orbitam deſcriberet, & planetæ inſtar periodum ſuam compleret (10. *lib.* 1.). Sed quò altius eſt ſuprà terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus eſt vi projectili ut projectum in planetam mutetur, & quò humilius eſt eò majori (*ibid.*) hoc eſt, celeritas per vim projectilem impreſſa erit inverſè ut diſtantia, v. gr. Si Luna eâdem celeri-

Quare cùm vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ respiciant, & sint inter se similes & æquales, eædem (*per reg.* I. & II.) eandem habebunt causam. Et propterea vis illa, quâ luna retinetur in orbe suo, ea ipsa erit quam nos gravitatem dicere solemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quàm corpora gravia solent cadere.

LIBER TERTIUS. PROP. V. THEOR. V.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumsaturnios in saturnum, & circumsolares in solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumsaturniorum circa saturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumsolarium circa solem, sunt phænomena ejusdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (*per reg.* II.) à causis ejusdem generis dependent: præsertim cùm demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra jovis, saturni ac solis, & recedendo à jove, saturno & sole, decrescant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decrescit in recessu à terrâ.

Corol. 1. (o) Gravitas igitur datur in planetas universos. Nam venerem, mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis

leritate quâ nunc in orbitâ suâ revolvitur juxta terram, projiceretur secundùm directionem horizontalem, circà tellurem non giraret, sed terrestrium projectilium more in terram caderet, antequam * per tertiam partem minuti esset mota. Nam arcus quem Luna 20 scrupulis secundis horariis in suo circulo percurrit est 11″ si juxta tellurem accedat & eâdem celeritate moveatur, ille arcus erit 11′; sinus versus Arcus 11′ est $\frac{51}{10.000.000}$ Radii, qui Radius cùm sit pedum 19615783 erit sinus ille versus pedum centum circiter; sed grave prope terram viginti istis scrupulis secundis cadendo percurrit 20 × 20 × 15 $\frac{1}{12}$, sivè 6033 ped. Unde Luna in circulo suo non manebit, sed longè prius in terram impegerit quàm 20 secunda elapsa fuissent.

(o) 66. * *Gravitas igitur datur in Planetas universos*; * Datur gravitas in terram & eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV; datur gravitas in Jovem & Saturnum, nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, & circum- 66.

DE MUNDI SYSTEMATE.

generis cum jove & saturno, nemo dubitat. Et cùm attractio omnis per motûs legem tertiam mutua sit, jupiter in satellites suos omnes, saturnus in suos, terraque in lunam, & sol in planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. (p) Gravitatem, quæ planetam unumquemque respicit, esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt planetæ omnes in se mutuò per corol. 1. & 2. Et (q) hinc jupiter & saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibiliter perturbant motus mutuos, sol perturbat motus lunares, sol & luna perturbant mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

Scholium.

Hactenus vim illam quâ corpora cœlestia in orbibus suis retinentur, centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem esse constat, & propterea gravitatem in posterum vocabimus. Nam causa vis illius centripetæ, quâ luna retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I. II. & IV.

PRO-

66. circumsaturniorum circa Saturnum sint ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa terram, pendent ergo (*per reg.* 2.) ex gravitate eorum Satellitum in eos Planetas; Quamvis autem non sint aut non observati sint Satellites circa Martem, Venerem & Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita sunt similes ut dubitandi locus non relinquatur quod si Satellites juxta ipsos collocarentur, idem eveniret illis ac Lunæ & circumsaturniis aut circumjovialibus, unde sequitur Gravitatem etiam dari in illos Planetas. Postea propter mutuam attractionem, terram esse gravem in Lunam, &c. constabit.

(p) * *Coroll.* 2. Patet (ex reg. I. & prop. I.).

(q) * *Et hinc Jupiter.* Hæc mutua planetarum perturbatio, ut potè cum sequentibus propositionibus conjuncta, deinceps convenientius explicabitur, * sufficiant in præsentiarum quæ de eâ superius dictum est, occasione quietis Apheliorum; vide notam a ad Prop. 2.

LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus distantiis à centro planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.

(r) Descensus gravium omnium in terram (demptâ saltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexiguâ resistentiâ oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum observarunt alii; & accuratissimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, sale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus suspendebam (quàm potui exactè) in alterius centro oscillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, constituebant pendula; quoad pondus, figuram, & aëris resistentiam omnino paria: & paribus oscillationibus, juxta positæ, ibant unà & redibant diutissimè. (s) Proinde copia materiæ in auro (*per corol.* 1. *&* 6. *prop.* XXIV. *lib.* II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in totum lignum; hoc est, ut pondus ad pondus. Et sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quàm pars millesima materiæ totius, his experimentis manifestò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem esse atque in terram, non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terrestria ad usque orbem lunæ, & unà cum lunâ motu omni privata demitti, ut in terram simul cadant; & per

(r) * *Descensus gravium omnium* (3. lib. 1.).

(s) * *Proindè copia materiæ.* Quantitas materiæ in medio non resistente est ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè (*per cor.* 6. *prop.* 24. *lib.* 2.) ideóque datis tempore & longitudine penduli ut pondus comparativum directè. Sed pondus comparativum est actio vis motricis (*per cor.* 6. *prop.* 20. *lib.* 2.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejusdem actionem in lignum, hoc est, (*per cor.* 1. *prop.* 24. *lib.* 2.) ut pondus ad pondus.

66.

(t) per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia spatia cum lunâ; ideoque quod sunt ad quantitatem materiæ in lunâ, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam satellites jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro jovis, (u) erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciprocè ut quadrata distantiarum à centro jovis; & propterea in æqualibus à jove distantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, describerent æqualia spatia; perinde ut fit in gravibus in hâc terrâ nostrâ. Et (x) eodem argumento planetæ circumsolares, ab æqualibus à sole distantiis demissi, descensu suo in solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. (y) Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus satellitum pondera in solem, proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu satellitum quam maximè regulari; *per corol.* 3. *prop.* LXV. *lib.* 1. Nam si horum aliqui magis traherentur in solem, pro quantitate materiæ suæ, quàm cæteri: motus satellitum (*per corol.* 2. *prop.* LXV. *lib.* 1.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à sole distantiis, satelles aliquis gravior esset in solem pro quantitate materiæ suæ, quàm jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quâcunque datâ, puta d ad e: distantia inter centrum solis & centrum orbis satellitis, major semper foret quàm distantia inter centrum solis & centrum jovis in ratione subduplicatâ

quàm

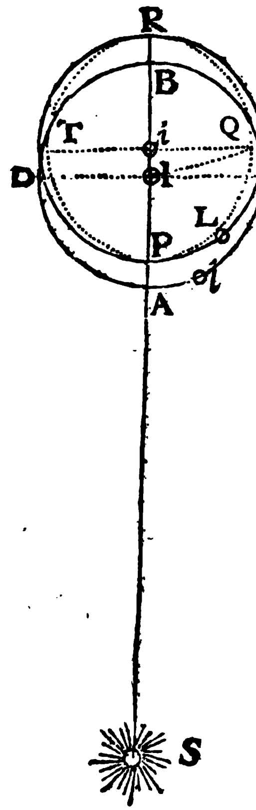
66. (t) * *Per jam antè ostensa* (prop. 4. lib. hujus).

(u) * *Erunt eorum gravitates acceleratrices.* (Per cor. 2. prop. 5.).

(x) * *Et eodem argumento.* Gravitates acceleratrices planetarum in Solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro Solis (*cor.* 2. *prop.* 5.) & propter eà in æqualibus à Sole distantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindéque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent spatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumsolaris omni motu revolutionis privatus solâ vi centripetâ descenderet & ad solem usque perveniret ex datâ ejus à Sole distantiâ innotescit per not. 401. lib. 1. dimidio scilicet temporis periodici quo planeta ad distantiam duplò minorem revolvi posset, sive tempore quod est ad tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo solem attingeret.

(y) * *Vires autem quibus corpora inæqualia.* (Def. 7. & not. 15. lib. 1.).

quàm proximè; (z) uti calculo quodam inito inveni. Et si satelles minus gravis esset in solem in ratione illâ d ad e, distantia centri orbis satellitis à sole minor foret quàm distantia centri jovis à sole in ratione illâ subduplicatâ. Ideoque si in æquali-

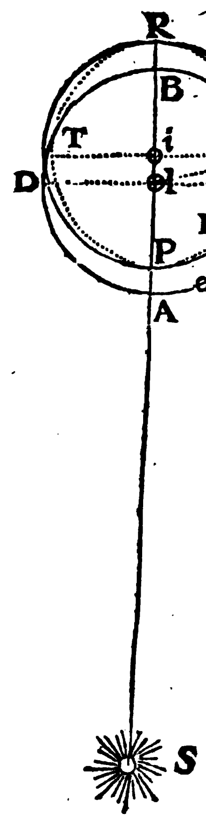


(z) * *Uti calculo quodam inito inveni.* * Sit S Sol, I Jupiter, L Satelles gravior in Solem quàm Jupiter paribus in distantiis in ratione d ad e, Fiat S I ad S i sicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ & quoniam gravitas est inversè ut quadrata distantiarum, gravitas in Solem ad distantiam S I erit ad gravitatem in Solem ad distantiam S i ut d ad e; unde si gravitas Jovis in I positi sit ut e, & gravitas satellitis gravioris in I etiam positi sit ut d, ejusdem satellitis gravitas in i positi erit ut e, quare erit æqualis gravitati Jovis in I positi: Fingatur satelles l qui Jove nec gravior nec levior sit, qui circa Jovem I circulum describat ACBD, & fingatur in i corpus centrale Jovi simile, circa quod, semotâ Solis actione, satelles gravior L describere poterit orbitam P Q R T priori A C B D æqualem; Restituatur Solis actio, actio ejus in utrumque satellitem erit æqualis in similibus orbitarum punctis; nam propter ingentem puncti S distantiam erit SA ad SP, & S B ad S R ut S I ad S i, ideoque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut d ad e, ideóque si satellites forent æque graves, paribus in distantiis gravitates in eis punctis forent ut d ad e, sed quia gravitas satellitis l est ad gravitatem satellitis L ut e ad d, compensatur discrimen gravitatis ex distantiâ ortum per discrimen gravitatis ex Hypothesi constitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam satellitis relatè ad ejus primarium, pendet ex discrimine actionis Solis in satellitem & in primarium, hoc est in oppositione pendet ex residuo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in satellitem; & in conjunctione ea mutatio pendet ex residuo actionis Solis in satellitem demptâ Solis actione in primarium: Cùm ergo actio Solis in satellites L & l, sit eadem; sed actio Solis in primarium i sit minor quàm in primarium I, in oppositione minus est residuum quod mutationem pariet in orbita satellitis L, quàm residuum quod mutationem satellitis l parit in orbitâ, & majus è contra est residuum in conjunctione respectu orbitæ satellitis L quàm respectu orbitæ satellitis l; sed illa Residua tam in oppositione quàm in conjunctione vim centripetam minuunt; Ergo vis centripeta major manet in R quàm in B, & minor è contra in P quàm in A, unde patet

DE MUNDI SYSTEMATE.

æqualibus à ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in ſolem major eſſet vel minor quàm gravitas acceleratrix jovis in ſolem; parte tantum milleſimâ gravitatis totius, foret diſtantia centri orbis ſatellitis à ſole major vel minor quàm diſtantia

46. patet quod ut reſtituatur ſimilitudo inter orbitam ſatellitis L, & orbitam ſatellitis *l* corpus centrale debeat removeri à puncto R & accedere verſus P, hoc eſt transferri ex i verſus I; ita ut centrum orbitæ ſatellitis L remotius eſſe debeat à Sole quàm ipſius corpus Centrale.



Jam verò dico illud corpus centrale ad I transferri debere, nam ſit corpus centrale in I, ſemotâ Solis actione, ſatelles L eodem tempore Periodico ac prius deſcribet Ellipſim cujus centrum i, focus verò I & axis major RP, (*per Cor. Prop.* XV. *Lib.* I.) & in mediocri ſuâ diſtantiâ IQ (*Cor.* 4. *Prop. XVI. Lib. I.*) velocitatem eamdem habebit quam habet ſatelles *l* in ſuo circulo, qualem v. gr. habet in C ubi velocitatum illarum directiones ſunt Parallelæ tam inter ſe quàm diametro RP, & ob diſtantiarum IQ & IC æqualitatem vires centrales ſunt æquales directionis obliquitate paulum differentes: Addatur jam actio Solis, & cùm ſit SQ ad SC ut S i ad SI actiones illæ Solis (ex Hyp. & demonſtratis) in ſatellites diverſæ gravitatis, ſed poſitos in Q & C erunt etiam æquales; Movebitur ergo ſatelles L in mediocribus diſtantiis Q & T ut ſatelles *l* movetur in C & D quam proximè, tam ratione corporis centralis I quàm etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Sole pendentes in A & P, & in R & B æquales ſunt, quia ſunt differentia ejuſdem vis Solis in I & virium Solis in A & P, ut & virium Solis in R & P, vires autem in A & P ſunt æquales ex Hyp. & dem. ut & in R & P. Unde cùm vis Primarii magna cenſenda ſit reſpectu vis S; rationes virium Centripetarum reſiduarum in P & A, B & R manent inter ſe in eadem ratione ac ſi nulla foret actio Solis, & ut ſemotâ actione Solis curvas ſuas iiſdem temporibus deſcribere faciebant, celeritate quidem majori in P, minori in R, media verò in A & B, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio deſcriptionis curvarum; cùm ergo demonſtratum ſit quod in punctis PQRT, ACBD actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ PQRT, ACBD deſcribuntur, cùm virium rationes eædem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde ſequitur quod ſatelles L in orbitâ PQRT revo vi poterit eodem tempore iiſdemque proximè Legibus ac Satelles tantia jovis à sole (a) parte $\frac{1}{1000}$ distantiæ totius, id est, parte quintâ distantiæ satellitis extimi à centro jovis : quæ quidem orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed orbes satellitum sunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & satellitum in solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondera saturni & comitum ejus in solem, in æqualibus à sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: & pondera lunæ ac terræ in solem vel nulla sunt, vel earum massis accuratè proportionalia. Aliqua autem sunt *per corol.* 1. *&* 3. *prop.* V.

Quinetiam pondera partium singularum planetæ cujusque in alium quemcunque sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quàm pro quantitate materiæ, planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quàm pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si, verbi gratiâ, corpora terrestria, quæ apud nos sunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

pore

telles E in orbitâ suâ ACBD, si gravior sit Jove paribus in distantiis in ratione duplicatâ distantiæ Solis à centro suæ orbitæ ad distantiam Solis ab ipso Jove. Q. E. D.

Eamdem demonstrationem applicari posse ad casum ubi satelles supponeretur levior Jove paribus in distantiis, illumque tunc descripturum Ellipsim cujus centrum Sole vicinius erit quàm Jupiter, ita ut sit gravitas satellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione distantiæ Solis à centro Orbitæ ad distantiam Solis à Jove. Q. alterum E. D.

Hâc ratione satis constare assertum NEWTONI credimus, idem tamen aliter inito calculo magis ad mentem NEWTONI demonstrari posse non negamus; sed ratio eum calculum ineundi, ex iis quæ postea de motibus Lunaribus dicentur, erit deducenda.

(a) * *Parte* $\frac{1}{2000}$ *distantiâ totius.* Gravitas acceleratrix Jovis sit 1, erit (per hyp.) gravitas acceleratrix satellitis $1+\frac{1}{1000}$, sed (ex dem.) distantia inter centrum Solis & centrum orbis satellitis major est quàm distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione illâ subduplicatâ quamproximè, hoc est, ut 1, ad $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}$. Quarè utriusque distantiæ differentia est $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}-1$ seu $\sqrt{\frac{1001}{1000}}-1=\sqrt{1.001}-1=1.0004998$ &c. $-1=.0004998$ &c. sive $=\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$, ideóque distantia centri orbis satellitis à Sole major erit quàm distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius,

DE MUNDI SYSTEMATE.

pore lunæ: ſi horum pondera eſſent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iiſdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam ſupra oſtenſum eſt.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent, forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

Corol. 2. Corpora univerſa, quæ circa terram ſunt, gravia ſunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro terræ diſtant, ſunt ut quantitates materiæ in iiſdem. Hæc eſt qualitas omnium in quibus experimenta inſtituere licet, & propterea per reg. III. de univerſis affirmanda eſt. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omninò deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus niſi in formâ materiæ, poſſet idem per mutationem formæ gradatim tranſmutari in corpus ejuſdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, & viciſſim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, poſſent gravitatem ſuam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, poſſentque cum formis variari, contra quam probatum eſt in corollario ſuperiore.

Corol.

66. tius, id eſt parte quintâ diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis.

* Nam eſt Diameter Jovis circiter decima pars Diametri Solis, ut ſupra indicavimus, ſive ut *997* ad 10.000, diſtantia extimi ſatellitis eſt *26.63* ſemi Diametrorum Jovis, ergo ea diſtantia ſemi Diametros Solis continebit 2.663 aut accuratiùs 2.655.

Solis ſemi-Diameter mediocris è terrâ viſus, ſecundùm *Caſſini* tabulas, eſt 16′ 3″ vel 16′ 4″. Jam verò in Triangulo Rectangulo cujus angulus verticis eſt 16′ 4″ altitudo continet Baſim 213.*96* vicibus; ergo inter ſolem & terram intervallum eſt quod Solis ſemi Diametros 213. *96* contineret, ſive proximè, Solis Diametros 107.

Jovis autem diſtantia medioris à Sole eſt ad diſtantiam mediocrem terræ à Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit ſemi-Diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis milleſima pars eſt .*556296* quæ eſt excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000â. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis, ille verò numerus *556296* eſt quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quàm 2.655 ſed diſtantia extimi ſatellitis à Jove continebat Solis ſemi Diametros 2.655; Ergo excentricitas Jovis ſi ſatelles ſit Jove 1000â. parte gravior vel levior paribus in diſtantiis, eſt ad minimum quinta pars diſtantiæ ſatellitis extimi à Jove. Q. E. D.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specificè graviora sint, minimè descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum? LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque sine poris rarefieri possint, (z) vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, (a) quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis (b) gravitatis diversi est generis à vi magneticâ. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora

(z) * *Vacuum datur.* Quibus responsionibus hoc NEWTONI ratiocinium effugiant Cartesiani, jam diximus (lib. 2. nu. 187.

(a) * *Quarum vires inertiæ.* Cùm enim vis inertiæ sit quantitati materiæ proportionalis, si vires inertiæ sunt ut magnitudines, magnitudines sunt ut quantitates materiæ, hoc est, sunt ejusdem densitatis.

(b) * *Vis gravitatis diversi est generis.* Clariss. *Muschenbroek* in Dissertatione de Magnete plurima atque accuratissima de hujusce lapidis actione refert experimenta. Ex descriptâ à diligentissimo viro experimentorum serie palam quidem fit æqualem non esse magnetis in varia corpora actionem, eamque tempestatum vicissitudinibus obnoxiam, & modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quàm triplicatâ distantiarum decrescere, eadem ostendunt experimenta. Hinc post transcriptum hoc ipsum Corollarium V., subdit *Muschenbroek*: « utinam memoriæ prodita fuissent « experimenta ex quibus NEWTONUS hæc « collegit; forsitan enim vir stupendæ sub« tilitatis in Mathematicis disciplinis me« thodum invenit separandi attractiones à « repulsionibus quarum proportionem in di« stantiæ ratione triplicatâ decrescere de« prehendit, sed quia nihil de hâc re ulte« rius determinavit, nec amplecti ejus sen« tentiam possumus. ». Ut intelligantur hæc Clariss. *Muschenbrokii* verba, sciendum est, virum doctissimum suis experimentis in eam inductum fuisse suspicionem, quod scilicet magnes constaret partibus valdè heterogeneis, quarum quædam attraherent, quædam repellerent, ità ut duæ illæ vires oppositæ vel simplicis repulsionis vel attractionis proportionem turbent. Idque non caret verisimilitudine, cùm experimentis notissimum sit, magnetes non solùm sese mutuò attrahere, sed etiam alterutro magnete in contrariam partem converso, unum ab altero repelli. Uterque magnetis polus vim repellentem atque attrahentem æquè ostendit, & idcircò ex eodem polo vis attrahens & repellens emanat. Si amici magnetum poli sibi obvertantur, attractio præpollet repulsioni, si è contrà inimici poli sese invicem respiciant, prævalet repulsio. Quamobrem qui solam attractionem vult cognoscere; perspectam habere debet eorumdem polorum vim repulsivam, eamque addere vi attrahenti experimento cognitæ, summa indica- 67.

DE MUNDI SYSTEMATE. pora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ

66. dicabit vim totam attrahentem. Hinc forsan fieri posset ut separatis ab invicem attractionis repulsionisque viribus, constans quam NEWTONUS deprehendit inter attractiones & distantias proportio obtineret. At verò cùm ex crassis observationibus duntaxat id se animadvertisse fateatur NEWTONUS, non ità longè quærenda videtur mens nostri autòris.

* Vim magneticam decrescere in ratione triplicatâ distantiarum, ab experimentis statuit *Wisthonus* in egregio opusculo, *De Acûs magneticæ inclinatione*: ipse autem *Muschenbroekius* in Tomo primo Physices suæ, Rationem diminutionis vis magneticæ esse fere quadruplicatam distantiarum deducit ingeniosissimis experimentis, scilicet magnetem unum alteri lanci bilancis appendit, ponderibus in alterâ lance ad æquilibrium instituendum impositis, tum admovet magnetem sub eo qui suspensus est, sic vis attractionis magnetum æquilibrium tollit, quod adjectis ponderibus restituitur, & pondera illa addenda varia sunt pro variâ distantiâ magnetum inter se, ita ut videantur sequi rationem quadruplicatam inversam spatii vacui inter magnetes intercepti, quod spatium vacuum non est Cylindricum aut Prismaticum, quia magnetes quibus utebatur Cl. *Muschenbroekius*, erant Sphærici; unde hæc ratio non est accuratè ratio quadruplicata inversa distantiarum.

Aliâ ratione hæc experimenta possunt institui, nempe considerando actionem magnetis in acum magneticam, quantum nempe pro variâ magnetis distantiâ à magnetico meridiano acum detorqueat, atque hâc ratione, experimenta à *Wisthono* instituta fuisse (nisi memoria fallit) puto, quæ forte Methodus ea est etiam quâ NEWTONUS usus fuerat, & sane omnibus probe notatis quæ ad æstimationem virium requiruntur, vis magneticæ diminutionem secundum triplicatam rationem procedere experimentis quàm accuratissimè potui institutis deprehendi, quæ quidem experimenta (cùm non sint ad manum ea quæ *Wisthonus* hâc de re tradidit) referre nostri puto esse instituti.

Sit ergo ACB, meridianus magneticus, NCS acus magnetica actione magnetis M, extra meridianum magneticum tracta, sitque linea C m à centro acus ad centrum magnetis ducta meridiano magnetico perpendicularis, & statim supponatur distantiam C m à centro acus ad centrum magnetis esse Physicè infinitam.

Vis magnetica terræ retrahit acum à situ SCN ad BCA, sed quia illi situi est obliqua, resolvenda est in duas vires, unam lineæ SCN perpendicularem, alteram ipsi Parallelam; hæc frustra agit obnitente centro C, illa verò gyrationem acûs efficit, itaque si in puncto quovis c, a c repræsentet vim magneticam totam, a n repræsentabit vim quâ convertitur acus, quæ ideo est ad vim magneticam totam in eo puncto ut sinus anguli a c n (declinationis acus à meridiano magnetico) ad Radium; In omnibus punctis CN vim æqualem exerceri supponi potest, sed in parte CS vis ea repulsivè agit, ideoque consentit cum vi quæ convertit partem CN, & ejus efficaciam geminat: Notum est verò quod si vires æquales in omnibus punctis CN agant æqualiter & perpendiculariter ut eam lineam convertant, earum omnium efficacia eadem erit ac si summa omnium virium perpendiculariter ageret in puncto P duabus tertiis partibus acus CN à centro C remoto: hic ergo collecta censeri potest tota vis magnetica convertens partem CN, & eodem ratiocinio vis repulsiva convertens partem CS, in puncto p, duabus tertiis arcûs CS à centro C remoto, collecta censeri potest; & propter æqualitatem linearum CN, CS, ideoque partium CP ac Cp, tota vis magnetica tam attractiva quàm repulsiva acum convertens puncto P applicata censeri potest.

Si magnes M ab acu infinitè distaret, pari ratiocinio ostenderetur vim totam quâ conteriæ quàm vis gravitatis, & in recessu à magnete decrescit in ratione distantiæ non duplicatâ, sed ferè triplicatâ, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui. LIBER TERTIUS. PROP. VI. THEOR. VI.

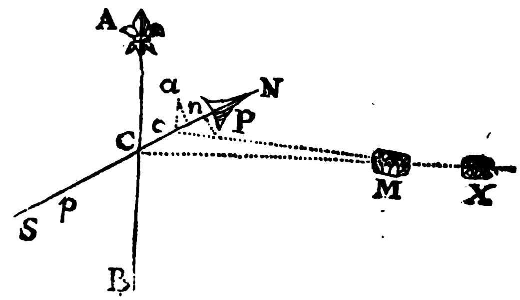
PRO-

convertit acum in puncto P esse collectam, & per resolutionem virium, vim quâ convertit acum, esse ad vim totam ejus magnetis M ut sinus anguli N C M (deviationis nempe acûs à magnete) ad Radium.

Hinc in casu, in quo acus quiescit, vis magnetica terræ convertens acum est æqualis vi magnetis convertenti acum, siquidem manet acus in æquilibrio in situ N S C, cùm ergo sit vis magnetica terræ tota, ad vim magneticam terræ convertentem acum ut Radius ad sinum declinationis acûs à meridiano magnetico; & sit vis magnetis convertens acum (æqualis illi vi magneticæ terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut sinus deviationis acûs à magnete ad Radium; ex æquo & per compositionem rationum habebitur vis tota magnetica terræ ad vim totam magnetis M ut sinus deviationis acûs à magnete, ad sinum declinationis acûs à meridiano magnetico, quod etiam per compositionem virium demonstrari potuisset.

Itaque si idem magnes ad aliam distantiam ponatur, ut in X, ita ut in alio situ acum constituat, habebitur etiam vis magnetis in X, ad vim totam magneticam terræ, ut sinus declinationis acûs à meridiano magnetico ad sinum deviationis acûs à magnete. Quare per compositionem rationum erit vis magnetis in X, ad vim magnetis in M, ut sinus declinationis acûs à meridiano magnetico cùm magnes est in X divisus per sinum deviationis ab eo magnete in X posito, ad sinum declinationis acûs à meridiano magnetico cùm magnes est in M divisum per sinum deviationis à magnete, in M posito, hoc est, vis magnetis in diversis distantiis, (infinitis, respectu magnitudinis acûs) est ut sinus declinationis acûs à magnetico meridiano divisus per sinum deviationis ejus à magnete.

Equidem quando magnes satis est vicinus ab acu ut diversa censeri possit ejus distantia à diversis punctis acûs, & fortior sit ejus vis in puncta viciniora quàm in remotiora, simulque actio magnetis ad diver-



sa puncta acûs diversâ cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis fiet vicinius extremitati N, attamen ob figuram vulgarem acûs magneticæ quæ spiculi instar formata circa punctum P latior est, centrum rotationis acus in puncto P manere censeri potest nisi nimia sit magnetis vicinia.

Ideoque distantia magnetis ab acu & angulus deviationis acûs à magnete determinabuntur ducendo lineam à centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recensenda vires magnetum in diversis distantiis positorum fuerunt æstimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum, quæ ut solet, attingebat utrâque extremitate circulum divisum in suos gradus, ductâque lineâ perpendiculari in centrum acûs cùm sponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes Parallelepipedon super eam lineam, ita ut ejus facies Polares perpendiculares essent ei lineæ, Polusque ejus meridionalis acum spectaret, Borealemque ejus extremum ad se traheret, mensurabantur distantiæ à centro acûs ad centrum magnetis in Pollicibus lineisque Parisiensibus, & observabatur quantùm in singulis magnetis distantiis discederet acus à meridiano magnetico, tum, primò graphice, postea calculo Trigonometrico, distantia centri magnetis, à centro Rotationis acûs, ut & angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur; diviso itaque sinu declinationis acûs per sinum istius anguli Quo-

De Mundi Systemate.

tiens exprimit Rationem vis magneticæ in distantia singula inventa, sive Logarithmis utendo, Differentia Logarithmorum Sinuum angulorum deviationis à meridia-
66. no magnetico & à magnete erit Logarithmus vis magneticæ, in distantia in quâ anguli illi habentur, & tertia pars ejus differentiæ erit Logarithmus Radicis cubicæ vis magneticæ, & assumptis iis Radicibus cubicis in numeris, si per eas dividatur numerus aliquis constans (qui hic est $57\frac{3}{4}$) Quotientes erunt ipsæ distantiæ; Unde liquet quod Radices cubicæ virium magnetis sunt inversè ut distantiæ, sive quod vis magnetica sit inversè in ratione triplicatâ distantiarum: sequenti verò tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ instituta, cum calculo inde deducto; Prima columna designat distantias à Centro acûs ad Centrum magnetis; Secunda columna designat distantiam à Centro rotationis acûs ad centrum magnetis; Tertia declinationem acûs à meridiano magnetico cum suo Logarithmo & tertiâ ejus parte; Quarta, declinationem acûs à lineâ ductâ à centro rotationis acûs ad centrum magnetis cum suo Logarithmo & tertiâ parte; Quinta, differentias earum tertiarum partium, cum suis numeris qui rationem exprimunt Radicum cubicarum virium magnetis in diversis distantiis; Sexta denique Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per istos numeros divisi, qui Quotientes ipsas distantias quamproximè æquant.

Distantia à Centr. magn. ad Centrum acûs.	Distantia à Centr. magn. ad Cent. rotat. acus.	Declin. à merid. magnetico cum Logar. & ejus tertiâ parte observata.	Declin. à magnete cum Logarith. & ejus tert. parte.	Differentia tertiar. part. Logar. cum suis numeris.	Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per numer. qui Radices Cubicas virium magneticarum exhibent, divisi.
51.46 - - -	40 - -	75d.	19d. 27		
		9.9849438	9.5224235	0.1541734	
		3.3283146	3.1741412	n. 1.426 - -	40.4
60.16 - - -	50 - -	61	35.41		
		9.9418193	9.7658957	0.2586412	
		3.3139398	3.2552986	n. 1.144 - -	50.4
67.49 - - -	60 - -	44d. 30′.	53d. 42′		
		9.8456618	9.9062964	—1.9797885	
		3.2818873	3.3020988	n. 0.9545 - -	60.5
83 - - -	80 - -	21	77°. 6′		
		9.5543292	9.9888982	—1.8541437	
		3.1837764	3.3296327	n. 0.7147 - -	80.8
101 - - -	100 - -	11d.	85d. 46′		
		9.2805988	9.9988135	—1.7605951	
		3.0935329	3.3329378	n. 0.5762 - -	100.2
120.7 - - -	120 - -	6. 20′	89′ 22.		
		9.0426249	9.9999735	—1.6809838	
		3.0143083	3.3 33245	n. 0.4797 - -	120.3
150.2 - - -	150 - -	3. 20	91. 15		
		8.7645111	9.9998966	—1.5882049	
		2.9215037	3.3332988	n. 0.3874 - -	149.8
160.1 - - -	160 - -	2d. 40′	91d 38′		
		8.6676893	9.9998235	—1.5559553	
		2.8892298	3.3332745	n. 0.3597 - -	160.5

Eodem

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro planetæ. Et inde consequens est (*per prop.* LXIX. *lib.* I. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cùm planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; & actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis sit; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. I. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus (c) in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res

Eodem modo experimenta instituta sunt, lineâ à centro magnetis ad centrum acûs angulum 45 graduum cum meridiano magnetico constituente.

Repetita fuêre ea experimenta cum duobus diversis magnetibus, & vires quidem diversæ sunt repertæ, sed decrescere secundum eamdem distantiarum rationem deprehensæ sunt.

Repetita fuêre cum magnetibus iisdem & armatis & armaturâ spoliatis, & quod omninò observabile est, idem magnes eamdem declinationem acûs magneticæ produxit, sive armatus foret, sive non armatus, in eadem nempe centri magnetis à centro acûs distantiâ ac directione; Quod quidem Paradoxon videbitur, cùm vis quâ magnes armatus ferrum sustinet, multum differat à vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen Phænomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet distantiâ ac directione, ita ut cùm tutius mensurarentur distantiæ centri acûs & centri magnetis, magnete non armato sum usus in experimentis præcedentibus, ex quibus satis probari credo; *In recessu à magnete vim magneticam decrescere in ratione ferè triplicatâ quantum saltem crassis illis observationibus animadverti potest.* 66.

(c) * *In attractionibus magneticis & electricis*, ubi ut plurimùm quò majûs est attrahens, eò, cæteris paribus, major est attractio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Res (d) intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. (e) Si quis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hâc lege gravitare deberent in se mutuò, cùm tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod gravitas in hæc corpora, cùm sit ad gravitatem in terram totam ut sunt hæc corpora ad terram totam, longè minor est quàm quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet *per corol.* 3. *prop.* LXXIV. *lib.* I.

PRO-

66. (d) * *Res intelligetur in gravitate.* Vires quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus atquè ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis singulisque corporum partibus, & esse proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Si itaque concipiamus Jovem & Satellites ejus ad se invicem accedere ut globum unicum componant, pergent singuli sese mutuò trahere, & viceversâ si corpus Jovis resolveretur in globos plures, hi quoque globi, satellitum instar, sese mutuò traherent.

67. Globi cujusque vis absoluta est ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quâ globus unusquisque trahitur in alterum, & quæ ponderis nomine vulgò designatur, est ut contentum sub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum distantiæ inter centra (*per cor.* 4. *prop.* 76. *lib.* I.) & huic vi proportionalis est quantitas motûs quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (*def.* 8. *lib.* I.) vis autem acceleratrix quâ globus unusquisque pro ratione materiæ quæ attrahitur in alterum est ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum distantiæ inter centra (*per cor.* 2. *prop.* 76. *lib.* I.) & huic vi proportionalis est velocitas quâ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (*def.* 7. *lib.* I.). Hinc corporum cælestium motus inter se possunt facile determinari. Quia verò respectu terræ totius exigua admodum sunt corpora terrestria, patet minimam quoque esse mutuam horum corporum attractionem respectu attractionis in terram totam. Sic sphæra terræ homogenea diametroque pedis unius descripta minus trahet corpusculum juxtà superficiem suam quàm terra juxtà suam in ratione diametri sphæræ ad diametrum terræ (*prop.* 72. *lib.* I.) hoc est in ratione 1 ad 39231566 sive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis sentiri non potest.

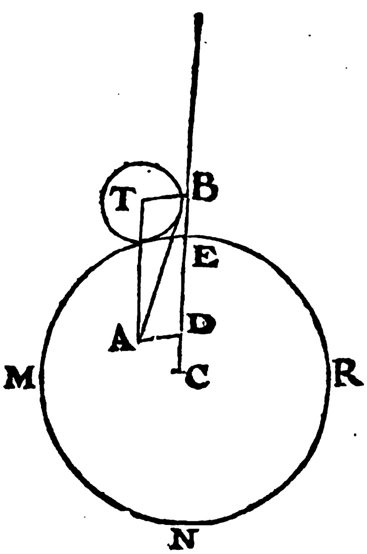
(e) * *Si quis objiciat* &c. Majora etiam quæ in terrâ concipi possunt corpora haud magnos effectus producent. Sit enim EMNR, tellus cujus centrum C, eaque ponatur sphærica & homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, sublato omni impedimento, ad telluris superficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam BEC; in ipsâ telluris superficie addatur sphæra T, telluri homogenea triumque milliarium sive Leucæ unius marina diametro descripta quam tangat recta BEC; designet EC vim gravitatis in ipsa superficie terræ, & designabit TB gravitatem in ipsa superficie sphæræ T (*prop.* 72. *lib.* I.) gravitas in E, in tellurem erit ad gravitatem in B in eandem, ut BC^2 ad EC^2 (*prop.* 74. *lib.* I.). Quarè ponendo

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ à centris æqualitèr distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantiis accuratè obtineret, prope superficiem planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret.

do BC^2 ad EC^2 ut EC ad BD, recta BD exhibebit gravitatem in terram in loco B, ac proindè completo rectangulo $TBAD$, gravitatis directio erit per diagonalem BA (41. *lib.* 1.). Jam in triangulo rectangulo BAD, est BD ad AD ut radius ad tangentem anguli DBA. Quia verò telluris semidiameter mediocris est fere 1145 Leucarum Marinarum (quarum nempe viginti gradum complent, uno marino milliari singulo gradus minuto respondenti) poni etiam potest recta BD æqualis EC, ideoque erit ad TB, sive BD ad AD ut 2290 ad 1, unde prodit angulus ABD, minuti primi cum dimidio. Si itaque loco sphæræ T, intelligatur mons aliquis cujuscumque figuræ cujus attractio æquipolleat attractioni ipsiusmet sphæræ, pendulum ad radicem hujusce montis constitutum vi montis attractum deviabit à perpendiculo magis quàm minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, si pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpositis trahitur, si densitas partium internarum terræ, major sit quàm densitas partium montis, denique ex Piramidali montium figurâ, aliisque forte causis, hinc admodum difficile ut perturbationes illæ sensibiles fiant nisi in maximis montibus; ut etiam D^{nus} *Bouguer* attractionem montis Chimboraço in Peruvio sensibilem deprehendit. 67.



DE MUNDI SYSTEMATE.

raret. Tandem verò, (f) *per prop.* LXXV. & LXXVI. libri primi & ipsarum corollaria, intellexi veritatem propositionis de quâ hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium sunt (*per corol.* 2. *prop.* IV. *lib.* 1.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad superficies planetarum, aliasve quasvis à centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis veneris circum solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, satellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, satellitis *Hugeniani* circum saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantiâ mediocri veneris à sole & cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis à centro jovis 8′. 16″. satellitis *Hugeniani* à centro saturni 3′. 4″. & lunæ à centro terræ 10′. 33″. (g) computum ineundo inveni quod corporum

(f) * *Per prop.* 75. & 76. *lib.* 1. Ex singularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (*cor.* 1. *prop.* 7.) & gravitatio in singulas corporis particulas æquales, est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis (*per cor.* 2. *prop. ejusdem*). Hinc vis planetæ totius decrescit in duplicatâ ratione distantiarum à centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ constare ponantur (*prop.* 75. *lib.* 1.) & hujusmodi planetæ duo se mutuò trahent vi decrescente in duplicatâ ratione distantiæ inter centra (*per corollaria ejusdem prop.*). Quamvis autem planetæ in progressu à centro ad circumferentiam non sint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ distantiæ (*prop.* 76. *lib.* 1.) si secundùm quamcumque Legem crescat vel decrescat densitas in progressu à centro ad circumferentiam, & similiter hujusmodi planetæ duo sese invicem trahent viribus in ratione duplicatâ distantiarum inter centra decrescentibus.

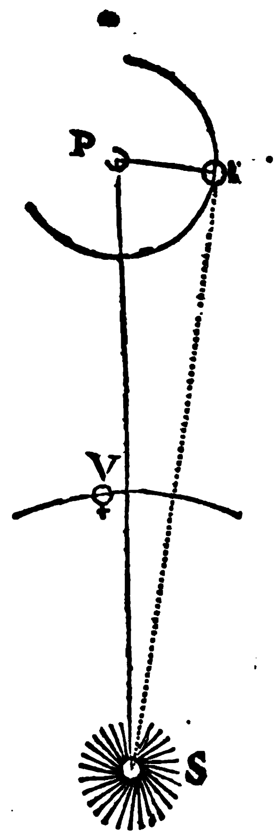
(g) 68. * *Computum ineundo.* * ut hæc omnia ad Algebrica signa revocentur; sit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum alterius Planetæ Primarii, L satelles in maximâ suâ elongatione heliocentricâ quam metitur angulus L S P, unde angulus S L P est rectus. Dicatur tempus Periodicum Veneris t; tempus Periodicum satellitis L circa primarium P dicatur θ. Distantia S P qualiscumque sit, dicatur z; Ratio S P ad S V quæ datur per Phænom. IV. exprimatur per rationem a ad b, inde erit $SV = \frac{bz}{a}$; & Radio existente 1 sinus elongationis maximæ heliocentricæ satellitis L, sive sinus anguli L S P dicatur e; Hinc in Triangulo S L P Rectangulo, erit sinus porum æqualium & à centro solis, jovis, saturni ac terræ æqualiter distantium poudera sint in solem, jovem, saturnum ac terram

sinus totus anguli SLP (I) ad sinum anguli LSP (e) ut latus SP (z) ad latus PL quod erit ergo ez;

Quoniam vis Solis in venerem & vis Primarii in satellitem, sunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I. ut Distantiæ Veneris & Satellitis à Centro Solis & Primarii divisæ per quadrata temporum Periodicorum, sive ut $\frac{bz}{att}$ ad $\frac{ez}{\theta\theta}$, sive, si vis Solis dicatur I, erit vis Primarii $\frac{aett}{b\theta\theta}$.

Sed vis Primarii in satellitem in distantiâ PL, est ad vim quâ in ipsum ageret si tantumdem distaret quantùm distat Venus à Sole, inversè ut quadrata distantiarum, fiat ergo $\frac{I}{e^2z^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2z^2}$ ut $\frac{aett}{b\theta\theta}$ ad $\frac{a^3et}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ & habebitur tandem quod vis Solis in venerem est ad vim Primarii P in satellitem, si tantumdem distaret ab ipso quantum distat Venus à Sole ut I ad $\frac{a^3et}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Jam verò transferantur Venus & Satelles in aliâ quâcumque distantiâ, sed ita ut ambo iterum æqualiter distent à Corpore suo Centrali; Vires quidem Centralium corporum in ipsos mutabuntur, sed eodem modo utrinque mutabuntur; unde manebunt in eâdem ratione ac priùs, nam erit ut quadratum novæ distantiæ ad quadratum prioris distantiæ, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; & in eadem ratione erit vis prior Primarii in satellitem ad ejusdem vim novam, unde alternando, vis Prior Solis in Venerem est ad vim Priorem Primarii in satellitem, ut vis nova Solis in venerem ad vim novam primarii in Satellitem, ergo in qualicumque distantia, si modò æqualiter distent Venus & Satelles à suo Corpore Centrali, vis Solis erit ad vim Primarii ut I ad $\frac{a^3et}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.



Denique, cùm pondera Corporum sint ut Vires Centrales & quantitates materiæ quæ per eas Vires urgentur conjunctim, & in hoc Corollario NEWTONUS supponat *Corpora æqualia & æqualiter à Corporibus centralibus distantia*: Pondera talium Corporum erunt ut Vires Centrales, ideoque Pondus in Solem erit ad Pondus in Primarium qualemcumque ut I ad $\frac{a^3et}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$. 48.

Computus per Logarithmos commodè initur, exempli gratiâ sit P centrum Jovis, & L hujus extimus satelles, est b ad a ut 72333 ad 520096 quorum Logarithmi sunt 4.8593365 & 5.7160855; en e sinus anguli 8′ 16″ cujus Logarithmus est

DE MUNDI SYSTEMATE terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$ (h) respectivè, & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in solem, jovem, saturnum ac terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque idcò in eorum superficiebus, (i) erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè. Quanta sint pondera corporum in superficie lunæ, dicetur in sequentibus.

Corol.

68. —3.3810609 (Radio existente 1) hinc Logarithmus $\frac{ae}{b}$ = —2.2378099, & Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3}$ hujus triplus est — 6.7134297.

Præterea Logarithmus t (sive 224^d. horar. 16 $\frac{3}{4}$, hoc est, horarum 5392 $\frac{3}{4}$) est 3.7318103. Logarithmus θ (sive 16^d. 16$\frac{8}{15}$ horar. hoc est, horarum 400 $\frac{8}{15}$ est 2.6026384 ideoque Log. $\frac{t}{\theta}$ est 1.1291719 & Log. $\frac{tt}{\theta\theta}$ hujus duplus est 2.2583438.

Unde tandem Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est —4.9717735, quæ fractio in Decimalibus potuisset exprimi, sed eam NEWTONUS exprimit unitate divisâ per Denominatorem quemdam, cujus Logarithmus obtinebitur hunc Logarithmum —4.9717735 ex Logarithmo unitatis nempe 0. tollendo, erit ideo 5.0282265 cujus Logarithmi numerus est 1067 ut eum NEWTONUS invenit.

(h) * *Respectivè &c.* * In præcedentibus Editionibus (ante Londinensem) indicabat NEWTONUS hic loci elementa ex quibus rationes verarum Diametrorum Jovis, Saturni & Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis observationibus, quibusdam minutiis immutavit, illa hæc esse nobis videntur.

Primò, Diametrum Solis ex mediocri Terræ distantiâ visam, 32′ 8″ assumit, qualem etiam *Cassinus* in novissimis Astronomicis Tabulis eam constituit, cùm prius 32. 12″ statueretur; tum Diametrum Jovis in mediocri ejus à Tellure distantiâ 37″ facit qualem eam prodiisse sub finem primi Phænomeni dicit, cùm prius fieret 40″. Ex his, cùm distantia mediocris Solis (sive Telluris n. 53.) à Jove sit ad mediocrem distantiam Solis à Terrâ ut 520096 ad 100000 (*per Phænom. IV.*) & Diametri veræ Sphærarum sub parvis angulis visarum sint directè ut anguli sub quibus videntur, & ut Distantiæ ex quibus spectantur, erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Jovis ut 1928″ × 100000 ad 37″ × 520096 sive 10.000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, Diametrum Saturni in mediocri ejus à Sole sive Tellure distantiâ assumit 16″, quem 22″ in prioribus Edit. faciebat: inde cùm distantia ejus mediocris à Sole sive Tellure, sit ad mediocrem distantiam Solis à terrâ ut 954006 (*Phæn.* IV.) ad 100000 erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Saturni ut 1928″ × 100000 ad 16″ × 954006, sive 10000 ad 791.

Denique Parallaxim Solis, in distantiâ ejus mediocri 10″ 30‴ constituit, Parallaxis verò Solis est ipsa semi-Diameter Terræ è Sole visa, ergo Diametri veræ Solis & Terræ sunt ut Diameter Solis apparens ad duplum Parallaxeos Solis, hoc est, 1928, ad 21, sive ut 10000 ad 109 proximè.

(i) * *Erunt ut*; * Ut insistere pergamus ei Analysi quâ NEWTONUS usus esse videtur, assumptis omnibus ut in Nota 68.

Tangens semi-Diametri apparentis Solis dicatur s, Radio existente 1.

Sinus Parallaxeos Solis (quæ est semi-Diameter primarii P è Sole visi) dicatur p.

Vera semi-Diameter Primarii dicatur d.

Erit ex naturâ Parallaxeos p ad 1 sicut d ad-

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in planetis singulis. Nam quantitates materiæ in planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in sole, jove,

68.

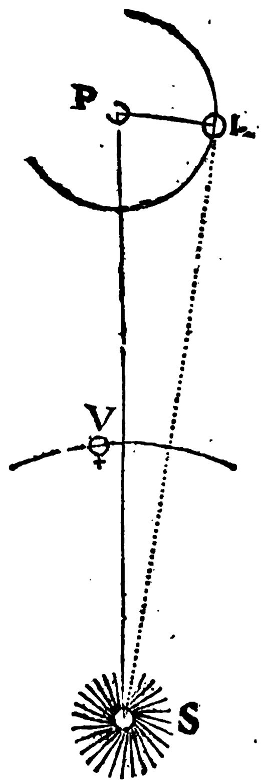
d ad P S quæ dicebatur z, quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter sicut 1 ad s, distantia z sive $\frac{d}{p}$ ad semidiametrum veram Solis quæ erit $\frac{sd}{p}$.

Rursus Parallaxis satellitis L dicatur q. Ex naturâ Parallaxeωn erit q ad 1 ut d ad P L, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ & numerus semi-Diametrorum Primarii P in ea linea P L contentus erit $\frac{1}{q}$, & cùm singula semi-Diameter è Sole spectata, videatur sub angulo cujus sinus est p, propter istorum sinuum parvitatem, anguli erunt ut sinus, & sinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur e continebit sinum p numero vicium qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideoque erit $e = \frac{p}{q}$.

Si autem fingatur Corpus in Solis superficie positum, quod itaque ab ejus Centro distet quantitate æquali ejus veræ semi-Diametro $\frac{sd}{p}$, vis Solis in id Corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eamdem distantiam à Centro ejus Primarii positi ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ per not. 68, sive substitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco e^3, ut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Sed hæc vis Primarii in id corpus, erit ad vim ejusdem corporis in superficie Primarii positi inversè ut Quadrata distantiarum, sive inversè ut Quadrata Diametrorum verarum Solis & Primarii, sive erit $\frac{p^2}{s^2d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ sicut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ad $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ quæ quantitas exprimet vim Primarii



in corpus in suâ superficie positum, dum vis Solis in Corpus æquale in suâ superficie etiam positum erit 1: Quæ quantitas $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est æqualis quantitati $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (quæ vim in æqualibus distantiis exprimit) divisæ per $\frac{p^2}{s^2}$. Sed ob æqualitatem corporum vires in Corpora sunt ut Pondera Corporum; hinc ergo habetur ratio Ponderis Corporum æqualium in superficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare si Logarithmis utamur; Ex Logarithmo p tollatur Logarithmus s, & residui duplum tollatur ex Logarithmo numeri jove, ſaturno ac terrâ ſunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivè. Si parallaxis ſolis ſtatuatur major vel minor quàm 10''. 30''', (k) debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

Corol. 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, *per prop.* LXXII. *lib.* I. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates (l) ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè, & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400. (m) Denſitas terræ

68. meri qui exprimebat vim Primarii in æqualibus diſtantiis, reſiduum erit Logarithmus vis Primarii in Corpora in ejus ſuperficie poſita.

Calculus iſte reſpectu Terræ commodè fieri poteſt, quia datur ex obſervatione Parallaxis Solis p, & apparens Solis ſemidiameter: In Jove & Saturno Parallaxis ipſorum eſt æqualis eorum ſemidiametro apparenti in mediocri ipſorum diſtantiâ, & ſemidiameter apparens Solis in ipſis eſt ad ſemidiametrum Solis apparentem in terrâ, inversè ut diſtantiæ eorum & Terræ à Sole.

(k) *Debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ* Parallaxeωn *ratione.* * Nam cùm quantitates materiæ in Planetis ſingulis, ſint ut eorum vires in æqualibus diſtantiis; Quantitas materiæ in Sole eſt ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, manente ergo ratione a ad b diſtantiarum nempe Terræ & Veneris à Sole, manentibus temporibus Periodicis Veneris & Lunæ t & θ, & ſinu Parallaxeos Lunæ q, liquet quod ſi varietur ſinus Parallaxeos Solis p & ex novis obſervationibus, putà ex obſervatione tranſitus Veneris ſuper diſcum Solis, alia Parallaxis cujus ſinus ſit π deprehendatur, eo caſu invenietur quantitas materiæ in Sole ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 \pi^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, itaque quantitas materiæ terræ in præcedenti Hypotheſi Parallaxeos p reperta, erit ad eam quæ tunc invenietur ut p^3 ad π^3 ſive (ob exiguitatem angulorum Parallacticorum) ut cubi Parallaxeωn.

(l) * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas & inæquales ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri (loco cit.), & pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & æquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt ut quantitates materiæ in ſphæris, hoc eſt, ut denſitates ſphærarum (2. *lib.* 1.). Undè pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & inæquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione denſitatum & diametrorum ſphærarum, conſequenter denſitates ſphærarum ſunt pondera illa directè & ſphærarum diametri inversè.

(m) * *Denſitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi Solis* &c. * Ratio Ponderum in ipſis ſuperficiebus Solis & Terræ exprimebatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (denominationibus iiſdem terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi solis , sed determinatur per parallaxin lunæ , & propterea hic rectè definitur. Est igitur Sol paulò densior quàm Jupiter, & Jupiter quàm Saturnus, & terra quadruplò densior quàm Sol. Nam per ingentem suum calorem sol rarescit. Luna verò densior est quàm terra, ut in sequentibus patebit.

LIBER TERTIUS. PROP. VIII. THEOR. VIII.

Corol. 4. Densiores igitur sunt planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic (n) enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter saturno, & terra Jove. In diversis utique distantiis à sole collocandi erant planetæ, ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret; si in orbe Mercurii, in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, (o) septuplo densior est in orbe Mercurii quàm apud nos: & thermometro

dem adhibitis quæ in Notis (g) & (i) assignantur. Densitates veró sunt ut illa pondera applicata ad sphærarum Diametros vel semi-Diametros; semi-Diameter vera Solis erat $\frac{sd}{p}$, & semi-Diameter vera terræ erat d; Quare densitates Solis & terræ erant ut $\frac{1}{\frac{sd}{p}}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2 d} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ sive ut 1 ad $\frac{a^3 ss}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, in quâ quantitate Parallaxis Solis, quæ dubia est, non amplius adhibetur, sed tantum quantitates de quibus constat apud Astronomos, Parallaxis nempe Lunæ, semi-diameter apparens mediocris Solis, Ratio distantiarum terræ & Veneris à Sole, & ratio temporum Periodicorum Veneris & Lunæ, quare ea *Densitas terræ hic rectè definitur.*

(n) * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera in earum superficiebus ad sphærarum diametros applicata, ideóque pondera ut densitates & sphærarum diametri conjunctim, si densiores sint planetæ qui sunt minores; minor diameter in variis planetis per majorem densitatem quâdam ex parte compensabitur, ac proinde vis gravitatis in variorum planetarum superficiebus ad æqualitatem magis accedet quàm si planetæ omnes vel densitate æquales forent, vel planetæ majores forent minoribus densiores.

(o) * *Septuplo densior est.* Nam (14. lib. 1.) densitas lucis decrescit in ratione duplicatâ distantiarum à Sole, sed (phæn. 4.) distantia terræ est ad distantiam Mercurii ut 1000 ad 387. proximè. Est igitur densitas lucis in Mercurii ad densitatem lucis in terrâ ut 1000000 ad 149769 seu ut 6,68 ad 1, hoc est ferè ut 7 ad 1.

* Addit NEWTONUS: *Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit*: hæc videntur referri ad n. 270 Transactionum Philosophicarum, qui continet scalam de caloris gradibus, ingeniosè sane constructam, cujus author non indicatur: « Constructa fuit hæc Tabula ope Thermometri & ferri candentis. Per Thermometrum ex oleo lini constructum inveni (inquit author) quod si oleum ubi Thermometer in nive liquef-

DE MUNDI SYSTEMATE.

metro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium verò non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cùm materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PRO-

68. «cente locabatur (computus enim in hac «Tabula inchoatur à calore quo aqua in«cipit rigeſcere tanquam ab infimo calo«ris gradu ſeu communi termino caloris «& frigoris) occupabat ſpatium partium «10000 idem oleum calore corporis hu«mani rareſactum occupabat ſpatium «10256 & calore aquæ jamjam ebullire in«cipientis ſpatium 10705 & calore aquæ «vehementer ebullientis 10725, & calore «ſtanni liqueſacti ubi incipit rigeſcere «11516 &c.; Rareſactio aëris æquali calo«re fuit decuplo major quàm rareſa«ctio olei quaſi quindecim vicibus major «quàm rareſactio ſpiritus vini. Et ex his «inventis ponendo calores olei ipſius ra«reſactioni proportionales & pro calore «corporis humani ſcribendo partes 12 pro«diit calor aquæ ubi vehementer ebullit «partium 34 ». In eâdem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aeris æſtivi 4, 5, vel 6. Quare medium aſſumendo, eſt ut quinque ad 34 ſive proximè ut 1 ad 7, ita calor aeris æſtivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo ſeptuplus eſt caloris aeris æſtivi ſecundum aſſertum Newtonianum.

Diſputari autem poſſet, quod calor rareſactioni olei proportionalis ſupponatur abſque ſufficienti ratione, & quod terminus à quo rareſactio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigeſcere) ſit ad arbitrium aſſumptus; cùm ea rareſactio numerari debuiſſet ab abſoluto frigore, eo nempe frigoris & gradu quo partes olei nullam ulteriorem compreſſionem per vim frigoris pati poſſent, qui gradus eſt ignotus; At hujus Tabellæ conſtructio, ingenioſè demonſtratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; Locavit enim ferrum candens in vento uniformiter ſpirante, ut aer à ferro caleſactus ſemper abriperetur à vento, & aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu ſuccederet, ſic enim aëris partes æquales æqualibus temporibus caleſactæ ſunt & concipiebant calorem calori ferri proportionatam; Hinc ſi dividatur tempus refrigerii ferri in inſtantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi inſtantis, ad calorem durante eo inſtanti amiſſum: ſic calor ferri initio ſecundi inſtantis ad calorem durante eo ſecundo inſtanti amiſſum, &c. ideóque fingatur lineam rectam duci cujus abſciſſæ deſignent tempora; ordinatæ in extremis abſciſſis erigantur, quæ calores ferri ſingulis momentis deſignent; differentiæ earum ordinatarum erunt iis ipſis ordinatis proportionales Geometricè, ideóque curva per earum ordinatarum vertices tranſiens erit Logarithmica, creſcentibus ergo temporibus Arithmeticè, calor ferri Geometricè decreſcit & propterea calorum eorum Geometrica ratio per Logarithmorum tabulam haberi poterit.

Quo ſuppoſito, imponebat Autor candenti ferro particulas diverſorum metallorum, & aliorum corporum liquabilium, & notavit tempora refrigerii donec particulæ omnes amiſsâ fluiditate rigeſcerent, & tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, biſmuthum, ſtamnum, plumbum, Regulus ſtibii, eorumque variæ miſcelæ liqueſcunt, innotuêre, ſive eorum Geometricæ rationes, cùmque calores ita inventi eamdem habuerint inter ſe rationem cum caloribus per Thermometrum inventis, propterea rectè aſſumptum fuit, rareſactiones olei ipſis caloribus eſſe proportionales.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo à superficiebus planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum à centro quam proximè.

Si materia planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc propositio accuratè: *per prop.* LXXIII. *lib.* I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

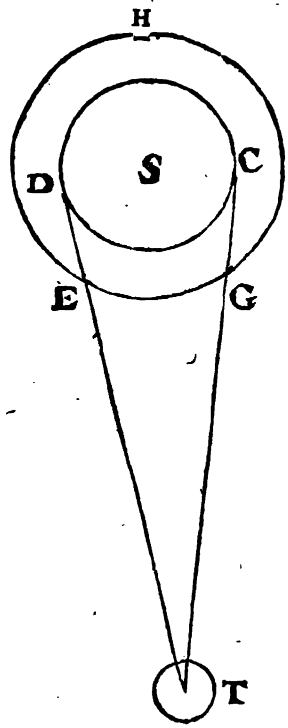
PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus planetarum in cœlis diutissimè conservari posse.

In scholio propositionis XL. *lib.* II. ostensum est quod globus aquæ congelatæ, in aëre nostro liberè movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentiâ aëris amitteret motûs sui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum terræ nostræ densiorem esse, quàm si totus ex aquâ constaret, sic colligo. Si globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quàm aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent. Eâque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, si rarior esset quàm aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppositâ. Et par est ratio terræ nostræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc si densior non esset, emergeret ex maribus, & parte sui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppositam confluentibus. Eodem argumento (p) maculæ solares leviores sunt quàm materia lucida solaris cui supernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materia omnis gravior, quo tempore

(p) 69. *Maculæ Solares.* Si radii Solares telescopio duobus vitris instructo excipiantur, locusque circumpositus obscuretur, inversa Solis imago suprà chartam ad axem telescopii normalem pingitur, & maculæ conspiciuntur; quæ nunc emergere, nunc evanescere observantur. Maculas illas in materiâ Solari supernatare vel saltem Soli quàm proximas esse certum est. 69.

DE MUNDI SYSTEMATE. pore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cùm terra communis suprema quasi duplo gravior sit quàm aqua, & paulò inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quòd copia materiæ totius



69. Sit enim Sol in S, ex Tellure T visus sub angulo D T C 32'. Si macula orbitam aliquam H E G H extrà Solis superficiem describeret, non videretur Solis discum ingredi antequam ad E pervenisset ubi recta T E D ex terrâ ducta discumque Solis tangens, maculæ orbitam secat, & ductâ T G C Solem quoque tangente, per Solis superficiem tantummodò progredi videretur, quandiù describeret arcum E G qui semiperipheriâ minor est, ideòque arcus ille tempore quod semiperiodo minus est, percurreretur. Sed ex observationibus notum est quamplures maculas duas aut tres integras periodos absolvisse 27 dierum spatio atquè 13 ½ dies impendisse ut à limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergò macularum orbitæ vel in ipsâ superficie Solari extiterunt, vel Soli fuerunt proximæ.

* NEWTONUS hic loci receptam opinionem sequitur, maculas Solares ipsi Solari superficiei inhærere; quæ opinio his tribus argumentis nititur; 1°. Quod illæ maculæ in medio Solis disco latiores videantur quàm juxta ejus limbum ubi angustissimæ apparent; & quidem hoc demonstrat maculas eas non esse Planetas rotundos, ut quidam volebant, sed esse corpora lata, non verò spissa, & à Sole non multum distare: nullomodo tamen exinde probatur eas esse in ipsâ superficie Solis: 2°. Argumentum est, Quòd spatium quod maculæ emetiuntur in medio disco Solis diurno spatio, sit proportionatum revolutioni ipsarum, quod majus esse debuisset si forent cis Solem, sed rursus hoc argumentum proximitatem macularum superficiei Solis, non verò earum ipsi superficiei Solis adhærentiam probat.

Denique asserit *Keillius* (Lection. Ast. V.) observationibus constare, maculas quæ integram revolutionem 27 dierum absolvunt, tredecim cum semisse dies impendere ut à limbo Occidentali Solis ad Orientalem perveniant, unde meritò concludit quod cùm dimidium tempus Periodi suæ in transcurrendo Solis disco impendant, ipsarum orbita in ipsâ superficie Solari extet: At *Wolfius* (Act. n°. 413.) Quoniam, inquit, maculæ Solares tribus circiter diebus diutius post Solem latent quàm Hemisphærium nobis conspicuum peragrantes consumunt, Soli quidem proximæ sunt, non ipsi tamen superficiei Solari inhærent, sed aliquam ab eâ distantiam habent.

Et quidem in Astronomorum fastis quæ in

tius in terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aquâ constaret; præsertim cùm terram quasi quadruplo densiorem esse quàm jovem jam ante ostensum sit. Quare si Jupiter

693

in manibus venerunt, nunquam deprehendi, maculam per tredecim super discum Solis actu visam fuisse, nullam reducem ante decimum quintum diem observatam; & quidem cùm anno 1739 plurimæ maculæ Solis discum percurrerent, multasque ab ingressu ad egressum usque persequerer, nulla integros tredecim dies in disco perstare mihi visa est; Cùm autem quæstio hæc tota, sit de facto, referam observationes duas quæ accuratissimè institutæ videntur; desumetur altera è Transactionibus Philosophicis Anglicanis n. 294, altera è Diario Eruditorum ad annos 1676. 1677.

"15. Maii anni 1703 Septempedali Telescopio circa Centrum Solis maculam detexit D^{nus}. *Stannyan*: eamdem observavit diebus sequentibus, & 22. Maii mane jam admodum vicinam limbo Solis eam vidit; 23ª. Maii horâ sextâ matutinâ appulerat ad ipsum limbum Solis, angusta & tenuis, similis aristæ, & ejus distantia à limbo Solis non excedebat ipsius maculæ parvam Diametrum. Octava, Decima, Duodecimaque hora illam adhuc videbat; secunda hora ipsi circumferentiæ applicata erat, nec visibilis ipsi fuisset nisi totâ die oculos in ipsam intentos habuisset; Quarta denique hora nullum ejus vestigium telescopio decem & octo pedum optimo apparebat,. unde statuendum illam omninò è Sole exivisse hora 3ª. post Meridiem 23^æ. diei Maii.

Tertiâ Junii & sequentibus diebus ad observationes rediit noster, usus Telescopio decem & octo pedum; tandem die septimâ Junii, horâ tertiâ pomeridianâ, eamdem maculam (ut postea certior ejus factus est) Solis discum subeuntem vidit; horâ quartâ decem & octo pedum Telescopio Sole lucidissimo eam distinctè vidit, sed tenuem admodum & Ellipticâ atmosphærâ cinctam, sequentibus verò diebus ex via cui institit, eamdem esse quam prius viderat agnovit, & eam est persecutus sequentibus diebus, donec tandem 18. Junii tenuis apparere incepit; die verò decimâ nonâ ab horâ 5^{ta}. matutinâ eam observare cæpit Telescopio decem & octo pedum ferè singulis semihoris; horâ duodecimâ Atmosphærâ & sensibili latitudine spoliatam vidit, & adeo vicinam Solis limbo, ut vix inter ipsam & limbum Solis lucis radius perciperetur; horâ secundâ evanescebat, ita ut horâ secundâ cum semisse evanuisse censenda sit.

Ergo à 23. Maii horâ tertiâ pomeridianâ ad septimam Junii eâdem horâ latuit macula, per integros scilicet quindecim dies; ab eo tempore ad 19 Discum pertransivit, per duodecim nempe dies.

Altera observatio Ill^{mi}. *Cassini* huic omninò congrua exstat in primo Eruditorum diario anni 1677., Illic exhibet *Cassinus* figuram maculæ quæ 30. Octobris 1676. observari cæpit, evanuit Novembris 3ª. Iterum conspicua facta est quindecim post dies, nempe 18ª. Novembris; evanuit verò post duodecim dies, nempe horâ quartâ diei 30^æ. Novembris, observationibus magnâ curâ institutis ad singulas ferè horas, postea verò 15ª. Decembris horâ meridianâ cum semisse, Telescopio 35. pedum in limbo orientali Solis visa est, ut instar lineæ obscuræ nec aliis Telescopiis observari poterat, sequentibus verò diebus facile videri potuit; hinc per quindecim dies maculas latere, per duodecim dies Solis discum transcurrere liquet.

Ex quibus sequitur, æqualitatem temporum occultationis & apparentiæ macularum, observationibus non constare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quâdam quantitate à Solis disco distare maculas deducatur, & quidem cùm differentia temporum eorum sit circiter dierum trium, in singulo quadrante erit horarum decem & octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; sed sinus versus decem graduum sunt 15. Centesimæ Radii; hinc tandem deducetur quod semi-Diameter Solis sit ad semi-Diametrum

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic (q) ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, (r) amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motûs ſui partem ferè decimam. Verùm cùm reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior eſt quàm argentum vivum, minus reſiſtat in eâdem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quàm aqua, minus reſiſtat in eâdem ratione: ſi aſcendatur in cælos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad *prop.* XXII. *lib.* II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, (ſ) aër ibi rarior foret quàm ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,0000000000003998, ſeu 7500000000000 ad 1 circiter. Et

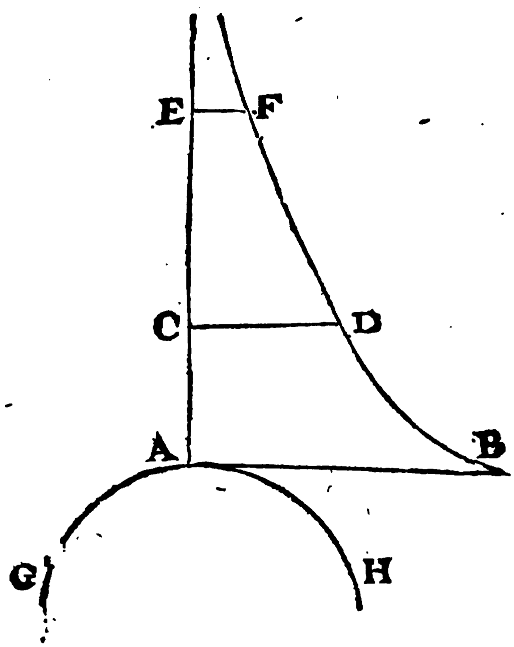
69. trum circuli quem deſcribunt maculæ ut 85 ad 100 ſive ut 17 ad 20, & maculæ quindecim circiter ſemi-Diametris terræ ſupra Solis ſuperficiem emineant: Hinc idem *Volfius* eas eſſe Nubes in Solis Atmoſphærâ elatas, conjectatur; quæ quidem fuerat *Kepleri* ſententia.

(q) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circà Solem deſcribit, multiplicetur per 30 & factum dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis in mediocri ejus diſtantiâ à terrâ, quotus erit numerus ſemidiametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum deſcribit. Poteſt etiam idem inveniri dicendo: ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus, ità 30 dies ad arcum hoc tempore deſcriptum, hic arcus dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis, & quotus erit numerus ſemidiametrorum quas Jupiter 30 diebus deſcribit.

(r) * *Amitteret in medio ejuſdem denſitatis.* (per ſchol. prop. 40. lib. 2. circà finem). Si diameter jovis dicatur D, V velocitas ejus ſub initio motûs, & T tempus quo velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium S quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}D$ ut denſitas Jovis ad denſitatem aeris noſtri, hoc eſt, ut 860 ad 1 circiter Jupiter in aëre noſtro projectus cum velocitate V tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$. Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459\frac{D}{2}$ deſcribit, & denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris noſtri ut 860 ad 1 circiter, erit $1 : 860 = \frac{8}{3}D : S = \frac{6880}{3}D$, & $459\frac{D}{2} : 30^{\text{dies}} = \frac{6880}{3}D : T = \frac{137600}{459}$. Unde ſi ponatur $t = 30$. dieb. erit $T + t = \frac{151370}{459}$, & $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0{,}09096 = \frac{1}{10}$ ferè. Cùm autem Jupiter ſupponatur paulò denſior quàm aqua, minorem adhuc velocitatis ſuæ partem amitteret in aëre noſtro.

(ſ) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus à terrâ diſtantiis eadem ſit, ſintque diſtantiæ in progreſſione arithmeticâ, demonſtratum eſt (*in ſchol. prop.* 22. *lib.* 2.) denſitates fore in progreſſione geometricâ. Hinc patet in variis à terrâ diſtantiis per Logarithmicam exhiberi poſſe varias aëris denſitates. Sit enim F D B Logarithmica, ſumptis abſciſſis A C, A E, in progreſſione arithmeticâ, ordinatæ A B, C D, EF

Et (t) hinc stella Jovis in medio ejusdem densitatis cum aere illo superiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex resistentiâ medii non amitteret motûs sui partem decimam centesimam millesimam. In spatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod resistentiam creet præter aërem, exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentissimè exhaustis gravia intra vitrum liberrimè & sine omni resistentiâ sensibili cadunt; ipsum aurum & pluma tenuissima simul demissa æquali cum velocitate cadunt, & casu suo describendo altitudinem pedum quatuor, sex vel octo, simul incidunt in fundum, ut experien- LIBER TERTIUS. PROP. X. THEOR. X.



E F densitates aëris in locis A, C, E, repræsentabunt (33. *lib.* 2.) Quarè datis altitudinibus A C, A E, & ratione $\frac{AB}{CD}$, innotescet ratio $\frac{AB}{EF}$. Nam (ex naturâ Logarithmicæ, per cor. 2. theor. 2. de Logarithmicâ) $AC : AE = L.\frac{AB}{CD} : L.\frac{AB}{EF}$, idèóque $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = L.\frac{AB}{EF}$

Jam quia altitudines mercurii in barometro sunt ut pressiones atmosphæræ in diversis ab horizonte distantiis (*prop.* 20. *lib.* 2.) Si aëris densitas compressioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus mercurii in barometro in locis A, C, datâque altitudine A E, dabitur altitudo mercurii in barometro in loco E, ideóque nota erit densitas aëris in E. Ut autem hæc omnia ad præsentem casum transferamus, sit G A H pars superficiei terrestris, altitudo mercurii in barometro in A = 30 poll. distantia A C = 2280 ped. Anglicis & altitudo mercurii in barometro in C = 28 poll. quemadmodum NEWTONUS experimento cognitum supponit. Sit altitudo A E = 200 milliaribus hoc est = 1056000 ped. Anglicis, si milliare sit mensura ped. 5280, erit $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = \frac{1056000}{2280}$ $L.\frac{30}{28} = 13.8750613$ circiter cui Logarithmo in tabulis respondet numerus 75000000000000 erit ergò densitas aëris in A, hoc est, in superficie terræ ad ejusdem densitatem in distantiâ 200 milliarium seu ped. 1056000 ut 75000000000000 ad 1, circiter.

(t) * *Hinc stella Jovis.* Densitas Jovis est ad densitatem aëris illius superioris ut 860 × 75000000000000 ad 1. Hinc

DE MUNDI SYSTEMATE.

perientiâ compertum est. Et propterea si in cœlos ascendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ sine omni resistentiâ sensibili per spatia illa diutissimè movebuntur.

HYPOTHESIS I.

Centrum systematis mundani quiescere.

Hoc ab omnibus concessum est, dum aliqui terram, alii solem in centro systematis quiescere contendant. Videamus quid inde sequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis terræ, solis & planetarum omnium quiescere.

Nam centrum illud (*per legum corol.* IV.) vel quiescet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo semper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypothesin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.

Nam cùm (*per corol.* 2. *prop.* VIII.) materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & distantia Jovis à Sole sit ad semi-

70. $1 : 860 \times 7500000000000 = \frac{8}{3} D : S = 17200000000000000 : D$, & $459 \frac{D}{t}$ est ad 17200000000000000, ut anni pars duodecima seu $\frac{1}{12}$ ad $T = \frac{8600000000000000}{1367}$, annis $= 6300000000000$ ferè.[1] Ponatur $t = 1000000$ annis, & erit pars motûs amissa tempore $t = \frac{t}{T+t} = \frac{1000000}{6300000000000+1000000} = \frac{1}{6300000+1} = \frac{1}{6300000}$ ferè.

LIBER TERTIUS. PROP. XII. THEOR. XII.

ſemidiametrum Solis in ratione paulò majore(†); incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum (u) paulo ſupra ſuperficiem Solis. Eodem argumento cùm materia in Sole ſit ad materiam in Saturno ut 3021 ad 1, & diſtantia Saturni à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulò minore: incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum (x) paulò infra ſuperficiem Solis. (y) Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, ſi terra & planetæ omnes ex unâ Solis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ Solis diametro à centro Solis diſtaret. (z) Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cùm centrum illud gravitatis perpetuò quieſcit, Sol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longè recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum terræ, Solis & planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cùm terra, Sol & planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motûs perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet, in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet Soli. Cùm autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum Solis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modò Sol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

PRO-

(†)* *Et diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore*, * cùm ſemi-Diameter Solis è tellure viſa ſit 16′ 4″ & diſtantia Terræ à Sole ſit ad diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52 circiter, ſintque anguli ſub quo idem objectum videtur è diverſis diſtantiis, reciprocè ut illæ diſtantiæ fere, erit 52 : 10 = 16′ 4″ : ad ſemi-Diametrum Solis è Jove viſam, quæ itaque erit 3′. 5″ circiter: fingatur ergo Triangulum Rectangulum cujus vertex ſit in Jove & baſis ſit Solis ſemi-Diameter, angulus verticis erit 3′ 5″; Ideóque (per Tabulas Tangentium,) baſis ejus continebitur in ejus altitudine 1115 vicibus; hinc diſtantia Jovis à Sole eſt ad ſemi-Diametrum Solis, ut 1115 ad 1, ideóque in ratione paulò majore quàm ratio 1067 ad 1, hoc eſt, quàm ratio materiæ in Sole ad materiam in Jove. 70;

(u)* *Paulò ſuprà ſuperficiem Solis* (60. lib. 1.).

(x)* *Paulò infrà ſuperficiem Solis* (ibid.)

(y)* *Et ejuſdem calculi veſtigiis* (61. lib. 1.).

(z)* *Aliis in caſibus.* Si nempè ad diverſas Solis partes planetæ conſiſtant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit, hinc centrum gravitatis quaſi medio loco iis in caſibus poni debet, minor itaque ſit centrorum diſtantia.

Ri-

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis; & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera planetarum in ſolem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Solis; ſi Sol quieſceret & planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (*per prop.* I. & XI. *& corol.* I. *prop.* XIII. *lib.* I.) actiones autem planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in ellipſibus circa ſolem mobilem minùs perturbant (*per prop.* LXVI. *lib.* I.) quàm ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem eſt ad gravitatem in ſolem (paribus diſtantiis) ut (a) 1 ad 1067; ideoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam diſtantia Saturni à Jove eſt ad diſtantiam Saturni à Sole ferè ut 4 ad 9, (b) erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1067 ſeu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in ſingulis planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem aſtronomi hæreant. Pro (c) vario ſitu planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur, nunc diminui-

75. 71. Quoniam Sol pro diverſo planetarum ſitu diverſimodè agitatur, motu quodam libratorio lentè ſemper errabit, nunquam tamen integrâ ſui diametro à centro quieſcente ſyſtematis totius recedet. Quia verò Solis & planetarum ponderibus (*per cor.* 1. *prop.* 8.) inventis, datoque ſitu omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. *lib.* 1.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propoſitum.

(a) * *Ut* 1 *ad* 1067 (cor. 2. prop. 8.).

(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (prop. 8.)

(c) * *Pro vario ſitu planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium eſſe patet (*per cor.* 6. 7. 8. 9. *prop.* 66. *lib.* 1.).

minuitur, aphelium nunc promovetur, nunc fortè retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. (d) Error tamen omnis in motu ejus circùm solem à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari ferè potest constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (*per prop.* LXVII. *lib.* I.) & propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In (e) conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ seu 156609, ideoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem Jovis in Solem ut 65 ad 156609 seu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longè minor est quàm ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longè minores (f) præterquam quod orbis terræ sensibiliter perturbatur à Lunâ. (g) Commune cenrrum gravitatis terræ & Lunæ, ellipsin circum solem in umbilico positum percurrit, & radio ad solem ducto areas in eâdem temporibus proportionales describit, terra verò circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

PRO-

(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem ferè errorem, orbis Saturni umbilicus (*per prop.* 67. *lib.* 1.) locetur in communi centro gravitatis Jovis & Solis, Theoria Saturni juxtà hanc hypothesim constituta satis accuratè congruit cum phænomenis, ità ut error qui ex hâc hypothesi oritur, ubi maximus est, vix superet minuta duo prima, & error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major observetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutuâ planetarum perturbatione hactenus dicta sunt.

(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis & Saturni, distantia Saturni à Sole, Saturni à Jove, & Jovis à Sole sunt inter se ut 9, 4 & 5, circiter, gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ & $\frac{3021}{25}$ (*per cor.* 1. *prop.* 8.) hoc est, ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$.

(f) * *Præterquam quod orbis terræ.* Orbem terræ sensibiliter perturbari à lunâ ostendetur deinceps ubi vis lunæ definietur.

(g) * *Commune centrum gravitatis terræ & lunæ.* (prop. 65. lib. 1.).

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium aphelia & nodi quiescunt.

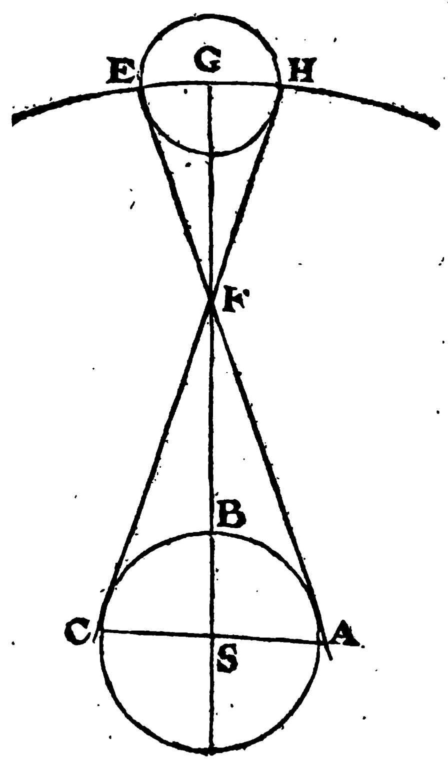
Aphelia quiescunt, *per prop.* XI. *lib.* I. ut & orbium plana, per ejusdem libri *prop.* I. & quiescentibus planis quiescunt nodi. Attamen à planetarum revolventium & (h) cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam stellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia modosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque (i) cùm nulla sit earum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam cor-

72. (h) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorsus modo quo planetæ in se invicem agunt; patet quoque cometas in alios planetas agere similesque effectus producere, sed cùm observationes Astronomicæ ostendant apheliorum nodorumque motum esse tardissimum, ob parvitatem contemni possunt inæqualitates quæ ex planetarum & cometarum actionibus in se invicem oriuntur.

(i) * 72. *Cùm nulla sit earum parallaxis.* In hypothesi terræ motæ, quiescentibus Sole & stellis, tellus integram revolutionem absolvit spatio 23. hor. 56'. 4''. circiter, & circà solem revolvitur unius anni intervallo; circulumque describit qui ecliptica vel orbis annuus appellatur. Referat S solem, sit F stella fixa in Eclipticæ plano ad distantiam quamlibet constituta; Sit A B C D orbis annuus, ponaturque tellus primùm in loco A, deindè post sex menses perveniat ad locum C, in quo distet à loco A totâ diametro orbis annui; hoc est, 20000 terræ diametris circiter, ità ut anguli F S A, F S C sint recti, stella F ex tellure A visa respondebit puncto E, quod ad distantiam infinitam à terrâ removeri supponitur. Deindè eadem stella ob motum terræ ab A versùs B, progredi videbitur ab E versùs G, donec tellure perveniente ad C stella videatur in H; distans scilicet è loco in



quo

corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, *per prop.* LXX. *lib.* I.

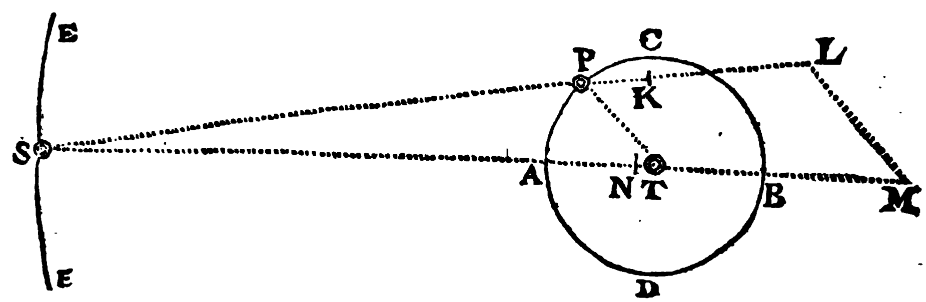
LIBER TERTIUS. PROP. XIV. THEOR. XIV.

quo ante sex menses versabatur, toto arcu EH, cujus mensura est angulus EFH vel AFC. Hujus anguli semissis AFG, est parallaxis orbis annui ex terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo AFS, facilè invenitur distantia stellæ fixæ à terrâ AF, si fiat, ut sinus anguli AFS, ad sinum totum, ità AS Semidiameter orbis annui, quæ est 10000 diametrorum terræ circiter ad AF. Jam verò patet ex telluris annuo motu oriri debere translationem fixarum inter se parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At stellæ majores & propiores respectu remotiorum quæ telescopiorum ope duntaxat conspici possunt, moveri non observantur. Nulla est itaque fixarum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, ideòque immensa est fixarum à tellure distantia. Sivè autem terra moveatur, sivè quiescat, stellas fixas immensis intervallis à terrâ distare certissimum est, nam parallaxim annuam minuto primo longe minorem esse consentiunt omnes Astronomi. Fingamus verò annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim esse uniùs minuti primi, à tellure distabit stella illa 3437 semi-Diametris orbitæ quam describit terra, siquidem sinus unius minuti est ad Radium ut 1 ad 3437, & si semi-Diameter orbitæ sit 20000 semi-Diametrorum terræ, ad minimum 68740000 terræ ipsius semi-Diametris distabit fixa à Tellure.

73. *Christianus Hugenius* in Cosmotheoro *lib.* 2. aliam excogitavit methodum quâ rationem distantiæ fixarum ad distantiam Solis conjectando investigaret. Supponit itaque Sirium, quæ stella est inter alias fulgentissima, Soli circiter æqualem esse. Deindè tentavit quâ ratione Solis diametrum ità imminuere posset ut non major aut splendidior Sirio appareret. Quod ut assequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occlusit lamellâ tenuissimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totiùs ut 1 ad 182. Cùm verò particula illa Sirio splendidior adhuc appareret, foramine globulum vitreum ejusdem cum foramine diametri objecit, talisque foci globulum selegit ut lux Solis ad oculum transmissa non major aut splendidior videretur eâ quam à Sirio emissam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particulæ Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totiùs. Quarè Sol instar sirii appareret, si conspicua foret pars diametri totiùs Solaris tantùm $\frac{1}{27664}$, distantia autem Solis à terrâ, in quâ tantillus videretur, foret ad distantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, divisâque apparente Solis diametro mediocri per 27664, foret diameter Solis 4''' circiter. Hinc sirii quoque distantia à terrâ est ad distantiam Solis ab eâdem ut 27664 ad 1 & diameter apparens Sirii 4'''. Jam distantia Solis à terrâ, si Parallaxis Solis ponatur 10'' 30''' est ferè 20000 semid. terrestrium, erit ergo distantia Sirii 553280000 semid. terrestr. Si verò distantiam mediam Saturni à terrâ constituamus 190800 semid. terrestr. prodit distantia inter Saturnum & Sirium 553089200 semid. terrestr. 73.

Scholium.

Cùm planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem; horum aphelia & nodi quiescent, nisi quâtenus à viribus Jovis, Saturni & corporum superiorum turbentur. Et (a) inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu fixarum, idque in propor-



74. (a) 74. * *Et indè colligi potest.* Designet S Planetam aliquem superiorem, puta Jovem, cujus Orbita E S E; sit T Sol, P Planeta aliquis inferior; ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium systema revolvi circà corpus T manentibus orbium E S E & P A B formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutentur verò utcumque magnitudines, & per theoriam gravitatis colligitur (*cor.* 15. *&* 16. *prop.* 66. *& not. in eadem corollaria*) errores angulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideóque & motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P esse ut quadratum temporis periodici quàm proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis Planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos, ut hic assumit NEWTONUS, errores integri eo tempore descripti erunt ut errores singulâ revolutione commissi & ut numerus revolutionum sæculo integro peractarum, ille numerus revolutionum est inversè ut tempus periodicum, & errores (qui sunt, ut dictum est, directè ut quadratum temporis Periodici) ergo errores Apheliorum durantibus centum annis erunt in simplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica Planetarum P sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro T, (*per phæn.* 4.). Sunt ergò errores Planetarum inferiorum in hâc ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro Solis. Quare si ponatur eum esse aphelii Martis progressum ut in annis centum conficiat 33′ 20″ in consequentia respectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis à NEWTONO definitur, dicendo: ut Radix quadrata cubi distantiæ martis ad Radicem quadratam cubi distantiæ terræ à Sole, ita 33′ 20″ ad motum Aphelii terræ annis centum. Quamvis autem ex ipsâ gravitatis theoriâ colligatur planetarum inferiorum aphelia nunc promoveri, nunc retrahi, medios tamen apheliorum motus notabili aliquo tempore in consequentia fieri, patet ratiocinio simili illi quod de Lunâ factum est in notâ c. p. 24. hujusce, unde facile constabit reverâ medium motum resultantem post centum annos esse ut

portione sesquiplicatâ distantiarum horum planetarum à Sole. Ut si aphelium Martis in annis centum conficiat $33'. 20''$ in consequentia respectu fixarum, aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient $17'. 40''$, $10', 53''$, & $4'. 16''$ respectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc propositione.

PRO-

ut ipsa tempora periodica; ideóque in ratione sesquiplicatâ distantiarum à Sole, secundùm ea quæ dicuntur in *cor.* 16. *prop.* 66. *lib.* 1., &c. De præsenti scholio hæc dicta sint. Sed prætermittenda non sunt verba doctissimi Viri *Joannis Bernoullii* cujus authoritatem maximè veneramur. Sic ferè habet Clariss. Autor in Dissertatione de Systemate Cartesiano quæ anno 1730. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecorata fuit, Paragrapho XLI. «((NEWTONUS supponit motum aphelii Martis in consequentia eum «esse ut centum annorum spatio $33'$ $20''$. «conficiat. Hinc colligit per theoriam «gravitatis quod aliorum planetarum in«feriorum aphelia moventur in consequen«tia respectu fixarum, idque in propor«tione sesquiplicatâ distantiarum horum «planetarum à Sole. Nullo fundamento «merâque apparentiâ nixus videtur NEW«TONUS in constituendâ hâc ratione ses«quiplicatâ. Neque enim intelligo, ne«que ut arbitror, plures alii me ipso pers«picaciores intelligunt, quare mutua pla«netarum gravitatio, etiamsi concedere«tur, hanc proportionem postulet. Et «certè hæc eadem gravitatio planè irre«gularem effectum & suæ regulæ contra«rium producit respectu aphelii Saturni, «cùm NEWTONUS ipse statuat in conjun«ctione Jovis & Saturni aphelium illud «nunc promoveri, nunc retrahi. Numquid «de singulis planetis inferioribus idem quo«que statuendum videretur. Nam si talis «admittenda foret attractio, tellus v. gr. «ubi in aphelio versatur, Jovemque res«pectu zodiaci præcedit, retraheretur, & «contra promoveretur ubi Jupiter tellu«rem præcederet. Unde hæc gravitatio «contrarios omninò effectus ante & post «conjunctionem telluris & Jovis produ«ceret. Sed nil tale observatur, idque ex «suâ hypothesi NEWTONUS minime colli«git, sicut facere deberet.)). 74.

* Ex prædictis autem facile respondeni posse videtur Viri Doctissimi quæsitis.

1°. Enim concessâ Planetarum gravitatione, motum Apheliorum Planetarum inferiorum secundùm proportionem sesquiplicatam distantiarum fieri debere, Mathematicè sequitur ex *Corol.* 16. *Prop. LXVI. Lib.* I. ut supra ostensum est, illud autem Corollarium 16. tam ex Sectione nonâ *Lib.* I. quàm ex ipsâ *Prop. LXVI.* legitimè deduci, ex ipso NEWTONO notisque illis locis adjectis probatum credimus.

2°. Quod queritur V. D. eamdem gravitationem contrarium effectum regulæ suæ producere respectu Aphelii Saturni, id vitio vertendum non est Systemati *Newtoniano*, quin è contra egregia procul dubio est ejus confirmatio. Quippe eo ipso quod Saturnus cæteris Planetis sit exterior, ex Systemate *Newtoniano* fluit vim Solis in Saturnum agentem augeri per vim Planetarum interiorum in conjunctione, unde Aphelium ejus debet regredi per Prop. XLV. (quod in Saturno observari, ex ipso *Cassino* didicimus, ut superius notâ c. pag. 23. retulimus) dum è contra Aphelia Planetarum interiorum per vim exteriorum in conjunctione positorum progredi debeant.

3°. Queritur denique quod Aphelia Planetarum inferiorum nunc retrahi, nunc promoveri debeant, quod tamen non observatur; scilicet NEWTONUS statuit quidem Aphelia Planetarum inferiorum in syzygiis promoveri, in Quadraturis retardari, plus promoveri verò quàm retardari, unde in totum progredi videntur; Aphelii autem ea veluti libratio observabilis non

 est;

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire orbium principales diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione subsesquiplicatâ temporum periodicorum, *per prop.* XV. *lib.* I. (b) Deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & planetæ cujusque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter summam illam & Solem, *per prop.* LX. *lib.* I.

PRO-

74. est; etenim qui praxi Astronomicæ operam dant, facilè sentiunt loca Apheliorum ita non determinari, ut nutatio Aphelii in singulis orbitæ partibus observatione obtineatur; imo post plures duntaxat revolutiones satis tutò Aphelii progressum inveniri, ipsæ Methodi ad eas observationes adhibitæ docent; hinc, ad observationes provocare non licet ut illam nutationem vel veram vel fictitiam esse probetur, siquidem observationes hâc de re nihil docere nos possunt.

Addit verò, *tellus ubi in Aphelio versatur Jovemque respectu Zodiaci præcedit, retraheretur, & contra promoveretur ubi Jupiter tellurem præcederet, unde gravitas contrarios effectus produceret ante & post conjunctionem Telluris & Jovis*; si in hoc exemplo agatur de motu Telluris in longum, hæc revera fluunt ex gravitationis systemate, & reverâ in Lunâ inde producitur ea inæqualitas quæ *Variatio* dicitur, Astronomis notissima; similem inæqualitatem in terrâ non quidem observarunt Astronomi quia minima esse debet per ipsam gravitationis naturam, & cùm sese utrinque compenset, nullum sui relinquit Vestigium; Quod si in hoc exemplo de motu Aphelii Terræ agatur ut ex sermonis serie quis forte suspicaretur, res fieri non debet ut hic indicatur, nam in tota syzygia Aphelium telluris progredi debere, & in quadraturâ duntaxat regredi, liquet per prop. *XLV*: *& LXVI.* primi Libri.

Quas quidem adnotationes eâ mente non adjungimus ut quidquam derogetur summæ Viri Illustrissimi apud omnes φιλομαθηματικοῖς authoritati. Sed cûm NEWTONUS brevitate suâ occasionem dederit V. Ill. dicendi, eum nullo fundamento merâque apparentiâ proportionem motûs Apheliorum statuisse, hâc notâ ipsi injustâ eum purgare & veritas & Commentatoris officium postulabant.

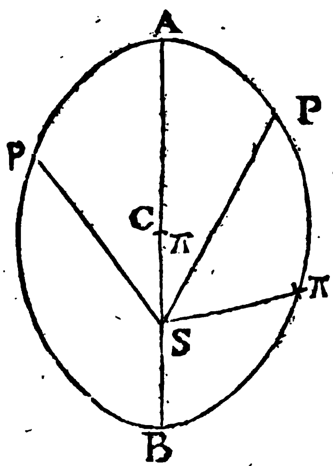
(b) *Deindè sigillatim.* Jam capti sunt orbium axes majores in ratione subsesquiplicatâ temporum periodicorum, nempè nullâ habitâ ratione massarum, planctæ spectati sunt tanquam totidem puncta in ellipsibus circà immotum in umbilico Solis centrum revolventia. Quoniam verò fit ut propter Solis & planetæ actiones mutuas, planeta ellipsim describat, cujus focus est commune gravitatis centrum planetæ & Solis, major axis ellipseos quàm planeta describit circà Solem qui ipse simul revolvitur circà commune centrum gravitatis, est ad axem majorem ellipseos quàm idem planeta circà Solem quiescentem eodem tempore periodico describere posset, in ratione summæ massarum Solis & planetæ ad primam duarum medie proportionalium inter summam illam & Solem (*prop.* 60. *lib.* 1.) ideóque ut axis major orbitæ corrigatur, augendus est in dictâ ratione. Datur autem ratio inter massas Solis & planetarum, ac proindè datur ratio in quâ orbitarum axes majores sunt augendi. Vide de his not. 64. hujus libri.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire orbium eccentricitates & aphelia.

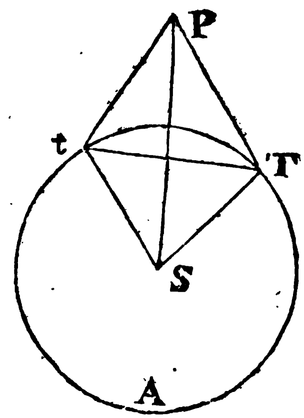
(c) Problema constat *per prop.* XVIII. *lib.* I.

PRO-



(c) 75. * *Problema constat.* Sit S Sol, sintque planetæ loca tria P, p, π è Sole visa, & data sit recta BA axis major ellipseos, describatur (*per prop.* 18. *lib.* 1.) ellipsis cujus umbilicus est S & axis major AB, quod fit, si ex axe BA demantur longitudines SP, Sp, Sπ & cùm residuis arcus ex punctis P, p, π describantur, intersectio horum trium arcuum erit alter focus Ellipseos, quo invento orbita planetæ determinabitur, simulque dabitur distantia Solis à centro ellipseos, hoc est, excentricitas, notumque erit ellipseos punctum à Sole remotissimum, id est, aphelium.

¶ Quia verò problema illud supponit data esse tria planetæ loca centrica, hoc est, ex Sole visa, datasque eorum à Sole distantias, hic adjungemus methodum quâ Clariss. *Hallejus* ex dato tempore periodico, planetæ locum centricum ejusque à Sole distantias invenire docuit. Referat TtA orbitam Telluris, S Solem, sitque P planeta seu potiùs locus Planetæ ad Eclipticam reductus, sivè punctum ubi perpendicularis ex planetâ in planam Eclipticæ demissa incidit. Ponatur tellus in T, observeturque planetæ longitudo 75.



geocentrica, ex datâ theoriâ Telluris, dabitur longitudo apparens Solis, ideóque dabitur angulus PTS. Post integram planetæ revolutionem, planeta rursùs erit in P, quo tempore tellus sit in t, ex eo puncto iterum observetur planeta, inveniaturque angulus PtS elongatio planetæ à Sole. Ex datis observationum momentis, dantur loca Telluris in Ecliptica è Sole visa ejusque à Sole distantiæ, ac proindè in triangulo tST, dantur latera tS, ST & angulus tST, quarè invenientur anguli StT, STt & latus tT. Si itaque ab angulis datis PTS & PtS, auferantur anguli noti tTS, TtS, dabuntur anguli PTt & PtT; undè in triangulo PtT ex datis angulis unà cum latere Tt, innotescet PT. Deindè in triangulo PTS, dantur latera PT, TS cum angulo intercepto PTS, ideóque dabitur SP, quæ distantia planetæ à Sole curtata appellatur, & notus fiet angulus TSP, ex quo dabitur

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

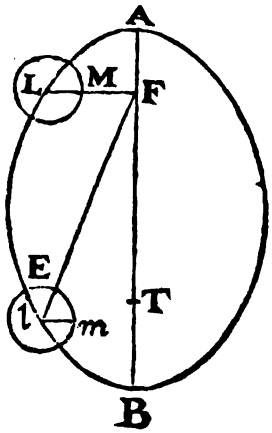
Patet per motûs legem 1. & *corol.* 22. *prop.* LXVI. *lib.* 1. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, Mars horis 24. 39′. Venus horis 23. circiter, Terra horis 23. 56′, Sol diebus $25\frac{1}{2}$ & Luna diebus 27. 7. hor. 43′. Hæc ita se habere, ex phænomenis manifestum est. (d) Maculæ in corpore Solis ad eundem situm in disco solis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu terræ; ideoque respectu fixarum Sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam verò Lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est, hujus facies eadem ulteriorem

bitur locus planetæ heliocentricus. Est
75 autem (*ex trigon.*) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut distantia planetæ à Sole curtata ad distantiam ejusdem à tellure curtatam, sed per observationem, nota est latitudo geocentrica planetæ, quarè innotescet planetæ latitudo heliocentrica ex quâ simul & distantiâ à Sole curtatâ elicietur planetæ à Sole vera distantia, & simili modo vera distantia Planetæ à terrâ, unde tandem in Triangulo cujus tria puncta sunt Sol, Terra & Planeta, omnia latera sunt cognita. Hâc ratione obtineri possunt varia loca centrica planetæ, variæque à Sole distantiæ.

Cæterùm hæc fusè variisque adhibitis methodis, explicata reperiuntur in Introductione ad veram Physicam *Joannis Keill*, in Astronomiâ Physicâ *Davidis Gregorii*, & potissimum in Elementis Astronomicis à Clariss. *Cassino* nuper editis.

(d) * *Maculæ in corpore Solis.* Cùm revolutio macularum circà Solem sit admodum regularis, & maculæ ipsæ vel Soli supernatent vel à Sole parum distent (69) non maculæ circà solem, sed Sol ipse $25\frac{1}{2}$ dierum spatio circiter, circà proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem & Martem circà axem suum gyrare ex maculis quoque in horumce planetarum corporibus per vices in conspectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus est, ob nimium Luminis splendorem, & in Saturno ob maximam ejus à terrâ distantiam maculæ nullæ hactenus deprehendi potuerunt quibus determinaretur eorum vertigo. Attamen nil obstat quominus ex analogiæ lege colligamus Mercurium quoque & Saturnum circà axem suum gyrare. Macularum solarium theoriam elegantissimè exposuerunt Clariss. D. *De - Lisle* in Libro cui titulus, *Monumenta quæ ad Astronomiæ Physicæ & Geographiæ progressum conducunt*, sæpeque laudatus D. *Cassinus* in Elementis Astronomicis. De maculis Veneris, ejusque circà axem revolutione, quædam inter Astronomos est lis; à *Cassino* parte 23 horis & 20′ absolvi, ex macula sive potius splendore quodam in disco Veneris notabili annis *1666*, *1667* compertum fuerat, non ita tamen tutò, ipse enim scribebat de motu Veneris, referente ipsius filio, *debiles adeò & confusas esse Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis sit Veneris motus, per eas determinare frustra quæritur.* Anno verò 1726. D^us. *Blanchinus* maculas Veneris Lunaribus similes diu est persecutus, earumque revo-rem umbilicum orbis ejus [e] semper respiciet quamproximè; & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc

revolutionem 24 diebus 8. horis absolvi deduxit, circa axem admodum obliquum Eclipticæ; in suam autem sententiam D^{nu}m. *Cassinum* filium non adduxit, quia apparentiæ à D^{no}. *Bianchino* observatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum Parentis observationes, cum hypothesi revolutionis 24 dierum & 8. horarum consentire non possent; hinc quæstio in medio remansit non facilè solvenda, maculæ enim Veneris nonnisi Cœlo purissimo observari possunt, & Lutetiæ nequidem cum maximis Telescopiis videri potuisse narrat idem Ill. *Cassinus* filius.

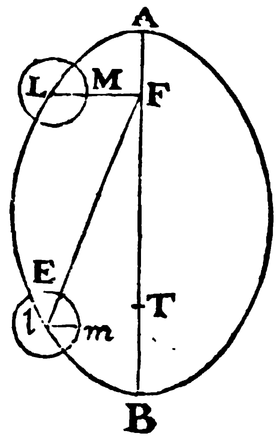


(e) 76. *Semper respiciet quamproximè.* Sit orbita lunæ ellipsis A L B A, in cujus umbilico T locatur terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales describit (*prop.* 1. *lib.* 1.); demissis autem à duobus quibusvis in ellipseos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproximè ad quatuor rectos sicut tempus quo arcus L l à Lunâ describitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, si ellipsis sit parum excentrica. Jam referat L M meridiani Lunaris, hoc est, circuli per axem conversionis Lunæ planum, quod productum transeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F transibit. Quoniam enim Luna circà axem suum uniformiter revolvit eodem tempore quo circà tellurem periodum suam absolvit, patet meridiani planum quod Lunâ existente in L situm L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attigit, ad talem situm l E pervenisse, ut positâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E sit ad quatuor rectos sicut tempus quo Luna arcum L l percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideóque (*prop.* 11. *lib.* 5. *elem.*) angulus m l E est ad quatuor rectos sicut L F l ad quatuor rectos, ac proindè angulus m l E æqualis est angulo L F l, & ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipsi l F, hoc est, ubi Luna in l versatur, ejusdem meridiani planum quod in priori situ L productum etiamnum transit per F. Quarè in quocumque Lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurrat, productum ejusdem meridiani planum transit per F. 78.

His præmissis patet eandem ferè Lunæ faciem semper ad terram converti easdemque ferè Lunares maculas observatori terrestri apparere. Cùm enim productum ejusdem meridiani planum per alterum orbitæ Lunaris focum F transeat, sitque Lunaris orbita parum excentrica, hoc est, non multum distent umbilici F & T, eadem quamproximè Lunæ facies terræ obvertitur. Si verò accuratè observatis Lunaribus maculis, Lunæ facies ad terram conversa diligentiùs consideretur, non eadem præcisè facies à nobis videbitur. Quoniam enim ejusdem meridiani planum L M non ad terram T, sed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L existentis hemisphærium è tellure T visum, aliquantulum esse diversum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemisphærii Lunaris versus plagam B quæ anteà occultabatur fit conspicua, & contrà pars hemisphærii alterius versùs R quæ anteà apparebat, oculis evanescit; motus hic Lunæ è terrâ apparens, quo fit ut quædam maculæ

De Mundi Systemate.

Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam (f) libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. (g) *N. Mercator* in Aſtronomiâ ſuâ, initio anni 1676 editâ, ex literis



76. maculæ in partem à terrâ averſam ſe recipiant, dum aliæ ex parte averſâ in conſpectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet menſe periodico reſtitui manifeſtum eſt, quandò nempè Luna in apogæo A aut perigæo B verſatur; in utroque enim ſitu ejuſdem meridiani planum quod protenſum in F incidit, tranſit etiam per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia eſt quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. *corollaria prop. 66. lib.* 1).

(f) 77.* *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circà quem Luna revolvitur, non eſt ad Lunarem orbitam normalis, ſed ad illam inclinatus, manifeſtum eſt Lunæ poles per vices ad terram vergere; ideóque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas è terrâ ſpectari. Quia verò axis Lunæ eſt ferè ad planum Eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere à ſitu Lunæ reſpectu nodorum orbitæ Lunaris cum eclipticâ, ſeu ab ipsâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur, ut dum Luna versùs auſtrum ab eclipticâ maximè recedit, hoc eſt, dum in limite auſtrali verſatur, Lunæ polus borealis & aliquæ ultrà polum Lunaris globi partes à Sole illuſtrentur, intereadum polus auſtralis & aliquæ citrà hunc polum regiones Lunares in tenebris immerguntur; Si ergò in hoc ſitu contingat Solem in eâdem plagâ cum limite auſtrali verſari, Luna à conjunctione cum Sole ad nodum aſcendentem, hoc eſt, versùs Boream progrediens, has regiones maculaſque polo Boreali vicinas oculis ſubducet, dum interim ab oppoſitâ plagâ aliæ cum polo auſtrali regiones è tenebris emergunt; contrariumque accidet deſcendente Lunâ novâ à limite boreali; borealiores nempè Lunæ partes paulatim in lucem è tenebris prorepent, dum auſtraliores evaneſcunt.

(g) 78. *D. N. Mercator.* Hic tranſcribemus N. *Mercatoris* verba. «Harum «tamen variarum atquè implicitarum li«brationum (Lunæ ſcilicet) cauſas, hy«potheſi elegantiſſimâ explicavit nobis Vir «Cl. *Iſaac.* NEWTON cujus humanitati «hoc & aliis nominibus plurimum debere «me lubens profiteor. Hanc igitur hypo«theſim Lectori gratificaturus, exponam «verbis, ut potero, nam delineationes in «plano vix ſufficiunt huic negotio. Ita«que reverſus ad globum, cogita nunc «illum repræſentare ſphæram in quâ mo«vetur Luna cujus centrum occupet tellus; «ipſum verò Lunæ globum credito polis «& axe ſuo inſtructum circà quem re«volvatur motu æquabili ſemel menſe ſy«dereo, dum à fixâ aliquâ digreſſa ad «eandem revertitur, & æquator Lunaris «ad firmamentum continuatus intelligatur «congruere plano horizontis lignei, & po«lus æquatoris Lunaris in firmamento im«mineat polo Boreo globi ad zenith ele«vato. Orbitam verò Lunæ concipito «partim ſuprà horizontem ligneum attol«li, partim verò infrà eundem deprimi, «quemadmodum in hoc ſitu globi conſ«piciliteris meis plenius exposuit. Simili motu (h) extimus Saturni satelles circa axem suum revolvi videtur, eâdem sui facie Saturnum perpetuò respiciens. Nam circum Saturnum revolvendo,

LIBER TERTIUS. PROP. XVII. THEOR. XV.

"picitur ecliptica, licet angulus æquato-"ris Lunaris & ejus orbitæ non sit fortè "æquè magnus atque hic quem globus exhi-"bet. Deindè finge tibi globulos duos "æquales quorum uterque polis, æquato-"re & meridiano unico primario insignia-"tur & uterque filo suspendatur alterutri "polorum alligato. Horum alter referat "Lunam fictitiam motu æquabili secun-"dum horizontis lignei circumlatam, atque "eodem tempore circà axem suum re-"volutam respectu firmamenti, ità ut pla-"num meridiani primarii Lunaris perpe-"tuò transeat per centrum terræ. Alter "verò globulus veram Lunam imitatus in "orbita sua feratur motu inæquali, nunc "suprà horizontem ligneum emergens, "nunc infrà eundem descendens, ità ut "planum æquatoris hujus Lunæ veræ sem-"per parallelum maneat plano horizontis "lignei, & planum meridiani primarii "ejusdem Lunæ veræ semper parallelum "plano meridiani primarii Lunæ fictæ. Ità "fit ut Luna ficta eandem nobis faciem ob-"vertens semper nulli prorsùs librationi "fit obnoxia. At Luna vera, dum à peri-"gæo pergit ad apogæon præcedens Lunam "fictam, meridianum suum primarium os-"tendit in medietate finistrâ sui disci tot "gradibus abeuntem à medio quot sunt "inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ. "Ab apogæo verò ad perigæon descendens "Luna vera sequitur fictam, atquè tum me-"ridianus primus veræ Lunæ recedit ab "ejus medio ad dextram, hoc est, macu-"læ omnes vergunt in occasum, & cùm "differentia inter mediam & veram Lunæ "longitudinem in quadraturis evadat ma-"jor, propter evectionem systematis Lu-"naris à centro telluris, hinc est quod in "quadraturis librationes in longum cer-"nuntur majores. Similiter intelligitur "causa librationis in latum, quando Lu-"na superato nodo ascendente, sivè sectio-"ne horizonti lignei & orbitæ suæ, ten-"dit ad limitem boreum, tum enim nobis "in centro sphæræ positis, polus Lunæ "boreus & quæ sunt circà eum maculæ "absconduntur, & polus australis cum suis "maculis in conspectum venit, undè ma-"culæ omnes conspicuæ in boream tende-"re videntur; contrarium accidit, Lunâ "ad limitem australem accedente. Ab iis-"dem causis procedit macularum ex par-"te lucidâ in obscuram transitus & vicis-"sim. Nam in limite australi polus Lunæ "boreus à Sole illustratur, & quidquid est "zonæ frigidæ arctico Lunari inclusum, "dum frigida australis in tenebris versatur. "Quod si igitur Solem concipias in eâdem "plagâ cum limite australi & lunam post "conjunctionem indè procedere ad no-"dum ascendentem, tum maculæ superio-"res apud polum boreum sitæ, paulatim "cùm suo polo à Luce in Tenebras con-"cedunt, dum inferiores maculæ cum po-"lo australi ex Tenebris in Lucem prore-"punt. Contrarium evenit semestri post, "cùm Sol accessit ad limitem Lunæ bo-"reum ". Hactenus N. *Mercator*: sed plenior librationum Lunarium expositio habetur in Elementis Astronomicis Clariss. *Cassini*, ubi Vir Doctiss. varias harumce librationum apparentias respectu fixarum & Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum possit definiri apparens macularum Lunarium situs.

78.

(h) * *Extimus Saturni satelles*, tertio satellite sæpè major apparet, posteaque decrescit ac tandem juxtà periodum nondum probe notam evanescit; id tamen ut plurimum contingit dum satelles in orbitæ suæ orientali parte respectu Saturni versatur, rursùs deinde in conspectum redit. Causa hæc esse videtur, quod scilicet hemisphærii satellitis pars quæ ad nos conversa est, maculis obscurata præ luminis tenuitate cerni non possit, revolvente autem circà axem satellite, ad hemisphærium oppositum transeunt maculæ, iterumque satelles fit conspicuus. Cùmque in eâ orbis sui parte quæ orientem spectat, obscuratus satelles semper observetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè probabile

De Mundi Systemate.

do, quoties ad orbis sui partem orientalem accedit, ægerrim videtur, & plerumque videri cessat: id quod evenire potest per maculas quasdam in eâ corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Cassinus* notavit. Simili etiam motu satelles extimus jovialis circa axem suum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis Jovi aversâ maculam habeat quæ tanquam in corpore Jovis cernitur ubicumque satelles inter Jovem & oculos nostros transit.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

(i) Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (k) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quàm ab oriente in occidentem. Eodem

78. bile est eandem hujus satellitis faciem planetæ primario semper obverti. Idem quoque simili argumento patet in extimo jovis satellite, nisi dicatur illas satellitum maculas fuliginum instar modò nasci, modò dissipari; sed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere possunt, anteponendæ sunt explicationes quæ à motu locali repetuntur. Alios Saturni Jovisque Satellites, Lunæ instar, Planetis primariis invariatam manifestare faciem ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter se habere censet Clariss. *Daniel Bernoullius* in Disquisitionibus Physico-Astronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecoratis. Has consulat Lector.

(i) * *Planetæ sublato omni motu circulari.* Patet (*per not.* 172. *lib.* 2.). Si planetarum materia ponatur fluida, visque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(k) * *Per motum illum circularem.* Quoniam planetæ circà axem suum revolvuntur, planetarum partes à centris circulorum in quibus moventur, recedere conantur, eóque major est vis illa centrifuga quò majores sunt circulorum quas describunt peripheriæ (*cor.* 3. *prop.* 4. *lib.* 1.). Sed æquator est circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decrescunt, quarè planetarum partes magis à centro æquatoris quàm à centris parallellorum recedere conantur, ideóque si fluida sit planetarum materia, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò descensu suo ad polos diminuet.

dem argumento, nisi terra nostra paulo altior esset sub æquatore quàm ad polos, maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Norwoodus noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, ac observando differentiam latitudinum 2 *gr.* 28'. collegit mensuram gradûs unius esse pedum Londinensium 367196, id est hexapedarum Parisiensium 57300.

(†) *Picartus* mensurando arcum gradûs unius & 22'. 55''. in

(†) * *Picartus mensurando arcum.... invenit arcum gradûs unius esse hexap.* 57060. * Circa hanc *Picarti* mensuram observandum, Ill. *Cassinum* juniorem distantiam terrestrem inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani 42 hex. imminuendam statuisse, ipsum verò arcum cælestem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ esse augendum; unde arcus gradûs unius evadit hexap. 57010. Novissimè verò D. *de Maupertuis* arcum cælestem inter Lutetias & Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quàm esse debuisset secundum observationes *Picarti*, quare servatis mensuris terrestribus *Picarti*, arcum unius gradûs 57183 hex. determinavit. Hæc paulo fusiùs sunt diducenda.

I. Cùm mensura *Picarti* à Malvoisina ad Sourdonem procedat, & hinc ad Ambianum; *Picartus* distantiam à Malvoisina ad Sourdonem per duas Triangulorum series determinat; unam præcipuam vocat quoniam ea ipsa erat quâ uti primùm constituerat, sed cùm aliquid dubii in eâ observasset, alteram instituit, quam priori anteposuit quia observationum in eâ factarum certior sibi videbatur, & accuratè consentiebat cum basi proximâ actu mensuratâ: Ill verò *Cassinus* distantiam inter Parallelos Malvoisinæ & Sourdonis ex priori serie determinat $68325\frac{2}{3}$ hex. dum eamdem distantiam *Picartus*, cui Ill. de *Maupertuis* suffragatur, facit hex. 68347.

Differunt iterum *Picartus* & Illustrissimus *Cassinus* in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum, eam enim distantiam *Picartus* ex suis mensuris hex. $11161\frac{2}{3}$ invenit, *Cassinus* verò hex. $11135\frac{1}{2}$: discriminis autem hujus ratio duplex est, nam cùm uterque Triangulos formare incipiat in lineâ quæ intercipitur inter Sourdonem & Montem Desiderium, Ill. *Cassinus* eam lineam assumit hex. $7116\frac{1}{2}$ juxta priorem seriem Triangulorum *Picarti*, & *Picartus* alteram seriem verificatam per Basim proximam actu mensuratam anteponens, eam lineam $7122\frac{1}{2}$ hex. facit: Cùm verò diversis Triangulis inde ad Ambianum usi sint, in iis Triangulis occurrit sensibilis differentia quæ sese prodit in Angulo Sourdoni facto inter lineas inde ad Ambianum & Montemdesiderium protensas, nam is *Picarto* est 137°. 56' 10'' angulus autem idem à *Cassino* determinatur 137° 53'. 30'', ex quâ differentiâ 2' 40'' & ex Baseos inter Sourdonem & Montemdesiderium diversitate, oriri potuit discrimen in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradûs

78. illud in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum.

In arcu autem Cœlesti à *Picarto* mensurato, refractionis correctionem adhibet *Cassinus* quam neglexerat *Picartus*; cùm ergo invenisset distantiam genu Cassiopeæ à Zenith loci in quo observabat, & qui erat 18 hex. Malvoisinâ meridionalior 9° 59′ 5″ versus septentrionem, & cùm ejus stellæ distantiam à Zenith loci 75 hex. meridionaliori quàm ædes Ambiani 8° 36′ 10″ invenisset, arcum inter Zenith eorum locorum juxta Malvoisinam & Ambianum interceptum fecit *Picartus* 1°. 22 55″ ut refert NEWTONUS.

Verùm propter refractionem augendas esse has distantias à Zenith statuit *Cassinus*, ita ut prima distantia 10″, altera $8\frac{1}{5}$″ fiat; cùm ergo prior fiat 9° - 59 - 15

Altera - - -	8	- 36	- $18\frac{1}{5}$
Arcus interceptus inter Zenith locorum observationis fit - - - -	1	- 22	- $56\frac{4}{5}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu Cœlesti quàm in mensuris terrestribus, à *Picarto* observatis, deducit Ill. *Cassinus* arcum unius gradûs esse 57010 hex.

II. Ill. *de Maupertuis* mensuras terrestres, quas *Picartus* adoptavit, admittens, arcum cœlestem mensuravit Instrumento, à solertissimo *Graham* accuratissimè constructo; cùm autem priores sectores circa axem immotum, ex quo filum verticale pendet, revolverentur, & divisiones subtiliores in sectoris limbo per lineas transversas signarentur, in hoc Instrumento Telescopium in suâ summitate duos cylindros adjunctos habet, circa quos cum sectore inferius adfixo revolvitur, & ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo sectoris; Divisiones in eo limbo gradus & eorum partes octavas tenuissimis punctis indicant, nihilque præterea, & ad observationem faciendam ita constituitur instrumentum, ut filum pendulum alicui è divisionibus accuratè applicetur, idque Microscopio cum lumine juxta limbum collocato agnoscitur; tum cochleâ pellitur instrumentum donec objectum in axe Telescopii cernatur, & numerus gyrorum cochleæ, partesque singuli gyri numerantur in limbo circuli horologii instar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progressus maximè sensibiles fiant. Tali itaque instrumento cujus radius est octo pedum unâ unciâ demptâ, observationes instituit Ill. *de Maupertuis* Lutetiæ in loco 1105 hex. magis septentrionali quàm ædes B. Virginis, & Ambiani in loco $98\frac{1}{2}$ meridionaliori æde ejus urbis. Inde ex stellis & Persei, & Draconis, arcum cœlestem inter Zenith eorum locorum interceptum 1° 1′ 12″ determinavit, correctionibus præcessionis Æquinoxiorum & aberrationis lucis adhibitis. Hinc cùm juxta *Picartum* inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani sint 78907. hex. inter Malvoisinam & ædes B. Virginis Lutetiis sint $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem $59530\frac{1}{2}$ hex. ex quibus detractis $1203\frac{1}{2}$ hex. propter observationum loca, invenitur arcum 1°. 1′ 12″ respondere mensuræ 58327. hex. ideóque arcum unius gradûs Hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verùm hic non dissimulandum qualis quantusque error observationi *Picarti* adscribatur, ex hac novissimâ Ill. *de Maupertuis* observatione; & ut ille error rectò æstimetur, corrigendæ sunt ejus observationes cælestes non tantum per refractionem, sed etiam per Æquinoctiorum præcessionem & aberrationem lucis; etenim cùm eodem tempore factæ non fuerint observationes à *Picarto* Malvoisinæ & Ambiano, sed inter eas mensis intervallum effluxerit, interea per præcessionem Æquinoctiorum augebatur stellæ genu Cassiopeæ declinatio $1\frac{1}{2}$″ ut ipse *Picartus* observat, simulque propter aberrationem lucis 8″ circiter augeri eam declinationem nunc constat, quare stella quæ Ambiani observabatur non erat in eodem cæli puncto quo fuerat cùm Malvoisinæ observaretur, sed erat 10 fere gradûs unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. (§) *Cassinus* senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Roussillon* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distan-

re secundis ad septentrionem provectior; dum ergo observabatur eam stellam distare á Zenith Ambiani 8°. 36′ 18⅔ (adhibitâ refractionis correctione) Punctum fixum quod fuerat Malvoisinæ observatum 8°. 36′ 8⅔ à Zenith duntaxat distabat, & cùm id Punctum Malvoisinæ 9° 59′ 15″ à Zenith distasset, arcus inter duo Zenith interceptus erat 1°. 23′ 6⅔ (non 1°. 23′ 56⅔) qui respondet 78850. hex. unde gradûs unius mensura fiet duntaxat 56926⅚ hexapedarum; sive ut conferatur hæc observatio cum observat. Il. *de Maupert.* fiatque si 58315⅙ hex. respondeant 1° 1′ 12″ Quot gradibus respondebunt 78850. Invenietur 1°. 22′ 45⅓. loco 1°. 23′ 6⅔″ ita ut error in observatione Cælesti *Picarti* sit 20″

Singulare quid occurrit in ipsâ *Picarti* narratione; Postquam enim differentias inter Zenith Malvoisinæ & Sourdonis, Malvoisinæ & Ambiani dedit, addit; « Differentia temporis quod effluxit inter observationes, requireret ut ex priori differentia 1″ *demeretur*, ex posteriori 1″ ½ (propter æquinoctiorum præcessionem;) sed hanc correctionem, ne minutias sectari videamur, omisimus « Si mutatio declinationis per præcessionem æquinoctiorum orta ex iis differentiis *demenda* foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda siquidem fit in eamdem partem, itaque cùm arcus inter Malvoisinam & Ambianum adhibitâ correctione refractionis, sit 1°. 22. 56⅔ demptâ præcessionis & aberrationis variatione 10″ circiter, maneret is arcus 1°. 22. 46⅔ ad unam secundam, qualis secundùm D^{ni}. *De Maupertuis* observationem inveniri debuisset.

Verùm ut correctio præcessionis & aberrationis *demenda* foret, ut vult *Picartus*, oporteret ut observationes primùm Ambiano, postea Malvoisinæ fuissent factæ, sed ita notantur illæ observationes, *Septembri Malvoisinæ* & *Octobri Ambiano*: si itaque rectè ratiocinatus sit, sed malè tempora notaverit, elegantissimè consentient ejus observationes cum accuratissimis postea factis; sin bene tempora notaverit, sed malè fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter 20″ inter duas ejus observationes esse distribuendum, stantibus observationibus Ill. *De Maupertuis* 6″ aut 7″ secundis propiùs accederent ad has observationes illæ quas instituit *Picartus* à Malvoisinâ ad Sourdonem, ita ut error 12″ duntaxat, inter duas observationes distribuendus superesset.

(§) * *Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ Collioure ad observatorium Parisiense, & filius addidit distantiam ab observatorio ad turrim Urbis Dunkirk.* 88.

* Has duas mensuras in unam summam conjicit NEWTONUS, quia cùm *Cassinus* senior gradum majorem quàm *Picartus* invenerit, *Cassinus* filius minorem, conjunctis mensuris obtinetur gradus mediocris proximè æqualis mensuræ gradûs à *Picarto* assignatæ, quem ut gradum telluris, ut sphæricæ consideratæ, assumit NEWTONUS, verùm hic duo sunt notanda, 1°. utitur NEWTONUS isto gradu mediocri quasi foret Æquatoris gradus, qui quidem isto major est, sed inde parum mutatur sequens calculus ut liquebit si eumdem instituamus assumpto gradu æquatoris isto majore, v. gr. 57226 hex. ut deduceretur ex Theoriâ ipsius NEWTONI; & gradum in 45. gradu faciendo 57100. hex.

2°. Distinguendæ sunt observationes *Cassini* senioris & filii; hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, mensura verò Ill. *Cassini* Patris à villâ Collioure ad observatorium, arcum Cælestem 6°. 18′ 57″. continet & respondet hexapedis 360614. (ad maris libellam reductis mensuris) unde gradus fit 57097 hex.

De Mundi Systemate

distantiam ab observatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Distantia tota erat hexapedarum 486156½ & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. 12$\frac{5}{6}$″. Unde arcus gradûs unius prodit hexapedarum Parisiensium 57061.

78. hex. verificatæ sunt mensuræ in utroque extremo, nec in iis gravis error est metuendus, cùm aptè consenserint Triangulorum calculi cum ultimis lineis seu Basibus actu mensuratis; Error verò qui in observatione Cælesti occurrere potest, singuli gradûs mensuram parùm immutat, quia in sex gradus & ultra distribuitur; cùm verò iisdem anni temporibus tàm Lutetiæ quàm in villâ Collioure observationes institutæ fuerint, aberratio lucis calculum arcûs Cælestis non immutavit: Hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45. 57100. Hexapedarum assumi potest satis tutò.

3°. Quoad observationes Ill. *Cassini* filii, cùm inter 15. Julii & 4. Sept. factæ fuerint observationes Cælestes quibus determinaretur arcus inter Zenith urbis *Dunkirk* & Observatorii interceptus, aberrationis correctio illis est adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verùm illam correctionem necessariam esse tantò minus dubium est, quod cùm is arcus per observationes stellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipsius stellæ aberratio ab Ill. *Bradleio* fuerit observata (vid. *Transf. Phil.* Vol. XXXV. pag. 637.) & nuperrime à D. *Le Monnier*; immediatis ergo experimentis constat ejus stellæ declinationem augeri à mense Julio ad Septembrem, ita ut cùm Lutetiæ seriùs observata sit, 11½ secundis Polo tunc vicinior esse potuit quàm cùm in urbe *Dunkirk* observata fuerat, ideoque totidem secundis Zenith remotior apparebat quàm punctum fixum quod in urbe *Dunkirk* fuerat observatum; unde cùm ex distantiâ à Zenith Lutetiæ detrahatur distantia ejusdem stellæ à Zenith urbis *Dunkirk*, arcus residuus illis 11½ sec. est mutandus, & cùm residuum invenerit Ill. *Cassinus* 2°. 12′. 9½″ est reducendus ad 2°. 11′. 58″, & cùm is arcus 125454 Hexapedis respondere ab Ill. Autore statuatur, arcus unius gradûs fiet Hex. 57038. 5 ped.

Verùm minor dissensus inter observationes Ill. *Cassini* filii & D^ni^. *de Maupertuis* apparebit si attendatur, partem illius dissensûs oriri ex eo quòd, dum mensuris *Picarti* uterentur, diversas ejus Triangulorum series adoptaverint; quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ sunt eorum supputationes quasi eâdem serie Triangulorum *Picarti* uterentur ambo: v. gr. supponatur utrumque assumpsisse eam seriem Triangulorum quam ipse *Picartus* admisit, sed ad Sourdonem usque, & inde (quia Ill. *Cassinus* propriis suis Triangulis distantiam à Sourdone ad Ambianum determinavit) assumatur ea distantia qualis ex Triangulis Ill. *Cassini* deduceretur si modo priori serie usus fuisset, & reliqua ejus Triangula usque ad urbem *Dunkirk* in eadem proportione augeantur; hinc iste emerget calculus.

Primò tota distantia inter Parallelos Observatorii & Sourdonis erit ex Picarto - - - - 49926 hex. 3 ped.

Secundò; Distantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani est ex *Cassino* 10539½ hex. assumptâ Basi 7116½; sed in alterâ serie Triangulorum eadem Basis erat 7122 ⅕ hinc assumptâ hac mensurâ, distantia Parall. inter Sourdonem & Ambianum ex Triangulis Ill. *Cassini* erit - 10547 hex. 4 ped.

Tota ergo distantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani erit - = 60474 - 1

Ter-

57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus terræ pedum Parisiensium 123249600, & semidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothesi quod terra sit sphærica.

In latitudine *Lutetiæ Parisiorum* corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$ ut supra, id est, (††) lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis

Tertiò distantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk est ex *Cassino* 65109^hex.^ 1^ped.^, supposità Basi $7116\frac{1}{3}$, si ergo supponatur ea linea $7122\frac{1}{3}$ fiet distantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk ex Triangulis Ill. *Cassini*. - - - 65162^hex.^ 3^ped.^

Tota ergo distantia inter observatorium & Parallel. urbis Dunkirk fiet 125636 - 4 & detractio 98. hex. pro locis observationum Cælestium & $2\frac{1}{2}$ hex. pro libellà supersunt 125536^hex.^ $\frac{1}{6}$, quæ respondent 2°. 11'. 58", unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in Observatione D^ni^. de *Maupertuis* cùm sint inter Parallelum Observatorii & ædis Ambiani 60474 : 1. & propter observationum Cælestium loca 2159^hex.^ sint detrahendæ, arcus inter observationes D^ni^. *de Maupertuis* observatus, qui est 1°. 1'. 12". respondebit hex. 58315 : 1. Unde gradus erit 57171 $\frac{2}{3}$.

Ut itaque verus dissensus inter observationem Ill. *Cassini* & D^ni^. de *Maupertuis* habeatur, fiat sicut $57171\frac{2}{3}$ ad $125536\frac{1}{6}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus 2°. 11". 45", qui 13" duntaxat differt ab arcu 2°. 11" 58" quem Ill. *Cassinus* observavit; Quæ differentia inter quatuor observationes Cælestes & mensuras terrestres distributa, efficeret conclusiones uniformes: Ergo illæ observationes nedum inter se pugnent, iis differentiolis tantùm discrepent, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea satis liquet quod si in unam summam conjicerentur mensuræ Ill. *Cassini* patris & filii, diminuendus esset arcus totalis 12" propter correctionem aberrationis Lucis, cui obnoxia est observatio Ill. *Cassini* filii, & mensuræ terrestres forent augendæ, quia ex observatione D^ni^. de *Maupertuis* additur pondus rationibus quibus inter duas series Triangulorum D^ni^. *Picarti* ea præponenda censeatur quam *Picartus* prætulerat, & quam Ill. *Cassinus* neglexerat, imo & probabile sit errores minimos inevitabiles, eam in partem conspirasse ut arcus Cælestis major vero videretur Ill. *Cassino* & mensuræ terrestres vero minores; Quibus omnibus perpensis, magnitudinem unius gradus in 45°. lat. gradu, circa medium mensuræ à *Cassino* Patre institutæ rotundis numeris satis tutò 27100 hex. assumi posse liquet. 78

(††) *Id est, lineas* $2173\frac{7}{9}$. Ex accuratissimis observationibus D^ni^. *de Mairan* (cap. 6. lib. 3. fig. terræ determ. à D. de *Maupertuis*) longitudo penduli ad singulas secundas vibrans est linearum 440. 57. hinc, cùm juxta Prop. 26. Horol. Oscill. *Hugh.* sit circuli circumferentia ad Diametrum ut 1". ad tempus descensûs per dimidiam altitudinem penduli, sive per lineas 220. $28\frac{1}{2}$, sint verò quadrata temporum ut spatia descensu verticali iis temporibus descripta, erit 9.8696 ad 1. (Quadratum circumferentiæ ad quadratum Diametri 1.) sicut spatium uno secundo descriptum ad 220. $28\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius secundi describit lineas 2173. 631356. paulò minus quàm NEWTONUS assignat, ejus undecima millesima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo describeret altitudinem 2173. 828958,

DE MUNDI SYSTEMATE.

poris diminuitur per pondus aëris ambientis. (l) Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 à centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56'. 4'' uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi (m) describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. (n) Ideoque vis, quâ gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore à terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50'. 10'', in (o) duplicatâ ratione radii ad sinum

78. (l) * *Ponamus pondus amissum.* Quoniam corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, & plumbum est ad aquæ gravitatem specificam ut 11,345 ad 1000; aqua verò ad aërem paulo minus quàm 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi est ad gravitatem aëris ferè ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis sui partem undecimam millesimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ millesimâ ponderis totius, hoc est spatia eodem tempore descripta undecimâ millesimâ totius spatii descripti parte augeri debent: fiat ergo 11000 ad 11001 ut $2173\frac{7}{9}$ ad quartum, illud quartum erit 2173.966 ergo poni potest quàm proximè spatium tempore minuti unius secundi descriptum in vacuo à plumbo, ideoque à quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia æquali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174.

(m) * *Describet arcum ped.* Computum initur eodem planè modo ac not. 63.

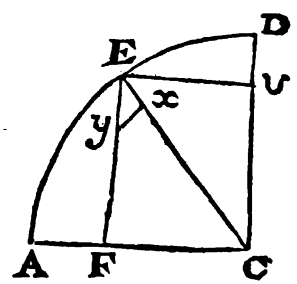
(n) * *Ideóque vis.* Vires uniformes sunt ut spatia dato tempore descripta, sed est spatium vi gravitatis tempore unius minuti secundi descriptum 2174. lin. spatium autem vi centrifugâ descriptum ut sinus versus, hoc est, lin. 7, 54064.

* Si gradus Æquatoris sit major 57061 hex., v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7. 56244, ideoque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, est ad vim centrifugam corporum in Æquatore ut 2173. 828958 ad 7. 56244.

(o) 81. * *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circà radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ipsique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicatâ radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcûs seu altitudinem E D. Exprimat enim D *v* vim centrifugam in D secundum directionem D C, & recta E *y*, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari *y x* ad rectam E C, exprimet E *x*, vim centrifugam in E, secundum directionem E *x*, sed est, D *v* : E *y* = D C : E F (*cor.* 3. *prop.* 4. *lib.* 1.) & ob triangula rectangula E *x y* E F C similia, E *y* : E *x* = EC vel finum complementi latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine illâ *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177,267, seu pedes Parisienses 15 dig. 1. & lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 seu 289 ad 1.

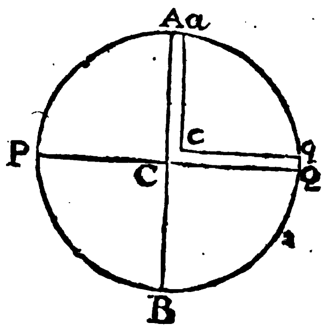
Unde

vel DC : EF. Quarè, componendo D v : E x = DC², EF², Q. E. D.



* Verùm si Meridianus terræ sit alia curva quàm circulus v. gr. sit Ellipsis, vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam quâ corpora perpendiculariter à terrâ recedunt in latitudine datâ, in ratione compositâ ex ratione radii ad sinum complementi latitudinis illius, & ex ratione radii Æquatoris, ad ordinatam ejus Ellipseos in eâ latitudine datâ; hinc pro Ellipsi ratio vis centrifugæ in Æquatore ad vim centrifugam in latitudine datâ exprimetur hoc modo: sit m axis major, n axis minor, r Radius, c sinus complementi latitudinis quæsitæ, erit vis in Æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $mr\sqrt{m^2 \times \overline{r^2 - c^2} + n^2 c^2}$ ad $n^2 c^2$, ut facile deducetur ex Ellipseos naturâ; Quare si fingatur $m = 230$ & $n = 229$ juxta NEWTONUM invenietur calculo eas vires esse inter se ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ, & vis tota gravitatis (in hyp. assumptis) efficeret ut gravia cadendo describerent lineas 2176.92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine Lutetiæ erit ad vim Centrifugam corporum in Æquatore terræ ut 2176.92558 ad 7.56244 sive ut 287.86 ad 1.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non est vis ipsa gravitatis in Æquatore, de quâ agitur in reliquâ hâc propositione, sed parum ab eâ differt; ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ sit ad vim gravitatis in Æquatore (terrâ uniformiter densâ suppositâ), ut 1532 ad 1531 ideóque sit vis gravitatis in Æquatore ad vim ejus Centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, *Newtonianis* numeris adplicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus sit usus NEWTONUS & sæpe ex Hypothesi terræ sphæricæ ductis; parùm mutationis tamen adfuturum sit, etsi assumantur alii numeri qui ex veriore terræ figurâ deducerentur.



Unde si $APBQ$ figuram terræ designet (p) jam non amplius sphæricam, sed revolutione ellipseos circum axem minorem PQ genitam; sitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc, & inde ad æquatorem Aa pergens: (q) debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$, esse ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex propositionis XCI. *corol.* 2. *lib.* 1.) computationem ineundo, invenio quod si terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, (r) & esset ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in eodem loco Q in sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut

78. (p) * *Jam non amplius sphæricam, sed revolutione Ellipseos circum axem minorem PQ genitam.* * Terram non multum à figurâ sphæricâ discedere ex Eclipsibus Lunæ patet; magis adhuc ad formam ejus Ellipseos accedere cujus axes forent æquales Diametro Æquatoris, & distantiæ Polorum terræ respectivè, satis liquet; utrum verò curva illa quæ singulum Meridianum terræ constituit & quæ convolutione arcûs PAQ circa axem minorem PQ generatur sit Ellipsis Apolloniana, utrum tantùm curva ad eam accedens, non determinat NEWTONUS; Paulò fusius de hujus curvæ Naturâ inferius differemus; hic enim ad calculum *Newtonianum* intelligendum, sufficit assumere eam curvam ad ellipsim satis accedere, ut Ellipsis pro eâ assumi possit.

(q) * *Debebit pondus aquæ.* Si fluidum in canale contentum quiescere supponatur, fluidi partes in canalis crure AC debent esse in æquilibrio cum partibus fluidi in ejusdem canalis crure QC. Cùm itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat è ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure sit 288 (sive ex inventis ut 288.67. ad 287.67), sic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

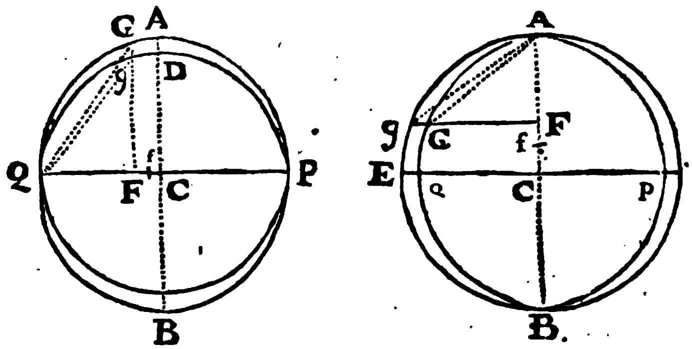
(r) * *Et esset ejus axis PQ ad Diametrum AB ut* 100 *ad* 101, *gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in Sphæram centro C radio QC descriptam, ut* 126 *ad* 125 *& eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem circa axem AB descriptam est ad gravitatem in sphæram centro C radio AC descriptam, ut* 125 *ad* 126.

* Utrumque simul probari potest: Sit PAQB, in utrâque figurâ, terræ Meridianus; in primâ figurâ sit QDPQ sphæra Centro C radio QC descripta & in secundâ figurâ PAQB repræsentat sphæroidem quam revolutione meridiani terræ circa Æquatorem describi fingit NEWTONUS & AED sphæram radio AC descriptam. Constat Corollario 2. *Prop.* XC. *lib.* 1. quod si ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii sunt FG; fg (in utrâque figurâ) attractio punctorum Q & A ab illis circulis erit $1 - \frac{QF}{QG}$, $1 - \frac{QF}{Qg}$, $1 - \frac{AF}{AG}$, $1 - \frac{AF}{Ag}$ respectivè.

Qua-

126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in sphæroidem, convolutione ellipseos *APBQ* circa axem *AB* descriptam, est ad gravitatem in eodem loco *A* in sphæram centro *C* radio *AC* descriptam, ut 125 ad 126.

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.



Quare si dicatur CQ sive CD, b, & AC sive CE, r, dicaturque abscissa QF, AF; in utrâque figurâ, x; erit in primâ figurâ $\overline{FG}^2 = \frac{r^2}{b^2} \times \overline{2bx - xx}$; $\overline{Fg}^2 = 2bx - xx$, & in secundâ figurâ est $\overline{FG}^2 = \frac{b^2}{r^2} \times 2rx - xx$ & $\overline{Fg}^2 = 2rx - xx$, quibus quadratis si addatur quadratum $\overline{QF}^2$ vel $\overline{AF}^2$ sive xx, habebuntur quadrata linearum $\overline{QG}^2, \overline{Qg}^2, \overline{AG}^2, \overline{Ag}^2$, respectivè, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2} \times 2bx - \frac{r^2 - b^2}{b^2} x^2$; $2bx$; $\frac{b^2}{r^2} \times 2rx + \frac{r^2 - b^2}{r^2} x^2$; & $2rx$; Unde (si compendii gratiâ loco $r^2 - b^2$ scribatur m) attractiones istorum circulorum evadent 78.

$$1 - \frac{bx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}};\ 1 - \frac{x}{\sqrt{2bx}};\ 1 - \frac{rx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}};\ 1 - \frac{x}{\sqrt{2rx}}:$$

Sit verò F f $= dx$ & multiplicetur attractio singuli circuli per dx habebuntur elementa attractionis sphæroideon & sphærarum, quæ elementa erunt

$$dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}};\ dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}};\ dx - \frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}};\ dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}.$$

Facilè revocabuntur ad fluentes suas ea elementa attractionis sphærarum, quippe fluentes quantitatum $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2bx}}$ & $dx - \frac{xdx}{\sqrt{2rx}}$ sunt $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ & ubi QF vel AF diametros QP vel AB æquant, ideòque x sit æqualis $2b$, vel $2r$; evadant illæ fluentes $2b - \frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $2r - \frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ sive $\frac{2}{3}b$ & $\frac{2}{3}r$.

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx - \frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - m^2}}$, quantitas $\frac{bxdx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$ resolvatur in seriem (eam considerando ut $bxdx \times \overline{2r^2bx - mx^2}^{-\frac{1}{2}}$) sumatur juxta formu-

De Mundi Systemate.

formulam *Newtonianam* quotiens secundi termini $-mx^2$ per primum $2r^2bx$ divisi, qui quotiens erit $-\frac{mx}{2b\times r^2}$; Primi termini $2r^2bx$ sumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quæ est $\frac{1}{rx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}$;

78. tum adhibitis coefficientibus secundum formulam, tota quantitas evadet

$$dx-\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{1\times bmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3bm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1\times 3\times 5bm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 6r^7\times\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

& Integrando dabitur $x-\frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2bmx^{\frac{5}{2}}}{10r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3\times 2bm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 7r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5.2bm^3x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.9r^7.\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando verò $x=2b$, series fit $2b-\frac{2b^2}{3r}-\frac{2b^2m}{10r^3}-\frac{1\times 3\times 2b^2m^2}{2\times 4\times 7r^5}-\frac{1\times 3\times 5\times 2b^2m^3}{2\times 4\times 6\times 9r^7}$.

Sive dividendo per $2b$ & ad terminos præcedentes revocando; attractio terræ, in corpusculum Q in extremitate minoris axis positi circa quem revolvi censetur, exprimitur per hanc seriem

$$2b\times 1-\frac{2b}{3r}-\frac{1\times 3m}{2.5r^2}B-\frac{3\times 5m}{4\times 7r^2}C-\frac{5\times 7m}{6\times 9r^2}D-\frac{7\times 9m}{8\times 11r^2}E\ \&c.$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx-\frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}}$ nempe secundam partem considerando ut $rxdx\times\overline{2b^2rx+mx^2}^{-\frac{1}{2}}$, quæ in serie resolvatur, quotiens secundi termini per primum divisi erit $+\frac{mx}{2rb^2}$; Primi termini dignitas $-\frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{bx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}$ & calculando secundum formulam tota quantitas

$$\text{evadet } dx-\frac{rx^{\frac{1}{2}}dx}{b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times rmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3rm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times 3\times 5rm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 6b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

Integrando habetur $x-\frac{2rx^{\frac{3}{2}}}{3b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times 2rmx^{\frac{5}{2}}}{2\times 5b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3\times 2rm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 7b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times 3\times 5\times 2rm^3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 6\times 9b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}$ &c.

Quando $x=2r$ series fit, $2r-\frac{2r^2}{3b}+\frac{2r^2\times m}{2\times 5b^3}+\frac{1\times 3\times 2r^2\times m^2}{2\times 4\times 7b^5}+\frac{1\times 3\times 5\times 2r^2m^3}{2\times 4\times 6\times 9b^7}$ &c.

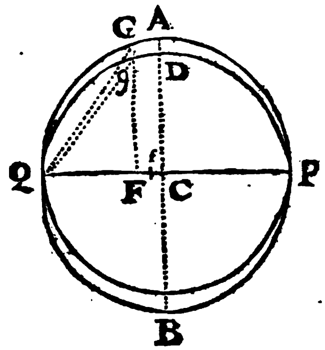
$$\text{Sive } 2r\times 1-\frac{2r}{3b}+\frac{3m}{2\times 5b^2}B-\frac{3\times 5m}{4\times 7b^2}C+\frac{5\times 7m}{6\times 9b^2}D-\frac{7\times 9m}{8\times 11b^2}E\ \&c.$$

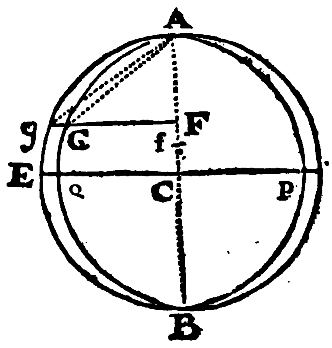
Cùm ergo sit $r=101$, & $b=100$ est $r^2-b^2=r+b\times r-b=201=m$, est $r^2=10201$. Hinc substitutionibus factis prima series evadit

$2b\times 1-.66006600$
$-.00390177$
$-.00004118$
$-.00000052$
$-.00000001$

hoc est, $2b\times 1-.66400948$; sive $2b\times .33599052$; Sed sphæræ attractio erat $\frac{2b}{3}$; Ergo gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in sphæræ centro C radio QC descriptam ut 1.00797156 ad 1 (multiplicando utrumque terminum per 3 & dividendo per $2b$) sive ut 1008 ferè ad 1000, qui numeri sunt accuratè ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8, dividendo. Q. E. 1°. D.

Pari-



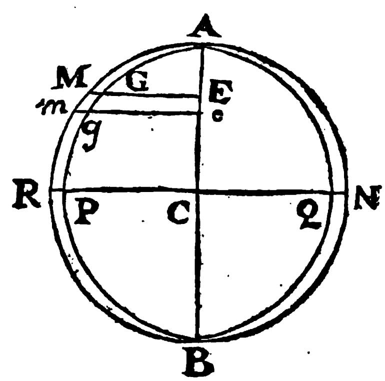


Pariter substitutionibus factis in serie secundâ, evadit 78

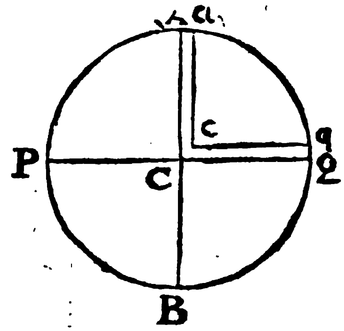
$$2r \times 1 - .67333333 + .00406020 - .00004372 + .00000057 - .00000001.$$

Sive $2r \times 1 - .67337706 + .00406077$ hoc est $2r \times 33068371$; sed sphæræ attractio erat $\frac{2r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 & dividendo per $2r$; gravitas in loco A in Ellipsoidem, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in sphæram radio AC descriptam ut 99205113 ad 1; Multiplicetur uterque terminus per 1008, & evadent 999.987589 & 1008; proximè 1000 & 1008 qui numeri sunt ut 125 ad 126. Q. E. 2°. D.

79. *Lemma.* Sphærois compressa convolutione Ellipseos APBQ circà axem minorem PC genita, est media proportionalis inter sphæram circumscriptam cujus radius est AC, & sphæroidem oblongatam convolutione ellipseos circà axem AC genitam. Nam ductis ordinatis ME, me, infinitè propinquis. tum sphæra circumscripta tum sphærois oblongata dividi intelligantur in cylindrulos ordinatarum ME & me, GE & ge convolutione descriptos, erit cylindrulus EGge in sphæroide ad cylindrulum EMme in sphærâ, ut altitudo Ee ducta in circulum radio GE rotando descriptum, ad altitudinem Ee, ductam in circulum cujus est radius ME, sivè quia circuli sunt ut quadrata radiorum & utriusque cylindruli communis est altitudo, erit cylindrulus EGge, ad cylindrulum EMme, ut GE^2 ad ME^2. Sed GE^2 ad ME^2 semper est ut PC^2 ad RC^2 vel AC^2, ideóque in datâ ratione, erit itaque summa tota cylindrulorum in sphæroide ad summam totam cylin-

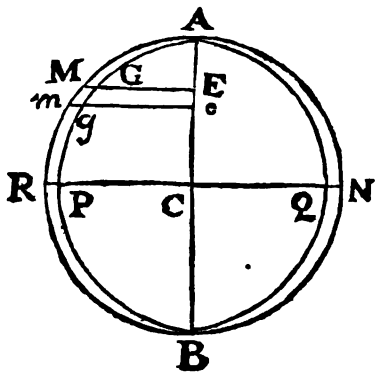


De Mundi Systemate.



(f) Est autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem & sphæram: propterea quod sphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis est, vertitur in dictam sphæroidem; & gravitas in *A*, in

79.



lindrulorum in sphærâ, hoc est, sphæroïs ipsa ad sphæram ut PC^2 ad AC^2. jam verò sphæra radio RC descripta & sphæroïs compressa ellipseos AGP circà axem PC convolutione genita, simili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinatarum ME & me, GE & ge, circà axem PC convolutione genitos, ob radiorum CE & rectarum Ee æqualitatem, erunt tubuli illi ut ME, GE, sivè ut AC ad PC, hoc est, in datâ ratione; ideòque sphæra est ad sphæroidem compressam ut AC ad PC. Quare si sphæra dicatur *S* sphæroïs compressa *s*, & sphæroïs oblongata *r*, sitque AC $= b$, PC $= a$ erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proindè $S : r = S^2 s^2$ undè $s = \sqrt{S \times r}$. Q. E. D.

(f) 80. *Est autem gravitas*. Diameter PQ, in figurâ Newtoni respondeat diametro RN, minuatur diameter illa RN in ratione 101 ad 100 ut fiat PQ $= 100$, tunc sphæra quæ centro C radio AC descripta erat, vertetur in figuram terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione sphæræ duabus diametris AB, PQ, fit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eâdem ratione 101 ad 100, patet figuram terræ verti in sphæroidem oblongatam. Quia verò utraque sphæroïs sivè compressa sive oblongata ad sphæram quam proximè accedit, sphæroides illæ pro sphæris quæ eandem respectivè contineant materiæ quantitatem, quam proxime haberi possunt. Sunt autem attractiones sphærarum in distantiis æqualibus ut quantitates materiæ (*cor.* 1. *prop.* 74. *lib.* 1.) ideòque gravitas in utroque casu prædicto diminuitur in eâdem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proinde attractiones sphæræ sphæroidis compressæ & sphæroidis oblongatæ sunt respectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed sphæroïs compressa convolutione ellipseos ABPQ, circa axem PCQ genita est media proportionalis inter sphæram circumscriptam cujus radius est AC, & sphæroidem oblongatam convolutione ellipseos circà axem ACQ geni-

in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proximè. LIBER TERTIUS.
(t) Est igitur gravitas in A in sphæram centro C radio AC PROP. XIX.
descriptam, ad gravitatem in A in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & PROBL.
gravitas in loco Q in sphæram centro C radio QC descriptam, III.
est ad gravitatem in loco A in sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (*per prop.* LXXII. *lib.* I. id est, ut 100 ad 101. (u) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in terram ad gravitatem in loco A in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cùm (*per corol.* 3. *prop.* XCI. *lib.* I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum à centro terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, (x) ut magnitudines & gravitates accelera-

genitam (81). Quarè gravitas in loco A, in terram est media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem, oblongatam scilicet, & sphæram.

(t) * *Est igitur gravitas.* Gravitas in loco A in terram dicatur G, gravitas in loco Q, in terram sit g, gravitas in loco Q, in sphæram radio P C, descriptam dicatur γ, gravitas in loco A, in sphæroidem convolutione ellipseos A B P Q, circa axem A B genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in sphæram radio A C descriptam sit Γ, erit (ex dem.).

$g : \gamma = 126 : 125$

$V : \Gamma = 125 : 126$ prætereà

$V : G = G : \Gamma$, ideóque inter V & Γ, hoc est, inter 125 & 126 sumpto medio termino proportionali erit

$V : G = G : \Gamma = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$

(u) * *Conjungantur jam hæ tres rationes*, scilicet

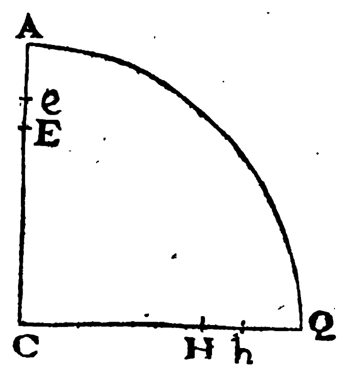
$g : \gamma = 126 : 125$

$\Gamma : G = 126 : 125\frac{1}{2}$

$\gamma : \Gamma = 100 : 101$ erit per compositionem rationum & ex æquo,

$g : G = 126 \times 126 \times 100 : 125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$ 81.

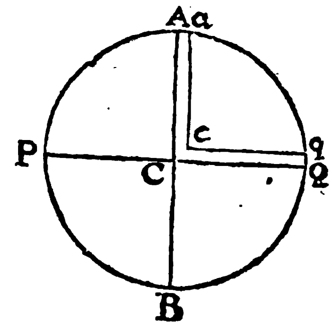
vel $g : G = 1587600 : 1584437\frac{1}{2} = 501 : 500$ ideóque gravitas in loco Q, in terram fiet ad gravitatem in loco A, in terram ut 501 ad 500.



(x) 81. * *Ut magnitudines & gravitates.* Crura A C, Q C ità distinguantur superficiebus transversis & æquidistantibus ut crura illa æqualem contineant particularum E e, H h numerum, sintque singulæ particulæ in crure A C ad singulas particulas in crure C Q ut crus A C ad crus alte-

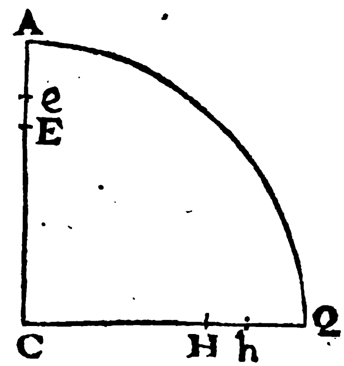
DE MUNDI SYSTEMATE.

celeratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. (y) Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verùm vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga, quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$, est tantùm pars $\frac{1}{289}$.



81. alterum CQ; sive ut 101 ad 100; Quoniam gravitas in loco A est 500 & gravitas in loco Q, est 501 propter figuram sphæroidis & omnium particularum in cruribus AC & CQ similium & similiter positarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione; earum itaque Pondera, (sive facta gravitatis acceleratricis per Quantitatem materiæ) erunt in ratione compositâ 101 ad 100 & 500 ad 501 sive 505 ad 501, & totorum crurum AC & CQ gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(y) 82. * *Ac proindè si vis centrifuga.* Ex motu diurno circà axem QC, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ sunt in crure AC, versùs C, vi gravitatis attractæ, simul etiam vi centrifugâ repellantur, * illa autem vis Centrifuga in singulis punctis cruris AC est in ratione distantiæ eorum punctorum à Centro CE (*per cor.* 3. *prop.* 4. *lib.* 1.) sed est etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiæ à Centro (*per cor.* 3. *Prop. XCI. lib.* 1.). ergo si alicubi data sit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam, eadem erit in omnibus punctis: sit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota singularum & omnium partium cruris AC erit ad gravitatem residuam in singulis & omnibus partibus ejusdem cruris ut 505 ad 501, sed in eâdem ratione erat tota



gravitas cruris AC (absque detractione vis centrifugæ ad gravitatem cruris CQ, quod cùm sit axis, vim centrifugam nullam habet) ergo residuum vis gravitatis in crure AC sublatâ vi Centrifugâ in æquilibrio est cum gravitate cruris CQ.

$\frac{1}{229}$. (z) Et propterea dico, secundùm regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ACca$ superet altitudinem aquæ in crure $QCcq$ parte centesimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure $ACca$ sit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars tantum $\frac{1}{229}$. Est igitur diameter terræ secundùm æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cùm terræ

(z) * *Et propterea dico secundùm regulam auream.* * Vix crediderim NEWTONUM ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuisse fundamento quàm istâ confusâ notione, quod cùm excessus ponderum in longioribus cruribus sphæroidem pendeant ex inæqualitate crurum, sive ab excessu unius cruris supra alterum, ideo rationes excessuum crurum majorum ad minora crura eædem esse debeant ac rationes excessuum ponderum ad pondera minorum crurum; quæ quidem ultimæ rationes (sive ipsis proximæ rationes excessuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos excessus ponderum accuratè compensant. Sed mihi videtur ipsum deduxisse hanc proportionem ex ipsâ serie ab ipso adhibitâ, & quam assequi sumus conati in Notâ (r) proximâ; quod ut concipiatur, resumantur quæ in eâ Notâ dicta sunt, & ad ratiocinium *Newtonianum* applicentur, supponendo Quæstionem esse de duobus sphæroidibus, quorum unus sit assumptitius ille cujus Axes sunt ut 101 ad 100 alterum verò ipsa terra, ita ut semi-Diameter Æquatoris quæ in Sphæroide fictitio in Notâ prædictâ per r designabatur, terræ respectu designetur per ϱ, semi-axis verò P Q qui in serie assumptâ dictus fuerat b & applicatus fictitio sphæroidi, ubi verò ipsum semi-axem terræ designat dicatur B. Assumptis ergo duobus primis terminis seriérum, sed mutatis r in ϱ & b in B, ubi agetur de terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in sphæroidem erit ad Gravitatem in eodem loco in sphæram radio b descriptam erit ut $\frac{6br-4b^2}{3r}$ ad $\frac{2b}{3}$: & si agatur de terrâ, Gravitas in loco Q in terram erit ad Gravitatem in eodem loco in Sphæram quæ radio B describetur ut $\frac{6B\varrho-4B^2}{3\varrho}$ ad $\frac{2B}{3}$; ideóque Rationes gravitatis in loco Q in Sphæroidem vel terram ad gravitatem in Sphæras radiis b & B descriptas erunt ut $\frac{3r-2b}{r}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho}$.

2°. Gravitas in Sphæras quarum sunt radii b & B est ad gravitatem in Sphæras radiis A C descriptas ut radius b ad r, & B ad ϱ, ideóque rationes gravitatis in sphæras radiis P Q descriptas ad gravitates in sphæras radiis A C descriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{\varrho}$.

3°. Gravitas in sphæras radiis A C descriptas est ad Gravitatem in Ellipsoides convolutione Ellipsium A P B Q circa A C descriptas ut $\frac{2r}{3}$ ad $\frac{6rb-4rr}{3b}$, si agatur de fictitio Sphæroide, aut ut $\frac{2\varrho}{3}$ ad $\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}$ ubi agitur de terrâ: Et quoniam attractio sphæroidis fictitii aut terræ est media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in sphæram ad Gravitatem in A in sphæroidem, ut $\frac{\sqrt{2r}}{3}$ ad $\sqrt{\frac{6rb-4}{3b}}$ & gravitas in sphæram ad Gravitatem quæ est in A in terram ipsam ut $\sqrt{\frac{2\varrho}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}}$, ideóque rationes gravitatum in sphæras ad gravitates in sphæroidem & in terram erunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE

ræ ſemidiameter mediocris, juxtà menſuram *Picarti*, ſit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarium $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si

82. $\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compoſitis omnibus rationibus, Rationes gravitatum, in punctis Q tam ſphæroideos fictitii quàm terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3r-2b}{\varrho} \times \frac{b}{r} \times \sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B}{\varrho}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$.

Rurſus in fictitio ſphæroide ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ & in terrâ per $\frac{B}{\varrho}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis, & habebuntur rationes ponderum quæ ideo erunt ut $\frac{3r-2b}{r} \times \frac{b^2}{r^2}\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$; Inde cùm differentia quantitatum r & b, ϱ & B non ſit magna, numeratores $3r-2b$ aut $3\varrho-2B$; pro r ac ϱ ſumi poſſunt, & denominatores $3b-2r$, $3B-2\varrho$ pro b & B, ideóque rationes ponderum ſunt ut $\frac{r}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \times \sqrt{\frac{b}{b}}$, ad $\frac{\varrho}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2} \times \sqrt{\frac{B}{B}}$ ſive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\varrho^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure CA ad pondus in crure CQ ſunt in ſphæroide fictitio & in terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\varrho^2}{B^2}$; quod ſi differentia Diametri r & axis fictitii b dicatur f; differentia Diametri ϱ & axis terræ B dicatur g hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum CA & CQ. $\frac{b^2+2bf+ff}{bb}$ & $\frac{B^2+2Bg+gg}{B^2}$ erunt ergo rationes exceſſûs ponderis in crure AC ad pondus totum cruris CQ ut $\frac{+2bf+ff}{bb}$ ad $\frac{+2Bg+gg}{B^2}$ ſive deletis ff & gg quæ evaneſcunt reſpectu $2rf$ & $2\varrho g$; cùm differentiæ inter diametros & axes minimæ ſupponantur reſpectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2bf}{b^2}$ ad $\frac{2Bg}{B^2}$, ſive ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſed rationes exceſſûs ponderum ad pondus cruris CQ ſive ad pondus cruris AC (quod perinde eſt ob magnitudinem crurum & parvitatem exceſſûs) æquales eſſe debent (ut jam dictum eſt) rationibus virium Centrifugarum ad gravitatem ipſam: quare, rationes illæ virium Centrifugarum ad gravitatem debent eſſe ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſive ut rationes exceſſûum diametri Æquatoris ſupra Axes ad Axes, quæ quidem eſt proportio quam NEWTONUS aſſumit, cujus fundamentum ita deprehenſum eſt: hinc Vis Centrifuga quæ eſt $\frac{4}{505}$ ponderis totius, eſt ad Vim Centrifugam quæ eſt $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$ ſive ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, ſed dum b eſt 100 eſt $f=1$, ergo eſt $\frac{g}{B} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{289}}{\frac{4}{505}}$ ſive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

(a) Si planeta major ſit vel minor quàm terra manente ejus denſitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum ſecundùm æquatorem. At ſi motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et ſi denſitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipſum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum viciſſim minuetur in ratione gravitatis auctæ, vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cùm terra reſpectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9. 56′, ſintque temporum quadrata

(a) 86. *Si planeta major ſit vel minor quàm terra manente ejus denſitate ac tempore Periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis Centrifugæ ad gravitatem.* * Manere Rationem vis Centrifugæ ad gravitatem liquet ex notâ 85. ſive *ex Cor.* 2. *Prop. IV. Lib. I.*; nam manente tempore Periodico creſcit Vis Centrifuga in ratione diſtantiarum, ſed creſcit etiam gravitas acceleratrix in ratione diſtantiarum (*Cor.* 3. *Prop. XCI. lib.* 1.) ergo in eâdem ratione creſcunt vis Centrifuga & gravitas, ideóque in eâdem ratione manent ac prius.

Propterea manebit proportio diametri inter Polos ad diametrum ſecundùm Æquatorem: quippe, per notam præcedentem z, Ratio vis Centrifugæ ad gravitatem eſt ut ratio exceſſûs Diametri Æquatoris ſuper longitudinem Axeos; manente ergo priori ratione per hypotheſim manebit & iſta.

Si acceleretur vel retardetur motus diurnus: ut tempus Periodicum ſit majus vel minus, vis centrifuga creſcit reciprocè ut quadrata temporum Periodicorum manentibus radiis (*Cor.* 2. *Prop. IV. lib.* 1.) inde manentibus gravitatibus & Diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ z.) numeratores fractionum $\frac{f}{b}$ & $\frac{g}{B}$, 83.
nempe exceſſus Diametrorum, creſcere ſecundùm rationem virium centrifugarum, hoc eſt, ut quadrata temporum Periodicorum inverſè, aut ut quadrata Celeritatum directè: hinc ait NEWTONUS: *differentia diametrorum* (quæ differentiæ exprimuntur per f & g) *augebitur vel minuetur in eâ ratione duplicatâ celeritatum quamproximè.*

Et ſi denſitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eâdem ratione: hinc ratio vis Centrifugæ manente radio & celeritate manentis, ad gravitatem minuetur; ideóque minuetur ratio differentiæ Diametrorum ad ipſas Diametros.

Et in genere dicatur Radius terræ R, ejus denſitas D, tempus Periodicum T, in altero Planeta litteris iiſdem ſed minoribus eadem exprimantur, erit $\frac{\frac{R}{TT}}{DR}$ ad $\frac{\frac{r}{tt}}{dr}$ ſicut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter Diametros Æquatoris & Axis Planetæ, quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times TT}{d \times tt}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

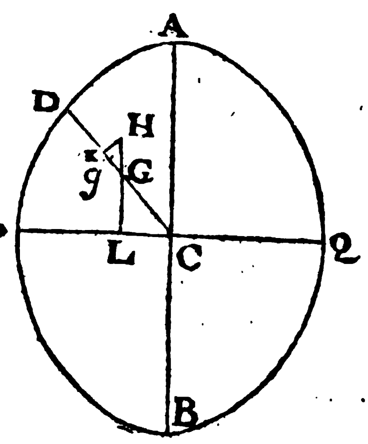
drata ut 29 ad 5, & (b) revolventium densitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Est igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cùm ejus diameter major sit $37''$, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit $33''. 25'''$. (c) Pro luce erraticâ addantur $3''$ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent $40''$ & $36''. 25'''$: quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quamproximè. Hoc ita se habet ex hypothesi quod corpus jovis sit uniformiter densum. (d) At si corpus ejus sit densius versùs planum æquatoris quàm versùs polos, diametri ejus possunt

83. (b) * *Et revolventium densitates.* (prop. 8. lib. hujus.).

(c) * *Pro luce erraticâ.* (53).

(d) * *At si corpus ejus.* Ille enim excessus densitatis in plano æquatoris facit ut ibi major sit gravitas, ac proindè ibi minor requiratur altitudo ad compensandam vim Centrifugam, unde minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).

84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypothesi gravitatis proportionalis cuilibet dignitati distantiarum à centro, simulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio inveniri potest. Sit semidiameter secundùm æquatorem $AC = a$, radius variabilis $CD = r$ sinus anguli $DCP = h$, posito sinu toto $= 1$. Sit gravitas in loco $A = p$ vis centrifuga in eodem loco $= f$, ponaturque gravitas versùs centrum C tendens dignitati cuilibet n distantiarum à centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut a^n ad r^n, ideóque gravitas in $D = \frac{pr^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A & G, sunt in ratione distantiarum CA, LG, erit vis centrifuga in $G = \frac{f \times LG}{CA}$; sed $LG : CG = h : 1$ ideòque $LG = CG \times h$, undè vis centrifuga in G, fit $= \frac{fh \times CG}{CA}$; sit autem vis illa $= GH$. Quoniam vis centrifuga quæ agit secundùm directionem GH, non minuit gravitatem versùs centrum C, nisi in quantùm agit secundùm directionem DC, resolvatur vis centrifuga GH in vires laterales KH, GH, est



sunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ: *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719 mensuravit ut sequitur. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

Tem-

est autem GH : GK vel $1 : h = \frac{fh \times CG}{CA} : GK$, quarè $GK = \frac{fhh \times r}{a}$; ideóque pondus cylindruli $Gg = \frac{pr^n dr}{a^n} - \frac{fhhrdr}{a}$. Sumptisque fluentibus, pondus totum fluidi in crure $DC = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh \times rr}{2a}$. Simili argumento, quia gravitas in $A = p$, erit gravitas in alio quolibet loco cruris CA $= \frac{px^n}{a^n}$, si nempè distantia à centro dicatur x; vis autem centrifuga $= \frac{fx}{a}$, & pondus Cylindruli manebit $\frac{px^n dx}{a^n} - \frac{fxdx}{a}$ cujus fluens $\frac{px^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fx^2}{2a}$ undè pondus totum fluidi in crure CA, est $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa^2}{2a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure CA, CD consistere debet in æquilibrio, oportet ut pondera sint æqualia, ac proindè, $\frac{pa^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa}{2} = \frac{pr^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhhrr}{2a}$, undè eruitur $2pr^{n+1} - (n+1)fhha^{n-1}rr = (2p - nf - f)a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facilè invenitur diametrorum proportio; si enim fiat $h = 0$, radius r abit in CP, habeturque $2pr^{n+1} = (2p - nf - f)a^{n+1}$, hoc est, $CA : CP = (2p)^{\frac{1}{n+1}} : (2p - nf - f)^{\frac{1}{n+1}}$.

In hypothesi gravitatis uniformis, fit $n = 0$, ideóque $CA : CP = 2p : 2p - f$. Quoniam verò in terrâ gravitas est ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit $CA : CP = 578 : 577$, prout *Hugenius* invenit. At in hypothesi gravitatis in ratione duplicatâ distantiarum à centro decrescentis, erit $n = -2$, ideóque $CA : CP = 2p + f : 2p = 579 : 578$.

85. * 85. Verùm hæ Hypotheses in hâc formulâ inveniendâ assumptæ cum rei naturâ & *Newtoniano* systemate neutiquam quadrant, ideoque locum habere nequeunt: Primùm enim Gravitatem ad Centrum terræ dirigi verum non est si terra sit sphærois qualiscumque, quippe ex ipso facto constat gravitatis directionem esse perpendicularem superficiei aquarum, sive esse perpendicularem curvæ quam meridianus quilibet affectat; sed perpendiculares ad curvam à circulo diversam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt nisi in solâ axium extremitate.

2°. Gravitatis quantitas in variis punctis superficiei solidi ratione curvæ alicujus geniti non sequitur rationem ullius dignitatis distantiarum à centro, sed aliam omnino Legem juxta formam solidi, hoc est, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat, & locum in quo corpusculum attrahendum locatur, ut satis liquet ex eo artificio quo NEWTONUS usus est ad determinandam rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam distantiarum, sed per rationes serierum, quales eas in Notâ (r) invenimus, sunt exhibendæ; quamvis ergo verum sit in systemate *Newtoniano* gravitatem decrescere ut quadrata distantiarum à quocumque corpore collecto in centro suæ gravitatis quasi in uno puncto, idem verum non erit si id corpus figurâ sphæricâ non donetur, & corpusculum attrahendum juxta diversas partes ejus solidi collocetur; hinc ubi in formandâ generali formulâ assumitur quod gravitas in A sit ad gravitatem in D ut a^n ad r^n ideóque gravitatem in D esse

pr^n

De Mundi Systemate.

Tempora	Diam. max.	Diam. min.	Diametri ad invicem.	
dies hor.	*part.*	*part.*		
Jan. 28 6	13,40	12,28	*ut* 12	*ad* 11
Mar. 6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$	$12\frac{3}{4}$
Mar. 9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$	$11\frac{2}{3}$
Apr. 9 0	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem solis versùs æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quàm versùs polos. Quin-

86, $\frac{pr^n}{a^n}$, id omninò adversus Theoriam gravitatis *Newtonianam* deducitur; quòd autem hæc formula non multum à vero aberret, oritur ex eo quod reverà figura terræ à sphærà perparùm discrepet.

86. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum describentis est in ratione directâ radii & duplicatâ inversâ temporis periodici (*cor.* 2. *prop.* 4. *lib.* 1.). Quarè si distantia planetæ à centro Solis vel distantia satellitis à centro planetæ primarii dicatur D, tempus periodicum T, radius ipsius Planetæ circà quem motu diurno revolvitur R, gravitas versùs centrum revolutionis erit $\frac{D}{TT}$; Si autem hæc gravitas crescat in ratione duplicatâ inversâ distantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc versari supponitur loco, ad illius gravitatem, si positus fingeretur in superficie corporis centralis circà quod revolvitur, ut RR ad DD, ideóque foret gravitas planetæ in superficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{RRTT}$. Jam verò cùm vis centrifuga planetæ positi in æquatore corporis circà quod revolvitur, sit in ratione directâ radii hujus planetæ & inversâ duplicatâ temporis revolutionis circà axem, si tempus periodicum circà axem dicatur t vis centrifuga F, erit $F = \frac{R}{tt}$ undè si vis gravitatis in superficie corporis centralis dicatur P, erit $P : F = \frac{D^3}{RRTT} \cdot \frac{R}{tt} = D^3 \times tt : R^3 \times TT$.

90. Distantia D, quarti satellitis jovialis à centro planetæ primarii sit 26.63 semid. jovis, prout à NEWTONO in fine Phænomeni II. determinantur, & tempus periodicum $T = 16$ dieb. $18^h. 5' 7''$ prout à *Cassino* in novis Elementis Astron. traduntur. Semidiameter jovis $R = 1$, tempus periodicum jovis circà axem $t = 9^h. 55' 52''$ posito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur $CA : CP = 2p + f : 2p$, vel $CA - CP : CP = f : 2p$, aut $CA - CP : CP = R^3 TT : 2D^3 tt$, erit itaque in hâc hypothesi gravitatis pro jove $CA - CP : CP = 1 : \frac{2D^3 \times tt}{TT} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia inter semidiametrum secundùm æquatorem jovis & semidiametrum inter polos quamproximè æqualis est differentiæ quam NEWTONUS ex suâ methodo derivavit.

Sit mediocris distantia Lunæ à Terrâ $D = 60$ semid. terrestr. tempus periodicum Lunæ $= 27$ dieb. $7^{hor.} 43'$, semid. terræ $= 1$, tempus revolutionis terræ circà axem $= 23^{hor.} 56' 4''$. erit gravitas ad vim centrifugam ut 288 ad 1. Undè pro terrâ foret $CA - CP : CP = 1 : 576$: terra itaque minùs compressa foret quàm à New-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ noſtræ minui ſub æquatore, atque ideo terram ibi altius ſurgere quàm ad polos (ſi materia ejus uniformiter denſa ſit) patebit per experimenta pendulorum quæ recenſentur in propoſitione ſequente.

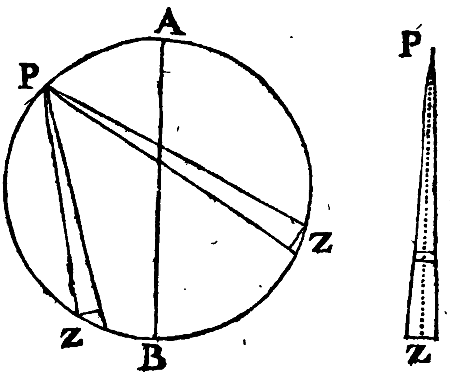
NEWTONO definitum eſt, magis tamen quàm determinatum eſt ab *Hugenio*, verùm ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus Periodicum non reſpondet accuratè vi centrifugæ terræ; alias correctiones hujus calculi invenies Tranſ. Philoſ. N°. 438 quibus ad *Newtonianam* proportionem magis accuratè revocatur. De hâc Quæſtione nobiliſſimâ procul dubio legantur quæ de telluris figurâ dederunt Clariſſimi Viri D. *De Mairan* in Monumentis Pariſ. an. 1720. D. *De Maupertuis* ibidem an. 1733. 1734. 1735. 1736. & in duobus opuſculis quorum unum *de figuris corporum cæleſtium*, alterum *de figurâ telluris* inſcribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. *Clairaut* in Monumentis Pariſienſibus an. 1735. & in Tranſactionibus Philoſophicis num. 445. & 449. D. *Bouguer* ibid. an. 1736. D. *Euſtachius Manfredius* ibid. an. 1734. & D. *Stirling* in Tranſactionibus Anglicis an. 1735.

* Viam ſternet ad determinandam figuram terræ ortam ex neceſſitate æquilibrii vis centrifugæ & vis gravitatis ſingularum ejus partium, ſi generaliſſimè ſolvatur Probl. XLV. (*Prop. XCI. Lib. I.*) NEWTONI, nempe, ſi inveniatur attractio corpuſculi non ſolùm *ſiti in axe* ſolidi rotundi, ſed ſiti ubivis in ejus ſuperficie, cujus Problematis Analyſim hic in compendium trademus.

PROBLEMA.

Datâ Æquatione curvæ cujuſcumque quæ circa axim revolvendo ſolidum deſcribat, invenire attractionem corpuſculi ſiti in quocumque puncto ſuperficiei ejus ſolidi.

Conſtructio. Fingatur Planum tangens id ſolidum in P, & ſuper eo plano, è puncto P ut centro deſcripta intelligatur ſphæra radio infinitè parvo, dividatur tota ſuperficies hemiſphærii verſus ſolidum converſi in portiunculas æquales; & concipiantur Pyramides (quarum vertices ſint

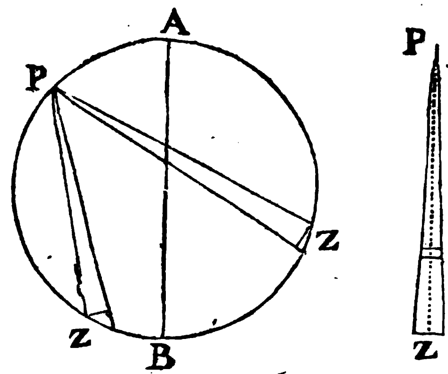


in centro ſphæræ) illis portiunculis inſiſtentes & inde ad ſolidi ipſius oppoſitam ſuperficiem continuatæ, puta in Z, Z, terminentur illæ Pyramides in eo ſolido per Baſes parallelas Baſibus ipſarum ſphæræ circumſcriptis; Corpuſculi in puncto P ſiti attractio ab omnibus illis Pyramidibus, concipi poterit ut attractio à toto ſolido; exiguæ enim ejus ſolidi portiones, quæ in extremitate unius cujuſque Pyramidis negliguntur, ſunt ubique totius Pyramidis reſpectu infinitè parvæ. 90.

Attractio autem corpuſculi P à ſingulâ Pyramide erit ubique ut axis PZ ejus Pyramidis; Nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinitè proxima, ducanturque per ea ſuperficies duæ, parallelæ Baſi Pyramidis, ſive, quod idem eſt, parallelæ ſuperficiei ſphæræ circa P deſcriptæ, exiguum ſolidum inter eas ſuperficies contentum creſcet ut illæ ſuperficies, ſive ut quadratum portionis axeos abſciſſæ, ſed cùm attractio ſingulæ particulæ decreſcat ut quadratum diſtantiæ à puncto P, ſive decreſcat ut quadratum abſciſſæ; ideóque creſcat particularum quantitas ut decreſcit ſingulæ particulæ vis, evenit ut attractio ejus ſolidi ubivis in axe PZ ſumpti eadem ſemper ſit; æqualis erit v. gr. attractioni ſolidi cujus baſis foret portio ſuperficiei ſphæ-

De Mundi Systemate.

90.

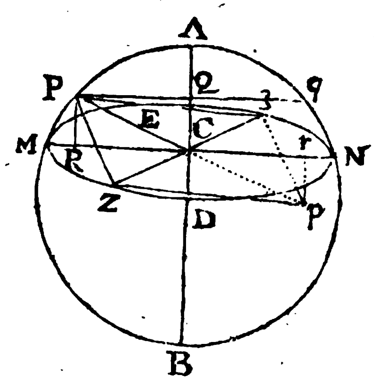


ræ intra Pyramidem contentæ, & altitudo illa quam minima axeos P Z portio assumpta. Hinc attractio totius Pyramidis erit attractio ejus parvi solidi, toties repetita quot sunt axeos P Z portiunculæ; Cùm itaque portio superficiei sphæræ intra Pyramides contenta, sit ubivis eadem, ex Const., attractiones singularum Pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in singulo axe P Z assumendarum, sive quod idem est, ut singuli axes P Z.

His positis: sit M D N E unus è circulis genitis in solido proposito per revolutionem ordinatæ C M circa axim A B. Dico quod attractio puncti P ab omnibus Pyramidibus quarum axes in circumferentiâ circuli M D N E terminantur, (quæ est ut summa omnium axium P Z ad eam circumferentiam terminatorum) est ut linea P C à puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium P Z ad circumferentiam M D N E pervenientium, missis nempe singularum P Z longitudinibus).

Assumatur enim in circumferentiâ MDNE punctum quodlibet Z, & ductâ per centrum C lineâ Z C ζ, ducatur P ζ, ex demonstratis attractiones Pyramidum ad Z & ζ pervenientium erunt ut P Z ad P ζ; Ducatur ex P in circulum M D N E perpendiculum P R & per R & centrum C ducatur Diameter M R N, sumptaque N r = M R demittatur perpendiculum r p, sitque r p = R P, linea M N, P R & r p sunt in eodem plano (*per 6. XI. Elem.*) ideoque linea P p secabit lineam M N, & cùm Triangula P R C, p r C sint æqualia propter r p = R P, angulos rectos, & angulos per verticem oppositos, sitque N r = M R linea P p transibit per centrum C; erit etiam linea P p in plano Trianguli Z P ζ cùm habeat puncta P & C in eo plano; inde si jungantur lineæ Z p, ζ p, tota figura P Z p ζ erit in eodem Plano, & propter æquales P C, p C, Z C, C ζ & angulos interceptos per verticem oppositos lineæ P Z, p ζ erunt æquales, ut & lineæ P ζ, p Z, hinc figura P Z p ζ est Parallelogramma cujus P p sive 2 P C est Diagonalis; Quare cùm Pyramides trahant secundum directiones P Z, P ζ, viribus quæ sunt ut P Z ad P ζ, vis indè resultans dirigetur secundùm Diagonalem P p, sive 2 P C, eique erit proportionalis.

Quod cùm ita sit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E sumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus Pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut 2 P C multiplicata per numerum parium earum Pyramidum;



sive erit ut P C ipsa multiplicata per numerum omnium P Z ad circumferentiam M D N E terminatarum.

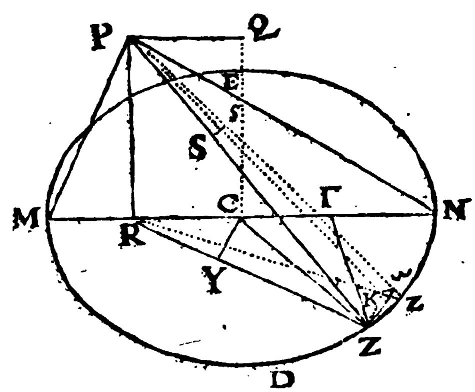
Denique ut obtineatur numerus earum linearum P Z ad circumferentiam quamlibet M D N E terminatarum, observandum est, eas lineas egredientes ab Hemisphærio circa P descripto, in ejus superficie signare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendiculariter centro C, isto enim in casu signarent circulum) & propter æqualitatem distantiæ concursus eorum axium cum superficie Hemisphærii (*ex constructione*) nume-

numerus earum linearum erit ut longitudo ejus lineæ curvæ in superficie Hemisphærii signatæ; huc ergo redit tota quæstio, ut, Dato puncto P ejusque ordinata P Q ad axem solidi rotundi, sumptâque ut libet abscissâ A C, ejus ordinata C M, & circulo M D N E ejus ordinatæ convolutione descripto, inveniatur longitudo curvæ descriptæ in superficie sphæræ (cujus radius P S ad lubitum assumitur) per intersectionem Coni inclinati cujus vertex est P, basis verò M D N E.

Ut longitudo seu rectificatio ejus curvæ obtineatur, Ducantur à puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ MDNE lineæ PZ, Pz; Abscissa circuli secundum Diametrum à puncto N remotiori à puncto P sumatur, sintque N Γ & Γ Z abscissa & ordinata circuli respondentes puncto Z, dicatur N Γ, x, Γ Z, y; Z z, dv; tota Diameter M N, f, duplum ordinatæ P Q sit g, denique si centro P Radio P S describatur arcus S s, ille arcus S s erit elementum curvæ quæsitæ respondens Elemento circuli dv. Ex P, ut prius, demittatur in circulum M D N E perpendiculum P R, erit R C $=$ P Q $= \frac{g}{2}$, ex R ducantur lineæ R Z & R z, & centro C radio R Z describatur arcus Z K ut sit R K $=$ R Z, ex centro C ducatur ad Z Radius C Z, & perpendiculum C Y in lineam R Z, Dico 1°. quod Triangulus R C Y est similis Triangulo R Z Γ, ob angulum in R communem, & rectos Γ & Y, unde est R Z ad Z Γ (y) sicut R C ($\frac{g}{2}$) ad C Y quod erit ergo $\frac{gy}{2RZ}$; 2°. Triangulus C Z Y est similis Triangulo Z K z; Nam angulus R Z K est rectus per Constr. quoniam Triangulus R Z K est Isosceles, Angulus verò C Z z est etiam rectus per naturam circuli, unde dempto communi C Z K manent æquales anguli C Z Y & K Z z, præterea anguli in Y & K sunt recti: erit ergo Radius C Z $\left(\frac{f}{2}\right)$ ad C Y $\left(\frac{gy}{2RZ}\right)$ sicut Z z (dv) ad K Z quod erit ergo $\frac{gy}{RZ \times f}dv$.

3°. Ducatur ex P linea P K, ea erit æqualis lineæ P Z, nam Trianguli P R Z, P R K erunt æquales ob communem P R, æquales per Constr. R Z & R K, & angulos in R rectos (*per 4. XI. Elem.*); hinc si radio P K, centro P describatur arcus K ω, erit P ω $=$ P Z & arcus Z ω similis erit elemento quæsito S s, & Triangulus Z z ω Rectangulus erit in ω.

Porro, Triangulus K ω z erit similis triangulo P R z ob angulum communem in z, & Rectos in R & ω, sive similis



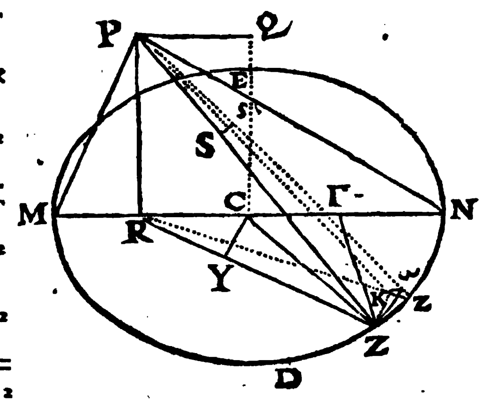
erit triangulo P R Z, ideoque fiat ut P Z ad R Z ita K Z sive $\frac{gy}{RZ \times f}dv$ ad ω z quod erit itaque $\frac{gy}{PZ \times f}dv$.

4°. In Triangulo Z z ω, Rectangulo in ω cùm Z z sit dv & ω Z sit $\frac{gy}{PZ \times f}dv$ erit quadratum Z ω sive $\overline{Z\omega}^2 = dv^2 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}dv^2$ & cùm sit P Z ad P S sicut Z ω ad S s erit PZ^2 ad PS^2 sicut $\overline{Z\omega}^2$ sive $\overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}}dv^2$ ad Ss^2 ergo quadratum Elementi curvæ quæsitæ est $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}}dv^2$: Quod erat Inveniendum.

 Ut

Ut autem Integretur, primò notandum quod ex Naturâ circuli Elementum dv sit æquale Elemento $dx \times \frac{f}{2y}$, ideoque quadratum Elementi inventum evadet $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g^2}{4PZ^2}} \times dx^2$: Præterea est $PZ^2 = PR^2 + RZ^2$, & est $RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$ est autem, ex constructione, $R\Gamma = RN - N\Gamma = \frac{g+f}{2} - x$ ideoque $R\Gamma^2 = \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx - fx + xx$ estque $\Gamma Z^2 = fx - xx$, ideo ($RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$) $= \overline{\frac{g-f}{2}}\Big|^2 - gx$ & $PZ^2 = PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 - gx$; sed est $PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}\Big|^2 = PR^2 + RN^2 = PN^2$, ergo $PZ^2 = PN^2 - gx$, & si ad compendium tertia proportionalis ad $2PQ$ (sive g) & PN dicatur l ut sit $PN^2 = gl$ fiet $PZ^2 = gl - gx$ sicque,

90\. quadratum elementi quæsiti evadet $\frac{PS^2}{gl - gx} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g}{4 \times \overline{l-x}}} \times dx^2$, sive cùm y^2 sit $fx - xx$, erit illud quadratum $\frac{PS^2}{4g \times \overline{l-x}} dx^2 \times \overline{\frac{f^2}{x \times \overline{f-x}} - \frac{g}{l-x}}$.



Dividatur autem f^2 per $x \times \overline{f-x}$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$ &c.

Dividatur g per $l - x$ fit - - - $\frac{g}{l} - \frac{gx}{l^2} - \frac{gx^2}{l^3} + \frac{gx^3}{l^4}$ &c.

Differentia serierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l-g}{l} + \frac{l^2-fg}{l^2 f}x + \frac{l^3 - f^2 g}{l^3 f^2}x^2 + \frac{l^4 - f^3 g}{l^4 f^3}x^3$ &c.

Divid. ea differ. per $l - x$ fit $\frac{f}{lx} + \frac{l+f-g}{l^2} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^3 f}x + \frac{l^3+l^2f+lf^2+f^3-3fg}{l^4 f^2}x^2$ &c.

Unde quadratum elementi Ss est $dx^2 \times \frac{PS^2 \times f}{4gl} \times \frac{1}{x} + \frac{l+f-g}{lf} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^2 f^2}x + \frac{l^3+l^2f+lf^2+f^3-2fg}{l^3 f^3}x^2$ &c. quæ series ad lubitum continuari potest:

Exprimatur autem curvæ quæsitæ longitudo per hanc seriem cujus coefficientes sunt indeterminati $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} +$ &c.

ejus fluxio erit $dx \times \frac{1}{2}Ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}Bx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}Cx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}Dx^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2}Ex^{\frac{7}{2}} +$ &c. cujus quadratum erit $dx^2 \times \frac{1}{4}A^2x^{-1} + \frac{3}{2}AB + \frac{5}{2}ACx + \frac{7}{2}ADx^2 + \frac{9}{2}AEx^3 + \frac{11}{2}AFx^4$

$+ \frac{9}{4}B^2x + \frac{15}{2}BCx^2 + \frac{21}{2}BDx^3 + \frac{27}{2}BEx^4$ &c.

$+ \frac{25}{4}CCx^3 + \frac{35}{2}CDx^4$

Col-

Collatis verò terminis seriei inventæ cum terminis correspondentibus hujus seriei fictitiæ, invenietur $A = \frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}$

$$B = A \times \frac{l+f-g}{6lf}$$

$$C = A \times \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ +2lg - 6fg \\ -g^2 \end{matrix}}{2.4.5\,l^2f^2.}$$ 90.

$$D = A \times \frac{\begin{matrix} 10l^3 + 6fl^2 + 6f^2l + 10f^3 \\ +2gl^2 + 12fgl - 36f^2g \\ +6g^2l - 10fg^2 \\ -2g^3 \end{matrix}}{2.4.4.7\,l^3f^3}$$

$$E = A \times \frac{\begin{matrix} 35l^4 + 20fl^3 + 18f^2l^2 + 20f^3l + 35f^4 \\ +4gl^3 + 12fgl^2 + 60f^2gl - 140f^3g \\ -6g^2l^2 + 60fg^2l - 70f^2g^2 \\ +20g^3l - 28fg^3 \\ -5g^4. \end{matrix}}{2.4.4.4.9\,l^4f^4.} \quad \&c.$$

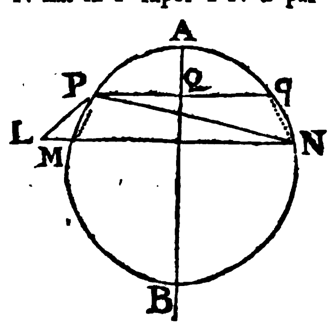
Hinc series quæ exprimit longitudinem curvæ quæsitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\sqrt{f} \times x^{\frac{1}{2}} + \frac{l+f-g}{2.3lf}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ +2lg - 6fg \\ -gg \end{matrix}}{2.4.5\,l^2f^2}x^{\frac{5}{2}} + \&c.$$

Si autem talis sit curva, ut PN sit ubique major quàm g, scribatur loco x longitudo f, sive Diameter circuli, & habebitur valor dimidii curvæ quæsitæ, quod respondet semicirculo MDN: est ergo ea semi-curva,

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}} \times f \times 1 + \frac{l+f-g}{2.3l} \frac{\begin{matrix} 3l^2 + 2lf + 3f^2 \\ +2lg - 6fg \\ -gg \end{matrix}}{2.4.5\,l^2} \&c.$$

In hoc autem casu quantitas l sive $\frac{PN^2}{g}$ est major quàm f, majorem esse quàm g ex hypothesi hujus casus sequitur, cùm PN supponatur major quàm g; majorem autem esse l quàm f hinc liquet, ductâ in Trapezio PqNM diagonali PN fiat in P super PN à parte lineæ PM angulus NPL æqualis angulo q, ita ut occurrat PL lineæ NM, dico lineam NL esse longiorem quàm NM, nam anguli MPq & q sunt æquales, sed angulus NPL est æqualis angulo q; ergo angulus NPL cum angulo NPq major est angulo qPM, cadit ergo L ultrà M; sive NL est major NM; est autem NL æquale l, nam Trianguli PqN & PNL sunt similes ob angulos q & NPL æquales per const., angulosque NPq & PNL æquales ob parallelas Pq, MN, hinc ergo est Pq ad PN ut PN ad NL, sed est Pq sive g ad PN ut PN ad l, ergo est NL æqualis l & major quàm f.



Hinc, ut iſta ſeries convergat, debent ita diſponi termini hujus ſeriei ut remotiores à primo ponantur ii in quibus creſcunt in Numeratore dimenſiones quantitatum f aut g, & in Denominatore dimenſiones quantitatis l, ideóque hanc habet formam.

90. $$\frac{PSf}{PN} \times 1$$

$$+ \frac{1}{2.3l} \times 1 + \overline{f - g}$$

$$+ \frac{1}{2.4.5l^2} \times 3l^2 + \overline{2fl + 2gl} + \overline{3f^2 - 6fg - g^2}$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.7l^3} \times 10l^3 + \overline{6fl^2 + 2gl^2} + \overline{6f^2l + 12fgl + 6g^2l} + \overline{10f^3 - 30f^2g - 10fg^2 - 2g^3}$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.9l^4} \times 35l^4 + \overline{10fl^3 + 4gl^3} + \overline{18f^2l^2 + 12fgl^2 - 6g^2l^2} + \overline{20f^3l + 60f^2gl + 60fg^2l + 20g^3l} + \&c.$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.11l^5} \times 126l^5 + \overline{70fl^4 + 10gl^4} + \overline{60f^2l^3 + 24fgl^3 - 4g^2l^3} \; \&c.$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.4.13l^6} \times 462l^6 + \overline{252fl^5 + 28gl^5} \; \&c.$$

$$+ \frac{1}{2.4.4.4.4.4.4.15l^7} \times 1716l^7 + \&c.$$

Ut autem hæc forma ad ſimpliciorem revocetur, notandum quod ubi eſt $g = 0$ tunc $l = \infty$, ideóque omnes termini hujus ſeriei præter primam columnam evaneſcunt, quoniam continet altiſſimam dignitatem quantitatis l; ſed ubi $g = 0$ tunc Conus PMDNE fit rectus; & curva inſcripta ſphæræ cujus radius eſt PS, eſt circulus cujus Diameter eſt ad f ſicut PS ad PN, undè is Diameter eſt $\frac{PS \times f}{PN}$; ideóque prima columna ſeriei quæ eo in caſu dimidium curvæ exprimit, continet rationem ſemi circuli ad Diametrum 1.

Ideo ſumma tota ejus columnæ $1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7}$ &c, eſt 1.57079 &c. idque in quocumque valore quantitatis g, ſiquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam ſummam ſecundæ columnæ, ea in duas dividatur partes, quarum prior multiplicet $\frac{f}{l}$, altera $\frac{g}{l}$ ut habeatur ſummæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{l}$ obſervandum quod ſinguli coefficientes primæ columnæ (primo termino 1 ſecluſo) ſunt ad coefficientes ſingulos ſecundæ columnæ ut numeri 1 ad 1, 3 ad 2, 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5, 11 ad 6, 13 ad 7 &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque hi coefficientes ſecundæ columnæ ſimul ſumpti dimidium efficiunt quantitatis .57079 additâ inſuper eâ quantitate quâ primi coefficientes ſecundæ columnæ excedunt dimidium coefficientium primæ, qui exceſſus celerrimè convergunt, ſuntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{2.3} + \frac{\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{5}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{7}{2.4.4.4.4.11} + \frac{21}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15} \&c.$$

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

qui termini sunt .08333
.01250
.00446
.00217
.00124
.00078
.00053

.10613
summa reliquorum .00112
dimidium .57079 .28539

.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimò inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est $.39152 \frac{f}{l}$ proximè.

Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coefficientes sunt ad coefficientes alterius partis ut $-$ 1 ad 1, $+$ 1 ad 1, 3 ad 1, 5 ad 1, 7 ad 1, 9 ad 1 &c. finguli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1, 4 ad 1, 6 ad 1, 8 ad 1, 10 ad 1, 12 ad 1 &c., ergo coefficientes alterius partis istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad $-$ 1, 4 ad 1, 6 ad 3, 8 ad 5, 10 ad 7, quæ ratio tandem ad æqualitatem desinit; Ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentiolis supra inventis .10613, & insuper quantitatibus quibus invehi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ sunt 90.

$$-\frac{1\frac{1}{2}}{2.3}+\frac{1\frac{1}{2}}{2.4.5}+\frac{1}{2.4.4.7}+\frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9}+\frac{3}{2.4.4.4.4.11}+\frac{7}{2.4.4.4.4.4.13}+\frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

five $-$ .25
$+$ .03750 Unde summa terminorum ejus columnæ est $-.09952 \frac{g}{l}$ proximè
$+$ .00446
$+$ .00130
$+$ .00053
$+$ .00026
$+$ .00014

$-$ .20581
sum reliq. 16
sum. differ. $+$ .10613

$-.09952 \frac{g}{l}$

Termini tertiæ columnæ summati evadunt $+0.1379 \frac{f^2}{l^2} - 0.0621 \frac{fg}{l^2} + 0.0057 \frac{g^2}{l^2}$

Termini quartæ sunt $+0.07265 \frac{f^3}{l^3} - 0.07119 \frac{f^2 g}{l^3} - 0.0032 \frac{fg^2}{l^3} + 0.03353 \frac{g^3}{l^3}$

Term. quintæ sunt $+0.04965 \frac{f^4}{l^4} - 0.00444 \frac{f^3 g}{l^4} - 0.05586 \frac{f^2 g^2}{l^4} + 0.06380 \frac{fg^3}{l^4} + 0.015 \frac{g^4}{l^4}$

T. sextæ sunt $+0.07469 \frac{f^5}{l^5} - 0.14589 \frac{f^4 g}{l^5} - 0.11563 \frac{f^3 g^2}{l^5} - 0.06938 \frac{f^2 g^3}{l^5} - 0.01376 \frac{fg^4}{l^5} - 0.00385 \frac{g^5}{l^5}$

In hoc casu ubi l est major quàm g aut f, ex istis terminis sufficiens convergentia obtinetur, ut pro vero valore curvæ, hi termini, imò & pauciores assumi possint reliquis omissis; Quoniam ergo invenimus attractionem puncti P à circulo MDNE esse ut PC ductum in numerum linearum PZ in circumferentiâ MDNE terminatarum, sive ut PC ductum in curvam quæ in superficie sphæræ intercipitur, inter lineas PZ, si in singulo puncto C, axeos AB erigatur ordinata quæ sit ut PC

DE MUNDI SYSTEMATE.

90.

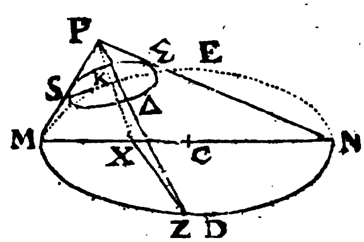
$$\frac{PC}{PN} \times MN \times 1.57079 + 0.39125\frac{f}{l} + 0.1379\frac{f^2}{l^2} + 0.0726\frac{f^3}{l^3}$$
$$- 0.09952\frac{g}{l} - 0.0621\frac{fg}{l^2} - 0.0722\frac{f^2 g}{l^3} \ \&c.$$
$$+ 0.0057 - \frac{g^2}{l^3} - 0.0032\frac{fg^2}{l^3}$$
$$+ 0.03353\frac{g^3}{l^3}$$

& per vertices earum ordinatarum curva ducta intelligatur, exprimet ejus area attractionem puncti P, si modò in hoc valore inserantur quantitates ad curvam revolventem pertinentes; abscissa constans A Q dicatur a, ejus ordinata $PQ = \frac{g}{2}$ sit c, abscissa A C sit x, ordinata C M sit y, erit $PN^2 = \overline{x-a}^2 + \overline{y+c}^2$, ideóque $l = \frac{\overline{x-a}^2 + \overline{y+c}^2}{2c}$, & $PC = \sqrt{\overline{x-a}^2 + c^2}$.

Ex his & æquatione curvæ, determinari poterit punctum axeos in quo transibit circulus talis ut attractio cis eum circulum æqualis sit attractioni ultra eum circulum, sive punctum axeos ad quod tendit media directio gravitatis; hinc ejus obliquitas ad perpendiculum in curvam obtinebitur.

Sed cùm hæc duntaxat valeant cùm g sive P Q q numquam major est quàm P N, generalior alia est solutio, sed cujus calculus paulo prolixior videbitur.

2dus. Casus, si talis sit curva ut incertum sit utrum P N numquam sit minor quàm P Q q sive g.



Ducatur per punctum P linea quæ angulum N P M in duos angulos æquales dividat, & occurrat lineæ M N in puncto X, erit (*per* 3. VI. *Elem.*) $PN + PM$ ad N M ut P N ad N X quod erit ergo $\frac{PN \times f}{PN + PM}$; scribatur is valor loco x in serie quæ exprimit longitudinem curvæ propositæ, ea evadet

$$\frac{PS \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times 1 + \frac{l + f - g}{2.3.l \times \overline{PN + PM}} PN + \frac{\begin{matrix} 8l^2 + 2lf + 3f^2 \\ + 2lg - 6fg \\ - gg \end{matrix}}{2.4.5\, l^2 \times \overline{PN + PM}^2} PN^2 \ \&c.$$

quæ series in omni casu convergit propter quantitatis $PN + PM$ dignitates in denominatore positas; quæ quantitas semper major est quàm P N, f & g in numeratore positas (*per* 20. 1i. *Elem.*), imo si loco l ponatur ejus valor $\frac{PN^2}{g}$ fiatque reductio, series evadet

$$\frac{PS \times f}{\sqrt{PN \times \overline{PN + PM}}} \times 1 + \frac{PN^2 + fg - g^2}{2.3.PN \times \overline{PN + PM}} + \frac{\begin{matrix} 3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2g^2 \\ + 2PN^2 gg - 6fg^3 \\ - g^4 \end{matrix}}{2.4.5.PN^2 \times \overline{PN + PM}^2} \ \&c.$$

Cùm

Cùm autem in Triangulo PNq. vel in Triangulo PMN, PN + MN sit summa laterum & PN numquam sit minimum latus, demonstrabitur facilè quod Rectangulum PN per PM + PN, est majus Rectangulis aut quadratis factis ex reliquis lateribus PN, Pq vel MN, unde in quocumque casu hæc series tam respectu litteralium quantitatum quàm respectu numerorum coefficientium erit convergens, idque satis promptè, siquidem duobus gradibus crescunt dimensiones ab uno termino ad alterum.

Portio autem curvæ quæsitæ respondens tali abscissæ, est accuratè quarta pars totius curvæ quæsitæ, sumptis enim à puncto P secundùm lineas PM, PN longitudinibus PS, PZ æqualibus radio sphæræ, ductâque SΣ; & secto Cono PMDNE secundùm lineam SΣ per planum perpendiculare Plano PNM, sectio erit Ellipsis & SΣ unus ex ejus Ellipseos axibus; quia verò Triangulus PSΣ est Isosceles & linea PX angulum SPΣ bifariam dividit, ea linea PX secabit axem Ellipseos SΣ in ipso centro K Ellipseos; quoniam autem alter axis KΔ est perpendicularis in axem SΣ, & est in plano ad Planum PNM perpendiculari, erit axis ΔK perpendicularis in lineam PKX ideoque erit Parallelus ordinatæ XZ, & linea PZ transibit per punctum Δ; Ergo unus Ellipseos quadrans intercipietur inter lineas PN, PZ, hoc est respondebit portioni NDZ semicirculi NZDN, alter verò quadrans Ellipseos respondebit reliquæ portioni MZ semi-circuli ejusdem; Jam verò evidens est quod si habeatur Conus rectus cujus basis sit Ellipsis quævis, & ab ejus Vertice ut Centro, radio quovis describatur curva in ejus Coni superficie, portiones ejus curvæ singulis quadrantibus Ellipseos respondentes erunt inter se æquales; Ergo portio curvæ respondens abscissæ $x = \frac{PN}{PN + PM} f$ est accuratè quarta pars totius curvæ quæsitæ. 90.

Ergo ex prius inventis, cùm attractio P à Pyramidibus in peripheriam MDNE desinentibus, exprimi debeat per PC ductum in numerum linearum PZ, quæ à puncto P æqualibus angulis procedentes ad peripheriam MDNE desinunt, is verò numerus linearum PZ sit ut curva quæ intercipitur in superficie sphæræ descriptæ radio quocumque PS inter eas lineas PZ, eaque curva in quatuor æquales quadrantes dividatur, erit etiam is numerus linearum PZ ut unus ex eis quadrantibus; exprimitur verò is quadrans per seriem suprà inventam: ergo (posito PS = 1) attractio Puncti P à solido est ut

$$\frac{PC \times f}{\sqrt{PN \times \overline{FN + PM}}} \times 1 + \frac{PN^2 + ff - gg}{2.3.PN \times \overline{PN + PM}} + \frac{\begin{matrix} 3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2g^2 \\ + 2PN^2 gg - 6fg^3 \\ - g^4 \end{matrix}}{2.4.5.PN^2 \times \overline{PN + PM}^2} \ \&c.$$

Hæc series tunc minimùm convergit cùm ex solis coefficientibus numericis convergit, cùm nempe punctum M coincidit cum puncto P, tunc enim quantitates omnes NM, sive f; Pq sive g, PN & PN + PM sunt inter se æquales & $PC = \frac{g}{2}$ tunc ergo series redit ad $PC \times 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \frac{35}{2.4.4.4.9}$ &c.

Eo autem in casu, ex ipsâ constructione liquet, portionem curvæ sphæræ inscriptæ esse quadrantem circuli cujus radius est 1, eumque quadrantem exprimi istâ serie; hinc totam hanc seriem æquipollere quantitati $1.57079 \times PC$.

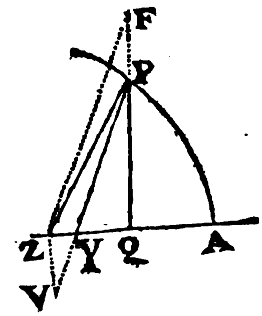
Facilior paulo evadet calculus, si loco summæ laterum PM + PN, adhibeatur quantitas $\frac{fg}{PN - PM}$ ipsi æquipollens. Prolixior tamen est, quàm ut illum applicare sustinuerimus ad ulteriores consequentias.

Dixi ex his viam sterni ad determinationem curvæ quam affectat Meridianus Telluris; nam si ex Æquatione generali $y = Ax^n + Bx^{2n} + Cx^{3n}$ &c. & ex serie inventâ determinetur attractio puncti P à quovis circulo, & erigatur in puncto axis, quod ejus circuli est centrum, ordinata quæ ejus circuli attractionem repræsentet; & intelli-

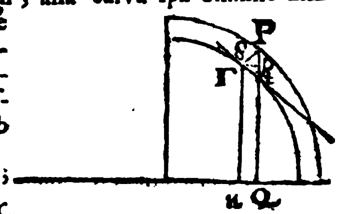
DE MUNDI SYSTEMATE.

intelligatur curva per earum ordinatarum vertices transiens, quæratur ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in solidum; quæratur præterea punctum axeos Y in quo si erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigetur.

90. Pariter ex Æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinget perpendiculum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla ZY & YQ, ex Z ducatur ZV Parallela PQ quæ concurrat cum PY productâ in V, producatur PQ in F ut fiat PF = ZV, ducaturque FZ, quoniam curva circa axem revolvitur, PF erit directio vis centrifugæ agentis in puncto P, PV directio gravitatis, PZ verò curvæ perpendicularis erit directio mediæ nata ex utriusque vis compositione (ut constat facto cùm agatur de tellure ipsâ); sed quia habentur ZY, YQ, PQ & PY habebuntur ZV & VY, ideóque habebitur VP, ergo habebuntur latera & Diagonalis Parallelogrammi FPVZ sive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis & vis mediæ PZ ex utrâque resultantis, fiat ergo ut PV ad PZ ita gravitas puncti P ex attractione solidi nata & per aream curvæ inventa ad residuum ejus gravitatis, demptâ vi Centrifugâ.



Tandem inscripta intelligatur in curva quæ quæritur, alia curva ipsi omninò similis, ita ut earum sit idem centrum, & axes supra se mutuò jaceant, Æquatoris prioris curvæ semi-Diameter dicatur m, & differentia ejus à semi-Diametro alterius, quæ quamminima assumi potest, dicatur dm, abscissa CQ prioris curvæ sit z, erit ejus differentia ab abscissâ correspondenti alterius curvæ $\frac{zdm}{m} = Qn = \Gamma p$; ordinata PQ sit y, ejus differentia ab ordinatâ correspondenti erit $\frac{ydm}{m} = Pp$; quoniam Γt potest sumi ut portio tangentis curvæ, triangulum $\Gamma p t$ erit simile Triangulo fluxionali in puncto Γ sive etiam in Puncto P ob similitudinem curvarum & abscissarum erit ergo: $dz : dy = \Gamma p \left(\frac{zdm}{m}\right) : pt = \frac{zdy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ergo $Pt = Pp + pt = \overline{y + \frac{zdy}{dz}} \times \frac{dm}{m}$ sed si ducatur $P\varrho$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam Triang. $P\varrho t$ simile Triang. $\Gamma p t$ ideoque Triang. fluxionali; nam ob similitudinem curvarum, tangens Γt est parallela curvæ in P; ideóque angulus ϱ est rectus, est ergo dv ad dz ut Pt sive $y + \frac{zdy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ad $P\varrho$ quod erit ergo $\frac{ydz + zdy}{dv} \times \frac{dm}{m}$ sive deletâ ratione $\frac{dm}{m}$ quæ data est, perpendiculi portio inter duas curvas similes intercepti erit ut $\frac{ydz + zdy}{dv}$, multiplicetur id perpendiculum per ydv, factum erit ut annulus solidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2 dz + zydy$ per valorem gravitatis acceleratricis secundum PZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut Pondus fluidi inter curvas similes intercepti in puncto P, sumantur ejus facti fluxiones facta dz constanti, & nihilo æquentur illæ fluxiones, sic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, & habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam Meridianus terræ affectat.

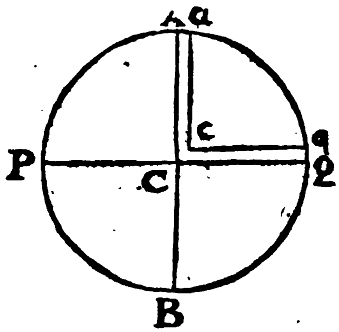


Alia

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.

(a) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ

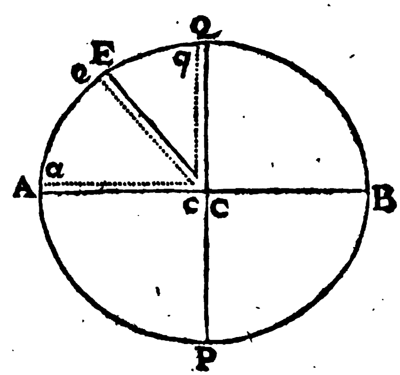


ACQqca æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem

90.

Alia etiam est in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem suppeditare posset, nempe (*fig. præced.*) cùm sit P Q ad Z V ut Z Y ad Y Q, & Z V sit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ est semper proportionalis ordinatæ P Q, ratio Z Y ad Y Q constans esse debet. Bene ergo res se habet si utroque modo eadem obtineatur curva, sin minus, oportet ut inter has hypotheses aliqua sit repugnantia, nempe dari solidum, uniformiter densum, rotans circa axim & in æquilibrio constitutum, in quo media actio inter gravitatem & vim Centrifugam sit perpendicularis ad curvam; Quæ quidem dicta non putentur ut præripiam palmam & laudem illi qui majori patientiâ aut industriâ determinabit generalissimè Meridiani figuram ex genuinis *Newtonianis* principiis, nullâ præsuppositâ ad circulum, Ellipsim, aliamve curvam affinitate, sive his calculis ipsis felicius tractatis sive aliis.

(a) (* *Quoniam pondera*. Concipiatur (*ut suprà prop. 19.*) canalis aquæ plena à polo Q q ad centrum C c & inde ad æquatorem A a pergens. Quia oportet fluidum quiescere (*ex hyp.*) erit fluidum in canalis crure A C in æquilibrio cum fluido in ejusdem canalis crure Q C, & portio qualibet fluidi in crure C A consistet in æquilibrio cum simili & similiter positâ fluidi portione in crure C Q; (ex demonstratis (*in prop. præc.*) idem quoque simili argumento colligitur de corporibus quibusvis homogeneis etiamsi fluida non sint. Quarè corpora homogenea quæ



O 2 sunt

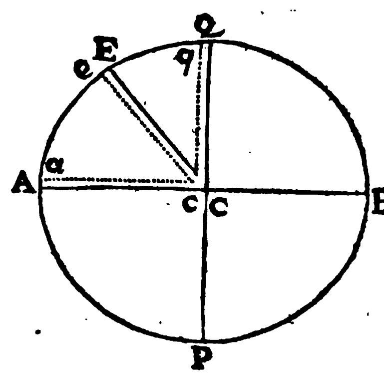
DE MUNDI SYSTEMATE.

ut pondera totorum, ideòque etiam æquantur inter se; erunt pondera æqualium & in cruribus similiter sitarum partium reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciprocè ut crura, id est, reciprocè ut distantiæ corporum à centro terræ. Proindè si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie terræ consistant, erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut distantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam terræ superficiem regionibus, sunt reciprocè ut distantiæ locorum à centro: & (b) propterea, ex hypothesi quod terra sphærois sit, dantur proportiones.

Un-

90. sunt ut A C, Q C in locis A & Q constituta æquè gravia sunt versùs centrum C. Sed gravitas corporis in A positi quod est ut Q C est ad gravitatem alterius corporis homogenei ibidem constituti quod est ut A C sicut Q C ad A C. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco consistentium pondera ut ipsamet corpora, ergò corporum homogeneorum in A & Q positorum gravitates sunt ut Q C ad A C. Eodem modo ostendetur gravitatem corporis in loco E, in alterâ quâcumque canali C E, esse ad gravitatem corporis æqualis & homogenei in loco Q, ut C Q ad C E; fluidum enim in canali A C E quiescere debet sicut in priori canali A C Q (*per hyp.*) undè, ex æquo, æqualium & homogeneorum corporum in telluris superficie ubivis consistentium gravitates absolutæ sunt ut distantiæ à centro reciprocè.

* Gravitatem corporis in E esse ad gravitatem corporis in Q ut C Q ad C E verum est non Mathematicè, sed quam proximè; directio enim gravitatis corporis positi in E non est secundùm E C, ita ut ad centrum C tendat, sed est perpendicularis superficiei QEA (ut ex facto liquet) hinc gravitates in singulis punctis forent reciprocè ut radii osculatores curvæ, ve-

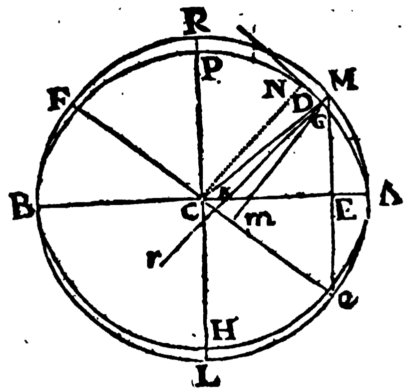


rùm ob figuram terræ prope sphæricam id subtiliùs sectari videtur superfluum, tanto magis quod calculorum consequentiæ cum experimentis sint conferendæ, in quibus semper deficiet Mathematica ακρίβεια.

91. (b) * *Et propterea.* Ex hypothesi enim quod terra sit sphærois, qualem vult NEWTONUS, hoc consit theorema; quod scilicet *incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos sit quamproximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè est, ut quadratum sinûs recti latitu-*

Unde tale consit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, sit quam proximè ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde est, ut quadratum sinus recti latitudinis. Et (c) in eâdem circiter ratione augen-

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROB. IV.



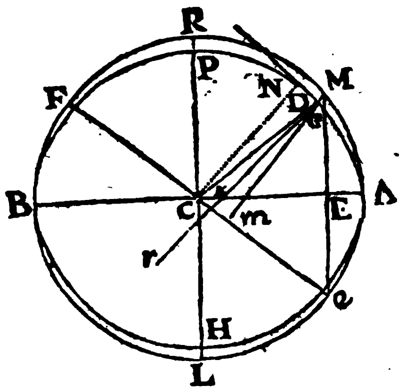
latitudinis. Sit enim A P B A, ellipsis quæ referat meridianum terræ & A R B L A, circulus radio C A descriptus, ad quem Ellipsis A P B A proximè accedit, sitque radius C A semidiameter æquatoris terrestris, erit (ex naturâ ellipsis 247. lib. 1.) $RP : MG = CR : EM$, ideóque $MG = \frac{RP \times EM}{CR}$. Sed propter triangula D M G, E M C, similia, ubi ellipsis ad circulum proximè accedit (tunc enim D G sumi potest pro rectâ tangente Ellipsim in puncto D, & ea tangens est quam proximè perpendicularis radio D C) est $MG : MD = MC : ME$ ac proindè $MG = \frac{MD \times MC}{ME}$, erit ergò $\frac{RP \times ME}{CR} = \frac{MD \times MD}{ME}$, undè fit $MD = \frac{RP \times ME^2}{CR^2}$. Jam verò ex puncto M, ducatur perpendicularis M m ad rectam F e, erit e m sinus versus arcûs duplicati A M, hoc est, arcûs M e, sivè quia A M exhibet latitudinem (10) erit e m, sinus versus latitudinis duplicatæ; sed est $em \times eF = M^2$ (ex proprietate circuli). Quarè ob datam e F, est e m ut eM^2, vel etiam ut ME^2 ideóque M D, est ut $\frac{RP \times em}{CR^2}$, vel ob datas $\frac{RP}{CR^2}$, fit M D, ut e m, sivè ut ME^2. Quia verò pondera in locis A & D sunt ut distantiæ locorum à centro reciprocè (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{CD} - \frac{1}{CA}$, hoc est, ut $CA - CD$, vel ut $CM - CD$ ideóque ut M D. Quarè *incrementum ponderis &c.* 91.

(c) 92. * *Et in eâdem circiter ratione.* Minimus arcus circuli curvam aliquam in dato puncto osculantis pro arcu infinitesimo curvæ in hoc puncto usurpari potest (121. *lib. 1.*). Sed integri gradus sunt ut minimi arcus similes, arcus autem illi sunt ut radii circulorum curvam osculantium, quarè gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipsim ibidem osculantis, & gradus in loco A, itidem ut radius circuli ellipsim osculantis in eodem puncto A. Jam verò ductâ perpendiculari C N, ad tangentem D N, sumptoque D r, pro radio osculatore in D, erit D r ut Dk^3, sive quia est $CP^2 = CN \times DK$ (*ibid.*) ob datam CP^2 erit D k ut $\frac{1}{CN}$, ideóque radius circuli qui est ut Dk^3 erit ut $\frac{1}{CN^3}$, hoc est, radius circuli ellipsim osculantis est reci-

DE MUNDI SYSTEMATE.

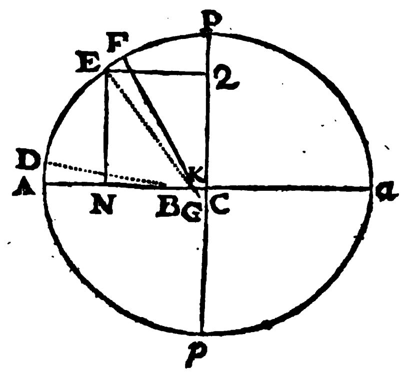
augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideóque cùm latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit $48^{gr}.\ 50'$, ea locorum sub æquatore $00^{gr}.\ 00'$, & ea locorum ad polos $90^{gr}.$ & duplorum sinus

92.



reciprocè ut cubus perpendiculi ex centro C in tangentem DN demissi. Quarè incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{CN^3} - \frac{1}{CA^3}$ hoc est, ut $CA^3 - CN^3$, sive ut $CM^3 - CN^3$ vel etiam ut $CM^3 - CD^3$ quoniam differentia rectarum CN, CD admodùm exigua est. Sed est $CM^3 = (CD + DM)^3 = CD^3 + 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3$, ideóque $CM^3 - CD^3 = 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3 = 3CD^2 \times DM$, ob quantitates DM^2, DM^3, ferè evanescentes respectu $3CD^2 \times DM$, sunt igitur incrementa graduum ut $3CD^2 \times DM$, sive ut DM, ob rectam CD proximè constantem. Quarè incrementa graduum sunt ut ponderum incrementa.

92. Idem analyticè præstari potest quemadmodum elegantissimè, pro more suo, fecit Clariss. D. *De Maupertuis* in Monumentis Paris. an. 1734. & in libro de figurâ terræ. Semiellipsis PAp, referat meridianum sphæroidis cujus est axis Pp, diameter verò secundum æquatorem Aa. Ponatur $CA = 1$, $CP = m$, $CQ = x$, $EN = y$ erit (ex naturâ ellipseos per lem. 4.



de Conicis) $EN^2 : CP^2 = AN \times Na : AC^2$, ideóque $y^2 = m^2 \times (1 - xx)$ & $y = m\sqrt{1 - xx}$. Sit GE, radius circuli ellipsim osculantis in E, is erit (214. *lib.* 1.) $= \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$. Quia verò $EK^3 = \frac{EG \times PC^4}{AC^2}$ (239. *lib.* 1.) erit $EK = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2}$. Jam sinus anguli latitudinis AKE, dicatur s, posito sinu toto $= 1$, erit $1 : s = m\sqrt{1 - {}^2 + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, ac proinde $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$ quo valore substituto, loco xx in expressione radii osculatoris, fiet $EG = \left(\frac{mm}{1 + ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Nunc conferantur simul duo gradus meridiani AD, EF, quorum unus incipiat ab æquatore, alter verò finus verfi fint 1134, 00000 & 20000, exiftente radio 10000, & gravitas ad polum fit ad gravitatem fub æquatore ut 230 & 229. & exceffus gravitatis ad polum ad gravitatem fub æqua-

verò fumatur ubivis in arcu A P, fumpto AB, pro radio circuli ellipfim ofculantis in A, erit (92) AD : EF = AB : EG, fed eft AB $= \frac{PC^2}{AC}$ (241 *lib.* 1.) $= mm$, quarè fi gradus A D dicatur A & gradus E F dicatur E, fiet $A : E = mm : \frac{mm}{(1 - ss + mmss)}^{\frac{3}{2}}$ ac proindè $E = A \times (1 - ss + mmss)^{-\frac{3}{2}}$. Hæc formula exprimit relationem inter primum gradum latitudinis & alium quemlibet gradum, atque inter diametrum & axem.

94. Si quantitas $1 + mm - ss$, evehatur ad dignitatem cujus exponens eft $-\frac{3}{2}$ (550. *lib.* 1.) erit $E = A \times (-\frac{3}{2}(mm - 1)$. $ss + \frac{15}{8} \times (mm + 1) ss^2 - \&c.)$ vel $A - E = \frac{3}{2}(mm - 1) AS^2 - \frac{15}{8}(mm - 1)^2 AS^4 + \&c.$ Quia verò fphærois terræ ad fphæram proximè accedit, erit ferè $m = 1$, ideóque in fuperiori formulâ negligi poterunt termini in quibus quantitas $mm - 1$, ad altiorem poteftatem evecta occurrit, undè fit pro tellure $2A - 2E = 3(mm - 1) \times ASS$. Si terra ponatur versùs polos compreffa erit $1 > m$ & $E > A$, hincque prodit $E - A ASS = 3 \times (1 - mm) : 2$. Quare iterum patet id quod jam demonftravimus (92) arcus fcilicet graduum latitudinis in meridiano augeri in duplicatâ ratione finûs recti latitudinis.

95. Si gradus A D, non computetur ab ipfo æquatore, fed ubivis inter A & E fumatur, fitque S finus anguli latitudinis, patet (94) fore B D $= \frac{mm}{(1 - SS + mmSS)}^{\frac{3}{2}}$ ideóque $A : E = \frac{mm}{(1 - SS + mmSS)}^{\frac{3}{2}} : \frac{mm}{(1 - ss + mmss)}^{\frac{3}{2}}$, ac proindè $E \times (1 - ss + mmss)^{\frac{3}{2}} = A \times (1 - SS + mmSS)^{\frac{3}{2}}$. 96.
Jam verò evectis terminis ut fuprà ad dignitatem cujus exponens $\frac{2}{3}$, neglectifque quantitatibus evanefcentibus (95), fiet $1 - mm = \frac{2(E - A)}{3E \times (ss - SS)}$.

Si gradus unus ab æquatore, alter à polo numeretur, erit $s = 1$, & $S = 0$, ideóque formula præcedens abit in hanc $1 - mm = \frac{2(F - A)}{3E}$.

96. Si loco femidiametrorum C A, C P, & finus latitudinis ss, in æquatione $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$, (93) fubftituantur expreffiones quælibet indeterminatæ, æquatio præcedens quatuor continebit variabiles, quarum tribus cognitis quarta innotefcet. Quare datis femidiametro æquatoris C A, femidiametro paralleli N C vel E Q, x, aut quod idem eft, datis gradu æquatoris & gradu paralleli (funt enim gradus illi ut ipfimet circuli, ideóque ut radii) & fimul cognitâ latitudine, cujus finus s, dabitur axis ellipfoidis. Simili prorfus modo ductâ quâlibet aliâ ordinatâ E Q, quæ fit alterius paralleli femidiameter, & mutatâ utcumque latitudine, inftitui poterit alia æquatio quatuor variabiles continens, ac proindè duplex obtinebitur æquatio. Jam verò quia hæc utraque æquatio duas continet indeterminatas communes, nempè femidiametros ellipfis, patet datis duorum parallelorum gradibus, datifque latitudinibus, per vulgares algebræ regulas collatâ fimul utrâque æquatione, determinari poffe femidiametrorum rationem. Cæterum hæc omnia conftructionibus geometricis facilè abfolvi poffunt, verùm in præfenti materiâ præftat calculum adhibere.

DE MUNDI SYSTEMATE.

quatore ut 1 ad 229: (d) erit excessus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub æquatore, ut $1 \cdot \frac{11334}{20000}$ ad 229; seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. (e) Quare cùm longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secùndis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius (f) ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli sub æquatore superabitur à longitudine synchroni penduli Parisiensis, (g) excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo confit tabula sequens.

96. (d) * *Erit excessus gravitatis.* Excessus gravitatis ad polum dicatur E, excessus gravitatis in latitudine Lutetiæ dicatur e, sitque G gravitas sub æquatore, erit

$E : G = 1 : 229$

$e : E = 11334 : 20000$, ideóque per compositionem rationum & ex æquo $e : G = 1 \times 11334 : 229 \times 20000 = \frac{1 \times 11334}{20000} : 229$, hoc est, excessus gravitatis in latitudine Lutetiæ est ad gravitatem sub æquatore $= \frac{1 \times 11334}{20000} : 229 = 5667 : 2290000$, & propterea addendo 5667 num. 2290000, gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.

(e) * *Quarè cùm longitudines pendulorum.* (Cor. 4. Prop. 24. Lib. 2.).

(f) * *Ob pondus aëris.* Corpus oscillans in aëre ponderis sui partem amittit æqualem ponderis paris voluminis aëris; quarè si idem corpus ponatur moveri in vacuo, paululum augeri debet illius pondus, ideoque celeriùs vibrabit, & ut ad Isochroneitatem reducatur, augeri debebit longitudo penduli eâdem ratione quâ augetur gravitas: hinc cùm $\frac{1}{11000}$ parte plumbi pondus in vacuo augeatur, tantumdem augeri debet penduli longitudo quæ erit ergo ad $440\frac{1}{2}$ l. ut 11001 ad 11000, invenieturque $440\frac{5}{9}$ (289. *lib.* 2.). Hinc in latitudine Lutetiæ Parisiorum longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis in vacuo hic ponitur pedum trium Parisf. & lin. $8\frac{5}{9}$ proximè.

(g) * *Excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum.* Cùm longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, erit 2295667 ad 2290000 ut longitudo penduli in latitudine Lutetiæ, hoc est, ut 3 ped. $8\frac{5}{9}$ lin. vel ut $\frac{3965}{9}$ lin. ad quartum proportionalem $\frac{9079850000}{20661003} = 439.468$, qui est penduli longitudo sub æquatore. Hâc autem demptâ ex longitudine penduli in latitudine Lutetiæ ped. 3. & $8\frac{5}{9}$ lin., seu lin. 440.555, remanet excessus lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ.

Lati-

Latitudo loci.	*Longitudo penduli.*		*Mensura gradus unius in meridiano.*
grad.	*ped.*	*lin.*	*hexapedæ.*
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	59382

Constat autem per hanc tabulam, quòd graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus geographicis figura terræ pro sphæ-

DE MUNDI SYSTEMATE

ricâ haberi possit: (h) præsertim si terra paulò densior sit versus planum æquatoris quàm versus polos.

Jam verò Astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes astronomicas faciendas missi, observarunt quòd horologia oscillatoria tardiùs moverentur prope æquatorem quàm in regionibus nostris. Et primò quidem D. *Richer* hoc observavit anno 1672. in insulâ *Cayennæ*. Nam dùm observaret transitum fixarum per meridianum mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quàm pro medio motu Solis, existente differentiâ 2'. 28'' singulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum simplex ad minuta singula secunda per horològium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem penduli simplicis, & hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Parisiensis (quæ erat trium pedum Parisiensium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem esse, existente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Postea *Halleius* noster circa annum 1677 ad insulam *Sanctæ Helenæ* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quàm *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit plusquam octavâ parte digiti, seu lineâ unâ cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cùm longitudo cochleæ in imâ parte penduli non sufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682. D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli singulis minutis secundis oscillantis in observatorio regio Parisiensi esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insulâ *Goreâ* eàdem methodo longitudinem penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac

95. (h) * *Præsertim si terra.* In eo siquidem casu minui diametrorum differentiam ostendimus (in prop. præc.).

Posthac D. *Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum solis medium in observatorio regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quòd mense *Novembri* proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, existente differentiâ $2'. 13''$ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardiùs ire quàm *Parisiis*, existente differentiâ $4'. 12''$ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{7}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quàm *Parisiis*. (i) Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum $2'. 13''$, & $4'. 12''$ respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuò navigans determinavit quòd in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quàm ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quòdque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quòd in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-belo in Americâ* longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus ferè

(i) * *Rectiùs posuisset.* Horologium tardius ibat Ulyssiponi quàm Parisiis, existente differentiâ $2'\ 13''$, seu $133''$, ideóque horologium illud Parisiis conficiens 24. hor. spatio $86400''$, Ulyssiponi conficiebat tantùm $86400'' - 133''$, hoc est, $86267''$. Sed est longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$. Quarè si longitudo penduli ad minuta secunda Ulyssipone oscillantis dicatur L, erit (*cor.* 4. *prop.* 24. *lib.* 2.) $(86400)^2 : (86267)^2 = \frac{3965}{9} : L$, seù $6718464000 0 : 29507491312885 = 3965 : L$ ac proindè $L = \frac{29507491312885}{67184640000} = 439\frac{13434352885}{67184640000} = 439\frac{5}{6}$ lin. circiter. Est autem longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$ seu 440.555, vel $440\frac{1}{2}$, quarè differentia pendulorum Parisiis & Ulyssipone ad minuta secunda oscillantium debet esse $440\frac{1}{2} - 439\frac{1}{6} = 1\frac{1}{3}$. Rectiùs itaque posuisset *D. Couplet* differentiam esse $1\frac{1}{3}$. Simili computo patet, differentiam pendulorum Parisiis & Paraibæ esse $2\frac{5}{9}$.

96

De Mundi Systemate.

rè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed (k) errante observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantùm trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{11}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est $6^{gr}.\ 38'$ ad austrum, & ea *Porto-beli* $9^{gr}.\ 33'$ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè $4^{gr}.\ 55'$, $14^{gr}.\ 40'$, $14^{gr}.\ 00'$, $14^{gr}.\ 44'$, $12^{gr}.\ 6'$, $17^{gr}.\ 19'$, & $19^{gr}.\ 48'$ ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulò majores quàm pro tabulâ longitudinum penduli superius computatâ. Et propterea (l) terra aliquanto altior est sub æquatore quàm pro superiore calculo, & densior ad centrum quàm in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zonâ torridâ longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Ob-

96. (k) * *Sed errante observatione.* Latitudo Portobeli est $9^{\circ}.\ 33'$ ad boream, & latitudo Martinicæ est $14^{\circ}\ 44'$ Hinc differentia latitudinum est $5^{\circ}\ 11'$. Est autem latitudo Lutetiæ $48^{\circ}.\ 50'$, quarè differentia latitudinum Lutetiæ & Portobeli est $39^{\circ}.\ 17'$. Sed præterquam quod observationes *Feuillæi* à tabulâ *Newtonianâ* maximè discrepant, secum invicem non satis consentire videntur. Cùm enim differentia latitudinum $39^{\circ}\ 17'$, ex iisdem observationibus, præbuerit longitudinem penduli minorem Portobeli quàm Parisiis, tribus fere lineis, differentia latitudinum Martinicæ & Portobeli quæ est $5^{\circ}.\ 11'$ majorem in hisce latitudinibus præbere debuisset penduli differentiam quàm $\frac{3}{13}$ lin. qualem invenit *Feuillæus*. Hunc cæteroquin diligentissimum observatorem non satis hâc in re accuratum fuisse confirmant observationes an. 1735. Portobeli habitæ à Clariss. Viris DD. *Godin* & *Bouguer*, quorum prior penduli longitudinem Portobeli invenit 36 poll. 7. lin. $\frac{7}{89}$, posterior verò eandem longitudinem summo consensu determinavit 36. poll. 7 lin. $\frac{7}{99}$.

(l) 97. *Terra aliquantò altior est.* Materia ad centrum redundans quâ densitas ibi major fit, seorsim à reliquâ tellure uniformiter densâ spectetur, gravitas in terram uniformiter densam erit reciprocè ut distantia à centro (ex demonstratis in *prop.* 19.) Gravitas autem in materiam redundantem erit reciprocè ut quadratum distantiæ à materiâ illâ quam proximè (*prop.* 76. *lib.* 1.) Cùm igitur in casu terræ uniformiter densæ, illiùs superficies versùs æquatorem elevetur, versùs polum verò deprimatur, gravitasque ad æquatorem minor fit quàm ad polum in ratione distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, ad prædictam autem materiam redundantem circà centrum gravitas ad æquatorem minor fit quàm ad polum in ratione duplicatâ distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, quæ ratio priori ratione simplici minor est, patet in casu telluris versùs centrum densioris ex utrâque simul causâ fieri ut gravitas ad æquatorem ex binis prioribus composita minor fit gravitate ad polum in ratione minore quàm est ratio distantiæ poli à centro

Obſervavit utique D. *Picartus* quòd virga ferrea, quæ tempore hyberno, ubi gelabant frigora, erat pedis unius longitudine, ád ignem calefacta evaſit pedis unius cum quartâ parte lineæ. (m) Deinde D. *De la Hire* obſervavit quòd virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi Soli æſtivo exponebatur, evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quàm in poſteriore, in hoc verò major fuit quàm calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad ſolem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori Solis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quàm hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt, diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus aſtronomorum è *Galliâ* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfectè congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint.

centro ad æquatoris ſemidiametrum, & ideò ob minorem hanc gravitatem in æquatore reſpectu gravitatis ad polos tellus magis ad æquatorem elevabitur quàm pro ſuperiori calculo, ac proindè longitudo pendulorum quæ gravitati acceleratrici proportionalis eſt (*cor.* 4. *prop.* 24. *lib.* 2.) paulò major eſſe debet quàm pro tabulâ longitudinum computatâ in caſu terræ uniformiter denſæ.

(m) 9. * *Deindè D. De la Hire.* Hiſce obſervationibus adjungi debent inſtituta à Clariſſ. Viro D. *De Mairan* experimenta quæ in Monum. Pariſ. an. 1735. leguntur. Ut caloris Solaris vim exploraret, laminas ferri & cupri à loco clauſo ac temperato vel etiam frigeſcente, ad locum Solaribus radiis apertum transferebat, ibique plurinm horarum ſpatio relinquebat. Deinde laminarum dilatationem circino accuratè capiebat, menſurato priùs caloris Solaris incremento ope thermometri *Reaumuriani.* Obſervavit ob majorem Solis calorem reſpectu loci clauſi in quo anteà ſuſpenſum erat thermometrum, ad 15 vel 20 gradus liquorem perveniſſe & ferri laminam 3. ped. $8\frac{1}{2}$ lin. longam dilatari invenit $\frac{1}{30}$ vel $\frac{1}{22}$ lin. cuprum flavi coloris majorem quàm ferrum à radiis Solaribus patiebatur dilatationem. Experimentum quoque tentavit in aquâ ebulliente; immerſit nempe in eâ cuprum flavi coloris & ferrum, eandem plane in utroque metallo dilatationem fieri obſervavit; cæterum lamina cuprea tres pedes 8.. lin. $\frac{1}{2}$ longa, menſe Julio, aſcendente thermometro ad altitudinem 22. grad. ſuprà congelationem, ob aquæ ebullientis calorem dilatabatur $\frac{1}{3}$ lin. circiter. 98.

DE MUNDI SYSTEMATE.

possint. Et in hoc concordant omnes, quod isochrona pendula sunt breviora sub æquatore quàm in observatorio regio Parisiensi; existente differentiâ non minore quàm lineæ unius cum quadrante, non majore quàm linearum $2\frac{2}{3}$. Per observationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum semisse, vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eadem quasi duarum linearum. Et hæc discrepantia partim ab erroribus observationum, (n) partim à dissimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim à diversis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior est quàm tempore æstivo, sextâ parte lineæ unius, quantum sentio. Ob calores sub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante à *Richero* observatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum lineâ $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collectâ probe congtuit. *Richerus* autem observationes in *Cayennâ* factas, singulis septimanis per menses decem iteravit, & longitudines penduli in virgâ ferreâ ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Galliâ* similiter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis observatoribus defuisse videtur. Si hujus observationibus fidendum est, (o) terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium septendecim circiter, ut supra per theoriam prodiit.

98. (n) * *Partim à dissimilitudine.* Quæ de pendulorum longitudinibus dicta sunt in hac propositione, supponunt homogeneam esse telluris materiam; si verò homogenea non sit ubique, sed aliqua sit in partibus internis terræ dissimilitudo, patet (*96*) hinc quasdam oriri posse in pendulorum longitudinibus irregularitates. Similem ob causam, ex montium altitudine, vallium cavitate inæqualitates aliquæ nasci poterunt, pro excessu enim vel defectu materiæ augebitur vel minuetur gravitas. Observationum discrepantiam repeti etiam posse à diversis aëris caloribus manifestum est ex observationibus *Picarti*, *La Hirii*, & ex notâ præcedenti.

(o) * *Terra altior erit.* Si hujus observationibus fidendum est, longitudo penduli sub æquatore superabitur à longitudine penduli synchroni Parisiensis excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ, ideóque longitudo penduli sub æquatore erit 3. ped. $\frac{4217}{9000}$ lin. seu 3. ped. 7. 468. lin. proximè, est enim longitudo penduli Paris. 3. ped. $8\frac{5}{9}$ lin. sed est incrementum ponderis sive incrementum longitudinis penduli pergendo ab æquatore ad polos

polos ut finus versus latitudinis duplicatæ; ac proindè $\frac{1087}{1000}$ seu 1 lin. $\frac{87}{1000}$ erit ad incrementum longitudinis sub polo ut 11334 ad 20000. Quarè incrementum illud est $1\frac{10406}{11334}$, seu $1\frac{919}{1000}$ proximè. Erunt ergò pondera seu pendulorum longitudines sub æquatore & sub polo respectivè 3. ped. 7.468 lin. & 3. ped. 9.387 lin. hoc est proximè ut in tabulâ *Newtonianâ*. Sed pondera sunt reciprocè ut distantiæ à centro (*ex demonstratis in Prop.* 19.) ideóque 439468 est ad 441387 ut diameter versùs polos est ad diametrum secundum æquatorem, sivè ut 229 ad 230 proximè, ideóque positâ semidiametro terræ (*ut in Prop. præced.*) patet (*per notas in eandem Prop.*) terram altiorem esse ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium septemdecim circiter.

99. Clariss. D. *Campbell* Londini in latitudine 51°. $\frac{1}{2}$° & in Jamaicâ in latitudine 18°. accuratissimis observationibus institutis, invenit longitudinem penduli simplicis ad minuta secundæ Londini oscillantis esse 39.129. poll. angl. idemque pendulum tardius ire in Jamaicâ quàm Londini deprehendit, existente differentiâ 1′ 58″ spatio 24. hor. Ex his observationibus, eodem quo hactenus usi sumus computo, determinavit longitudinem penduli sub æquatore esse ad longitudinem penduli sub polis ut 39000 ad 39206, undè prodit diameter æquatoris ad diametrum versùs polos in ratione 39206 ad 39000 sivè ut 190 ad 189 ferè; ideòque positâ semidiametro terræ ut in prop. præced. terra altior erit ad æquatorem quàm ad polos excessu milliarium 41 circiter. Doctissimi Viri DD. *Godin*, *Bouguer*, *De la Condamine* summâ diligentiâ in latitudine 18° 27. observationes habuerunt quæ cum observationibus D. *Campbell* probè congruunt. In id quoque conspirant observationes versùs polum institutæ à Celeberrimo D. *De Maupertuis* Clarissimisque Sociis ut terram versùs æquatorem magis elatam constituant quàm pro theoriâ NEWTONI. Idem confirmat accurata graduum terrestrium mensura. Longitudo gradûs meridiani qui circulum polarem secat, à D. *De Maupertuis* inventa est 57437,9 hexaped. & longitudinem gradûs in Galliâ in 45°. 57100. hexaped. probabiliter assumi posse ostendimus. Hinc gradûs utriusque differentia est 337 hexaped. aut ad minimum 300. hex. sed ex tabulâ *Newtonianâ* differentia inter 45 gr. & 65. est 240. hexapedarum, crescunt itaque gradus latitudinis pergendo ab æquatore ad polos magis quàm juxtà tabulam *Newtonianam*, ac proinde non solùm terra est elata sub æquatore (94), sed etiam diametrorum differentia ex observationibus major quàm ex ipsâ theoriâ colligitur. Consulatur observationum series quam Transactionibus Anglicanis an. 1734. inseruit Autor Versionis Gallicæ.

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV.

82.

100. *Scholium.* Penduli longitudinem Romæ determinare pluribus experimentis tentavimus cum Doctissimis & in observando versatissimis PP. *Boscovik* & *Maire* S. J. Mathematicis. Usi sumus methodo illâ accuratissimâ quam sagacissimus naturæ indagator summusque Geometra D. *De Mairan* tradit in Monum. Acad. Reg. Paris. ad an. 1735., ubi experimenta recenset quæ cum incredibili curâ adversùs omne errorum genus peregit. Paravimus itaquè horologium oscillatorium à Celeber. *Graham* Londini constructum, nobisque ab Illustrissimo D. *Leprotti* humanissimè commodatum, quod per appulsum fixæ ad telescopium immotum singulis observationum diebus dirigebamus ut tempus Solis medium indicaret. In machinâ quâdam immotâ constituimus plana duo horizontalia, è quorum altero filum pendebat laminis metallicis aptè inter se congruentibus compressum cochlearum ope, alterum ità sensim elevabatur per cochleas ut horizontalem situm servaret, & globum è filo suspensum inferius contingeret. Distantiam puncti suspensionis à puncto illo infimo globi, quo planum horizontale subjectum contingebat, investigabamus ope mensuræ Londinensis bipedalis accuratissimæ, quam cum pluribus aliis consentientem P. Abbas *Revillas* Clariss. Vir, publicus Profess. Math. & Acad. Londin. Socius exhibuit nobis. Huic mensuræ inserta est altera regula mobilis quam pro arbitrio educere ad altitudinem 4. pedum conficiendam. Hanc igitur inter punctum

sus-

DE MUNDI SYSTEMATE.

suspensionis & punctum globi infimum interponebamus perpendiculariter ad plana horizontalia, maximèque cavebamus ne in hâc mensurâ error aliqualis irreperet.
100. Plura idcirco negleximus experimenta in quibus filum extendebatur observationis tempore, aliaque rejecimus facta cum filo serico vel cum globo eburneo qui nimiam in aëre resistentiam patiebatur. Sex igitur tantum quæ nobis tutissima visa sunt describemus: facta sunt cum globo cupreo cujus quælibet semidiameter inventa est partium digiti Londinensis millesimarum 603, pondus verò unciarum $4\frac{3}{8}$ seu granorum 2520. Illum suspendebamus è filo ex foliis aloës parato, quod gallicè dicitur, *fil de pite*; hujusmodi filum $21\frac{1}{2}$ ped. Londin. longum, æquiponderabat granis 5, & proptereà pondus fili 44 digit. erat ad pondus globi ut 1 ad 2955, pondus verò 35. digit. ad pondus ejusdem globi ut 1 ad 3715. Hinc per ea quæ D. *De Mairan* loco citato demonstravit, si distantia puncti suspensionis à centro globi sit 44 digit. Lond. circiter, ex longitudine observatâ seu interceptâ inter punctum suspensionis & punctum infimum globi subtrahenda erit longitudo 0,6023 digit. ut habeatur vera longitudo penduli simplicis pendulo observationis isochroni. Si verò distantia puncti suspensionis à centro globi sit 35 digit. circiter, auferenda erit longitudo 0,6004 digit.

1. Experimentum 13â. Julii manè.

Longitudo observata	45.145 dig. Lond.
Longit. subtrahenda.	0.6023
Longitudo vera	44.5427.

Numeravimus oscillationes globi 3261 eo tempore quo horologium oscillatorium 3479 absolvit, hoc est, intervallo 3480.69 secundorum temporis medii. Horologium enim tardius movebatur quàm pro medio motu Solis, & differentia erat 42 secundorum pro horis 24. est igitur $\overline{3480.69}^2$ ad $\overline{3261}^2$ ut 44.5427 ad 39.09736 digit. Lond. quæ est longitudo penduli simplicis ad singula minuta temporis medii oscillantis.

2. Experimentum eâdem die vespere. Longitudo observata 45. 18. digit. Lond. longitudo vera 44.5777. Numerus oscillationum globi 3387 tempore medio 3616.75 secund. undè habetur longitudo penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis 39.0941 digit. Londin.

3. Experimentum 14â. Julii. Longitudo observata 36.26. longitudo vera 35.6596 digit. Lond. numerus oscillationum globi 3740 tempore medio 3571.75 secund. longitudo penduli quæsita 39.09827. digit. Lond.

4. Experimentum 16â. Julii. Longitudo observata 36.97. longitudo vera 36.3696. numerus oscillationum globi 3832 tempore medio 3695.88 secund. longitudo penduli quæsita 39.09703 digit. Lond.

5. Experimentum 19â. Julii. Longitudo observata 35.185. longitudo vera 34.5846. digit. numerus oscillationum globi 3870 tempore medio 3639.85. secund. penduli quæsita 39.096485.

6. Experimentum 5â. Augusti. Longitudo observata 45. 427. longitudo vera 44.8247 digit. Lond. numerus oscillationum globi 3563 tempore medio 3815.03 secund. longitudo quæsita 39.097872.

Ex his omnibus experimentis invenitur media longitudo penduli 39.09686 digit. Lond. Verùm si rejiciatur secundum experimentum quod ab aliis quinque inter se probe consentientibus nimis differt; media longitudo prodit 39.0974 digit. Lond. Hoc autem experimentum secundum rejici debere, inde etiam concludimus quod sextum maximè accuratum nobis visum sit, nam omninò invariata fuit fili longitudo toto observationis tempore, & omnes concursus diligentissime notati inter se congruebant.

Pes Londinensis vulgò supponitur esse ad ped. Paris. ut 135 ad 144 vel etiam ut 1000 ad 1068, quâ ratione cùm primùm usi essemus, longè minorem, quàm par est, penduli longitudinem inveniebamus. Sed ratio illa in re adeò subtili satis accurata non est. Nam D. *Godin* Monum. Acad. Reg. Scientiarum ad an. 1735. pag. 508, scribit se cum D. *Bouguer* observasse pedem Lond. se habere ad ped. Paris. ut $1351\frac{1}{3}$ ad 1440. Si hanc adhibeamus rationem, longitudo penduli Romæ erit 3. ped. Paris. 8. lin. $\frac{28}{100}$. Tandem si ratio illa sit numeri 1351 ad 1440 ut quibusdam Mathematicis mensurarum peritissimis videtur, major prodit penduli longitudo, nimirum ped. Paris. 3. lin. 8. 3888.

Hæc

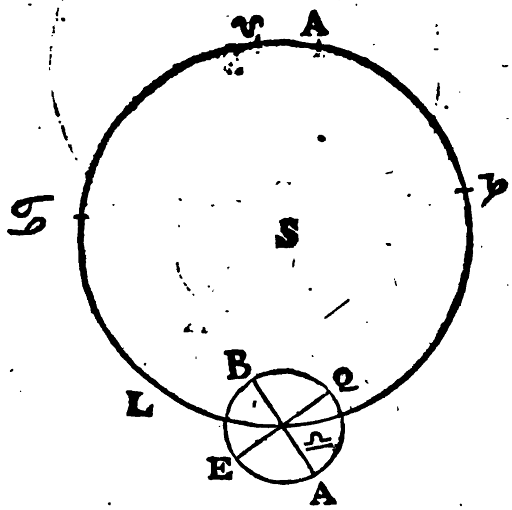
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(p) *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis* (q) *inclinari in eclipticam & bis redire ad positionem priorem.*

Patet *per corol.* 20. *prop.* LXVI. *lib.* I. Motus tamen iste nutandi

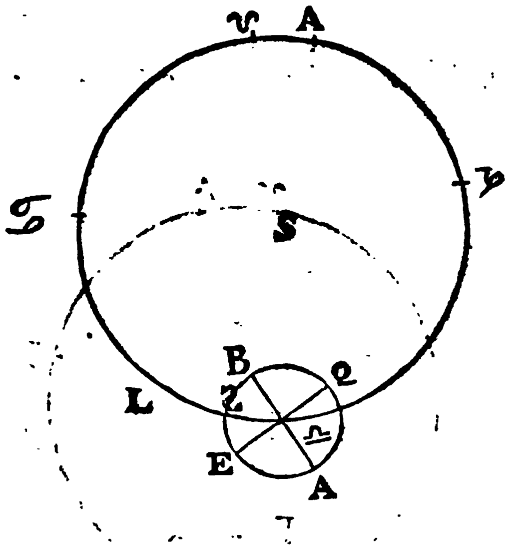
Hæc sunt quæ ad telluris figuram spectant. Hâc de re nova quamplurima an. 1740. & 1741. duplici Dissertatione edidit P. *Boscowick* S. J. insignis Matheseos Professor: maximè autem exoptandum ut ad hujusce quæstionis totiusque matheseos utilitatem salvi & incolumes redeant Clariss. Academici qui ad definiendam telluris figuram nobili ardore laboriosum iter versus æquatorem susceperunt. Simul enim collatis versùs polum & versùs æquatorem institutis observationibus, à Doctissimis Viris pro bono Scientiarum in unum conspirantibus certissima de telluris magnitudine & figurâ, gravitatis decremento, aliisque ad Astronomiam, Geographiam & Physicam maximè momentosis speranda sunt.

(p) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si terra nullo alio motu præter motum progressivum in suâ orbitâ motumque vertiginis circa axem agitaretur, axem suum sibi semper parallelum retineret (*cor.* 22. *prop.* 66. *lib.* 1.) sed ob telluris figuram versus polos depressam & versùs æquatorem oblongatam fit ut axis situs perturbetur. Referat ♈ ♋ ♎ ♑, orbitam telluris circà Solem S, sitque A E B Q, ipsa tellus cujus poli A & B, æquator E Q. Quoniam (*ex prop. præc.*) terra est sphærois ad polos A & B, depressa & versùs æquatorem EQ, elata, instar globi annulo inhærentis spectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quarè (*per cor.* 20. *prop.* 66.) annuli hujus nodi regredientur, hoc est, tellus digressa à librâ ♎, ubi communis sectio Eclipticæ & æquatoris versùs Solem S, dirigitur, & per ♑ versùs ♈ pergens, ad nodum *A* priùs pertinget quàm ad ♈ pervenerit, & tellus ab ♈ per ♋ versùs ♎ progrediens priùs alterum nodum *L* attinget quàm ♎ ubi in priori revolutione erat nodus: id est, æquatoris pla-



num productum; per Solem priùs transibit quàm telluris centrum ad ♎ pervenerit, 101.
sed tunc contingit æquinoctium dum nempè Sol in plano æquatoris terrestris versatur (4) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus Sol videtur tempore æquinoctiorum. Quarè patet, stellis fixis quiescentibus, puncta æquinoctialia omniaque Eclipticæ puncta quæ à punctis æquinoctialibus numerantur, regredi seu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regressus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, sed & Lunæ etiam non leves vires esse possunt; cùm enim Luna in Eclipticæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infrà computabitur motus æquinoctiorum ab utrâque vi, Solis scilicet & Lunæ oriundus.

(q) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In semirevolutione telluris circà solem à nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.



102. ♎ per ♑ ad ♈, actio Solis inclinationem æquatoris in eclipticam minuere conatur cùm illa actio eam inclinationem augere conetur à ♋ ad ♎, hinc maxima fit inclinatio inter ♎ & ♑ postea minuitur ex Solis actione oriunda (*cor.* 10. & 18. *prop.* 66. *lib.* 1.) fitque inclinatio illa minima, cùm terra est inter ♑ & ♈, cùm verò tellus inter ♈ & ♋ pervenit, rursus restituitur præcedens inclinatio (ibid.) sicque deinceps simulque cùm æquatore telluris axis oscillatur, Axis igitur terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam & bis redit ad positionem priorem: Hæc omnia facilè intelliget qui in mentem revocaverit prop. 66. lib. 1. ultimaque ejusdem corollaria.

103. In singulis octantibus inter æquinoctia & solstitia sequentia, inclinatio axis terræ ad eclipticam redit ad priorem magnitudinem, pluriumque annorum decursu sensibilior non evadit, at regressus punctorum Eclipticæ continuo fit in antecedentia, nec ad pristinum locum redeunt puncta æquinoctialia, nisi post integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni spatio insensibilis est, post plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cùm stellæ fixæ quiescant & recedat communis sectio æquatoris & Eclipticæ, necesse est ut mutabilis sit fixarum à punctis æquinoctialibus distantia & stellæ ab iisdem punctis versus orientem quotidiè progredi videantur, undè ipsarum longitudines quæ in eclipticâ ab initio arietis sive intersectione vernali eclipticæ & æquatoris computari solent, continuò crescunt, & fixæ omnes videntur moveri in consequentia signorum. Hinc fit quod constellatioues omnes antiquam sedem mutaverint. Sic constellatio arietis quæ tempore *Hipparchi* propè intersectionem vernalem Eclipticæ & æquatoris visa fuit, nunc ab eâdem digressa in signo Tauri moratur, sicut & Tauri constellatio in geminorum locum transivit, geminique in cancrum promoti sunt, ità ut unaquæque constellatio è suo in proximum locum successerit. * Cùm autem hîc, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipsum nodorum, nec ad Excentricitatem orbitarum quas terra aut Luna describunt, nec ad Apsidum motus, nec ad irregularitatem molis terræ attenderimus, nec denique ad aliorum Planetarum actiones, quædam etiam Eclipticæ inclinationi mutatio afferri potest, quæ forte perseverabit satis ut sensibilis evadat: inclinationis angulum 1′ centum annis decrescere volebat *Louvillæus*, cui non repugnant quæ *Cassinus* in Astronomiæ Elementis, ex variâ Astronomorum æstimatione inclinationis Eclipticæ retulit. Sed de iis plura in posterum erunt dicenda.

PRO-

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet *per prop.* LXV. *lib.* I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimodè, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Lunâ nostrâ notantur. Hæc utique (*per corol.* 2, 3, 4, & 5. *prop.* LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in syzygiis quàm in quadraturis, nisi quâtenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (*per corol.* 9. *prop.* LXVI.) ubi apogæum Lunæ in syzygiis versatur, & minima ubi idem in quadraturis consistit; & inde Luna in perigæo velocior est & nobis propior, in apogæo autem tardior, & remotior in syzygiis quàm in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, & regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (*per corol.* 7. & 8. *prop.* LXVI.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (*per corol.* 2. *prop.* LXVI.) quiescunt in syzygiis suis & velocissimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (*per corol.* 10. *prop.* LXVI.) quàm in syzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (*per corol.* 6. *prop.* LXVI.) quàm in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam à (a) prioribus astronomis non observatæ

(a) * *A prioribus Astronomis non observatæ.* Inæqualitates illæ quas hic per transennam enumerat NEWTONUS, æquationesque omnes seu correctiones deinceps com-

 1041

De Mundi Systemate.

servatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur; ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi & nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (*per corol.* 14. *prop.* LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (*per corol.* 1. & 2. *lem.* X. & *corol.* 16. *prop.* LXVI. *lib.* I.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prostaphæresin Lunæ referri solet, & cum eâ confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales satellitum Jovis & Saturni à motibus lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum Lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici terræ circa Solem ad tempus periodicum jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa jovem ad tempus periodicum Lunæ circa terram (*per corol.* 16. *prop.* LXVI. *lib.* I.) ideoque (b) annis centum conficit nodus iste 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium), & inde dantur. Motus au-

104. commodius explicabuntur; & quomodò variatio Lunæ ad prostaphæresim in calculo Astronomico referri soleat, exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo mensis quadrante, sive pergente Lunâ à conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in secundo acceleretur dùm tendit à quadraturâ ad oppositionem, in tertio retardetur rursus & in quarto iterum acceleretur.

(b) * *Ideòque annis centum.* Tempus periodicum terræ circà solem est dierum 365.2565 ⅓, tempus periodicum jovis circà solem est dierum 4332.514 (*per phæn.* 4.) tempus periodicum satellitis circà jovem est autem augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum nodorum, (*per idem corol.*) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob (c) causam quam hic exponere non vacat.

LIBER TERTIUS. PROP. XXIII. PROBL. V.

est dierum 16.6880 (per phæn. 2,) & tempus periodicum Lunæ circà terram dierum 27.321. (prop. 17.). Sumptisque Logarithmis, erit

L. $(365.2565)^2 = 5.1251956$
L. $16.6880 = 1.2224043$

utriusque summa $= 6.3475999$

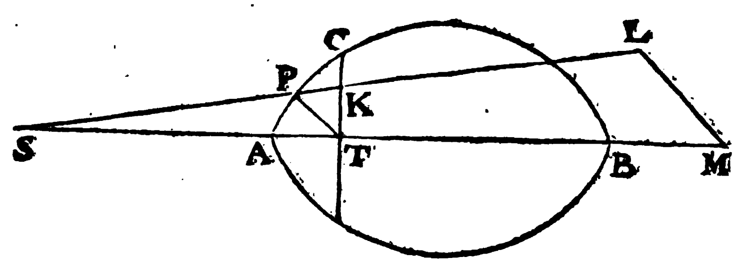
Deindè L. $(4332.514)^2 = 7.2734600$
L. $27.321 = 1.4364966$

utriusque summa $= 8.7099566$

Ab hâc ultimâ subtrahatur summa superior - - - 6.3475999

residuum erit L. 2.3623567

Cui respondet numerus 230.38. Quarè ex hoc calculo & Analogiâ NEWTONI patet motum nodorum satellitis extimi jovis esse partem circiter 230am. motûs nodorum Lunæ, sed est motus annuus nodorum Lunæ 19°. 21′ 21″, ut dicetur posteà. Hisce si multiplicetur motus ille annuus per 100 factumque dividatur per 230, prodibit motus nodorum satellitis intervallo annorum centum 8°. 24′. Ab hujus sæculi initio nullum in nodis satellitum jovialium sensibilem motum fuisse observatum testatur Clariss. *Cassinus* in Elem. Astr. 105.



(c) 105. *Ob causam quam hic exponere non vacat.* Referat S, Solem, sitque P satelles, putà Luna revolvens circà Planetam primarium T scilicet terram, in ellipseos umbilico positum; erit B apsis summa, A apsis ima, eritque T B, distantia maxima & A T distantia minima. Jam verò quò minor est distantia A T, respectu distantiæ T B, eò celerius apsides progrediuntur, (per not. in cor. 8. *prop.* 66. *lib.* 1.). Ea est correctionis causa quam Autor noster non exponit. Cùm enim satellites Jovis & Saturni circà suos Planetas primarios describant circulos ferè concentricos (*phæn.* 1. & 2.) Luna verò circà terram in orbitâ ellipticâ revolvatur, & major fit motus nodorum in orbitâ ellipticâ quàm in circulari, cæteris omnibus manentibus, hinc motus augis cujuscumque satellitis per Analogiam ex motu Augis Lunaris inventus, diminui debet in ratione paulò minore quàm 1 ad 2, calculo non absimili illi qui 31a. prop. instituetur.

DE MUNDI SYSTEMATE.

vacat. (d) Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis Lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. (e) Variatio ſatellitis è jove ſpectati, eſt ad variationem Lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & Luna ad ſolem revolvuntur, per idem corollarium; ideóque in ſatellite extimo non ſuperat $5''. 12'''$.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare ſingulis diebus tam lunaribus quàm ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet (f) *per corol. 19. & 20. prop.*

105. (d) * *Æquationes maximæ.* Nam errores angulares in ſingulis revolutionibus geniti, ideóque eorumdem errorum correctiones ſeu æquationes maximæ ſunt ut ſatellitum tempora periodica reſpectivè (*per cor. 16. prop. 66. lib. 1.*). Sed tempora periodica ſunt ut motus ipſi angulares reſpectivè (*lib. 1.*). Quare in eâdem quoque ratione ſunt æquationes maximæ.

(e) * *Variatio Satellitis è jove ſpectati*, hoc eſt, motus angularis ſatellitis eſt ad motum angularem Lunæ ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & Luna ad Solem revolvuntur, ſivè clariùs in ratione nodorum Lunæ ad motum nodorum annuum & temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum ſatellitis (*per cor. 16. prop. 66. lib. 1.*) & not. in idem coroll.). Jam verò motus nodorum Luuæ annuus eſt $69681''$, ut poſteà ſtatuitur à NEWTONO, nodus autem ſatellitis extimi jovialis annis centum conficit $8°. 24'$ ideóque motus ejuſdem annuus eſt $302\frac{2}{5}$, tempus periodicum Lunæ eſt dierum 27.321 & ſatellitis extimi dierum 16.688. Sumptis Logarithmis erit

L. 69.681 = 4.8431144
L. dierum 27.321 = 1.4364966

utriuſque Log. ſumma = 6.2796110

Deindè L. $302\frac{2}{5}$ = 2.4805818
Log. dier. 16.688 = 1.2224043

utriuſque ſumma = 3.7029861

Hæc ſubtrahatur à ſummâ ſuperiori 6.2796110 remanet Log 2,5766249, cui reſpondet numerus 378. ferè. Quarè ex Analogia NEWTONI & calculo colligitur variationem ſatellitis eſſe partem 378am. variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogæo Solis deinceps determinat NEWTONUS $33'\ 14''$ ſivè $1994''$. Quarè pars 378a. eſt $5''\ 15'''$ ut NEWTONUS invenit, quamproximè.

(f) * *Per Cor. 19. & 20.* Si fluidum in alveo per ſuperficiem cujuſvis Planetæ excavato contineatur, ſimulque cum Planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes ſingulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in ſyzigiis ſuis, hoc eſt, in meridie & mediâ nocte velo-

prop. LXVI. *lib.* I. ut (g) & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum luminarium ad meridianum loci minori quàm sex horarum spatio sequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter secundam, tertiam vel quartam, incidit, nisi ubi motus ab Oceano profundo per loca vadosa propagatus usque ad horam, quintam, sextam, septimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulsu luminaris utriusque ad meridianum loci, tam infra horizontem quàm supra, & per horas diei lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impressa manet aliquamdiu & per vim novam subinde impressam augetur, donec mare ad altitudinem maximam ascenderit, id quod fiet spatio horæ unius duarumve, sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter, vel etiam plurium si mare sit vadosum.

LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

(h) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernen-

velociores erunt; in quadraturis sivè horâ sextâ matutinâ, & vespertinâ tardiores quàm superficies globi contigua; quare fluet in alveo refluetque per vices perpetuò (*per cor.* 19. & 20.) idem posteà iterum demonstrabitur, viresque Solis & Lunæ seorsim computabuntur.

(g) * *Aquæ maximam altitudinem.* Rem ità se habere patet ex observatis æstibus marinis, ratio autem hæc est. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima est in ipso appulsu luminaris ad meridianum & posteà decrescit, attamen hujus vis effectus nondum est maximus. Omnis enim motus semel impressus perseverat uniformiter, donec motu contrario destruatur vel saltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per sex circiter horas antemeridianas auctus & cum motu diurno conspirans acceleratus, majori celeritate ulterius pergere debeat & aquas magis magisque attollet, usquè dum eadem vis motui diurno contraria fluidi cursum paulatim sistat & aquas cogat refluere. Hæc motûs retardatio maximè circà octantes sivè horam tertiam notabilis est. Alia non desunt exempla maximorum effectuum qui post causas maximas contingunt. Non in ipsis solstitiis æstivis maxime fervet æstas, sicut neque in ipsis solstitiis Hybernis maximè friget hiems; sed integro circiter mense post solstitia maximus deprehenditur æstatis Hyemisque effectus. Indubitatâ quoque constat experientiâ summum calorem secundâ aut tertiâ post meridiem horâ fieri.

105.

(h) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi sollicitatum in lineis duabus progredi nequit, sed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo describit ac si unicâ vi juxtà diagonalis directionem urgeretur (41.

DE MUNDI SYSTEMATE.

cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur (i) fluxus & refluxus maximus. In quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Luna attollit; & ex effectuum differentiâ æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus Lunæ quàm Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus qui solâ vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideóque in transitu Lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes Lunæ, & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu Lunæ à quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis à terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in (k) triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis (l) paulò majores sint, & in quadraturis paulò minores (cæteris paribus) quàm tempore æstivo; & Luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quàm antè vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. (m) Unde fit ut æstus duos omnino maximi in syzygiis continuis se mutuò non sequantur.

Pen-

105. (41. lib. 1.) ità motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur distinctè, sed motum quemdam mixtum efficient.

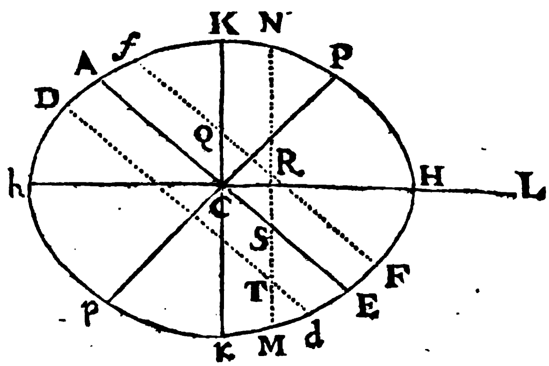
(i) * *Fluxus & refluxus maximus*, ut potè è virium summâ tum temporis oriundus.

(k) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (cor. 14. prop. 66. lib. 1.).

(l) * *Paulò majores sint*, ob majorem virium summam & in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quàm tempore æstivo.

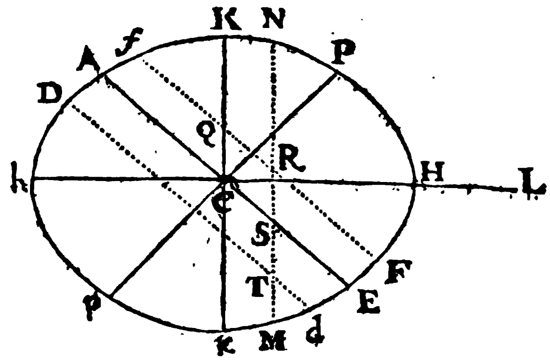
(m) * *Undè fit ut æstus*. Si enim Luna in syzigiarum alterâ fit circà perigæum, æstumque maximum conjunctis cum Sole viribus tunc temporis excitet, necesse est ut in alterâ syzygiâ versetur circà apogæum minoresque vires obtineat.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantiâ ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione & remissione, ideóque nullam motûs reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quàm in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quàm in quadraturis æquinoctialibus, eo quod Lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maximè superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientiâ compertum est. Per minorem autem distantiam Solis à terrâ, tam tempore hyberno quàm tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum quàm sequantur, & sæpius sequantur autumnale quàm præcedant.



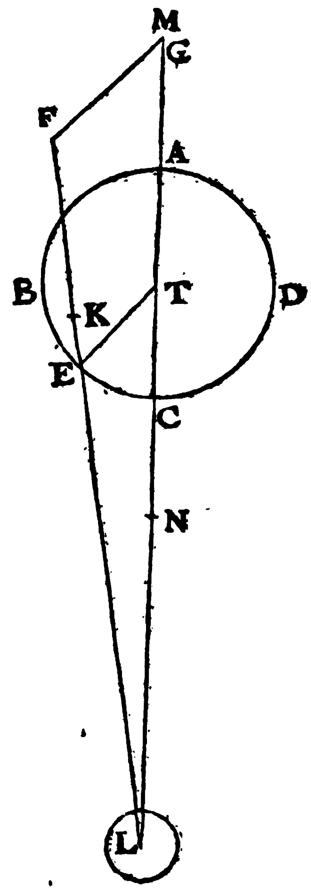
Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei respondentem ex alterâ parte æquatoris; *L* locum quem Luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 distantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas mensuratas à centro telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & si axibus *Hh*, *Kk* describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur sphæroïs *HPKhpk*; designabit hæc figuram maris

DE MUNDI SYSTEMATE.



ris ([n]) quam proximè, & erunt CF, Cf, CD, Cd altitudines maris in locis F, f, D, d. Quinetiam si in præfatâ ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum NM, secantem parallelos Ff, Dd in locis quibusvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo maris in locis omni-

106. (n) 106. * *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T descriptus tellurem referat; circulus autem centro L descriptus exhibeat Lunam. Si nulla esset in tellurem actio, tellus profundis aquis undiquè cooperta & quiescens (*per hyp.*) in sphæram sese componeret. At singulæ telluris partes gravitant in Lunam, estque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Jam verò recta L T, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T positi versus Lunam, sitque E quælibet fluidi marini particula. Si in rectâ L E productâ sumatur L K æqualis L T, sitque L F ad L K in duplicatâ ratione L K ad L E, recta L F exponet gravitatem corporis in loco E versus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut F G & G L (*prop 66. lib.* 1.). Si autem à vi illâ quâ corpus in E locatum urgetur, quæ est ut G L, auferatur vis ut T L quâ centrum telluris urgetur versus Lunam, relinquentur vires ut F G, G T, quibus corpus E sollicitatur præter vim propriæ gravitatis quâ tendit versus centrum terræ & vim ipsi communem cum centro ipsius terræ. Jam sit C punctum telluris cujus zenith Luna immineat, A verò punctum oppositum, sintque B & D puncta circumposita, sive potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna versatur, liquet punctum G à T maximè distare, ubi punctum E est aut in C, aut in A; in priori casu G transeat in M, in posteriori in N; dum verò punctum E versatur in circulo B D, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in



circulo

bus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad meridianum supra horizontem, postea defluxus maximus in *Q* horâ tertiâ post occasum lunæ, dein affluxus maximus in *f* horâ tertiâ post appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* horâ tertiâ post ortum Lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quàm affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum hemisphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito *Khk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet.

circulo B D locatis relinquitur vis præter vim gravitatis propriæ atque vim FG, ipsa verò F G, fit B T aut D T, coeuntibus punctis F & K; quare fluidi particulæ in locis B & D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam versus centrum T vi ex Lunâ procedente, Particulæ in loco C, versus Lunam magis attrahuntur quàm terra integra quæ in centro T locata fingi potest; particulæ autem in loco A, versus Lunam minùs attrahuntur quàm terra integra in T, ideòque eodem modo afficiuntur ac si ad partes contrarias urgerentur. At particulæ in circulo B D, magis gravitant versus T; in locis inter A, vel C, & B vel D, intermediis fluidi particulæ utramque conditionem participant; quo viciniores sunt fluidi terrestris partes punctis C & A, eò minus graves sunt, nam actio Lunæ sivè vis ut G T, vim propriæ gravitatis versus T minuit, & quo propiores sunt punctis B & D, eò graviores fiunt, eadem enim actio Lunaris sivè vis ut F G, gravitatem propriam auget. Quia verò globus A B C D, fluido satis profundo undiquè coopertus ponitur, fluidi autem partes cedunt vi cuicumque illatæ & cedendo facilè moventur inter se, fluidum illud versus A & C positum à fluido versus B & D, posito expelletur, levius scilicet à graviore, attolletur ergò fluidum versus A & C, deprimeturque versus B & D, donec scilicet major fluidi moles & altitudo majorem gravitatem compenset, & ubique constituatur æquilibrium.

Quapropter superficies maris sese componet in figuram sphæroidem cujus axis est recta A C, quæ producta per Lunam transibit. Hinc patet figuram maris in sphæroidem oblongam formari debere.

107. Simili argumento patet consideratâ Solis actione fluidum terrestre componi in sphæroidem oblongam cujus axis productus per Solem transit. Si enim (*in figur. præc.*) globus L non Lunam sed Solem designet, cætera se habent ut suprà. At in hoc casu minor erit quàm in altero axium differentia. Nam fluidi tumor in C hinc oritur quod fluidum magis gravitet versus Lunam quàm telluris centrum T, tumor autem fluidi in A, inde provenit quod terræ centrum magis quàm fluidum versus Lunam gravitet; quare, si hæc elevatio Solis actioni tribuatur, minor erit effectus quamvis actio Solis in terram major sit quàm actio Lunæ in eamdem, telluris enim semidiameter T C vel T A fere evanescit respectu immensæ Solis à terrâ distantiæ, ideóque fluidi in C locati gravitas versus solem erit insensibiliter major gravitate telluris versus eundem, & fluidi in A positi gravitas versus solem erit insensibiliter minor gravitate telluris versus eundem, quare figura sphæroidea indè genita parum intumescet ad vertices C & A, parumque in circulo B D deprimetur, attamen propter immensas Solis, licet remotissimi vires, aliquis erit actionis Solaris effectus. 107.

De Mundi Systemate. licet. Hi fluctus semper sibi mutuò oppositi veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum lunarium duodecim. Cùmque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æstus autem major, Lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad meridianum supra horizontem, & Lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in (o) tempora solstitiorum; præsertim si Lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superant vespertinos, & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* verò altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æstus, etiam cessantibus luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motûs impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proximè post syzygias majores reddit, eosque proximè post quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multò magis differant ab invicem quàm altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi à syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & fluviorum ostiis, sint (p) quarti vel etiam quinti à syzygiis.

Porro

107. (o) * *In tempora solstitiorum.* Tunc enim in syzygiis utrumque luminare ab æquatore maximè declinat, atquè fluxuum differentia adhuc augebitur, si Lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis; nam præter declinationis Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in Boream aut austrum magis declinat. Hinc fit fluctus Borealis nobis vicinissimus & fluctus australis remotissimus in eâdem revolutione diurnâ.

(p) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In opusculo de mundi systemate quædam occur-

Porro fieri potest ut æstus propagetur ob oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quàm per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successivè advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales à diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquillè stagnet. Si Luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini

occurrunt observationes quæ ad hunc locum pertinent, eas itaque exscribemus. Fieri etiam potest, inquit Autor, ut æstus omnium maximus sit quartus vel quintus à syzygiis vel tardius adveniat, eò quod retardantur motus marium in transitu per loca vadosa ad littora. Sic enim æstus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ Lunari, & post horam unam & alteram ad portus in littore australi ejusdem insulæ ut & ad insulas Cassiterides vulgò Sorling dictas. Dein successivè ad Falmuthum, Plimuthum, Portlandiam insulam, Vectam, Winchelseiam, Doveriam, ostium Tamesis & Pontem Londinensem, consumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipsius alveis haud satis profundis impeditur æstuum propagatio, incidit enim æstus ad insulas fortunatas & ad Occidentalia marique atlantico exposita littora Hiberniæ, Galliæ, Hispaniæ & Africæ totius usque ad caput Bonæ Spei in horam tertiam Lunarem, præterquam in locis nonnullis vadosis ubi æstus impeditus tardiùs advenit, inque freto Gaditano quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æstuat; pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æstus primò ad Brasiliæ littora maximè 108. Orientalia circà horam Lunarem quartam vel quintam; deindè ad ostium fluvii Amazonum horâ sextâ, ad insulas verò adjacentes horâ quartâ, posteà ad insulas Bermudas horâ septimâ & ad Floridæ portum S. Augustini horâ $7\frac{1}{2}$. Tardius igitur progreditur æstus per Oceanum quàm pro ratione motûs Lunæ; & pernecessaria est hæcce retardatio ut mare eodem tempore descendat inter Brasiliam & novam Franciam, ascendatque ad insulas Fortunatas & littora Europæ & Africæ & viceversâ. Namque mare ascendere nequit in uno loco quin simul descendat in altero. Lege jam descriptâ agitari quoque mare pacificum verisimile est. Namque æstus altissimi in littore Chiliensi & Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam Lunarem, sed quâ velocitate propagantur inde ad littus Orientale Japoniæ & ad insulas Philippinas cæterasque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum cursu. Nam cursus ille facit aquam tardiùs influere ex mari, & in mare citius & velocius re-

bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam: & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad meridianum, atque Lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine boreali 20 gr. 50'. *Halleius* ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum Lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein Luna ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum Lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum Lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimam vel octavam, dein

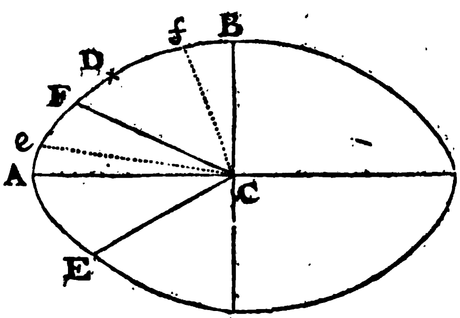
109. fluere, atque adeò diutius refluere quàm influere, præsertim si longè in flumen ascenditur ubi minor est vis maris. Sic in fluxu Avonæ ad tertium lapidem intrà Bristoliam refert *Sturmius* aquam horis quinis influere, septenis refluere suprà Bristoliam, ut ad Canesham vel Bathoniam differentia procul dubio major est. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam prope Luminarium syzigias, vehementior maris motus facilius superando resistentiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeóque minuet hanc differentiam: intereà verò dum Luna ad syzigias properat, necesse est ut flumina ob cursus suos per magnitudinem æstuum impeditos magis impleantur & proptereà maris refluxum paulò magis impediant proximè post syzygias quàm proximè antè. Eâ de causâ æstus omnium tardissimi non incident in ipsas syzygias, sed paulò præcedent. Dixi æstus etiam antè syzygias retardari vi Solis. Conjungatur causa utraque, & æstuum retardatio & major erit & syzygias magis præcedet. Quæ omnia ità se habere colligo ex tabulis æstuum quas *Flamsteedius* ex observationibus quamplurimis construxit.

109. Æstuum magnitudo non parum etiam pendet à magnitudine marium, ut in opusculo citato observat Clariss. Autor. Sit C centrum terræ, E A D B oblonga maris figura, C A semiaxis major, G B semiaxis minor priori insistens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A & B, sitque E C F, vel ipsi æqualis e C f angulus ad centrum terræ, quem subtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminari; vertetur autem punctum A, in medio inter puncta E, T, & punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum C A, C B, exponatur quantitas æstûs in mari satis profundo terram totam cingente, excessus altitudinis C A super altitudinem C E vel C F designabit maximam quantitatem æstûs in medio maris E F littoribus E, F terminati, & excessus altitudinis C e super altitudinem C f.

dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit, quibus antea creverat; & luna declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinensi* inter continentem & insulam *Luconiam*, alter à mari *Indico* inter continentem & insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim à mari *Indico*, & spatio horarum sex à mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitne alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

LIBER TERTIUS. PROP. XXIV. THEOREM. XIX.

Hactenus causas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua subjungere.



C f, exponet maximam quantitatem æstûs ad littora ejusdem maris. (Nam, differentia inter Diametrum bisecantem angulum datum quem faciunt duæ Diametri Ellipseos & alterutram ex illis Diametris major esse non potest ex naturâ Ellipseos quàm si illa Diameter bisecans sit semi axis major & differentia inter illas duas ipsas Diametros angulum datum constituentes major esse nequit quàm si Diameter angulum bisecans faciat angulum cum axe semi - rectum). Unde patet æstus ad littora esse propèmodum ut maris latitudo EF, arcu quadrantali non major. Hinc fit ut nullus aut ferè nullus observetur aquarum motus in maribus non satis latè patentibus, nisi cum Oceano ipso liberè communicent. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicent, ut accidit in mari mediterraneo, æstus quoquè eam ob causam minor deprehenditur. Hinc est etiam quod prope æquatorem ubi mare inter Africam & Americam angustum est, æstus sint multo minores quàm hinc inde in zonis temperatis ubi maria latè patent, & in maris pacifici littoribus ferè singulis tam Americanis quàm Sinicis & intrà tropicos & extrà. Contingere tamen potest ut æstus qui in Oceano mediocris est, in fluviis evadat maximus propter transitûs angustias littorumque seorsim coeuntium convergentiam. Hæc de maris æstu pro præsenti dicta sint: de hâc nobilissimâ inter Physicos quæstione plurima in decursu, ubi recurret occasio, adjungemus. Prolixius foret pro æqui factas à diligentissimis Philosophis æstuum observationes; legantur quæ huc & illuc tum in Transact. Angl. tum in Mon. Paris. dispersa inveniuntur, sed ea præsertim quæ Clariss. Viri *Halleius* num. 226. Transact. & *Cassinus* in Mon. Paris. an. 1712. 1713. scripta reliquerunt. 109.

EDITOR

EDITOR LECTORI.

Felicius commentari non possumus ea quæ tradit Autor noster de Maris æstu, quàm huic Propositioni subjungendo eas Dissertationes quæ Præmio fuêre condecoratæ à Celebri Parisiensi Scientiarum Academiâ. Id quidem primum nobis fuerat propositum, ut ea quæ in illis Dissertationibus momentosiora viderentur & ad Newtonianæ *Philosophiæ illustrationem pertinerent, brevi compendio comprehensa Notis adjiceremus; verùm trunca ac ingenii nostri vitio detrita exhibere hæc Illustrissimorum Virorum scripta meritò piguit, & non dubitavimus non meliùs consulturos tùm Lectoribus nostris, tùm ipsis eorum scriptorum Authoribus, si qualia sunt edita hìc illa insereremus: cùmque Authorum à typothetis absentiâ factum sit ut in Editione Parisinâ plurima irrepserint menda, nullo Errorum catalogo correcta, ea demonstrationibus ac calculis accuratè repetitis emendavimus, figurasque ad loca, quibus respondent, aptari curavimus.*

Quatuor quidem Dissertationes Parisinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior à Patre Cavallieri *Jesuitâ, secunda à* Daniele Bernoullio, *tertia à D.* Mac-Laurino, *quarta à* Leonardo Eulero *fuêre ad Academiam missæ. Prior in eo occupatur ut* Cartesianæ *hypotheseos circa causam æstûs marini vitia & hiatus corrigat & resarciat, quod quidem ingeniosè admodum præstat; tres reliquæ ex Legibus gravitatis aquarum Maris in Solem, Lunam & Terram, omnes Phænomeni propositi circumstantias explicant & calculis determinant: has ergo tres, omissâ priore, hujus esse loci credidimus.*

In Dissertatione Mac-Laurini *occurrit solutio synthetica Problematis de Figurâ Terræ, quale illud proposueramus in Notis nostris ad Prop. XIX. quodque parum felici successu Analyticè solvere tentaveramus; ex ejus solutione patet Meridianum esse veram Ellipsin in Hypothesi quòd terra sit homogenea: cùm autem hæc in manus nostras non devenerint, nisi cùm notæ ad eam Propositionem XIX prælum subiissent, inde factum est ut in iis Notis de illo Problemate ut nondum soluto egerimus: Quæ in his tribus Dissertationibus ingeniosa sunt, enumerare longiùs foret; intelligit Lector quæ sint ipsi speranda à tantis Viris, & quàm facilis, his intellectis & perlectis, futurus sit transitus ad ea quæ sequuntur de Lunæ motu, de præcessione Æquinoctiorum, aliisque; Lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod Typographo indulserimus hæc qualia sunt edere, ne, & ipse Lector & Typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam Epitomem istarum Dissertationum necessaria fuisset.*

TRAI-

TRAITÉ
SUR
LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

Par Mr. DANIEL BERNOULLI Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.

Devise, *Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

CHAPITRE PREMIER.

Contenant une Introduction à la Question proposée.

I.

DANS le grand nombre des Systêmes sur le Flux & Reflux de la Mer, qui sont parvenus à notre connoissance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons & de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleftes & de la Terre, qui partagent encore les Philosophes de notre tems : l'un & l'autre de ces Systêmes ont eu les plus grands Hommes pour Défenseurs, & ont entraîné des Nations entieres dans leur parti. Il semble donc que tout le mérite qui nous reste à espérer sur cette grande Question, est de bien opter entre ces deux Systêmes, & de bien manier celui qu'on aura choisi pour expliquer tous les Phénomenes qu'on a observés jusqu'ici sur le Flux & Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, & pour donner des uns & des autres les Calculs & les Mesures. CHAP. I.

CHAP. I.

I I.

J'ai commencé d'abord par l'idée de *Kepler*, qu'on nomme avec justice le Pere de la vraie Philosophie. Elle est fondée sur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps célestes & de la Terre : cet incompréhensible & incontestable Principe, que le grand NEWTON a si bien établi, & qu'on ne sçauroit plus revoquer en doute, sans faire tort aux sublimes connoissances & aux heureuses découvertes de notre siécle. Après un examen fort scrupuleux, j'ai vû que cette Gravitation mutuelle, considérée dans les Globes de la Terre, de la Lune & du Soleil, non-seulement pouvoit produire tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit necessairement, & qu'elle le devoit suivant toutes les loix qu'on a observées jusqu'ici. Avec ces heureux succès, j'ai poussé mes recherches aussi loin qu'il m'a été possible de les porter. En chemin faisant, je suis tombé sur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la source auparavant; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, & même l'insuffisance de la Méthode usitée, lorsqu'elle est appliquée à des Questions un peu détaillées. J'ai suivi une toute autre route; j'ai poussé mes recherches bien plus loin, & je suis entré dans un détail tel que l'ACADEMIE m'a paru le demander; & je dois dire à l'avantage des Principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la Théorie & les Observations, accord qui doit être d'autant moins suspect, que je n'ai consulté les Observations, qu'après avoir achevé tous mes Calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la plufpart des Observations, sur lesquelles je n'étois pas trop bien informé, lorsque j'ai entrepris cet Ouvrage.

I I I.

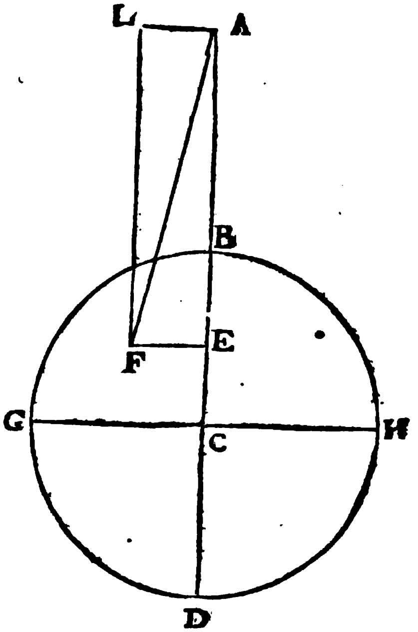
Quant aux Tourbillons, j'avouë qu'il est bien difficile d'en demontrer le faux à ceux qui veulent s'obstiner à les défendre : mais aussi il n'en est pas de la Physique, comme de la Géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut absolument démontrer la vérité ou la fausseté, pendant que dans la Physique il faut se rapporter souvent à un certain instinct naturel de sentir le faux & le vrai, après avoir bien pesé toutes les raisons de part & d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypothese des Tourbillons, ni dans les conséquences que l'on en tire. Si nous disons que le Tourbillon a la même densité, la même direction & la même vitesse que la Lune, ce Tourbillon ne sçauroit faire aucun effet; & si au contraire

traire nous supposons ces trois choses n'être pas les mêmes de part & d'autre, il me paroît bien clair & bien certain, que l'effet du Tourbillon devroit se manifester infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des Eaux de la Terre. Cependant on sçait parfaitement bien que la Lune, quoique sujette à beaucoup d'irrégularités dans ses mouvemens, n'en a aucune qui puisse être attribuée à l'action aussi sensible d'un Tourbillon. Si nous passons par dessus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embarassantes. C'est contre les loix de l'Hydrostatique, que la Lune, qui nage dans le Tourbillon, puisse causer des variations dans la compression des parties du Fluide. C'est une propriété essentielle des Fluides de se remettre aussi-tôt à l'Equilibre, lorsque ses Parties en sont sorties. Si une colonne de Tourbillon, entre la Lune & la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne semblable, rien ne sçauroit empêcher ses parties de s'échaper de côté jusqu'au retablissement de l'Equilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre Atmosphere tout d'un coup extrêmement échauffé; ce changement feroit en même tems hausser à proportion le Mercure dans le Barometre, puisque l'air chaud a plus de ressort que l'air froid; mais comme rien n'empêche l'air de s'échaper de côté jusqu'à la parfaite conservation de l'Equilibre, cela fait qu'un tel changement n'en sçauroit faire aucun sur le Barometre; aussi n'observe-t-on dans le Barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raisonnement tout-à-fait semblable à celui des Tourbillonnaires pour expliquer les Marées, devroit être très-sensible. Pareillement si les eaux d'une Riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la surface des eaux, que bien près du pieu, & le fond du lit de la Riviere sera toujours également pressé. En voilà assez & trop sur cette matiere; car ce sera toujours aux Sectateurs de *Descartes* de montrer l'effet des Tourbillons sur l'Océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de *Kepler*, principe d'ailleurs qui n'est plus contesté; sçavoir, que la Terre & tous les Corps célestes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe posé, il est facile de faire voir, que la Terre que nous supposerons devoir être sans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement sa figure, & que c'est ce changement de figure qui est la cause du Flux & Reflux de la Mer: Comme ce changement dans la Figure de la surface de la Terre est produit de differentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, & je tâcherai dans la suite d'en donner la mesure.

CHAP. I.

CHAP. I.

IV.



Si A est le centre de la Lune, ou du Soleil: $BGDH$ la Terre; si l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil & de la Terre la droite AD, & qu'on prenne au dedans de la Terre un Point quelconque F, on tirera FE perpendiculaire à BD, avec la droite FA, & on achevera le Rectangle $FLAE$. Chaque point F est tiré ou poussé vers A, & cette force étant representée par FA, elle sera considérée comme composée des deux Laterales FL & FE: cela étant, on voit que la force FE étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne sçauroit que l'allonger autour de BD: Et comme c'est une même raison pour tous les Plans qui passent par BD, il est clair que la Terre formera ainsi un Sphéroïde produit par la rotation d'une Courbe BGD autour de BD.

On remarquera, que cet allongement ne sçauroit être qu'extrêmement petit. *Premierement*, à cause de la petitesse des Lignes FE par rapport à FA. *En second lieu*, à cause du peu de rapport qu'il y a entre la pesanteur du Point F vers A, à la pesanteur du même Point vers le centre de la Terre C. Nous verrons dans la suite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui est fort peu considérable, par rapport au Diametre de la Terre.

On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au Diametre de la Terre, la différence des allongemens pour l'Hemisphere supérieur GBH, & pour l'inférieur GDH, doit être insensible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par FE, sont tant soit peu plus grandes dans l'Hemisphere GBH, que dans l'Hemisphere opposé, dont les parties sont plus éloignées du point A, & qu'ainsi ledit Hemisphere GBH sera un peu plus allongé que l'autre Hemisphere: mais on sent bien que la différence doit être insensible. On peut donc prévoir que les Poles B & D resteront également éloignés du Point C, & que la Courbe GBH pourra être censée la même que GDH. Nous donnerons un Calcul juste & détaillé de tout cela dans la suite de ce Traité. Ve-

Venons à une seconde considération, qui produira le même resultat, que celle dont nous venons de parler. CHAP. I.

V.

Comme la Terre tâche continuellement à s'approcher du Soleil & de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la retiennent; & ce sont les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par son mouvement autour du Soleil, & autour du centre de Gravité (je l'appelle ainsi, pour me conformer à l'usage) qui est entre la Terre & la Lune. Je démontrerai aussi ci-dessous, que cette force centrifuge doit être supposée égale dans toutes les parties de la Terre, & parallele à la Ligne *AD*, pendant que l'autre force se répand inégalement sur les parties de la Terre. Elle est plus grande dans les parties les plus proches de *A*, & plus petite dans les parties qui en sont plus éloignées, & cela en raison quarrée reciproque des Distances. Cette raison supposée, le Calcul fait voir, que pourvû que les Couches concentriques de la Terre autour du Point *C*, soient homogenes, la force moyenne, qui pousse les parties de la Terre vers *A*, est précisément celle qui répond au centre de la Terre *C*; & que c'est dans ce centre *C*, où la force centrifuge est précisément égale à la force centripete. Ainsi chaque partie qui est entre *C* & *B*, est plus poussée vers *A*, qu'elle n'est repoussée; & au contraire chaque partie située entre *C* & *D*, est moins poussée vers *A*, qu'elle n'est repoussée; de sorte qu'en s'imaginant deux Canaux communiquans entre eux *GH* & *BD*, on voit que chaque goute dans la partie *CB*, est tirée vers *A*, & que chaque goute dans la partie *CD*, est poussée dans un sens contraire. Cela diminue l'action de la pesanteur vers le centre de la Terre dans le Canal *BD*, pendant que cette même pesanteur n'est pas diminuée dans le Canal *GH*, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'Axe *BD*, ce que je m'étois proposé de faire voir.

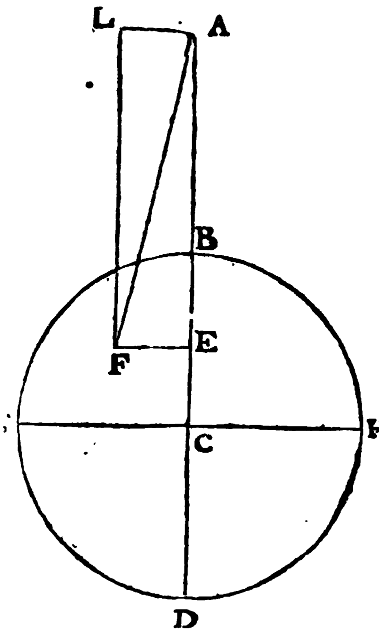
Le Calcul montre que cette raison est en soi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne sçauroit allonger l'Axe *BD* considérablement. Mais son resultat est assez comparable avec celui de l'allongement exposé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raison, doit être égal dans les Canaux *BC* & *CD*, la différence ne pouvant être sensible; & ainsi les Points *B* & *D* resteront encore également éloignés du centre *C*.

VI.

Une troisiéme raison, qui peut allonger davantage l'Axe *BD*, est que par l'allongement même, produit par les deux causes précedentes, la

CHAP. I.

la pesanteur terrestre qui fait descendre tous les Corps vers se centre C, est changée. Cette pesanteur peut être considérée comme égale dans les Canaux $G C$ & $B C$, ou $D C$ à des Distances égales du centre C, tant que la Terre est supposée Sphérique; mais cette Sphéricité ôtée, il est naturel que cette égalité ne pourra plus subsister. Il est aussi vraisemblable que la pesanteur est diminuée dans les Canaux $C B$ & $C D$, & qu'ainsi l'Axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au Systême de M. NEWTON, qui suppose la pesanteur produite par l'Attraction commune de la matiere en raison quarrée reciproque des Distances. Ce n'est pas que je croye cette hypothese bien démontrée; car la conclusion de la Gravitation mutuelle des Corps du Systême du Monde en raison quarrée reciproque des Distances, qu'on ne sçauroit plus nier, à une semblable attraction universelle de la matiere, de laquelle M. NEWTON déduit la pesanteur; cette conséquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce sujet, parce que tous les autres Systêmes sur la pesanteur me seroient inutiles: c'est le seul, qui étant du ressort de la Géometrie, donne des mesures assurées & fixes; & il est d'ailleurs digne de l'attention de tous les Géometres & Physiciens.



VII.

Les trois causes que je viens d'exposer, comme pouvant & devant allonger la Terre autour de la Ligne qui passeroit par le centre du Soleil & de la Lune, sont d'une force assez égale; de sorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune soit si petite, qu'elle ne sçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, & peut-être moins d'un pied. Il sera bon de remarquer ici que ce qui, après le Calcul, exprime lesdits allongemens, est toujours un certain multiple, ou sous-multiple de $\frac{b\,g}{a\,G} \times b$, entendant par b le rayon de la Terre, par a la la distance du luminaire en question, & par $\frac{g}{G}$ la raison qui est entre la pesanteur d'un Corps placé en B vers A, & sa pesanteur vers C, laquelle raison est extrêmement petite. CHAP. I.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette Formule, que le Calcul m'a enseigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, sçachent d'abord quels termes on peut rejetter, comme inutiles, qui rendent les Calculs extrêmement pénibles, & qui se trouvent au bout du Calcul, n'être d'aucune importance. Ce seroit une chose ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une Ligne qui proviendroient, si ladite quantité $\frac{bg}{aG} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

VIII.

Notre dessein est d'abord de chercher & d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres causes, indépendamment de la Figure de la Terre; mais par rapport à la troisiéme cause exposée au sixiéme Article, il faut supposer la Terre, c'est-à-dire, le Méridien $BGDH$ d'une Figure donnée; & c'est l'hypothese la plus naturelle, de la supposer elliptique, ayant pour Axes les Lignes BD & GH; quelle qu'elle soit, elle n'en sçauroit être sensiblemeut différente, & si elle l'étoit, cela ne sçauroit produire un changement bien considérable sur le rapport des deux Axes BD & GH, que nous cherchons. Outre cela nous verrons que c'est ici un Problême, qui dépend encore de la loi des changemens dans les Densités des couches de la Terre. M. NEWTON suppose la Terre par-tout homogene. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problême, qui est assez difficile dans toute autre hypothese. Mais cette supposition de M. NEWTON n'a aucune vraisemblance; je dirai même, qu'elle seroit fort peu favorable à notre Systême, comme nous le verrons dans la suite. C'est pourquoi je n'ai pas voulu restreindre si fort la Solution du Problême en question. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'applanir les difficultés du Problême, & les peines du Calcul. J'ai donc rendu notre Question infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, & pour choisir ceux qui conviennent le plus à notre sujet, & qui rendront par-là même plus vraisemblables les hypotheses, auxquelles ils appartiennent.

IX.

Voici à present nos hypotheses. Nous considerons la Terre, comme

CHAP. I. me naturellement ſphérique, & composée des couches concentriques: Nous ſuppoſerons ces couches homogenes, chacune dans toute ſon étendue; mais qu'elles ſont de différentes Denſités entre elles, & que la loi des variations de leur Denſité ſoit donnée. Quant à la Sphericité de la Terre, que nous ſuppoſerons, on voit bien qu'il ſeroit ridicule de s'y arrêter, puiſque l'élevation des eaux de l'Océan, cauſée par les deux Luminaires, ne ſçauroit différer ſenſiblement, que la Terre ſoit un peu applatie, ou un peu allongée. La ſuppoſition de l'Homogénéité des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puiſqu'on ne ſçauroit donner aucune raiſon, pourquoi elles devroient être hétérogenes.

CHAPITRE II.

Contenant quelques Lemmes ſur l'Attraction des Corps.

I.

JE prie encore une fois le Lecteur, de ne conſidérer ce Chapitre, que comme hypothétique. Je ne ſuppoſe l'Attraction univerſelle de la matiére, que parce que c'eſt la ſeule hypotheſe, qui admette des Calculs, & qu'elle eſt d'ailleurs aſſez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les Philoſophes du monde.

On appelle au reſte Attraction qu'exerce un Corps A ſur un Corps B, la force accéleratrice, que le Corps B acquiert à chaque inſtant, en tombant vers A. On voit donc que l'effet de l'Attraction du Corps A ſur le Corps B, eſt de communiquer à celui-ci une peſanteur, qu'on ſuppoſe proportionnelle à la maſſe du Corps A diviſée par le quarré de la Diſtance; & cette peſanteur doit encore être multipliée par la maſſe du Corps B, pour avoir la force que ce Corps exerce s'il eſt empêché de s'approcher du Corps A.

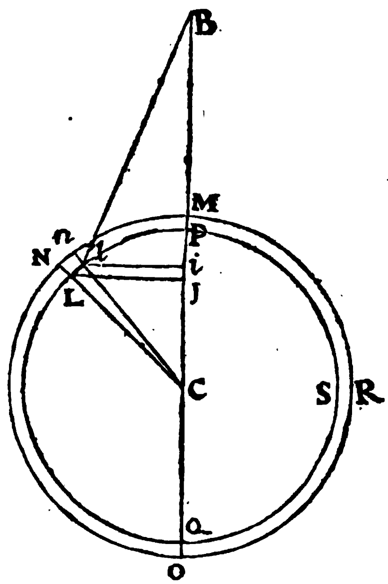
PROBLEME.

II.

Soit une couche ſphérique homogene, infiniment mince, & d'une épaiſſeur égale, compriſe entre les ſurfaces ſphériques $MNOR$ & $PQLS$, trouver l'Attraction, ou la force accéleratrice, que cette couche exercera ſur un Corps placé au point B, pris hors de la ſurface extérieure.

SOLU-

SOLUTION.



Qu'on tire la droite BO par le Point B & le Centre C, dans laquelle on prendra deux Points infiniment proches J & i: on tirera ensuite les deux Perpendiculaires JL & il, & par les Points L & l, on tirera du centre les droites CN & Cn. Soit à présent $CB = a$; $CJ = x$; $Ji = dx$; $CP = b$; PM ou LN (que nous regardons comme infiniment petite) $= \varsigma$: la Densité de la matiere de la couche $= m$.

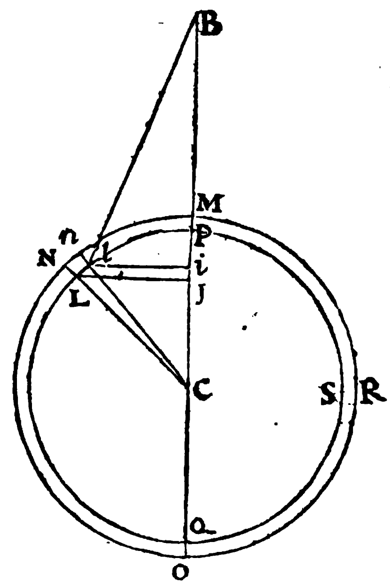
On voit que pendant la révolution autour de l'Axe MO, la petite partie $NLln$ garde toujours une même Distance du Point B, & que cette Distance sera $= \sqrt{(aa - 2ax + bb)}$: or, comme il faut toujours diviser par le Quarré des Distances, il faudra pour trouver la force accéleratrice en question d'abord prendre $\frac{1}{aa - 2ax + bb}$, & cette quantité doit être multipliée par la raison de Bi à Bl, & on aura $\frac{a - x}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}}$: & cette quantité doit encore être multipliée par la Masse de l'Anneau, que la partie $NLnl$ forme par sa revolution, & la Masse doit être exprimée par la Densité m & la capacité de l'Anneau, c'est-à-dire (en nommant n la raison de la circonférence d'un Cercle à son rayon) par $m \times NL \times Ll \times n \times LJ$: ou par $m \times \varsigma \times \frac{b\,dx}{\sqrt{(bb - xx)}} \times n \times \sqrt{(bb - xx)}$ ou enfin par $nmb\varsigma\,dx$; de sorte qu'on a la force accéleratrice absoluë produite par le dit Anneau $= \frac{nmb\varsigma(a - x)\,dx}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'Intégrale exprimera l'Attraction cherchée de toute la couche. Pour trouver cette Intégrale, nous supposerons $aa - 2ax + bb = yy$, & nous aurons $\int \frac{nmb\varsigma(a - x)\,dx}{(aa - 2ax + bb)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-nmb\varsigma(aa - bb + yy)\,dy}{2aayy}$ $= \frac{nmb\varsigma}{2aa} \times \left(\frac{aa - bb - yy}{y} + C\right) = \frac{nmb\varsigma}{2aa} \times \left(\frac{2ax - 2bb}{\sqrt{aa - 2ax + bb}} + C\right)$, entendant par C une Constante convenable: pour la trouver il faut remarquer, que l'Intégrale doit être $= 0$, lorsque $x = -b$, d'où l'on tire

CHAP. II.

$C=\frac{2ab+2bb}{a+b}=2b$: substituant cette valeur, on obtient pour l'Intégrale en question $\frac{nmb\varsigma}{aa}\left(\frac{ax-bb}{\sqrt{aa-2ax+bb}}+b\right)$, & mettant enfin b à la place de x, on obtient la force accéleratrice cherchée $=\frac{2nmbb\varsigma}{aa}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

III.



Comme la quantité de la matiere de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accéleratrice, qu'elle exerce sur le Corps placé au point B) est $= 2nmbb\varsigma$, nous voyons que cette force accéleratrice est exprimée par la quantité de matiere divisée par le quarré de la Distance du Point B au Centre C, & par conséquent la même, que si cette quantité de matiere étoit concentrée au Centre.

SCHOLIE.

IV.

On remarquera que cette Solution n'a lieu, que lorsque le Point B est placé hors de la couche, parce que dans notre Calcul nous avons supposé, que chaque Anneau formé par la revolution de la partie $NLln$ produit une force accéleratrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorsque le Point B est placé entre les deux surfaces, ou au-dedans de la surface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une Solution particuliere, parce que nous n'en aurons pas besoin, & qu'ils ont déja été résolus par l'Auteur de ces Problêmes. Je n'aurois même rien dit du cas que nous venons de résoudre, comme pareillement résolu par M. NEWTON, si je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de suivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre Question principale : aussi ces précautions sont-elles necessaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les Quantités constantes ; & ainsi nous nous souviendrons toûjours dans

dans la suite d'exprimer la force accéleratrice d'un Corps infiniment petit, par la Masse divisée par le quarré de la Distance, & de dénoter la Masse par le produit de son étenduë, & de sa Densité. CHAP. II.

PROBLEME.

V.

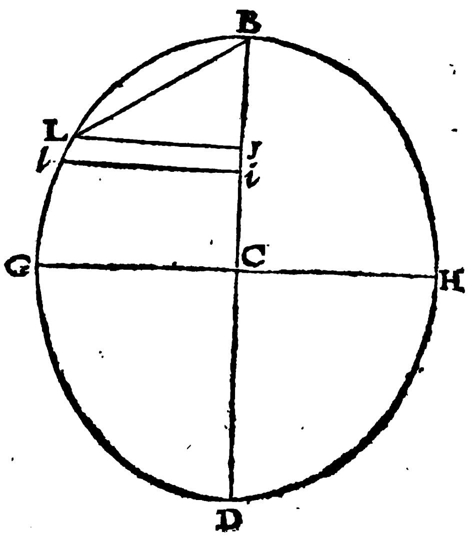
Trouver l'Attraction pour un Corps placé en B, causée par une Sphere solide, composée de couches homogenes; mais de différentes Densités entr'elles.

SOLUTION.

Il paroît par le troisiéme Article, qu'on n'a qu'à concevoir la Masse de toute la Sphere ramassée au Centre C, & qu'elle causera la même Attraction, tant que le Point B est hors de la Sphere : nommant donc M la Masse du Globe, ou la somme des Masses de toutes les couches, l'Attraction cherchée sera $= \frac{M}{aa}$. C. Q. F. T.

PROBLEME.

VI.



Soit $BGDH$ une Ellipse presque circulaire, c'est-à-dire, dont la différence des Axes BD & GH soit regardée comme infiniment petite; & qu'on conçoive cette Ellipse former par sa rotation autour de l'Axe BD, un Sphéroïde homogene. On demande la force accéleratrice, ou l'attraction que ce Sphéroïde produira sur un Corps placé au Pole B.

SOLUTION.

Soit la Densité de la matiere exprimée par ρ; le petit demi Axe $GC = b$; le grand demi Axe $BC = b + \varsigma$; $BJ = x$; $Ji = dx$; on aura la perpendiculaire $LJ = \frac{b+\varsigma}{b} \times \sqrt{2(b+\varsigma)x - xx}$. On voit facilement

CHAP. II.

ment * que l'Attraction causée par la couche, qui répond au Rectangle $L\,J\,i\,l$, est $= n\,\mu\,d\,x - n\,\mu\,d\,x \times \frac{B\,J}{B\,L}$, c'est-à-dire, par $n\,\mu\,d\,x - n\,\mu\,d\,x : \overline{\sqrt{x\,x + \frac{b\,b}{(b+\zeta)^2} \times (2\,b\,x + 2\,\zeta\,x - x\,x)}}$ ou par $n\,\mu\,d\,x - (b+\zeta)\,n\,\mu\,x\,d\,x : \sqrt{(2\,b\,\zeta\,x\,x + \zeta\,\zeta\,x\,x + 2\,b^3\,x + 2\,b\,b\,\zeta\,x)}$: Dans cette derniere quantité, nous rejettons le Terme $\zeta\,\zeta\,x\,x$, comme devant être comparé aux infiniment petits du second ordre, & nous changerons le Signe radical du Dénominateur en Signe exponentiel de Numerateur; & de cette maniere nous aurons $n\,\mu\,d\,x - (b+\zeta)\,n\,\mu\,x\,d\,x \times (2\,b^3\,x + 2\,b\,\zeta\,x\,x + 2\,b\,b\,\zeta\,x)^{-\frac{1}{2}}$: or on sçait par la formation des suites de M. NEWTON, que $(2\,b^3\,x + 2\,b\,\zeta\,x\,x + 2\,b\,b\,\zeta\,x)^{-\frac{1}{2}}$ est $= (2\,b^3\,x)^{-\frac{1}{2}} - (2\,b^3\,x)^{-\frac{3}{2}} \times (b\,\zeta\,x\,x + b\,b\,\zeta\,x)$: substituant donc cette valeur, on obtient $n\,\mu\,d\,x - \frac{(b+\zeta)\,n\,\mu\,x\,d\,x}{\sqrt{2\,b^3\,x}} + \frac{(b+\zeta)\,n\,\mu\,x\,d\,x\,(b\,\zeta\,x\,x + b\,b\,\zeta\,x)}{2\,b^3\,x\sqrt{2\,b^3\,x}}$, qui marque l'action de la couche formée par la rotation du Rectangle $L\,J\,i\,l$: à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantités à multiplier, & rejettant les termes affectés de la seconde Dimension de ζ, poser $n\,\mu\,d\,x - \frac{n\,\mu\,d\,x\sqrt{x}}{\sqrt{2\,b}} - \frac{\zeta\,n\,\mu\,d\,x\sqrt{x}}{2\,b\sqrt{b}} + \frac{\zeta\,n\,\mu\,x\,d\,x\sqrt{x}}{2\,b\,b\sqrt{b}}$, & l'Intégrale de cette quantité (qui doit être $= o$, lorsque $x = o$) est $= n\,\mu\,x - \frac{2\,n\,\mu\,x\sqrt{x}}{3\sqrt{2\,b}} - \frac{\zeta\,n\,\mu\,x\sqrt{x}}{3\,b\sqrt{2\,b}} + \frac{\zeta\,n\,\mu\,x\,x\sqrt{x}}{5\,b\,b\sqrt{2\,b}}$; & faisant enfin $x = 2\,b + 2\,\zeta$, on trouve, en rejettant toujours les infiniment petits du second ordre $2\,n\,\mu\,b + 3\,n\,\mu\,\zeta - 2\,n\,\mu\,b - 2\,n\,\mu\,\zeta - \frac{2}{3}\,n\,\mu\,\zeta + \frac{4}{5}\,n\,\mu\,\zeta$, ou bien enfin

$$\tfrac{2}{3}\,n\,\mu\,b + \tfrac{2}{15}\,n\,\mu\,\zeta,$$

qui marque la force acceleratrice causée par l'action de tout l'Ellipsoïde sur un petit Corps placé au Pole B. C. Q. F. T.

PROBLEME. VII.

Les hypotheses étant les mêmes, que dans la proposition précedente, trouver la même chose pour un petit Corps placé en G, qui est sous l'Equateur de l'Ellipsoïde.

SOLUTION.

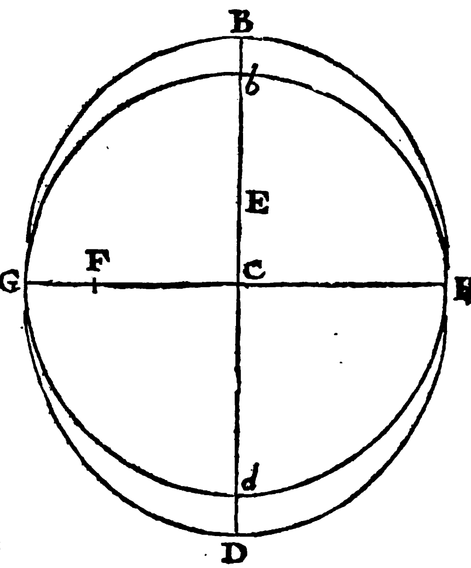
Il est facile de démontrer par la Géometrie, que toute Section de l'Ellipsoïde parallele à l'Axe de Rotation $B\,D$, fait une Ellipse sembla-

---

* Ceci se trouve démontré par le Cor. 1. de la Prop. XC. du Ier. Livre de Mr. NEWTON; on y voit que l'Attraction du point B par le Cercle dont $L\,J$ est le Rayon, est $1 - \frac{B\,J}{B\,L}$ qu'il faut multiplier par la Masse du petit Cylindre dont ce Cercle est la Base & dont $J\,i$ est la hauteur, pour avoir l'Attraction causée par la Couche qui répond au Rectangle $L\,J\,i\,l$.

ble à l'Ellipse génératrice *B G D H*. Considérons l'Ellipsoïde comme CHAP. II.
composée de la Sphere inscrite, ayant pour Diametre le petit Axe *G H*, & de l'écorce formant un double Menisque : l'action de la Sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3} n \mu b$, comme nous avons démontré au 5. §. Car la masse de cette Sphere est $\frac{2}{3} n \mu b^3$, & la distance du Point *G* au centre est $= b$. Il nous reste donc à chercher qnelle action resulte du double Menisque.

Concevons pour cet effet tout l'Ellipsoïde partagé en couche paralleles & perpendiculaires à *G H*. Soit la distance du centre d'une de ces couches au Point $G = x$; son épaisseur $= dx$; il n'est pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double Menisque en question) est $= \frac{n\zeta}{2b} \times (2bx - xx)\,dx$, & que ce bord étant multiplié par la Densité μ, en donne la quantité de matiere $= \frac{n\mu\zeta}{2b} \times (2bx - xx)\,dx$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être censées agir également, & avec une même obliquité sur le Corps placé au point *G* : on n'a donc qu'a multiplier cette quantité de matiere par la raison de la distance du centre de la couche au Point *G* à la distance du bord de la couche au même Point *G*, & diviser par le quarré de cette Distance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui sera donc $\frac{n\mu\zeta}{2b} \times (2bx - xx)\,dx \times \frac{x}{\sqrt{2bx}} \times \frac{1}{2bx}$, ou bien $\frac{n\mu\zeta\,dx}{4bb\sqrt{2b}} \times (2b\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ dont l'Intégrale est $= \frac{n\mu\zeta}{4bb\sqrt{2bb}} + (\frac{4}{3} bx\sqrt{x} - \frac{2}{5} xx\sqrt{x})$ puisqu'il ne faut point ajoûter ici de constante ; & pour avoir enfin l'Attraction de tout le double Menisque, il faut mettre $x = 2b$, après quoi on aura simplement $\frac{4}{15} n\mu\zeta$. Si on ajoûte à



* Car l'aire de l'Ellipse éloignée de G de la quantité x est $\frac{n}{2b} \times b + \zeta(2bx - xx)$ & l'aire du Cercle inscrit est $\frac{n}{2}(2bx - xx)$. Donc ôtant cette aire du Cercle de celle de l'Ellipse reste $\frac{n\zeta}{2b}(2bx - xx)$ pour l'aire de Menisque.

à cette quantité l'action de la Sphere inscrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'Ellipsoïde sur un Corps placé au Point $G = \frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \beta$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.
VIII.

On voit par ces deux dernieres Propositions, que les forces accéleratrices au Pole, & sous l'Equateur dans un Ellipsoïde homogene, sont comme $\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta$ à $\frac{2}{3} n \mu \beta + \frac{4}{15} n \mu \beta$, ou comme $5 b + \beta$ à $5 b + 2 \beta$, laquelle raison peut passer pour celle de 1 à $1 + \frac{\beta}{5 b}$. Je vois que cela est conforme à ce que M. NEWTON dit à la page 380. * des *Princip. Math. Phil. Nat. Edit.* 2. pour déterminer la Proportion de l'Axe de la Terre au rayon de son Equateur. Quant à son raisonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand Homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne distingue qu'à peine avec un Microscope.

LEMME.

Dans un Sphéroïde elliptique homogene, la force accéleratrice pour un Point quelconque, est à la force accéleratrice pour un autre Point pris dans le même Diametre, comme la distance du premier Point au centre, à la distance pareille du second Point.

† M. NEWTON a démontré cette Proposition à la 199. page de son Livre, que nous venons de citer: & comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accéleratrices, sans qu'il soit question de les exprimer analytiquement, il seroit superflu, pour mon dessein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME.
X.

Soit encore le double Menisque, tel que nous l'avons décrit au septieme Article, compris entre la surface de l'Ellipsoïde *G B D H*, & *G b H d*, qui marque la surface de la Sphere inscrite; il s'agit de trouver la force accéleratrice, que ce double Menisque produira au point *E*, pris dans l'Axe de rotation *B D*.

SOLUTION.

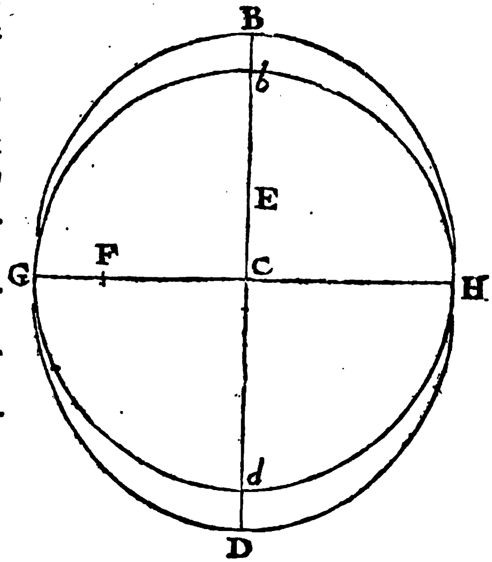
Nous garderons les dénominations de ci-dessus: or on voit qu'on trouvera l'action du double Menisque, en prenant celle de tout l'Ellipsoïde consideré comme homogene avec les Menisques, & en retranchant celle de la Sphere inscrite. L'action de tout le Sphéroïde est en vertu des

6&

* Ceci se raporte à la page 80. & suiv. de ce Volume, & nous avons essayé d'éclaircir cet endroit de M. NEWTON dans la Note (I) & suivantes.

† C'est le *Cor. 3. de la Prop.* XCI. du Livre Ier. vol. 1er. pag. 519.

6 & 9 Articles $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta) \times \frac{CE}{CB}$, & celle de la Sphere $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$: de là on tire la force accéleratrice, qui convient aux Ménisques $= \frac{2}{3} n \mu b + \frac{2}{15} n \mu \beta) \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CE}{Cb}$. Substituons à la place de $\frac{CE}{Cb}$ cette quantité $\frac{CE}{CB - Bb}$, qui peut être censée égale à $\frac{CE}{CB} + \frac{Bb \times CE}{CB^2}$ (à cause que nous traitons la petite Bb, comme infiniment petite, par rapport à CB) & nous trouverons la force accéleratrice pour les Ménisques



$= \frac{2}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{Bb \times CE}{CB^2} = \frac{2}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB} - \frac{2}{3} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB}$ (puisque $\frac{Bb}{CB} = \frac{\beta}{b + \beta} = \frac{\beta}{b}$) $= - \frac{8}{15} n \mu \beta \times \frac{CE}{CB}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

X I.

Le Signe négatif fait voir, que la Gravitation au Point E, causée par l'action des deux Ménisques, se fait vers le Pole B, & non vers le Centre C. Au reste on remarquera, que cette Proposition n'est vraie que pour les Points compris entre C & b, en excluant tous les Points, qui sont au-delà de b; & cela à cause que le Lemme du 9. §. ne sçauroit être appliqué à trouver la force accéleratrice causée par l'action de la Sphere pour le Point E, si ce Point est pris hors de la Sphere inscrite au Sphéroïde. Ainsi par exemple, au point B, la Gravitation causée par les Ménisques se feroit vers le Centre avec une force accéleratrice $\frac{22}{15} n \mu \beta$. Je restreins ces Propositions, quoique ma Méthode suffise pour des solutions beaucoup plus générales; & cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre sujet.

PROBLEME.

X I I.

Trouver la même chose que dans l'Art. X. pour un Point quelconque F, pris dans une Ligne GH perpendiculaire à BD. So-

SOLUTION.

On obtient encore l'action des Menisques, en retranchant celle de la Sphere de celle du Sphéroïde. Or celle de la Sphere est $= \frac{2}{3} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$, & celle du Sphéroïde $= (\frac{2}{3} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \mathfrak{c}) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des § § 7. & 9. Donc la Gravitation au Point F se fait vers le centre C par la simple action du double Ménisque, & la force accéleratrice y sera $= \frac{4}{15} n \mu \mathfrak{c} \times \frac{CF}{CG}$. C. Q. F. T.

XIII.

Voilà les Propositions qui nous seront nécessaires, pour mesurer les haussemens & baissemens des eaux dans la Mer libre par l'action de l'un des deux Luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui se trouve entre la pesanteur & la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyse pure pour la Solution de nos deux derniers Problêmes, se plongeront dans des Calculs extrêmement pénibles, & verront par là l'avantage de notre Méthode.

CHAPITRE III.

Contenant quelques Considérations Astronomiques & Physiques; préliminaires pour la Détermination du Flux & Reflux de la Mer.

COmme le Flux & Reflux de la Mer dépendent de la Lune & du Soleil, on voit bien que notre sujet demande une exacte Théorie du mouvement de ces deux Luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requise ici. Mais on est encore bien éloigné de sçavoir avec la même précision la Théorie de la Lune, qui est cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'est venuë là-dessus, d'employer le principe de la conservation de ce que l'on appelle communément *Forces Vives* (principe déja employé sous un autre nom par le grand & incomparable M. *Huyghens*, pour trouver les Loix du choc des Corps parfaitement élastiques, & auquel on est redevable d'une grande partie des connoissances nouvelles dans la Dynamique, tant des Fluides, que des Solides:) Cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abregé, à déterminer beaucoup plus

plus exactement, que l'on n'a fait jusqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui sont tous sujets aux loix Méchaniques. Je m'étois proposé d'inserer ici ma nouvelle Théorie sur la Lune; mais, comme notre sujet n'est déja que trop étendu, & qu'il demande des discussions assez pénibles, je la différerai à une autre occasion, où je la donnerai en forme d'Addition, si l'Académie trouve ce Traité digne de son attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoissances tirées du Systême du Monde, qui servent à donner un Systême général du Flux & Reflux de la Mer; & quand nous viendrons au détail, nous supposerons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

I I.

On sçait que la Lune & la Terre font un Systême à part: l'un & l'autre de ces Corps tournent autour d'un Point, & font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une Ellipse: l'action du Soleil sur l'un & l'autre Corps, change un peu ces Ellipses, & fait même que la proportion des distances du dit Point aux Centres de la Lune & de la Terre, ne demeure pas exactement le même: mais, comme nous ne prétendons jusqu'ici que d'exposer en gros les choses nécessaires à notre Question, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, & considérerons la Terre & la Lune, comme faisant des Ellipses parfaites & semblables entre elles autour d'un même Point.

I I I.

Par la dite Revolution, les deux Corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre; & cet effort est contrebalancé par leur Gravitation mutuelle: & comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges soient aussi égales: d'où il suit que le Point autour duquel ces deux Corps tournent, doit être placé, en sorte que les forces centrifuges soient égales: c'est là la premiere idée. Il vaudroit donc mieux appeller ce Point, *Centre de Forces centrifuges*, ou bien, puisque les vitesses gardent dans notre hypothese une proportion constante, *Centre de Masses*, que *Centre de Gravité*. Il est vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du Centre de Gravité dans le sens commun: Mais quelle idée y peut-on attacher, lorsque la pesanteur est inégale dans les différentes parties du Corps? Il n'y a aucun Point alors, qu'on puisse nommer tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en soit, il est certain que les distances du Point en question aux Centres de la

CHAP. III.

Terre & de la Lune, ſont en raiſon reciproque des Maſſes ou Quantités de matiére de ces Corps.

I V.

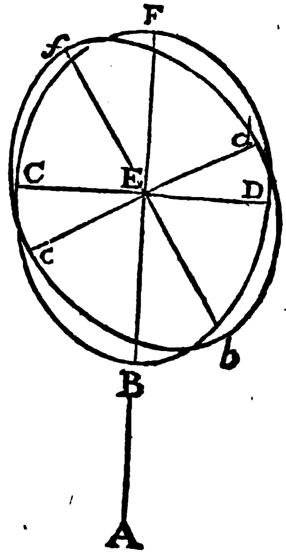
Si la Lune & la Terre étoient des Corps parfaitement homogenes dans toute leur étenduë, ou du moins chacun composé de Couches concentriques parfaitement homogenes, & qu'ils fuſſent parfaitement ſphériques, ſans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une Cauſe Phyſique, autour d'un Axe paſſant par leur propre Centre de Gravité, il eſt clair, que toutes les parties des Corps garderoient pendant leur Revolution un Parallélisme; de ſorte que les deux Corps vûs du Centre de Gravité commun, paroîtroient faire préciſément le tour en ſens contraire autour d'un Axe perpendiculaire au plan des Orbites, pendant chaque Revolution des Corps. Cependant cela ne ſe fait point dans la Lune : car nous ſçavons qu'elle nous montre conſtamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens;) & cela eſt contraire au Parallélisme, que nous venons d'alléguer : quoique ce ne ſoit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce Phénomene da la Lune, je ne laiſſerai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire ſur la Terre, comme eſſentiel à notre matiere.

V.

Conſidérons donc, que la parfaite Homogénéïté dans les Couches concentriques de la Lune, auſſi bien que ſa parfaite Sphéricité, ſont moralement impoſſibles : mais il n'eſt pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne ſuffit pas de dire que le Centre de Gravité de la Lune pris dans le ſens commun, tâche toujours à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de Revolution. Quelques inégales que fuſſent les Couches, & quelque irréguliere que fut la Figure, la Lune garderoit toujours le Parallélisme des Faces, s'il n'y avoit pas une autre raiſon; ſçavoir, celle de l'inégalité de peſanteur de ſes Parties vers la Terre : les parties ayant d'autant plus de peſanteur, qu'elles ſont plus près de la Terre : c'eſt cette raiſon, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux enſemble; de ſorte que quand même la Lune ſeroit parfaitement homogene, ſa ſeule Figure, jointe à l'inégalité de peſanteur de ſes parties vers le Centre de la Terre, pourroit même produire le Phénomene en queſtion.

Soit A le Centre de la Terre : $BCFD$, par exemple, une Ellipſe, dont l'Axe BF ſoit le plus grand, & CD le plus petit : que cette Ellipſe forme par ſa Revolution autour de l'Axe BF, le Corps de la Lune ne. Supposons après cela la Lune homogene & mobile autour de son Centre *E*, & servons-nous de l'hypothese ordinaire, que la pesanteur de chaque partie de la Lune vers *A*, soit en raison quarrée reciproque des distances au Point *A*. Cela étant, je dis, que la Lune montrera constamment au Point *A* la Face *C B D*, & que l'Axe *F B* passera toujours par le Point *A*, & que la Lune reprendroit cette situation, dès qu'elle en feroit dé ournée. Comme cette matiere est assez intéressante, tant pour l'Astronomie, que pour la Physique, je l'expliquerai par un exemple, qui rendra fort sensible tout ce que nous venons de dire. Je dis donc qu'on doit regarder, à cet égard, la Lune, comme un Corps flottant dans un Fluide; car les parties d'un tel Corps, sont pareillement animées de différentes pesanteurs: or on sçait qu'un Corps flottant, qui n'est pas Sphérique, ou qui étant tel, n'est pas homogene, n'est pas indifférent à chaque situation; mais qu'il affecte constamment de certaines situations, qu'il reprend aussi-tôt qu'il en a été détourné. Quelquefois le Corps n'a qu'une seule situation d'Equilibre; d'autres fois plusieurs, suivant la structure du Corps: Mais on se tromperoit toujours, si l'on croyoit, que le Centre de Gravité du Corps tâche à se mettre dans l'endroit le plus bas qu'il est possible; de même qu'on se trompe, en disant, que le Centre de Gravité de la Lune, tâche à s'éloigner, le plus qu'il est possible, du Centre de la Terre. On voit donc assez, que la cause principale de ce que la Lune nous présente toujours une même face, est l'inégalité de pesanteur; & à cette cause, il faudra joindre, ou la non-parfaite Sphéricité, ou la non-parfaite Homogénéïté des Couches de la Lune, ou les deux causes à la fois.

CHAP. III.

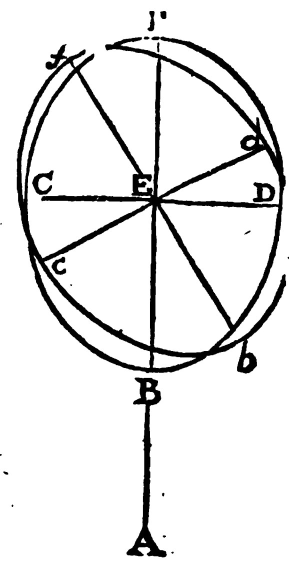


V I.

Comme la Question que nous venons d'expliquer, entraîne celle d'une legere nutation de la Lune en Longitude, que les Astronomes ont observée, il ne sera pas hors de propos de faire voir comment cette nutation découle de notre Théorie. Nous avons vû que le Sphéroïde *C B D F* mobile autour d'un Point *E*, doit toujours montrer au Point *A* la Face *C B D* tant que le Point *E* reste dans sa place. Supposons à présent, que ce Corps s'éloigne un peu de cette situation, en faisant une rotation infiniment petite autour du Point *E*, la force qui tend à la remettre dans sa situation naturelle, est de même infiniment petite; ce qui fait voir, que

CHAP. III.

que le Point *E* faisant sa revolution autour du Point *A*, ce ne sçauroit plus être exactement la Face *CBD*, qui regarde vers *A*, parce qu'à chaque petit mouvement du Point *E*, la Lune fait une petite rotation autour de ce Point, pour garder le Parallélisme, & la force qui tâche à tourner vers le Point *A* la Face *CBD*, étant encore infiniment petite, ne sçauroit s'en acquitter assez-tôt: & ce sera la même chose pendant que le Point *E* parcourt un second Elément, & ainsi de suite, jusqu'à-ce qu'à la fin la Lune se place assez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans sa situation naturelle, soit assez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaison, qui survient par la rotation du Point *E* autour du Point *A*. [Cette explication pourra nous servir dans la suite, pour démontrer un des principaux Phénomenes des Marées.] La Lune prendra donc la situation oblique *c b d f*, si sa Revolution autour du Point *A* est supposée se faire de *E* vers *D*. Mais cette situation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la Ligne *FA*, sans que la Lune eût aucune nutation, si le Point *E* faisoit sa Revolution autour du Point *A* dans un Cercle parfait, & avec une vitesse constante: c'est donc l'inégalité des distances *AE*, & des vitesses du Point *E*, qui fait que l'obliquité de la situation *f c b d* varie; & c'est cette variation qui fait la nutation de la Lune en Longitude.



VII.

Venons maintenant à la Terre, & examinons quel mouvement elle doit avoir autour du Centre de Gravité, qui est entre-elle & la Lune; cette recherche est nécessaire pour notre Question, & elle ne sera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que si la Terre est parfaitement homogene, soit dans toute son étendue, soit seulement dans chacune de ses Couches concentriques; & si elle est en même tems parfaitement sphérique, elle doit conserver parfaitement un Parallélisme dans la situation de ses parties, pendant sa Révolution. Cependant cette parfaite Homogénéïté est moralement impossible; & la parfaite Sphéricité a été refutée par les Observations les plus exactes. Ce Parallélisme seroit donc alteré, de même qu'il l'est dans la Lune, & la Terre ne manqueroit pas de presenter fènter à la Lune une même face, fans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune; & l'effet de cette action étant, à caufe du dit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une legere nutation journaliere dans l'Axe de la Terre, & quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de la Terre. Mais l'une & l'autre doivent être tout-à-fait infenfibles, à caufe de la grandeur de la Maffe de la Terre, de l'extrême petiteffe de l'action de la Lune, & de la rapidité du mouvement journalier. CHAP. III.

VIII.

On voit donc que la Terre fera fa revolution autour du Centre de Gravité, qui lui eft commun avec la Lune, de telle maniere que fon Axe gardera conftamment une fituation parallele. Si nous confidérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il eft clair que l'autre mouvement doit être fuppofé fe faire d'une maniere à garder un Parallélifme dans toutes les Sections de la Terre. Cela étant, il s'enfuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même Ellipfe; que chaque partie a une même force centrifuge, & que les Directions des forces centrifuges font par-tout paralleles entre elles. Et c'eft ici le point principal, que je me fuis propofé d'établir, & de bien démontrer dans ce Chapitre.

IX.

Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit auffi s'entendre à l'égard du Soleil; en forte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à fon Orbite annuelle, doit être cenfée la même, & leurs directions paralleles entre elles. Mais cette Propofition n'eft pas fi effentielle à l'égard de l'Orbite annuelle, comme à l'égard de l'Orbite, qui fe fait autour du Centre de Gravité, qui eft commun à la Terre & à la Lune, à caufe de l'extrême petiteffe de cette derniere Orbite.

CHAPITRE IV.

Qui expose en gros la Cause des Marées.

I.

APrés avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raisons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux Axes, qui passent par les Centres des deux Luminaires, il n'est pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le Flux & Reflux de la Mer, pourvû qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il est clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux Axes d'Allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action composée des deux Luminaires, peut toujours être considerée comme une action simple, quoi-qu'à la vérité fort irréguliere. Cependant cette considération suffit, pour voir en gros, que la Mer doit en chaque endroit s'élever & se baisser environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cause en tout son jour, d'en développer tous les effets, & de les reduire à leur juste mesure, autant que les circonstances peuvent le permettre.

II.

La Question qui se présente d'abord, & qui est en même tems la plus importante pour notre sujet, est de trouver la quantité de l'allongement causé par chacun des deux Luminaires. Nous ne considérons donc qu'un seul Luminaire. Voici, avant toutes choses, les suppositions dont je me servirai dans les Calculs, & que j'ai déjà exposées en partie.

I. Nous supposerons que la Terre est naturellement sphérique. Cette hypothese n'est que pour abréger le Calcul, & on voit bien que l'effet des deux Luminaires doit être sensiblement le même sur une Terre ronde, ou un peu applatie, ou un peu allongée.

II. Que les Couches concentriques de la Terre sont d'une même matiere, ou d'une même densité. Cette supposition est sans doute fort naturelle; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait insensibles: mais il me semble qu'il n'y a aucune vraisemblance de supposer que la Terre est homogene dans toute son étendue, comme M. NEWTON l'a fait.

III. Que la Terre, que nous supposons, sans l'action des Luminaires, ronde, est changée par l'action de l'un des deux Luminaires en Ellipsoïde, dont l'Axe passe par le Centre du Luminaire agissant. C'est l'hy-l'hypothese de M. NEWTON; & quoi qu'on ne puisse pas le démontrer pour le Systême des Attractions, elle ne doit pas nous arrêter; car quelle que soit la Figure de la Terre après ce petit changement, on voit assez qu'elle ne sçauroit s'éloigner sensiblement de l'Ellipsoïde. Aussi trouvons-nous cette Figure elliptique dans toutes les hypotheses, qu'on pourroit se former sur la pesanteur, susceptibles d'un Calcul & tant soit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette Figure extérieure de la Terre, n'en sçauroit produire, qui soit sensible, entre l'Axe du Sphéroïde, & le Diametre qui lui est perpendiculaire.

IV. Nous supposerons, que les Luminaires ne sçauroient faire changer de figure toutes les Couches qui composent la Terre jusqu'au Centre. Car vraisemblablement la Terre est, dans sa plus grande partie, solide; & quand même elle seroit toute fluide, sa Masse seroit trop grande, pour être mise toute entiere en mouvement, & pour obéir assez vîte à une action aussi petite. Ces refléxions m'ont engagé à considérer la Terre, comme un noyau sphérique, composé de Couches parfaitement sphériques & inaltérables par l'action des deux Luminaires, & inondé d'un Fluide homogene, tel que sont les eaux de la Mer; & à supposer, qu'il n'y a que ce Fluide inondant, qui reçoive des impressions des Luminaires, & que sa profondeut n'est pas sensible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypothese est sans contredit la plus naturelle, lorsque la Terre n'est pas supposée homogene dans toute son étenduë, mais, si on la supposoit homogene, comme M. NEWTON l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypothese n'entre plus en ligne de compte.

V. Enfin nous substituerons à la place des Forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les Luminaires, une autre force qui agisse de la même façon, afin que nous puissions considérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, & un entier équilibre dans toutes ses parties. Cette force à substituer, doit être supposée égale dans toutes les parties de la Terre (§. *VIII. Chap. III.*) & parallele à la Ligne qui passe par les Centres de la Terre & du Luminaire, dont il sera question.

III.

La Force centrifuge dont nous venons de parler, doit être prise pour notre sujet, précisément telle, qu'elle soit égale à la force totale de l'Attraction du Luminaire, tout comme si la Terre se soutenoit dans sa distance, en décrivant un Cercle parfait; & cela est vrai, quelle que soit la Force centrifuge réelle de la Terre. C'est ici une Proposition, dont on ne sent la vérité, qu'après quelque réflexion; & elle est fondée sur ce que la différence entre la Force centrifuge, telle que nous venons de

la

CHAP. IV. la décrire, & la force centrifuge réelle, n'eſt employée qu'a pouſſer ou repouſſer la Terre, & ne ſçauroit lui faire changer ſa figure, puiſque nous avons démontré au VIII. Art. du précedent Chapitre, que chaque partie eſt pouſſée également & parallelement.

I V.

La force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la Gravitation totale de la Terre vers le Luminaire, & la premiere Force étant la même dans toutes les Parties, on voit bien qu'on pourroit ſuppoſer la force centrifuge égale à la Gravitation vers le Luminaire, telle qu'elle eſt au Centre de la Terre. Car la Gravitation qui répond au Centre, peut être cenſée la moyenne entre toutes les Gravitations du Globe; & cela, quelque relation qu'on ſuppoſe entre les Diſtances & les Gravitations, puiſque la différence des diſtances eſt inſenſible, par rapport à la Diſtance totale; & que par conſéquent la Gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de Diſtances, & qu'il ſe fera ainſi une juſte compenſation pour l'Hemiſphere tourné au Luminaire, & pour l'Hemiſphere oppoſé. Cette Propoſition n'eſt pourtant pas géometriquement vraie; mais la fin du Calcul m'a fait voir, qu'elle peut être cenſée vraie pour notre ſujet: & comme elle abrége fort le Calcul, je l'ai miſe ici, pour en faire uſage dans la ſuite.

PROBLEME.

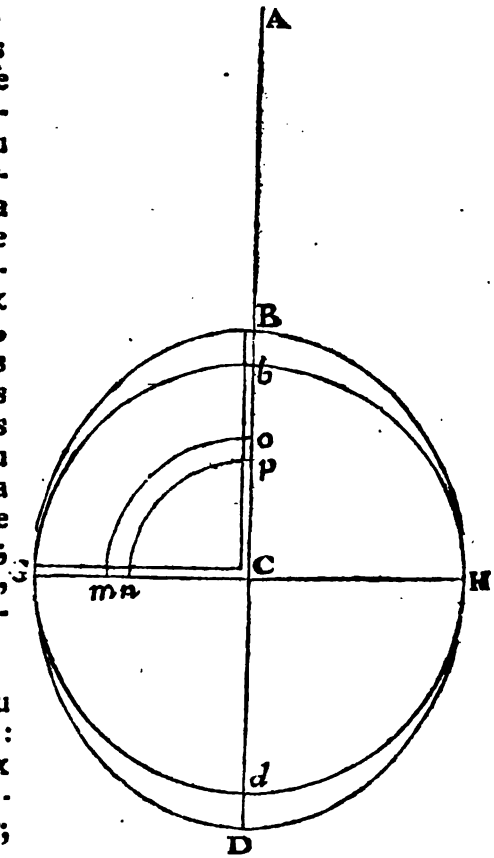
V.

Soit A le Centre du Soleil, $BGDH$ la Terre; AD une Ligne tirée par les Centres du Soleil & de la Terre: trouver la différence entre BD & ſa perpendiculaire GH, qui paſſe par le Centre C.

SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux Canaux BC & GC, communiquans entre eux au Centre C, rempli d'un Fluide de différentes Denſités, telles qu'on ſuppoſe dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous conſidérerons la Sphere inſcrite $GbHd$, & nous ſuppoſerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, ſur ce que nous avons dit dans la quatriéme hypotheſe du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de $GbHd$, cette conſidération ne ſçauroit changer ſenſiblement le reſultat du Calcul, parce que ces changemens de figure

figure sont tout-à-fait insensibles, & que, selon toutes les apparences, ils ne sçauroient se faire au delà d'une certaine profondeur assez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la Solution de notre Problême, de ce que le Fluide doit être en équilibre dans les Canaux GC & BC. Pour satisfaire à cette loi, & pour observer un ordre, nous diviserons la Solution en trois parties : dans la premiere, nous chercherons la pression totale du Fluide BC au Point C: dans la seconde, nous ferons la même chose à l'égard du Fluide GC; & enfin nous ferons le Calcul, en faisant les deux pressions totales égales entre elles.



I. Soit $AC = a$; GC, ou $bC = b$; la cherchée $Bb = \beta$: Qu'on tire du Centre C deux quarts de Cercles infiniment proches pn, om; soit Cp ou $Cn = x$; po ou $nm = dx$; la Densité variable en po ou $nm = m$, la Densité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau sphérique, & qui forme le double Ménisque) $= \mu$. Soit la Gravitation au Centre C vers le Centre du Soleil $A = g$, & la force centrifuge, qui agit parallelement à BD, sera par-tout $= g$ (§. *VIII. Chap. III.* & §. *IV. Chap. IV.* qu'on nomme G la Force accéleratrice en G ou b, causée par l'action du Globe $GbHd$, & Q la même force accéleratrice pour les Points p & n. Aprés toutes ces préparations, on voit que la goute po (dont la Masse doit être exprimée par la Densité m, & par la hauteur dx, c'est à dire $m\,dx$) est animée par plusieurs Forces accéleratrices : la *premiere* Force accéleratrice est celle qui resulte de l'action du Globe $GbHd$, que nous avons nommé Q : la *seconde* est la Force centrifuge de A vers C, provenant par la revolution de la Terre autour du Point A : nous avons demontré, que cette Force doit être faite $= g$: la *troisiéme* se fait vers A, & provient de la Gravitation vers le Soleil : celle-ci est négative à l'égard du Point C, CHAP. IV. & doit être faite $= -\frac{aa}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatriéme* provient de l'action du double Ménisque, compris entre $GBHD$ & $GbHd$, & elle est encore négative à l'égard du Point C; elle est $= -n\mu\mathfrak{C} \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. §. X. & XI. Chap. II. En multipliant toutes ces pressions accéleratrices de la goute $p\,o$ par sa Masse, on obtient la pression absolue qu'elle exerce sur le Point C, & cette pression absolue sera $\left(Q + g - \frac{aag}{(a-x)^2} - \frac{8n\mu\mathfrak{C}x}{15b}\right) \times m\,dx$.

On remarquera ici en passant, que comme a est censé infiniment plus grand que x, on peut poser $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = 1 + \frac{a}{2x}$, & ainsi cette pression devient

$$\left(Q - \frac{2xg}{a} - \frac{8n\mu\mathfrak{C}x}{15b}\right) \times m\,dx.$$

dont l'Intégrale donnera la pression de la Colonne $p\,C$; sçavoir;

$$\int Qm\,dx - \int \frac{2gm\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\mathfrak{C}mx\,dx}{15b},$$

après quoi on aura la pression de toute la Colonne $b\,C$, en substituant dans l'Intégrale b à la place de x. A cette pression, il faut encore ajoûter celle de la petite Colonne $B\,b$, dont la gravitation ou pesanteur vers C doit être censée uniforme dans toute sa hauteur, & égale à G: il faut aussi remarquer, que toutes les autres forces qui agissent sur cette petite Colonne $B\,b$ peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action G, qui exprime proprement la pesanteur près la surface de la Terre vers son centre; ainsi donc la pression de la petite Colonne $B\,b$ doit être simplement estimée par sa hauteur $\mathfrak{C}$, sa densité μ & sa pesanteur G, ce qui fait $\mu\mathfrak{C}G$. Il résulte enfin de tout cela, que la pression totale de toute la Colonne BC sur le Point C est

$$\mu\mathfrak{C}G + \int Qm\,dx - \int \frac{2gmx\,dx}{a} - \int \frac{8n\mu\mathfrak{C}mx\,dx}{15b},$$

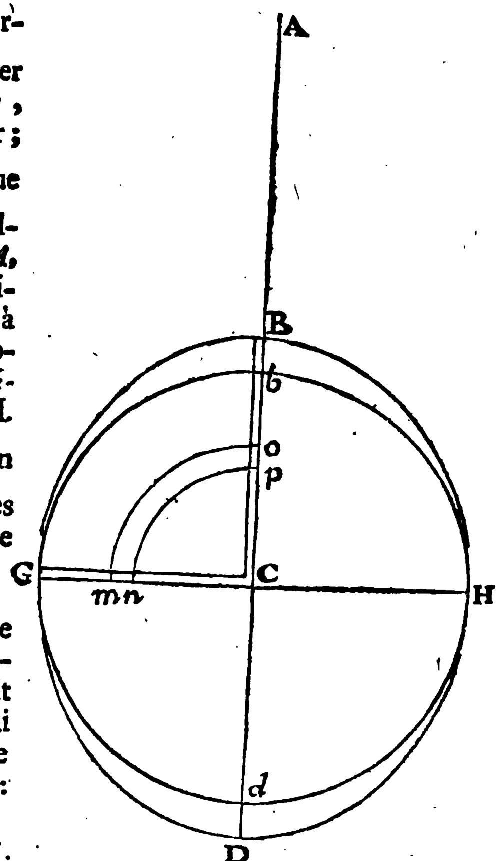
en prenant après l'intégration $x = b$.

II. Pour trouver à présent la pression de la Colonne GC, il faut chercher toutes les Forces qui animent la goute $m\,n$, dont la Masse est encore $m\,dx$. La *premiére* de ces Forces provient de l'Attraction du Globe $GbHd$; & est encore $= Q$, puisque cette Force est la même en n & en p: la *seconde* Force, provenant de la Force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle se tourne autour du Point A, est $= o$, cette Force étant par-tout perpendiculaire à GC (*§. VIII. Chap. III.*) La *troisiéme* Force provient de la Gravitation des Parties de la Terre vers A, cette Gravitation est au Point n vers le Point $A = \frac{aag}{aa + xx}$, &

étant

étant décompoſée, la Gravitation reſultante vers C doit être exprimée par $\frac{aagx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$: dans cette derniere expreſſion on peut rejetter au Dénominateur le terme xx, comme le Calcul me l'a fait voir; ainſi il provient $\frac{gx}{a}$, qui marque la troiſiéme force vers C reſultante de la Gravitation vers A.

La *quatriéme* Force accéleratrice, qui anime la goute mn à deſcendre vers le centre, provient de l'action du double Méniſque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. eſt $= \frac{4}{15} n \mu \beta \times \frac{x}{b}$. En prenant la ſomme de toutes ces Forces accéleratrices, la Force totale ſera $Q + \frac{gx}{a} + \frac{4n\mu\beta x}{15b}$; cette Force accéleratrice totale doit être multipliée par la petite Maſſe $m\,dx$; & du produit il faut prendre l'Intégrale, qui marquera la preſſion qu'exerce la Colonne mC ſur le centre C: Cette preſſion eſt donc $\int Qm\,dx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b}$;



& pour avoir la preſſion, qui réponde à toute la Colonne GC, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

III. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des preſſions des Colonnes BC & GC, il ne reſte plus pour achever la Solution de notre Problême, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la premiére & ſeconde partie. On aura donc $\mu G \beta + \int Qm\,dx - \int \frac{2gmxdx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mxdx}{15b} = \int Qmdx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu m xdx}{15b}$; & cette équation arrangée donne

$$5\mu Gab\beta - \int 4n\mu a\beta mxdx = \int 15gbmxdx,$$

& de là on tire la valeur cherchée de β, qui eſt conſtante; ſavoir;

$$\beta = \frac{\int 15gbmxdx}{5\mu Gab - \int 4n\mu amxdx}.$$ C. Q. F. T.

CHAP. IV.

COROLLAIRE.

VI.

On voit par notre Solution, que généralement $B\,b$ doit être égale à $D\,d$; car la valeur de ϵ est la même, soit que l'on prenne x affirmativement, soit négativement. Aussi auroit-il été ridicule de supposer la Courbe $B\,G\,D\,H$ une Ellipse, si les deux parties $G\,B\,H$ & $G\,D\,H$ n'étoient pas devenues par le Calcul également allongées, & la supposition auroit renfermé une contradiction.

Au reste ces deux petites Lignes ne seroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'est fondée que sur ce que nous avons rejetté plusieurs fois dans notre Solution de certaines petites quantités, mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à fait insensibles, non-seulement par rapport à la Ligne $B\,C$, mais même par rapport à la petite Ligne $B\,b$, qui ne sçauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore nécessaire d'avertir ici, qu'il faut être sur ses gardes, en rejettant dans le Calcul de certains termes; car comme dans l'équation résultante, plusieurs termes se détruisent, & qu'il n'en reste que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejetter que des quantités qui sont insensibles, même par rapport aux quantités restantes dans l'équation.

Ce n'est qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma Solution plusieurs termes, & je ne les aurois point négligés, si la fin du Calcul ne m'avoit enseigné, qu'ils peuvent & doivent être négligés.

SCHOLIE.

VII.

Pour avoir une juste idée de notre équation, remarquons que μ signifie la densité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, & m la densité quelconque de la couche, dont la distance au centre est égale à x : n exprime la circonference du Cercle, dont le rayon est égal à l'unité : b est le rayon de la Terre : a la distance entre les centres du Soleil & de la Terre : g exprime la force accéleratrice vers le Soleil, d'un Corps placé au centre de la Terre; & enfin G exprime la force accéleratrice, ou la pesanteur des Corps à la surface de la Terre vers son centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation sont homogenes & comparables entre eux, & en même tems de quelle maniere il faut faire usage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. G doit être exprimée par la Masse de toute la Terre, divisée par le quarré de son rayon; c'est-à-dire, qu'il faut suppofer $G = \frac{\int 2 n m x x d x}{b b}$, & comme on connoît pour le Soleil le rapport entre g & G, auſſi-bien que celui d'entre a & b, on voit qu'on peut enfin exprimer $\mathfrak{C}$ ſimplement par b: mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités $m x x d x$ & $m x d x$: c'eſt ce que nous allons faire dans quelques hypotheſes particulieres.

VIII.

Soit d'abord la denſité de la Terre uniforme, & nommément celle de l'eau de la Mer: c'eſt ici l'hypotheſe de M. NEWTON.

En ce cas m eſt une conſtante & égale à μ; & ainſi notre équation finale du V. §. eſt $\mathfrak{C} = \frac{15 g b b}{2 a (5 G - 2 n \mu b)}$;

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{3} n \mu b$, ou bien $2 n \mu b = 3 G$, & ſubſtituant cette valeur pour le ſecond terme du Dénominateur, il provient $\mathfrak{C} = \frac{15 g b}{4 G a} \times b$.

Nous verrons dans la ſuite, que cette expreſſion analytique donne préciſément la hauteur indiquée par M. NEWTON (†) ſimplement en pieds, pouces & lignes, ſans en donner le calcul, ou du moins ſans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine néceſſaire pour l'approfondir. Notre Methode comprend donc le cas tout particulier de M. NEWTON. Mais ce cas donne une ſi petite quantité, qu'il ne me paroît pas poſſible

 d'en

(†) C'eſt dans le Corollaire de la *Prop. XXXVI. du Liv.* III.; M. NEWTON dit que la hauteur de l'eau de la Mer ſous le Soleil ou au point oppoſé au Soleil, ſurpaſſe la hauteur de l'eau de la Mer à 90^d de ces points de 1^{pied}. $11\frac{1}{3}$ pouc., & c'eſt à peu près à cela que revient l'expreſſion $\frac{15 g b}{4 G a} b$, car (*par Cor.* 1. *Prop.* 8. *de ce Livre*) la gravité à la ſurface du Soleil eſt à la gravité à la ſurface de la Terre comme 10000 à 435. Le Demi-Diamêtre du Soleil étant vû de la Terre ſous l'Angle de $16' 4''$ ce Diametre eſt à ſa diſtance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainſi la gravité de la Terre ſur le Soleil (qui eſt g) eſt à la gravité à la ſurface de la Terre (qui eſt G) comme $\frac{10000}{214^2}$ à 435; D'où l'on trouve le Log. de $\frac{g}{G} = -4.7002107$. Le Diametre du Soleil étant à celui de la Terre comme 10000 à 109, on aura que le Rayon de la Terre $= b$ eſt à ſa diſtance du Soleil $= a$ comme 1 à $214 \times \frac{10000}{109}$, ainſi le Log. de $\frac{b}{a} = -5.7070265$, & L. $\frac{g b}{G a} = -8.4072372$. Enfin, reduiſant le Rayon de la Terre b en pouces à raiſon de $1145\frac{1}{2}$ lieuës de 2855 Toiſes chaqune pour le Rayon, ſon Log. eſt 8.3718709. Ainſi le Log. de $\frac{g b}{G a} b = 0.7791081$ dont le nombre eſt 6.014 dont les $\frac{15}{4}$ ſont $22\frac{1}{2}$ pouces, à peu près comme M. NEWTON a trouvé.

CHAP. IV. d'en déduire les Phénomenes des Marées, tels que les observations les donnent. C'est ce que je ferai voir plus au long dans la suite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. NEWTON, & tous ceux de sa Nation, qui ont écrit sur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il est essentiel d'étendre les hypotheses des densités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces densités contribue beaucoup au haussement & baissement des eaux dans les Marées; qu'on en peut déduire tel effet qu'on trouvera nécessaire pour l'explicatiou des Phénomenes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheses. Mais ce que je souhaite sur-tout que l'on remarque, c'est que les mêmes hypotheses qui donnent plus d'effet aux Luminaires, pour hausser & baisser les eaux dans les Marées, sont d'ailleurs extrêmement vrai-semblables par plusieurs raisons Physiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

I X.

Supposons la Terre creuse en dedans, jusqu'à une distance donnée c depuis le centre, & que la croute (dont l'épaisseur sera $= b - c$, soit encore par-tout d'une densité égale à celle de l'eau de la Mer.

Nous avons en ce cas encore m égale à la constante μ, & ainsi le Calcul se fera comme dans le précedent Article, avec cette restriction, que les intégrales des quantités $m\,x\,x\,d\,x$, & $m\,x\,d\,x$ doivent être $= 0$, lorsque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int m\,x\,d\,x = \frac{1}{2}\mu\,x\,x - \frac{1}{2}\mu\,c\,c$, ou (en faisant $x = b$) $= \frac{1}{2}\mu\,b\,b - \frac{1}{2}\mu\,c\,c$; substituant cette valeur dans l'équation finale du V. §. il vient

$$\epsilon = \frac{15\,g\,b\,(b\,b - c\,c)}{10\,G\,a\,b - 4\,n\,\mu\,a\,(b\,b - c\,c)};$$

& (*par le VII. §.*) G est $= \frac{\int 2\,n\,m\,x\,x\,d\,x}{b\,b} = \frac{2\,n\,\mu}{3\,b\,b} \times (x^3 - c^3 =$ (puisqu'il faut poser $x = b$) $\frac{2\,n\,\mu}{3\,b\,b} \times (b^3 - c^3)$: de cette derniere équation, on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3\,b\,b\,G}{2\,n \times (b^3 - c^3)}$; & enfin $4\,n\,\mu\,a\,(b\,b - c\,c) = \frac{6\,a\,b\,b\,G\,(b\,b - c\,c)}{b^3 - c^3}$ & substituant cette valeur dans le second terme du Dénominateur de notre équation, on a $\epsilon = \frac{15\,g}{2\,G} \times \frac{b + x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2\,b\,b + 2\,b\,c + 5\,c\,c}$.

Cette quantité est la même que celle du précedent Article, lorsque $c = 0$; mais elle devient plus petite, à mesure qu'on suppose la Terre plus creusée, & elle deviendroit tout-à-fait nulle, si on supposoit la Terre presque entierement creuse en forme d'une voute sphérique, dont l'épaisseur fût peu considérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque suffit seule, pour refuter le sentiment de ceux qui croyent que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée; car il ne pourroit,

roit y avoir en ce cas aucun Flux & Reflux de la Mer, au moins dans notre Systême. Chap. IV.

X.

Si l'on supposoit la loi des densités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b} \mu$, c'est-à-dire, que les densités fussent proportionelles aux distances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$\mathfrak{C} = \frac{15 g b}{7 G a} \times b,$$

& par conséquent beaucoup plus petite, que si la Terre étoit par-tout d'une même densité, sçavoir en raison de 7. à 4. Aussi cette hypothese n'est-elle aucunement vraisemblable, y ayant apparence que les couches plus denses sont plus bas que les couches plus legeres.

X I.

Si la loi des densités est exprimée par $m = \frac{b \mu}{x}$, c'est-à-dire, si l'on suppose les densités, suivre la raison inverse des distances des couches au centre, on trouveroit

$$\mathfrak{C} = \frac{15 g b}{G a} \times b,$$

ce qui fait la valeur de $\mathfrak{C}$ quatre fois plus grande, que dans la supposition de M. *Newton*, de la parfaite homogenéité de la Terre.

X I I.

Supposons enfin la loi des densités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{5}} \mu$, il faudra mettre $\frac{5}{6} \mu b b$ pour $\int m x d x$, & l'équation du V I. §. divisée par μ sera

$$\mathfrak{C} = \frac{45 g b}{10 G a - 12 n \mu a b} \times b:$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2 n m x x d x}{b b} = \int \frac{2 n \mu x^{\frac{6}{5}} d x}{b^{\frac{2}{5}}} = \frac{6 n \mu x^{\frac{11}{5}}}{5 b^{\frac{2}{5}}}$ $=$ (en faisant $x = b$) $\frac{6}{5} n \mu b$. D'où l'on voit que le Dénominateur de notre équation fondamentale devient $= 0$; & par consequent $\mathfrak{C} = \infty$. Ainsi l'élevation des eaux seroit infinie.

XII.

J'ai mis cette derniere hypothese, non qu'elle soit possible, puisque la densité ne sçauroit être infinie, comme elle devroit être au centre; mais pour faire voir l'avantage & la supériorité de notre Théorie, puisqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: si les Marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les observe, nous pourrions

rions lui assigner une cause suffisante. Ayant au reste bien examiné tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, je suis entiérement convaincu, que la force assignée par M. *Newton* ne sçauroit suffire pour les produire: il faut donc dire dans le systême même de ce Philosophe, que les densités de la Terre ne sont pas uniformes, mais qu'elles croissent vers le centre. Cette hypothese n'est-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle même? L'eau est-elle le seul Fluide que nous connoissions? & ne faut-il pas que les Fluides plus pesants, soient plus proches du centre de la Terre? le Mercure est près de quatorze fois plus pesant que l'eau: la grande compression que souffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matiere plus compacte & plus dense?

Si nous considérons outre cela, combien les Planetes & la Terre, qui nagent sans doute dans un milieu resistant, quoique extrêmement subtil, conservent leur mouvement, sans en perdre la moindre partie considérable pendant une longue suite de siécles, nous pourrions facilement croire, que tous ces Corps ont beaucoup plus de matiere, que Mr. *Newton* ne marque. Enfin de quel côté que j'envisage cette Question, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de densité vers le centre.

X I V.

Si, tout le Noyau ou tout le Globe de la Terre restant, l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, changeoit de densité, la quantité $\mathfrak{C}$ suivroit la raison reciproque des densités des eaux de la Mer. Il suit de là que si la Terre étoit inondée de Mercure, les Marées seroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne sont actuellement. Et si au contraire l'air étoit un Fluide homogene pesant, mais sans élasticité, sa hauteur seroit environ de 850 $\mathfrak{C}$ plus grande à ceux qui ont le Soleil au Zenith, qu'à ceux qui l'auroient à l'Horison. Cela feroit 1700 pieds de difference dans la hauteur de l'Atmosphere, à ne donner que deux pieds de valeur à $\mathfrak{C}$; & cette différence en produiroit une sur le Barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'observe point à cet égard aucune variation dans le Barometre? C'est l'élasticité de l'air qui en est la cause. cette élasticité fait que la hauteur du Barometre doit être constamment la même dans toute la surface de la Mer, en faisant abstraction seulement des causes accidentelles & passagères, qui peuvent survenir tout d'un coup, & qui n'agissent sur l'air, que parce que celui-ci ne sçauroit obéir assez promptement, ni se mettre dans un instant dans son état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il est faux que la pression du Mercure soit égale à la pression, ou plûtôt au poids de la Colonne d'air verticale couchée dessus, ce que l'on affirme ordinairement;

mais

mais la pression du Mercure est égale au poids moyen de toutes les Colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'est à-dire, égale au poids de tout l'Atmosphere (dont la hauteur est considérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raison de la base de la Colonne du Mercure à toute la surface de la Terre. Cette Proposition fait voir que la hauteur moyenne du Barometre doit être la même sous l'Equateur & sous le Cercle Polaire, quoique le poids absolu de la Colonne d'air verticale sous l'Equateur pendant les plus grandes chaleurs ne soit pas la moitié si grand que celui d'une pareille Colonne d'air sous le Cercle Polaire en Hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas sensiblement la hauteur du Barometre, quoi qu'ils élevent les eaux considérablement. La véritable raison n'en est que l'élasticité de l'air, qui doit faire presser également tous les endroits de la surface de la Terre; & cette seule reflexion démontre entierement l'insuffisance des inégales compressions de la matiere des Tourbillons, pour expliquer les Marées, comme nous avons déja remarqué au III. §. Chap. I. CHAP. IV.

X V.

Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, & il n'est pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité c (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la Mer, & la plus petite, entant qu'elle est produite par la seule action du Soleil) est toujours $= \frac{n g b}{G a} \times b$: le coefficient n dépend des différentes densités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ est connu par les Observations astronomiques: il ne reste donc qu'à voir comment on pourra déterminer la quantité $\frac{g}{G}$: c'est en comparant les effets que les Forces g & G produisent; la premiere, en retenant la Terre dans son Orbite annuelle; la seconde, en retenant la Lune dans celle qu'elle fait autour de la Terre. Si la distance moyenne de la Lune au centre de la Terre est nommée α, la Force centrifuge de la Lune sera $= \frac{b b}{\alpha \alpha} G$, & la force centrifuge de la Terre est $= g$: or la Force centrifuge moyenne de la Terre dans son Orbite, est à la force centrifuge moyenne de la Lune autour de la Terre, ou plutôt autour du centre de Gravité du systême de la Terre & de la Lune, comme la distance du Soleil divisée par le Quarré du temps périodique de la Terre autour du Soleil, est à la distance de la Lune au centre de Gravité commun de la Terre & de la Lune, [M. NEWTON suppose cette distance $= \frac{39}{40} \alpha$, voyez ses *Princ. Math. Phil. Nat. Edit.* 2. *pag.* 430.; il fonde cette supposition sur quelques Phénomenes des Ma-

CHAP. IV. rées, mais mal choisis à mon avis; elle est donc encore fort douteuse; mais comme elle n'est pas de conséquence pour notre sujet, je ne laisserai pas de l'adopter ici] divisée par le quarré du tems périodique de la Lune: on a donc, en nommant le tems périodique de la Terre T, & celui de la Lune t, cette Analogie $g : \frac{b}{\alpha}\frac{b}{\alpha} G :: \frac{a}{TT} : \frac{39\,\alpha}{40\,tt}$;

ce qui donne $\frac{g}{G} = \frac{40\,abbtt}{39\,\alpha\alpha TT}$, & par consequent

$$\zeta = \frac{ngb}{Ga} \times b = \frac{40\,nbbtt}{39\,\alpha\alpha TT} \times b.$$

REMARQUE.

Pour voir que cette Formule s'accorde avec celle de M. NEWTON pour la supposition de l'homogenéïté de la Terre, nous remarquerons, qu'en ce cas on a $n = \frac{15}{4}$ (§. *VIII.*) & M. NEWTON suppose $\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ (*Princip. Mat. Phil. Nat. Edit.* 2. *pag.* 430.) $\frac{tt}{TT} = \frac{1000}{178725}$ (*Princip. Math. pag.* 395.) & enfin b = 19695539 pieds après la mesure de M. Cassini. De tout cela il resulte

$$\zeta = \frac{40.\;15.\;1.\;1000.\;19695539}{39.\;4.\;(60\frac{1}{4})^2.\;178725.}\ \text{pieds},$$

cela fait $\zeta = 1$ pied 11. pouces & un quart. M. NEWTON trouve 1 pied 11 pouces & un huitieme. (*Princ. Math. pag.* 419.) La différence me paroît trop petite, pout en rechercher l'origine.

X VI.

Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu aussi de la Lune, sans y rien changer; de sorte que les équations fondamentales des §. §. V. & V I I. servent également pour la Lune, en entendant par a la distance entre les centres de la Terre & de la Lune, & par g la pesanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au X V. §. que quelque hypothese qu'on prenne pour exprimer les différentes densités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$\zeta = \frac{ngb}{Ga} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\delta = \frac{n\gamma b}{G\alpha} \times b,$$

prenant

prenant pour δ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au Zenith, & à l'Horison, pour α la distance entre les centres de la Lune & de la Terre. & pour γ la pesanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune. CHAP. IV.

XVII.

Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil sur la Mer, est qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au XV. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de Satellites, ne sçauroit donner immédiatement la Force accéleratrice qu'elle cause au centre de la Terre, & que nous avons nommé γ. Je trouve par ma nouvelle Théorie de la Lune, dont j'ai déja fait mention ci-dessus, plus générale, plus exacte, & sur-tout infiniment plus facile, que celle de M. NEWTON, qu'on peut déterminer lad. valeur γ avec toutes les autres qui en dépendent; sçavoir la masse de la Lune, comparée avec celle de la Terre, & leur commun centre de Gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puisse les observer assez exactement. M. NEWTON a tâché de déterminer la Force accéleratrice γ, en comparant les effets de la Lune sur la Mer avec ceux du Soleil; cette Methode seroit fort bonne, si on sçavoit bien séparer les effets des deux Luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les Marées bâtardes, qui suivent les Quadratures, avec les plus grandes Marées, qui suivent les Syzygies. Nous verrons ci-dessous ce que l'on peut trouver à redire à cette Methode, & comment on pourra en substituer d'autres plus exactes.

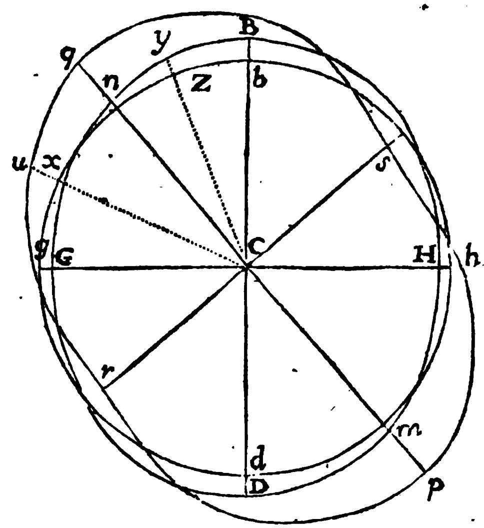
XVIII.

Au reste, il est clair que la Lune & le Soleil produiront leurs effets independamment l'une de l'autre: tout ce que le Soleil pourroit contribuer au moins dans la pure Théorie, pour troubler l'action de la Lune, est qu'il allonge un peu la Terre: mais il est aussi bien évident, que la Lune changera également la surface de la Mer sur une Terre parfaitement ronde ou allongée d'un petit nombre de pieds: nous avons déja dit la même chose dans la premiere hypothese du second Article.

Voici donc comment il faudroit déterminer la surface de la Mer, si les deux Luminaires pouvoient produire dans un instant tout leur effet, c'est-à-dire, si l'eau n'avoit point d'inertie, & qu'elle pût prendre incontinent sa juste figure; car c'est de cette inertie, qu'il faudra tirer dans la suite plusieurs inégalités, & autres Phénomenes, qu'on a observés dans les Marées.

CHAP. IV.

Soit $b\,g\,d\,h$ le Globe de la Terre parfaitement ſpherique, & conſidérons d'abord le Soleil, que nous ſuppoſerons placé dans la Ligne prolongée bd paſſant par le centre de la Terre C: notre Globe ſe changera en Sphéroïde, tel que $B\,G\,D\,H$, les eaux baiſſant autour de $g\,h$, & montant autour de b & d. Soit enſuite la Lune dans la Ligne prolongée $q\,p$; il eſt clair qu'elle agira ſur le Sphéroïde de la même façon qu'elle feroit ſur le Globe parfait, duquel le Sphéroide differe d'une quantité tout-à fait inſenſible: ainſi donc la Lune fera monter



& baiſſer les eaux par deſſus la ſurface du Sphéroïde, tout autant qu'elle feroit à l'égard de la ſurface ſphérique, ſans l'action du Soleil. Il faut donc prendre $n\,q$, ou $m\,p$, à $b\,B$, ou $d\,D$ en raiſon des Forces lunaire & ſolaire, c'eſt-à-dire, comme $\frac{\gamma}{a}$ à $\frac{g}{a}$, tracer enſuite les courbes $q\,r\,p\,s$, telles qu'en prenant un Angle quelconque $u\,C\,q$, égal à un Angle $y\,C\,B$, la perpendiculaire $u\,x$ interceptée entre les ſurfaces des Sphéroïdes, ait à la perpendiculaire $y\,z$, interceptée entre le premier Sphéroïde & le Globe, la raiſon de $n\,q$ à $B\,b$. Voilà donc une Conſtruction géometrique générale, qui montre à chaque moment, & à chaque endroit, la hauteur de la Mer, & les variations de cette hauteur. Mais elle demande des Calculs longs & pénibles. Nous verrons dans la ſuite, comment on pourra s'y prendre, pour les faire, en commençant par les circonſtances & les hypotheſes les plus ſimples, & en ajoûtant des corrections & équations à faire pour chaque circonſtance changée.

X X I.

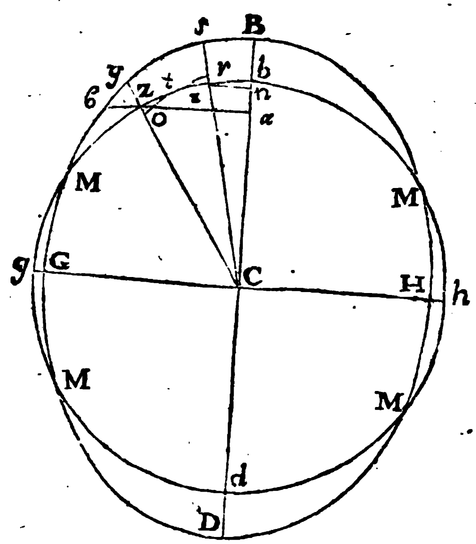
Voici donc les cas & les hypotheſes, par leſquelles nous commencerons. Nous ſuppoſerons d'abord, que la Lune fait des Cercles parfaits autour de la Terre, & pareillement la Terre autour du Soleil : que ces Orbites ſont dans le plan de l'Equateur de la Terre : que toute la Terre eſt inondée : que la ſurface de la Mer prend dans un inſtant ſa juſte Figure, tout comme ſi l'eau n'avoit point d'inertie, ni reſiſtances ; & enfin qu'il ne faille déterminer les loix des Marées, que ſous l'Equateur. Mais avant de faire les

les Calculs, il sera bon d'exposer préliminairement quelques Lemmes géometriques. CHAP. V.

CHAPITRE V.

Contenant quelques Propositions de Géometrie préliminaires pour l'Explication & le Calcul des Marées.

PROBLEME.



SOit, comme ci-devant, le Cercle $b\,g\,d\,h$ & l'Ellipse presque circulaire $B\,G\,D\,H$, & supposons la Sphere & le Sphéroïde, décrits par la rotation du Cercle & de l'Ellipse autour de l'Axe $B\,D$, égaux; trouver le rapport entre les petites Lignes $B\,b$ & $G\,g$.

SOLUTION.

Nous supposerons pour nous servir des mêmes expressions, que nous avons employées jusqu'ici, $B\,b + G\,g = \beta$; $G\,g = x$, & $B\,b = \beta - x$; $C\,b$ ou $C\,g = b$; n la circonference du Cercle, dont le rayon est égal à l'unité. Ceci posé, on sçait que la Sphere sera $= \frac{2}{3}\,n\,b^3$: on sçait aussi, qu'un Ellipsoïde (dont le grand Axe est $= 2\,A$, & le plus petit Diametre $= 2\,B$) est $= \frac{2}{3}\,n\,B\,B\,A$; cela donne notre Sphéroïde $= \frac{2}{3}\,n\,(b - x)^2 \times (b + \beta - x) = \frac{2}{3}\,n\,(b^3 - 3\,b\,b\,x + b\,b\,\beta)$ si l'on néglige les infiniment petits du second ordre. Faisant à présent par la condition du Problême la Sphere égale au Sphéroïde, on a $\frac{2}{3}\,n\,b^3 = \frac{2}{3}\,n\,(b^3 - 3\,b\,b\,x + b\,b\,\beta)$ c'est-à-dire, $x = \frac{1}{3}\,\beta$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

I.

Si $G\,g = \frac{1}{3}\,\beta$, il faut que $B\,b$ soit $= \frac{2}{3}\,\beta$, & par conséquent double de l'autre.

CHAP. V.

l'autre. Ainſi donc l'eau monte deux fois plus autour de la Ligne, qui paſſe par le centre de l'un des Luminaires, & celui de la Terre, qu'elle ne deſcend à la diſtance de 90 degrés.

PROBLEME.

III.

Si l'on tire du centre C une droite quelconque Cy, trouver la petite Ligne yz, qui marque la hauteur verticale du Point y pris dans l'Ellipſe, par deſſus le Point Z pris dans le Cercle.

SOLUTION.

Qu'on tire par le Point z la droite $\beta\alpha$ perpendiculaire à l'Axe: on voit qu'en conſéquence de nos hypotheſes, l'Angle $\beta y z$ doit être pris pour un droit, & le petit Triangle $\beta y z$ cenſé ſemblable au Triangle $C\alpha z$, d'où l'on tire

$$yz = \frac{\alpha z}{Cz} \times \beta z.$$

Soit à préſent $C\alpha = s$; $z\alpha = \sqrt{bb - ss}$; on aura par la nature de l'Ellipſe

$$\alpha\beta = \frac{CG}{CB} \times \sqrt{B\alpha \times \alpha D} = \frac{b - \frac{1}{3}\beta}{b + \frac{2}{3}\beta} \times \sqrt{(b + \frac{2}{3}\beta - s) \times (b + \frac{2}{3}\beta + s)}.$$

Si on change cette quantité en ſuites, & qu'on rejette toujours les infiniment petits du ſecond ordre, on trouvera enfin

$$\alpha\beta = \sqrt{bb - ss} + \frac{2ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta.$$

De là on tire $\alpha\beta - \alpha z = \beta z = \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \beta$, & par conſequent

$$yz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \beta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE I.

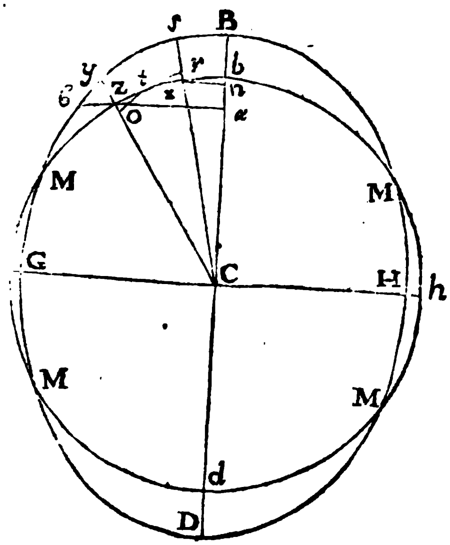
IV.

Pour trouver les Points M, où l'Ellipſe coupe le Cercle, on n'a qu'à faire $yz = 0$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5773\,b$, & l'Arc bM de $54^\circ.\ 44'$.

COROL-

COROLLAIRE.

V.



Si la Terre tournoit autour d'un Axe perpendiculaire au plan de notre Figure, & que le Cercle $b\,g\,d\,b$ repréſentât ainſi l'Equateur de la Terre, dans lequel l'un des Luminaires eſt ſuppoſé ſe trouver : ſi par cette rotation de la Terre le point B eſt parvenu en y, le Luminaire reſtant dans l'Axe $B\,D$, l'Angle $b\,C\,Z$ ſera l'Angle horaire, dont le Coſinus eſt appellé s, le Sinus total b; & on voit que la différence des hauteurs de l'eau avant & après la dite rotation ſera repréſentée par $B\,b - y\,z$, c'eſt-à-dire par $\frac{2}{3}\mathcal{C} + \frac{bb-3ss}{3bb} \times \mathcal{C}$, ou par $\frac{bb-ss}{bb} \times \mathcal{C}$, ou enfin (en nommant le Sinus de l'Angle horaire r) par $\frac{rr}{bb}\mathcal{C}$. Nous conclurons de là, que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute-Mer.

COROLLAIRE III.

VI.

Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, ſont pour chaque point Z, proportionelles aux aires du Triangle $C\,\alpha\,z$. Car l'intervalle de tems doit être exprimé ſimplement par un petit Arc de Cercle, qui eſt $= \frac{-b\,ds}{\sqrt{bb-ss}}$, en conſiderant s comme variable ; & ſi nous faiſons cette quantité égale à un petit élement de tems dt, nous aurons $\frac{-b\,ds}{\sqrt{bb-ss}} = dt$ & $ds = \frac{-dt\sqrt{b-ss}}{b}$. Or par le V. §. tout le baiſſement des eaux étant $= \frac{bb-ss}{bb} \times \mathcal{C}$, ſa différentielle ſera $= \frac{2\,\mathcal{C}\,s\,dt\sqrt{bb-ss}}{bt}$; & comme les quantités $\mathcal{C}$, b & dt ſont conſtantes, nous voyons, que les variations verticales des Marées, qui ſe font en de petits intervalles de tems égaux, ſont proportionelles aux quantités répondantes $s\sqrt{bb-ss}$, ou aux Aires des Triangles $C\,\alpha\,z$.

SCHO-

CHAP. V.

SCHOLIE.

VII.

On voit que ces proprietés tendent à déterminer les hauſſemens & baiſſemens d'une même Marée pour chaque moment, & nous verrons dans la ſuite, combien elles répondent aux Obſervations. Ces propoſitions ſuffiroient pour ce deſſein, ſi nous ne voulions conſidérer que ce qui arrive aux Conjonctions & Oppoſitions des deux Luminaires: mais comme cette reſtriction ne feroit qu'un cas très-particulier de toute la Théorie des Marées, nous paſſerons plus outre. Remarquons cependant encore une fois, que chaque Luminaire peut être conſideré, comme agiſſant ſur la Mer, indépendamment l'un de l'autre; puiſque les petites variations cauſées par l'un des deux, ne changent pas ſenſiblement toute la figure de la Terre: une quantité de quelques pieds ne ſçauroit être ſenſible par rapport à tout le Diametre de la Terre. Nous allons donc conſidérer les deux Luminaires à la fois, & dans une poſition en longitude quelconque, quoique toujours dans le plan de l'Equateur. Nous conſidérerons auſſi ſur la Terre un Point quelconque dans l'Equateur, pour voir combien la Mer doit être plus haute ou plus baſſe dans ce Point, qu'elle ne feroit ſans l'action des Luminaires. C'eſt ici une Queſtion des plus eſſentielles pour notre ſujet. Souvenons nous cependant, que β ſignifie la hauteur de toute la variation des eaux d'une Marée, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil, & δ la même choſe pour la Lune.

PROBLEME.

VIII.

Soit $b\beta d\delta$, l'Equateur de la Terre parfaitement circulaire, tel qu'il feroit ſans l'action des deux Luminaires: ſuppoſons le Soleil dans la Ligne prolongée db, & la Lune dans la Ligne prolongée $\delta\beta$; & ſoit un point Z donné de poſition: trouver la hauteur yz, qui marque l'élevation de la Mer pour le dit point Z produit par les deux Luminaires.

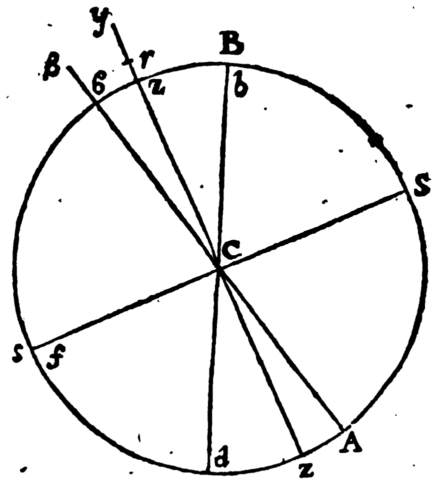
SOLUTION.

Suppoſons que le Soleil éleve les eaux en b de la hauteur Bb, & la Lune de la hauteur $B\beta$ au Point β. On aura par les précedentes Propoſitions $Bb = \frac{2}{3}\beta$, & $B\beta = \frac{2}{3}\delta$: qu'on partage la hauteur cherchée yz en deux parties yr, & rz, dont la premiere convienne à l'action de la Lune, & l'autre à l'action du Soleil: ſoit le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'An-l'Angle donné $bCz = \frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle βCz pareillement donné $= \frac{e}{b}$: de cette maniere, nous aurons en vertu du III. §. $rz = \frac{3\sigma\sigma - bb}{3bb} \times \beta = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta$, & pareillement $yr = \frac{2bb - 3ee}{3bb} \times \delta$, & par conséquent CHAP. V.

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb - 3\beta\beta}{3bb} \times \delta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

IX.



On voit par cette Solution la loi qu'il faudroit observer pour construire une Table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, & pour chaque moment, les hauteurs des Marées, en supposant le Point z changer continuellement de position, jusqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à présent quel est le Point Z, qui marque la plus grande hauteur yz, les Poles b & β étant donnés de position.

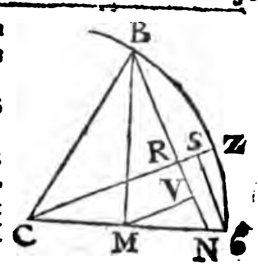
LEMME.

X.

Si le Sinus de l'angle bCz est appellé, comme ci-dessus, $\frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle βCz, $\frac{e}{b}$; le Sinus de la somme de ces deux Angles, c'est-à-dire, le Sinus de l'Angle $bC\beta$, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$e = \frac{m\sqrt{(bb - \sigma\sigma)} - n\sigma}{b}, \text{* \&}$$

$$e^2 = \frac{mmbb + nn\sigma\sigma - mm\sigma\sigma - 2mn\sigma\sqrt{(bb - \sigma\sigma)}}{bb}.$$



* La lettre n exprime ici $\sqrt{bb - mm}$. La démonstration de ce Lemme est fort simple, le Rayon BC étant b, le Sinus de tout l'Angle BCϐ étant $\frac{m}{b}$, on aura BM $= m$, CM $= \sqrt{bb - mm}$; ϐS $= \sigma$, CS $= \sqrt{bb - \sigma\sigma}$, BR $= e$. Prolongez B R en N, & menez M V parallele à C R, les Triangles CϐS & B M V seront semblables à cause des Angles droits S & V & des Angles égaux CϐZ & MBN; Donc on aura Cϐ (b) : CS $(\sqrt{bb - \sigma\sigma})$ = BM (m) : BV $= \frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b}$; On trouvera de même que Cϐ (b) : ϐS (σ) = CN : NR = CM (n) : RV $= \frac{n\sigma}{b}$; Donc BR (e) = BV − RV $= \frac{m\sqrt{bb - \sigma\sigma}}{b} - \frac{n\sigma}{b}$: C.Q.F.T.

CHAP. V.

Je n'ajoûterai pas la démonstration de ce Lemme : mais il est pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de ϱ, qui marque le Sinus de la différence de deux Angles donnés par leurs Sinus, on tombe facilement dans une autre expression beaucoup plus prolixe, & qui rend le Calcul du Problême, que nous allons exposer, presque impraticable.

PROBLEME.

Trouver les Points Z, où les hauteurs y z soient les plus grandes.

SOLUTION.

La nature de notre Problême demande, que la différentielle de yz, sçavoir $\frac{-2\zeta\sigma d\sigma - 2\delta\varrho d\varrho}{3bb}$ (§. *VIII.*) soit $= 0$, ou bien $\varrho d\varrho = \frac{-\zeta}{\delta}\sigma d\sigma$.

Et si l'on différentie l'équation seconde du précedent Lemme, on trouve, prenant les quantités m, n & b pour constantes, & σ pour variable,

$$\varrho d\varrho = \frac{nn\sigma d\sigma - nm\sigma d\sigma}{bb} + \frac{2mn\sigma\sigma - nmbb}{bb\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}} d\sigma:$$

En comparant ces deux valeurs de $\varrho d\varrho$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$\left(-\frac{\zeta}{\delta}bb\sigma + mm\sigma - nn\sigma\right)\sqrt{bb-\sigma\sigma} = 2mn\sigma\sigma - mnbb$: si l'on suppose pour abréger la formule $\frac{-\zeta bb}{\delta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve aprés une reduction entiere de l'équation, le Sinus de l'Angle bCz, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(4+AA)}}\right)}. \text{ C. Q. F. T.}$$

SCHOLIE.

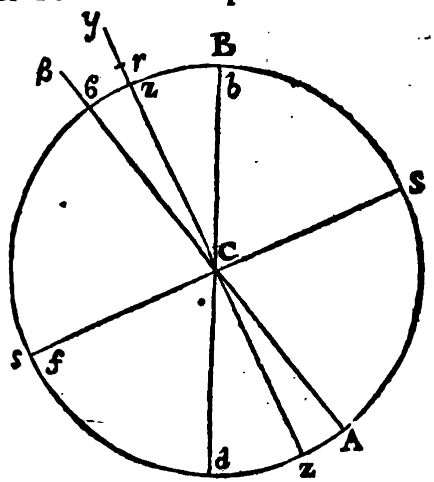
XII.

Il ne sera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, quel choix on doit faire des Signes ambigus. Mais pour faciliter la chose, & pour en donner une idée d'autant plus distincte, on pourra faire les remarques qui suivent.

1°. Que notre Formule marque en même tems quatre Points z, Z, s & S; que les deux premiers diametralement opposés, marquent que la Mer y est la plus haute, & les deux autres diametralement opposés marquent que la Mer x est la plus basse, & que l'Arc zs est toujours de $90°$, ce que l'on connoit de ce que $\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}$, exprimant le Sinus d'un Angle, son Cosinus est exprimé par $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)}$.

2°. Que

2°. Que l'Angle $bC\epsilon$ étant aigu, le Point z tombe entre les Points b & ϵ, que si cet Angle est droit, le Point z tombe précisément sur ϵ (en supposant la Force lunaire plus grande que la Force solaire, comme elle l'est sans doute); & enfin, lorsque l'Angle $bc\epsilon$ est obtus, que le Point z tombe au-delà du Point ϵ, l'Arc bz devenant plus grand que l'Arc $b\epsilon$, avec cette loi que le Point z s'approche reciproquement du Point d, tout comme il s'étoit éloigné du Point b. Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejetter, mais qu'il faudroit adopter, si la Force solaire surpassoit la Force lunaire. CHAP. V.



COROLLAIRE I.

XIII.

On trouve le Sinus de l'Angle ϵCz exprimé par $\frac{\epsilon}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le Sinus de l'Angle bCz. On voit même que sans faire le Calcul de nouveau, on n'a qu'à renverser les lettres ϵ & δ dans la valeur de A, indiquée au §. XI. & supposer $-\frac{\delta b b}{\epsilon m n}+\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=B$, & on aura $\frac{\epsilon}{b}=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\pm\frac{B}{2\sqrt{(4+BB)}}\right)}$.

COROLLAIRE II.

XIV.

Considérant l'Angle $bC\epsilon$ comme variable, on voit que l'Angle ϵCz, qui marque l'Angle horaire entre le moment de la plus haute Marée, & celui du passage de la Lune par le Méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puisqu'il est $=o$, tant lorsque l'Angle $bC\epsilon$ est nul, que lorsqu'il est égal à un droit: nous allons déterminer cet Angle dans la Proposition suivante.

PROBLEME.

XV.

Déterminer l'Angle $bC\epsilon$ tel que son Angle ϵCz devienne le plus grand qu'il est possible.

SOLUTION.

Pour déterminer l'Angle en queſtion, il faut faire $d\varrho = 0$, or ϱ étant exprimé par des conſtantes, & par la variable B (§. *XIII.*) il faut ſuppoſer $dB = 0$, c'eſt-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\delta bb}{\zeta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être ſuppoſée égale à zero, en conſidérant les lettres m & n comme variables: ſubſtituons pour n ſa valeur $\sqrt{bb - mm}$ (§. *X.*) nous aurons

$$B = \frac{-\delta bb + 2\zeta mm - \zeta bb}{\zeta m\sqrt{bb - mm}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faiſant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\zeta + \delta}{2\delta}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.

Si ζ étoit $= \delta$, c'eſt-à-dire, ſi les deux Luminaires avoient une force égale, pour mettre la Mer en mouvement, on auroit $m = b$. Mais la Force lunaire étant plus grande que la Force ſolaire, m devient plus petit que b. cependant l'Angle $bC\zeta$ ne deviendra jamais moindre que de 45°.

On remarquera auſſi, qu'il y a quatre Points, tels que ζ, dont deux ſont autant éloignés du Point b, que les deux autres le ſont du Point d; & que dans ces quatre Points, la haute Marée vient alternativement après & avant le paſſage de la Lune par le Méridien.

Nous allons voir à préſent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des Marées, & pour faire voir, combien notre Théorie bien ménagée s'accorde là-deſſus avec les Obſervations.

CHAPITRE VI.

Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaiſons.

I.

ON a été de tout tems ſoigneux à bien remarquer l'heure des hautes & baſſes Marées, pour établir là-deſſus, autant qu'il eſt poſſible,

ble, des regles pour l'utilité de la Navigation ; & quoi qu'il soit impossible de donner des regles générales & exactes, on n'a pas laissé de continuer ces recherches. Mais je ne sçache pas qu'on se soit encore avisé de raisonner là-dessus autrement, que par *induction* sur un grand nombre d'Observations, pendant que c'est ici une matiere, qui dépend beaucoup de la Géometrie pour l'essentiel, & que ce n'est que par rapport à quelques circonstances, qu'on est obligé de recourir aux Observations, pour établir des regles : & cela est si vrai, que la seule Théorie m'a fait voir plusieurs Points, dont je n'étois pas encore instruit par la lecture. Voyons donc avant toutes choses, jusqu'où la Théorie peut aller, pour éclaircir notre sujet : nous nous attacherons encore aux hypothéses marquées au XIX. §. du Chap. IV. que je prie le Lecteur de relire. Nous irons ensuite plus loin, & nous examinerons, quelle correction il faudra employer à l'égard de chaque hypothese, lorsqu'elle est en quelque façon changée. CHAP. VI.

II.

Il est bon d'avertir ici le Lecteur, lorsque je parlerai des deux Marées qui se suivent, que j'entends deux Marées pareilles, qui se suivent au bout de 24. heures, en sautant la Marée intermediaire ; nous éviterons par-là de certaines petites inégalités, qu'on a observées, lorsqu'on a comparé ensemble les deux Marées, qui se font dans un même jour. Si l'on veut comparer ensemble des Marées, qui ont plusieurs jours d'intervalle, nous choisirons celles qui se font pendant que la Lune est au-dessus de l'Horison.

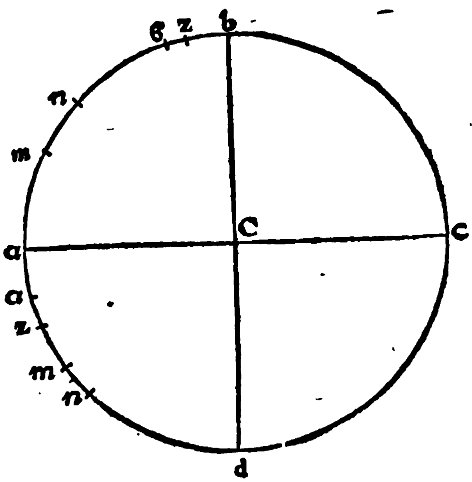
III.

Il est clair, que si la Lune avoit infiniment plus de force que le Soleil, la haute Marée répondroit précisément au passage de la Lune par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre seroit d'un jour lunaire précis : & si au contraire la Force du Soleil surpassoit infiniment la Force lunaire, la Marée se feroit au moment du passage du Soleil par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, seroit précisément d'un jour solaire. Mais comme les deux dites Forces sont, suivant toutes les Observations, comparables entre elles, on voit que le vrai tems de la haute Marée doit dépendre du passage par le Méridien de l'un & de l'autre Luminaire : mais il aura toujours plus de rapport avec la Lune, qu'avec le Soleil, parce que la Force lunaire est, sans contredit, plus grande que la Force solaire. Nous verrons dans la suite, qu'il y a quatre situations de la Lune, dans lesquelles l'intervalle de deux Marées, qui se suivent, est précisément d'un jour lunaire ; & qu'en

CHAP. VI. deçà, ou en delà de ces quatre Points, les Marées doivent nécessairement avancer ou retarder sur le tems du jour lunaire: nous déterminerons ces accélerations & retardemens, qui sont fort inégaux, & nous ajoûterons plusieurs autres Remarques sur cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les Observations, qu'on a faites jusqu'ici. Il est vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les Forces des deux Luminaires, que ce rapport est encore incertain, & qu'il est même variable: mais j'indiquerai quels sont les moyens les plus sûrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonstances, & ensuite généralement. Avant que de traiter cette Question, qui est une des plus utiles, & des plus essentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes & basses Marées, en supposant le rapport entre les forces des deux Luminaires connu.

IV.

Soit *b a d c* l'Equateur, dans le plan duquel les deux Luminaires sont encore supposés se mouvoir de *b* vers *a*, pendant que l'Equateur de la Terre se tourne dans le même sens autour de son Centre C. Prenons dans l'Equateur un Point *b*, & considérons les Luminaires se trouver dans leur Conjonction au Point *b*, c'est-à-dire, étant l'un & l'autre dans la Ligne prolongée *d b*; on voit qu'en ce cas la haute Marée doit être dans ce moment-là en *b*, & précisément à midi.



V.

Voyons à présent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après: supposons pour cet effet, que le Soleil se trouvant encore à midi au Point *b*, la Lune réponde au Point Є: la haute Marée répondra dans ce moment au Point *z*, & les Arcs *b z*, Є*z* se déterminent par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. il faut donc que le Point *b* parcoure dans l'Equateur l'Arc *b z*, pour se trouver dans l'endroit de la plus haute Marée; car on peut négliger les petits Arcs, que les Luminaires parcourent, dans le tems que le Point *b* de l'Equateur parcourt l'Arc *b z*. On voit donc, que si l'on veut regler le tems des hautes Marées

Marées après le tems vrai, on doit prendre l'Arc $b\,z$ pour l'Arc horaire, qui marque l'heure de la haute Marée de ce jour-là. CHAP. VI.

Cette regle suppose le Point $\mathfrak{c}$ en repos, pendant le tems qui convient au dit Arc horaire $b\,z$; mais il est facile de corriger cette supposition: car nous verrons dans la suite, que l'Arc $b\,z$ est presque égal à l'Arc $b\,\mathfrak{c}$; & cela étant, il est clair, qu'on n'a qu'à substituer des heures lunaires aux heures solaires, qui répondent à l'Arc $b\,z$, pour corriger la dite supposition.

V I.

Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes Marées, en le rapportant au midi, c'est-à-dire, au passage du Soleil par le Méridien: voici à présent, comment on peut déterminer l'heure des hautes Marées, en la rapportant au passage de la Lune par le Méridien, qu'on connoît par les Ephémerides: on peut le faire immédiatement par le moyen de l'Arc $\mathfrak{c}\,z$: nous verrons que le Point z ne sçauroit s'éloigner du Point $\mathfrak{c}$ au-delà d'environ dix degrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet Arc ne sçauroit varier sensiblement; d'où il suit que ce petit Arc $\mathfrak{c}\,z$ marquera toujours l'Arc horaire entre le moment du passage de la Lune par le Méridien & le moment de la haute Marée.

V I I.

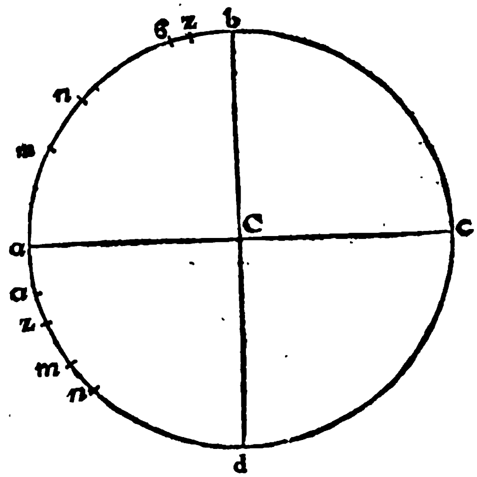
L'Arc $\mathfrak{c}\,z$ étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute Marée suivra le passage de la Lune par le Méridien, depuis les Syzygies jusqu'aux Quadratures, & qu'elle le précedera depuis les Quadratures jusqu'aux Syzygies: on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'Arc $\mathfrak{c}\,z$ fait un *maximum*, lorsque le Sinus de l'Arc $b\,\mathfrak{c}$ est $= \sqrt{\frac{\mathfrak{c}+\delta}{2\delta}}$: c'est alors que la haute Marée retarde ou avance le plus sur le passage de la Lune par le Méridien: & comme vers ce tems-là les Points $\mathfrak{c}$ & z peuvent être censés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une Marée à l'autre, sera alors précisément d'un jour lunaire: & cet intervalle peut être appellé intervalle moyen entre deux Marées qui se suivent: il est de 24. heures $50\frac{1}{2}$ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une Conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une Marée à l'autre est le plus petit dans les Syzygies, & le plus grand dans les Quadratures.

CHAP. VI.

VIII.

Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous supposerons, que la Lune répondant au Point m, & la haute Marée étant dans ce moment là au Point n, l'Arc $m\,n$ soit alors le plus grand qu'il est possible. Soit outre cela encore le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'Arc $m\,b = m$, son Cosinus $= n$. Cela étant, nous avons déja dit, & nous le remarquerons encore ici:



1°. Qu'on aura $m = \sqrt{\frac{\varsigma+\delta}{\delta}}$

2°. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'Arc $m\,n$ par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le Sinus de cet Arc est

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

eu supposant $B = \frac{-\delta b b}{\varsigma m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette regle générale à notre cas particulier, il faut supposer $b = 1$; $m = \sqrt{\frac{\varsigma+\delta}{2\delta}}$, & $n = \sqrt{\frac{\delta-\varsigma}{2\delta}}$: après ces substitutions, on trouve le Sinus de l'Arc $m\,n$ $= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\delta\delta-\varsigma\varsigma}}{2\delta}\right)}$; & comme δ est beaucoup plus grand que ς, on peut censer le Sinus de l'Arc $m\,n$ être simplement $= \frac{\varsigma}{2\delta}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'Arc $n\,b$, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il est remarquable que cet Arc ne dépend point du rapport, qui est entre la Force lunaire δ, & la Force solaire ς; car il est toujours de 45 degrés.

4°. Que si la Lune est supposée dans un Point quelconque ς, les Arcs $b\,z$ & $\varsigma\,z$ peuvent se déterminer par le moyen des XI. & XIII. §. §. du Chap. V. comme nous avons déja dit: mais si l'on suppose le Point ς bien près du Point b, nos Formules font voir, qu'on peut censer alors le Sinus de l'Arc $\varsigma\,z = \frac{\varsigma}{\delta+\delta} \times m$, & le Sinus du petit Arc $b\,z = \frac{\delta}{\varsigma+\delta} \times m$.

Cet-

Cette Formule nous servira à determiner combien les Marées priment vers les Syzygies. CHAP. VI.

5°. Que si la Lune se trouve en α bien près de a, la haute Marée répondra dans ce moment au Point z au delà du Point α, & on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. si l'on traite bien l'équation qui y est marquée, le Sinus du petit Arc $\alpha z = \frac{\epsilon}{\delta - \epsilon} \times n$, en prenant pour n le Cosinus de l'Arc $b\,\alpha$, ou ce qui revient au même, le Sinus du petit Arc $a\,\alpha$. Cette valeur du petit Arc αz nous servira à déterminer, combien les Marées retardent vers les Quadratures.

Ces deux dernieres Remarques sont fondées sur ce que m ou n, étant comme infiniment petits, les quantités A & B deviennent comme infiniment grandes, & alors on peut substituer simplement $\frac{1}{A}$ & $\frac{1}{B}$ à la place des Quantités

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4 + AA}}\right)} \;\&\; \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}:$$

& après ces substitutions, on trouve les Sinus des petits Arcs, comme nous les avons déterminés.

IX.

Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, sont tout-à-fait conformes aux Observations. Mais pour en sentir toute la force, il faudroit toujours sçavoir le rapport qu'il y a entre les Forces δ & ϵ, & c'est ce que j'ai déja dit, qu'on ne sçauroit déterminer immédiatement par les principes d'Astronomie, faute d'Observations assez justes sur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets Physiques, que la Lune produit sur la Terre, pour en déduire sa force; & je n'en connois point d'autres, que les Marées mêmes: mais il s'en faut servir avec beaucoup de circonspection. Comme c'est ici un point très-essentiel, je n'ai pas voulu manquer de le considérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes réflexions là-dessus.

X.

On pourroit déduire le rapport moyen entre les Forces δ & ϵ du rapport des plus hautes Marées, qui se font près des Syzygies, & des plus petites Marées aux Quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande Marée doit être à celle de la plus petite Marée, comme $\delta + \epsilon$ est à $\delta - \epsilon$. Mais les hauteurs des Marées dans les Ports, où l'on fait les Observations, dépendent de tant de circonstances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionelles aux hauteurs des Marées dans la Mer libre; & c'est ce qui fait, qu'on trou-

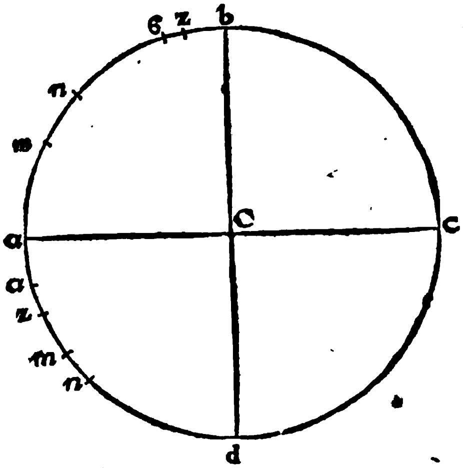
CHAP. VI. trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites Marées, assez différent dans différents Ports.

M. NEWTON, qui a suivi cette Méthode, rapporte une Observation faite par *Sturm* au dessous de Bristol, où cet Auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande & de la plus petite Marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times \epsilon$. Cette Observation est bien éloignée de celle que j'ai reçûe dernierement faite à Saint Malo par M. *Thouroud*. La voici : «Dans les grandissimes Marées, la Mer «s'éleve de 50 pieds en plomb au-dessus du bas de l'eau : dans les Ma«rées bâtardes, elle ne différe que de quinze pieds.». Si j'ai bien compris cette Observation, la plus grande Marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3 ; ce qui donneroit $\delta = \frac{13}{7} \times \epsilon$. Ces deux resultans sont bien différens: il est vrai, que le rapport de δ à ϵ est variable, mais cette variation ne sçauroit aller si loin ; si la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ est $= m$, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{\epsilon}$ sera environ $= \frac{3}{2} m$.

Il y a une autre réflexion à faire sur cette Méthode de trouver le rapport entre les Forces des deux Luminaires : c'est que les Marées sont une espece d'Oscillations, qui se ressentent toujours des Oscillations précedentes : cette raison fait que les variations des Marées, ne sçauroient être aussi grandes qu'elles devroient être, suivant les Loix hydrostatiques. Concevons un pendule attaché à une Horloge animée successivement par des poids différens : On sçait, que plus ces poids sont grands, plus les Oscillations du pendule deviennent grandes : mais en changeant les poids, les premieres Oscillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle ; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en est pas de même des durées des Oscillations, lorsque le pendule est successivement animé par différentes pesanteurs. Considérons d'abord un pendule simple animé par la pesanteur ordinaire, & qui fasse ses Oscillations dans deux secondes de tems, & supposons ensuite la pesanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande ; je dis que la premiere Oscillation, qui suivra ce changement, se fera de même que toutes les autres suivantes dans une seconde de tems.

Cette considération me porte à croire, que les Observations sur les durées & sur les intervalles des Marées sont plus sures pour notre dessein, que les hauteurs des Marées : si cette reflexion est bien fondée, on pourroit faire attention aux Méthodes suivantes, pour trouver le rapport moyen entre δ & ϵ.

1°. Il faudroit pendant plusieurs mois observer, quel est le plus petit intervalle de deux Marées. Nous avons dit au V I. §. que l'intervalle moyen est d'un jour moyen lunaire, que je suppose de 24 heures 50 minutes : mais il sera moindre dans les Syzygies, quoique plus grand qu'un qu'un jour solaire, ou de 24 heures: supposons ce plus petit intervalle de 24 heures, & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans N; &



il faudra prendre dans la Figure ci-dessus un Arc horaire $b\beta$ de 50 minutes de tems: De cet Arc $b\beta$, il faut prendre une partie βz, qui réponde à $(50-N)$ minutes. Or par la IV. Remarque du VII. §. l'Arc βz est à l'Arc $b\beta$, comme $\frac{\beta+\delta}{\beta}\times m$ est à m: d'où nous tirons cette analogie,

$$50-N:50::\beta:\beta+\delta.$$

& cette analogie donne

$$\delta=\frac{N}{50-N}\times\beta.$$

Soit N égal à 35 (c'est ainsi qu'on l'observe à peu près dans les Marées regulieres) & on aura $\delta=\frac{35}{15}\beta$.

2°. On pourroit aussi faire attention aux plus grands intervalles, si ce plus grand intervalle (qui se fait ordinairement après les Quadratures) étoit de 24 heures & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en M. On trouve par la même Méthode, que nous venons d'indiquer, & par la V. Remarque du VII. §. $\delta=\frac{M}{M-50}\times\beta$.

Soit $M=85$ minutes (c'est à peu près la valeur que l'on observe) & on trouvera

$$\delta=\frac{85}{35}\times\beta.$$

Voilà les deux Méthodes, que je crois les plus exactes; & la premiere doit l'emporter sur la seconde, parce que les Marées sont plus irrégulieres après les Quadratures, qu'après les Syzygies. Il y a encore plu-

CHAP. IV.

plusieurs autres Méthodes pareilles à celles que je viens d'exposer, & dont j'ai fait en partie le Calcul; mais comme je ne suis pas assez content des Observations, sur lesquelles ces Méthodes sont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il est possible, toutes les Observations qui déterminent le rapport entre δ & ς, il faut supposer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\varsigma} = \frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\varsigma} = 2$, & sa plus grande valeur $= 3$. C'est donc sur ces suppositions que nous raisonnerons & calculerons dans la suite; & comme nous ne considérons encore toutes les circonstances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reste de ce Chapitre $\frac{\delta}{\varsigma} = \frac{5}{2}$.

M. NEWTON suppose $\frac{\delta}{\varsigma}$ environ $= 4$: mais j'ai déja dit, pourquoi sa Méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\varsigma}$ plus grande qu'elle n'est: la raison en est, que si les Marées n'avoient point d'influences les unes sur les autres, comme elles ont, les plus grandes Marées différeroient davantage des plus petites, & par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\varsigma}$ plus petite.

Avant que de finir cette digression sur le rapport entre la force de la Lune, & celle du Soleil, & d'en faire l'application à notre sujet, je ferai ici une refléxion sur les Forces absolues de la Lune & du Soleil. Nous avons fait voir aux §. §. VIII. & XV. du Ch. IV. que dans l'hypothese de l'homogenéité de la Terre adoptée par M. NEWTON, le Soleil ne sçauroit faire varier les eaux au delà de deux pieds, ni par conséquent la Lune au delà de cinq pieds. Ces deux Forces combinées ensemble pour les Quadratures feroient une Force absolue à faire varier les eaux en pleine Mer de trois pieds de hauteur verticale pendant une Marée. Mais peut-on comprendre, que d'une variation de trois pieds en pleine Mer, il puisse provenir tous les effets des Marées aux Quadratures? Encore est-il très-vraisemblable, que la variation actuelle des eaux differe beaucoup de la variation entiere, que la Théorie indique comme possible: peut-être même, que la variation actuelle est à peine sensible par rapport à l'autre, & cela non-seulement à cause des empêchemens accidentels, tel que le frottement, l'imparfaite fluidité, &c.; mais encore à cause de l'inertie des eaux & du mouvement journalier de la Terre; car on voit bien, que si ce mouvement journalier de la Terre étoit d'une vitesse infinie, les Luminaires ne pourroient avoir aucun effet pour faire varier la Mer, quelque Force qu'ils eussent. Je suis donc entierement persuadé, que les Forces absolues des deux Luminaires sont beaucoup plus grandes, que M. NEWTON ne les suppose, & tous

ses

ses Commentateurs après lui, prenant l'homogenéité de la Terre, pour une hypothese, sur laquelle ils bâtissent tout leur Systême. Ces refléxions doivent donner beaucoup de poids à tout ce que nous avons dit au Chap. IV. où nous avons démontré, qu'en supposant, que les Densités des Couches de la Terre augmentent depuis la circonférence vers le centre (supposition d'ailleurs extrêmement probable par plusieurs raisons Physiques, dont j'ai exposé une partie au XIII. §. du Chap. IV.) on peut augmenter, tant qu'on veut, les effets de la Lune & du Soleil sur la Terre. Après cet examen sur les Forces, tant relatives, qu'absolues des deux Luminaires, nous allons en faire usage, pour considérer de plus près tout ce qui regarde la durée des Marées, leurs intervalles, & pour faire voir le merveilleux accord entre la Théorie & les Observations.

X I.

Les intervalles de deux Marées qui se suivent, sont les plus petits dans le tems des Syzygies: leur intervalle moyen est alors de 24 heures 35 minutes, & les Marées priment chaque jour de 15 minutes sur le mouvement de la Lune.

X I I.

Les intervalles des deux Marées qui se suivent, sont les plus grands dans le tems des Quadratures: ils sont alors de 24 heures 85 minutes, c'est-à-dire, de 25 heures 25 minutes: les Marées retardent de 35 minutes par jour sur le mouvement de la Lune. Cette grande inégalité doit rendre l'heure des Marées plus incertaine & plus irréguliere que dans les Syzygies; & c'est aussi ce que l'on observe: mais ce n'est pas la seule raison.

X I I I.

Les Marées répondront précisément au passage de la Lune par le Méridien, tant dans les Quadratures, que dans les Syzygies, si celles-ci se font aussi au moment du passage de la Lune par le Méridien. Mais si les Quadratures & les Syzygies ne se font pas dans le moment du passage de la Lune par le Meridien, il faut des corrections. Dans les Syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du X I. §. & par conséquent $\frac{5}{8}$ de minutes par heure, que la haute Marée avancera sur le passage de la Lune par le Méridien, si les Syzygies se font avant ce même passage; & que la haute Marée retardera sur le passage de la Lune par le Méridien, si les Syzygies se font après ce passage. Dans les Quadratures il faut une correction de 35 minutes par jour, en vertu du §. XII. c'est à-dire, environ une minute

CHAP. VI. & demie par heure, que la haute Marée retardera sur le passage de la Lune par le Méridien, si les Quadratures se font avant ledit passage; & qu'elle avancera, si les Quadratures se font après le passage de la Lune par le Méridien. Car près des points b & a, les Arcs $\mathfrak{c}\,z$ & $\alpha\,z^{1}$ peuvent être censés proportionnels aux Arcs $b\,\mathfrak{c}$ & $a\,\alpha$.

XIV

Si au lieu de rapporter les hautes Marées aux jours lunaires, on vouloit considérer les jours solaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes Marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les Syzygies, retardent de 35. minutes dans un jour, ou d'environ une minute & demie par heure; & qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les Quadratures, ce qui fait environ trois minutes & demie par heure: de là nous tirerons cette regle pour les Syzygies.

Il faut ajoûter à l'heure moyenne de la Marée dans les Syzygies une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies auront devancé ladite heure moyenne, & en retrancher une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies retarderont sur la même heure moyenne.

Et pour les Quadratures nous aurons la regle suivante:

Il faut ajoûter, ou retrancher, dans les Quadratures de l'heure moyenne de la Marée, trois minutes & demie par chaque heure, que les Quadratures avanceront ou retarderont sur la même heure moyenne.

XV.

M. *Cassini*, dont les remarques ingénieuses sur les Marées m'ont servi de guide dans mes recherches, a donné par induction des regles pareilles, avec cette différence que dans les Syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute & demie; & deux minutes & demie dans les Quadratures, au lieu de trois minutes & demie.

XVI.

Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux Marées qui se suivent, lequel intervalle est de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'est pas également éloigné des Syzygies & des Quadratures; mais qu'il est beaucoup plus prés des Quadratures, que des Syzygies: aussi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélerations depuis le Point b jusqu'au Point m (qui est celui, dont il est question ici) doivent compenser tous les retardemens depuis le Point m jusqu'au Point a, & que les accélerations sont beaucoup plus petites

que

que les retardemens, on voit d'abord, que le Point *m* doit être plus près du Point *a*, que du Point *b*. Mais nous déterminerons exactement ce point *m* par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le Sinus de l'Arc *m b* est $= \sqrt{\frac{6+\delta}{2\delta}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0{,}8366$ lequel Sinus répond à un Arc de $56^d. 47^m$. L'Arc *m b* étant donc de $56^d. 47^m.$, l'Arc *m a* sera de $33^d. 13^m.$, & les deux Arcs *m b* & *m a* sont comme 3407 à 1993. CHAP. VI.

L'Arc *n b* étant toujours de 45 dégrés (*par la III. Remarque du VIII.* §.) nous avons l'Arc $m\,n = 11^d. 47^m.$; & cet Arc *m n* marque le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée. Cet intervalle est donc de 47 minutes de tems: le passage de la Lune par le Méridien suivra la haute Marée depuis les Syzygies jusqu'aux Quadratures, & la précédera depuis les Quadratures jusqu'aux Syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui se fait environ $2\frac{1}{4}$ jours avant & après les Quadratures) ne surpasse jamais 47 minutes de tems.

XVII.

Toutes ces Propositions depuis le XI. §. jusqu'ici ; nous donnent une idée claire des heures des hautes Marées, & de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonstrations soyent fort hypothetiques, elles n'en méritent pas moins d'attention ; je ferai voir dans le Chapitre suivant, comment on peut donner des corrections assez justes à l'égard de toutes les hypotheses que j'ai exposées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui est possible, à cette matiere, je montrerai plus précisément, comment on peut trouver l'intervalle entre le passage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée, pour tout Arc donné entre les deux Luminaires ; après quoi je donnerai une Table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix degrés. Il sera facile aprés cela moyennant les Ephémerides & des Interpolations, de déterminer l'heure des Marées généralement.

XVIII.

Soit donc encore le Soleil en *b* ; la Lune dans un Point quelconque *m*: la haute Marée en *n*. Soit le Sinus de l'Arc $m\,b = m$: le Sinus total $= 1$, le Cosinus de l'Arc $m\,b = n$: qu'on fasse (§. *XIII. Chap. V.*).

$$B = \frac{-3bb}{6mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4mm - 7}{2mn}:$$

on

CHAP. VI.

on aura le Sinus de l'Arc mn (qui eſt l'Arc horaire entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Marée)

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

Si l'on change cette Quantité radicale en ſuites, en faiſant attention que B eſt toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, ſans aucune erreur ſenſible, ſuppoſer le Sinus de l'Arc horaire $mn = \frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$, & même ſimplement $= \frac{1}{B}$ près des Syzygies & des Quadratures. Voici à préſent la Table dont je viens de parler.

La *premiere* Colonne marque de dix en dix Degrés l'Angle compris entre les deux Luminaires vûs du centre de la Terre environ l'heure de la Marée: la *ſeconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & ajoûter depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies à l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, pour trouver l'heure de la Marée; & la *troiſieme* marque la vraie heure de la haute Marée.

TABLE FONDAMENTALE
pour trouver l'heure moyenne des hautes Marées.

Distances entres les deux Luminaires en Degrés.	*Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Méridien.*	*Heure de la haute Mer.*	
o Dégrés.	o Minutes.	o Heur.	o Min.
10	11½ avant.	0	28½
20	22 avant.	0	58
30	31⅔ avant.	1	28½
40	40 avant.	2	0
50	45 avant.	2	35
60	46½ avant.	3	13½
70	40½ avant.	3	59½
80	25 avant.	4	55
90	0	6	0
100	25 après.	7	5
110	40½ après.	8	0½
120	46½ après.	8	46½
130	45 après	9	25
140	40 après.	10	0
150	31⅓ après.	10	31½
160	22 après.	11	2
170	11⅓ après.	11	31½
180	0	12	0

CHAP. VI.

XIX.

La Table que nous venons de donner, détermine généralement l'heures des hautes Mers pour les hypothefes expofées au XIX. §. Chap. IV. s'il eft vrai que la raifon moyenne entre les Forces de la Lune & du Soleil, foit comme 5 à 2. Je la crois à-peu-près telle, après avoir bien examiné toutes les Obfervations qui peuvent la déterminer : cependant, comme ces Obfervations ne font ni affez juftes, ni en affez grand nombre, pour s'y fier entierement, je ne la donne pas encore pour tout à-fait exacte : il eft pourtant certain, que cette Table ne fçauroit manquer d'avoir toute l'exactitude néceffaire, les Marées étant fujettes à plufieurs irrégularités, dont on ne fçauroit donner aucune mefure, & qui font de beaucoup plus grande conféquence, que tout ce qu'il y a encore d'incertain dans la Table. Nous allons examiner avec quelles précautions & corrections on doit s'en fervir.

CHAPITRE VII.

Qui contient à l'égard de plufieurs Circonftances variables, les Corrections neceffaires pour les Theoremes & pour la Table du Chapitre précedent, & une Explication de plufieurs Obfervations faites fur les Marées.

I.

LEs Vents & les Courants irrégüliers contribuent le plus à rendre les Marées incertaines & irrégulieres. Ils accélereront & augmenteront le Flux, ou le retarderont & le diminueront, felon qu'ils ont une direction commune ou contraire avec le Flux naturel des eaux. Mais on voit bien qu'il faut fe contenter de ces effets, & qu'il eft difficile & même impoffible d'en marquer le détail, ou des mefures précifes.

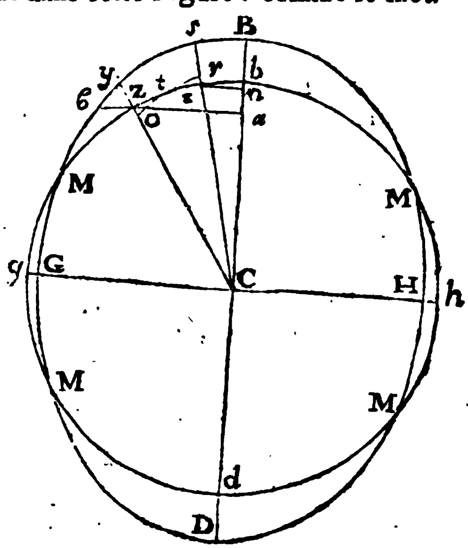
II.

La feconde circonftance qui fait varier les Marées, eft la fituation du Port, fa profondeur, fa communication avec la Mer libre, la pente de fon fonds & des environs, &c. Tout cela fait qu'il eft impoffible de marquer l'heure abfoluë des Marées dans les Ports, ou Bayes, ou Côtes differemment fituées. Mais comme toutes ces circonftances demeurent toujours les mêmes, on peut fuppofer qu'elles font le même effet fur toutes les Marées; fçachant donc combien la Marée eft retardée dans les Syzygies, on la fçaura auffi à-peu-près dans toutes les autres fituations

tuations de la Lune. Cette ſuppoſition eſt la ſeule reſſource qui nous reſte : j'avoue même qu'elle doit être fort peu exacte pour les différentes déclinaiſons des deux Luminaires à l'égard de l'Equateur : il n'eſt pas vraiſemblable non plus, qu'elle ſoit également juſte pour les grandes Marées dans les Syzygies, & pour les Marées bâtardes dans les Quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejetter, pluſieurs Obſervations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des Marées répond aſſez bien à la Théorie. Il faut donc ſçavoir par un grand nombre d'Obſervations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, & ajoûter cette heure au tems marqué dans la ſeconde & troiſiéme Colonne de notre Table : c'eſt cette heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, que les Mariniers appellent *heures du Port :* elles varient extrêmement dans les différens Ports, comprenant tout le tems & durée d'une Marée. CHAP. VII.

III.

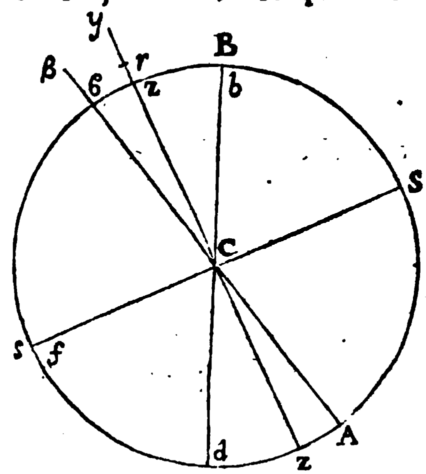
Ce retard de l'heure moyenne des pleines Mers dans les Syzygies, à l'égard du midi, s'obſerve auſſi dans la Mer libre, ou plutôt dans les Iſles qui ſont en pleine Mer : mais il n'eſt pas ſi grand, & vient d'une autre cauſe, ſçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéir aſſez promptement, à cauſe de la viteſſe du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raiſonnement que nous avons fait au VI. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude : On pourroit douter, ſi cette raiſon doit faire avancer ou retarder les Marées : Suppoſons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les Luminaires, que la haute Marée, répondent à un même Point dans cette Figure : comme le mouvement des Luminaires n'eſt pas ſenſible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les conſidérerons comme demeurant dans la ligne $d\,b$: l'Equateur de la Terre changera ſa figure naturelle $b\,g\,d\,b$ en $B\,G\,D\,H$; & cette figure $B\,G\,D\,H$ tournant autour du Centre C de B vers G, le ſommet B viendra quelque tems après en y : cela étant, ſi les eaux pouvoient ſe compoſer dans un inſtant dans un état d'équilibre, l'élevation $B\,b$ devroit ſe changer en $y\,z$, & la force qui devroit produire ce changement, ſeroit exprimée par $B\,b - y\,z$: mais cette force étant infiniment petite, ſi l'Angle $B\,C\,y$



 eſt

CHAP. VII. est infiniment petit, elle ne sçauroit produire tout son effet. On voit par-là, qu'il faut supposer l'Angle $B\,C\,y$ d'une grandeur considérable, & considérer ensuite le sommet B comme transporté en y, afin que la différence des pressions soit assez grande, pour conserver le sommet des eaux au Point y, malgré la rotation du Globe. Le vrai sommet étant donc en y, l'Angle $B\,C\,y$ sera l'Angle horaire, qui marquera les retardemens réels des hautes Marées sur le passage de la Lune par le Méridien. Là-dessus nous pourrons faire les Remarques qui suivent.

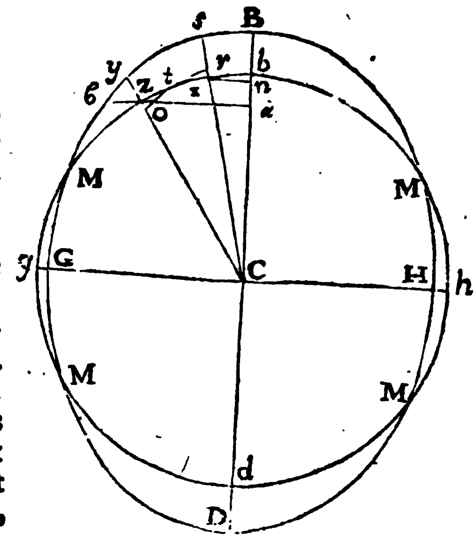
1°. Si les Luminaires ne sont pas en conjonction, & que le Soleil soit en b, & la Lune en β, on pourra considérer la chose, comme si les Luminaires étoient en conjonction, mais dans la Ligne $C\,z$, déterminée de position au VIII. §. du Chap. V. & augmenter toujours l'Angle $b\,C\,z$ de l'Angle $B\,C\,y$, dont nous venons de parler : d'où il paroit que l'Angle horaire $B\,C\,y$ doit toujours être ajoûté au tems marqué dans la troisiéme Colonne de notre précedente Table : car la hauteur des Marées ne paroît pas devoir changer la chose, puisque les changemens de pression pour un petit tems donné, sont proportionnels aux baissemens des eaux, qui doivent se faire pour conserver le sommet des eaux dans un même Point y.



2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent, l'Angle $B\,C\,y$ seroit nul : mais il doit être plus grand, d'autant qu'on suppose le mouvement journalier plus grand & plus prompt ; & la différence des hauteurs entre les hautes & basses Marées, doit diminuer à proportion.

3° Si la vitesse du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine Mer répondroit presque au Point G; mais aussi la différence des hautes & basses Mers seroit comme nulle. Il me semble après avoir bien considéré la chose, que les hauteurs des Marées dans les Syzygies doivent être censées proportionnelles aux Sinus des Angles $G\,C\,y$ dans la Mer libre, & que si la hauteur $B\,b$ sans le mouvement journalier de la Terre est $=\epsilon$, elle sera avec le mouvement journalier de la Terre $=\frac{C\alpha}{C\,b}\times\epsilon$.

Or, comme on a observé que dans la Mer libre la haute Marée suit environ de deux heures le midi dans les Syzygies ; il faut supposer l'Angle



gle $B\,C\,y$ de 30 degrés, & les forces absolues des Luminaires doivent être supposées plus grandes en raison de $\sqrt{3}$ à 2 pour élever les eaux, autant qu'elles le feroient sans le mouvement journalier de la Terre.

I V.

Nous avons encore fait voir, que sans le concours des causes secondes, les plus grandes Marées devroient se faire dans les Syzygies, & les plus petites dans les Quadratures. Cependant on a observé, que les unes & les autres se font un ou deux jours plus tard. Ce retardement est encore produit, sinon pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être mises en mouvement, & qui ne sçauroient obéir assez promptement aux forces qui les sollicitent, pour leur faire suivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cause, & M *Cassini* me paroit le soupçonner de même, quoi qu'il ne se serve pas de nos principes, la voici: c'est qu'il se pourroit bien que cette cause, qui nous est encore si cachée, & qui donne une tendance mutuelle aux Corps flottans & composans le systême du monde, que cette cause, dis-je, ne se communiquât pas dans un instant d'un Corps à l'autre, non plus que la lumiere. S'il y avoit, par exemple, un Torrent central de matiere subtile, & d'une étenduë infinie, vers le centre de la Terre, & un semblable vers le centre de la Lune, ces deux Torrens pourroient produire la Gravitation mutuelle de ces deux Corps, & la vitesse du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matiere, pour parvenir depuis la Lune jusqu'à la Terre: en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire sur notre Océan, feroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la supposition que la Gravitation se communique dans un instant. Quoi qu'il en soit, comme ce retardement a été observé le même à peu-près après les Syzygies & après les Quadratures, nous pouvons encore supposer, qu'il est le même, pendant toute la revolution de la Lune, c'est-à-dire, que les Marées sont toujours telles, qu'elles devroient être, sans lesdites causes, un ou deux jours auparavant.

Au reste je n'ai mis ici ce que je viens de dire sur la cause qui pourroit produire la Gravitation mutuelle des Corps du Systême du Monde (Gravitation, qu'il n'est plus permis de revoquer en doute) que comme

CHAP. VII.

un exemple : je ne prétens pas expliquer ce Phénomene, j'avoue même qu'il m'est encore tout-à-fait incompréhensible : je ne crois pas non plus que l'ACADEMIE en ait voulu demander une explication ; je souhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient se servir d'autres principes, pour expliquer le Flux & Reflux de la Mer, ne le feroient qu'en apparence, & que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne seroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la Gravitation ou l'Attraction mutuelle du Soleil, de la Lune & de la Terre, sans disconvenir pour cela de nos principes au fond, lesquels sont sûrs, & doivent être considérés comme des faits averés par l'expérience.

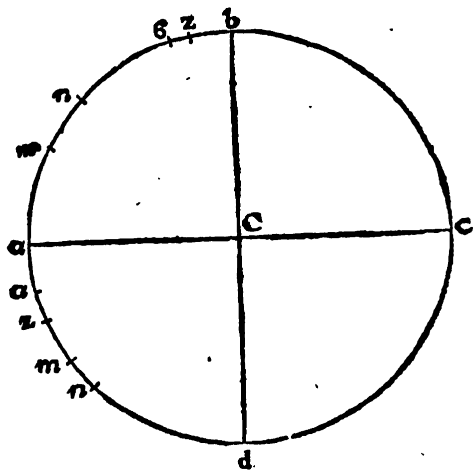
V.

Je profiterai de cette occasion, pour parler d'un des principaux Phénomenes, & pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire là-dessus, & dont l'éclaircissement me paroît très-propre pour faire voir l'avantage de notre Méthode & de nos Calculs.

On a déterminé après un nombre infini d'Observations, que dans les Syzygies l'heure moyenne de la haute Mer est à Brest à 3 heures 28 minutes, & dans les Quadratures à 8 heures 40 minutes, & que la différence n'est que de 5. heures 12. minutes depuis les Syzygies jusqu'aux Quadratures. Cette différence a été observée tout-à-fait la même à Dunkerque, & dans d'autres Ports ; quoique les heures des Marées soient différentes aux divers Ports. C'est donc ici une Observation qui mérite beaucoup d'attention, comme génerale & bien averée : cependant il est certain, que sans les causes secondes, que nous avons déja indiquées, la différence entre les heures du Port pour les Syzygies, & pour les Quadratures, devroit être à-peu-près de 6 heures lunaires, c'est-à-dire d'environ 6 heures 12 minutes. Voici comment je détermine exactement cet intervalle.

L'heure moyenne de la haute Mer dans les Syzygies, est dans la Théorie pure précisément à midi, puisqu'il faut considerer les Syzygies, comme tombant précisément sur l'heure du midi. Si les Syzygies se faisoient plus tard, la haute Mer arriveroit plus tôt & reciproquement ; & les accélerations compensent parfaitement les retardemens après un grand nombre d'observations. L'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, doit être de même censée celle qui se fait, lorsque la Quadrature se fait précisément à midi ; car, lorsqu'il est question d'un certain jour, il en faut prendre le milieu, c'est-à-dire l'heure du midi, afin que les différences se détruisent ou se composent les unes les autres. Soit donc le Soleil au Zenith *b*, & la Lune en *a* à 90 degrés du Zenith, ou à l'Horison : cela étant, on voit que si la haute Mer est supposée se faire précisément au moment du passage de la Lune par le Méridien,

ridien, elle doit se faire 6 heures lunaires après midi; car le Point b doit faire, par le mouvement journalier de la Terre, l'Arc horaire $b\,a\,\alpha$ (supposant que le passage de la Lune par le Méridien, qui a été à l'heure du midi en b, réponde au Point α); mais pour parler plus précisément, la Lune & le Méridien se trouvant en α, la haute Marée répondra au Point z', & l'Arc $\alpha\,z$ sera égal aux deux tiers du petit Arc $a\,\alpha$ (§. *XIII. Chap. VI.*) c'est donc l'Arc $b\,\alpha\,z'$ qui marque l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures: l'Arc $b\,a$ est



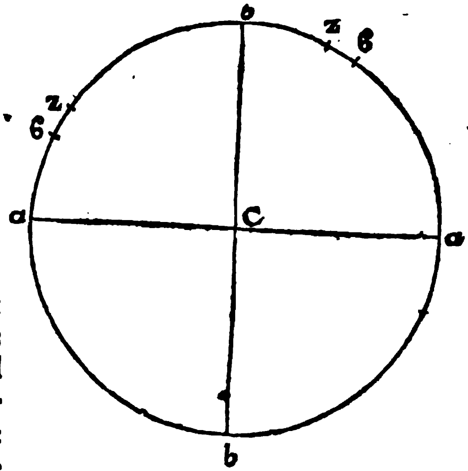
de 90 dégrés; le petit Arc $a\,\alpha$ est d'environ 3 degrés, & l'Arc $\alpha\,z'$ de 2 degrés; & par conséquent l'Arc $b\,a\,z'$ de 95 dégrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abstracto* l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, pendant que celle des Syzygies est à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, suivant les Observations, on ne trouve que 5. heures 12 minutes à la place de 6 heures 20. minutes. Je répons que c'est cette même anticipation des Syzygies & des Quadratures à l'égard des plus grandes & des plus petites Marées, dont nous avons parlé dans le précedent Article, qui en est la cause. Il est si vrai, que c'est ici la véritable raison, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes Mers pour les Syzygies & les Quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement la dite anticipation, sur laquelle on est encore bien divisé, les uns la faisant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé assez exactement, & d'un commun accord l'autre Point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en considérant que les Marées se reglent après les Luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant: imaginons nous les

Syzy-

CHAP. VII.

Syzygies se faire en *b* & les Quadratures en *b* & *a*: l'effet des Luminaires sera, en vertu de notre supposition, dans le tems des Syzygies, comme si le Soleil étoit en *b*, & la Lune en ϐ, en prenant l'Arc *b* ϐ d'environ $25\frac{1}{4}$ degrés; & le même effet dans les Quadratures sera comme si le Soleil étant en *b*, la Lune se trouvoit en ϐ' environ $64\frac{3}{4}$ degrés; dans les Syzygies, la haute Mer répond au Point z, & dans les Quadratures au Point z'. C'est donc l'Arc z *b* z' qui exprime l'Arc horaire



entre l'heure moyenne de la haute Mer des Syzygies & celle des Quadratures (substituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cause du mouvement de la Lune.) Or la Table mise à la fin du précedent Chapitre, fait voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les Syzygies à $25\frac{1}{4}$ degrés du Soleil, l'heure de la haute Mer est à 10 heures 46. minutes du matin; & que la Lune étant après les Syzygies à $64\frac{3}{4}$ degrés du Soleil, la haute Mer se fait à 3 heures 35 minutes du soir: l'intervalle est donc de 4 heures 49 min. tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce resultat répond déja assez bien à l'observation, qui le donne de 5. heures 12 minutes.

Mais si au lieu de deux jours on prend $\frac{5}{2}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu près à 20 degrés de distance de la Lune depuis les Syzygies & les Quadratures, l'heure moyenne de la haute Mer le jour des Syzygies, sera en vertu de la Table, à 11 heures 2 minutes du matin, & le jour des Quadratures, à 3 heures $59\frac{1}{2}$ minutes du soir; & l'intervalle de l'une à l'autre sera de 4. heures $57\frac{1}{2}$ minutes tems lunaire; qui fait à-peu près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en question, en donnant un jour & demi au retardement des Marées, c'est-à-dire, en supposant que l'état des Marées est tel qu'il devroit être naturellement, un jour & demi plutôt: c'est alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine Mer aux Syzygies à heures pareilles aux Quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'Observations l'a donné: aussi ce terme d'un jour & demi, est-ce celui qui est le plus conforme aux Observations, & en consultant les Tables qui sont dans les Me-

Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. & 352. & prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu près la même valeur. Toutes ces circonstances, l'explication naturelle de ce Phénomene, sa conformité avec toutes les Observations faites jusqu'ici, & son usage pour déterminer au juste un des points des plus essentiels, qu'on n'a connu encore que par tatonnement, font bien voir la justesse & la supériorité de nos Méthodes. *

CHAP. VII.

V I.

Les autres corrections que l'on doit apporter aux Formules & à la Table du précedent Chapitre, regardent l'hypothese que nous avons faite, pour rendre d'abord la Question & les Calculs plus faciles; sçavoir *que les deux Luminaires font des Cercles parfaits autour de la Terre, & cela dans le plan de l'Equateur*. Cette supposition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les distances des Luminaires à la Terre, aussi-bien que dans leur mouvement, & elle fait outre cela leur déclinaison, à l'égard de l'Equateur, nulle. Voyons donc à présent ce que les différentes distances, l'inégalité des vitesses & l'obliquité des orbites peuvent faire sur l'heure des Marées.

V I I.

Les différentes distances des deux Luminaires à l'egard de la Terre changent le rapport de leurs forces sur la Mer; & c'est cependant de ce rapport que dépendent presque toutes les Propositions du précedent Chapitre. Nous avons supposé ce rapport pour les distances moyennes de la Lune & du Soleil, comme 5 à 2, fondés sur un grand nombre d'Observations, qui doivent nous confirmer dans cette supposition, à l'égard des variations des distances, après avoir remarqué & démontré la Proposition qui suit:

Les Forces de chaque Luminaire sur la Mer sont en raison reciproque triplée de leurs distances à la Terre.

En voici la Démonstration. Nous avons dit & démontré au Chapitre quatriéme, que la Force de chaque Luminaire est généralement $= \frac{ngb}{Ga} \times b$ en entendant par n un nombre constant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la pesanteur dans la région de la Terre vers le Luminaire à la pesanteur qui se fait vers le centre de la Terre, & par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la

* Je vois après avoir fini cette Piece, que M. *Cassini* a deja indiqué ce que nôtre Remarque contient de Physique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sc. de 1714. p. 252.

CHAP. VII.

Terre b à la distance du Luminaire a: or comme les différentes distances ne changent que les quantités G & a, nous voyons que la Force de chaque Luminaire est constamment proportionelle à $\frac{g}{a}$, & la quantité g, qui exprime la pesanteur vers le centre du Luminaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des Distances a, il s'ensuit que les Forces de chaque Luminaire sur la Mer, sont en raison reciproque triplée de leurs Distances à la Terre.

M. NEWTON a déja démontré cette Proposition, qui se confirme aussi par toutes les Observations faites sur les Marées, quand on en fait une juste estime, & une application bien ménagée. La Proposition que nous venons de démontrer, nous enseigne qu'à la place de notre Equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2}\mathfrak{C}$, employée dans le Chapitre précedent, il faut se servir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \mathfrak{C}$$

en dénotant par l & s les distances moyennes de la Lune & du Soleil à la Terre, & par L & S leurs Distances données quelconques; & là-dessus on pourra calculer toutes les Questions traitées ci-dessus pour des Distances quelconques entre les Luminaires & la Terre: mais nous ne considérerons que deux cas, 1°. Lorsque la Lune étant dans son Périgée, & la Terre dans son Aphelie, le rapport de δ à $\mathfrak{C}$ devient le plus grand; & 2°. Lorsque la Lune étant au contraire dans son Apogée, & la Terre dans son Perihelie, le rapport de δ à $\mathfrak{C}$ devient le plus petit. Nous donnerons 1000 parties à la distance moyenne de la Lune, 1055 à sa plus grande distance, & 945 à sa plus petite distance; & pour le Soleil, nous poserons les pareilles distances être en raison de 1000, 1027 & 983; & nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3{,}115\,\mathfrak{C}$; & dans le *second* cas $\delta = 2{,}022\,\mathfrak{C}$.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous supposerons simplement pour le premier cas $\delta = 3\,\mathfrak{C}$, & pour le second $\delta = 2\,\mathfrak{C}$; & afin que nos regles soient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant presque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Disons donc simplement, que dans le Perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3\,\mathfrak{C}$, & dans l'Apogée $\delta = 2\,\mathfrak{C}$. Cela étant, voici les conséquences que nous en tirons.

1°. Un jour & demi après les Syzygies, l'intervalle de deux Marées qui se suivent, est dans le Périgée de 24 heures $27\frac{1}{2}$ minutes; & dans l'Apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour & demi après les Quadratures, le même intervalle est dans le Perigée de 25 heures 15 minutes; & dans l'Apogée de 25 heures

heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propositions le §. VII. du Chap. VI. CHAP. VII.

3°. Le plus grand intervalle entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir se faire environ $2\frac{3}{4}$ jours avant & après les Quadratures, sans nos corrections, mais qui sera réellement environ $1\frac{1}{4}$ jours avant, & $4\frac{1}{4}$ après les Quadratures) est de 39 minutes environ, le Perigée de la Lune, & d'une heure environ son Apogée. Ce plus grand intervalle se fait aussi plutôt dans le Perigée, & plus tard dans l'Apogée; la différence est d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la Table pareille à celle de ci-dessus, mais qui serve pour le Perigée & pour l'Apogée de la Lune, nous remarquerons que les Sinus des petits Arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le passage de la Lune & la haute Mer sont toujours

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

& qu'à la place de cette quantité, on peut substituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$ (§. *XVIII. Chap. VI.*) & même qu'on peut négliger ici, sans le moindre scrupule, le second terme, puisqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous considérerons donc ces petits Arcs horaires, comme reciproquement proportionnels aux quantités B, c'est-à-dire, aux quantités $\frac{-\delta bb}{\epsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Et dans cette derniere quantité, nous pourrons encore rejetter sans peine les deux derniers termes pour notre present dessein, & dire par conséquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{\epsilon}$, tout le reste étant égal, les intervalles entre le passage de la Lune, & la haute Marée sont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{\epsilon}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{\epsilon}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de la seconde Colonne de notre précedente Table, doivent être multipliés par la Fraction $\frac{5}{6}$ dans le Perigée, & par $\frac{5}{4}$ dans l'Apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troisiéme Colonne se déterminent comme dans la précedente Table. Mais quant aux nombres de la premiere Colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 degrés, à cause du retard d'un jour & demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 degrés, à la place desquels je mettrai un nombre rond de 20 degrés.

Voici donc à present une Table corrigée à l'égard de toutes les circons-

CHAP. VII.

constances exposées jusqu'ici. La premiere Colonne marque la distance qui est entre le Soleil & la Lune, environ le tems de la haute Mer, ou plutôt ici, environ le passage de la Lune par le Méridien. Les trois Colonnes suivantes marquent le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & la haute Mer pour le Perigée, pour les Distances moyennes & pour l'Apogée de la Lune. Et les trois dernieres marquent les heures absolues des hautes Mers pour les Perigées, les Distances moyennes & les Apogées de la Lune. Et pour se servir de cette Table, il ne faudra plus qu'ajoûter aux nombres des six dernieres Colonnes l'heure moyenne du Port en vertu du III. §. La Table n'a été calculée que de dix en dix degrés : les interpolations suppléeront avec assez de justesse à telle autre Distance entre les deux Luminaires, que les Ephémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut aussi être employée, lorsque la Lune se trouve à une Distance donnée de son Apogée ou Perigée.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGÉE *pour trouver l'heure des hautes Marées.*

CHAP. VII.

Distances entre les Luminaires au moment du passage de la Lune par le Meridien.	*Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Meridien en minutes de tems.*			*Table approchante des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des Ephémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien.*		
	Perigée de la Lune.	*Distance moyenne de la Lune*	*Apogée de la Lune.*	*Perigée de la Lune.*	*Distance moyenne de la Lune.*	*Apogée de la Lune.*
				H. M.	*H. M.*	*H. M.*
0	18 après.	22 après.	27½ après.	0 18	0 22	0 27½
10	9½ après.	11½ après.	14 après.	0 49½	0 51½	0 54
20	0	0	0	1 20	1 20	1 20
30	9½ avant.	11½ avant.	14 avant.	1 50½	1 48½	1 46
40	18 avant.	22 avant.	27½ avant.	2 22	2 18	2 12½
50	26 avant.	31½ avant.	39½ avant.	2 54	2 48½	2 40½
60	33 avant.	40 avant.	50 avant.	3 27	3 20	3 10
70	37½ avant.	45 avant.	56 avant.	4 2½	3 55	3 44
80	38½ avant.	46½ avant.	58 avant.	4 41½	4 33½	4 22
90	33½ avant.	40½ avant.	50½ avant.	5 26½	5 19½	5 9½
100	22 avant.	25 avant.	31 avant.	6 19	6 15	6 9
110	0	0	0	7 20	7 20	7 20
120	21 après.	25 après.	31 après.	8 21	8 25	8 31
130	33½ après.	40½ après.	50½ après.	9 13½	9 20½	9 30½
140	38½ après.	46½ après.	58 après.	9 58½	10 6½	10 18
150	37½ après.	45 après.	56 après.	10 37½	10 45	10 56
160	33 après.	40 après.	50 après.	11 13	11 20	11 30
170	26 après.	31½ après.	39½ après.	11 46	11 51½	11 59½
180	18 après.	22 après.	27½ après.	0 18	0 22	0 27½

CHAP. VII.

Cette Table suppose encore le plan des Orbites de la Lune & du Soleil être le même que celui de l'Equateur de la Terre, ce qu'il faut sur-tout remarquer à l'égard des trois dernieres Colonnes. Mais cette supposition n'a pas beaucoup d'influence sur les autres Colonnes; & les Ephémerides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien, suppléeront aux trois dernieres.

VIII.

Après avoir exposé au long tout ce que les différentes distances des Luminaires, & sur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des Marées, nous dirons aussi un mot sur l'inégalité du mouvement des Luminaires.

Cette inégalité feroit d'une très-grande importance, s'il falloit construire une Table pour les heures des Marées, sans se rapporter aux Tables & aux Ephémerides: mais elle ne nous est d'aucune conséquence, puisque nous supposons l'heure du passage de la Lune par le Méridien, aussi-bien que l'Arc compris entre les deux Luminaires, connus par les Ephémerides. C'est la raison qui m'a engagé à rapporter l'heure des Marées au passage de la Lune par le Méridien, en donnant une Table, qui marque, combien la premiere avance ou retarde sur l'autre.

IX.

Il nous reste à considérer les inclinaisons des Orbites à l'égard de l'Equateur: pour cet effet il faut concevoir un Cercle qui passe par les centres du Soleil, de la Lune & de la Terre; & c'est proprement ce Cercle que doivent représenter toutes nos Figures, que nous avons considérées jusqu'ici, comme représentant l'Equateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les Points resteront dans ce Cercle aux mêmes endroits; & que les Arcs se conserveront tels, que nous les avons déterminés: mais les Angles horaires formés sur l'Equateur par ses Arcs, en sont changés. On ne sçauroit sans une Théorie parfaite de la Lune déterminer au juste ces Angles horaires, à cause de la variabilité de l'inclinaison de l'Orbite lunaire à l'égard de l'Equateur; mais aussi ce changement n'est-il pas fort considérable, par rapport à l'Arc horaire compris entre le passage de la Lune par le Méridien, & le moment de la haute Mer; nous supposerons, & nous pouvons le faire ici sans aucune erreur sensible, que les Orbites de la Lune & du Soleil sont dans un même plan, ayant chacune une inclinaison avec l'Equateur de 23d. 30m. & nous considérerons là-dessus la Lune dans trois sortes de situation: 1°. Lorsque sa déclinaison, à l'égard de l'Equateur, est nulle; & alors il il faut multiplier les nombres de la seconde, troisiéme & quatriéme Colonnes de notre Table par $\frac{92}{100}$, & ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & l'heure de la haute Mer. 2°. Lorsque la Lune se trouve dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur; & alors il faut multiplier lesdits nombres de notre Table par $\frac{102}{93}$. Et enfin 3°. lorsque la Lune se trouve au milieu de ces deux situations; auquel cas il faut se servir de notre Table, sans y apporter aucun changement. Quant aux autres situations de la Lune en longitude, on peut se servir du principe de la proportionalité de la différence des termes. Ces regles sont fondées sur la proportion qu'il y a entre les petits Arcs de l'Ecliptique & de l'Equateur, compris entre deux mêmes Méridiens fort proches l'un de l'autre. CHAP. VII.

X.

Il suit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Marée, est environ un jour avant les Quadratures, & quatre jours après les Quadratures, la Lune dans son Apogée & dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur de la Terre; & que dans le concours de toutes ces circonstances, ledit plus grand intervalle peut aller jusqu'à 63 minutes de tems, que la haute Marée avancera sur le passage de la Lune par le Méridien un jour avant les Quadratures, & qu'elle retardera quatre jours après les Quadratures.

X I.

Voilà mes refléxions sur le tems des Marées; je me flatte qu'elles ont toute la précision qu'on peut esperer sur cette matiere, du moins quant à la Méthode. Toute l'incertitude qui y reste encore, est fondée sur le rapport moyen entre les forces de la Lune & du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puisque tous nos Théoremes conviennent si bien avec les Observations. Un plus grand nombre d'Observations nous donnera peut-être un jour plus de précision là-dessus. Il est vrai que nous n'avons déterminé l'heure & les intervalles des Marées, que sous la Ligne Equinoctiale; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puisse changer sensiblement les intervalles des Marées; ainsi je n'ai pas jugé néceffaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaison avec la hauteur des Marées: c'est à quoi nous ferons attention dans la suite.

CHA-

CHAPITRE VIII.

Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.

I.

JE me propose à présent d'examiner les diversités des hauteurs des Marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous supposerons d'abord pris sous l'Equateur, pour toutes les diverses circonstances qui peuvent se rencontrer. Nous suivrons, pour cet effet, la même Methode que nous avons observée pour déterminer généralement l'heure des Marées, c'est-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus simples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant surmonter trop de difficultés à la fois: nous nous servirons donc d'abord des mêmes hypotheses que nous avons employées dans le Chap. VI. & que nous avons exposées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pousserons nos recherches dans le Chapitre suivant à tous les cas possibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précedent pour déterminer généralement l'heure des Marées.

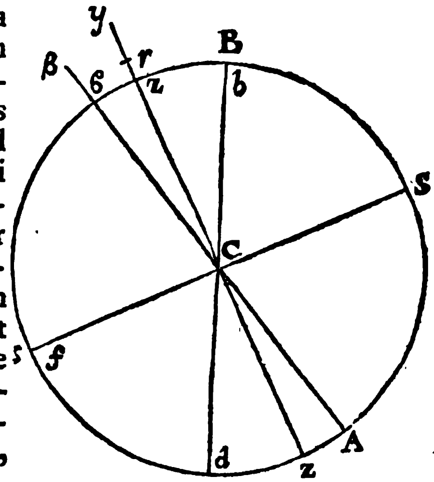
II.

J'entens par la hauteur d'une Marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute Mer jusqu'à la basse Mer suivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. §. XI. XII. & XIII. du Chap. V. qui déterminent l'Equateur, les lieux de la Lune & du Soleil étant donnés, la position des deux points ausquels la Mer est la plus haute & la plus basse; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premierement la hauteur de la haute Mer, & ensuite la hauteur de la basse Mer.

III.

Remarquons d'abord, que les deux points de la Circonférence, qui marquent la haute & la basse Mer, sont éloignés entre eux de 90 degrés. On le voit par les expressions des §. §. XI. & XIII. & nous l'avons démontré dans la premiere Remarque du §. XII. Chap. V. Supposant donc le Soleil répondre au Point *b*, la Lune au Point *c*, & que la haute Mer réponde au Point *z*, il faut prendre l'Arc *z s* de 90 degrés,

grés, & le Point *s* sera celui qui répond à la basse Mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de yz, qui marque l'élevation des eaux pour le Point z; & ensuite prenez de la même maniere la valeur de sx, qui étant négative, marque la dépression des eaux; cela étant fait, on voit que la somme de yz & de sx marquera la hauteur de la Marée, mais dans l'expression analytique de sx, il faut changer les Signes. Il est vrai que cette Methode suppose, que pendant l'intervalle, depuis la haute Mer jusqu'à la basse Mer, la Lune ne change pas de place; & c'est à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois degrés l'Arc $b\varsigma$ dans le Calcul de sx: mais ce seroit une exactitude hors de place, & qui augmenteroit beaucoup les peines du Calcul, CHAP. VIII.



qui n'est déja que trop embarassé. On pourra même remedier à ce petit défaut, déja insensible par sa nature, en prenant l'Arc $b\varsigma$, tel qu'il est, non au moment de la haute Marée, ni à celui de la basse Mer, mais au milieu de leur intervalle; & c'est ce que nous supposerons dans la suite.

Soit donc comme dans le V. Chap. le Sinus de l'Arc $b\varsigma = m$; son Cosinus $= n$; le Sinus de l'Angle $bCz = r$; le Sinus de l'Angle $\varsigma Cz = \epsilon$; le Sinus total $= b$; & nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$yz = \frac{2bb - 3rr}{3bb} \times \varsigma + \frac{2bb - 3\epsilon\epsilon}{3bb} \times \delta.$$

De là on trouvera sx en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant $bb - rr$, & $bb - \epsilon\epsilon$ à la place de rr & de $\epsilon\epsilon$: & de cette façon on aura

$$sx = \frac{3rr - bb}{3bb} \times \varsigma + \frac{3\epsilon\epsilon - bb}{3bb} \times \delta.$$

Changez à present les Signes dans la valeur de sx, & supposez la hauteur de la Marée $= M$, & vous aurez

$$M = \frac{bb - 2rr}{bb} \times \varsigma + \frac{bb - 2\epsilon\epsilon}{bb} \times \delta.$$

Cette derniere expression marque généralement la hauteur des Marées, puisqu'on peut toujours déterminer les valeurs de rr & $\epsilon\epsilon$ par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. Mais les Calculs ne laissent pas d'être assez pénibles, quoi-que les Formules ne soient pas prolixes. Nous tâcherons

 donc

CHAP. VIII. donc de rendre ces Calculs plus faciles, ſans déroger beaucoup à l'exactitude des Formules.

I V.

Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, ſi la Force lunaire étoit infiniment plus grande que la Force ſolaire. On auroit en ce cas $\rho = 0$ & $\sigma = m$,

$$M = \zeta + \delta - \frac{2mm}{bb} \times \zeta,$$

laquelle Formule ne ſçauroit manquer d'être aſſez approchante ; elle donne même la juſte valeur pour les Syzygies & pour les Quadratures.

V.

Pour déterminer les hauteurs des Marées plus exactement encore, nous conſidérerons la valeur de ρ comme fort petite, au lieu de la ſuppoſer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précedent : mais nous pourrons ſuppoſer hardiment $\rho = \frac{\zeta mn}{\delta}$, & on verra que cette ſuppoſition ne ſçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, ſi l'on conſulte l'Article VII. du précedent Chapitre vers la fin, & le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver n'eſt preſque d'aucune conſéquence pour notre préſent ſujet. On voit outre cela, que ρ étant fort petit, on peut ſuppoſer cette Analogie

$$\rho : m - \sigma :: b : n;$$

puiſque cette Analogie ſeroit exactement vraie, ſi les quantités ρ & $m - \sigma$ étoient réellement & infiniment petites : de cette Analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n\rho}{b} = m - \frac{mnn\zeta}{b\delta};$$

ſubſtituant ces valeurs expoſées pour les quantités ρ & σ, & faiſant le Sinus total $b = 1$, on obtient cette Equation,

$$M = \zeta + \delta - 2mm\zeta + \frac{2m^2n^2\zeta\zeta}{\delta} - \frac{2m^2n^4\zeta^3}{\delta\delta}.$$

De cette maniere il paroit que les Marées décroiſſent depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elles croiſſent avec la même loi depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Ceux qui voudront eſſayer la juſte Equation du §. III. & cette Equation approchante, ſur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

V I.

Il nous ſera facile à préſent de calculer & de donner une Table pour les hauteurs des Marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des Marées, & pour laquelle nous tâcherons

rons dans le Chapitre ſuivant de trouver les corrections néceſſaires aux différentes circonſtances, tout comme nous avons fait à l'égard de ladite Table du VI. Chap. Nous ſuppoſerons encore le rapport moyen de ☽ à ☉ être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des Obſervations qui puiſſent déterminer ce rapport au juſte. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande Marée.

La *premiere* Colonne marquera dans cette Table de dix en dix degrés les Arcs compris entre les deux Luminaires, environ le milieu des Juſans (§. III.) c'eſt-à-dire, environ trois heures après le paſſage de la Lune par le Méridien ; la *ſeconde* Colonne donnera les hauteurs cherchées des Marées, pour les ſuſdites hypotheſes ; & la *troiſiéme* en marquera les différences.

CHAP. VIII.

TABLE FONDAMENTALE

pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Descentes verticales des eaux pendant les Jusans.

Distance entre les deux Luminaires en Dégrés.	*HAUTEUR DES MARÉES.*	*DIFFERENCE DES HAUTEURS.*
0 Dégrés.	1000 Parties.	
10	987	− 13
20	949	− 38
30	887	− 62
40	806	− 81
50	715	− 91
60	610	− 105
70	518	− 92
80	453	− 65
90	429	− 24
100	453	+ 24
110	518	+ 65
120	610	+ 92
130	715	+ 105
140	806	+ 91
150	887	+ 81
160	949	+ 62
170	987	+ 38
180	1000	+ 13

VII.

Si on avoit voulu construire cette Table conformément à l'Equation finale du §. III. qui est la vraie Equation, on auroit pu profiter de la Table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la seconde Colonne divisés par 4, donnent les degrés de l'Arc, dont le Sinus est appellé ϱ, après quoi on connoît aussi l'Arc dont le Sinus est appellé σ. Connoissant ainsi par les Tables les quantités ϱ & σ, on trouve sans beaucoup de peine la valeur de *M* du §. III.

VIII.

On voit aussi, que si la distance entre les deux Luminaires est entre deux nombres de la premiere Colonne, on peut sans aucune erreur sensible employer le principe général des Interpolations, de sorte que cette Table peut suffire pour tous les cas.

IX.

On remarquera au reste, qu'il est ici de grande importance d'avoir substitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{\epsilon}$, & qu'un assez petit changement dans cette valeur, a une grande influence sur le rapport des Marées. On ne doit donc encore considérer cette Table, que comme un exemple de nos Formules générales : le Chapitre suivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-dessus.

X.

Nous voyons tant par les Formules que nous avons données pour les hauteurs des Marées, que par la précedente Table, quelle est *in abstracto* la nature des variations des Marées. On peut faire là-dessus les Remarques qui suivent.

1°. Que les changemens des Marées sont fort petits, tant aux Syzygies qu'aux Quadratures, & ils seroient infiniment plus petits que les autres, si l'intervalle d'une Marée à l'autre étoit aussi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne se font pas précisément au milieu, mais plus près des Quadratures que des Syzygies : c'est-à-dire, que la plus grande diminution des Marées se fait dans nos suppositions, lorsque la Lune est environ à 60 degrés (80 avec la correction de 20 degrés expliquée au Chap. VII. depuis les Syzygies; le plus grand décroissement se fait donc de la neuviéme à la dixiéme Marée (de

CHAP. VIII. la douziéme à la treiziéme avec la correction): de même le plus grand accroiſſement ſe fait à environ 30 degrés depuis les Quadratures (50 degrés avec la correction) qui répond au changement de la quatriéme à la cinquiéme Marée (de la ſeptiéme à la huitiéme avec la correction) depuis les Quadratures. Je parle dans cette Remarque de toutes les Marées qui ſe font, tant celles du matin, que celles du ſoir, pour rendre leurs intervalles plus petits: on ſe ſouviendra cependant de ce que j'ai dit expreſſément, que je fais abſtraction par-tout ailleurs des Marées, qui répondent au paſſage inférieur de la Lune par le Méridien, lorſqu'il s'agit de comparer les Marées entre elles: car ces deux ſortes de Marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore conſidérées.

3°. Que les petits changemens dans les Syzygies, & ceux des Quadratures, comparés entre eux, ſont inégaux; puiſque ceux-ci ſont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette Remarque il faudra ajoûter, de part & d'autre, trois Marées, ou environ un jour & demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux Marées qui ſe ſuivent, entre celles qui répondent à la Lune de deſſus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la diſtance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite Marée.

X I.

Je ne doute pas que les Obſervations ne confirment en gros les Remarques que je viens de faire, & toutes les Regles précedentes. On ne ſçauroit plus douter de la Théorie que nous avons adoptée & établie; & la Théorie poſée, les Calculs en ſont ſûrs. Mais comme nous ne ſommes pas encore ſûrs des hypotheſes ſecondes, qu'on ne ſçauroit éviter, telles que ſont le juſte rapport entre la force lunaire & ſolaire, que nous avons ſuppoſé comme 5 à 2; le retardement des effets de la Lune ſur ſa poſition, que nous avons ſuppoſé d'un jour & demi, ou de trois Marées, ou de 20 degrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le reſultat deſdites Remarques & Regles. Cependant comme je n'ai fait aucune ſuppoſition ſans un mûr examen fondé ſur les plus juſtes Obſervations choiſies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oſerois me flatter d'un aſſez bon ſuccès, ſi Meſſieurs les ACADEMICIENS vouloient ſe donner la peine de confronter nos Tables, nos Regles & nos Théoremes nouveaux avec les Obſervations, dont ils ont un grand Tréſor: mais ce ſuccès, dont je me flatte par avance, ſe manifeſtera davantage, ſi ils veulent encore faire attention aux correc-

corrections que je vais donner dans le Chapitre ſuivant, à l'égard de diverſes circonſtances variables, & que nous avons ſuppoſées dans ce Chapitre comme conſtamment les mêmes. CHAP. IX.

CHAPITRE IX.

Sur les Hauteurs des Marées corrigées, ſuivant differentes circonſtances variables.

I.

NOus ſuivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des Marées. Pour commencer donc par l'effet des Vents & des Courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter & diminuer les Marées, & que ces variations ne ſont pas d'une nature à pouvoir être aucunement déterminées. On pourra pourtant remarquer que lorſque ces cauſes conſervent pendant un tems un peu conſidérable leur force & leur direction, leur effet conſiſtera plûtôt à hauſſer ou baiſſer la Mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les Marées.

II.

Les circonſtances attachées à chaque Port ou autre endroit en particulier, telles que ſont ſa ſituation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'Océan, &c., font extrêmement varier les Marées. Ce ſont ces cauſes qui font que les grandes Marées ne ſont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits, de 8 ou 10 pieds dans d'autres, & de 50 à 60 pieds, & au delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de ſingulier, eſt que dans la Mer libre les grandes Marées ne ſont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elles vont au-delà de 50 pieds dans pluſieurs Ports & autres endroits, dont la communication avec la Mer ouverte, eſt entrecoupée & empêchée de tous côtés; & qui par conſéquent devroient, ſelon les premieres apparences, avoir les Marées moins grandes. Nous donnerons dans un autre Chapitre la raiſon hydroſtatique de ce Phénomene, pour ne point nous écarter de notre ſujet préſent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne ſçauroit rien déterminer ſur les grandeurs abſoluës des Marées, & que tout ce que la Théorie pourroit encore faire, ſeroit d'en marquer le rapport: mais l'expérience nous enſeigne encore, que ce rapport même n'eſt pas conſtant dans les différens endroits, quoi qu'il ſoit renfermé dans des bornes plus étroites.

La

CHAP. IX.

La grande Marée ſera double de la petite Marée dans un endroit; & elle pourra être triple dans un autre : c'eſt que les cauſes qui font varier les hauteurs abſoluës des Marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait conſtante. Mais les Marées moyennes entre la plus grande & la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être cenſées obſerver les regles que nous leur avons preſcrites dans le Chapitre précedent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente ſituation des Luminaires obſerveront à-peu-près les Loix que nous avons démontrées *in abſtracto.* Ces refléxions m'ont déterminé à conſidérer la plus grande & la plus petite Marée, non telles qu'elles devroient être dans la Théorie pure, mais telles qu'on les obſerve, lorſque les Luminaires ſe trouvent à peu près dans l'Equateur, & dans leurs diſtances moyennes à la Terre, ſans qu'aucune cauſe accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande Marée doit être exprimée par $\delta + \epsilon$, & la hauteur de la petite Marée par $\delta - \epsilon$; mais ſi l'on ſuppoſe la hauteur moyenne réelle de la grande Marée A & de la petite Marée B, il faudra ſuivant cette correction faire

$$\delta + \epsilon = A, \ \& \ \delta - \epsilon = B:$$

c'eſt-à dire, $$\delta = \frac{A+B}{2}, \& \ \epsilon = \frac{A-B}{2};$$

& ces valeurs doivent être ſubſtituées dans les Equations & Formules du Chapitre précedent. En ſuppoſant $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, & ſi cette raiſon étoit confirmée par les Obſervations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit ſe ſervir de la Table, telle qu'elle eſt, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande Marée. Mais ſi $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur conſidérablement différente de celle que nous venons de lui aſſigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit auſſi après ces conſidérations, qu'on ne doit pas s'attendre à pouvoir déterminer avec la derniere préciſion les hauteurs des Marées. Nous pourrons donc ſans ſcrupule, pour rendre nos Propoſitions plus nettes & plus ſenſibles, nous ſervir de l'équation du §. IV. Chap. VIII. qui auſſi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précéde l'autre. Nous ſuppoſerons donc la hauteur des Marées toujours exprimée par $\delta + \epsilon - 2mm\epsilon$, & employant la correction indiquée, nous aurons à préſent

$$M = A - mmA + mmB, \text{ ou plus ſimplement,}$$
$$M = nnA + mmB:$$

C'eſt

C'eſt donc de cette derniere équation, que nous nous ſervirons dans la ſuite de cette Diſſertation. CHAP. IX.

III.

Cette correction pourra en même tems remédier à un autre inconvenient, qui provient de l'inertie & de la Maſſe des eaux. Nous avons déja dit ailleurs que les Marées ſont une eſpéce d'oſcillations qui tâchent naturellement à ſe conſerver telles qu'elles ſont: on ſent bien que cette raiſon doit empêcher les grandes Marées d'atteindre toute leur hauteur, & les petites de diminuer autant qu'elles devroient faire naturellement: qu'elle ne doit pas changer ſenſiblement la Marée moyenne entre la plus grande & la plus petite, & qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles ſont plus éloignées de cette Marée moyenne. Et on voit que notre correction ſatisfait à toutes ces trois conditions.

IV.

Après la dite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des Marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les Phaſes de la Lune, ou par les diſtances, qui ſont entre les Luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. & V. du Chap. VII. que les Phaſes de la Lune qui répondent aux Marées en queſtion, ne doivent pas être priſes telles qu'elles ſont, mais telles qu'elles ſeroient environ un jour & demi après, c'eſt-à-dire, que les diſtances entre les Luminaires doivent être augmentées d'environ 20 degrés, & moyennant cette correction, la Théorie ne ſçauroit manquer de ſatisfaire au juſte aux Obſervations.

V.

Nous n'avons conſidéré juſqu'ici les Luminaires, que dans leurs diſtances moyennes à la Terre, & c'eſt pour ce cas que nous avons appellé la hauteur de la plus grande Marée A, & celle de la plus petite Marée B. Pour déterminer donc ce que les différentes diſtances peuvent faire ſur les hauteurs des Marées, il faudra ſe rappeller tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être ſuppoſée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, & la Force ſolaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \mathfrak{C}$. Or comme la ſomme de ces Forces exprime toujours la hauteur de la grande Marée, & que la différence des mêmes Forces exprime la hauteur de la petite Marée, il faudra faire ces deux Analogies:

CHAP. IX.

$$\delta + \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta + \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: A : \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta + \epsilon)} \times A$$

$$\delta - \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta - \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: B : \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta - \epsilon)} \times B$$

La premiere de ces quatriémes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande Marée, & la seconde, la hauteur corrigée de la petite Marée. Par conséquent l'équation finale du II. §. sera celle-ci après sa correction :

$$M = \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta + \epsilon)} \times nnA + \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta - \epsilon)} \times mmB$$

Je m'assure que cette équation donnera toujours les hauteurs des Marées avec toute la justesse qu'on peut attendre sur cette matiere, pour les suppositions auxquelles notre Théorie est encore assujettie. Mais comme il est presque impossible qu'il n'y ait absolument aucune cause étrangére, qui trouble les Marées, nous ne devons pas être trop scrupuleux sur ces corrections, qui sont elles-mêmes médiocres. Ainsi pour rendre nos regles plus sensibles & plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les distances du Soleil à la Terre ; ces changemens sont beaucoup plus petits que dans la Lune, & ils sont en même tems de beaucoup moindre conséquence : Nous supposons donc S constamment $= s$. Quant à la Lune, nous la considérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans son Perigée, dans sa distance moyenne & dans son Apogée ; & nous retiendrons les suppositions que nous avons faites au dit Article, pour les distances de la Lune, & pour les conséquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta = 3\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 0{,}8439$: pour le second cas $\delta = \frac{5}{2}\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}000$, & enfin pour le troisiéme $\delta = 2\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui suivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le Périgée de la Lune,

$$M = 1{,}138\, nnA + 1{,}277\, mmB.$$

2°. Pour les distances moyennes de la Lune ;

$$M = nnA + mmB.$$

3°. Pour l'Apogée de la Lune

$$M = 0{,}901\, nnA + 0{,}703\, mmB.$$

On remarquera dans ces équations, que A marque la hauteur de la grande Marée, & B la hauteur de la petite Marée dans les distances moyennes des Luminaires à la Terre, ces Luminaires étant supposés

l'un

l'un & l'autre se trouver dans l'Equateur: que *m* marque le Sinus de l'Arc compris entre les Luminaires diminué de 20 degrés, & *n* le Cosinus de cet Arc. CHAP. IX.

On remarquera après cela, que les grandes Marées sont comprises en vertu de la premiere & de la troisiéme équation dans les termes de 1138 à 901, & les Marées bâtardes dans les termes de 1277 à 703; d'où l'on voit que la différence entre les grandes Marées n'est pas à beaucoup près si grande, qu'elle l'est entre les Marées bâtardes, si on compare cete différence à la hauteur de la Marée qui lui répond. Cela se confirme par l'expérience, & c'est une nouvelle source des irrégularités des petites Marées comparées entre elles, dont nous avons déja parlé ailleurs, & que M. Cassini n'a pas manqué d'observer.

V I.

J'ajoûterai ci-dessous une Table fondée & calculée sur les trois dites équations, mais qui se rapporte aux Quantités *A* & *B*, qu'il faut donc connoître par expérience pour le Port ou autre endroit, dont il est question. On pourra déterminer ces Quantités *A* & *B*, sur un grand nombre d'Observations, tant des hautes que des petites Marées, en prenant des unes & des autres le milieu Arithmétique.

VII.

On remarquera, quant à la construction de la Table que nous allons donner, que les Arcs compris entre les Luminaires ont été augmentés de 20 degrés à l'égard de la Table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux causes secondes & aux corrections à faire. Ces 20 degrés sont déterminés par le retard d'un jour & demi des Marées, par rapport aux Phases de la Lune, expliqué ci-dessus: il est vrai que cet intervalle d'un jour & demi ne demande pas tout-à-fait 20 degrés de correction: mais comme il faudroit estimer les distances entre les Luminaires, telles qu'elles sont, non au moment de la haute-Mer (qui doit être supposée se faire au moment du passage de la Lune par le Méridien) mais au milieu du Jusan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. & que l'intervalle depuis la haute Mer jusqu'au milieu du Jusan, demande encore une correction d'environ un degré & demi, la somme de ces corrections peut être supposée de 20 degrés, en estimant les distances des Luminaires au moment du passage de la Lune par le Méridien, que les Ephémérides indiquent.

VIII.

Voici donc à présent la Table. La *premiere* Colonne y marque les distances entre la Lune & le Soleil dans le moment du passage de la Lune par le Méridien : les *trois* autres Colonnes marquent les hauteurs des Marées pour le Périgée de la Lune, pour les distances moyennes de la Lune à la Terre, & pour l'Apogée de la Lune.

TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGÉE pour trouver les Hauteurs des Marées.

CHAP. IX.

Distances entre les Luminaires.	*HAUTEURS des Marées au Périgée de la Lune.*	*Hauteurs des Marées aux Distances moyennes de la Lune à la Terre.*	*HAUTEURS des Marées à l'Apogée de la Lune.*
0 Deg.	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
10	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
20	1,138A+0,000B	1,000A+0,000B	0,901A+0,000B
30	1,104A+0,038B	0,970A+0,030B	0,874A+0,021B
40	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B
50	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
60	0,668A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
70	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
80	0,284A+0,958B	0,250A+0,750B	0,225A+0,527B
90	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
100	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
110	0,000A+1,277B	0,000A+1,000B	0,000A+0,703B
120	0,034A+1,238B	0,030A+0,970B	0,027A+0,682B
130	0,133A+1,127B	0,117A+0,883B	0,105A+0,621B
140	0,284A+0,958B	9,250A+0,750B	0,225A+0,527B
150	0,460A+0,749B	0,413A+0,587B	0,372A+0,412B
160	0,6 8A+0,527B	0,587A+0,413B	0,529A+0,290B
170	0,853A+0,319B	0,750A+0,250B	0,676A+0,176B
180	0,995A+0,149B	0,883A+0,117B	0,795A+0,082B

CHAP. X.

I X.

Il nous reste à considérer les déclinaisons des Luminaires & les latitudes des lieux sur la Terre, pour lesquels on cherche la nature des Marées. Nous avons supposé les unes & les autres nulles dans ce Chapitre. Mais cette matiere est si riche & si remarquable par plusieurs propriétés très singulieres, & elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce sera donc le sujet du Chapitre suivant.

CHAPITRE X.

Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaisons des Luminaires & des différentes latitudes des Lieux.

I.

LEs déclinaisons des Luminaires à l'égard de l'Equateur, & les distances des lieux sur la Terre du même Equateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne sçauroit bien traiter cette matiere, qui est une des plus importantes de notre sujet, sans les considérer les unes & les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la question trop embarrassante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme si les Marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous considérerons aussi la chose d'abord suivant la pure Théorie, & nous verrons ensuite quelles corrections on y pourra employer.

I I.

Ressouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, & sur-tout dans le cinquiéme, sur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des Luminaires. Nous avons considéré la Terre d'abord comme parfaitement sphérique: nous avons démontré ensuite que cette figure est changée par l'action de l'un des Luminaires en ellipsoïde, dont l'Axe prolongé passe par le centre du Luminaire agissant; & enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque Point dans la surface de la Terre, doit tantôt se baisser, tantôt s'élever, afin que sa figure ellipsoïde soit conservée; mais nous n'avons calculé ces baissemens & haussemens, que pour les

Points

Points pris dans l'Equateur même, dans le plan duquel nous avons supposé en même tems se trouver l'Axe de l'Ellipsoïde. C'est pour ces cas, que nous avons démontré (§ *V. Chap. V.*) *que les baissemens des eaux sont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute Mer*; & l'on remarquera que ces Angles horaires sont proportionnels alors aux Arcs compris entre le Pole de l'Ellipsoïde & le Point en question. CHAP. X.

III.

Voici à présent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baissemens & haussemens, qui se font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, & la Lune ayant aussi une déclinaison quelconque. On voit qu'on aura toujours le même Ellipsoïde, quelle que soit la déclinaison de la Lune; mais qu'il sera obliquement posé à l'égard de l'Equateur: on voit aussi qu'il faut s'imaginer dans ce Sphéroïde allongé une Section parallele à l'Equateur, qui passe par le point en question: cette Section ne sera pas un cercle parfait, & sa circonférence n'aura pas tous ses points également éloignés du centre de l'Ellipsoïde: c'est les différences de ses distances, qui forment la nature des Marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

IV.

Pour cet effet il faudra commencer par chercher les distances de chaque point du Parallele au *Pole de l'Ellipsoïde* (j'appelle ainsi l'extrémité de l'Ellipsoïde, qui prolongé, passe par le centre de la Lune) & ces distances étant connues, il est facile de trouver la distance du même point au centre de l'Ellipsoïde, & les différences de ces distances. Car si le Cosinus de la distance d'un point pris dans le Parallele au Pole de l'Ellipsoïde étoit ϱ, le Sinus total $= 1$, & si le demi Axe de l'Ellipsoïde est nommé $b + \delta$, & le plus petit demi-diametre b, la distance du point pris par le Parallele jusqu'au centre de l'Ellipsoïde sera généralement $= b + \varrho\varrho\delta$; nous avons démontré cette Proposition au §. V. Chap. V.

V.

Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la distance d'un Point quelconque, pris dans un Parallele donné au Pole de l'Ellipsoïde. La voye de la Trigonometrie sphérique ordinaire nous seroit assez inutile ici, puisqu'il nous faut des expressions analytiques, applicables à tous les cas, & traitables aux Calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expressions des regles de la dite Trigonometrie, les formules qui

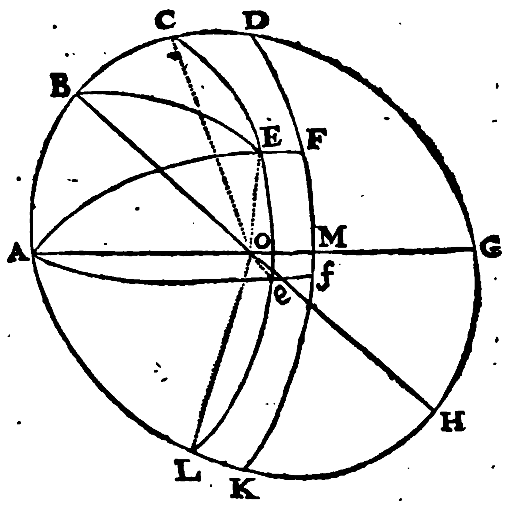
en

CHAP. X. en proviendroient seroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-dessus un beau Mémoire inséré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. 2. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois choses données dans un Triangle sphérique, trouver le reste par des expressions analytiques extrémement simples. Voici le cas que notre sujet demande.

Soit dans un Triangle spherique, le Sinus total $= 1$; le Sinus d'un des côtés $= S$; le Cosinus du même côté $= C$; le Sinus d'un autre côté $= s$; le Cosinus de cet autre côté $= c$; le Cosinus de l'Angle compris entre les deux côtés donnés $= y$; le Cosinus du troisiéme côté opposé à l'Angle donné, que j'appellerai q, sera exprimé par cette équation

$$q = Ssy + Cc.$$

VI.



Soit à present $ADGK$ le Méridien de la Terre, qui passe par le centre de la Lune, & que la Lune réponde au point B, qui deviendra ainsi le Pole de l'Ellipsoïde, & la droite BH, qui passe par le centre O, son Axe. Soit l'Axe de rotation de la Terre AG, les Poles A & G; DFK l'Equateur; CEL un Parallele, dans lequel nous prendrons un point quelconque E, & qu'on tire enfin par ce point E, & par le Pole A l'Arc AEF.

De cette maniere, l'Arc AB sera le complément de la déclinaison de la Lune; l'Arc AE sera le complément de la latitude du point E, & l'Arc DF sera l'Arc horaire depuis le passage du point E par le Méridien, qui passe par la Lune; de sorte qu'on connoit dans le Triangle BAE, les Côtés BA & EA, avec l'Angle compris BAE, & de là on tirera par le moyen du Théoreme exposé au précedent Article, l'Arc BE, qui est la distance du Point E au Pole de l'Ellipsoïde.

Nous nommerons donc encore le Sinus total 1, le Sinus du côté $AB = S$; son Cosinus $= C$; le Sinus du côté $AE = s$, son Cosinus $= c$;

le

le Cosinus de l'Arc DF, qui est la mesure de l'Angle BAE, $= y$; le Cosinus de l'Arc $BE = q$: nous aurons

$$q = Ssy + Cc.$$

VII.

Ayant ainsi trouvé l'Arc BE, il est facile d'exprimer la droite EO, qui est la distance du point E jusqu'au centre de l'Ellipsoïde, par le moyen du 4e. Art. qui nous marque que cette distance est toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du Quarré du Cosinus de cet Arc trouvé, & de l'excès du demi-Axe BO sur le plus petit demi-diametre : c'est-à-dire, si nous retenons les dénominations, dont nous nous sommes servis depuis le IV. §. jusqu'ici, que nous aurons $EO = b + (Ssy + Cc)^2 \delta$.
C'est cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des Marées, que la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu peuvent produire.

VIII.

Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre y de variable, la quantité EO est toujours d'autant plus grande, que l'on prend y plus grande. Pour avoir donc la plus grande EO, il faut faire $y = 1$. La haute Mer répond donc encore au passage de la Lune par le Méridien; & on aura alors la droite $CO = b + (Ss + Cc)^2 \delta$.

IX.

Mais pour trouver la plus petite EO ou eO, il ne faut pas faire $y = 0$; mais $y = -\frac{Cc}{Ss}$ & alors la hauteur eO est simplement $= b$. Nous ferons là-dessus les remarques suivantes :

I. La différence entre la plus grande CO & la plus petite eO, faisant la hauteur de la Marée, entant quelle est produite par la seule action de la Lune, il s'ensuit que cette hauteur est $= (Ss + Cc)^2 \delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles proprietés sur les Marées, & nous sert en même tems à décider plusieurs questions, sur lesquelles les Autéurs ne sont pas encore convenus.

(α) Nous voyons d'abord, que la plus grande Marée se fait, lorsque la déclinaison de la Lune est égale à la latitude du lieu. Cette regle suppose toute la Terre inondée; & c'est à quoi il faut avoir égard, lorsqu'il est question de la hauteur d'un lieu. Ce n'est pas par exemple immédiatement aux Ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux sont

CHAP. X. élevées par la Lune : la cause principale des Marées dans tous ces endroits doit être attribuée plûtôt à l'élevation & descente des eaux, qui se font dans la Mer du Nord, à environ 35 degrés de Latitude Septentrionale, autant que j'en ai pû juger par l'inspection des Cartes Marines. J'avouë pourtant que ce n'est ici qu'une estime fort incertaine ; il est impossible de rien dire de positif là-dessus.

On remarquera aussi que je parle ici de la hauteur de la Marée, qui répond au passage supérieur de la Lune par le Méridien : j'appellerai cette Classe de Marées, *Marées de dessus*, & la Classe de celles qui répondent au passage inférieur de la Lune par le Méridien, *Marées de dessous*.

(ϛ) Si la déclinaison de la Lune est nulle, nous aurons $S = 1$ & $C = 0$, & la hauteur de la Marée de dessus sera $= s s \delta$. Nous voyons de-là, que si la Terre étoit toute inondée, & que les Luminaires restassent dans le plan de l'Équateur, les hauteurs des Marées pour les endroits de différentes latitudes seroient en raison quarrée des Sinus des distances au Pole.

(ν) Si pour nos Païs Septentrionaux, la déclinaison de la Lune devient Méridionale, les Marées de dessus deviennent encore plus petites à cet égard, & cette diminution seroit très-considérable, s'il n'y avoit pas une cause hydrostatique que je marquerai ci-dessous, qui lui est un obstacle ; sans la considération de cette cause, on pourroit croire facilement que notre Théorie ne répond pas assez aux Observations.

(δ) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en supposant la Latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des Marées de dessus, tout le reste étant égal, devoit être,

Dans la plus grande Déclinaison Septentrionale de la Lune, ...	$= 0{,}963\ \delta$.
Lorsque la Déclinaison de la Lune est nulle .	$= 0{,}671\ \delta$.
Dans la plus grande Déclinaison Méridionale de la Lune	$= 0{,}265\ \delta$.

La différence de ces Marées est énorme, & surpasse de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut soupçonner avoir quelque rapport à la Déclinaison de la Lune. Nous en dirons bientôt la raison.

(ε) Si on supposoit la Latitude telle que $S s$ fût $= C c$, ou $S s = \sqrt{1 - SS} \times \sqrt{1 - ss}$, ou enfin $s = \sqrt{1 - SS} = C$, le point E qui répondroit à la plus petite EO, seroit précisément au point L. En ce cas, il n'y auroit qu'une Marée de dessus dans l'espace d'un jour lunaire, & la Marée de dessous s'évanouiroit entiérement. Cela arriveroit donc, par exemple, si la Lune ayant 20 degrés de Déclinaison Septentrionale, l'élevation du Pole étoit de 70 degrés : mais en même tems la Marée seroit

roit bien petite, puisqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquiéme partie, qu'elle feroit sous l'Equateur. CHAP. X.

(ζ) Si s est plus petit que C, la quantité du §. VII. $(Ss+Cc)^2\delta$, ne sçauroit plus devenir égale o; c'est pourquoi la Mer décroitra alors continuellement depuis le passage supérieur de la Lune par le Méridien, jusqu'à son passage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une Marée par jour depuis la parallele, qui fait $s=C$, jusqu'au Pole; & pour sçavoir la hauteur de ces Marées, il faut dans cette Formule, premierement supposer $y=1$; & ensuite $y=-1$, & prendre la différence des Formules: la hauteur des Marées sera donc dans ces cas $=(Ss+Cc)^2\delta-(-Ss+Cc)^2\delta$, ou bien $=4\,Ss\,Cc\delta$. Elle ne sçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de refléxions à faire encore sur cette matiere, s'il ne falloit pas se contenir dans de certaines bornes; & quoique tous ces Théoremes ne soient vrais que dans la Théorie, où l'on suppose les eaux être constamment dans leur état d'équilibre, & toute la Terre inondée (car avec ces suppositions, ces Théorêmes seroient exactement vrais) & que diverses circonstances peuvent leur donner quelquefois une toute autre face, ils ne laissent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de Phénomenes observés sur les Marées, & pour pénétrer à fond cette matiere.

II. Nous avons démontré qu'il n'y a des Marées de dessous, que tant que s est plus grand que C, lorsque la Déclinaison de la Lune est Septentrionale (si cette Déclinaison est Méridionale, il n'y aura point alors de Marées de dessus dans les Païs Septentrionaux.) Nous supposerons donc s plus grand que C, & nous chercherons là-dessus la hauteur de la Marée de dessous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de dessus.

Nous avons vû que la hauteur EO est la plus petite possible, lorsqu'on prend $y=-\frac{Cc}{Ss}$, & qu'alors elle devient $=b$; après cela les hauteurs EO croîtront jusqu'au point L, qui fait $y=-1$. La différence de ces hauteurs sera donc la hauteur de la Marée de dessous, qui sera par conséquent $=(-Ss+Cc)^2\delta$, pendant que celle de la Marée de dessus étoit $=(Ss+Cc)^2\delta$. On pourra faire là-dessus les remarques suivantes.

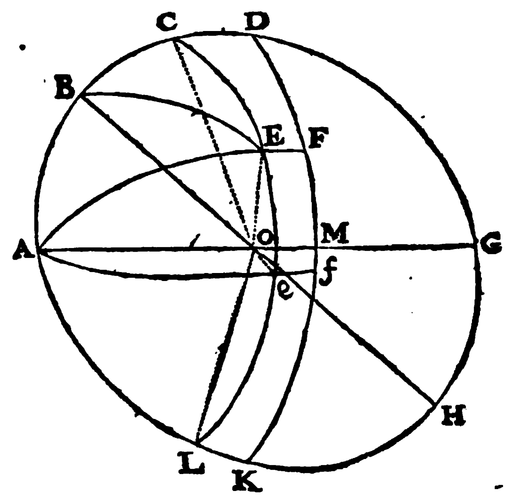
(a) Les Marées de dessus sont égales à celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est nulle.

(b) Dans les Païs Septentrionaux, les Marées de dessus sont plus grandes que celles de dessous, lorsque la déclinaison de la Lune est Septentrionale, & plus petites lorsque cette déclinaison est Méridionale, &

CHAP. X. généralement les déclinaisons de la Lune étant égales, mais de différens côtés, les Marées de dessus deviennent les mêmes qu'étoient celles de dessous, & reciproquement.

(*c*) La différence des deux Marées d'un même jour lunaire est $= 4\, C\, c\, S\, s\, \delta$; si l'on applique ces Formules à des cas particuliers, on verra que les Marées de dessus devroient différer considérablement de celles de dessous, s'il n'y avoit pas une autre raison qui doit les rendre à peu près égales. Nous exposerons cette raison ci-dessous, après que nous aurons examiné tout ce que la Théorie dit sur cette matiere *in abstracto*.

III°. Nous voyons aussi que les durées de deux Marées d'un même jour doivent être selon la pure Théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le Parallele CL on suppose e être le point, la distance duquel au centre de l'Ellipsoïde soit la plus petite & égale à b, & qu'on tire ensuite par ce point un Arc de Méridien Aef, l'Arc Df sera la mesure du tems depuis la haute Mer de dessus jusqu'à la basse Mer suivante, & l'Arc fK la mesure du tems, depuis cette basse Mer jusqu'à la haute Mer de dessous. Or nous avons vû au IX. §. que le Cosinus de l'Arc $Df\,(y)$ est $= -\frac{Cc}{Ss}$, ou bien si DM est de 90 degrés, le Sinus de l'Arc Mf vers le point $K = \frac{Cc}{Ss}$. Là-dessus nous pourrons faire ces remarques.



(1) Dans les Païs Septentrionaux la déclinaison Septentrionale de la Lune rend les Jusans des Marées de dessus plus longs, & les Flots des Marées de dessous plus courts; & la déclinaison Méridionale fait le contraire avec les mêmes mesures; & lorsque la déclinaison est nulle, la durée du Jusan est égale à celle du Flot suivant.

(2) Si la déclinaison de la Lune est égale au Cosinus de la latitude du lieu, le Jusan durera 12 heures lunaires, & il n'y a point de Flot pour l'autre Marée, parce qu'il n'y a point du tout de Marée de dessous.

(3) En général, la différence du tems, entre le Jusan de la Marée de dessus, & le Flot de la Marée de dessous, se détermine par le double

ble de l'Arc horaire Mf, & la différence des durées des deux Marées entieres, est exprimée par le quadruple de l'Arc Mf, dont le Sinus est $= \frac{Cc}{Ss}$. D'où l'on voit que plus la déclinaison de la Lune est grande, plus cette différence est grande aussi. CHAP. X.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35. degrés, la déclinaison de la Lune de 25 degrés, l'Arc Mf sera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le Jusan durera donc 7 heures lunaires, & le Flot suivant 5 heures lunaires, & la différence sera de deux heures, & toute la Marée de dessus durera 4 heures plus que celle de dessous.

X.

Voilà donc comme la chose seroit, si la Terre étoit toute inondée; & si les eaux étoient constamment dans une situation d'équilibre parfait. Nous avons exposé toutes les variations des Marées qui sont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaisons & latitudes, & par le moyen de nos Remarques on connoit les differences entre les Marées d'un même jour, entre celles qui se font dans différentes Saisons, &c. tant à l'égard des hauteurs des Marées, que de leurs durées. Il est vrai que les deux hypotheses indiquées sont bien éloignées de la vérité, & que cela change extrêmement les mesures des variations; mais je suis pourtant sûr qu'il doit y avoir des variations, & qu'elles seront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la surface de la Terre, il n'est pas possible d'en deviner les effets, que fort superficiellement, & comme chaque endroit demanderoit à cet égard des reflexions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne considérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, & les mouvemens reciproques ou oscillatoires qui en résultent.

X I.

La Lune change la surface de la Terre de Sphérique en Ellipsoïdique, & l'Axe de l'Ellipsoïde passe par la Lune. Cet Axe étant différent de l'Axe de Rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'Axe de l'Ellipsoïde; & s'il n'y avoit pas quelques causes secondes, lesdits changemens consisteroient simplement en ce que chaque goute montât & descendît alternativement & directement vers le centre.

Il est remarquable encore, que si les eaux se mouvoient librement, sans souffrir aucune resistance, ces oscillations augmenteroient continuellement

CHAP. X.

à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être cenſées avoir reçû quelque nouvelle impulſion : c'eſt une propriété qu'on peut démontrer par pluſieurs exemples ſemblables, tirés de la Méchanique & de l'Hydrodynamique. Mais le grand nombre de reſiſtances qui s'oppoſent aux mouvemens des eaux, ſont que celles-ci prennent bien vîte leur plus grand degré d'oſcillations. Ces derniers degrés d'oſcillations peuvent cependant être cenſés proportionnels aux forces que la Lune exerce ſous différentes circonſtances, pourvû que les changemens qui ſe font dans la Lune, ſe faſſent aſſez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui ſe font dans la Lune, par rapport à ſes declinaiſons, doivent produire dans les Marées à peu-près les Phénomenes que nous avons indiqués, & à beaucoup plus forte raiſon les changemens de déclinaiſons dans l'autre Luminaire. Mais les changemens qui ſont dûs à la rotation de la Terre ſont trop vîtes, pour que les Marées puiſſent s'y accommoder, car elles tâchent de conſerver leur mouvement reciproque comme un Pendule ſimple. Cette ſeule raiſon fait que ſi les deux Marées d'un même jour doivent être ſuivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, & celle-ci diminue l'autre, de ſorte qu'elles ſont beaucoup moins inégales qu'elles ne devroient être ſans cette raiſon. Tout ce qu'on peut donc dire à cet égard, eſt que nos Théorêmes ſont vrais, quant à leur nature ; mais non pas ſuivant les meſures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre réfléxion, réparer en quelque façon cet inconvenient : c'eſt en ſuppoſant que la plus grande Marée donne à la plus petite, qui eſt ſa compagne, autant qu'elle en perd, & les ſuppoſer l'une & l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, & de là on tirera la hauteur abſoluë de chacune, en prenant le milieu Arithmétique des deux Marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propoſitions, nous aurons les Théorêmes ſuivans, qui ne ſçauroient plus manquer d'être aſſez conformes aux Obſervations.

XII.

La hauteur de la Marée de deſſus eſt $= (S s +) C c)^{2}\, \delta$ (§. *Remarque I.*) & la hauteur de la Marée de deſſous $= (- S s + C c)^{2})\, \delta$ (§. *IX. Remarque II.*) en prenant donc la moitié de la ſomme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la Marée, qui convient aux déclinaiſons de la Lune, & latitudes du lieu données, $(S S s s + C C c c)\, \delta$. De cette Formule, que je crois fort juſte pour la ſuppoſition de l'entiere inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires ſuivans.

(I.) Les

(I.) Les déclinaisons Septentrionales & Méridionales de la Lune font le même effet sur les Marées, à l'égard de leur hauteur moyenne. CHAP. X.

Cette propriété est confirmée par les Observations. Mais il sera toujours vrai, que dans les Païs Septentrionaux la déclinaison Septentrionale de la Lune augmente un peu les Marées de dessus, & diminue celles de dessous; & que la déclinaison Méridionale fait le contraire: & c'est ce que l'expérience confirme aussi. On se souviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux Marées d'un même jour lunaire.

(II.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la Marée est $=(\frac{1}{2} SS+\frac{1}{2} CC)\delta=\frac{1}{2}\delta$, & par conséquent constamment la même.

C'est ici une proprieté bien singuliere, que quelles que soient les déclinaisons des Luminaires, les hauteurs moyennes des Marées n'en soient point changées, & cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos Païs on s'apperçoive de si peu de changement dans les Marées, à l'égard desdites déclinaisons.

(III.) Si la latitude du lieu est moins de 45°, la plus grande Marée moyenne se fait lorsque les déclinaisons des Luminaires sont nulles, & les Marées diminuent, si les déclinaisons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, & tout le monde convient que dans nos Païs (dont les Marées dépendent de la Mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude) les plus grandes Marées, tout le reste étant égal, se font environ les Equinoxes.

Si la latitude du lieu est plus grande de 45 degrés, c'est le contraire.

(IV.) Sous l'Equateur, la hauteur de la Marée est $=SS\delta$, & les variations qui dépendent des différentes déclinaisons de la Lune, y seront le plus sensibles: si la déclinaison est nulle, la hauteur de la Marée y est exprimée par δ; & si la déclinaison est supposée de 15 degrés (elle peut aller jusqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la Marée moyenne sera de $0{,}82\,\delta$. La différence des hauteurs est de $\frac{18}{100}\delta$.

(V.) Les variations sont moins grandes à cet égard sur les Côtes de la France, baignées par l'Océan, si les Marées y sont causées par la Mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la Marée, la déclinaison de la Lune étant nulle, y sera exprimée par $0{,}671\,\delta$, & si la Lune avoit 25 degrés de déclinaison, la hauteur moyenne y sera exprimée alors par $0{,}610\,\delta$. La plus grande Marée est donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, & la différence sera comme 61, qui fait l'onzième partie de la grande Marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaison de la Lune, sont toujours beaucoup plus petites, que celles

CHAP. X. les qui dépendent des différentes distances de la Lune, & qui peuvent aller jusqu'au tiers de la grande Marée. C'est pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'appercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaisons.

(VI.) Enfin nous remarquerons que cette Formule ($SSss + CCcc$) pour les hauteurs moyennes des Marées ne doit pas être poussée au-delà du terme des doubles Marées, qui est lorsque la latitude du lieu est égale à la déclinaison de la Lune: car, passé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une Marée par jour, dont la hauteur est exprimée par $4SsCc$, en vertu de la Remarque (ζ) de l'Art. IX. Il faudra aussi donner à ce terme une certaine latitude; car il y a apparence que ce n'est qu'à une certaine distance depuis ce terme vers l'Equateur, que les Marées commencent à être doubles, & à une autre distance vers le Pole, qu'elles commenceroient à être simples, si la Mer libre s'étendoit jusques-là; & que dans la Zone, qui est entre deux, les Marées seront mêlées de l'une & l'autre espéce avec beaucoup d'irrégularité.

XIII.

Nous venons d'exposer au long, & avec toute la précision possible, le rapport réel des hauteurs des Marées: nous n'avons qu'un mot à dire sur l'heure des hautes Marées. Comme c'est toujours au moment du passage supérieur de la Lune par le Méridien, que la Mer devroit être la plus haute; quelle que soit la déclinaison de la Lune, & la latitude du lieu: nous voyons que si les Marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux sortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute Mer, & si l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déja montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais si la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement sur l'heure de la haute Mer, & si elles n'en ont que très-peu, lorsque l'action de la Lune est combinée avec celle du Soleil, il est remarquable, que tant la déclinaison de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des basses Mers, sans cette cause seconde, que j'ai exposée au long dans le XI. Art. & qui fait que les deux Marées d'un même jour lunaire sont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raison ne sçauroit rendre les deux Marées tout-à-fait égales, & il sera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1) de la III. Partie du §. IX. que c'est tantôt le Jusan d'une Marée, qui surpasse en durée le flot de la Marée suivante, tantôt celui-ci qui surpasse l'autre. C'est une propriété qui n'est point échappée aux Observateurs des Marées; mais on n'avoit pas remar-

remarqué les circonstances de ces inégalités, sçavoir que dans les Païs Septentrionaux, la déclinaison Septentrionale de la Lune rend les Marées de dessus plus longues, & les Marées de dessous plus courtes, & que la déclinaison Méridionale fait le contraire. CHAP. X.

On voit donc qu'à cet égard le Jusan peut être différent du flot suivant, mais non pas du flot antécédent; & si l'on remarque quelque différence entre le flot & le Jusan d'une même Marée, ou cette différence sera constante pendant tout le cours de l'année, & alors il faut l'attribuer à la configuration des Côtes; ou elle n'aura point de loix, & ne sera que tout-à-fait accidentelle, & causée par des Vents ou Courants accidentels.

XIV.

Les différences que nous avons exposées dans ce Chapitre entre les deux Marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoitre ces deux Classes de Marées, & de distinguer l'une d'avec l'autre, ce qui seroit impossible sans cela sur les Côtes irrégulieres de l'Europe, où nous sçavons que les diverses heures du Port comprennent toute l'étendue d'une Marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La Classe des Marées de dessus comprendra celles qui sont plus grandes & plus longues, la déclinaison de la Lune étant Septentrionale, ou qui sont petites & plus courtes, cette déclinaison étant Méridionale, & l'autre Classe sera reciproque.

XV.

Nous avons examiné avec toute l'attention requise les effets des différentes déclinaisons de la Lune, qui sont la source de tant de propriétés très-remarquables des Marées. Il ne nous reste donc plus qu'à considérer encore les déclinaisons du Soleil. Cet examen nous sera très facile, après celui que nous venons de faire sur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, sa déclinaison étant nulle, C, comme nous avons fait toujours dans le Corps de ce Traité, & nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raisonnement que nous avons fait sur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à substituer dans toutes les Formules de ce Chapitre C à la place de δ, pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaisons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, & de cette maniere tout ce que nous avons dit sur la Lune, sera aussi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la Marée, entant qu'elle est produite sous l'Equateur par la seule action du Soleil au tems des Equinoxes, est appellée C, la hauteur de la Marée sera pour telle déclinaison du Soleil, CHAP. X. & telle latitude du lieu entre les deux Cercles Polaires qu'on voudra $= (TTss + EEcc)\epsilon$, entendant par T le Sinus de la distance du Soleil au Pole, & par E son Cosinus.

XVI.

Pour tirer tout l'avantage, qui est possible, de nos Méthodes, & leur donner la derniere perfection, nous tâcherons enfin de donner une Formule générale pour tous les cas possibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au IX Chapitre A la hauteur des Marées qui se font sous la Ligne dans les Syzygies (ou plutôt un jour & demi après) les distances des Luminaires étant moyennes, & leurs déclinaisons nulles; & que pour les mêmes circonstances nous avons nommé B la hauteur des Marées bâtardes: voyons à présent, comment il faut changer ces Quantités A & B, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & les latitudes des lieux sont d'une grandeur quelconque.

(I.) Quant à la quantité A, comme elle a été exprimée par la somme des forces entieres des deux Luminaires, c'est-à-dire, par $\delta + \epsilon$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de δ sa quantité corrigée $(SSss + CCcc)\delta$, & à la place de ϵ sa quantité corrigée $(TTss + EEcc)\epsilon$, & ensuite faire cette Analogie

$$\delta + \epsilon : A :: (SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\epsilon : \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\epsilon}{\delta + \epsilon} A.$$

Cette quatriéme proportionnelle marque la hauteur des Marées dans les Syzygies, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & la latitude du lieu sont quelconques, & si la déclinaison de l'un & l'autre Luminaire est nulle, cette quantité devient simplement $= ss\,A$. Si l'on nomme donc F la hauteur de la Marée dans les Syzygies, les déclinaisons des Luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut supposer $ss\,A = F$, & de cette maniere ladite quatriéme proportionelle devient

$$= \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\epsilon}{ss(\delta + \epsilon)} F.$$

C'est cette quantité qu'il faut substituer dans les équations du §. V. Chap. IX. pour A.

(II.) La quantité qu'il faudra substituer pour B dans ces equations, que nous venons de citer, se trouve à peu-près de la même façon; il n'y a qu'à prendre au lieu de la somme $\delta + \epsilon$ leur différence $\delta - \epsilon$, qui exprimoit la hauteur des Marées bâtardes. Si l'on appelle donc G la hauteur de la Marée dans les Quadratures, les déclinaisons des Luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à substituer pour

$$B = \frac{(SSss + CCcc)\delta - (TTss + EEcc)\epsilon}{ss(\delta - \epsilon)} \times G.$$

Nous

Nous substituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des Lettres S & s (qui marquent le rapport des distances du Soleil à la Terre sous diverses circonstances, & qui se trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre sens) ces autres Lettres D & d. CHAP. X.

Après ces réflexions préliminaires nous considérerons le Problême général des hauteurs des Marées sous telles circonstances, qui pourront concourir, & qui servira à déterminer ces hauteurs avec toute la précision possible. Je m'assure que tous ceux qui jetteront les yeux sur cette Solution, verront sans peine, combien j'ai été attentif à examiner & éplucher toutes les circonstances qui peuvent faire varier les Marées.

PROBLEME GENERAL.

XVII.

Trouver généralement la hauteur des Marées, en supposant connuës toutes les circonstances qui peuvent les faire varier.

SOLUTION.

Il faut connoître d'abord par Observations les quantités F & G, qui marquent les hauteurs moyennes des grandes Marées, & des Marées bâtardes, qui se font un jour & demi après les Syzygies & les Quadratures, les déclinaisons des Luminaires étant nulles, & leurs distances à la Terre étant moyennes. Dans la Théorie, deux Observations suffisent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos Méthodes observer un grand nombre de fois, comme on a déja fait presque dans tous les Ports de la France, la hauteur des grandes Marées, & celle des petites Marées, les Luminaires se trouvant à peu-près dans l'Equateur, & prendre des unes & des autres le milieu Arithmétique, que j'appelle F pour les grandes Marées, & G pour les petites Marées.

Il faut ensuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune & du Soleil. Nous avons donné plusieurs moyens pour cela dans le corps de cette Dissertation, & nous nous croyons bien fondés de le supposer comme 5 à 2. Quoi qu'il en soit, nous nommons ce rapport $\mathfrak{A} : \mathfrak{C}$.

Il faut après cela faire attention aux Phases de la Lune, ou à l'Arc compris entre les deux Luminaires dans le moment du passage de la Lune par le Méridien: cet Arc doit être diminué de 20 degrés (§. *VII. Chap. IX.*) Nous nommons le Sinus de l'Arc résultant m, & le Cosinus n, & le Sinus total 1.

CHAP. X.

Il faut auſſi connoitre les diſtances des Luminaires à la Terre : j'appelle d la diſtance moyenne du Soleil ; D ſa diſtance au tems de la Marée cherchée ; l la diſtance moyenne de la Lune ; L ſa diſtance au tems de la Marée cherchée.

Il faut ſçavoir encore les déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur : j'appelle S le Sinus de la diſtance de la Lune au Pole, C ſon Coſinus ; T le Sinus de la diſtance du Soleil au Pole ; E ſon Coſinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, & à la Remarque (a) du IX. Art. que nous avons faite pour l'eſtimation des latitudes. Nous appellons le Sinus de la diſtance au Pole s & le Coſinus c. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la Marée ſera

$$\frac{l^3 D^3 \delta + L^3 d^3 \beta}{L^3 D^3 (\delta + \beta)} \times \frac{nn}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\beta}{\delta + \beta} \times F.$$
$$+ \frac{l^3 D^3 \delta - L^3 d^3 \beta}{L^3 D^3 (\delta - \beta)} \times \frac{mm}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta - TTss + EEcc)\beta}{\delta - \beta} \times G.$$

XVIII.

Je n'ai mis ici cette grande Formule, que pour faire voir toute l'étendue & toute l'exactitude de notre Théorie & de nos Calculs, car les meſures & la Table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont aſſez de préciſion dans une Queſtion auſſi ſujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des Marées & de leurs changemens extraordinaires, qui ſe font dans la Zone glaciale, pour ne point groſſir trop ce Traité, & pour ne point l'embarraſſer de choſes fort abſtraites & aſſez difficiles. J'ai d'ailleurs déja expoſé en gros & même aſſez au long ce qui en eſt.

Quant enfin à l'heure des hautes Mers, j'ai fait voir qu'elle n'eſt point changée par les déclinaiſons des Luminaires, ni par la latitude du lieu ; nous avons donc déja donné toute la perfection poſſible dans les Chapitres précédens à cette autre grande Queſtion. Pour l'heure des baſſes Mers, qui dépendent beaucoup des déclinaiſons des Luminaires, & de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations & propriétés dans ce Chapitre.

CHA-

CHAPITRE XI.

Qui contient l'Explication & Solution de quelques Phénomenes & Questions, dont on n'a pas eu occasion de parler dans le corps de ce Traité, sur-tout à l'égard des Mers détachées, soit en partie, soit pour le tout, de l'Océan.

I.

SUivant quelle progression les eaux montent & descendent dans une même Marée, par rapport aux tems donnés.

Cette Question dépend de toutes les circonstances que nous avons considérées dans ce Traité ; mais les variations à l'égard du changement de ces circonstances, ne font pas varier beaucoup la loi, suivant laquelle les eaux montent & descendent ; je ne parlerai donc que du cas le plus simple, qui est lorsque la latitude du lieu, & les déclinaisons des Luminaires sont nulles, & lorsqu'en même tems les Luminaires sont dans leurs Syzygies, ou dans leurs Quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute Mer jusqu'à la basse Mer par un quart de Cercle, dont le rayon est égal à l'unité : je dis *que les descentes verticales des eaux depuis la haute Mer doivent être exprimées par les Quarrés des Sinus des Arcs, qui représentent les tems donnés.* Si l'on considére les Marées depuis le commencement du Flot, il faudra dire *que les élevations verticales des eaux, sont en raison quarrée des Sinus, qui répondent aux tems donnés* §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Proposition plus générale, pourront consulter le §. VIII. Chap. V. & si on y ajoute enfin les §. §. VI. & VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas possibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'exposer ; & cela d'autant moins que les deux Marées d'un même jour, qui devroient être souvent fort inégales, ne laissent pas de se composer à une égalité mutuelle par la raison exposée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc se tenir sans peine à la Regle que nous venons d'établir.

Il s'ensuit de cette Regle, que les baissemens ou élevations des eaux, qui se font dans de petits tems égaux, sont proportionnels aux produits des Sinus par les Cosinus répondans des Arcs horaires ; de sorte que si on partage tout le tems du Flux ou du Reflux également, les variations également éloignées en deçà & en delà de ce terme, sont égales : ces variations sont les plus sensibles au milieu du Flux ou du Reflux, & la va-

CHAP. XI. variation totale depuis le commencement du Flux ou du Reflux jusqu'au milieu, fait précisément la moitié de toute la variation d'une Marée. On voit enfin que les variations doivent être insensibles au commencement & à la fin de chaque Flux & Reflux.

Toutes ces Propositions sont confirmées entierement par les Observations qu'on a faites sur cette matiere, rapportées par M. *Cassini* dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il semble seulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la basse Mer, erreur presque inévitable dans cette sorte d'Observations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre Regle avec les Observations, que tout le tems du Flux & Reflux est de six heures lunaires, pendant que les Observations ont été prises sur des heures solaires.

II.

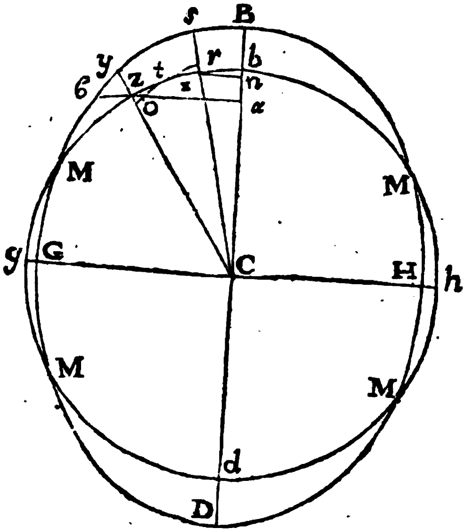
Pourquoi il n'y a point de Marées sensibles dans la Mer Caspienne, ni selon quelques-uns dans la Mer Noire, & pourquoi elles sont très-petites dans la Mer Méditerranée, & de quelle nature sont ces Marées.

On ne sçauroit bien répondre à ces questions, sans considérer auparavant le Problême principal, qui est de sçavoir les Marées, lorsque la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, & c'est un Problême pénible pour le Calcul, & assez délicat pour la Méthode. Pour le rendre d'abord plus simple, nous supposerons les Luminaires en conjonction & dans le plan de l'Equateur, & que c'est aussi sous l'Equateur, que l'on cherche les Marées.

Ressouvenons-nous que sans l'action des Luminaires, l'Equateur seroit parfaitement circulaire, comme $bgdh$, & que les Luminaires se trouvant dans l'Axe DB, cette Figure est changée en l'Ellipse $BGDH$, lorsque toute la Terre est inondée, & que les eaux peuvent couler de tous côtés. Nous avons démontré aussi au III. §. Chap. V. que dans cette supposition, la petite hauteur yz (dont les variations par rapport à ses différentes situations expriment les variations des Marées au point z) est $= \frac{3ss - bb}{3bb} \times c$, dans laquelle Formule on suppose $C\alpha = s$; $Cb = b$, & la différence entre la plus grande CB & la plus petite $CG = c$.

Supposons à présent que la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, sçavoir celle de zx, & qu'on tire par le centre C & l'extrémité x la droite Cs. Cela posé on voit bien que la surface de la Mer ne peut pas être en ys, comme elle feroit, si toute la terre étoit inondée; car l'espace yCs est plus grand que l'espace zCx, & il faut que cet

cet espace soit constamment le même; puisque la quantité d'eau dans une Mer doit être supposée la même pendant les revolutions de la Terre : mais la surface de l'eau prendra la courbure *o r*, & voici quelle sera la nature de cette courbure *o r*; il faut premierement, que l'espace *o C r* soit constamment le même que l'espace *z C x*, & en second lieu, que la courbe *o r* soit semblable à la courbe *y s*, ou plûtôt la même, puisque toutes les petites lignes, telles que *s x*, sont incomparablement plus petites que le rayon de la Terre; & ainsi la petite perpendiculaire *s r* sera égale à la petite perpendiculaire *y o*, de même que toutes les perpendiculaires comprises entre les termes *s* & *y*.



On voit donc déja que ce ne sont plus les *s x* & *y z*, dont les variations marquent les variations des Marées pour les points *x* & *z*, & que ces variations sont exprimées ici par celles des petites lignes *r x* & *o z*. De là on peut conclure par la seule inspection de la Figure, que les Marées doivent être d'autant plus petites, que la Mer est moins étendue en longitude; que ces Marées ne peuvent être que tout-à-fait insensibles dans la Mer Caspienne & dans la Mer Noire, & fort petites dans la Mer Méditerranée, dont la communication avec l'Ocean est presque entiérement coupée au Détroit de Gibraltar. On en peut même tirer des propriétés très singulieres de cette sorte de Marées. 1°. Que la plus haute Mer ne se fait pas ici au moment du passage des deux Luminaires par le Méridien, comme dans l'Océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, si la Mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les Marées sont les plus grandes aux extrémités Orientales & Occidentales *z* & *x*, & qu'elles sont incomparablement plus petites au milieu *t*. 3°. Que la haute Mer dans l'une des extrémités se fait au même moment que la basse Mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des Marées dans ces Mers: le Calcul en fera connoître le détail.

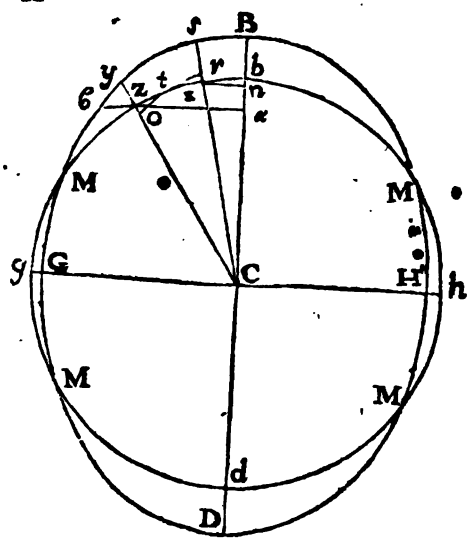
Pour ne point ennuyer le Lecteur par une trop longue suite de raisonnemens purement Géometriques, & dans plusieurs circonstances assez compliquées & chargées de Calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $Bb + Gg = 6$, qui marque la variation pour la Mer libre de tous côtés;

CHAP. X.

côtés : soit l'Arc zx, qui marque l'étendue de la Mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le Sinus total $= 1$; qu'on tire xn perpendiculaire à CB, & soit l'espace $z\alpha nxz = S$. Cela posé, on trouvera d'abord $yzxs = \frac{2}{3} A\mathcal{C}$. Cet espace devant être égal à l'espace $yors$, qui est égal à la petite sr multiplié par A, on en tire $sr = \frac{2}{3}\mathcal{C} - \frac{S}{A}\mathcal{C}$.

Si on suppose aprés cela $Cn = n$ & $C\alpha = s$, on en aura $sx = nn\mathcal{C} - \frac{1}{3}\mathcal{C}$, & par conséquent $rx = nn\mathcal{C} - \mathcal{C} + \frac{S}{A}\mathcal{C}$, & ce sont les différentes valeurs de rx, en considérant n & S comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la Mer au point x, qui est à l'extrémité occidentale de la Mer.



De cette valeur rx on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des Marées, quelque étendue qu'on suppose à la Mer, & tout ce que nous avons trouvé pour le point x, peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'Arc zx qu'on voudra; mais on remarquera surtout une propriété générale, qui est que l'Arc horaire compris entre la haute & la basse Mer, c'est-à-dire l'Arc compris entre la plus grande & la plus petite rx, est toûjours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut supposer la différentielle $rx = 0$, & faire $-dS = \frac{nn - ss}{\sqrt{1-nn}}dn$, à cause de la valeur constante de A, d'où l'on tirera cette équation $2An\sqrt{1-nn} + ss = 0$, qui marque déja la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne ensuite la hauteur de la Marée, exprimée par la différence de la plus grande & de la plus petite valeur de $rx = \left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right)\mathcal{C}$, & on remarquera que dans toutes ces Formules, s est donnée en n & en constantes, à cause de l'Arc A donné.

Nous appliquerons ces équations générales à deux sortes de cas particuliers ;

ticuliers ; premierement, lorsque A est de 90 degrés ; & en second lieu, lorsque cet Arc est fort petit. CHAP. XI.

I. Si A est de 90 degrés, on aura $s = \sqrt{1 - nn}$, & le lieu de la haute ou de la basse Mer à l'égard du point fixe B sera déterminé par cette Equation

$$-2An\sqrt{1-nn} + 2nn - 1 = 0, \text{ qui donne}$$

$$Cn, \text{ ou } n = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)} = 0{,}9602,$$

qui marque que l'Arc $x\,b$ est d'environ 16 degrés 13. minut. & que la hauteur de la Marée sera de 0,844 C. Nous voyons donc que si la Mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute Mer se feroit dans les Syzygies 1 heure 5. minutes plus tard que si toute la Terre étoit inondée, & que la hauteur de la Marée feroit de 156 milliémes parties plus petite.

II. Supposons à présent que l'étendue de la Mer en longitude soit très-petite, c'est-à-dire, que A exprime un Arc circulaire fort petit, & soit la corde de cet Arc $= B$: la Géométrie commune donne

$$s = n - \tfrac{1}{2}nBB + \tfrac{1}{2}\sqrt{4BB - 4nnBB + nnB^4 - B^4}.$$ Et B étant supposée fort petite, on changera la quantité radicale en suite, & l'on négligera les quantités affectées de B^3 (le Calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de $B\,B$) & de cette maniere on trouvera

$$s = n - B\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nBB.$$

On remarquera après cela, que la différence entre l'Arc A & sa corde B, convertie en suite commence par le terme $\frac{1}{4}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre dessein, on mettra A à la place de B, & on aura

$$s = n - A\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nAA.$$

En substituant dans l'équation exposée ci-dessus

$$2An\sqrt{1-nn} - nn + ss = 0$$

la valeur trouvée pour s, & négligeant toujours les termes affectés de A^3 & de A^4, nous aurons simplement $n = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

L'Arc $x\,b$ est donc pour ce dernier cas de 45 degrés, & la haute Mer, si elle étoit sensible, ne se feroit par conséquent que trois heures lunaires après le passage de la Lune par le Méridien. La hauteur de la Marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-dessus, par $\left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right) \times C$, il faudra substituer dans cette expression les valeurs trouvées pour n & s ; ce que faisant avec les mê-

CHAP. XI. mes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de s, on trouvera à la fin simplement la hauteur de la Marée $= A\,C$.

Cette expression fait voir que dans les petites Mers, les hauteurs des Marées sont proportionelles aux étendues que ces Mers ont en longitude, & les Marées se trouveront par cette Analogie. Comme le Sinus total est à l'Arc longitudinal, que la Mer renferme, ainsi la hauteur de Marée dans la Mer qui est supposée inonder toute la Terre, exprimée par C, sera à la hauteur de la Marée en question.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des Marées dans la Mer Caspienne. Supposons pour cet effet, que dans les conjonctions & oppositions des Luminaires, la hauteur des Marées grandissimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les Marées ne sçauroient manquer d'atteindre presque toute la hauteur, qu'elles auroient, si toute la Terre étoit inondée) est sous l'Equateur de 8 pieds: c'est la hauteur que les Relations de voyages m'ont fait adopter pour la Mer libre. & que je crois qu'on remarquera sur les Côtes escarpées des petites Isles situées près de l'Equateur dans ladite Mer du Sud: Cela étant, j'ai démontré dans la Proposition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes Marées ne seront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je suppose le milieu de la Mer Caspienne. Si nous donnons après cela à cette Mer dix degrés d'étendue en longitude, cet Arc fait environ la sixiéme partie du Rayon, & la hauteur des grandissimes Marées devroit être par conséquent aux extrémités Orientale & Occidentale de la Mer Caspienne d'environ huit pouces: mais elles seront nulles au milieu de la Mer. Je suppose cette agitation de la Mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été sur les lieux, & qui sans doute n'ont pas fait un examen fort scrupuleux là-dessus, & qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des causes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élévation & baissement des eaux. J'espére que des Observations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer sur les Marées de la Mer Caspienne.

On doit faire le même raisonnement sur la Mer Noire, qui peut être considérée comme détachée de la Mer Méditerranée, à cause du peu de largeur du Détroit qui est entre deux. Il est à remarquer qu'on a observé dans cette Mer des Marées, quoique très-petites.

On voit aussi que les Marées dans la Mer Méditerrannée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'Océan, sur-tout si l'on fait attention que cette Mer n'est tout-à-fait ouverte que depuis l'Isle de Chypre jusqu'à celle de Sicile.

III.

Comment les Marées peuvent être beaucoup plus grandes ſur les Côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer libre de tous côtés.

Pour répondre à cette queſtion, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déja dit, que ſi les Luminaires reſtoient à un même lieu, & que le mouvement journalier de la Terre ſe fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, & les Marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a preſcrites dans cet Ouvrage, ſans que la configuration des Côtes ou autres cauſes ſemblables les pût déranger, pourvû que l'endroit en queſtion communiquât avec l'Océan: d'ailleurs les eaux ne feroient que monter & deſcendre verticalement, excepté aux Côtes, qui alternativement ſont baignées, & reſtent à ſec, & auſquelles les eaux auroient quelque mouvement horiſontal, quoi qu'infiniment lent, & la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, auſſi bien que dans les autres, de la direction de la pente des Côtes. Mais la vîteſſe du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'Océan doit faire quatre mouvemens & agitations reciproques, rend ces mouvemens fort ſenſibles. Comme outre cela la Mer n'inonde pas toute la Terre, & qu'il y a de grands Golfes, Canaux, &c. qui par l'élévation & baiſſement des eaux, ſont tantôt plus, tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux & les renvoyent alternativement vers des endroits qui s'empliront, pendant que les autres ſe vuideront, & de là doivent provenir des mouvemens horiſontaux, qu'on appelle communément Flux & Reflux. Ce ſont ces mouvemens horiſontaux, qui ſe faiſant vers des endroits plus ſerrés, peuvent produire les grandes Marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds; c'eſt auſſi cette raiſon qui rend les Marées plus grandes dans le Golfe de Veniſe, qu'elles ne ſont dans la Mer Méditerrannée. C'eſt ici qu'on peut faire un grand uſage de ce que divers Auteurs ont donné ſur le mouvement des eaux, & je m'aſſure que moyennant les connoiſſances qu'on a déja ſur cette matiére, on pourroit rendre exactement raiſon de tous les différens Phénomenes, qui s'obſervent ſur les Marées aux endroits différemment ſitués. Mais un tel examen demanderoit des volumes, & des années pour les faire.

IV.

Quelle eſt en gros la nature des Marées au Détroit de Gibraltar.

CHAP. XI.

Les Marées doivent sans doute être beaucoup plus compliquées ; & paroître plus irrégulieres au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux sortes de Marées, dont l'une vient de l'Océan, & l'autre de la Méditerranée ; & on voit facilement, que si les Marées consistoient simplement à élever & baisser les eaux, sans causer des Courans, il y auroit sur ces Côtes quatre Marées par jour, c'est-à-dire, que les eaux monteroient & descendroient quatre fois, parce que les Marées des deux Mers ne se font pas en même tems : mais comme il se forme des Courans reciproques, chaque Courant tâche à se conserver, & de là il se forme des lisieres, qui ont chacune des mouvemens différens : celles qui sont sur les Côtes de chaque côté, paroissent devoir être attribuées aux Marées de la Méditerranée, & deux autres qui les touchent, aux Marées de l'Océan : on remarque même au milieu une cinquiéme lisiere, dont le mouvement n'est pas si irrégulier que celui des quatre autres, & qui ne fait voir presque aucun rapport avec la Lune : il semble que ce Courant ne doit sa source, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux Mers.

Je dirai à cette occasion, qu'il peut arriver de même, que les Marées sont formées dans un certain Port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés & à divers tems : il semble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le Flot dure constamment plus long-tems que le Jusan, & qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cause peut encore produire plusieurs sortes de Phenomenes particuliers à de certains endroits.

V.

Pourquoi les petites Marées sont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes Marées.

Nous avons déja vû que les petites Marées qui suivent les Quadratures, doivent être fort susceptibles de plusieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute & basse Mer, que par rapport à la hauteur de la Marée.

Il me semble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites Marées, quoique tout-à-fait régulieres ; pouvant sous diverses circonstances croître jusqu'au double, pendant que les grandes Marées ne croissent que d'environ un quart. Pour rendre raison de cette Observation qu'on a faite, il faut se ressouvenir des circonstances essentielles & fondées dans la nature des Marées, qui peuvent les rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne différe point.

Nous avons vû que ce sont les diverses distances des Luminaires à la Terre,

Terre, & leurs différentes déclinaisons, qui peuvent encore changer les hauteurs des Marées, lorsque l'âge de la Lune, & la latitude du lieu sont les mêmes. Le calcul nous a enseigné aussi, que l'effet de la diversité des déclinaisons des Luminaires est beaucoup plus petit que celui de la diversité des distances: comme donc la diversité des distances est beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, & que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour estimer en gros les variations des petites Marées, & les variations des grandes Marées, simplement faire attention aux distances de la Lune: nous avons trouvé que la diversité des distances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous considérons comme constante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, & les hauteurs des petites Marées étant aussi proportionnelles aux différences des actions des deux Luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites Marées doivent être contenues dans les termes de 2 — 1, & 3 — 1, ou 1 & 2, pendant que les hauteurs des grandes Marées, qui sont proportionelles aux sommes des actions des Luminaires, seront renfermées dans les termes de 2 + 1 & 3 + 1, c'est-à-dire, de 3 & 4.

Lesdits termes sont confirmés par les Observations, comme par exemple, par celles qui sont exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1713. pag. 287. & 288. Nous voyons de cette raison, que les variations absoluës doivent être à peu-près les mêmes dans les petites Marées & dans les grandes Marées, & c'est ce que les Observations citées confirment aussi; & comme ces variations sont par conséquent plus sensibles dans les petites Marées que dans les grandes Marées, il faudra peut-être se servir plûtôt des premieres, que des autres, pour examiner par des Observations ce que les diverses circonstances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des Marées.

I V.

Pourquoi les Marées étant montées plus haut, & ayant inondé plus de terrain pendant le Flot, descendent en même tems davantage, & laissent plus de terrain à sec pendant le Jusan, & quelle proportion il y a entre les montées & descentes.

Nous voyons la premiere Question indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. pag. 94. La raison en est que les Marées font une espece de mouvement oscillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre, qui doit passer pour fixe, & au-dessus duquel l'eau doit être censée s'élever dans la haute Mer, & se baisser dans la basse Mer. On pourroit croire d'abord que les élévations & descentes de l'eau à l'é-

 gard

CHAP. XI.

gard du point fixe, font conftamment proportionnelles. & en ce cas notre Problême feroit réfolu dans toute fon étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable & bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'eft pas proprement la hauteur des Marées dans le fens que nous lui avons donné jufqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la Navigation pour l'entrée & fortie des Vaiffeaux dans les Ports ou les Rades: il s'y agit plutôt de connoitre la hauteur abfolue des eaux, lorfqu'elles font arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur; & pour cet effet, il faut fçavoir dans chaque Marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baiffement: jufqu'ici nous n'avons déterminé que la fomme de ces variations fous le nom de hauteur de la Marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe: il eft vrai qu'il eft en quelque façon arbitrairè, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la furface de la Mer, fi les Marées étoient nulles. Un tel point doit être confideré comme demeurant conftamment à la même hauteur; car les caufes qui peuvent le hauffer ou le baiffer, telles que font les Vents, les Courans inégaux, &c. ne font que paffageres & purement accidentelles. Il s'agit donc à préfent de fçavoir, combien les eaux montent au-deffus de ce point fixe dans la haute Mer, & combien elles defcendent au-deffous du même point dans la baffe Mer. Cette Queftion dépend de toutes les circonftances qui concourent pour former la hauteur abfolue des Marées, & que nous avons examinées au long avec tout le foin poffible. Ce feroit donc fe jetter de nouveau dans les mêmes difficultés, fi nous voulions traiter la préfente Queftion avec la même rigueur, & auffi fcrupuleufement, que nous avons fait l'autre; c'eft pourquoi nous ne confidérerons que les circonftances fondamentales & principales, qui font que la Terre eft toute inondée, que les Luminaires font dans le plan de l'Equateur, & que la latitude du lieu eft nulle, faifant abftraction de toutes les caufes fecondes: ceux qui voudront enfuite une Solution plus exacte, n'auront qu'à confulter les Chapitres VIII. & IX. pour y arriver.

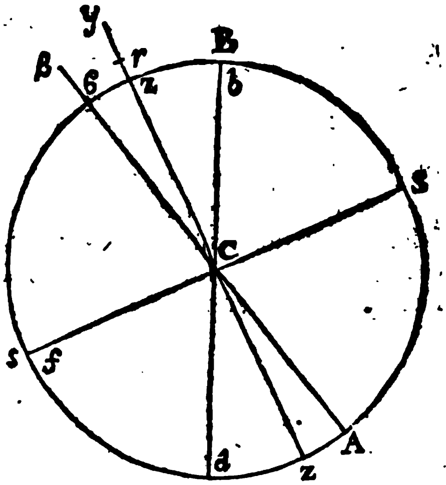
Soit donc encore (comme nous avons fuppofé au Chap. V., $b\varsigma z\delta b$ l'Equateur, & que b marque le lieu du Soleil, ς celui de la Lune, & z le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par yz; fi l'on prend un Arc de 40 degrés zs, le point s marquera l'endroit du plus grand baiffement des eaux, exprimé par sx: nous avons démontré là-deffus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \varsigma + \frac{2bb - 3\varsigma\varsigma}{3bb} \times \delta.$$

dans laquelle équation b marque le Sinus total, σ le Sinus de l'Angle bCz;

δCz, déterminé au §. XI. Chap. V. ρ le Sinus de l'Angle βCz, exprimé au §. XIII. Chap. V. β la hauteur des Marées entant qu'elles seroient produites par la ſeule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant sx comme poſitive, de negative qu'elle eſt par rapport à yz, on a généralement CHAP. XI.

$$sx = \frac{bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{bb - 3\rho\rho}{3bb} \times \delta.$$



Or comme les points z & s, qui ſont de niveau, marquent le point fixe dans le ſens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités yz & sx marquent préciſément l'élévation des eaux au deſſus du point fixe, & leur baiſſement au-deſſous du même point, tels que nous nous ſommes propoſés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires ſuivans.

(a) La différence entre chaque élévation au-deſſus du point fixe, & la deſcente au-deſſous du même point, eſt toujours $= \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\delta$: d'où nous voyons déja que l'une croiſſant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer auſſi, qui eſt le Phénomene obſervé par M. *Caſſini*. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de Marée : je dis *environ*, parce que les quantités β & δ ſont variables, quoique leurs variations ſoient beaucoup plus petites que celles qui réſultent des différens âges de la Lune, & à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, eſt preſque conſtante.

(b) Dans les Syzygies (ou plûtôt un jour & demi après) les quantités ρ & σ doivent être ſuppoſées $= 0$, & ainſi on a $yz = \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\delta$, & $sx = \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\delta$, la montée eſt donc dans les grandes Marées toujours double de la deſcente. Cette propriété ſervira à déterminer commodément le point fixe dans chaque Port, & elle le donne de 5. pieds 3 pouces plus haut pour Breſt, qu'il n'a été choiſi par les Obſervateurs, ſi on la compare avec l'Obſervation, qui eſt au milieu de la page 94 des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.

(c) Dans les Quadratures (ou un jour & demi après) il faut faire $\rho = 0$, & $\sigma = b$, ce qui donne $yz = \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{3}\beta$, & $sx = \frac{1}{3}\delta - \frac{2}{3}\beta$: d'où l'on voit que la montée & deſcente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raiſon variable dans les petites Marées, qui dépend du rap-

CHAP. XI.

rapport qui se trouve alors entre la force lunaire δ, & la force solaire ζ. Nous avons supposé dans cet Ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, & ce rapport posé, il faut dire que dans les petites Marées, l'élévation des eaux au-dessus de notre point fixe, est 8 fois plus grande que leur baissement au-dessous du même point. Dans les Marées minimes nous avons supposé $\delta = 2\,\zeta$, & dans les plus grandes des petites Marées $\delta = 3\,\zeta$.

(*d*) Nous avons fait voir, que le point x n'est jamais éloigné beaucoup du point ζ, cela étant & faisant le Sinus de l'Angle $b\,c\,\zeta$ (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra supposer $\rho = 0$ & $r = m$, ce qui donne

$$yx = \tfrac{2}{3}\zeta + \tfrac{2}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\zeta;\ \&\ rx = \tfrac{1}{3}\zeta + \tfrac{1}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\zeta$$

Si l'on applique toutes ces Regles aux Observations faites en differens tems & lieux, on y trouvera un grand accord, si l'on choisit bien la juste proportion entre les quantités δ & ζ. Mais on remarquera dans cet examen, que les Vents & les Courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

CONCLUSION.

Je finirai ce discours par quelques refléxions sur notre Théorie. Elle suppose avant toutes choses une pesanteur vers les centres du Soleil & de la Lune, pareille à celle qui se fait vers le centre de la Terre, & que cette pesanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'est le seul principe qui nous soit absolument nécessaire, & il n'y a personne qui le conteste. La rondeur des Luminaires prouve suffisamment la pesanteur qui se fait vers le centre; & quelle raison pourroit-on avoir pour donner des limites à cette pesanteur? Aussi a-t-elle été reconnue depuis les siécles les plus reculés; mais on n'en a connu toute l'évidence & toutes les loix, que depuis la Philosophie immortelle de M. NEWTON. Les premieres conséquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des Marées, sont purement Géométriques. Nous pouvons donc être assurés de connoître la vraie cause des Marées, quoique nous en ignorions encore la cause premiere, qui est la cause générale & physique de la pesanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette premiere cause, il mériteroit d'autant plus la préférence, que son Systême renfermeroit nécessairement la vraie cause universelle de la pesanteur: cette conséquence sera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel Systême sur les Marées. Il en est de ceci, comme si l'on demandoit, par exemple, pourquoi la surface de l'eau dans un reservoir se met toujours horisontalement: on voit qu'on ne sçauroit en di-

re

re la premiere cause, sans qu'elle renferme la vraie Théorie sur la pesanteur & sur la fluidité, qui seules peuvent être la vraie cause du Phénomene en question. Cette seule refléxion m'a fait quitter quelques conjectures qui se présentoient à mon esprit sur la cause matérielle des Marées, quoi qu'elles me parussent d'ailleurs assez plausibles. Je n'ai fait au reste en employant ce principe, que ce que *Kepler* a déja fait. M. NEWTON est allé beaucoup plus loin sur cette matiere, après avoir démontré auparavant que la pesanteur vers chaque corps dans le Systême du monde diminue en raison quarrée reciproque des distances: d'où il a tiré plusieurs nouvelles propriétés sur les Marées, lesquelles s'accordant avec les Observations, pourroient confirmer davantage son principe sur la diminution de la pesanteur, s'il avoit besoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, si je me souviens bien, sur les variations des Marées, qui dépendent des Phases de la Lune, des declinaisons des Luminaires & de la latitude des lieux, soit à l'égard des hauteurs des Marées, soit à l'égard des Marées. Il ne sert principalement qu'à déterminer au juste les variations qui dépendent des différentes distances des Luminaires à la Terre, & que les Observations n'ont pû déterminer avec assez de précision; il n'y en a cependant aucune qui lui soit contraire, & plusieurs Observations bien détaillées, sont tout-à-fait conformes aux résultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit sur la pesanteur terrestre, que j'ai considérée comme formée par l'attraction universelle de la matiere, n'a absolument aucun rapport avec aucune variation des Marées; ces Marées pourront subsister telles qu'elles sont, quelle que soit la nature de la pesanteur à cet égard: tout cet examen ne nous a servi que par rapport à la question, quelle devroit être la hauteur absolue de la hauteur des Marées, sans le concours d'une infinité de causes secondes, qui peuvent augmenter & diminuer ces hauteurs absolues, de sorte que quel qu'eût été le résultat de ces recherches, notre Théorie n'en eût pû souffrir aucune atteinte. J'espére avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de plusieurs circonstances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choisissant les hypotheses les plus vraisemblables, des nombres tels que la nature de la chose paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait sûrs de n'avoir rien admis d'essentiel dans toutes nos recherches, qui ne soit au-dessus de toute contestation. CHAP. XI.

Quant à l'application de nos principes, à l'usage que j'en ai fait, & au succès de mon travail, ce n'est pas à moi à faire cet examen, sur-tout ne pouvant le faire, sans entrer dans un certain parallele avec un aussi grand Homme qu'étoit M. NEWTON. Si j'ai eu quelques succès, je dois avouer à l'honneur de ce sçavant Philosophe, que c'est

CHAP. XI. lui qui nous a mis en état de raisonner solidement sur ces sortes de matieres; & si j'ose me flatter de quelque mérite, c'est celui d'avoir traité notre sujet avec une attention & une exactitude conforme aux grande vûës de L'ACADEMIE, & au respect qu'on doit à cet illustre Corps.

DE

DE CAUSA PHYSICA FLUXUS ET REFLUXUS MARIS.

A D. D. MAC-LAURIN *Mathematicarum Professore, è Societate Academiæ Edimburgensis.*

OPINIONUM COMMENTA DELET DIES, NATURÆ JUDICIA CONFIRMAT.

SECTIO I.

PHÆNOMENA.

PHILOSOPHI motum Maris triplicem olim agnoverunt *, diurnum, menstruum & annuum; motu diurno Mare bis singulis diebus intumescit defluitque, menstruo æstus in Syzygiis Luminarium augentur, in Quadraturis minuuntur, annuo denique æstus hyeme quàm æstate fiunt majores: verùm Phænomena hæc sunt paulò accuratiùs proponenda.

I. Motus Maris diurnus absolvitur horis circiter solaribus 24. minutisque primis 48. intervallo scilicet temporis quo Luna motu apparente à Meridiano loci cujusvis digressa ad eundem revertitur. Hinc altitudo Maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum situm respectu Meridiani loci dati; verùm hora solaris in quam incidit æstus singulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulsus ad Meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut, secundùm Observationes à celeb. D. *Cassini* allatas, ratio sit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppositio Solis, & æquatio à motu

I i 2

---

* Plin. Lib. 2. Cap. 99.

motu Lunæ desumpta adhibenda, ut tempus quo Mare ad maximam assurget altitudinem die Novilunii vel Plenilunii accuratiùs definiatur. In æstuariis autem diversi existunt æstus tempore, ut loquitur *Plinius*, non ratione discordes. Duo æstus qui singulis diebus producuntur, non sunt semper æquales; matutini enim majores sunt vespertinis tempore hyberno, minores tempore æstivo, præsertim in Syzygiis Luminarium. (*a*).

II. De motu Maris menstruo tria præcipuè sunt observanda. 1. Æstus fiunt maximi singulis mensibus paulò post Syzygias Solis & Lunæ, decrescunt in transitu Lunæ ad Quadraturas, & sunt paulò post minimi. Differentia tanta est, ut ascensus totius aquæ maximus sit ad minimum ejusdem mensis, secundùm quasdam Observationes, ut 9 ad 5, & in nonnullis casibus differentia observatur adhuc major. 2. Æstus sunt majores, cæteris paribus, quò minor est distantia Lunæ à Terra, idque in majori ratione quàm inversa duplicata distantiarum, ut ex variis Observationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. ascensus aquæ in Portu Bristonico, (*b*) referente eodem Cl. viro, 26°. Febr. fuit pedum 22 digitorum 5. & Martii 13°. pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in utroque casu ferè eadem; in priori distantia Lunæ partium 953, in posteriori partium 1032, quarum distantia mediocris est 1000. Est autem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22. pedes 5. digit. ad 19 pedes $1\frac{2}{5}$ digitos; ascensus autem aquæ in posteriori casu fuit tantùm 18. ped. cum 2. digitis. 3. Æstus sunt, cæteris paribus, majores, cùm Luna versatur in Circulo æquinoctiali, & minuuntur crescente Lunæ declinatione ab hoc Circulo.

III. Æstus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor est distantia Solis à Terra; adeòque majores hyeme cæteris paribus, quàm æstate. Differentia verò longè minor est quàm quæ ex diversis Lunæ distantiis oritur. Ex gr. distantiæ Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii 19. 1711. & Decemb. 28. 1712. ascensus aquæ priore die pedum 18 digit. 4, posteriori pedum 19. digit. 2; declinatio autem Lunæ fuit paulò minor in hac quàm in illa Observatione. (*c*).

Porrò in diversis locis æstus sunt diversi, pro varia locorum latitudine, eorumque situ respectu Oceani unde propagantur, pro ipsius Oceani amplitudine, & littorum fretorumque indole, aliisque variis de causis.

SECTIO II.

Principia.

Phænomenis æstus Maris insignioribus breviter recensitis, progredimur ad

(*a*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.
(*b*) *Ibid.* (*c*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.

ad Principia, unde horum ratio est reddenda. Liceat tamen præfari nobilissimam quidem, sed simul difficillimam esse hanc Philosophiæ partem, quæ Phænomenorum causas investigat & explicat. Ea est Naturæ subtilitas, ut non sit mirum causas primarias, solertiam Philosophorum plerumque effugere. Qui omnium Phænomenorum rationes, exponere, integramque causarum seriem nobis exhibere in se susceperunt, illi certè magnis suis ausis hucusque exciderunt. Philosophiam quidem perfectissimam viri clarissimi sibi proposuerunt exstruendam, qualem tamen humanæ sorti competere fas est dubitare. Præstat igitur tantorum virorum successu minùs felici edoctos, ipsius naturæ vestigia cautè & lentè sequi. Quòd si Phænomena ad generalia quædam Principia reducere possimus, horumque vires calculo subjicere, hisce gradibus aliquam veræ Philosophiæ partem assequemur; quæ quidem manca seu imperfecta erit, si ipsorum Principiorum causæ lateant; tanta tamen inest rerum naturæ venustas, ut ea pars longè præstet subtilissimis virorum acutissimorum commentis.

Motus Maris cuivis vel leviter perpendenti manifestum est Luminarium, Lunæ præsertim, motibus affines esse & analogos. Eadem est periodus motûs Maris diurni ac Lunæ ad Meridianum loci, eadem motûs menstrui ac Lunæ ad Solem; utriusque Luminaris vis in motu Maris generando hinc elucet, quòd æstus sint majores quò minores utriusque distantiæ à Terra; adeò ut nullus sit dubitandi locus, motum Maris esse aliquâ ratione ad motum Lunæ & Solis compositum. Quales autem dicemus illas esse vires quæ à Luna & Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis singulis diebus tollunt & deprimunt; quæ in Syzygiis Luminarium conspirant, Quadraturis pugnant; in minoribus utriusque distantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores sunt; & nonnunquam majorem motum cient cùm Sol & Luna infra Horizontem deprimuntur, quàm cùm in Meridiano superiori ambo dominentur. Fuerunt Viri celeberrimi qui æstum Maris pressione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm causam & mensuram hujus pressionis non ostenderunt, nec quo pacto motus Maris varii hinc oriri possint satis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio posito) ad Calculum revocare docuerunt.

Sagacissimus *Keplerus* Mare versùs Lunam gravitare, æstumque Maris hinc cieri olim monuit. NEWTONUS, postquàm leges gravitatis detexisset, invenit æquilibrium Maris non tam turbari ipsius gravitate versùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ Maris tendunt ad Lunam & Solem pro diversis suis distantiis ab horum centris, primusque motum Maris ad certas Leges, & ad Calculum revocare docuit. Fatendum quidem est gravitatis causam ignotam esse vel saltem obscuram;

Corpora tamen non ſunt ideò minùs gravia. Sint qui afferant Corpora nullo impulſu aut vi externâ, ſed vi quâdam innatâ ſe mutuò appetere; verùm non æquum eſt horum ſomnia veritati afficere. Alii ſtatim confugiant ad immediatum ſupremi Auctoris imperium, aſt neque horum nimia feſtinatio probanda eſt; neque illorum faſtidium qui tot naturæ teſtimoniis non attendunt quoniam cauſa gravitatis eſt obſcura. Vis gravitatis eſt nobis adeò familiaris, ejuſque menſura adeò pro comperto habetur, ut hâc ad alias vires æſtimandas ferè ſemper utamur; quam in Cœlis, non minùs quàm in Terris dominari, & ſecundùm certam legem augeri & minui demonſtravit vir eximius tanta cum evidentia ut majorem fruſtra deſideres in ardua & difficili hâc Philoſophiæ parte, quæ de rerum cauſis agit.

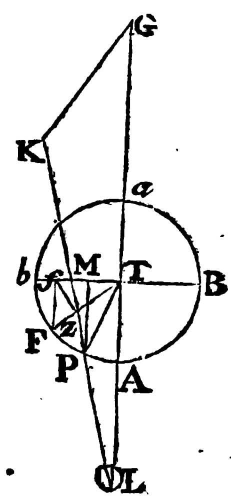
Newtonus argumento ſingulari oſtendit, Lunam urgeri verſùs centrum Terræ vi quæ (habitâ ratione diſtantiarum) cum gravitate Corporum terreſtrium planè congruit; quali Terram verſùs Lunam pariter urgeri æquo jure cenſendum eſt. Cùm Corpus aliquod verſùs aliud pellitur, inde quidem haud ſequitur hoc verſùs illud ſimul urgeri. Verùm quid de gravitate Corporum cœleſtium ſentiendum ſit, ex iis quæ comperta ſunt de gravitate Corporum terreſtrium (aliiſque viribus ſimilibus) optimè dignoſcitur; cùm per hanc ad illam agnoſcendam ducamur, ſintque Phænomena omninò ſimilia. Mons gravitat in Terram, & ſi Terra non urgeret montem vi æquali & contrariâ, Terra à monte pulſa pergeret cum motu accelerato in infinitum. Porrò ſtatus cujuſvis ſyſtematis Corporum (i. e. motus centri gravitatis) neceſſariò turbatur ab omni actione cui non æqualis & contraria eſt aliqua reactio, ita ut vix quidquam perenne aut conſtans dici poſſit in ſyſtemate ſi hæc lex locum non habeat. Cùmque Terræ partes ita ſemper in ſe mutuò agant, ut motus centri gravitatis Terræ nullâtenus turbetur à mutuis Corporum aut agentium quorumcunque conflictibus, ſive intra ſive extra ſuperficiem ſitorum; eademque lex obtineat in viribus magneticis, electricis aliiſque, teſte experientiâ, jure concludit Newtonus Lunam non tantùm in Terram, ſed hanc quoque in illam gravitare, & utramque circa commune centrum gravitatis moveri, dum hoc centrum circa totius ſyſtematis centrum gravitatis (a) continuò revolvitur.

Gravitatem, cæteris paribus, proportionalem eſſe quantitati materiæ ſolidæ Corporis, accuratiſſima docent experimenta; idemque, è calculo gravitatis Corporum cœleſtium comprobatur; quin gravitatem quoque ſequi

(a) Suſpicari licet aliquam obliquitatis Eclipticæ variationem, de quâ ſermo eſt apud Aſtronomos, ex motu Solis circa centrum ſyſtematis oriri: indicio erit hanc eſſe Phænomeni cauſam, ſi conſtiterit illam variationem analogiam ſervare cum motu Jovis Planetarum maximi.

ſequi rationem materiæ Corporis versùs quod dirigitur, ex principio memorato aliiſque argumentis colligitur. Similis eſt ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò denſiora ſunt Corpora quæ ſubintrant. Terræ partes versùs ſe mutuò gravitant, non versùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi & analogiæ naturæ ſit maximè conſentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratiſſimis experimentis quæ in Boreali Europæ parte nuper inſtituerunt viri clariſſimi ex Academiâ Regiâ Pariſienſi. Cauſa gravitatis (quæcumque demum ſit) latè dominatur; cùmque ſit diverſa in diverſis diſtantiis, non eſt mirandum, ejus vim pendere quoque à magnitudine illius Corporis, versùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc Corpori centrali impropriè tribui; expedit quidem brevitatis gratiâ ſic loqui, id autem ſenſu vulgari, non Philoſophico eſt intelligendum.

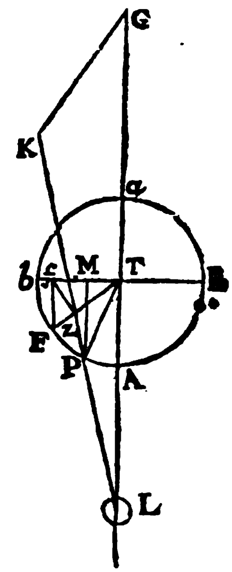
Hæc breviter tantùm hîc attingimus. NEWTONUS poſtquàm definiviſſet vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri Æquatoris & Axis Terræ (quam approximatione quâdam ſuâ inveſtigaverat) per regulam auream quærit breviter aſcenſum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ, quæ ſic prodit, parum à verâ differat, cùm tamen Problemata hæc ſint diverſi generis, quorum prius pendet à Quadraturâ circuli, poſterius autem à Quadraturâ Hyperbolæ ſeu Logarithmis, ut poſteà videbimus; ſitque dubitandi locus an à priori ad poſteriorem elevationem determinandam, tranſitus adeò brevis ſit omni ex parte legitimus, vel etiam an Methodus quâ figuram Terræ definiverat ſit ſatis accurata; cùmque vires ſubtiliſſimæ motum Maris producant, quæ nullos alios ſenſibiles edunt effectus, adeò ut leviſſima quæque in hac diſquiſitione alicujus momenti eſſe poſſint; propterea exiſtimavi me facturum operæ prætium, ſi aliam aperirem viam quâ calculus in hiſce Problematibus ex genuinis principiis accuratiſſimè inſtitui poterit.



Repetenda imprimis ſunt pauca ex NEWTONO, poſtea viam diverſam ſequemur. Sit L Luna, T centrum Terræ, $B b$ planum rectæ $L T$ perpendiculare, P particula quævis Terræ; ſitque $P M$ perpendicularis in planum $B b$. Repræſentet $L T$ gravitatem Terræ mediocrem vel particulæ in centro T poſitæ versùs Lunam, ſumatur $L K$ ad $L T$, ut eſt LT^2 ad LP^2, eritque recta $L K$ menſura gravitatis particulæ P in Lunam. Ducatur $K G$ rectæ $P T$ parallela, occurratque $L T$ productæ, ſi opus eſt, in G, & reſolvetur vis $L K$ in vires $K G$ & $L G$, quarum prior urget par-

ticulam

ticulam P versùs centrum Terræ, estque ferè æqualis ipsi PT; posterioris pars TL omnibus particulis communis, & sibi semper parallela, motum aquæ non turbat; altera verò pars TG est quàm proximè æqualis ipsi $3\,PM$: * Imprimis igitur quærendum est quænam debeat esse figura Terræ fluidæ cujus particulæ versùs se mutuò gravitant viribus in inversâ distantiarum ratione, duplicatâ decrescentibus, quæque simul agitantur duabus viribus extraneis, quarum altera versùs centrum T dirigitur, estque semper ut PT distantia particulæ à centro, altera agit in recta ipsi TL parallela, estque ad priorem ut $3\,PM$ ad PT. Ostendemus autem Sectione sequenti figuram hujus Fluidi esse accuratè Sphæroidem quæ gignitur revolutione Ellipseos circà Axem transversum, si Terra supponatur uniformiter densa; atque hinc calculum motûs Maris ex motibus cœlestibus deducere conabimur.



Observandum autem alias causas conspirare ad motus Maris producendos cum inæquali gravitate partium Terræ versùs Lunam & Solem. Motus Terræ diurnus circa Axem suum variis modis æstum Maris afficere videtur, præter illum à NEWTONO memoratum, quo æstus ad horam lunarem secundam aut tertiam retardatur. 1. Æstus fit paulò major ob vim centrifugam & figuram sphæroidicam, ex motu Terræ oriundam, cùm hæc vis paulò major evadat in partibus Maris altioribus quàm in depressioribus. 2. Cùm Maris æstus fertur vel à Meridie versùs Septentrionem, vel contrà à Septentrione versùs Meridiem, incidit in aquas, quæ diversâ velocitate circa Axem Terræ revolvuntur, atque hinc motus novos cieri necesse est, ut postea dicemus. Porrò secundùm Theoriam gravitatis, vis quâ particulæ Maris urgentur versùs Terram solidam, (quæ aquâ longè densior est) superat vim quâ versùs aquam urgentur. Vires illæ sunt quidem exiguæ; cùm autem vires quibus Luna & Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum & staticis nullos producant effectus sensibiles, tantos autem motus in aquis Oceani generent, suspicari licet vires tantillas ad aquæ motus augendos aliquâ ex parte conducere.

* Vis hæc paulò major est si particula P sit in parte Terræ Lunæ obversâ, minor si in parte Lunæ aversâ, unde meritò habetur æqualis ipsi 3 P M.

SECTIO

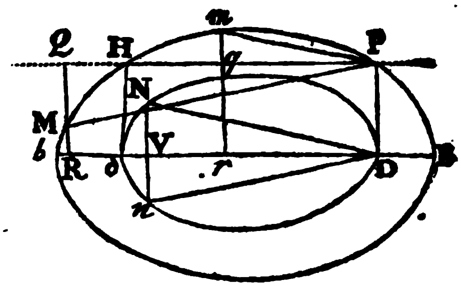
SECTIO III.

De Figurâ quam Terra fluida æqualiter densa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.

Expofitis Phœnomenis æftûs Maris & principiis generalibus unde celeberrimi Phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis fuprà explicatis, agitata affumeret; præmittènda autem funt quædam Lemmata quibus hæc difquifitio aliàs difficillima facilè perfici poterit.

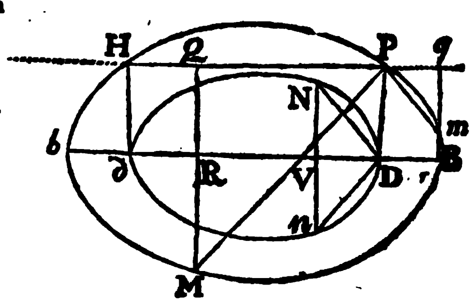
(†) LEMMA I.

(†) Hoc Lemma ad demonftrandum Corol. 4^{tum}. proponitur, quod Corollarium ad Propofitionem fequentem reducitur, quæ facillimè Analyticè demonftrari poteft.



THEOREMA.

A Puncto quovis Ellipfeos, ducantur ad Ellipfim tres lineæ PH, PM, Pm, prior quidem PH fit axi parallela, reliquæ PM, Pm faciant cum ipfâ æquales quofvis angulos MPH, mPH; à punctis P, H, M & m ducantur perpendiculares ad PH & ad axim PD, Hd, QMR, mqr & fuper Dd defcribatur Ellipfis fimilis priori, ducanturque à puncto D ad eam Ellipfim lineæ DN, Dn lineis Pm, PM parallelæ, denique ducatur Nn quæ fecet axim in V, dico quod $2\,DV = PQ + Pq = DR + Dr$, fi puncta Q & q cadant ab eâdem parte puncti P, vel quod $2\,DV = PQ - Pq = DR - Dr$ fi puncta Q & q cadant ad partes diverfas puncti P.



Primò, quoniam ex conftructione, lineæ DN, Dn æquales faciunt angulos cum axe Dd, facile deducitur lineam NVn effe axi perpendicularem, ideoque fi Radius fit ad Tangentem anguli QPM, ut 1 ad t, & DV dicatur z, erit $NV = tz$; & pariter fi PQ aut Pq vel eorum æquales DR aut Dr dicantur x, MQ vel mq dicentur tx.

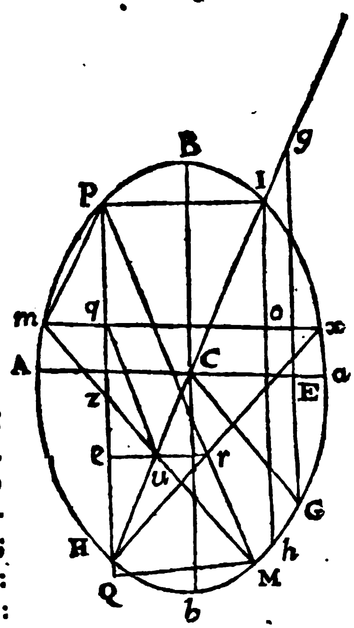
Axis major fit ad minorem in utraque Ellipfi ut a ad b dicaturque BD f, $Db = g$; $DP = h$, & $Dd = g - f = l$ erit per naturam Ellipfeos $a^2 : b^2 = fg : h^2$, & pariter erit

$a^2 : b^2 = z \times \overline{l - z} : t^2 z^2 = l - z : t^2 z$, hinc $a^2 : \frac{b^2}{t^2} = l - z : z$ & Componendo $\frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2}$

$a^2 : {}^2 + b^2 : b^2 = l : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} = DV$.

In primo autem cafu in quo Q & q funt ab eadem parte puncti P, erit $RM = h - tx$

 vel

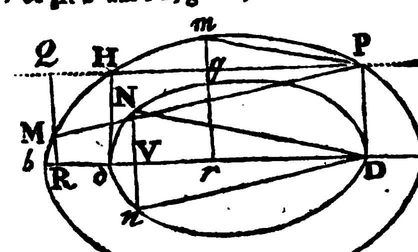


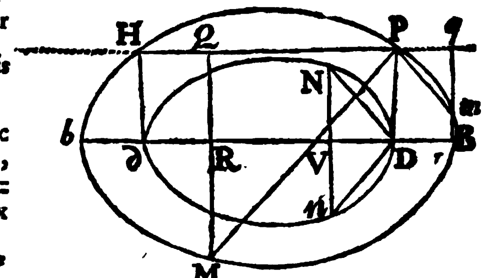
Sit $A\,b\,a\,b$ Ellipsis, C centrum, $H\,I$ diameter quævis, $M\,m$ ordinata ad diametrum $H\,I$ in puncto u, ex H & M ducantur rectæ $H\,P$ & $m\,x$ parallelæ, duabus quibusvis diametris conjugatis; & sibi mutuò occurrentes in q; jungantur $q\,u$ & $P\,M$, atque hæ rectæ erunt sibi mutuò parallelæ.

Occurrat recta $H\,P$, ordinatæ $M\,m$ in z, & rectæ $M\,Q$ (quæ parallela sit ipsi $m\,q$) in Q. Sint $C\,G$, $C\,A$ & $C\,B$ semidiametri respectivè parallelæ rectis $M\,m$, $m\,x$ & $H\,P$. Ducatur $G\,E$ parallela ipsi $C\,B$ & producatur donec occurrat semidiametro $C\,I$ in g. Ex naturâ Ellipseos Rectangulum $M\,z \times z\,m : H\,z \times z\,P :: C\,G^2 : C\,B^2$; & ob parallelas $C\,G$ & $M\,m$, erit $q\,z : z\,m :: G\,E : C\,G$. Unde $M\,z \times q\,z : H\,z \times z\,P ::$

---

vel $t\,x - h$ & $r\,m = h + t\,x$, & $\overline{B\,R}$ aut $\overline{B\,r}$, $\overline{f + x}$; & $\overline{R\,b}$ aut $r\,b$, $\overline{g - x}$; hinc ex naturâ Ellipseos erit $a^2 : b^2 = \overline{f + x} \times \overline{g - x} : \overline{h \mp t\,x}^2$ $= f\,g + g\,x - f\,x - x\,x : h^2 \mp 2\,h\,t\,x + t^2 x^2$ $= l\,x - x^2 : \mp 2\,h\,t\,x + t^2 x^2$ (demptis ex utroque termino respectivè terminis $f\,g : h^2$ qui sunt in eâdem ratione, & posito l loco $g - f$) $= l - x : \mp 2\,h\,t + t^2 x$, atque hinc habetur $a^2 t^2 x \mp 2\,a^2 h\,t = b^2 l - b^2 x$ & transpositione factâ reductisque terminis, fit $x = \dfrac{b^2 l \pm 2\,a^2 h\,t}{a^2 t^2 + b^2}$. Quare si sumatur summa duarum linearum D R, D r, quæ per singulos valores x exprimuntur, erit D R + D r $=$ P Q + P q $= \dfrac{2\,b^2 l}{a^2 t^2 + b^2}$ duplum valoris D V prius inventi.



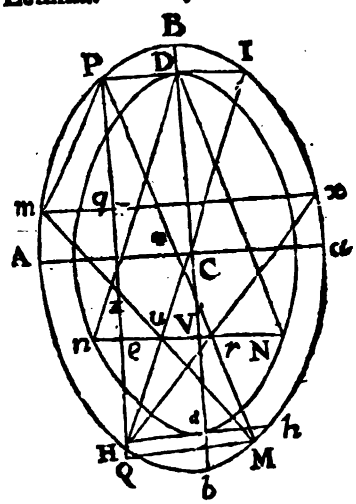


In altero verò casu in quo Q & q hinc inde à puncto P cadunt, erit R M $= t\,x - h$, & r m $= h - t\,x$, erit B R $= f + x$ & B r $= f - x$, R b $= g - x$ & r b $= g + x$. Unde ex naturâ Ellipseos erit
$a^2 : b^2 = f \pm x \times g \mp x : h^2 - 2\,h\,t\,x + t^2 x^2$
$= f\,g \pm g\,x \mp f\,x - x^2 : h^2 - 2\,h\,t\,x + t^2 x^2$
$= \pm l\,x - x^2 : 2\,h\,t\,x + t^2 x^2$ (demptis terminis $f\,g$; h^2 & adhibito l loco $g - f$)
$= \pm l - x : -2\,h\,t + t^2 x$, hincque obtinetur $a^2 t^2 x - 2\,h\,t\,a^2 = \pm b^2 l - b^2 x$ & transpositione factâ reductisque terminis fit $x = \dfrac{\pm b^2 l + 2\,h\,t\,a^2}{a^2 t^2 + b^2}$. Quare si sumatur differentia duorum D R, D r quæ per singulos valores x exprimuntur, erit D R $-$ D r $=$ P Q $-$ P q $= \dfrac{2\,b^2 l}{a^2 t^2 + b^2}$ duplum valoris D V prius inventi, ergo 2 D V $=$ P Q $\mp$ P q prout Q & q sunt ab eâdem vel à diversâ parte puncti P. Q. E. D.

$CG \times GE : CB^2$. Verùm $Hz \times zP : zu \times zP :: Hz : xu :: Gg : CG$. Quare ex æquo $Mz \times zq : zu \times zP :: Gg \times GE : CB^2$. Est autem Rectangulum sub Gg & GE æquale quadrato ex semidiametro CB per notam proprietatem ellipseos, cùm CI sit conjugata semidiametro CG, & CB ipsi CA. Proinde $Mz \times zq = zu \times zP$, & $zq : zu :: zP : zM$, adeóque qu parallela recta PM. q. e. d.

COR. 1. Recta PQ dividitur harmonicè in q & z vel $PQ : Pq :: Qz : qz$. Quippe ducatur ue parallela ipsi mx, occurratque rectæ HP in e, tum erit $Pz : qz :: PM : qu$ (ob parallelas PM, qu) $:: PQ : qe$. Unde $Pq : qz :: Pe : qe :: qe : ez :: Pe + qe : qe + ez ::$ (quoniam Qe, eq sunt æquales) $PQ : Qz$.

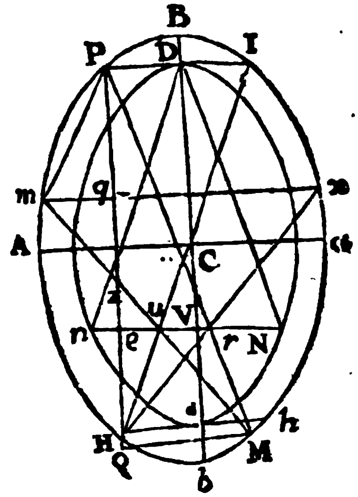
COR. 2. Occurrat recta mx Ellipsi in x, jungatur Hx quæ occurrat rectæ PM in r, juncta ur erit parallela mx. Quippe sit Ih parallela rectæ HP & occurrat ipsi mx in o; tum ox erit æqualis rectæ qm & $Io : ox :: Pq : qm :: PQ : QM$; adeòque Ix erit parallela ipsi PM. Verùm cùm IH sit diameter Ellipseos & ad x punctum in Ellipsi situm ductæ sint rectæ Ix, Hx ab extremitatibus diametri IH, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ Ellipseos. Quare cùm ex punctis H & M eductæ sint duæ rectæ Hx & PM respectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ sibi mutuò occurrunt in r, juncta ur erit parallela rectæ xm per hoc Lemma.



COR. 3. Sit recta HP nunc parallela Axi Ellipseos, eritque Angulus HPM æqualis Angulo HPm, quoniam $QM : qm :: Qz : qz :: PQ : Pq$ per Cor. 1. Ducantur porrò Hh & PI parallelæ alteri Axi Aa & occurrant Axi Bb in D & d; super Axem Dd describatur Ellipsis similis Ellipsi $ABab$ & similiter posita cui occurrat recta ur producta in N & n; occurrat ur Axi Dd in V, eritque VN vel Vn æqualis rectæ er, & si jungantur Dn, DN, erunt hæ rectæ respectivè parallelæ rectis PM, Pm. Nam $Pe : er :: Pq : qm$ & $He : er :: Hq : qx$, unde $He \times Pe : er^2 :: Hq \times qP : mq \times qx :: CB^2 : CA^2$. Sed Rectangulum $DV \times Vd : VN^2 :: CB^2 : CA^2$; $dV = He$, $DV = Pe$, adeóque $DV \times Vd = He \times Pe$, unde $VN^2 = er^2$, & $VN = er$, PM parallela rectæ DN & Pm rectæ Dn.

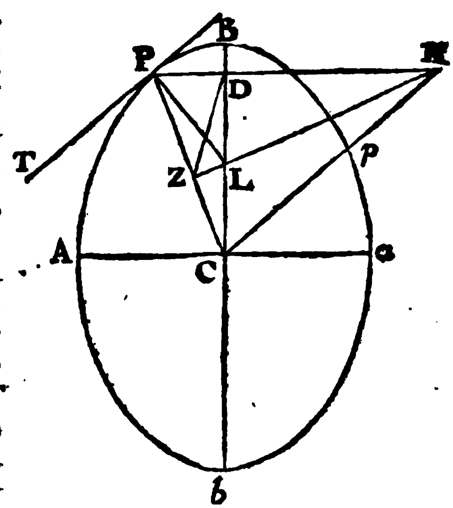
COR. 4. Hinc sequitur conversè quod si Nn sit ordinata ab interiori Ellipsi ad Axem Dd & DP perpendicularis Axi Dd occurrat Ellipsi exteriori in P; jungantur DN & Dn, hisque parallelæ PM, Pm

 occur-



occurrant Ellipsi exteriori in M & m; ducatur PH parallela Axi Dd, in quam sint perpendiculares MQ & mq, tum $PQ + Pq$ (vel $2Pe$) erit æqualis $2DV$ punctis Q & q cadentibus ad easdem partes puncti P, & $PQ - Pq = 2DV$ cum Q & q sunt ad contrarias partes puncti P.

Lemma II.



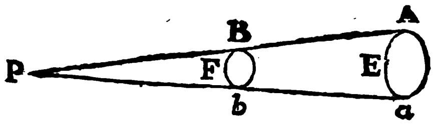
Recta PL perpendicularis Ellipsi $ABab$ in P, occurrat Axi Bb in L, & ex puncto L sit LZ perpendicularis in semidiametrum CP, eritque Rectangulum CPZ contentum sub semidiametro CP & interceptâ PZ æquale quadrato ex semiaxi CA.

Sit Cp semidiameter conjugata ipsi CP, ducatur PD perpendicularis in Axem Bb & producatur donec occurrat semidiametro Cp in K, jungatur KZ, sitque PT tangens Ellipseos in puncto P. Ob Angulos rectos LDP, LZP, LPT circulus transibit per quatuor puncta L, D, P, & Z, & continget rectam PT in P, adeóque Angulus PDZ æqualis erit Angulo CPT vel PCK. Proinde circulus transibit per quatuor puncta C, K, D & Z; Angulus CZK æqualis erit recto CDK, KZ transibit per punctum L & ex naturâ circuli $CP \times PZ = LP \times PK = CA^2$. q. e. d. (a).

Lem-

(a) Proprietates hîs in hoc & præcedenti Lemmate demonstratæ analogicè facilè ad hyperbolam transferuntur.

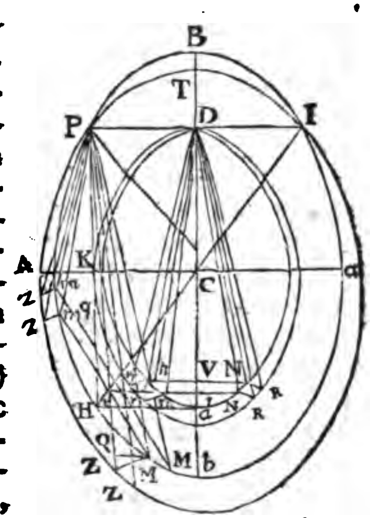
LEMMA III.



Ponamus particulas corporum versùs se mutuò gravitare viribus decrescentibus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum à se invicem, sintque *PAEa*, *PBFb* similes pyramides vel coni ex materiâ hujusmodi homogeneâ compositi, eritque gravitas particulæ *P* in solidum *PAEa* ad gravitatem ejusdem particulæ in solidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*, vel ut homologa quævis latera horum solidorum.

Gravitas enim particulæ *P* in superficiem quamvis *AEaA* puncto *P* concentricam est ut superficies hæc directè & quadratum radii *PA* inversè, adeóque est semper eadem in quâvis distantiâ *PA*. Quare gravitas particulæ *P* versùs totum solidum *PAEa* erit ad gravitatem ejusdem particulæ versùs totum solidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*.

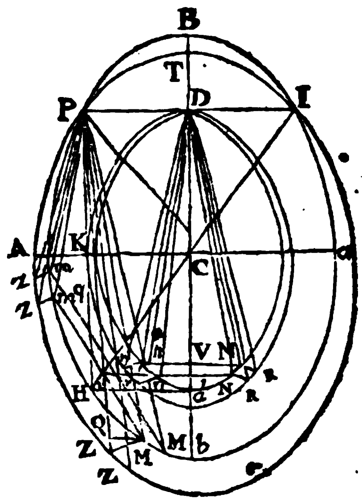
COR. 1. Hinc gravitates quibus particulæ similiter sitæ respectu solidorum similium & homogeneorum versùs hæc solida urgentur, sunt ut distantiæ particularum à punctis similiter sitis in ipsis solidis, vel ut latera quævis solidorum homologa. Quippe hæc solida resolvi possunt in similes conos vel pyramides, vel similia horum frusta, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.



COR. 2. Hinc etiam facilè sequitur (*) quòd si annulus ellipticus, figuris similibus *DBab*, *DndN* terminatus, circà Axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra solidum sic genitum sitæ, vel in interiori ejus superficie positæ, versùs hoc solidum evanescere; quoniam si recta quævis Ellipsibus hisce similibus & similiter positis occurrat, æqualia semper erunt rectæ segmenta extrema quæ ab Ellipsibus intercipiuntur (ut facilè ostenditur ex naturâ harum figurarum) adeóque vires æquales & oppositæ in hoc casu se mutuò destruent. Hinc verò sequitur quòd si *ABab* sit Sphærois genita motu Ellipseos circà alterutrum Axem, sintque *B* & *D* particulæ quævis in eodem semidiametro sitæ, gravitatem particulæ *B* versùs Sphæroidem fore ad gravitatem particulæ *D* ut distantia *CB* ad distantiam *CD*, per Corollarium præcedens.

(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

Lemma IV.



Sit *A B a b* Sphærois genita motu semiellipseos *A B a* circà Axem *A a*, *P* particula quævis in superficie solidi, sit *P K* Axis normalis in *K*; & *P D* Axi parallela occurrat plano *B b* (quod Axi supponitur normale) in *D*. Resolvatur vis quâ particula *P* gravitat versùs Sphæroidem in duas vires, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem, eritque prior æqualis vi quâ particula *K* in Axi sita tendit ad centrum solidi, posterior autem æqualis vi quâ particula *D* urgetur versùs idem centrum.

Producatur *P K* donec rursùs occurrat Ellipsi generatrici in *H*, ducatur *H d* parallela Axi *A a* quæ occurrat Axi *B b* in *d*, concipiamus solidum *D n d N* simile ipsi *B A b a* & similiter positum describi super Axem *D d*. Horum solidorum Sectiones ab eodem plano resectæ erunt semper Ellipses similes & similiter positæ, uti notum est & facilè ostenditur. Sint igitur *B A b a*, *D n d N* hujusmodi figuræ à plano *P A b I B P*, quod semper transire ponatur per datam rectam *P D I* resectæ ex similibus hisce solidis. Contineat planum *P z Z I T* cum plano priori Angulum quàmminimum & faciat Sectiones similes *P z Z I T*, *D r R D* & similiter positas in prædictorum solidorum superficiebus. Hisce positis, imprimis ostendemus vim quâ particula *P* urgetur versùs duo frusta quæ planis *P b I*, *P Z I* & planis *P B I*, *P T I* continentur, si reducatur ad directionem *P K*, æqualem fore vi quâ particula *D* urgetur versùs frustum planis *D n N D*, *D r R D* terminatum.

Sint enim *N n*, *N' n'* duæ ordinatæ ex interiori Ellipsi ad Axem *D d*; sint (*a*) *P M*, *P m*, *P M'* & *P m'* respectivè parallelæ rectis *D N*, *D n*, *D N'* & *D n'*; sint porrò plana *D N R*, *D N' R'*, *D n r*, *D n' r'*, *P M Z*, *P M' Z'*, *P m z*, *P m' z'* plano *P b I B* perpendicularia quæ alteri plano, *P z Z I T* occurrant in rectis *D R*, *D R'*, *D r*, *D r'*, *P Z*, *P Z'*, *P z*, *P z'*, respectivè. His positis, quoniam Anguli *N D N'* & *M P M'*, *n D n'* & *m P m'*,

(*a*) In hac Figurâ describendâ rectas *N R*, *N' R'*, &c. non duximus secundùm regulas perspectivæ, sed eâ ratione quâ facillimè dignosci possint.

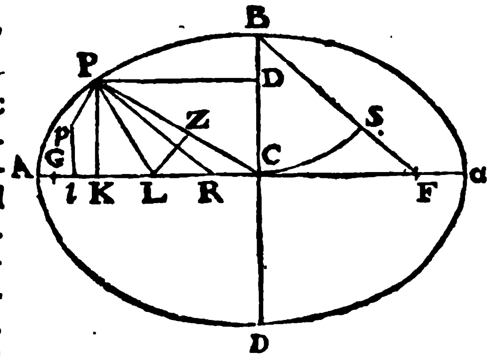
$m P m'$, ponuntur semper æquales; & rectæ PM & DN, Pm & Dn, æqualiter semper inclinantur ad PI communem planorum Sectionem; si Angulus NDN' & inclinatio planorum $PbTB$, $BZIT$ ad se invicem continuò minui supponantur donec evanescant, erunt gravitates particulæ D, in Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$ & particulæ P in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ ultimo in ratione rectarum DN, Dn, PM & Pm respectivè per Lemma 3 Eædemque vires secundùm rectas Axi Aa, perpendiculares æstimatæ erunt ut rectæ DV, DV, PQ, Pq respectivè. Unde cùm $PQ \mp Pq = 2\,DV$ per Corol. 4. Lem. 1. sequitur vim quâ particula P urgetur versùs Axem Aa, gravitate suâ in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ æqualem esse vi, quâ particula D urgetur gravitate suâ versùs Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$. Quare si plana DNR, PMZ sibi mutuò semper parallela & plano $PbIB$ perpendicularia moveantur semper circà puncta D & P (rectis scilicet DN, PM procedentibus semper in plano $PbIB$, & rectis DR, Pz in plano $PZIT$) erunt vires quibus particula P urgetur versùs Axem ex gravitate suâ in frusta motu planorum PMZ, Pmz sic descripta, æquales semper viribus, quibus particula D urgetur versùs eundem Axem gravitate suâ in frusta motu planorum DNR, Dnr descripta; unde sequitur particulam P urgeri eâdem vi secundùm rectam PK, gravitate suâ in frusta planis PbI, PzI, & planis PBI, PTI contenta, quâ particula D tendit versùs frusta planis $DnND$, $DrRD$ terminata. Proinde cùm hæ vires secundùm rectas Axi totius solidi perpendiculares æstimatæ sint etiam æquales, & par sit ratio virium quibus particulæ P & D urgentur versùs frusta quævis alia similiter ex solidis resecta, sequitur particulam P æqualiter urgeri versùs Axem gravitate suâ in solidum exterius, & particulam D gravitate suâ in solidum simile interius, vel etiam in solidum exterius, cùm hæ vires sint eædem per Corol. 2. Lem. 3.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula P urgetur secundùm rectam Axi Parallelam, æqualem esse vi, quâ particula K in Axe sita urgetur versùs centrum solidi.

COR. 1. Particulæ igitur quævis Sphæroidis æqualiter ab Axe vel Æquatore solidi distantes æqualiter versùs Axem vel Æquatorem urgentur. Viresque quibus particulæ quævis urgentur versùs Axem sunt ut illarum distantiæ ab Axe, & vires quibus urgentur versùs planum Æquatoris, sunt ad se invicem, ut illarum distantiæ ab hoc plano.

COR.

Cor. 2: Repræsentet A vim quâ Sphærois urget particulam in Axis termino A sitam, B vim quâ idem solidum urget particulam B in circumferentiâ circuli medii inter A & a positam; sumatur KR ad KC, ut $\frac{A}{CA}$ est ad $\frac{B}{CB}$, jungatur PR, & particula P tendet versùs Sphæroidem in recta PR, vi quæ huic rectæ semper est proportionalis. Vis enim quâ particula D urgetur versùs centrum solidi, est ad B, ut CD ad CB, per Cor. 2. Lem. 3. Similiter vis quâ particula K urgetur versùs solidi centrum est ad A, ut CK ad CA. Quare per Lemma 4. vis quâ particula P urgetur secundùm rectam PK Axi normalem est ad vim, quâ urgetur secundùm rectam PD Axi parallelam, ut $\frac{PK \times B}{CB}$ ad $\frac{CK \times A}{CA}$; adeóque ut $PK \times KC$ ad $CK \times KR$. i. e. ut PL ad KR ex constructione. Quare particula P urgetur secundùm rectam PR, his viribus conjunctis, & vis composita est ad B, ut PR ad BC. Quo verò pacto vires A & B computari possint, postea ostendemus.



PROPOSITIO I.

Theorema Fundamentale.

Constet Sphærois $ABab$ materia fluida, cujus particulæ versùs se mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum decrescentibus; agantque simul duæ vires extraneæ in singulas Fluidi particulas, quarum altera tendat versùs centrum Sphæroidis, sitque semper proportionalis distantiis particularum ab hoc centro; altera agat secundùm rectas Axis solidi Parallelas, sitque semper proportionalis distantiis particularum à plano Bb Axi normali; & si semiaxes CA, CB Ellipseos generatricis sint inversæ proportionales viribus totis, quæ agunt in particulas æquales in extremis Axium punctis A & B sitas, erit totum Fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propositio nostra primaria clarissimè demonstretur, ostendemus imprimis vim compositam ex gravitate particulæ cujusvis P & duabus viribus extraneis, semper agere in rectâ PL, quæ est ad superficiem Sphæroidis semper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis PC à superficie ad centrum ductâ, ejusdem ubique esse ponderis. 3. Fluidum in canalibus

canalibus quibusvis à superficie ad datam quamvis particulam intra solidum ductis, eâdem semper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas A & B dicantur M & N, quæ ex hypothesi sunt in ratione Axium CB & CA. Resolvatur vis prior extranea quæ agit secundùm rectam PC in vires duas, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires semper ut rectæ PK & KC. Unde cùm vis quâ gravitas particulæ P urget eam secundùm rectam PK sit etiam ut PK, per Lemma superius, sequitur vim totam quâ particula P urgetur secundùm rectam PK, esse ad N, ut PK ad CB. Vires tres agunt in particulam P secundùm rectam PD Axi parallelam, particulæ scilicet gravitas & duæ vires extraneæ, quæ singulæ variantur in ratione rectæ PD vel KC; adeóque vis ex his tribus resultans erit ad M ut CK ad CA. Vis igitur quâ particula P urgetur secundùm rectam PK est ad vim quâ urgetur secundùm rectam PD ut $\frac{N \times PK}{CB}$ ad $\frac{M \times KC}{CA}$ sive (cùm $M:N::CB:CA$) ut $PK \times CA^2$ ad $CK \times CB^2$. i. e. (quoniam si PL Ellipsi generatrici perpendicularis occurrat Axi Aa in L, erit KC ad KL, ut CA^2 ad CB^2, ex notâ Ellipsis proprietate) ut $PK \times KC$ ad $KC \times KL$, adeóque ut PK ad KL. Unde vis composita particulam urget in rectâ PL, quæ ad superficiem Fluidi ponitur perpendicularis; estque semper ut recta hæc PL, cùm vires secundùm rectas PK sint semper ut PK.

2. Sit LZ normalis in semidiametrum CP, & vis quâ particula P urgetur versùs centrum, erit ut recta PZ per vulgaria Mechanicæ Principia, & pondus Fluidi in rectâ PC ut rectangulum $CP \times PZ$, quod semper est æquale quadrato ex semiaxi CB per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, estque Fluidum in æquilibrio in C.

3. Sit p particula quævis in solido ubicunque sita, Pp recta quævis à superficie ad particulam p ducta; sint PK, pl normales in Axem Aa, & vis quâ particula p urgetur pondere Fluidi in rectâ quâvis Pp secundùm hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur æqualis $\frac{N}{2CB} \times \overline{PP^2 - pl^2} - \frac{M}{2CA} \times \overline{Cl^2 - CK^2}$ = (cùm $M:N::CB:CA$) $\frac{M \times CA^2 \times PK^2 + M \times CK^2 \times CB^2 - M \times CA^2 \times pl^2}{2CB^2 \times CA} - \frac{M \times CB^2 \times Cl^2}{2CB^2 \times CA}$ = (cùm $PK^2 : CA^2 - CK^2 :: CB^2 : CA^2$, & si CG sit semiaxis Ellipseos per p ductæ similis Ellipsi $ABab$, & similiter sitæ, $pl^2 : CG^2 - Cl^2 :: CB^2 : CA^2$) $\frac{M \times CA - M \times CG}{2}$ adeòque cùm hæc quantitas à situ puncti P non pendeat, vis hæc est semper eadem, si detur locus particulæ p; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, Fluidum erit ubique in æquilibrio.

COR. I. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. A vis gravitatis in Sphæroidem in loco A, B vis gravitatis in eandem in loco B, V vis KG in mediocri suâ quantitate in superiore Sectione expositâ, quâ Luna vel Sol aquam Sphæroidis deprimit in distantiâ d, quæ ponitur mediocris inter CA & CB. Sit $CA = a$, $CB = b$, eritque vis N, quâ particula B versùs C urgetur, æqualis $B + \frac{bV}{d}$, & $M = A + \frac{aV}{d} - \frac{3aV}{d} = A - \frac{2aV}{d}$. Unde per hanc Propositionem si $a : b :: B + \frac{bV}{d} : A - \frac{2aV}{d}$, erit Fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis A, B & V in terminis a & b species figuræ innotescet. Est $Aa - Bb = \frac{2a^2V}{d} + \frac{b^2V}{d}$.

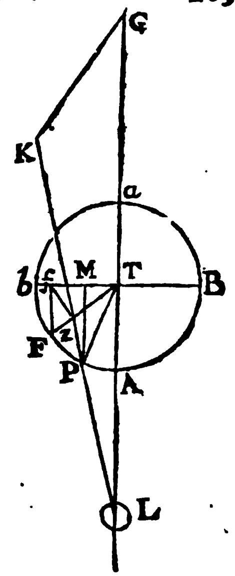
COR. 2. Cùm vis V (sive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur (sit exigua admodum respectu virium A & B, & differentia inter a & b admodum parva, ducatur $a = d + x$ & $b = d - x$, eritque $Bd - Bx + V \times \frac{\overline{d-x}^2}{d} = Ad + Ax - 2V \times \frac{\overline{d+x}^2}{d}$, & neglectis terminis ubi xx reperitur $Bd - Bx + Vd - 2Vx = Ad + Ax - 2Vd - 4Vx$, unde $Bd - Ad + 3Vd = Ax + Bx - 2Vx$; adeóque $x : d :: B - A + 3V . B + A - 2V$; & differentia altitudinis aquæ in A & B (seu $2x$) ad semidiametrum mediocrem d ut $2B - 2A + 6V$ ad $B + A - 2V$, vel quàm proximè ut $B - A + 3V$ ad gravitatem versùs Sphæroidem mediocrem.

COR. 3. In præcedentibus Corollariis supposuimus $d = \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB$; verùm si d denotet aliam quamvis distantiam ubi vis KG ponatur æqualis ipsi V, sitque $e = \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB$, erit $x : e :: B - A + \frac{3eV}{d} : B + A - \frac{2eV}{d}$.

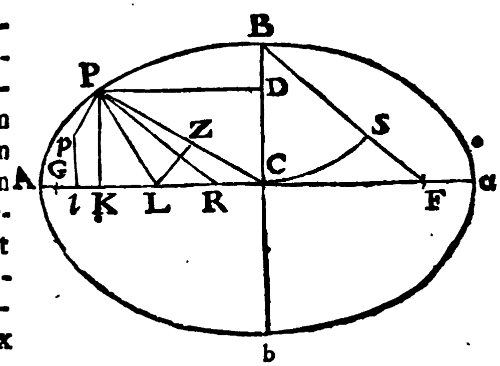
COR. 4. Per vim V in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, & figuram consideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret si hæ vires seorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta vel opposita, & simul agant in Terram. In hoc casu vires Luminarium conspirant ad aquam tollendam in A & a, eamque deprimendam in B & b, & easdem ubique servant leges. Unde erit etiam in hoc casu fluidum in æquilibrio, si vis tota quæ agit in loco A, sit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA; adeóque si V nunc designet summam virium, quibus Sol & Luna aquam deprimit in rectis Tb, TB ad mediocrem distantiam fluidum erit in æquilibrio, si $b : a :: A - \frac{2aV}{d} : B + \frac{bV}{d}$, vel x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B \pm A - 2V$ quàm proximè, ut priùs.

COR. 5. Sit nunc Luna in rectâ Aa, Sol in rectâ Bb; & quoniam

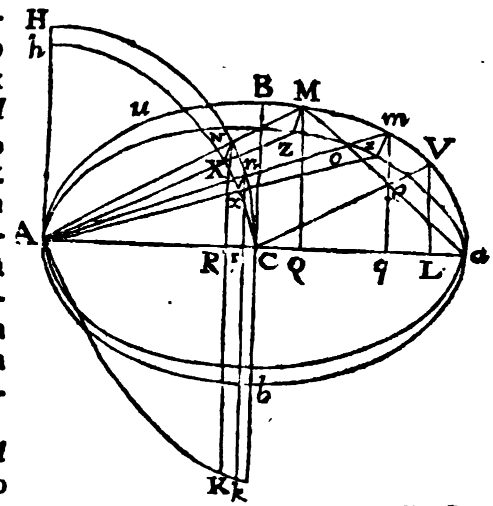
niam Lunæ vis potior eſt, Axis tranſverſus figuræ generatricis tranſeat per Lunam, conjugatus per Solem; & ſi vis tota quæ agit in loco A ſit ad vim totam quæ agit in loco B ut CB ad CA, erit Sphæroïs fluida in æquilibrio etiam in hoc caſu. Sit s vis quâ Sol deprimit aquam in rectis TA, Ta ad mediocrem à centro C diſtantiam, l vis quâ Luna aquam deprimit in rectis TB, Tb ad æqualem diſtantiam; eritque vis tota quæ agit in loco A æqualis $A - \frac{2al}{d} - \frac{as}{d}$, vis tota quæ agit in loco B æqualis $B + \frac{bl}{d} - \frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut in Corol. 2. $x : d :: B - A + 3l - 3s : B + A - 2l - 2s ::$ (ſi $l - s$ nunc dicatur V) $B - A + 3V . B + A - 2V$, ut priùs.



SCHOL. Eâdem planè ratione oſtenditur quòd ſi $BabA$ ſit Sphæroïs fluida oblata genita motu ſemiellipſis BAb circa Axem minorem Bb; & vertatur hæc Sphæroïs circa eundem Axem tali motu ut gravitas versùs Sphæroidem hanc in Polo A ſit ad exceſſum quo gravitas in loco B ſuperat vim centrifugam in B ex motu Sphæroidis circa Axem oriundam ut CB ad CA, Fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde ſequitur figuram Terræ, quatenus ex vi centrifugâ à motu diurno oriunda, immutatur, eſſe Sphæroidem oblatam qualis gignitur motu ſemiellipſis Bab circa Axem minorem (ſi materia Terræ pro æqualiter denſâ habeatur) ſemidiametrum Æquatoris eſſe ad ſemiaxem ut gravitas ſub Polis in Terram eſt ad exceſſum gravitatis ſupra vim centrifugam ſub Æquatore, corpus in loco quovis P tendere versùs Terram vi quæ eſt ſemper ut recta PL perpendicularis Ellipſi generatrici & Axi majori occurrens in L, & menſuram denique gradûs in Meridiano eſſe ſemper ut cubus ejuſdem rectæ PL. Hæc omnia accuratè demonſtrantur ex hac Propoſitione; quæ quamvis in diſquiſitione de figurâ Terræ eximii uſûs ſint, hic obiter tantum monere convenit.



LEMMA V.



Sit figura quævis ABa: describatur circulus CNH centro A, radio quovis dato AC; ex A educatur recta quævis AM occurrens figuræ ABa in M, & circulo in N; sint MQ & NR perpendiculares in Axem datum Aa, sit KR semper æqualis abscissæ AQ, & vis quâ particula A urgetur versùs solidum motu figuræ ABa circa Axem Aa genitum, erit ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè.

Occurrat alia recta ex A educta figuræ in m & circulo in n, sintque mq & nr normales in Axem Aa. Sit $AZza$ alia Sectio solidi per Axem, cui occurrant plana AMz, AMz ipsi AMa normalia in rectis AZ, AZ, quæ circulum radio AC in plano $AZza$ descriptum secent in X & x; denique arcus Mo circularis centro A descriptus occurrat Am in o. His positis, minuatur angulus contentus planis AMa, AZa, & simul angulus MAm donec evanescant, & ultima ratio vis quâ particula A tendit ad Piramidem $AMZzm$ ad vim quâ urgetur versùs Piramidem $ANXxn$ erit rectæ AM ad AN, vel AQ ad AR, per Lem. II. vis hujus Piramidis est ut vis superficiei $NXxn$ in rectam AN, adeóque ut $\frac{NX \times Nn}{AN^2} \times AN = \frac{NX \times Nn}{AN}$, vel ut $\frac{NR \times Nn}{AN}$ (quoniam NX est ut NR) i. e. ut Rr; ejusdemque vis ad directionem Axis reducta ut $Rr \times \frac{AR}{AN}$; quare vis Piramidis $AMZzm$ ad eandem directionem reducta $Rr \times \frac{AQ}{AC} = \frac{Rr \times KR}{AC}$. Vis igitur quâ particula A urgetur versùs frustum solidi planis AMa, Aza contenti, est ut area quam generat ordinata KR directè & radius AC inversè; cùmque solidum sit rotundum, motu scilicet figuræ circa Axem Aa genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum solidum.

COR. Vis quâ particula A urgetur in solidum est ad vim quâ urgetur versùs Sphæram super diametrum Aa descriptam ut area quam gene-

generat ordinata KR ad $\frac{2}{3}$ CA^3. Quippe si AMa sit circulus, erit AQ ad Aa ut AQ^2 ad AM^2, vel AR^2 ad AN^2. Unde in hoc casu erit $KR = \frac{2AR^2}{AC}$, & area ARK (quam generat ordinata KR) $= \frac{2AR^3}{3AC}$, adeóque area tota motu ordinatæ RK genita erit $\frac{2}{3}CA^2$.

PROPOSITIO II.

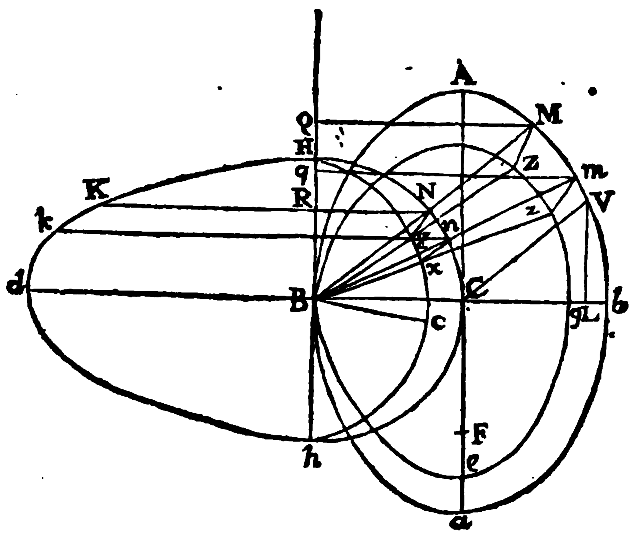
PROBLEMA.

Invenire gravitatem particulæ A in extremitate Axis transversi sitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti sit AMa Ellipsis, Aa Axis transversus, C centrum, Bb Axis conjugatus, F focus; educatur recta quævis AM ex A Ellipsi occurrens in M, cui parallela CV occurrat Ellipsi in V; unde ducatur ordinata ad Axem VL, juncta aM rectæ CV occurrat in e, eritque $AM = 2Ce$: cùmque $AQ : CL :: AM (2Ce) : CV :: 2CL : Ca$, erunt $\frac{1}{2}AQ$, CL & CA continuè proportionales. Sit $CA = a$, $CB = b$, $CF = c$, $AR = x$, $CL = l$, cùmque $AR^2 : NR^2 :: CL^2 : VL^2$ erit $x^2 : a^2 - x^2 :: l^2 : \overline{a^2 - l^2} \times \frac{b^2}{a^2}$; adeòque $l^2 = \frac{a^2b^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$ & AQ vel $KR = \frac{2ab^2x^2}{a^4 - c^2x^2}$, area $ARK = \int \frac{2ab^2xdx}{a^4 - c^2x^2} =$ (si $z : x :: c : a$) $\int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{z^2dz}{a^2 - z^2}$. Quare sit a quantitas cujus Logarithmus evanescit, sive systematis Logarithmici modulus, l Logarithmus quantitatis $a\frac{\sqrt{a+z}}{a-z}$, eritque $ARK = \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$. Unde vis quâ particula A gravitat versùs solidum genitum motu segmenti elliptici $AUMA$ circa Axem Aa, erit ad vim quâ eadem particula gravitat versùs solidum genitum motu segmenti circularis ex circulo supra diametrum Aa descripti eadem recta AM abscissi circa eundem Axem ut $\frac{2a^2b^2}{c^3} \times \overline{l - z}$ ad $\frac{2x^3}{3a}$; & si L sit Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b} \times \overline{a+c}$) erit vis quâ particula A tendit versùs totam Sphæroidem ad vim quâ tendit versùs totam Sphæram ut $3b^2 \times \overline{L - c}$ ad c^3.

SCHOL. Eadem ratione invenitur gravitas particulæ in Polo sitæ versùs Sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata est $\frac{2b^2a^2}{c^3} \times \frac{z^2}{b^2 + z^2}$. Sit $BAba$ Sphærois oblata motu Ellipsis BAb circa Axem minorem genita, centro B, radio BC describatur Arcus circuli CS, rectæ BF occurrens in S, eritque gravitas in hanc Sphæroidem in Polo B ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram super diametrum Bb descriptam ut $3CA^2 \times \overline{CF - CS}$ ad CF^3. Methodus verò quâ gravitas particulæ in Æquatore sitæ versùs Sphæroidem oblongam vel oblatam computatur, est minùs obvia, facilis tamen evadit ope sequentis Lemmatis.

LEMMA VI.



Duo plana $BMbaB$, $BZgeB$ se mutuò secent in recta HBh communi figurarum tangente, auferantque ex solido frustum $BMbaBzgeB$; sint semicirculi HCh, Hch sectiones horum planorum & superficiei Sphæræ centro B, radio BC descriptæ. Ex puncto B educatur recta quævis BM in priori plano figuræ $BMba$ occurrens in M, & semicirculo HCh in N; sintque MQ & NR normales in Hh, & ordinata KR semper æqualis rectæ MQ. His positis, si angulus CBc planis hisce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ B versùs frustum $BMbaBZgeB$ ultimò ad gravitatem ejusdem particulæ versùs frustum Sphæræ semicirculis HBh, Hch contentum, ut area $HKdh$ genita motu ordinatæ KR ad semicirculum HCh.

Sit m punctum in figurâ BMB, ipsi M quàm proximum junga ur Bm quæ circulo HCh occurrat in n; sitque nr normalis in Hh. Ad hæc sint plana BMZ, Bmz perpendicularia plano $BMba$, secentque planum alterum $BZge$ in rectis BZ, Bz circumferentiæ Hch occurrentibus in X & x. His positis, vis quâ particula B gravitat in Pyramidem

dem $BMZzm$ erit ad vim quâ eadem particula gravitat in Pyramidem $BNXxn$ ultimò ut recta BM ad BN, vel Ma ad NR per Lem. III. Gravitas autem in hanc Pyramidem est ut $\frac{NX \times Nn}{BN^2} \times BN$, vel (quoniam NX est ut NR) ut $\frac{NR \times Nn}{BC}$ i. e. ut Rr; atque hæc gravitas agit secundùm rectam Bb vi quæ est $\frac{Br \times RN}{BC}$; unde gravitas in Pyramidem $BMZzm$ agit secundùm rectam Bb vi quæ est ut $\frac{Rr \times MQ}{BC}$, vel $\frac{Rr \times KR}{BC}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula B urgetur versùs integra frusta solidi & Sphæræ BC, est ratio areæ $HKdh$ (quam generat ordinata KR) ad semicirculum HCh.

Cor. Gravitas in frustum planis $BMba$, $BZge$ terminatum, est ad gravitatem in frustum Sphæricum contentum circulis super diametros Bb, Bg descriptis, ut area $HKdh$ ad $\frac{2}{3}CB^2$. Sit enim $BMBb$ circulus, eritque MQ ad Bb, ut RN^2 ad BC^2, & $KR = \frac{2RN^2}{CB} = 2BC - \frac{2BR^2}{CB}$, & area $HKdB = \frac{4}{3}CB^2$ adeóque area tota $HKdh = \frac{8}{3}CB^2$.

PROPOSITIO III.

Problema.

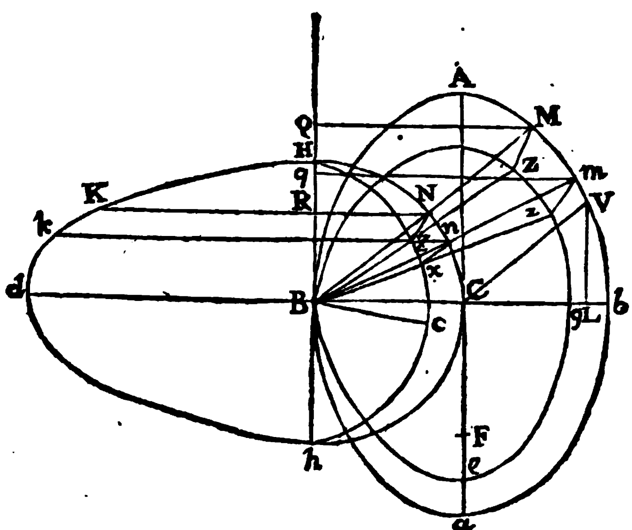
Invenire gravitatem particulæ in Æquatore sitæ versùs Sphæroidem oblongam.

Per Æquatorem intelligimus circulum ab Axe conjugato genitum dum figura circa alterum Axem revolvitur. Repræsentet $BMba$ in figurâ præcedentis Lemmatis, Sectionem quamvis Sphæroidis Æquatoris plano normalem, eritque hæc figura semper similis Sectioni per Polos solidi, seu figuræ cujus revolutione solidum genitum esse supponimus. Hujus demonstrationem ut facilem & ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur CA Sectionis hujus semiaxis transversus, CB semiaxis conjugatus, F focus; sit $CB = b$, $CA = a$, $CF = c$, $BR = x$, CV semidiameter parallela rectæ BM VL ordinata ad Axem Bb, $CL = l$. Tunc $CB : CL :: CL : \frac{1}{2}MQ$ ut in Propofit. præcedenti, & $MQ = \frac{2l^2}{b}$. Verùm $NR^2 . ER^2 :: CL^2 : VL^2$ i. e. $b^2 - x^2 . x^2 :: l^2 . \overline{b^2 - l^2} \times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, & $l^2 = \frac{a^2b^2 \times \overline{b^2 - x^2}}{a^2b^2 - c^2x^2} =$ (si $z : x :: c : b$) $\frac{b^2a^2}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & $KR = MQ = \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2b}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & area $BdKR$

æqua-

æqualis $\int \frac{2a^2b^2dz}{c^3} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2} = \frac{2a^2b^2z}{c^3} - \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2dz}{a^2-z^2}$. Sit igitur l (ut in priore Propositione) Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, & area $BdKR$ erit $\frac{2a^2b^2z}{c^3} - \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times \overline{a^2z - b^2l}$.

Supponantur nunc $x=b$, adeóque $z=c$; sitque L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut priùs, eritque area tota $HKdh$, motu ordinatæ KR genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times \overline{a^2c - b^2L}$. Quare gravitas particulæ B



versùs frustum planis ellipticis $BMba$, $BZge$ terminatum erit ultimò ad gravitatem in frustum iisdem planis contentum à Sphærâ centro C radio CB descriptâ resectum, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$ per Cor. Lem. VI. Sit circulus $BPpb$ Æquator Sphæroidis, BP & Bp duæ quævis chordæ hujus circuli; Sectiones Sphæroidis circulo BPb perpendiculares erunt Ellipses similes Sectioni quæ per Polos solidi transit, quarum BP & Bp erunt Axes transversi; Sectiones autem Sphæræ super diametrum Bb descriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ BP, Bp. Proinde eadem semper erit ratio gravitatis particulæ B in frusta elliptica & sphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs integram Sphæroidem ad gravitatem versùs Sphæram, ut $a^2c - b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$, a denotante semiaxem transversum figuræ cujus

jus motu gignitur solidum, b semiaxem conjugatum, c distantiam foci à centro, & L, Logarithmum ipsius $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ vel $a\times\frac{a+c}{b}$. q. e. f.

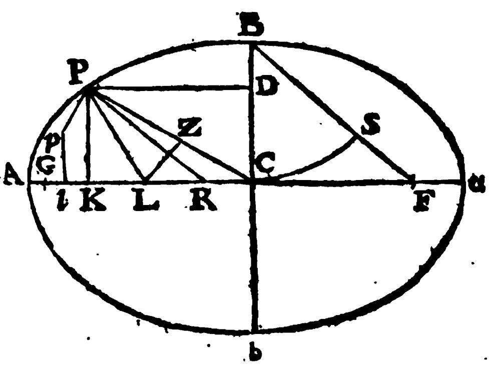
COR. Eadem semper est ratio gravitatis versùs frustum quodvis Sphæroidis & frustum Sphæræ eodem plano ad Æquatorem normali abscissum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem à Sphæroide hoc plano abscissam est ad gravitatem in integram Sphæroidem, ut gravitas in frustum Sphæræ eodem Plano ex eâdem parte abscissum ad gravitatem in integram Sphæram.

SCHOL. Eâdem ratione si $BAba$ sit Sphærois oblata motu figuræ BAb circa Axem minorem Bb genita, erit gravitas in Sphæroidem hanc in loco A ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA descriptam, ut $CA^2\times CS - CB^2\times CF$ ad $\frac{2}{3}CF^3$.

PROPOSITIO IV.

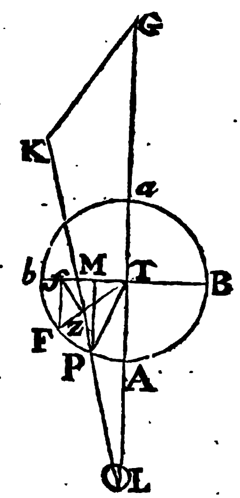
PROBLEMA.

Ex datis viribus quibus Terra particulæ gravitant versùs Solem & Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in Syzygiis vel Quadraturis Solis & Lunæ in hypothesi quòd Terra constet ex Fluido homogeneo, & circa Axem suum non moveatur.



Gravitas in loco A versùs Sphæroidem oblongam motu figuræ ABa circa Axem transversam Aa genitam, est ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C radio CA descriptam, ut $3b^2\times\overline{L-c}$ ad c^3 per Prop. II. Hæc autem gravitas est ad gravitatem in B versùs Sphæram centro C radio CB descriptam, ut CA ad CB (*per Cor.* 1. *Lem. III.*) quæ est ad gravitatem in loco B versùs Sphæroidem ut $\frac{2}{3}C^3$. ad a^2c-b^2L per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco A versùs Sphæroidem ad gravitatem in loco B versùs eandem, ut $2ab\times\overline{L-c}$ ad a^2c-b^2L. Designet A gravitatem in loco A, B gravitatem in loco B, V summam virium quibus Luminaria conjuncta vel opposita aquam deprimunt in rectis

TB, Tb perpendicularibus rectæ Aa quæ per Terræ & Luminarium centra transire supponitur, ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earumdem virium in Lunæ Quadraturis, ut in Cor. 5. ejusdem Prop. & per ea quæ demonstrantur Cor. 1. Prop. I. erit $Aa - Bb = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$, Adeóque $Aa - bA \times \frac{a^2c - b^2L}{2ab \times \overline{L - c}} = \frac{2a^2V + b^2V}{d}$, & $V : A :: 2a^2L + b^2L - 3a^2c : \frac{2a}{d} \times \overline{2a^2 + b^2} \times \overline{L - c}$. Atque ex datâ ratione V ad A vel ad B, vel $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (quæ pro G gravitate mediocri in circumferentiâ $ABab$ haberi potest) habebimus æquationem unde species figuræ & differentia semiaxium seu ascensus aquæ computari possunt.



Est autem L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, adeóque æqualis $c + \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. per Methodos notissimas, adeóque $L - c = \frac{c^3}{3a^2} + \frac{c^5}{5a^4} + \frac{c^7}{7a^6}$, &c. Unde est V ad A, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L - c} \times ad}{c^3 \times \overline{2a^2 + b^2}}$, & V ad $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ vel G, ut $\frac{2c^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4} + \frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{2a^2 + b^2}{2bdc^3} \times \overline{2abL - b^2L + a^2c - 2abc}$.

Verùm si V sit admodum exigua respectu gravitatis G (ut in præsenti casu) erit differentia semidiametrorum CA, CB ad semidiametrum mediocrem quàm proximè ut $15V$ ad $8G$, vel paulò accuratiùs ut $15V$ ad $8G - 57\frac{5}{14} \times V$. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a = d + x$, $b = d - x$, adeòque $c^2 = a^2 - b^2 = 4dx$, eritque $A : B :: 2ab \times \overline{L - c} : a^2c^2 - b^2L :: \frac{b}{3} + \frac{bc^2}{5a^2} + \frac{bc^4}{7a^4}$ &c : $\frac{a}{3} + \frac{ac^2}{15a^2} + \frac{4c^4}{35a^4}$, &c. i. e. ut $\frac{d - x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d - x}}{5 \times \overline{d + x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d - x}}{7 \times \overline{d + x}^4}$, &c. ad $\frac{d + x}{3} + \frac{4dx \times \overline{d + x}}{15 \times \overline{d + x}^2} + \frac{16d^2x^2 \times \overline{d + x}}{35 \times \overline{d + x}^4}$, &c. adeòque (neglectis terminis, quos plures dimensiones ipsius x ingrediuntur) ut $\frac{1}{3}d + \frac{17}{15}x : \frac{1}{3}d + \frac{10}{15}x$. Proinde erit $B - A$ ad $B + A$ ($= 2G :: x : 5d + 18x$, & $B - A : G :: 2x : 5d + 18x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. est x ad d ut $B - A + 3V$ ad $B + A - 2V$, adeóque substituendo valores quantitatum $B - A$ & $B + A$, erit $x : d :: \frac{2Gx}{5d + 18x} + 3V : 2G - 2V$. Unde $2Gx - 2Va = \frac{2Gdx + 15Vd + 54Vx}{5d + 18x}$, & $10Gdx - 10dVx + 36Gxx - 36Vxx = 2Gdx + 15Vd + 54Vx$, & terminis omissis ubi reperi-

reperitur xx; erit $8\,Gdx - 64\,Vx = 15\,Vd$ atque $x : d :: 15\,V : 8\,G - 64\,V$, & $2\,x$ ad d ut $15\,V$ ad $4\,G - 32\,V$. Ascensus igitur totius aquæ i. e. differentia semidiametrorum CA, CB (vel $2\,x$) est ad semidiametrum mediocrem, ut $15\,V$ ad $8\,G$ quàm proximè; facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties usus id postulabit, assumendo plures terminos valoris Logarithmi L, & calculum prosequendo; prodit autem hoc pacto x ad d magis accuratè, ut $15\,V$ ad $8\,G - 57\frac{5}{14} \times V$.

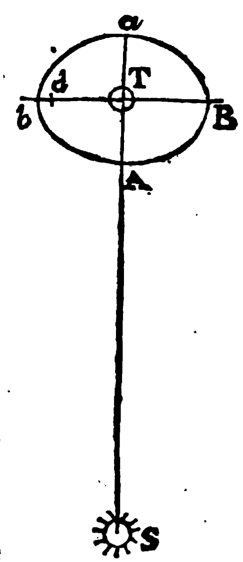
Cor. $B - A$ est æqualis $\frac{3\,V}{4}$, & $B - G = \frac{3\,V}{8}$ quàm proximè. Quippe $B - A : G :: 2\,x : 5\,d :: 30\,V : 40\,G$, adeóque $B - A : V :: 3 : 4$.

Schol. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs Sphæroidem oblatam in Polo B fore ad gravitatem in Æquatore in loco quovis A, ut $2\,CB \times CA \times \overline{CF - CS}$ ad $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$.

PROPOSITIO V.

Problema.

Invenire vim V quæ oritur ex inæquali gravitate partium Terræ versùs Solem, & definire ascensum aquæ hinc oriundum.



Sit S Sol, T Terra, $ABab$ orbita lunaris neglectâ excentricitate, B & b Quadraturæ. Designet S tempus periodicum Terræ circa Solem, L tempus periodicum Lunæ circa Terram, l tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad distantiam mediocrem Td $(= \frac{1}{2}\,CA + \frac{1}{2}\,CB)$ si motus Lunæ gravitate suâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, & solâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur. Designet porrò K gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, g gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri suâ distantiâ, v vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in Quadraturis ad eandem distantiam. His positis, erit $v : K :: dT : ST$; atque $K : g :: \frac{ST}{SS} : \frac{dT}{ll}$ ex vulgari doctrinâ virium centripetarum; unde $V : g :: ll : SS$: cùmque ll sit paulò minùs quàm LL, quoniam Luna nonnihil distrahitur à Terrâ gravitate suâ in Solem, patet vim v esse ad g in paulò minori ratione quàm LL ad SS. Hanc autem rationem vis v ad g nemo hactenus (quantùm novi)

novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur esse rationi LL ad $SS + 2\,LL$ vel saltem rationi LL ad $SS + \frac{2}{3}\,LL$ quàm rationi LL ad SS. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda censeo, moniti Academiæ illustrissimæ memor, cùm in hâc disquisitione parvi sit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum NEWTONO $v : g :: LL : SS ::$ (per computos Astronomicos periodorum Solis ac Lunæ) $1 : 178{,}725$. Vis V quæ in Terræ superficie vi v respondet, est ad v, ut Terræ semidiameter mediocris ad distantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad $60\frac{1}{2}$. Vis autem g agit secundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in descensu ad superficiem Terræ patebit vim V esse ad G (quâ gravitas mediocris in superficie Terræ designatur ut suprà) ut 1 ad 38604600. Unde cùm *per Cor.* 2. *Prop.* III. sit $x : d :: 15\,V : 8\,G - 57\frac{1}{14}\,V$ erit in hoc casu $x : d :: 1 : 20589116$. Cúmque semidiameter Terræ mediocris sit pedum 19615800; hinc sequitur totum aquæ ascensum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Parisiensis cum $\frac{90541}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, & $\frac{8654}{10000}$ partibus digiti; quem suo more breviter deprehendit NEWTONUS esse pedis unius, digitorum undecim cum $\frac{1}{30}$ parte digiti, quæ altitudo à nostrâ differt tantùm sextâ parte unius digiti.

Verùm in hoc calculo Terra supponitur esse Sphærica, nisi quatenus à vi Solis Mare elevatur. Sed si ascensum aquæ maximum quæramus, ponendum est Solem in circulo æquinoctiali versari, figuramque $ABab$ in hoc plano constitui, & augenda est vis V in ratione semidiametri mediocris ad semidiametrum Terræ maximam, & minuenda est vis G donec evadat æqualis gravitati sub Æquatore: i. e. Si figuram Terræ eam esse supponamus quam definivit NEWTONUS, augenda erit vis V in ratione 459 ad 460, & minuenda est G in eadem ferè ratione, quoniam vires gravitatis in superficie Terræ sunt inversè ut distantiæ locorum à centro; cúmque distantia d sit augenda in eâdem ratione, erit ascensus aquæ in Æquatore augendus in ratione triplicata semidiametri mediocris ad maximam, adeóque erit pedis unius, digitorum undecim cum 60ma circiter parte digiti. Terra autem altior est sub Æquatore quàm prodiit calculo Newtoniano ex hypothesi quòd Terra sit uniformiter densa à superficie usque ad centrum; ut colligitur ex variis pendulorum Observationibus, & præsertim ex mensurâ gradûs meridia-

meridiani quam viri clarissimi nuper definiverunt accuratissimè sub Circulo Polari.

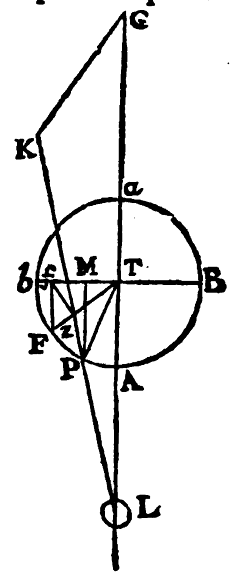
SCHOL. 1. Si gravitatem posuissemus æqualem in A & B. & ejusdem vis in totâ circumferentiâ $A B a b$, prodiisset x æqualis tantùm $\frac{3 V d}{2 G}$, & ascensus aquæ (seu $2 x$) pedis unius, digitorum sex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hâc hypothesi prodiisset $C A$ ad $C B$, ut $G + V$ ad $G - 2 V$, adeòque x ad d, ut $\frac{3 V}{2}$ ad G quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propositionum, cùm ascensus aquæ secundùm hanc minùs accuratam hypothesim minor sit ascensu quem in hâc Propositione definivimus, differentiâ $\frac{3 V d}{4 G}$, quartâ scilicet parte ascensus illius.

SCHOL. 2. Ex hac doctrinâ patet Satellites Jovis Soli & sibi mutuò conjunctos vel oppositos in Oceano Joviali (si ullus sit) ingentes motus excitare debere, modò non sint Lunâ nostrâ multò minores; cùm diameter Jovis ad distantiam cujusque Satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad distantiam Lunæ. Verisimile est mutationes macularum Jovis ab Astronomis observatas hinc aliquâ saltem ex parte ortum ducere; quòd si hæ mutationes eam analogiam servare deprehendantur cum aspectibus Satellitum, quam hæc doctrina postulat, indicio erit veram earùm causam hinc esse petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non absque utilitate, motus Satellitum circa Axes suos & circa primarios ita compositos esse ut idem Hemisphærium suis primariis semper ostendant, secundùm sententiam celeb. Astronomorum. Verisimile enim est motus Maris nimios in Satellitibus cieri deberi, si cum aliâ quâvis velocitate circa Axes suos revolverentur; aquis autem in his agitandis (si quæ sint) sufficere possunt æstus ex variis Satellitum distantiis à suis primariis oriundis.

SECTIO IV.

De motu Maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliisve de causis immutatur.

Ostendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqualiter gravem Sphæroidis oblongæ figuram induere debere; cujus Axis transversus per centrum Luminaris transiret, si Terra non revolveretur circa Axem suum motu diurno; & ascensum aquæ in hypothesi Terræ quiescentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm ob motum Terræ diverſa eſt ratio æſtûs Maris. Hinc enim aqua nunquam ſit in æquilibrio, ſed perpetuis motibus agitatur. Supponamus Solem & Lunam conjunctos vel oppoſitos verſari in plano Æquatoris $ABab$; ſit Aa diameter quæ per illorum centra tranſit, Bb huic perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus aſcenſus ejus promovetur in tranſitu aquæ à locis b & b ad A & a, & in his locis evadunt maximæ; aſcenſus tamen aquæ prorogari videtur, poſtquàm hæ vires minui cœperunt uſque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, ſi nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ conſiderari poſſit tanquam libratorius, & tantundem ferè aſcendat viribus quibus elevatur decreſcentibus, quàm iiſdem creſcentibus. Cúmque vis centrifuga ex motu diurno orta ſit multò minor gravitate, ſitus loci F ubi prædictæ vires æquipollent ſub Æquatore, dum aqua tranſit à loco b ad locum A, ſic ferè definiri poſſe videtur. Ex puncto F ſit Ff normalis in Bb, & fz in TF. Deſignet V ſummam virium quibus Sol & Luna aquam deprimunt



in rectis TB, Tb ut ſuprà, & vis quâ aqua tollitur in F erit $\frac{3V\times Fz}{d} = \frac{3V\times Ff^2}{d\times TF}$. Supponamus F eſſe locum aquæ ubi altitudo aquæ ſit minima, ut TF haberi poſſit pro ſemiaxe conjugato figuræ $ABab$, dicatur gravitas in extremitate hujus Axis B, & gravitas mediocris in hac figura G, ut ſuprà; & vis quâ aqua deprimitur infra ſitum naturalem in loco F erit $B - A + \frac{V\times TF}{d}$. Ponantur hæ vires æquales, cúmque TF ſit quàm proximè æqualis diſtantiæ d, ſitque $B - G = \frac{3V}{8}$ per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3V}{8} + V = \frac{3V\times Ff^2}{d^2}$, ſeu $TF^2 : Ff^2 :: 3 : 1 + \frac{3}{8} :: 24 : 11$. unde angulus FTb erit graduum 42 minutorum 37, incidetque ferè in punctum medium inter b & A. Hunc verò calculum ut accuratum non proponimus.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Motum Maris ex vi Solis oriundum, & motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter se comparare, & hinc ascensum aquæ æstimare.

Astronomis notissimum est Lunæ distantiam mediocrem in Syzygiis minorem esse distantiâ mediocri in Quadraturis. Claris. *Halleyus* ex Observationibus colligit distantiam priorem esse ad posteriorem ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$. NEWTONUS Methodo quâdam suâ harum rationem invenit esse eam 69 ad 70: *Princip. Prop.* 28. *Lib.* 3. Clarissimus Auctor Tractatûs *de Motibus Lunæ secundùm Theoriam gravitatis*, in hac doctrina optimè versatus, colligit eam esse numeri 69 ad 70; ratione non habitâ decrementi gravitatis dum Luna transit à Syzygiis ad Quadraturas. Ut motus Maris ex vi Solis oriundus (qualis suprà definitur Prop. V.) cum motu Lunæ conferatur, supponamus orbem Lunarem aquâ compleri, & quæramus ascensum hujus aquæ per Prop. IV. & V. In Prop. V. erat vis v ad g, ut 1 ad 178, 725; quare in hoc casu foret $x : d :: 15\, v : 8\, g - 57\frac{5}{14} \times v :: 1 : 91{,}496$: adeóque semiaxis figuræ ad semiaxem conjugatum (vel $d + x$ ad $d - x$) ut 46.248 ad 45, 248; quæ ferè congruit cum ratione distantiarum Lunæ in Quadraturis & Syzygiis quam *Halleyus* ex Observationibus deducit; adeò ut figura orbitæ Lunaris specie vix diversa sit ab eâ quam Globus aqueus quiescens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen positione diversæ, siquidem illius Axis minor Solem respiciat, hujus Axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum semidifferentia est ad semisummam ut $3\, v$ ad g quàm proximè) probè congruit cum ratione semiaxium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, si vis gravitatis eadem esset per totam circumferentiam $ABab$, ut ostendimus in Schol. 1. Prop. V. Ascensus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex Observationibus colligit *Halleyus*; unde suspicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris pauló fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum transit à Syzygiis ad Quadraturas, simili ferè ratione quâ ascensus aquæ prodiit in hâc propositione major propter excessum gravitatis aquæ in Terram in loco B supra ipsius gravitatem in loco A aliisque à centro distantiis. Verùm quidquid sit judicandum de ratione diametrorum orbitæ Lunaris, ex his colligere licet ascensum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa Axem suum. Supponamus enim hunc motum

tum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, & particulæ Maris revolvantur ad morem Satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum Axes minores productæ transibunt per Solem. Et si semiaxium differentia sit ad semidiametrum mediocrem ut $3\,V$ ad G (secundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutissimus) erit minor ascensu aquæ suprà definito Prop. V. in qua invenimus $2\,x$ esse ad d ut $15\,V$ ad $4\,G$. Quòd si quæramus horum semiaxium differentiam ex figura orbitæ lunaris quatenus ex Observationibus innotescit secundùm clarif. *Halleyum*, parum admodum superabit ascensum aquæ suprà definitum. Nec mirum si non accuratè conveniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram sequatur rationem inversam duplicatam distantiarum, gravitas aquæ major quoque sit in majori distantiâ, sed non in eâdem ratione. Cùm hæc Phænomena sint analoga, & sibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter se collatis memorare videbatur operæ pretium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in eodem circulo Æquatori parallelo perseverare, vel latitudinem eandem in singulis revolutionibus servare, & variationem ascensûs aquæ, quæ ex figurâ Sphæroidicâ Terræ provenit, non consideramus.

PROPOSITIO VII.

Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa Axem Terræ motu diurno deferuntur.

Quippe si aquæ moles feratur æstu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab Æquatore distantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa Axem Terræ latam; unde illius motum turbari necesse est. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50gr. ab Æquatore dissito, & in loco 36 tantùm milliaria magis versùs Septentrionem vergente, major est quàm quâ 7 milliaria singulis horis describeretur, ut facili calculo patebit. Cùmque motus Maris tantus nonnunquam sit ut æstus 6 milliaria, vel etiam plura singulis horis describat, effectus qui hinc oriri possunt non sunt contemnendi.

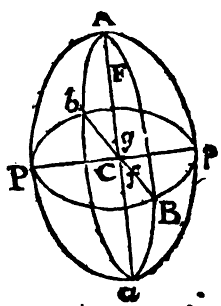
Si aqua deferatur à Meridie versùs Septentrionem motu generali æstûs, vel aliâ quâvis de causâ, cursus aquæ hinc paulatim deflectet versùs Orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versùs hanc plagam majori velocitate quàm est ea quæ convenit loco magis versùs Boream sito. Contrà si aqua à Septentrione versùs Meridiem deferatur, cursus aquæ ob similem causam versùs Occidentem deflectet. Atque hinc varia motûs Maris Phænomena oriri suspicamur. Hinc forsitan, exempli gratiâ, Montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequen-

frequentiùs conſpiciuntur in Occidentali quàm Orientali Oceani Atlantici plagâ. Quin & majores æſtus hinc cieri poſſe in pluribus locis quàm qui ex calculo virium Solis & Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, veriſimile eſt. Eandem cauſam ad ventos præſertim vehementiores propagandos, & nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum Aëris tum Maris Phænomena producenda conducere ſuſpicamur. Sed hæc nunc ſigillatim proſequi non licet.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Invenire variationem aſcenſûs aquæ in Prop. V. definiti, quæ ex figurâ Terræ Sphæroidicâ provenit.



Sint $PApa$, $PBpb$ Sectiones Terræ per Polos P & p, quarum prior tranſeat per loca A & a, ubi altitudo aquæ in Æquatore viribus Solis & Lunæ ſit maxima, poſterior per loca B & b ubi ſit minima; ſint hæ Sectiones ellipticæ, F focus figuræ $PApa$, f focus Sectionis $PBpb$, & g focus Sectionis $ABab$. Et ſi omnes Sectiones ſolidi per rectam Aa tranſeuntes ſupponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco A versùs ſolidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro C ſuper diametrum Aa deſcriptam ut $1 + \frac{3CF^2 + 3Cg^2}{10CA^2} + \frac{9CF^4 + 6CF^2 \times Cg^2 + 9Cg^4}{56CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB \times CP}$; & gravitas in loco B, definiatur ſimili calculo, ope ejuſdem Lemmatis & Schol. Prop. II. conſtabit ratio gravitatis in A ad gravitatem in B, & per Cor. 2. Prop. I. innoteſcet ſemidiametrorum CA & CB differentia ſive aſcenſus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm ſit exigui uſûs. Hâc Propoſitione oſtendere tantùm volui Geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratiſſimè tractando. Verùm reſtat præcipuus in hac diſquiſitione nodus, de quo pauca ſunt addenda.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Hæc ex motibus cœlestibus colligi nequit, si verò conferetur ascensus aquæ in Syzygiis Luminarium, qui ex summâ virium Solis & Lunæ generatur, cum ejusdem ascensu in Quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit NEWTONUS ex Observationibus à Sam. Sturmio ante ostium Fluvii Avonæ institutis, ex quibus colligit ascensum aquæ in Syzygiis æquinoctialibus esse ad ascensum aquæ in Quadraturis iisdem, ut 9. ad 5. Dein post varios calculos concludit vim Lunæ esse ad vim Solis, ut 4. 4815 ad 1. & ascensum aquæ ex utrâque vi oriundum in distantiis Luminarium mediocribus fore pedum 50 cum semisse. Harum virium rationem ex Observationibus à celeb. *Cassini* in loco suprà citato allatis quæsivimus. Verùm cùm præter generales causas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari possunt, aliæ variæ ex locorum situ, vadorum indole, ventorum vi & plagâ pendentes, æstus Maris nunc majores, nunc minores reddant, non est mirum si vires Lunæ quæ prodeunt ex Observationibus in locis diversis, vel in eodem loco diversis tempestatibus institutis non planè consentiant. Computis igitur quos de motu Maris ex vi Lunæ oriundo instituimus recensendis impræsentiarum non immorabimur. Postquam verò Observationes aliquæ circa æstus Maris ad littora Americæ & Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hisce forsan certiùs judicemus. Observamus tantùm æstus in minori ratione decrescere videri quàm duplicatâ Sinus complementi declinationis; quin & reliquæ æstûs leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, si repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita sunt. Æstus anomali à locorum & Marium situ plerumque pendere videntur. Observandum tamen ex Theoriâ gravitatis sequi, unicum tantùm æstum spatio 24 horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, si reciprocatio motûs aquæ id permitteret. *

Quòd si analysis diversarum causarum quæ ad æstus Phænomena producenda conferunt, accuratè institui posset, id certè ad uberiorem scientiam

* Sit enim Lunæ declinatio 28 gr. & loci ultra 62 gr. versùs eandem plagam; & manifestum est Lunam semel tantùm 24 horarum spatio loci hujus horizontem attingere.

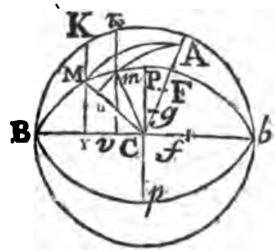
tiam virium & motuum ſyſtematis Mundi non parum conferret. Hinc enim ſitus centri gravitatis Lunæ & Terræ, & quæ ad æquinoctiorum præceſſionem aliaque Phænomena naturæ inſignia ſpectant, certiùs innoteſcerent. Quas ob cauſas aſcenſûs aquæ quantitatem, quouſque ex motibus cœleſtibus eam aſſequi licet, accuratè definiendam & demonſtrandam, poſitis legibus gravitatis quæ ex Obſervationibus deducuntur (de cujus causâ hîc non eſt differendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacumque judicio Illuſtriſſimæ ACADEMIÆ REGIÆ, quam omni honore & reverentiâ ſemper proſequimur, lubenter ſubmittimus.

ANNOTANDA IN DISSERTATIONEM *de Causâ Physicâ Fluxûs & Refluxûs Maris, cui præfigitur Sententia,* Opinionum commenta delet dies, Naturæ judicia confirmat.

I. In Prop. IV. invenitur $x = \frac{15\,Vd}{8\,G}$ quàm proximè, qui valor ipsius x est satis accuratus, nec ullâ correctione indiget præsertim in calculo Prop. V. Est autem magis accuratè x ad d ut $15\,V$ ad $8\,G - \frac{88}{7}\,V$ non ut $15\,V$ ad $8\,G - \frac{803}{14}\,V$ sive $8\,G - 57\frac{5}{14}\,V$ ut lapsu quodam calami aut calculi scripseram ad finem Prop. IV. qui quidem est exigui momenti, & argumenta Propositionum sequentium non immutat. Calculi autem summam hîc adjiciam. Inveneram in Prop. IV. esse B ad A, ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15\,a^2} + \frac{c^4}{35\,a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a} \times \overline{\frac{1}{3} + \frac{c^2}{3.\,a^2} + \frac{c^4}{7\,a^4}}$, &c. adeóque (substituendo loco $\frac{b}{a}$ ipsius valorem $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$ sive $1 - \frac{c^2}{2\,a^2} - \frac{c^4}{8\,a^4}$, &c. ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15\,a^2} + \frac{c^4}{35\,a^4}$, &c. ad $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{30\,a^2} + \frac{c^4}{840\,a^4}$, &c. unde $B - A$ est ad G (seu $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$) ut $\frac{c^2}{10\,a^2} + \frac{23\,c^4}{24 \times 35\,a^4}$, &c. ad $1 + \frac{3\,c^2}{20\,a^2} + \frac{25\,c^4}{8 \times 70\,a^4}$, &c. Est autem $c^2 = 4\,dx$, & $a^2 = d^2 + 2\,dx + x^2$ ex iis quæ in Propositione supponuntur; unde $\frac{c^2}{4\,a^2} = \frac{x}{d} - \frac{2\,x^2}{d^2} + \frac{3\,x^3}{d^3}$, &c. & substituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4\,x}{d} - \frac{8\,x^2}{d^2}$, &c. prodibit $B - A$ ad G, ut $14\,dx + 18\,x^2$ ad $35\,d^2 + 21\,dx + 17\,x^2$ quàm proximè. Cùmque sit $\overline{B - A} \times d + 3\,Vd = 2\,Gx - 2\,Vx - \frac{3\,Vx^2}{d}$ per Corol. Prop. I. substituatur valor ipsius $\overline{B - A}$, & negligantur termini quos ingreditur Vx^2 (quoniam V est admodum parva respectu G) eritque $3 \times 35\,Vd^2 = 56\,Gdx - 133\,Vdx + 24\,Gx^2$ & $x = \frac{3 \times 35\,Vd^2}{56\,dG - 133\,Vd + 24\,Gx}$, quòd si in denominatore pro x scribatur valor vero propinquus $\frac{15\,Vd}{8\,G}$, prodibit valor magis accuratus $\frac{3 \times 35\,Vd}{56\,G - 88\,V}$, eritque $x : d :: 15\,V : 8\,G - \frac{88}{7}\,V$ quàm proximè. Diversâ paulò ratione prodit $x = \frac{15\,Vd}{8\,G} + \frac{165\,VVd}{56\,GG}$, &c. quam seriem producere non est difficile, si operæ pretium videbitur. In Prop. VI. quæsivimus figuram aquæ

aquæ orbem lunarem complentis ex actione Solis oriundam. Hâc correctione adhibitâ, & cæteris retentis ut priùs, Axis minor figuræ ad majorem ut 46.742 ad 47.742, quæ parùm differt à ratione quam in eâ Propositione exhibuimus.

II. Series quam exhibuimus in Prop. VIII. deducitur per Lem. V. & Prop. II. Sit $CA = a$. $CB = b$. $CP = e$. $CF = c$. $Cf = f$. $Cg = g$. Sint ACM, ACm Sectiones quævis solidi per rectam AC (quæ normalis est plano $BPbp$) transeuntes. Arcus mu centro C radio Cm descriptus, occurrat rectæ CM in u, & occurrant ordinatæ MV, mv Axi Bb in V & v, & circulo $BKKb$ in K & k. Sit $CA^2 - CM^2 = x^2$,



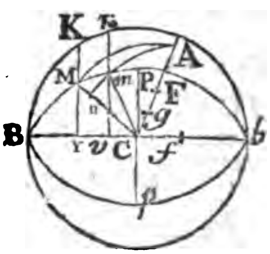
seu x distantia foci à centro in figura ACM, sit L Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, & ultima ratio gravitatis particulæ A in frustum planis ACM, ACm terminatum ad gravitatem in frustum Sphæræ centro C radio CA descriptæ iisdem planis contentum, erit ea $3\,CM^2 \times \overline{L-x}$ ad x^3 per Prop. II. Gravitas igitur particulæ A in solidum erit ut $\int \frac{3\,CM^2 \times \overline{L-x}}{x^3} \times \frac{mu}{CM} = \int \frac{3\,CM \times mu}{x^3} \times \overline{L-x} = \int \frac{3\,CK \times Kk \times CP}{CK \times x^3} \times \overline{L-x} = \int \frac{3\,e \times Kk}{x^3} \times \overline{L-x}$. Sit $CV = u$. Eritque $u^2 + \overline{b^2 - u^2} \times \frac{c^2}{b^2} = CM^2 = a^2 - x^2$. Unde $c^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} u^2 = a^2 - x^2$. $u^2 = \overline{a^2 - c^2 - x^2} \times \frac{b^2}{b^2 - c^2} = \overline{e^2 - x^2} \times \frac{b^2}{f^2}$. Adeóque $KV^2 = b^2 - u^2 = b^2 - \frac{b^2}{f^2} \times \overline{e^2 - x^2} = b^2 \times \frac{f^2 + x^2 - e^2}{f^2} = \frac{b^2}{f^2} \times \overline{x^2 - g^2}$. Est autem $Kk : Vv :: CK : KV$. Adeóque $Kk = \frac{b\,dv}{KV} = \frac{b}{f} \times \frac{-x\,dx}{\sqrt{e^2 - x^2} \times \frac{b}{f}\sqrt{x^2 - g^2}}$

$= \frac{-b\,x\,dx}{\sqrt{e^2 - x^2} \times \sqrt{x^2 - g^2}}$. Quare gravitas particulæ A versus solidum erit ut $\int \frac{-3\,e\,b\,x\,dx}{x^3 \sqrt{e^2 - x^2} \times \sqrt{x^2 - g^2}} \times \overline{L-x}$. Verùm $L - x = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4}$, &c. Quare gravitas illa erit $\int \frac{-3\,e\,b\,x\,dx}{3a^2 \sqrt{e^2 - x^2} \times \sqrt{x^2 - g^2}} + \int \frac{-3\,e\,b\,x\,x\,dx}{5a^4 \sqrt{e^2 - x^2} \times \sqrt{x^2 - g^2}}$, &c. Sit $z^2 = x^2 - g^2$, & prior summa erit $\int \frac{-e\,b\,dz}{a^2 \sqrt{e^2 - g^2 - z^2}}$, secunda erit $\int \frac{-e\,b\,x^2\,dz}{5a^4 \sqrt{e^2 - g^2 - z^2}}$

$= \int \frac{-e\,b\,dz \times \overline{z^2 + g^2}}{5a^4 \sqrt{e^2 - g^2 - z^2}}$. Quæ cum subsequentibus summis ad circulares

Arcus facilè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ *A* versùs hoc solidum ad gravitatem versùs Sphæram super semidiametrum *C A* constructam, erit qualis in Propositione assignatur, terminis seriei citissimè decrescentibus, si *C F*, *C f* & *C g* sint admodum parvæ. Si evanescat *g*, hæc series dabit gravitatem versùs Sphæroidem in Æquatore; quæ tamen elegantiùs investigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. observavimus post NEWTONUM vim Lunæ ad Mare movendum cum vi Solis posse conferri, æstus in Syzygiis & Quadraturis comparando; eadem ratio obtineri posset conferendo æstus qui contingunt in Syzygiis Luminarium in diversis distantiis Lunæ à Terra, si æstus essent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Designet *L* vim Lunæ mediocrem, *S* vim Solis mediocrem, *X* & *x* duas diversas distantias Lunæ à Terra in Syzygiis æquinoctialibus, *Z* & *z* distantias Solis à Terra in iisdem Syzygiis, *d* & *D* mediocres utriusque distantias; & si Lunæ declinatio nulla sit, atque essent ut vires Luminarium, seu ut $\frac{Ld^3}{X^3}+\frac{Sd^3}{Z^3}$ & $\frac{Ld^3}{x^3}+\frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando, æstûs ratio *L* ad *S* detegeretur. Sit enim ascensus aquæ in priori casu ad ascensum in posteriori ut *m* ad *n*, eritque *L* ad *S* ut $\frac{mD^3}{z^3}-\frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3}-\frac{md^3}{x^3}$.



INQUI-

INQUISITIO PHYSICA IN CAUSAM FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

A D. D. EULER, *Mathematicarum Professore, è Societate Academiæ Imperialis Sancti-Petersburgensis.*

Cur nunc declivi nudentur littora Ponto;
Adverſis tumeat nunc Maris unda fretis;
Dum veſtro monitu naturam conſulo rerum:
Quàm procul à Terris abdita cauſa latet!
In Solem Lunamque feror. Si plauditis auſo;
Sidera ſublimi vertice ſumma petam.

CAPUT PRIMUM.

De Causâ Fluxûs ac Refluxûs Maris in genere.

§. I. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipsâ motûs conſervatione proficiſci, vel à viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ cauſæque imaginariæ penitùs ſunt exploſæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem diſcrimen quovis oblato Phænomeno diligentiſſimè conſiderari oportet, ne tam motûs conſervationi ejuſmodi effectus tribuatur, qui ſine viribus oriri nequit, quàm vires inveſtigentur, quæ motum ſuâ naturâ conſervandum producant. Quo quidem in negotio, ſi debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ ſatis ſuperque conſtet, cujuſmodi motus vel per ſe conſerventur, vel viribus externis debeantur. Corpus ſcilicet in motu poſitum

tum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis transeuntem motum rotatorium semel est consecutum, eodem motu rotari perpetuò suâ sponte perget; neque hujusmodi motuum causam in ullâ re aliâ, nisi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca si hujus generis Phænomenon fuerit propositum, alia causa investigari non potest, nisi quæ à principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæstio, si quæreretur causa motûs vertiginis Planetarum ac Solis; hîc enim sufficeret eam causam assignasse, quæ initio hos motus produxisset, cùm Sol æquè ac Planetæ talem motum semel consecuti eundem propriâ vi perpetuò conservare debeant, neque ad hoc Phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter se res habet, si motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujusmodi est motus Planetarum periodicus circa Solem: hoc enim casu minimè sufficit ea vis, quæ initio Planetas ad istiusmodi motus impulerit, sed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, à quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm cessarent, subitò Planetæ orbitas suas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd si igitur Phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia sollicitè est inquirendum, ad quodnam genus id pertineat atque utrum causa in viribus externis sit quærenda, an in ipso subjecto corpore? Quinetiam sæpenumerò usu venire potest, ut effectus utriusque generis in eodem Phænomeno multùm sint inter se permixti; quo casu summo studio ii à se invicem discerni antè debebunt, quàm causarum investigatio suscipiatur.

§. 3. His ritè perpensis explicatio Galilei, quam in suis Dialogis de æstu Maris assignare est conatus, mox concidit; putavit enim Fluxum ac Refluxum Maris tantùm à motibus Terræ rotatorio circa axem & periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, nisi quæ hos motus tùm producant, cùm conservent. Namque si ponamus Terram solo motu diurno esse præditam, iste motus Mare aliter non afficiet, nisi id sub Æquatore attollendo, ex quo figura Terræ sphæroidica compressa nascitur, motus verò reciprocus in Mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd si autem Terræ insuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora Phænomena nullo modo afficientur, sed prorsùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clarissimè perspici licet, quibus constat motum uniformem in directum omnibus partibus Systematis cujuscunque corporum æqualiter impressum nullam omninò mutationem in motu & situ partium relativo inferre. Abeat nunc motus iste æquabilis Terræ in directum impressus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac de

hoc

hoc quidem casu ullus motus reciprocus in Mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tùm etiam ab ipso *Galileo* non statuitur: ipse enim non tàm ex mixtione motûs vertiginis & periodici æstum Maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur. CAP. I.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in Mari motum reciprocum generare valet; tamen Mare, quod si motus esset æquabilis in directum, in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam Mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ à Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab Oriente versùs Occidentem secundùm eclipticam inducetur, hancque veram esse causam existimo ac præcipuam cur tàm Oceanus quàm aer sub Æquatore perpetuò habeat Fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tàm Maris, si omninò liberum esset, quàm aeris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortassè aliâ occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberiorem explicationem hujus insignis Phænomeni eò usque differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno Mari motum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti *Galileus* est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit causa Phænomeni cujuspiam oblati, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de Fluxu ac Refluxu Maris est comparata, ut non difficulter causas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam *Galilei* sententiam, explicatio æstûs Maris *Cartesiana* pressioni Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliundè probari nequeat, atque ad hoc solum Phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero Oceano aquam mox post transitum Lunæ per Meridianum elevari observamus, cùm secundùm *Cartesii* sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque præterea hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terrâ latens eundem ferè effectum exerat, ac si super Horizonte versetur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est *Wallisius*, causam in communi centro gravitatis Terræ & Lunæ

CAP. I. quærens, cujus explicatio mox satis dilucidè est subversa. Superest denique NEWTONI theoria, quæ nemine contradicente Phænomenis multò magis est consentanea: at in ea id ipsum quod hoc loco quæritur, causa scilicet physica, non assignatur, sed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria satis est evoluta, ut de ejus sive consensu sive dissensu cum observationibus judicium satis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium sit nullum, quin Fluxûs ac Refluxûs Maris causa in viribus externis & realibus sit posita, quæ si cessarent, simul æstus Maris mox evanesceret, ubi lateant hæ vires & quomodo sint comparatæ potissimùm nobis erit explicandum, hoc enim est id ipsum, quod celeberrima Academia Scientiarum Regia in quæstione propositâ requirit. Neque verò vires tantummodò indicasse sufficiet, verùm præterea id maximè erit monstrandum, quomodo istæ vires agant, atque hos ipsos effectus, quos observamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæstionis cardo, explicationis scilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem Phænomenon explicari potest, studium adhibendum est summum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque sunt neque locum habere possunt. Parum enim scientiæ naturali consulunt, qui quovis Phænomeno oblato sibi pro arbitrio mundi structuram peculiarem effingunt, neque sunt solliciti, utrùm ea compages cum aliis Phænomenis consistere queat, an verò secùs. Quòd si enim jam aliundè constet existere in mundo ejusmodi vires, quæ oblato effectui producendo sint pares, frustrà omne studium in conquisitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad causam cujusque Phænomeni detegendam, ad singulas circumstantias sedulò attendere necesse est, ante omnia mirificum consensum æstûs Maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non solùm enim insignis harmonia inter æstum Maris, ac Lunæ motum diurnum deprehenditur; sed etiam revolutio synodica respectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique observationes abundè declarant rationem Fluxûs & Refluxûs Maris à situ cùm Lunæ tum etiam Solis conjunctim pendere: ex quo statim prono ratiocinio consequitur, vires illas æstum Maris producentes, quæcunque etiam sint, cùm Lunam potissimùm, tùm verò etiam Solem respicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejusmodi vires Solem & Lunam respicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis est æstus Maris, producere queant, jure ac ratione statui possint, an secùs. Ac si pluribus modis istiusmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit dispiciendum, quænam cum aliis Phænomenis consistere possint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum Phænomenis conspiret, nisi virium,

quæ

quæ assumuntur, existentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd si autem contrà, effectus ejusmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà existere alia Phænomena clarè docuerunt, atque summus explicationis cum experientiâ consensus deprehendatur, dubium erit nullum quin ista explicatio sit genuina & sola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis Phænomenon æstûs Maris commodè explicari posset, tamen ob hanc solam caussam istiusmodi vires statuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit dispiciendum, num aliæ rationes ejusmodi vires non solùm admittant, sed etiam actu existere manifestò indicent. Perlustremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, sciscitemurque paucis an ad motum reciprocum Oceano inducendum sint idoneæ: tales enim vires si in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impensus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem si Solem spectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri & quasi attrahi, idque fortiùs in minori distantia, debilius verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam distantiarum: ex quo spontè sequitur non solùm universam Terram, sed etiam singulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem sollicitatur, ac si omnis materia in ejus centro esset congesta; interim tamen partes circa superficiem sitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis sint remotæ à Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis, modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in Fluidis necessariò oriri debet. Quocircà ista Solis vis in præsenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, si fortè sola caussam æstûs Maris non constituit, certè effectum aliarum virium necessariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus suis partibus versùs Solem sollicitatur; ita eorum sententia non multùm à veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ similem vim collocant. Observationes quidem hujusmodi vim in Lunâ non demonstrant sicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ suâ à Luna omninò non affici deprehendatur: sed si docuerimus eandem vim ad Lunam respicientem, quæ æstui Maris producendo sit par, in motu Terræ nullam sensibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admissione consistere videbatur, multùm mitigabitur. Hujusmodi autem vis existentia aliis rationibus, nullo ad æstum Maris habito respectu, satis clarè evinci potest; quia enim nullum est dubium, quin Luna ad Terram constanter feratur, ob æqualitatem actionis & reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli necesse est. Namque si ponamus Sole penitùs sublato, Terræ ac

CAP. I. Lunæ omnem motum ſubitò adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpenſis principiis mechanicis, Terram intereà non prorsùs eſſe quieturam, ſed Lunæ obviam ituram, concurſumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, niſi Terra actu ad Lunam ſollicitetur. Deinde in ipsâ Lunâ gravitatem dari ſimilem huic, quam in Terrâ ſentimus, negari non poteſt; niſi enim talis vis in Lunâ vigeret, Partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etſi ſit admodùm lentus, & tempori periodico æqualis, jam dudùm avolaſſent, parteſque ſolidæ conſiſtentiam ſuam amiſiſſent. Pluribus deniquè aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari poſſet tale corpus mundanum, cujuſmodi eſt Luna, ſubſiſtere non poſſe, niſi vortice ſit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd ſi autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos uſquè admittamus, nulla omninò ratio ſuadet: quin potiùs ejuſmodi vim ſimilem ſtatui conveniet, reliquis in mundo deprehenſis, quæ quaſi in infinitum porriguntur, atque inverſam duplicatam tenent diſtantiarum rationem.

§. 10. His expoſitis manifeſtum eſt, & quaſi experientiâ convictum, Terram cum ſingulis ſuis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò ſollicitari, atque utramque vim proportionalem eſſe reciprocè quadratis diſtantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu exiſtant, conſtanterque effectum ſuum exerant, in præſenti negotio, quo in cauſam æſtûs Maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; niſi dilucidè antè ſit probatum, eas non ſolùm Fluxum ac Refluxum non generare, ſed ne quidem quicquam efficere. Si enim iſtæ vires illum duntaxat motum reciprocum Mari inducere valeant, quantumvis is etiam ſit exiguus, atque adeò æſtui Maris fortaſsè contrarius, earum tamen ratio neceſſariò erit habenda, cùm ſine illis vera cauſa, quæcumque ſit, neque inveſtigari neque cognoſci poſſit. Neque præterea ſanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iiſque cauſam æſtûs Maris collocare, antequam evidenter ſit demonſtratum, binas iſtas vires Solem Lunamque ſpectantes, quas non gratuitò aſſumſimus, ſed ex certiſſimis Phænomenis in mundo exiſtere novimus, ad Fluxum ac Refluxum Maris producendum non eſſe ſufficientes. In ſequentibus autem capitibus clariſſimè ſumus oſtenſuri, ab his duabus viribus non ſolùm in Oceano motum reciprocum generari debere, ſed etiam eum ipſum, qui æſtûs marini nomine inſigniri ſolet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram Fluxûs ac Refluxûs cauſam in ſolis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem eſt directa, altera ad Lunam, eſſe poſitam; hocque ſimul omnium eorum ſententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem Phænomenon adſcribere, vel cum his ipſis alias vires conjungere conantur.

§. 11.

§. 11. Quæstio igitur de causâ Fluxûs ac Refluxûs Maris, prouti ea ab Illustrissimâ Academiâ Regiâ est proposita, ad hanc deducitur quæstionem, ut binarum illarum virium, quibus singulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur; idque in distantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, causa assignetur Physica. Ex quo tractationem nostram bipartitam esse oportebit. Primò scilicet ex principiis Mechanicis dilucidè erit ostendendum, à binis illis viribus Solem Lunamque respicientibus cùm Fluxum ac Refluxum Maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo singula Phænomena distinctè explicari posse: hac enim parte absolutâ nullum superérit dubium, quin origo æstûs Maris his ipsis viribus, quas actu jam in mundo existere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium causa Physica indicari debet, cùm id sit præcipuum, quod Inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæsitamus; & clarissimis certissimisque demonstrationibus evincere pollicemur, per istas vires omnia omninò æstûs Maris Phænomena absolutissimè explicari posse; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquetur locus, cùm tota ad Geometriam & Mechanicam sublimiorem pertineat, calculoque analytico sit subjecta. Altera verò pars, in scientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm ista res occasione plurium quæstionum ab Academiâ Celeberrimâ antehac propositarum jam tanto studio sit investigata atque absoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus. CAP. I.

§. 12. Explosis hoc saltem tempore qualitatibus occultis missâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum saniori philosophandi modo nullatenùs consistere potest, omnium virium quæ quidem in mundo observantur, duplex statuendus est fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iste effectus semper vel ab allisione corporum, vel à vi centrifugâ proficiscitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora sunt prædita in statu suo sive quietis sive motûs æquabilis in directum perseverandi, debetur. Ob hanc enim ipsam facultatem corpus in motu positum alia corpora, quæ vel ipsius motui directè sunt opposita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum sollicitat; atque priori casu regulæ collisionis corporum, posteriori verò vis centrifugæ indoles & proprietates oriuntur ac demonstrantur. Cùm igitur omnia corpora terrestria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò sollicitentur, causa hujus sollicitationis continuo appulsui materiæ cujusdam subtilis, vel vi centrifugæ similis materiæ tribui debebit. Priori igitur casu materiam subtilem statui oporteret, quæ constanter summâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujusmodi verò hypothesis ob maximas difficultates, quibus est involuta, admitti minimè potest. Primò enim perpetuò novis viribus

CAP. I. ribus esset opus, quæ materiam subtilem indesinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæstio non majorem lucem assequeretur. Deinde talis motus per se diu consistere non posset, propter perpetuum materiæ subtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum istiusmodi positione permixta.

§. 13. Exclusâ igitur materiæ subtilis continuâ allisione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idoneâ, alia harum virium causa non relinquitur, nisi quæ in vi centrifugâ consistat. Quemadmodum autem materia subtilis in gyrum acta ac vorticem formans non solùm animo concipi, sed etiam in mundo persistere queat, jam satis superque est expositum, cùm in dissertationibus, quæ cùm quæstio de causâ gravitationis agitaretur, laudes Illustrissimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis simul dilucidè est ostensum, quomodo ejusmodi vortices comparatos esse oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis distantiarum à centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana sit facta, ut vix quicquam ad præsens institutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini sine ullâ hæsitatione supersedemus; idque eò magis, quòd Celeberrima Academia ejusmodi amplam atque adeò jam confectam digressionem postulare haud videatur. Quoniam enim quæstio de causa gravitatis cùm versùs Terram tum etiam versùs Solem & Planetas jam satis est investigata ac diremta; nunc quidem, si cujuscunque Phænomeni causa eò fuerit perducta, ibidem acquiescendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis investigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præsenti negotio sufficere posset, si æstûs Maris causa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta Phænomena reducatur, quorum causa non solùm habetur probabilis, sed etiam quæ sola sit veritati consentanea, cujusmodi est gravitatio tàm versùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Causam igitur Fluxûs ac Refluxûs Maris proximam in binis vorticibus materiæ cujusdam subtilis collocamus, quorum alter circa Solem, alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, si materiæ subtilis vorticem constituentis celeritas statuatur tenere rationem reciprocam subduplicatam distantiarum à centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in istiusmodi vortice posita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis distantiarum reciprocè est proportionalis. Vis absoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ distantiâ à centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet à celeritate materiæ subtilis absolutâ. Ac primò quidem, quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis absoluta ex tem-

tempore Terræ periodico cum distantiâ ejusdem à Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus distantia à centro Solis æqualis est semidiametro Terræ, eò sollicitetur vi, quæ sit 227512 vicibus major, quàm est gravitas naturalis in superficie Terræ. Metiemur autem hanc ipsam vim absolutam cujusque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in distantiâ à suo centro semidiametro Terræ æquali: ex quo si vis gravitatis terrestris designetur per 1. erit vis absoluta Solis $=227512$, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ S. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis absolutam indicabimus litterâ L, cujus valorem NEWTONUS rectè cùm ex ipso Fluxu ac Refluxu Maris, tùm etiam ex præcessione Æquinoctiorum constituisse videtur circiter $\frac{1}{40}$. Quare si, positâ Terræ semidiametro $=1$, corporis cujusdam à centro Solis vel Lunæ distantia fuerit x, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem sollicitatur vel ad Lunam, vel $=\frac{L}{xx}$ vel $=\frac{S}{xx}$, uti ex indole horum vorticum prona consequentia fluit. In his quidem litterarum S & L determinationibus assumsimus mediam Solis à Terra distantiam 20620 semidiametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali $10''$ sequitur, Lunæ verò à Terra distantiam mediam 60 semid. Terræ; interim tamen vires ad Mare movendum hinc ortæ ab his hypothesibus non pendent, uti sequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æstum Maris per binas vires, quarum altera Solem respicit, altera Lunam, sumus expositur, facilè videri possemus eandem omninò explicationem suscipere, quam NEWTONUS dedit in suis Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis. Primùm autem notandum est, quòd si NEWTONUS veram causam hujus Phænomeni assignasset, summoperè absurdum atque absonum foret, novitatis studio aliam causam, quæ certò falsa futura esset, excogitare. Deinde verò NEWTONUS ne vestigium quidem reliquit, ex quo causa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi posset, sed potiùs de causæ Physicæ inventione, qualem Academia Regia potissimum requirit, desperasse videtur; id quod ejus asseclæ apertè testantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam esse, neque ulli causæ externæ deberi firmiter asserunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique NEWTONUS deductionem & expositionem omnium Phænomenorum ad æstum Maris pertinentium minimè perfecit, sed quasi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum solutionem postulat, quæ NEWTONUS non est aggressus: cùm enim hujus quæstionis enodatio amplissimos calculos requirat, ipse analysin vitans pleraque tantum obiter indicasse contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipsius explicationem est relictus. Neque enim in his viribus veram æstûs Maris causam contineri antè certum esse potest, quàm absoluto cal-

CAP. II. calculo perfectus consensus Phænomenorum cum Theoriâ fuerit declaratus.

CAPUT SECUNDUM.

De viribus Solis & Lunæ ad Mare movendum.

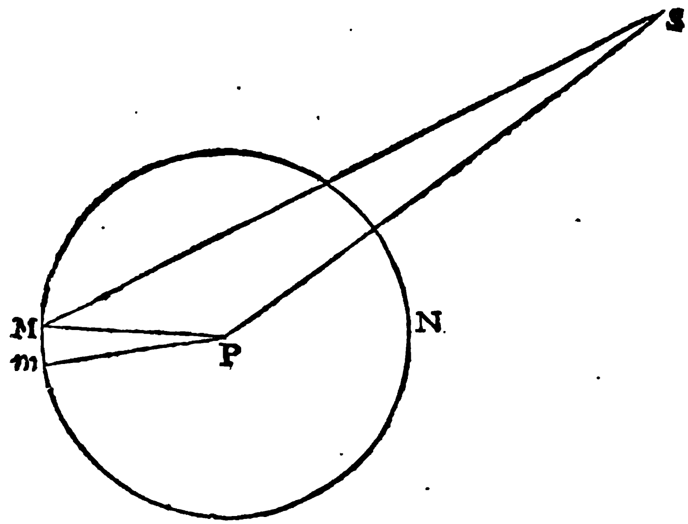
§. 16. EFFECTUS, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes à viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tàm ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in suâ orbitâ determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac Mare agitandum multò esse fortiorem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentiùs evolvemus & perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque à vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse & viciſſim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus & in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi à viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus per-

perturbetur, producit. Ita vis Solis, etsi est maxima, tamen ob insignem distantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde à Lunâ multò major agitatio Oceani resultat, quàm à Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, insigniter major sit alterâ Lunam respiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur, hocque adhuc planius fiet, si utriusque vis effectus ad calculum revocabimus. CAP. II.

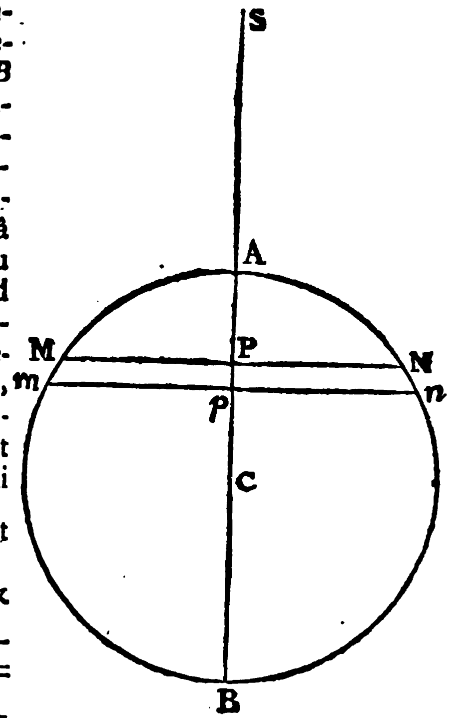
§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus singulæ Terræ partes vel à Sole vel à Luna sollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ universa Terra, si in suo centro gravitatis esset concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque est ea ipsa vis, quæ Terræ motum progressivum in sua orbita respicit & turbat; deindè dispiciendum est, quantùm vires, quibus singulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali discrepent. Quòd si enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque singulæ situm suum relativum inter se retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas singulas partes sollicitantes, eò magis eæ inter se commovebuntur, situm relativum permutabunt. In hac autem investigatione, simul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio est habenda; hæc enim vis in causa est, quòd quantumvis vires Solis & Lunæ in diversis Terræ regionibus sint inæquales, æquilibrii tamen status detur, in quo partes tandem singulæ conquiescant, neque perpetuò inter se agitari pergant. Atque hanc ob rem singulæ Terræ partes à tribus viribus sollicitatæ considerari debebunt, primò scilicet à propriâ gravitate, quâ directè deorsum nituntur; tùm verò à vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò à vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujusmodi Phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit investigandum.

CAP. II.



§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel à Sole vel à Lunâ urgetur, definiamus, consideremus primùm peripheriam circuli MN tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro P verticaliter immineat Sol vel Luna in S, ita ut recta PS ad planum circuli MN sit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM = y$, & distantia $SP = x$, ac vis sive Solis sive Lunæ absoluta $= S$. His positis elementum peripheriæ Mm pelletur ad S in directione MS vi acceleratrice $= \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx+yy}$, positâ cùm vi gravitatis naturalis in superficie Terræ $= 1$, tùm etiam semidiametro Terræ $= 1$: atque hanc ob rem elementum Mm versùs S nitetur vi $= \frac{S \times Mm}{xx+yy}$. Resolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in MP, alterius verò sit parallela directioni PS; atque evidens erit vires omnes MP per totam peripheriam se mutuò destruere, alterarum verò mediam directionem cadere in PS, ac vim his omnibus æquivalentem iisdem conjunctim sumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum Mm in directione ipsi PS parallela vi $= \frac{Sx \times Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde positâ ratione radii ad peripheriam $= 1 : \pi$ tota circuli MN peripheria, quæ erit $= \pi y$, urgebitur seu quasi gravitabit versùs S in ipsâ directione PS vi $= \frac{\pi Sxy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs S sollicitabitur, prodibit, si vis motrix inventa dividatur per massam movendam, quæ est $= \pi y$; eritque $= \frac{Sx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 20.



§. 20. Hoc præmisso, contemplemur superficiem sphæricam genitam conversione circuli AMB circa diametrum AB; sitque semidiameter $AC = BC = r$; erit ipsa superficies $= 2\pi r r$. Jam attrahatur hæc superficies ad Solem Lunamve in S, existente distantiâ $SC = a$; atque ad vim totalem seu conatum quo integra superficies ad S tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus conversione elementi Mm circa diametrum AB, quæ protensa per S transeat. Positis igitur $SP = x$, $PM = y$, erit per §. præc. conatus hujus annuli in directione $PS = \frac{\pi S x y . Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. At posito $Pp = dx$, erit $Mm = \frac{r\,dx}{y}$, & $xx + yy = 2ax - aa + rr$, unde annuli conatus versùs S erit $= \frac{\pi S r x\,dx}{(2ax-aa+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale est $= C + \frac{\pi S r(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$, ex quo conatus portionis superficiei sphæricæ conversione arcus AM ortæ prodibit $= \frac{\pi S r r}{aa} + \frac{\pi S r(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$. Quare si ponatur $SP = SB$ seu $x = a + r$, emerget conatus totius superficiei sphæricæ $= \frac{2\pi S r r}{aa}$: hincque cùm ipsa superficies sit $= 2\pi r r$, erit vis acceleratrix quâ superficies sphærica actu versùs S tendet $= \frac{S}{aa}$, ideoque tanta, quanta foret, si tota superficies in centro C esset collecta.

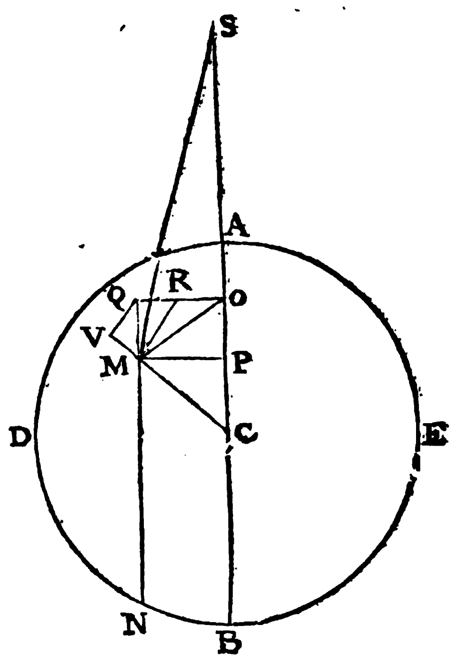
§. 21. Cùm igitur superficies sphærica perinde ad Solem sive Lunam in S sollicitetur, ac si tota in ipso centro esset conflata, hæc proprietas ad omnes superficies sphæricas, ex quibus integra Sphæra composita concipi potest, patebit, dummodo singulæ hæ superficies ex materiâ homogeneâ constent, sive quod eodem redit, ipsa Sphæra in iisdem à centro distantiis sit æquè densa. Hanc ob rem ejusmodi Sphæra quoque perinde ad S in directione PS urgebitur, ac si tota ipsius materia in centro C esset concentrata; hæcque proprietas non solùm in ejusmo-

CAP. II. di Sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi sunt confectæ, sed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ constant difformi; dummodo in æqualibus à centro distantiis, materia circumquaque sit homogenea seu saltem ejusdem densitatis. Cùm igitur Terram sibi repræsentare liceat tanquam Sphæram, si non ex uniformi materiâ conflatam, tamen sine ullo errore ita comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè densam includat, Terra quoque universa tàm à Sole quàm à Lunâ æquè sollicitabitur, ac si omnis ejus materia in centro esset collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratissimis ab Illustrissimâ Academiâ Regiâ institutis passim mensuris satis est demonstratum, Terræ figuram ad polos esse conpressam, tamen tantilla à perfectâ Sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc instituto tutò negligi potest. Parique ratione, etiamsi Terra in æqualibus à centro distantiis non sit æquè densa, tamen differentia certè non est tanta, ut error sensibilis inde sit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad situm partium Terræ relativum immutandum, definienda est vis acceleratrix, quâ centrum Terræ sive ad Solem sive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, si comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus & in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino sitûs mutatio, nullaque proinde Maris agitatio orietur. Sed Terra in se spectata omnium partium situm mutuum invariatum conservabit. At si vires, quibus singulæ partes à Sole aut Lunâ urgentur, discrepent à vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum nisi firmissimè inter se sint connexæ, in situ suo mutuo perturbari debebunt. Hocque casu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, sensibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iste motus, qui in singuils Terræ partibus generatur, à differentiâ inter vires centrum Terræ & ipsas partes sollicitantes proficiscatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innotescet, si à vi acceleratrice illam particulam sollicitante auferatur vis acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque subtractio ita instituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam sollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compositione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco suo deflectens.

§. 23. Consentanea est hæc reductio principiis Mechanicis, quibus statuitur motum relativum in systemate quotcunque corporum & à quibuscunque viribus sollicitatorum manere invariatum, si non solùm toti systemati motus æquabilis in directum simul imprimatur, sed etiam singulis partibus vires æquales quarum directiones sint inter se parallelæ, applicentur. Nostro igitur casu motus intestinus partium Terræ non turbabitur, habitur, si singulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd si autem istæ vires æquales sint illi, quâ tota Terra seu centrum sollicitatur, & contrariæ, hoc ipso Terræ motum curvilineum & inæquabilem, quippe qui ab iisdem viribus oritur, adimemus. Quare si insuper toti Terræ motum æqualem & contrarium illi, quo actu fertur, impressum concipiamus, obtinebimus totam Terram quiescentem, atque etiam nunc partes perinde agitabuntur & inter se commovebuntur, ac si nullas istiusmodi mutationes intulissemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hâc reductione subsidium assequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, si centrum Terræ constituatur immotum, quàm si totalis motus singularum partium motibus esset permixtus. Hanc ob rem istâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò Phænomena æstûs Maris, prouti in Terrâ immotâ sentiri debent, eliciamus, quippe qui est casus naturalis, ad quem omnes observationes sunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent. CAP. II.

§. 14. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus $ADBE$ urgeri ad Solem Lunamve in S existentem, cujus vis absoluta seu ea, quam in distantiâ à centro suo S semidiametro Terræ æquali exerit, sit $= S$, distantia verò centri Terræ C ab S seu CS ponatur $= a$; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in C collecta sollicitabitur in directione CS, $= \frac{S}{aa}$. Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque M cujus situs ita sit definitus, ut sit $CP = x$ & $PM = y$, existente MP normali ad CS; hinc igitur habebitur $SP = a - x$ & $SM = \surd((a-x)^2 + y^2)$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula M versùs S pelletur, erit $= \frac{S}{(a-x)^2+y^2}$; à quâ

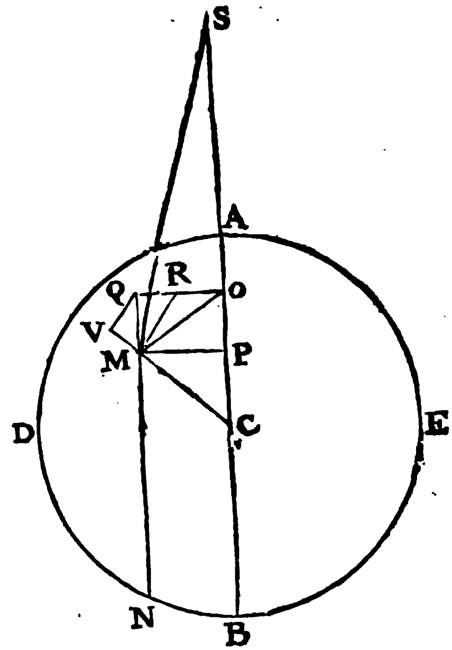


cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra versùs S nititur, concipienda est particulæ M applicata vis $= \frac{S}{aa}$ in directione MN ipsi CS parallela & opposita; quæ duæ vires particulam M æquè afficient ac si universa Terra quiesceret vel uniformiter in directum moveretur, qui casus ab il-

 le-

CAP. II. lo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innotescet, quo particula M ☿ vi ad S directa de loco suo recedere annitetur: ad ipsum autem motum definiendum insuper vis gravitatis erit respicienda: & quia hæc particula non est libera, sed quaquaversùs materiâ terrestri circumdata, investigari oportet, quantum ista materia effectum viribus sollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc capite nobis nondum est propositum in ipsum effectum ab his viribus oriundum inquirere, sed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujusmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam M sollicitantium resultent. Hunc in finem resolvatur vis MS in duas laterales, quarum alterius directio parallela sit ipsi CS, altera verò in MP cadat: ex quo reperietur vis illa particulam M in directione MQ urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; altera verò vis in directione MP trahens $= \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula M insuper trahatur in directione MN vi $= \frac{aa}{S}$, tres istæ vires à Sole Lunâve in S existente reducentur ad duas, quarum altera in directione MQ urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens $MP = \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.



Quare si recta MQ & MP his viribus proportionales capiantur, & rectangulum $MQOP$ compleatur, exprimet diagonalis MO tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli OMP tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, si fiat ut MP ad MO ita $\frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipsa quarta proportionalis erit vis particulam M in directione MO sollicitans, quæ oritur à vi ad S tendente.

§. 26. Ut autem istæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio est MC, conjungi queant, resolvantur eæ in binas, quarum altera in ipsam directionem MC cadat, alteriûs verò directio sit MR normalis

malis ad MC. Ad hoc commodissimè præstandum, resolvatur vis MS primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipsi CS parallelam, alteriùs verò directio in ipsam MC incidat. Cùm igitur sit $MC = \surd(x^2+y^2)$ erit prior vis $=\frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, posterior verò $=\frac{S\surd(x^2+y^2)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At si à priori auferatur vis $=\frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam M in directione MQ sollicitans $=\frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{S}{a^2}$. Jam ex Q in CM productam demittatur perpendiculum QV, eritque ob similitudinem triangulorum QVM & MPC vis gravitati contraria secundùm directionem MV agens ex vi MQ orta $=\frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\surd(x^2+y^2)}-\frac{Sx}{a^2\surd(x^2+y^2)}$, unde omninò particula M à vi ad S tendente versùs C urgebitur vi $=\frac{Sx}{a^2\surd(x^2+y^2)}-\frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\surd x^2+y^2)}$. Præterea verò eadem particula M in directione MR ad MC normali sollicitabitur vi $=\frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\surd(x^2+y^2)}-\frac{Sy}{a^2\surd(x^2+y^2)}$.

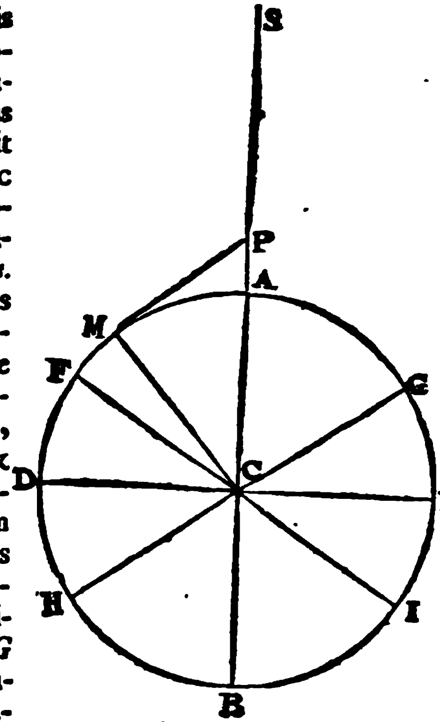
CAP. II.

§. 27. Tametsi istæ expressiones tantoperè sint compositæ, ut parum ex iis ad usum deduci posse videatur, tamen si consideremus distantiam Lunæ à Terrâ, multò magis autem distantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates x & y respectu quantitatis a exiguas admodum esse; per approximationem satis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim sit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y)^2)^{\frac{3}{2}}}=(a^2-2ax+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{a^3}+\frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5}+\frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ satis tutò substitui poterit $\frac{1}{a^3}+\frac{3x}{a^4}+\frac{3(4xx-yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula M præter gravitatem à vi Solis sive Lunæ in S existentis ad centrum Terræ C in directione MC urgetur, $=\frac{S(yy-2xx)}{a^3\surd(x^2+y^2)}+\frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\surd(x^2+y^2)}$. Præterea autem eadem particula M sollicitabitur in directione MR ad MC normali, vi $=\frac{3Sxy}{a^3\surd(x^2+y^2)}+\frac{3Sy(4xx+yy)}{2a^4\surd(x^2+y^2)}=\frac{3Sy}{a^3\surd(x^2+y^2)}\left(x+\frac{4xx-yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi posteriores multis vicibus excedant, rem crassiùs inspiciendo, particula M à vi Solis Lunæve secundùm MC urgebitur vi $=\frac{S(yy-2xx)}{a^3\surd(x^2+y^2)}$, in directione verò MR vi $=\frac{3Sxy}{a^3\surd(x^2+y^2)}$.

§. 28.

CAP. II.

§. 28. Ex his igitur postremis formulis intelligitur ab actione Solis sive Lunæ in S existentis gravitatem particulæ M augeri si ejus situs respectu rectæ SC ita fuerit comparatus, ut sit $yy > 2xx$ hoc est tangens anguli $MCP > \sqrt{2}$ posito sinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, si fuerit $yy > 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens est $= \sqrt{2}$ contineat $54^\circ, 45'$ circiter, si concipiatur circulus Terræ maximus quicunque $ADBE$, cujus planum per punctum S transeat, in eoque ducantur rectæ FCI & GCH, quæ cum rectâ SAB angulos constituant $54^\circ\ 45'$; tùm omnes Terræ particulæ in spatiis FCH & GCI sitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in spatiis FCG & HCI positæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propositâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas à Sole Lunâve in S existente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula M in directione horizontali MR urgetur, (*vide figuram ad pag.* 298.) affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræsentatur, verget, si quantitates x & y ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, si earum altera sit affirmativa, altera negativa. Quare si particula M sita fuerit vel in quadrante ACD vel ACE, tum vis horizontalis ad rectam CA tendet; contrà verò hæc vis ad radium CB dirigetur, si particula M sit vel in quadrante BCD vel BCE constituta. Ex quibus perspicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemisphæria, superius scilicet DAE & inferius DBE, inter se esse ferè similes; quæ similitudo quoque in ipso æstu Maris observatur.



§. 29. Ponamus nunc particulam M in ipsâ Terræ superficie esse constitutam, eritque $\sqrt{(x^2 + y^2)} = 1$ ob Terræ semidiametrum $= 1$. Qnare si particula M fuerit posita in M, existente anguli ACM sinu $= y$ & cosinu $= x$, ejus gravitas naturalis acceleratrix à Sole Lunâve in S augebitur vi $= \frac{S(y^2 - 2xx)}{a^3}$, secundùm horizontem autem in direc-

tione

tione MR urgebitur vi $= \frac{3Sxy}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula M posita fuerit in D vel E, quibus in locis punctum S in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem A & B, quæ punctum S vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2S}{a^3}$: ita ut maximum gravitatis decrementum duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3Sxy}{a^3}$ maxima evadet, si angulus ACM fuerit semirectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum S conspicitur vel 45° gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum latet: his igitur casibus ob $xy = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3S}{2a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam SC inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3S}{2a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus. CAP. II.

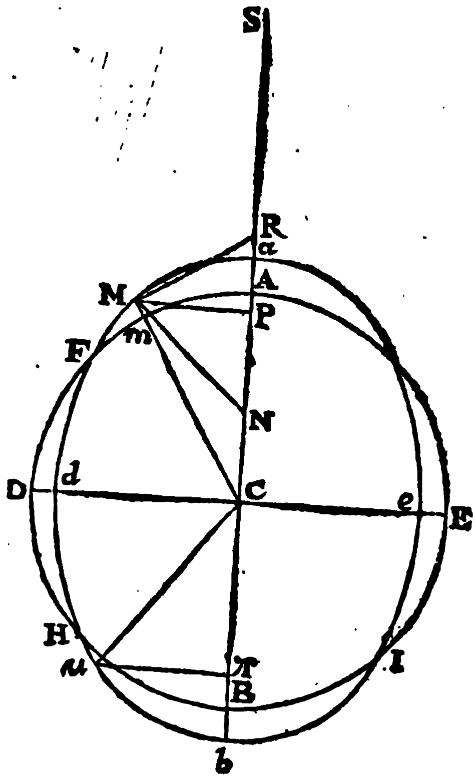
§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{38535570I}$; pro Lunâ autem quia est $S = \frac{1}{40}$ & $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, ceteris paribus; atque si Solis & Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$ seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{3500000}$, maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$; unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$, hoc verò casu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cùm gravitas maximè est diminuta, CAP. II. & cùm maximè est aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001; hoc est ut 4666666 ad 4666667, ex quo satis perspicitur differentiam hanc minimè percipi posse. Similis autem omninò est ratio alterius Phænomeni declinationis scilicet à situ verticali comparata, quæ nunquam ad $5'''$ exsurgere potest.

CAPUT TERTIUM.

De Figurâ, quam vires cùm Solis, tùm Lunæ, Terræ inducere conantur.

§. 31. Cum igitur in capite præcedente vires tam à Sole quàm à Lunâ oriundas determinaverimus, quibus singulæ Terræ particulæ ad situm relativum cùm inter se tùm respectu centri, quod in hoc negotio tanquam quiescens consideratur, immutandum sollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipsum motum, quo singulæ particulæ inter se commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc investigatio sit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter se respicientibus, qualia vix usquam adhuc reperiuntur; in hoc capite rem secundùm principia statica ulteriùs persequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis & Lunæ cùm seorsim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ seu aquâ cinctam contemplabimur, quò sollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc scilicet negotio Solem & Lunam pariter ac ipsam Terram quiescentes concipimus, ita ut inter se perpetuò eundem situm relativum conservent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad item situs relativus duret. Perspicuum autem est cognitionem hujus figuræ magno futuram esse adjumento ad ejusdem figuræ transmutationem definiendam, si tam Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Consideremus igitur primùm Terram in statu suo naturali, in quem se solâ vi gravitatis composuit; in quo, cùm habitura sit figuram sphæricam, repræsentet circulus $ADBE$ seu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfusam ponimus. Versetur jam Sol vel Luna in S, à cujus vi cùm gravitas naturalis tam in A quàm in B diminuatur, in D verò & E augeatur, manifestum est Terram seu potiùs aquam illi circumfusam elevatum iri in A & B, contrà verò in D & E deprimi, idque eousque, quoad sollicitationes à Sole Lunâve in S oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ.



Sit itaque curva $a\,d\,b\,e$ ea figura, quæ circa axem $a\,b$ rotata generet Terræ formam, quam à vi ad S directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio constitutæ, necesse est ut directio media omnium sollicitationum, quibus singulæ Terræ particulæ in supremâ superficie sitæ urgentur, ad ipsam superficiem sit normalis. Quare si particulam quamcunque M spectemus, ea primùm à gravitate naturali in directione MC urgetur deorsùm, idque vi, quam constanter ponimus $= 1$; quippe quæ est ipsa gravitas in superficie Terræ, eò quòd elevatio vel depressio particulæ distantiam ejus à centro Terræ, à quâ variatio gravitatis pendet, sensibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula M à vi in S existente sollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipsam MC incidit, alterius verò in MR normalem ad MC. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam MN normalem ad curvam $a\,M\,d$, quo ipso natura hujus curvæ determinabitur.

§. 33. Dubium hîc subnasci posset, quod cùm ad præsens institutum omnium virium, quibus singulæ particulæ sollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ à vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non solùm non est infinitè parva, sed multis vicibus major, quàm vires quæ vel à Sole vel Lunâ resultant: sed quia hæc vis constantem producit effectum, Terræ scilicet figuram sphæroidicam ad polos compressam, mutationem, quæ in Fluxu ac Refluxu Maris observatur, sensibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ sphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam à Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifestum autem est, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve à sphæricâ recedat, tantundem aquæ figuram admisso motu diurno Terræ à figurâ sphæroidicâ esse discrepaturam. Quâpropter in hoc negotio sufficere potest, si, Terrâ instar sphæræ perfectæ consideratâ, definiamus quantam differentiam

CAP. III. tiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hac enim determinatâ, ſi Terræ motus vertiginis reſtituatur, perſpicuum erit totam figuram ſub æquatore intumeſcere, ſub polis autem ſubſidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depreſſio aquæ à viribus Solis Lunæve maneat. Namque ſi ulla etiam varietas in æſtu Maris à motu vertiginis Terræ proficiſcatur, ea calculo monſtrante nuſquam major eſſe poteſt parte $\frac{1}{389}$ æſtûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam cauſam operæ pretium eſt tam complicatos & abſtruſos calculos inire, ad quos perveniretur, ſi Terræ figura naturalis à ſphæricâ diverſa poneretur, atque inſuper vis centrifuga à motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

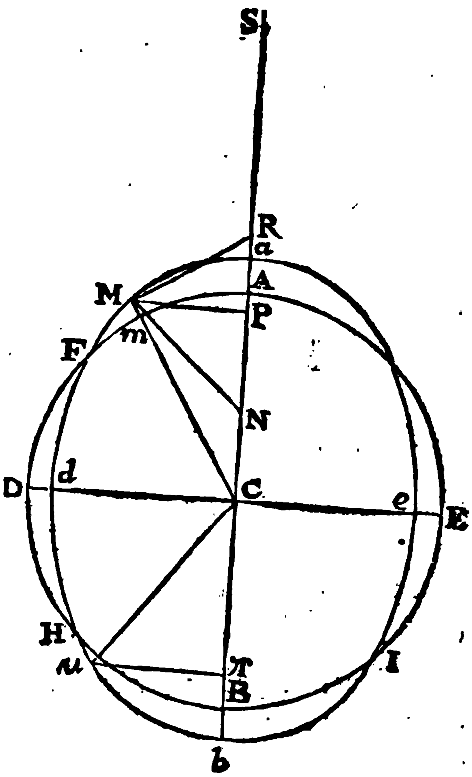
§. 34. Ad curvam igitur $aMdb$, cui ea quæ ex alterâ parte axis ab ſimilis eſt & æqualis, determinandam, ponatur vis abſoluta ſive Solis ſive Lunæ in S exiſtentis $= S$, diſtantia $CS = a$, ac ductâ ſemiordinata MP vocetur $CP = x$, & $PM = y$. Ex præcedenti igitur capite habebitur vis, quâ punctum M vel à Sole vel Lunâ versùs C urgebitur $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$, inſuper autem idem punctum M ſollicitabitur in directione MR normali ad MC vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx-yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$. Præter has verò vires punctum M gravitate naturali deorſum pellitur vi $= 1$ ſecundùm directionem MC, ita ut punctum M ab omnibus his viribus conjunctim in directione MC deorſum urgeatur vi $= 1 + \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$ ubi ob 1 ſequens terminus tutò negligi poteſt, & in directione MR vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$; quarum duarum virium ſi MN ponatur media directio, prodibit per regulas compoſitionis motûs anguli CMN tangens $= \frac{3Sy(2ax+4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}+2Sa(yy-2xx)}$, quæ diviſione actu inſtitutâ, iiſque terminis neglectis in quorum denominatoribus a plures quàm quatuor obtinet dimenſiones, abit in hanc expreſſionem $\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, quæ eſt ea ipſa formula, quâ vis MR exprimebatur. Quocirca angulus CMN prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, ſed tantùm à vi horizontali ſingulis particulis in Terræ ſuperficie ſitis impreſſâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipſa media directio MN debet eſſe ad curvam aMd in puncto M normalis, erit ſubnormalis $PN = -\frac{ydy}{dx}$ & $CN = \frac{xdx+ydy}{dx}$. Cùm igitur ſit anguli MNP tangens $= \frac{-dx}{dy}$ & anguli MCP tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc eſt anguli CMN tangens $= \frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}$, quæ ſuperiori expreſſioni, quâ

hæc

hæc eadem tangens designabatur, æqualis posita pro curvâ quæsitâ $aMdb$ sequentem præbebit æquationem $\frac{ydy+xdx}{ydx-xdy} = \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, CAP. III.

ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(xx+yy)} = z = MC$, & anguli MCA cosinum $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = u$, unde fiet $x = uz$ & $y = z\sqrt{(1-uu)}$, atque $ydx - xdy = \frac{zzdu}{\sqrt{(1-uu)}}$, itemque $xdx + ydy = zdz$. Hac autem factâ substitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{dz}{zz} = \frac{3Sudu}{a^3} + \frac{3Szdu(5uu-1)}{2a^4}$, cujus postremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evanescit, si abesset, foret integrale $\frac{z}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3Suu}{2a^3}$ seu $z = c + \frac{3Scccuu}{2a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale esse $z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} + \frac{3Sc^3V}{2a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V = \frac{cu^3-3u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3} + \frac{Sc^3u(5uu-3)}{2a^4}$, quod autem integrale proximè tantùm satisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipsius z valorem per u commodiùs & propiùs definiendi.



§. 36. Cùm autem soliditas sphæroidis, quod generatur ex conversione curvæ adb circa axem ab, æqualis esse debeat soliditati Sphæræ radio $CA = 1$ descriptæ, hinc constans quantitas c quæ per integrationem est ingressa, definietur: id quod commodissimè præstabitur, si utraque sphæroidis semissis, superior scilicet versùs S directa, atque inferior seorsim investigetur. Quoniam igitur pro semissi superiori est $CP = x = zu = cu + \frac{3Sccu^3}{2a^3} + \frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$ & $MP^2 = y^2 = z^2(3-uu) = (1-uu)\left(cc + \frac{3Sc^3u^2}{a^3} + \frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yydx$, cui soliditas genita conversione spatii $dCPM$ est proportionalis, $= c^3u - \frac{c^3u^3}{3} + \frac{5Sc^4u^3}{2a^3}$

 $-3Sc$

CAP. III. $-\frac{3Sc^4u^5}{2a^5}-\frac{3Sc^5u^2}{a^4}+\frac{21Sc^5u^4}{4a^4}-\frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Posito igitur $u=1$, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}-\frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit $Cac=x=c+\frac{3Sc^2u^2}{2a^3}-\frac{Sc^5u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}+\frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3+\frac{2Sc^4}{a^3}$ Quare cùm Sphæræ radio $=1$ descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1=c^3+\frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c=1-\frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsitâ habebitur, hoc valore loco c substituto, ista æquatio $x=1+\frac{S(3u^2-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur à Sole vel Lunâ in S existente áquam, cujus superficies antè erat in A, attolli in a, ita ut sit elevatio $Aa=\frac{S}{a^3}+\frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ B, aquam pariter elevari per spatium $Bb=\frac{S}{a^3}-\frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in A & B, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm excessus superioris elevationis super inferiorem sit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod discrimen respectu totius elevationis vix est sensibile. Contrà verò in regionibus lateralibus D & E, aqua circumquaque æqualiter deprimetur, & quidem per intervallum $Dd=Ee=\frac{S}{2a^3}$; ex quo ista depressio duplo minor est, quàm elevatio quæ in A & B accidit. In punctis præterea F, G, H & I, quæ à cardinalibus A & B distant angulo 54° 45′, quippe pro quo est $3uu-1=0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, sed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque M cognoscetur aquæ vel elevatio vel depressio ex angulo ACM, cujus cosinus u est sinus altitudinis sub quâ Sol vel Luna in S existens super horizonte conspicitur ab observatore in M constituto; hoc enim in loco aqua elevata erit supra naturalem altitudinem intervallo $=\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{S'u(5uu-3)}{2a^4}$: quæ expressio si sit negativa, Maris depressionem indicat. Hîc autem annotare non est opus, quòd si punctum S sub horizonte lateat, tum sinus depressionis maneat quidem u, sed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depressionem, quæ à solâ vi Solis ubique terrarum produci deberet, si, uti ponimus, omnia in statu æquilibrii essent constituta. Quoniam itaque est $S=227512$ atque $a=20620$ semid. Terræ, si una Terræ semidiameter assumatur

19695539

19695539 pedum Parif. erit $\frac{S}{a^3}=0{,}5072$ ped. feu pauxillum excedet femipedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evanefcens & imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus fub Sole verticaliter fitis, quæ habeant Solem vel in Zenith vel Nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolletur ad femipedem cum pollicis parte decimâ circiter; depreffio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte confpicient, ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur, ex quo totum difcrimen, quod à Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter affurget. Ifte Solis effectus autem diftantiæ tantum mediocri Solis à Terrâ eft tribuendus: quòd fi enim Sol verfetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ diftantiarum Solis à Terrâ, quia pendet à valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas fit $= \frac{163}{10000}$, erit intervallum Aa vel Bb, dum Sol in perigæo verfatur, $=0{,}5332$ ped. fin autem Sol in apogæo fit conftitutus, $=0{,}4825$ pedum; quorum differentia ad vicefimam pedis partem afcendit: valor autem medius eft $=0{,}5072$, quem pro mediocri diftantiâ Solis à Terrâ invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucufque dedimus folutum, quodque maximi eft momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in Mari elevando & deprimendo definiendos, NEWTONUS ne attigit quidem, fed aliam viam fecutus, non folùm indirectam, fed etiam erroneam, invenit Mare à folâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamen tam eandem vim Soli abfolutam quàm eandem diftantiam à Terrâ affumfiffet, quibus nos fumus ufi. Conclufit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis feu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ à motu diurno ortâ, quâ Terra fub æquatore extenditur ac craffior redditur quàm fub polis; atque affumit elevationem aquæ à vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ fub æquatore à vi centrifugâ factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed prætérquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo fuperftructum fundamento, noftrâ viâ directâ, quâ fumus ufi, ftatim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis affumtis principiis, elevationem aquarum à vi Solis oriundam directè & luculenter determinavimus; ac fi ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum inftitutum reftaret, id mox tolletur, cùm infrà idem problema aliâ methodo prorfus diverfâ fumus refoluturi, congruentemque folutionem exhibituri.

§. 40. Quamvis autem ifte Solis effectus in Mari tam elevando quàm deprimendo non adeò certus & planus effe videatur ob parallaxin

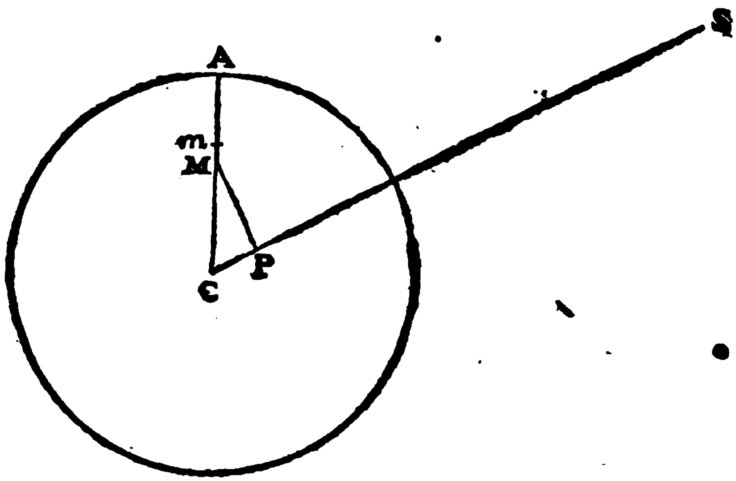
Solis,

CAP. III. Solis, quam $10''$ assumsimus, nondum accuratissimè definitam; à quâ tam distantia Solis à Terrâ a, quàm aestimatio vis absolutae S, pendet: tamen si rem attentiùs perpendamus, comperiemus expressionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quaecumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litterae S praecisè in eadem ratione, in quâ cubus distantiae a^3, mutabitur. Per leges enim motûs firmissimè stabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ à solo tempore periodico Terrae circa Solem determinari, cujus quantitas accuratissimè est definita. Quod ut clariùs appareat, consideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus semiaxis transversus seu distantia à Sole media sit $= a$, vis autem Solis absoluta $= S$, erit tempus periodicum semper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd si igitur tempus periodicum sit $= t$, erit t ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ & $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ absolutè inveniendum, exprimatur a in semidiametris Terrae, atque in minutis secundis dato tempore periodico t, erit semper $t = \frac{5064\frac{1}{2}\, a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{tt}$, positâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terrae semidiametro. At si tempus Terrae periodicum seu annus sidereus in minutis secundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0{,}50723$ ped. positâ semidiametro Terrae per observationes exactissimas 19695539 ped. Paris. Reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex superiori aequatione elevatio aquae à vi Lunae oriunda determinabitur; positâ enim vi Lunae absolutâ $= L$, poni oportet $S = L$, ejusque valor proximè erit $= \frac{1}{40}$, quem à NEWTONO repertum tantisper retinebimus, quoad verus valor per alia Phaenomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunae à Terrâ mediocris distantia est $= 60\frac{1}{2}$ semid. Terrae, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88{,}94$ ped. $= 2{,}223$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}47 = 0{,}037$ ped. Cùm autem Lunae excentricitas sit quasi $\frac{550}{10000}$; erit dum Luna in perigaeo versatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104{,}44$ ped. $= 2{,}611$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}82 = 0{,}045$. pedum. At si Luna fuerit in apogaeo, prodibit $\frac{S}{a^3} = L \times 75{,}74$ ped. $= 1{,}893$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}19 = 0{,}030$ pedum. Ex his igitur si Luna à Terrâ mediocriter distet, erit aquae elevatio $Aa = L \times 90{,}41$ ped. $= 2{,}260$ ped. elevatio autem $Bb = L \times 87{,}47$ ped. $= 2{,}187$ pedum: ac depressio ad latera $Dd = Ee = L \times 44{,}47$ pedum $= 1{,}112$ ped. Pro perigaeo verò Lunae fiet $Aa = L \times 106{,}26$ ped. $= 2{,}656$ pedum

dum; $Bb = L. 102, 62$ ped. $= 2, 565$ pedum; atque $Dd = Ee = L. 52,22 = 1, 305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $Aa = L. 76,93$ ped. $= 1, 923$ pedum, & $Bb = L. 74,55$ ped. $= 1,864$ pedum, atque $Dd = Ee = L. 37, 87$ ped. $= 0, 947$ pedum. CAP. III.

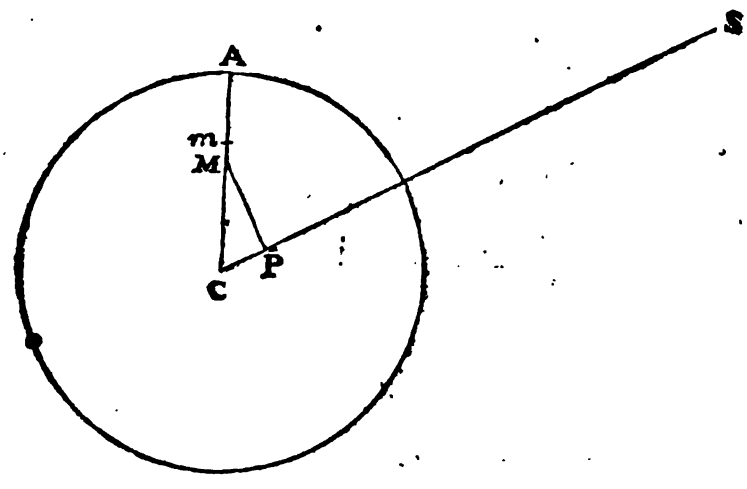
§. 42. Tametsi autem hac methodo non difficulter tam elevatio Maris quàm depressio quæ vel à Sole vel Lunâ seorsum gignitur, sit determinata, si quidem omnia ad statum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejusdem methodi ope easdem res definire, si Sol & Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus usus pro utroque casu æquè pateat; quæ cùm à priori penitùs sit diversa, simul ea, quæ jam sunt eruta atque à Newtonianis diversa deprehensa, maximè confirmabit. Petita verò est hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ



aqueæ à superficie Terræ ad centrum pertingentes sint intèr se æquiponderantes. Existente igitur vel Sole vel Lunâ in S, cujus vis absoluta ponatur $= S$, & distantia $SC = a$, sit AC columna aquea à superficie Terræ A ad centrum C usque pertingens, quæ altitudo AC sit $= h$. Ponatur anguli ACS cosinus $= u$, qui simul erit sinus altitudinis sub quâ punctum S à spectatore in A constituto super horizonte elevatum conspicitur; sumaturque intervallum quodcunque $CM = z$, & consideretur totius columnæ elementum $Mm = dz$. Hoc igitur elementum primò à gravitate deorsum versùs C urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis distantiis non satis constet, ponatur dignitati cuicunque distantiarum à centro, putà ipsi z^n proportionalis: mox enim planum fiet exponentem n nil omnino determinationes esse turbaturum. Urgebitur er-

CAP. III. go elementum Mm versùs centrum C vi $= z^n dz$; ex quo totius columnæ AC nisus deorsum à gravitate oriundus, erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Præterea autem elementum $Mm = dz$ à vi S sollicitabitur duplici modo, altero deorsum in directione MC, altero in directione ad illam MC normali, quæ posterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, solaque prior considerabitur. Demisso autem ex M in CS perpendiculo MP, positisque $CP = x$ & $PM = y$, erit $\sqrt{(x^2 + y^2)} = z$, & $x = uz$ atque $y = z\sqrt{(1 - uu)}$. At ex §. 27. vis, quâ particula Mm deorsum sollicitatur, est $= \frac{S(yy - 2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sx(3yy - 2xx)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$ $= \frac{Sz(1-3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3-5uu)}{2a^4}$. Quæ expressio per dz multiplicata,



tumque integrata facto $z = h$, præbebit totius columnæ AC nisum à vi S oriundum $= \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ AC nisus deorsum tendens erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; qui cùm in omnibus columnis debeat esse idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis semidiametro Terræ 1 in statu naturali à solâ gravitate deorsum nititur, quæ vis est $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur sequens emergit æquatio, $1 = h^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ est ea ipsa expressio, quam suprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem designet S Solis vim absolutam, a ejus distantiam à Terra, & u sinum anguli, quo Sol suprà horizontem est elevatus. Deinde sit simili modo pro Luna L ejus vis absoluta, b ejus distantia à Terrâ, atque v sinus altitudinis Lunæ super horizonte. Ex his igitur columna aquea $AC = h$ tam vi propriæ gravitatis quàm à viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum C urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis esse debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione resultat $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in A supra situm naturalem, quem à solâ gravitate sollicitata obtineret, à viribus Solis ac Lunæ conjunctim sollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex quâ expressione status aquæ vel elevationis vel depressionis ubique terrarum cognoscetur. CAP. III.

§. 45. Hanc posteriorem viam secuti, non solùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, sed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, & vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuisset insuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem AC, quam habitura esset à vi gravitatis & vi centrifugâ simul, seu quod eodem redit, in figurâ Terræ sphæroidicâ compressâ, esse $= f$, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ esse $= h$; atque manifestum est quantitates f & h quàm minimè ab 1 discrepare. Cùm igitur utriusque columnæ f & h idem debeat esse nisus deorsùm, columnæ autem f in quam sola gravitas & vis centrifuga agunt, nisus sit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff$, denotante α quantitatem à vi centrifugâ in A pendentem, columnæ verò h nisus sit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} - \alpha h^2 + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5v^2)}{2b^4}$, erit æqualitate factâ $f^{n+1} - (n+1)\alpha ff = h^{n+1} - (n+1)\alpha h^2 + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Lh^2(3-1vv)}{2b^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$. Ponatur $h = f + s$, erit ob α quantitatem vehementer parvam, a verò & b maximas, $0 = f^n s + \frac{Sf^2(1-uu)}{2a^3} + \frac{Lf^2(1-3vv)}{2b^3} - 2\alpha fs + \frac{Sfs(1-3uu)}{a^3} + \frac{Lfs(1-3vv)}{b^3} + \frac{Sf^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lf^3v(3-5vv}{2a^4}$, neglectis terminis in

CAP. IV. quibus s plures obtinet dimensiones, ob summam ipsius s parvitatem respectu ipsius f. Hinc itaque fiet

$$s = \frac{\frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Sfu(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lfv(5vv-3)}{2b^4}}{f^{n-2} - \frac{2\alpha}{f} + \frac{S(1-3uu)}{a^3 f} + \frac{L(1-3vv)}{b^3 f}}.$$

Quòd si porrò ponatur semiaxis Terræ per polos transiens $= 1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff = \frac{1}{n+1}$ & $f = 1 + \alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè discrepabit; sub ipso enim æquatore est $\alpha = \frac{1}{578}$, ubi quidem est maximum: unde omnino ut antè elevatio aquæ à viribus Solis ac Lunæ orta supra altitudinem naturalem $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$; discrimen enim quod revera aderit, sensus omnino effugiet, pendebitque simul à valore exponentis n.

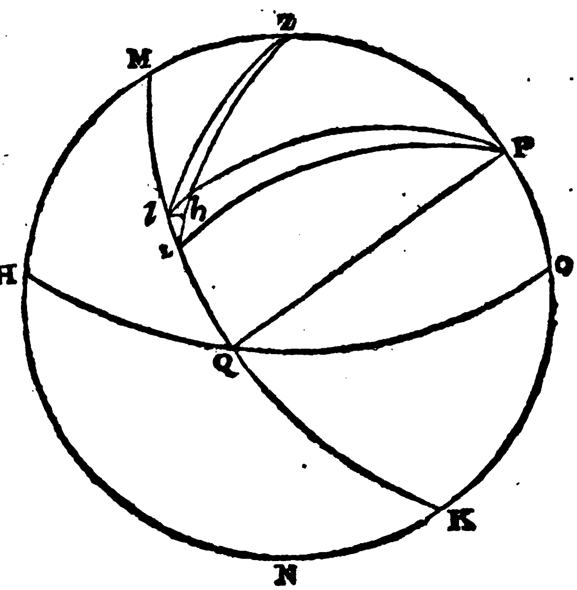
CAPUT QUARTUM.

De Fluxu ac Refluxu Maris si aqua omni inertiâ careret.

§. 46. QUÆ in capite præcedente sunt tradita respiciunt hypothesin assumtam, quâ Solem ac Lunam respectu Terræ perpetuò eundem situm tenere posuimus; ibique præcipuè statum æquilibrii, ad quem Oceanus à viribus Solis & Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem se res habet, si tam Luna & Sol quàm Terra in motum collocentur, quo casu ob perpetuam sitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adesse poterit; cùm enim tempore opus sit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo status oceani assignatus à vero discrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii situm, quem vires sollicitantes intendunt, pervenire non poterit, sed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamsi in ipsum æquilibrii situm perveniat, in eo tamen non acquiescet, sed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè constat. Hujus autem utriusque aberrationis ratio in inertiâ aquæ est posita, quâ fit ut aqua nec subitò in eum situm se conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii situm attigerit, ibi quiescat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem assumamus, hoc est istius indolis, ut non solùm quovis momento se in statum æquilibrii subitò recipiat, sed ibi etiam omnem motum insitum deponendo permaneat, quamdiu iste situs viribus sol-

sollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypothesi, perspicuum est aquam quovis temporis momento in eo ipso statu fore constitutam; qui secundùm præcepta capitis præcedentis positioni cùm Solis tùm Lunæ respondeat. CAP. IV.

§. 47. Ut igitur in hâc hypothesi, quâ Mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus statum Maris quàm commodissimè definiamus, primùm solam Lunam considerabimus, cùm in eâ præcipua æstûs Maris causa contineatur, atque tam Fluxus quam Refluxus Maris à transitu Lunæ per meridianum computari soleat: quòd si enim Lunæ effectus innotuerit, non solùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, sed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus simul agentibus proficiscitur. Propositus igitur sit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo Zenith sit Z, horizon HQO & P polus borealis, ita ut arcus PO sit hujus loci elevatio poli, & circulus $PZHNO$ meridianus. Sit porrò MLK parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in L; eritque tempus, quo Luna vel ex L ad meridianum M appellet, vel vicissim à meridiano ad L pertigit, ut angulus MPL, sive hoc tempus se habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod est 24 horarum 48′, uti se habet angulus MPL ad quatuor rectos.



Sit igitur anguli MPL cosinus $= t$, sinus elevationis poli PO seu sinus arcûs $PZ = p$, cosinus $= P$, ac sinus declinationis Lunæ borealis $= Q$, qui idem est sinus distantiæ Lunæ à polo PL, hujus verò ipsius arcûs sinus sit $= q$, cui simul cosinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob sinum totum constanter positum $= 1$, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo sphærico ZPL dentur arcus PZ & PL cum angulo ZPL, reperietur per Trigonometriam sphæricam arcûs ZL cosinus $= tpq + PQ$, qui simul est sinus altitudinis Lunæ supra horizontem, quem antè posuimus $= v$. Ex quibus erit $v = tpq + PQ$, & $3vv - 1 = 3(tpq + PQ)^2 - 1$, atque $5vv - 3 = 5$

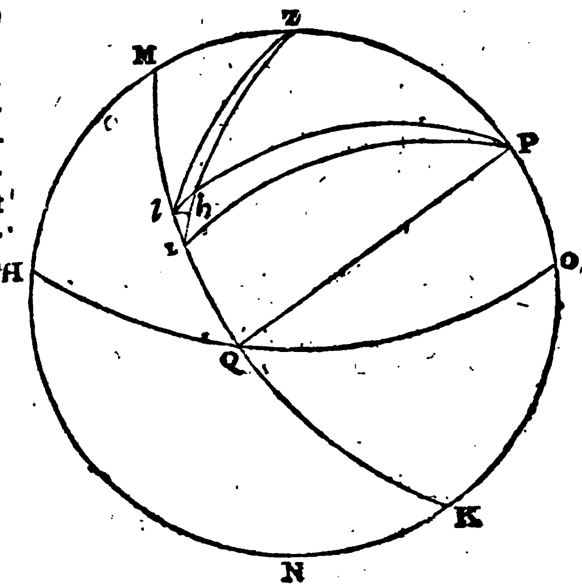
(tpq

CAP. IV. $(\iota pq+PQ)^2-3$; qui valores in formulis præcedentis capitis substituti præbebunt statum Maris, hoc est vel elevationem vel depressionem, pro loco proposito ad tempus assignatum.

§. 48. Quòd si ergo Lunæ vis absoluta ponatur $=L$, ejusque à Terrâ distantia $=b$, erit intervallum, quo aqua supra stâtum naturalem elevabitur, $=\frac{L(3(\iota pq+PQ)^2-1)}{2b^3}+\frac{L(\iota pq+PQ)(5(\iota pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$, quæ expressio si sit negativa, indicat aquam infra statúm naturalem esse depressam. Ponamus Lunam horizonte seu versùs austrum per meridianum transire, quo casu erit $\iota=1$; hoc igitur tempore aqua supra statum naturalem erit elevata intervallo $=\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}-\frac{L(pq+PQ)(5(pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna sub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ supra statum naturalem per intervallum $=\frac{L(3P^2Q^2-1)}{2b^3}+\frac{LPQ(5P^2Q^2-3)}{2b^4}$; quæ expressio semper est negativa, ideoque indicat aquam infra statum naturalem consistere. Namque cùm P ubique sit minor unitate nisi sub ipsis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30° assurgere possit, ex quo $Q<\frac{1}{2}$ & $QQ<\frac{1}{4}$, erit $3P^2Q^2$ perpetuò unitate minor; ideoque illa expressio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}+\frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, seu cùm posterior terminus vix sit sensibilis, ex solo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hâc autem expressione intelligitur aquæ elevationem à solâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, sive Luna sit super sive sub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem sive v sit affirmativum sive negativum. Deinde quia fit $3vv-1=0$ si Luna ab horizonte distet arcu 35° 16′, tum aqua in ipso statu naturali erit constituta, neque elevata neque depressa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35° 16′ vel supra vel infra horizontem versetur, è contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte distantia minor est quàm 35°. 16′. Omnino autem aqua maximè erit depressa dum Luna ipsum horizontem occupat, hocque tempore infra situm naturalem subsidet intervallo $\frac{L}{2b^3}=1,111$ pedum (§. 41); atque de hoc situ elevabitur recedente Lunâ ab horizonte sive super sive sub Terrâ. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur & occidit, tempore 24. hor. 48′ Mare bis maximè erit depressa, bisque elevata; status scilicet depressionis incidet in appulsus Lunæ ad horizontem, status autem elevationis in appulsus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulsu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte distat, spatio 24 h. 48′ aqua semel

ſemel tantum elevabitur, ſemelque deprimetur: ſub ipſis autem polis Cap. IV.
æſtus Maris omnino erit nullus, diurnus ſcilicet; nam variatio declinationis ſola ſtatum Maris turbabit.



§. 50. Cùm igitur ſub polis Terræ nullus ſit Fluxus ac Refluxus Maris, ſed aqua tantum aliquantulum aſcendat deſcendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æſtus Maris in aliis Terræ regionibus ſecundùm noſtram hypotheſin debeat eſſe comparatus. Conſiderabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima poſita ſit ſub ipſo æquatore, ſecunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit, maxima depreſſio aquæ ubique erit eadem, ſcilicet per intervallum $\frac{L}{2bx}$ infra ſitum naturalem, eaque continget bis, quando nimirum Luna in ipſo horizonte verſatur. Ab hoc itaque ſtatu maximæ depreſſionis elevationes Maris indicabimus & computabimus, ſpatiis aſſignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel ſupra horizontem in *M* vel infra in *K* ad meridianum appellit, iterumque dum ab utroque meridiano æqualiter diſtat, qui locus ſit *L* exiſtente angulo *MPL* recto. Præterea tres quoque Lunæ ſitus in ſuâ orbitâ contemplabimur, quorum primus ſit, cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, ſecundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet auſtralem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ ſequente adſcripſimus quantitatem anguli *MPQ*, ex quo tempus tam ortûs quàm occaſûs Lunæ, quo aqua maximè eſt depreſſa, atque elevatio exiſtit nulla, innoteſcit.

CAP. IV.

In locis sub Æquatore sitis, est elevatio Maris, dum Luna versatur in

	M	L	K	ang. MPQ.
☽ Declinatio 0°	$\frac{3L}{2b5}+\frac{2L}{2b4}$	0	$\frac{3L}{2b5}-\frac{2L}{2b4}$	90°,0'
☽ Decl. boreal. 20°	$\frac{2,649L}{2b5}+\frac{1,549L}{2b4}$	0	$\frac{2,649L}{2b5}-\frac{1,549L}{2b4}$	90°,0'
☽ Decl. austr. 20°	$\frac{2,649L}{2b5}+\frac{1,549L}{2b4}$	0	$\frac{2,649L}{2b5}-\frac{1,549L}{2b4}$	90°,0'
Sub elevatione Poli 30°, erit Maris elevatio				
☽ Declinatio 0°	$\frac{2,250L}{2b5}+\frac{1,082L}{2b4}$	0	$\frac{2,250L}{2b5}-\frac{1,082L}{2b4}$	90°,0'
☽ Decl. boreal. 20°	$\frac{2,909L}{2b5}+\frac{1,880L}{2b4}$	$\frac{0,087L}{2b5}-\frac{0,156L}{2b4}$	$\frac{1,239L}{2b5}-\frac{0,116L}{2b4}$	102°,8'
☽ Decl. austr. 20°	$\frac{1,239L}{2b5}+\frac{0,154L}{2b4}$	$\frac{0,087L}{2b5}+\frac{0,156L}{2b4}$	$\frac{2,909L}{2b5}-\frac{1,880L}{2b4}$	77°,52'
Sub elevatione Poli 60°, erit Maris elevatio				
☽ Declinatio 0°	$\frac{0,740L}{2b5}-\frac{0,125L}{2b4}$	0	$\frac{0,740L}{2b5}+\frac{0,125L}{2b4}$	90°,0'
☽ Decl. boreal. 20°	$\frac{1,760L}{2b5}-\frac{0,582L}{2b4}$	$\frac{0,263L}{2b5}-\frac{0,514L}{2b4}$	$\frac{0,092L}{2b5}+\frac{0,158L}{2b4}$	129°,5'
☽ Decl. austr. 20°	$\frac{0,092L}{2b5}+\frac{0,158L}{2b4}$	$\frac{0,263L}{2b5}+\frac{0,514L}{2b4}$	$\frac{1,760L}{2b5}-\frac{0,582L}{2b4}$	50°,55'

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem Maris supra statum maximæ depressionis in mensuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b5}$ & $\frac{L}{b4}$ earum valores in pedibus Parisinis ex §. 41. substituat, habitâ ratione distantiæ Lunæ à Terrâ, prout ibidem est expositum. Consequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia consectaria, quæ verò nondum summo cum rigore ad experientiam examinari possunt, etiamsi jam insignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus; perspicuum autem est, si aquæ inertia tribuatur, tum diversa omnino Phænomena oriri oportere. Quòd si igitur hi assignati effectus jam cum observationibus planè consentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra statum suum naturalem

turalem simus contemplati. Interim tamen satis tutò jam status Maris sub ipsis polis poterit definiri, qui etsi ad experientiam examinari non potest, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem sub polis nulla erit Maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte distantiam, id quod ipsa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, à cujus appulsu æstus Maris alibi æstimari solet. Dabitur tamen his locis mutatio menstrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipso æquatore versatur; quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua sensim elevabitur prout Lunæ declinatio sive versùs boream sive versùs austrum augetur, donec tandem si declinatio fit maxima, per spatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm sit perquàm lenta, ab inertiâ aquæ vix turbabitur. CAP. IV.

§. 52. Ex his verò iisdem formulis effectus à Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates S & a, loco L & b substitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui à Lunâ oritur. Seorsim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem simplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione versari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol & Luna in eodem eclipticæ loco versabuntur, atque simul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus superioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis sinus $= Q$, cosinus $= q$, ac pro angulo MPL cujus cosinus est $= t$, erit sinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs austrum transeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem superabit intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(pq+PQ)^2 - 1\right) + \frac{L(pq+PQ)}{2b^4}\left(5(pq+PQ)^2 - 3\right)$, neglecto altero termino à vi Solis oriundo, cùm sensus omnino effugiat. At dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left(3(PQ - pq)^2 - 1\right) + \frac{L(PQ - pq)}{2b^4}\left(5(PQ - pq)^2 - 3\right)$. Maxima denique aquæ depressio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ sit circiter subquadruplum ipsius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ suprà recensiti, quartâ sui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem se habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol & Luna in oppositione versantur, erit declinatio Solis æqualis & contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol secun-

CAP. IV. dùm ascensionem rectam à Lunâ distet 180°, erit hoc casu $-t$, quod antè erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur sinus altitudinis Solis $=-tpq-PQ$, qui pro novilunio erat $=tpq+PQ$, ex quo quadratum hujus sinûs utroque casu est idem, ideoque etiam eadem Phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte versantur, tumque aqua humilior erit quàm in statu naturali, intervallo $=\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}$. Ex hoc itaque situ donec Luna ad meridianum supra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $=3(PQ+pq)^2\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum subsidet usque ad Lunæ obitum; tum verò rursus elevabitur usque ad appulsum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per spatium $3(PQ-pq)^2\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino sequente quippe ferè insensibili. Cùm igitur sint $PQ+pq$ & $PQ-pq$ sinus distantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano versatur, erunt spatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum supra statum maximè depressum elevatur, in ratione duplicatâ sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit. Nisi ergo vel Luna in ipso æquatore existat, vel Terræ locus sub æquatore sit situs, Fluxus Maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per spatium $=3pp\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol & Luna in quadraturis siti conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipso æquatore versari, quoniam tum plerumque minimus æstus observatur. Hoc itaque casu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine assumamus 23° 29′, cujus sinus sit $=Q$, cosinus $=q$, positâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in M versari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua supra statum naturalem elevetur à Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, à Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per spatium $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$; at dum Luna sub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per spatium $\frac{L(3(PQ-pq)^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more solito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $=\frac{L(3p^2q^2+3P^2Q^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè versabitur, ex quo depressio totalis aquæ in Refluxu infra statum naturalem pro-

proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp-1)}{2a^3}$: quare à Fluxu usque ad subsequentem Refluxum aqua subsidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus Maris hoc modo assignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æstibus quàm minoribus infert, satis tutò assumere posse videmur spatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii sive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu ascendit, expressionibus inventis esse proportionalia. Quamobrem si in dato Terræ loco ex pluribus observationibus determinetur spatium medium, per quod Mare à Refluxu ad Fluxum ascendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniisve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis consequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per observationes ratio poterit inveniri inter vires Solis & Lunæ absolutas S & L, quæ est ipsa via quâ NEWTONUS est usus ad vim Lunæ absolutam definiendam, cùm vis Solis sit cognita: quod negotium, cùm à NEWTONO non satis accuratè sit pertractatum, nos id ex istis principiis expediemus. Exprimat igitur $m:n$ rationem intervallorum eorum, per quæ Oceanus in dato Terræ loco, cùm in syzygiis luminarium quùm quadraturis tempore æquinoctiorum, ascendendo descendendoque oscillatur; eritque $m:n = 3pp\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right) : \frac{3L(p^2q^2+P^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$; ex quâ elicitur ista proportio $m\left(q^2+\frac{P^2Q^2}{p^2}\right)-n : m+n = \frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data sit vis à Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis à Lunâ oriunda $\frac{L}{b^3}$ saltem proximè. Instituamus calculum pro observationibus in Portu Gratiæ (*Havre de Grace*) factis, ex quibus diligenter inter se collatis pro ratione $m:n$ prodit ista $17:11$. Cùm igitur hujus loci elevatio poli sit circiter 50°, erit $P = \text{sin. } 50^\circ$, & $Q = \text{sin. } 23^\circ, 29'$; hincque $qq + \frac{P^2Q^2}{pp} = 1{,}0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3} : \frac{L}{b^3} = 7{,}1356 : 28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ sit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam NEWTONUS ex aliis observationibus conclusit: atque hanc ob rem ipsius determinationem vis Lunæ absolutæ L retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque respicientibus sunt allata, attentiùs considerentur, mox patebit maximos æstus menstruos in novilunia ac plenilunia incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depressio à Luna oriunda à vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, simul quoque Solis vis aquam maximè vel elevet vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò dissentiunt,

CAP. V.

sentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum discrimen inter quemque Fluxum ac subsequentem Refluxum observabitur, æstusque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phases æstus Maris medium teneat inter maximum minimumque necesse est, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conspirant, nec sibi invicem adversantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniisque maximus eveniat æstus, quibusque quadraturis minimus æstus respondeat, absolutè sine respectu ad situm loci habito definiri nequit. Sub æquatore quidem ubi Luna, cùm est in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium est nullum, quin æstus maximi in æquinoctia incidat, quando ambo luminaria in æquatore sunt posita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum dissita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æstus Maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex Tabula §. 50, verùm æstus mox subsequentes multo sunt minores. Quòd si autem inter binos æstus à Lunâ oriundos consequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æstus est $\frac{2,250}{2bs}L$ si Lunæ declinatio sit nulla, æstum Maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $=\frac{2,074}{2bs}L$, ideoque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contra verò sub elevatione poli 60 graduum, est æstus Maris, Lunâ versante in æquatore, $=\frac{0,740}{2bs}L$, æstus autem medius, cùm Lunæ declinatio est 20°, est $=\frac{0,926}{2bs}L$, ideoque major. Ex quo consequitur in regionibus polis vicinioribus æstus maximos, non in æquinoctia, sed potius circa solstitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria nostra per experientiam mirificè confirmatur.

CAPUT QUINTUM.

De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypothesi.

§. 57. QUANQUAM in præcedenti capite, quo in quantitatem æstûs Maris præcipuè inquisivimus, etiam tempora, quibus tam Fluxus quàm Refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc capite istud argumentum fusiùs atque ad observationes accommodatè persequemur. Observationes enim, quæ circa æstum Maris institui solent, ad tria genera commodissimè referuntur; ad quorum

rum primum pertinet Maris cùm elevatio maxima tùm maxima depressio; atque indicatur quantum quovis æstu aqua cùm ascendat tùm descendat. Ad secundum observationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus respiciunt, quibusque definitur, quonam temporis momento ubivis terrarum aqua cùm summam teneat altitudinem tùm minimam. Tertium denique genus observationum ad ipsum motum Maris reciprocum spectat, iisque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna Maris elevatio ac depressio absolvatur, sive momentanea mutatio, dum Mare à Fluxu ad Refluxum transit & vicissim, investigatur. Quibus tribus rebus cùm observationes convenientissimè instituantur, iisdem theoria atque explicatio phænomenorum commodissimè tractabitur. Ac primæ quidem & tertiæ parti pro nostrâ hypothesi in præcedentibus capitibus abundè satisfactum videtur. CAP. V.

§. 58. Quoniam autem à Maris inertiâ aliisque circumstantiis Maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abstrahimus, manifestum est ubique terrarum, si sola Lunæ vis Mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longissimè fuerit remota, hoc est iis ipsis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam supra quàm infra Terram transit: sunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione sinuum distantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo simul successiva Maris commotio cognoscitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulsu aqua debet esse summa, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus solliciti; cùm tam observationes sufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipse Maris motus indicatus rationi sit consentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo à polis satis remotis seu extra circulos polares sitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48′ tam oritur quàm obit; elevabitur Mare eodem temporis intervallo bis, totiesque deprimetur; atque utraque maxima Maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ Fluxus seu summas elevationes interjectum constanter erit 12 h. 24′, ab anomaliis Lunæ mentem abstrahendo; at tempus summæ depressionis, cùm respondeat appulsui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, sed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propositi elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc est quò major fuerit discrimen inter ortum obitumve Lunæ & circulum horarium sextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut nostræ conclusiones magis ad observationes perducantur. Ac primò quidem manifestum est tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci transit, quippe quo momento etiam

CAP. V. Sol ad eundem meridianum appellit, si quidem syzygia ipso meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem si novilunium pleniluniumve in ipsum meridiem incidat; ipso quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque si id eveniat mediâ nocte, eodem ipso momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm si conjunctio vel oppositio luminarium meridiem vel præcedat vel sequatur, tum Fluxus non in ipsum meridiem incidet, sed vel tardiùs vel citiùs veniet, quia Luna his casibus tanquam primaria æstûs causa vel post vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem sive plenilunium sive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio Fluxûs respectu meridiei. Ponamus enim novilunium seu plenilunium celebrari n horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius à Sole diurnus sit 12°. circiter, ipso meridie Luna à meridiano jam distabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna post meridiem demum per meridianum transibit, elapsis $\frac{n}{30}$ horis seu $2\,n$ minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat n horis post meridiem, tum Maris maxima elevatio $2\,n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratissimè cognoscentur, si ad singulos dies transitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occasus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depressio respondet; majorem autem hujusmodi tabula afferet utilitatem, si insuper quovis die distantia Lunæ à Terrâ inducetur, quippe à quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

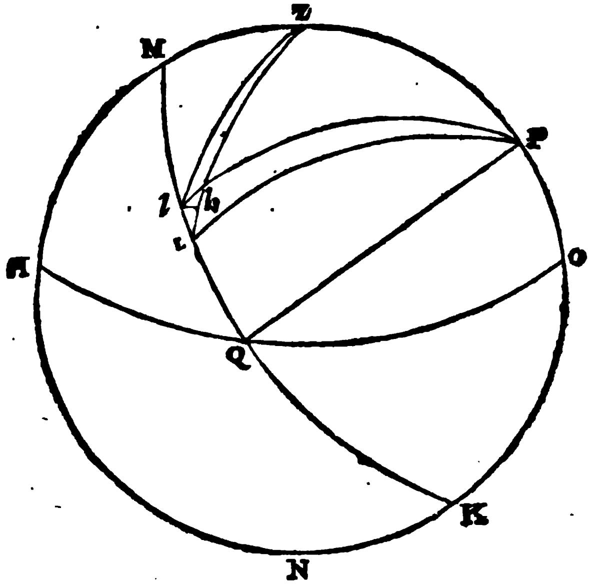
§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum observationibus, quibus constat, diebus novilunii vel plenilunii æstum Maris accelerari si novilunium pleniluniumve post meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima Maris elevatio non respondeat appulsui Lunæ ad meridianum, sed tardiùs eveniat, uti post docebitur, tamen similibus casibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, si ad observationes respiciatur, non sumi debet momentum meridiei, sed id momentum, quo si Lunæ cum Sole conjunctio vel oppositio in ipsum meridiem incidit, summa aquæ elevatio observatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujusmodi observationes instituunt fieri solet, si plenilunium noviluniumve vel ante vel post meridiem incidat, summa Maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: & quidem syzygia vera n horis vel ante meridiem eveniat vel post, tum Fluxus $2\,n$ minutis vel tardiùs vel citiùs observari debebit. Atque hæc est ea ipsa regula quam Celeb. *Cassini* in Mem. Academiæ Regiæ pro An. 1710, ex quampluribus observationibus inter se comparatis derivavit; jubet scilicet numerum horarum, quibus conjunctio sive oppositio luminarium verum meridiem

diem vel præcedit vel ſequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo Fluxus evenire ſolet, vel addi vel ab eo ſubtrahi, quo verum Fluxûs momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perſpicuum eſt eam correctione ulteriori opus habere, à vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit inſenſibilis, cùm ſumma aquæ elevatio non ſubitò adſit, ſed per tempus ſatis notabile duret. CAP. V.

§. 61. Niſi autem luminaria proxima ſint vel conjunctioni vel oppoſitioni, maxima Maris elevatio non in ipſum Lunæ tranſitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum verſatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conſervat, tantiſper etiam Mare eandem elevationem retinebit; & hanc ob rem ſi Sol interea ſenſibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad Mare elevandum vel creſcet ſenſibiliter, vel decreſcet; ex quo dum Luna prope meridianum exiſtit, fieri poteſt, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur à Sole. Ex his igitur perſpicuum eſt ſummam Maris altitudinem tardiùs ſeu poſt tranſitum Lunæ per meridianum accidere debere, ſi eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium & plenilunium præcedentibus. Contrà autem ſi Luna poſt Solem per meridianum tranſeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occaſum; tum, quia Mare in tranſitu Lunæ per meridianum à vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulſum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve ſequentibus. Quando autem Sol ipſum horizontem occupat, dum Luna in meridiano verſatur, tum etiamſi diſtantia Solis ab horizonte perquam ſit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato ſinûs altitudinis Solis ſit proportionalis, quod omnino evaneſcit, etiam hoc caſu maxima aquæ elevatio in ipſum Lunæ per meridianum tranſitum incidet, hicque caſus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut

CAP. V.



§. 62. Ut igitur innotescat, quantum vires cùm Solis tùm Lunæ ad Mare elevandum dato tempore vel crescant vel decrescant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in L versari, atque inde ad punctum meridiani M progredi. Tempusculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræsentato progredietur Luna vel Sol ex L in l atque ab horizonte removebitur intervallo Lh: ad quod inveniendum fit ut antè anguli MPL cosinus $= t$, & sinus $= T$, eritque ipse angulus $LPl = d\theta = \frac{\sqrt{(1-tt)}}{+dt} = \frac{dt}{T}$, ex quo orietur anguli MPl cosinus $= t + dt = t + Td\theta$. Si jam ponatur sinus elevationis poli $= P$, sinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam si declinatio sit australis, sinus Q sumi debet negativè, cosinus verò respondentes sint p & q, reperietur sinus altitudinis L supra horizontem $= v = tpq + PQ$: punctique l sinus altitudinis $v + dv = tpq + PQ + Tpqd\theta$. Quocirca si Luna ponatur in L, cùm ejus vis ad Mare attollendum sit $= \frac{L(3vv-1)}{2bs}$, erit hujus vis incrementum tempusculo $d\theta$ ortum $= \frac{3Lvdv}{bs} = \frac{3L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{bs}$. At si Sol ponatur in L, ejus vis ad Mare elevandum tempusculo $d\theta$ capiet incrementum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{as}$. Quamvis autem pro Sole & Lunâ eidem angulo $d\theta$ non æqualia tempora respondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt,

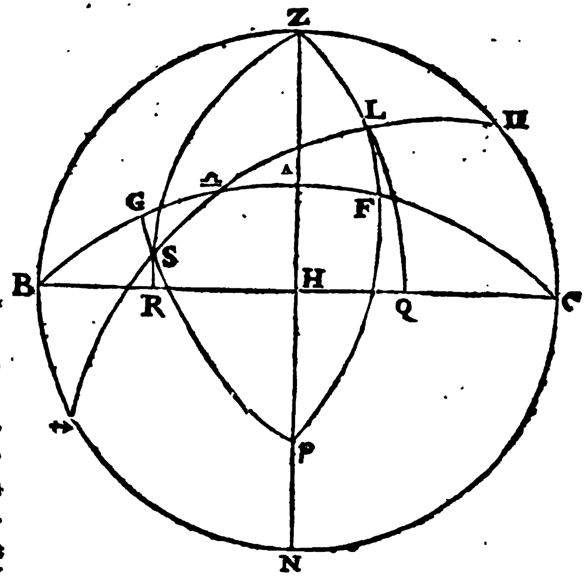
dunt, sunt enim ut 24 ad 24 $\frac{3}{4}$ seu ut 32 ad 33, sine sensibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen si res accuratè definiri debeat, & vis Solis incrementum angulo $d\theta$ acquisitum sit $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{at}$, **CAP. V.**

erit vis Lunæ incrementum eodem tempusculo acceptum $= \frac{32L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{11\,bt}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus casibus evanescere, quorum primus evenit sub polis, quia ibi est $p = 0$; secundus, si punctum L in meridiano sit situm, tum enim fit $T = 0$; tertius denique locum habet, si punctum L in horizonte existat, ubi est $tpq + PQ = 0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in L versari ac Lunam per meridianum jam transiisse, hocque momento maximè aquam esse elevatam; jam enim ostendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam summam incidere post transitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento necesse est, ut decrementum vis Lunæ, quod tempusculo $d\theta$ patitur, æquale sit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum sumti quo Luna jam à meridiano recessit, cosinus $= n$, sinus $= N$, atque sit Lunæ declinationis borealis sinus $= R$, cosinus $= r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempusculo $d\theta$ ortum $= \frac{3L(npr+PR)Nprd\theta}{b^3}$, quod cùm æquale esse debeat incremento vis Solis eodem tempusculo nato $= \frac{3S(tpp+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, denotante Q sinum declinationis borealis Solis, & q ejus cosinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L(npr+PR)Nr}{b^3} = \frac{S(tpq+PQ)Tq}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{32}{33}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna à meridiano non procul distabit, poni poterit $n = 1$, atque cùm sit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, obtinebitur iste valor $N = \frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; qui in tempus conversus dabit temporis spatium, quo aqua post transitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit. Sub æquatore ergo erit $N = \frac{Ttqq}{4rr}$, ob $P = 0$ & $p = 1$; quare si declinationes Luminarium vel negligantur vel æquales assumantur, ita ut sit $qq = rr$, fiet $N = \frac{Tt}{4}$, cujus expressionis valor extat maximus si angulus MPL sit 45°, quo casu erit $N = \frac{1}{8}$, & angulus respondens $= 7^\circ, 11'$, qui indicat aquam summam 30 minutis post transitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante transitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, si Sol tum versùs occasum versetur angulo $MPL =$ semirecto. Quamobrem si Luna ad meridianum appellat horâ nonâ sive matutinâ sive pomeridianâ, Fluxus demum pòst semihoram eveniet, at si horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua summa $30'$ antè obser-

CAP. V. vabitur: in aliis verò Terræ regionibus ista aberratio magis est irregularis; interim tamen satis prope ex formulâ datâ per solam assumtionem potest definiri.

§. 64. Quòd si autem hanc rem curatiùs investigare velimus, amborum Luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim à se mutuò maximè ob angulum horarium MPL inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phasi aberrationem maximæ aquæ elevationis à transitu Lunæ per meridianum determinemus, repræsentet nobis circulus $ZBNC$ verticalem primarium, BC horizontem, ZN meridianum per dati loci Zenith Z & Nadir N ductum, atque Æquator sit BAC, polus australis p, & ecliptica ♊ ♎ ♐. Constitutus nunc sit Sol in S & Luna in L, quæ modò per meridianum transierit, quo tempore ponimus aquam maximè esse elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ sinum esse $= F$, cosinum $= f$; Lunæ verò longitudinis sinum esse $= G$, cosinum $= g$; sitque inclinationis eclipticæ B ♎ ♐ sinus $= M$, cosinus $= m$. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum sinus antè erant positi Q & R; erit scilicet $Q = FM$, $R = GM$; hincque $q = \sqrt{(1 - F^2M^2)}$ & $r = \sqrt{(1 - G^2M^2)}$. Deinde angulus SpL æqualis est angulo cujus tangens est $\frac{mF}{f}$ demto angulo cujus tangens est $\frac{mG}{g}$; hujus verò ejusdem anguli ob angulos SpZ & LpZ datos, quorum sinus sunt positi T & N, tangens quoque est $\frac{nT + Nt}{nt - NT}$, quæ tangens propter sinum N valde parvum proximè est $= \frac{T}{t} + \frac{N}{tt}$. Ponatur autem K pro sinu anguli qui excessus est anguli habentis tangentem $= \frac{mF}{f}$ super angulum cujus tangens est $\frac{mG}{g}$, & k pro cosinu, reperietur $T = K - Nk$ & $t = k + NK$ scripto 1 pro n: quibus valoribus substitutis prodibit $N =$



K q

$\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$ ex æquatione $N=\frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$, paragr. præced. CAP. V.

§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis versari ac primò quidem in primo post novilunium quadrante, ita ut arcus LS futurus sit 90^o., erit $G=f$, & $g=-F$; unde $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus prodibit $K=$ sin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ — Atang. $\frac{-mf}{F}$) atque k ejusdem anguli cosinui æquabitur. Quare his tempestatibus aqua maximè elevata post transitum Lunæ per Meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris conversum dabit angulum cujus sinus erit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)pq^2+kPQq}$. Pro posteriore verò quadraturâ post novilunium, erit $G=-f$ & $g=F$; unde erit $Q=MF$ & $R=-Mf$, ex quibus fit ut antè $K=$ sin. (Atang. $\frac{mF}{f}$ — Atang. $\frac{-mf}{F}$) & $k=$ cosinui respondenti. Ne autem hic signa $+$ & $-$ calculum confundant, notari convenit K esse sinum arcûs, qui restat, si ascensio recta Lunæ subtrahatur ab ascensione rectâ Solis; atque k esse ejusdem arcûs cosinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis versari, erit longitudo Solis $=0^o$, seu 360^o, & longitudo Lunæ $=$ vel 90^o vel 270^o, unde fiet $F=0$, $f=1$, $G=\mp 1$, & $g=0$, atque $Q=0$. Præterea ascensio recta Solis est 360^o, & ascensio recta Lunæ vel 90^o vel 270^o; utroque casu ergo fit $k=0$; unde etiam prodit $N=0$; quod idem evenit, si Sol versetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis versatur, aqua maximè erit elevata eo ipso momento, quo Luna ad meridianum appellit.

§. 66. Sit porrò Sol in solstitio æstivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis 90^o, Lunæ verò $=0^o$, unde fit $F=1$, $f=0$; $G=0$; $g=1$, indeque $Q=M$ & $R=0$; itemque $q=m$ & $r=1$. Solis verò ascensio recta habebitur 90^o, Lunæ verò $=0^o$, ex quo $K=1$ & $k=0$. Hinc ergo fit $N=\frac{mMP}{(4-m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ est longitudo Lunæ 180^o, unde $G=0$, $g=-1$, at ut antè $F=1$, $f=0$; ergo $Q=M$, $R=0$, itemque $q=m$ & $r=1$. Cùm igitur Lunæ ascensio recta sit 180^o, erit $K=$ sin. $-90^o=-1$, & $k=0$, ex quibus fit $N=\frac{-mMP}{(4-m^2)p}$. Quoniam autem est $4>m^2$, dum Sol in solstitio æstivo versatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget post Lunæ transitum per meridianum supra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc transitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; sub æquatore enim omnino evanescit. Sit poli elevatio 45^o, fietque his regionibus $N=\pm\frac{Mm}{4-m^2}$; quare cùm sit M sinus $23^o,29'$, prodibit $N=$

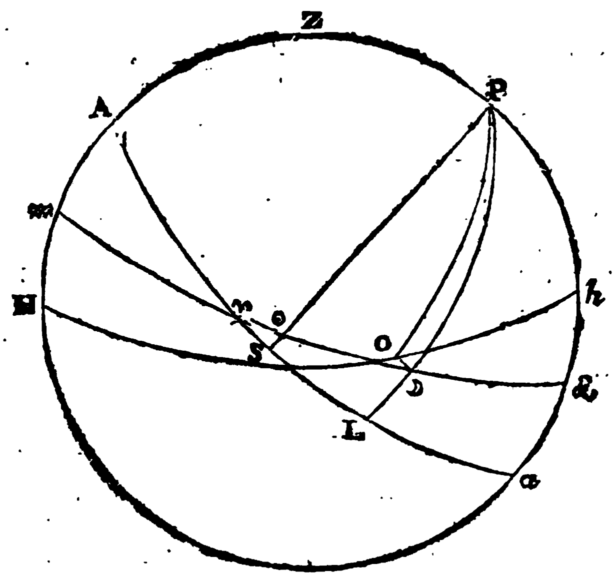
 sinui

Cap. V. ſinui anguli $6^{\circ}, 33'$; qui in tempus converſus dat $26'$. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante tranſitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò quadraturâ tot minutis poſt tranſitum. Contrarium evenit ſi vel Luna ſub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in ſolſtitio hyemali verſetur. Ex his igitur formulis, ſi tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio tranſitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel ſequi debeat; cujuſmodi ſupputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur ſatis eſt expoſitum, quo momento Mare maximè ſit elevatum, maximam quoque Maris depreſſionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifeſtum eſt, ſi ſola Luna Mare agitaret, tum minimam aquæ altitudinem obſervatum iri, eo ipſo momento, quo Luna in horizonte verſetur: atque hinc perſpicuum eſt, idem uſu venire debere, ſi Sol eodem momento quoque in horizonte exiſtat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua reſpondebit ſitui Lunæ in horizonte, ſi eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamſi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos caſus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo caſu aqua jam elevabitur, ex quo neceſſe eſt imam aquam ante adventum Lunæ ad horizontem extitiſſe, contrà verò ſi dum Luna in horizonte verſatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs ſcilicet poſt appulſum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum ſub horizonte $H\,h$ in ☽ adhuc verſari, Solemque in ☉ eſſe poſitum, unde ad meridianum $P\,Z\,H$ progrediatur, hocque ipſo momento aquam maximè eſſe depreſſam. Neceſſe igitur eſt, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad Mare movendum æquale ſit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam ſit anguli ☽ $P\,O$ ad polum ſumti, diſtantiam Lunæ à ſuo ortu O indicantis, ſinus $= V$ & coſinus $= v$, qui ob angulum ☽ $P\,O$ valde parvum tutò ſinui toti 1 æqualis concipi poteſt. Invento ergo angulo hoc ☽ $P\,O$ ſeu arcu æquatoris illi reſpondente, eoque in tempus converſo, conſtabit quanto temporis intervallo ima aqua appulſum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occaſum quàm ad acceſſionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur.

§. 68. Poſitis nunc A ♈ a æquatore ac ♒ ♈ ♌ ecliptica, ſit elevationis poli $P\,h$ ſinus $= P$, coſinus $= p$; ſinus declinationis Lunæ borealis,

Cap. V.



lis ☽ $L = R$, cosinus $= r$; ex quibus fiet anguli APO cosinus $= \frac{-PR}{pr}$, quia Lunæ, cùm in horizontem O pervenit, altitudo evanescit. Cùm igitur anguli APO sinus sit $= \frac{\surd(p^2r^2 - P^2R^2)}{pr} = \frac{\surd(1 - P^2 - R^2)}{pr} = \frac{\surd(pp - RR)}{pr}$, erit anguli AP☽ sinus $= \frac{v\surd(pp - RR) - VPR}{pr}$, & cosinus $= \frac{-vPR - V\surd(pp - RR)}{pr}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $=$ $\frac{3LV\surd(pp - RR)(\surd(pp - RR) - VPR)d\theta}{b^3} = \frac{3LV(pp - RR)d\theta}{b^3}$, ob $v = 1$ & V valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ⊙S sinus $= Q$ & cosinus $= q$, atque anguli AP⊙ sinus $= T$, cosinus $= t$, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3S(tpq + PQ)Tpq\,d\theta}{a^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale est ponendum, siquidem Maris altitudo hoc tempore est minima. Quare cùm sit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, ista habebitur æquatio $4V(pp - RR) = Tpq(tpq + PQ)$, quæ præbet $V = \frac{Tpq(tpq + PQ)}{4(pp - RR)}$: cùm igitur hoc pacto innotescat angulus OP☽, is in tempus conversus dabit temporis spatium, quo summa Maris depressio ante ortum Lunæ contingit. At si punctum O designet Lunæ occasum, idem angulus præbebit tempus post Lunæ occasum, quo Mare maximè deprimetur. Intelligitur ex

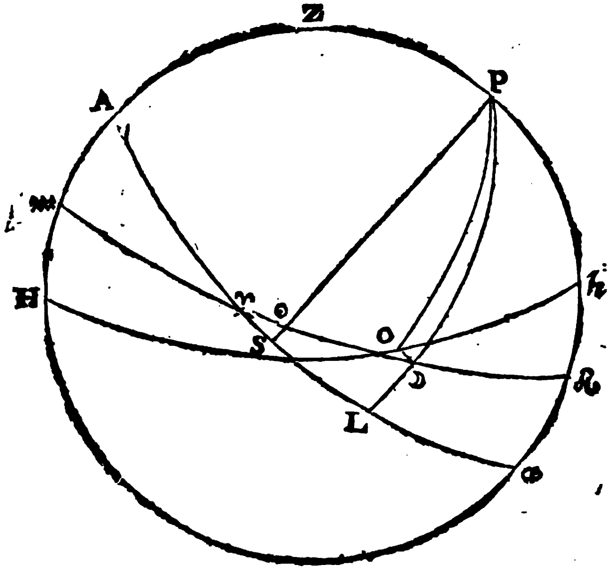
 fer-

CAP. V. formulâ inventâ quibus casibus ima aqua in ipsum appulsum Lunæ ad horizontem incidat; hoc scilicet primò evenit, si $T = o$, hoc est si Sol in meridiano versetur, deinde si $tpq + PQ = o$, id est si Sol quoque horizontem occupet; quos binos casus jam notavimus.

§. 69. Sit locus noster Terræ sub æquatore situs, seu elevatio poli nulla, erit $P = o$, & $p = 1$, unde efficitur $V = \frac{Ttqq}{4(1-RR)} = \frac{Ttqq}{4rr}$; in quâ formulâ cùm q & r denotent cosinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter se discrepabunt; ponamus enim alteram declinationem esse maximam, alteram verò minimam seu $= o$, erit tamen cosinuum ratio minor quàm $1 : \sqrt{\frac{5}{6}}$, ex quo fractio $\frac{qq}{rr}$ semper intra hos limites $\frac{5}{6}$ & $\frac{6}{5}$ continebitur. Quòd si ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere possumus, quia rem tantùm prope definire conamur, habebitur $V = \frac{Tt}{4} = \frac{2Tt}{8}$. Denotat autem $2Tt$ sinum dupli anguli horarii quo Sol à meridiano distat, & hanc ob rem ad momentum maximæ depressionis aquæ assignandum, videndum est quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujusque temporis vel à meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli sumatur duplum, hujusque dupli sinus, cujus pars octava præbebit sinum anguli, qui in tempus conversus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulsum ad horizontem vel præcedit vel sequitur; id quod ex notatis circumstantiis discernere licet. Sic si Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus usque ad meridiem 3 horarum, angulusque respondens 45°, cujus dupli sinus est ipse sinus totus, cujus pars octava fit sinus anguli $7^{\circ}, 11'$. cui tempus respondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aspectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ♈ ☉ sinum esse $= F$, cosinum $= f$ longitudinis verò Lunæ ♈ ☽ sinum esse $= G$, cosinum $= g$; atque inclinationis eclipticæ ☊ ♈ a sinum $= M$, cosinum $= m$. His positis erit $Q = MF$, & $R = MG$; atque ascensionis rectæ Solis ♈ S tangens reperietur $= \frac{mF}{f}$, Lunæ verò ascensionis rectæ ♈ L tangens $= \frac{mG}{g}$. Subtrahatur ascensio recta Solis ab ascensione rectâ Lunæ, & differentiæ sinus sit $= K$, cosinus $= k$. Cùm igitur anguli ☉ P ☽ sit sinus $= K$ & cosinus $= k$, anguli verò AP ☽ sinus $= \frac{\sqrt{(pp-RR)}-VPR}{pr}$ ob $v = 1$, & cosinus $= \frac{-PR-V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli AP ☉ sinus $= T = \frac{(k+KV)\sqrt{(pp-RR)}-kPRV+KPR}{pr}$ & cosinus $t = \frac{(K-kV)\sqrt{(pp-RR)}-KPRV-kPR}{pr}$;

qui-



quibus valoribus ſubſtitutis, ſimulque ſinu V tanquam valde parvo conſiderato, reperietur ſinus $V = \frac{(KPR + k\sqrt{(pp - RR)})\, q\, (Kq\sqrt{(pp - RR)} - kPRq + PQr)}{4rr\,(pp - RR)}$.

Sub æquatore autem, quo fit $P = 0$, $V = \frac{Kkqq}{4rr}$: ex quo pro æquatore regula ſuperior à diſtantiâ Solis à meridiano petita ſimul ad differentiam aſcenſionalem Solis & Lunæ poteſt accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præſens inſtitutum, quo tantum veritatem cauſæ Fluxûs ac Refluxûs Maris exhibitæ declarare annitimur, non opus eſt hæc pluribus perſequi, quippe quæ potiſſimum ad accuratiſſimas æſtûs marini tabulas ſupputandas pertinent, quæ res in propoſitâ quæſtione Illuſtriſſimæ Academiæ non contineri videtur.

CAPUT SEXTUM.

De vero æſtu Maris, quatenus à Terris non turbatur.

§. 71. QUÆ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æſtum Maris fuſiùs deduximus, eâ hypotheſi nituntur, aſſumtâ, quâ aquam inertiæ expertem poſuimus: quamobrem non eſt mirandum ſi plerique effectus aſſignati cum Phænomenis minùs congruant, atque adeo

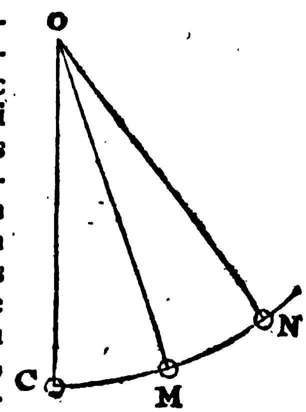
CAP. V. adeo pugnare videantur; quòd si enim inter se prorsus convenirent, theoria non solùm non eo consensu confirmaretur, sed potiùs omnino subverteretur, cùm quilibet facilè agnoscat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis conclusionibus maximè ab experientiâ dissentiunt, potissimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam summa Maris elevatio quàm ima depressio contingere solet, respiciunt. Nusquam enim ubi quidem Mare est liberum atque apertum, tam exiguum discrimen inter Fluxum ac Refluxum in aquæ altitudine observatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor scilicet pedum tantum; quæ elevatio insuper tamen maxima est deprehensa, ac tum solùm oriunda, quando tum regio prope æquatorem est sita, quàm vires luminarium inter se maximè conspirant. Experientiâ namque constat, plerisque in locis, si æstus contingat maximus, aquam non solùm ad altitudinem duplo majorem, sed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non soli inertiæ aquæ, sed maximam partem vicino continenti ac littorum situi est tribuenda, uti in sequenti capite clarissimè monstrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nusquam illis ipsis momentis, quæ assignavimus, Fluxus ac Refluxus unquam contingunt, nec etiam tempestatibus hîc definitis Fluxus maximi vel minimi, sed ubique tardiùs evenire constanter observantur; cujus quidem retardationis causa in ipsâ aquæ inertiâ posita esse primâ etiam fronte perspicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio Maris in præcedentibus capitibus determinata ab observationibus dissentiat, tamen complures circumstantiæ sese jam præbuerunt, experientiæ tantopere consentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque respicientibus, quas non temerè assumsimus, sed aliunde existere demonstravimus, vera & genuina æstûs Maris causa contineatur. Hanc ob rem jam meritò suspicari licet, dissensiones quæ inter theoriam nostram, quatenus eam assumtæ hypothesi superstruximus, & experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliisque circumstantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficisci. Quocirca si omnia inertiæ ratione habitâ ad observationes propiùs accedant, id quidem nostræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque simul omnes alias causas, quæ præter has vel sunt prolatæ vel proferri possunt, excludet, irritasque reddet. Cùm igitur consensum hujus theoriæ cum Phænomenis, mox simus evidentissimè ostensuri, quæstioni ab Inclytâ Academiâ propositæ ex asse satisfecisse jure nobis videbimur: cùm non solum nullas vires imaginarias effinxerimus, sed etiam virium Lunam Solemque respicientium existentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque verò in hoc negotio cum plerisque Anglorum ad qualitates occultas sumus delapsi, verùm potius causam ista-

rum

rum virium modo rationali & legibus motûs consentaneo in vorticibus constituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare possemus; idque fecissemus, nisi ab aliis cùm jam satis esset expositum, tùm etiam ab Illustrissimâ Academiâ in præsente quæstione non requiri videatur. CAP. VI.

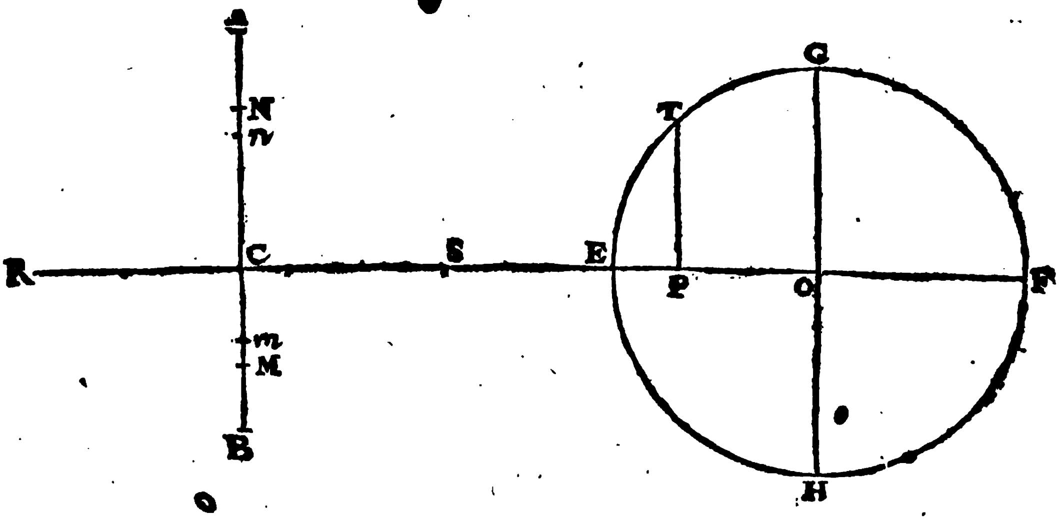
§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipsi ejusmodi qualitatem affinximus, quâ viribus sollicitantibus subitò obsequeretur, seque in instanti in eum statum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio consisteret; hòcque pacto aquam non solùm subitò omnis motûs capacem posuimus, sed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem pristinum motum amittat. Longè aliter autem res se habet, si inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non subitò se ad eum situm componat, quem vires intendunt, sed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in causa est, quòd aqua, cùm in statum æquilibrii pervenerit, ibi non acquiescat, sed ob motum insitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum à potentiis renitentibus amittat. Ex quo perspicuum est, admissâ inertiâ aquæ, à potentiis sollicitantibus motum omninò diversum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, si inertiâ privata esset; cujus discriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni potest. Ponamus enim corpus pendulum OC ob gravitatem situm tenens verticalem, à vi quâpiam in latus secundùm directionem CM sollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, seu ejusmodi esset indolis, cujus aquam hactenus sumus contemplati, tum subitò situm OM acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum consideratur, post aliquod demum tempus elapsum ad situm OM perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quiescet, sed ultrà excurret, putà in N usque, ita ut spatium CN ferè sit duplo majus spatio CM, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi sollicitanti obtemperat; atque à situ æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excursionem conficit, quàm si inertiâ careret; quæ sunt eæ ipsæ duæ res, in quibus theoria antè exposita ab experientiâ maximè dissentire deprehensa est.



§. 74. Si nunc istud penduli exemplum ad nostrum casum æstûs Maris transferamus, primò ingens similitudo in situ penduli verticali ac statu Maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, observatur. Nam quemadmodum pendulum, si in quamcunque plagam de situ ver-

CAP. VI. ticali declinetur, propriâ vi gravitatis se in eundem recipit, ita etiam aqua, si ex situ suo æquilibrii depellatur, vi gravitatis se ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oscillationes peragit, cujusmodi oscillationum casus in aqua observati passim inveniuntur expositi. Deinde etiam simili modo, quo pendulum, Mare quò magis ex situ suo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim sese in situm æquilibrii restituendi. Quòd, si igitur Mare à viribus externis, Solis scilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, necesse est ut inde motus oscillatorius seu reciprocus oriatur æstui Maris omnino similis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem sunt res, quæ absolutam ac perfectam totius motûs determinationem summoperè reddunt difficilem, quarum altera physicam spectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ consistit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè si quæstio sit de amplissimo Oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur. Altera autem difficultas in ipsâ analysi est posita, eò quòd iste motus Maris reciprocus prorsus sit diversus ab omnibus oscillationibus à Mathematicis adhuc consideratis: vires enim Lunæ ac Solis Mare sollicitantes neque à situ corporis oscillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id usu venit in omnibus oscillationum casibus etiam nunc expositis, sed eæ vires à situ luminarium respectu Terræ, ideoque à tempore determinantur, cujusmodi oscillationes nemo adhuc, quantum quidem constat, calculo subjecit.

§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem physicam attinet, res hoc quidem tempore ferè desperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia sit affecuta incrementa, tamen ea potissimum motum aquarum in vasis & tubis fluentium respiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum Oceani definiendum derivari potest. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præstare non licet, nisi ut hypothesibus effingendis, quæ à veritate quàm minimè abludant, tota quæstio ad considerationes purè geometricas & analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamsi difficillimis integrationibus sit involuta, tamen feliciter superare confidimus. Considero scilicet superficiem aquæ RS, quæ hoc in situ æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in A, deprimaturque in B. Quòd si igitur aqua in M usque sit depressa, atque externæ vires Solis ac Lunæ subitò cessarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur sese elevare usque in situm RS naturalem, isteque conatus eò erit major, quò majus fuerit spatium CM quo à situ naturali distat. A veritate itaque non multum recedemus, si hanc vim ipsi spatio MC ponamus proportionalem: quamobrem posito spatio $MC = s$. erit vis, quæ aquæ superficiem in M usque depressam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypothesis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd



Cap. VI.

quòd ſponte indicat, ſi aquæ ſuperficies ſupra C jam ſit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypotheſis confirmatur pluribus phænomenis aquæ niſum reſpicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium ſuperſit.

§. 76. Ponamus jam aquam in M conſtitutam urgeri à ſolâ Lunâ, atque ut calculus per ſe moleſtus minus habeat difficultatis, ſit locus C ſub ipſo æquatore ſitus, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith tranſeunte æquatore ſcilicet circumferetur: ſit $EGFH$ iſte circulus, cujus radius ponatur $= 1$, atque EF repræſentet horizontem, & G zenith. Poſitis his, ſit Luna in T dum Maris ſuperficies verſatur in M, ita ut $PT = y$ exprimat ſinum altitudinis Lunæ ſuper horizonte; unde vis Lunæ Mare attollens erit $= \frac{L(3yy-1)}{2bs} = \frac{3yy-1}{h}$, poſito brevitatis gratiâ h pro $\frac{2bs}{L}$. Hanc ob rem ergo ſuperficies Maris in M duplici vi attolletur, ſcilicet vi $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd ſi ergo ponamus aquam in M jam habere motum ſurſum directum, cujus celeritas tanta ſit quanta acquiritur lapſu gravis ex altitudine v, atque ſpatium $Mm = -ds$ tempuſculo infinitè parvo abſolvatur, habebitur per principia motûs $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu lunæ in E jam elapſum, quod arcui ET eſt proportionale, eſſe $= z$, quæ littera ipſum arcum ET ſimul denotet, erit $y = \text{ſin.}\, z$ ſcilicet ſinui arcûs z, hoc enim modo ſinus ac coſinus arcuum ſumus indicaturi: unde orietur $1 -$

 2yy

CAP. VI. $2yy = \text{cof.}\, 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\text{cof.}\, 2z$, hincque $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\,\text{cof.}\, 2z.\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis fit $= dz$, erit ex naturâ motûs $dz = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{ds^2}{dz^2}$; unde fumto elemento dz pro conftante, fiet $dv = \frac{2\,ds\,dds}{dz^2} = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\,\text{cof.}\, 2z\right)$, atque $2dds + \frac{s\,dz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{cof.}\, 2z)}{2h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles s & z, & propterea fi debito modo integretur, indicabit fitum feu ftatum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio eft differentialis fecundi gradûs, atque infuper arcus & finus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus effe obviam; interim tamen cùm alterius variabilis s plus unâ dimenfione nufquam adfit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejufmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis s omnino non ineft, rejicere; unde hæc confideranda venit æquatio $2dds + \frac{s\,dz^2}{g} = 0$, quæ per ds multiplicata fit integrabilis, exiftente integrali $ds^2 + \frac{ss\,dz^2}{2g} = c\,dz^2$ ob dz conftans. Hinc porrò elicitur $dz = \frac{ds\sqrt{2g}}{\sqrt{(2cg - ss)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2g}} =$ arcui cujus finus eft $\frac{s}{\sqrt{2cg}}$, ex quo obtinetur $s = \sqrt{2cg}.\,\text{fin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea nafcitur fubftitutio facienda pro æquatione propofitâ $2dds + \frac{s\,dz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{cof.}\, 2z)}{2h} = 0$, fiat enim $s = u\,\text{fin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$, erit $ds = du\,\text{fin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{u\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{cof.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$, atque $dds = ddu\,\text{fin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{2\,du\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{cof.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{u\,dz^2}{2g}\,\text{fin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Quibus valoribus fubftitutis emerget ifta æquatio $2ddu\,\text{fin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4\,du\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{cof.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz^2(1 - 3\,\text{cof.}\, 2z)}{2h} = 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipfa variabilis u non infit, fed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd fi ergo ponatur $du = p\,dz$, erit $ddu = dp\,dz$, & æquatio noftra tranfibit in fequentem differentialem primi gradûs tantum, $2dp\,\text{fin.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4p\,dz}{\sqrt{2g}}\,\text{cof.}\,\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz(1 - 3\,\text{cof.}\, 2z)}{2h} = 0$: quæ integrabilis reddi invenitur, fi multiplicetur per quantitatem quampiam ex z & conftantibus compofitam, eò quòd p plures unâ dimenfiones habet nufquam. Ad integrationem autem abfolvendam notandum eft hujus æquationis $dp + pZ\,dz = \Sigma\,dz$, in quâ Z & Σ functiones qualcunque ipfius z denotent, inte-

integrale esse $e^{\int Z dz} p = \int e^{\int Z dz} \varepsilon\, dz$. Reductâ autem nostrâ æquatione ad hanc formam, habetur $dp + \frac{2p\, dz\, cof. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}. fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{dz(3\, cof. 2z - 1)}{4h\, fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}$, ideoque CAP. VI.

$Z dz = \frac{2 dz\, cof. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}. fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{2\, diff. fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}$; atque hinc $\int Z dz = 2$ log. fin. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$; & $e^{\int Z dz} = \left(fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$. Ex his sequitur integrale nostræ æquationis $p\left(fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = \frac{1}{4h}\int dz\, fin. \frac{2}{\sqrt{2g}}(3\, cof. 2z - 1) = \frac{3}{4h}\int dz$ fin. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ cof. $2z - \frac{1}{4h}\int dz\, fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur esse $\int dz$ fin. $\alpha z = C - \frac{1}{\alpha}$ cof. αz, atque $\int dz$ fin. αz. cof. $\zeta z =$ $C - \frac{\zeta\, fin. \alpha z. fin. \zeta z - \alpha\, cof. \alpha z. cof. \zeta z}{\alpha^2 - \zeta^2}$: ex his itaque conficietur $p\left(fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$

$$= C + \frac{\sqrt{2g}}{4h} cof. \frac{z}{\sqrt{2g}} \frac{\left(2\, fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}. fin. 2z + \frac{1}{\sqrt{2g}} cof. \frac{z}{\sqrt{2g}} cof. 2z\right).3}{\left(\frac{1}{2g} - 4\right)4h}$$ atque $p =$

$$\frac{C}{\left(fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2g}. cof. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{\left(4g\, fin. \frac{z}{\sqrt{2g}} fin. 2z + \sqrt{2g}. cof. \frac{z}{\sqrt{2g}} cof. 2z\right).3}{4h(1-8g)\left[fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}.$$

§. 59. Cùm autem posuissemus $du = p\, dz$, erit $u =$

$$\int p\, dz = \int \frac{C dz}{\left[fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} + \int \frac{dz\sqrt{2g}. cof. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$$

$$- \frac{3}{4h}\int dz \frac{\left[4g\, fin. \frac{z}{\sqrt{2g}} fin. 2z + \sqrt{2g}\, cof. \frac{z}{\sqrt{2g}} cof. 2z\right]}{(1-8g)\left[fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}.$$ Hæ autem formulæ omnes sunt absolutè integrabiles, prodibitque $u = D -$ $\frac{C\, cof. \frac{z}{\sqrt{2g}}}{fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} - \frac{g}{2h\, fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}} + \frac{3g\, cof. 2z}{2h(1-8g) fin. \frac{z}{\sqrt{2g}}}$; ex quo tandem resultat $s = u$ fin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} = D$ fin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + C$ cof. $\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{g}{2h} + \frac{3g\, cof. 2z}{2h(1-8g)}$, quæ

est

CAP. VI.

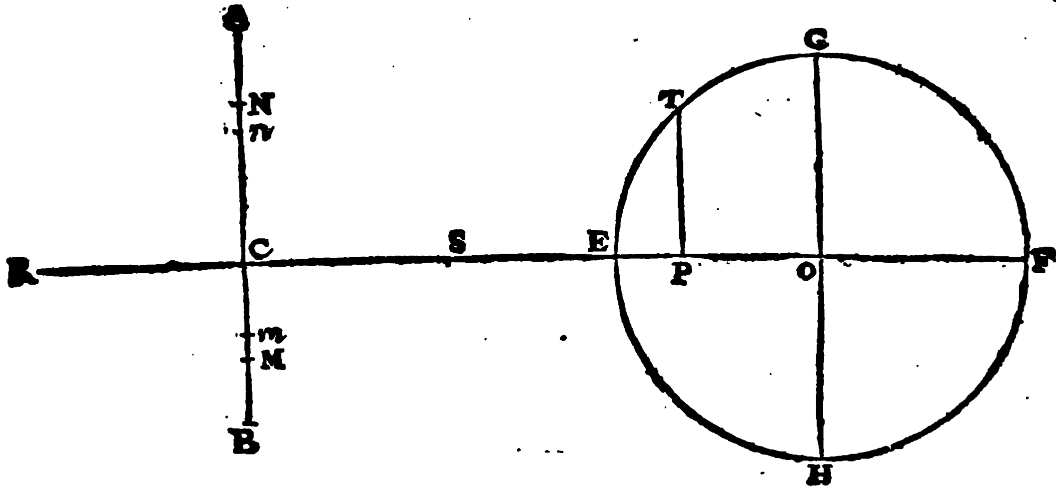
eſt æquatio generalis ad quodvis tempus z ſtatum aquæ, ſeu diſtantiam ejus ſupremæ ſuperficiei à C indicans, ubi conſtantes C & D ex dato Maris ſtatu ad datum tempus definiri oportet. Quòd ſi igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem eſſe deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in T verſatur, in eodem loco M verſetur, neceſſe erit ut valor ipſius s maneat idem, etſi arcus z integrâ peripheriâ 2π vel ejus multiplo augeatur. At poſito $z + 2\pi$ loco z, terminus coſ. $2z$ manet quidem invariatus, at D ſin. $\frac{z}{\sqrt{2g}} + C$ coſ. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$ fit $= D$ ſin. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}} + C$ coſ. $\frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}}$, quæ æqualitas adeſſe non poteſt niſi vel $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ſit numerus integer, vel C & $D = 0$. Cùm itaque g determinari non liceat, quia jam eſt datum, ponendum erit $C = 0$ & $D = 0$, ita ut iſta habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2h} + \frac{3g \operatorname{coſ}. 2z}{2h(1-8g)}$, ex quâ facillimè ad quodvis tempus ſtatus Maris cognoſcetur: valores ſcilicet affirmativi ipſius s dabunt ſitum aquæ infra ſitum naturalem C, negativi verò ſupra C.

§. 80. Cognito autem ſpatio s per tempus z, celeritas quoque Maris quâ in M aſcendit reperietur ex æquatione $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ erit enim $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{3g \operatorname{ſin}. 2z}{h(1-8g)}$, quæ expreſſio ipſi celeritati, quâ aquæ ſuperficies, dum in M verſatur, elevatur, eſt proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ ſemper eſt ut ſinus dupli arcûs ET, vel etiam ut ſinus dupli temporis, quo Luna à tranſitu per meridianum abeſt, tempore ſcilicet in arcum æquatoris converſo. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla ſi Luna fuerit vel in E vel in G vel in F vel in H, hoc eſt, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè ſit elevata vel maximè depreſſa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, biſque deprimetur, ideoque bini Fluxus binique Refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depreſſa iis ipſis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit coſ. $2z = 1$; atque ſpatium CB erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum, quibus eſt coſ. $2z = -1$: ac tum altitudo CA erit $= -s = \frac{g(2-4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non ſatis conveniunt, tamen ea hypotheſi aſſumtæ planè congruunt, quâ poſuimus Lunam ſolam agere, ac perpetuò in ipſo æquatore verſari, ex quo æſtus ſe tandem ad ſummam regularitatem componat neceſſe eſt. Quòd ſi enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol inſuper agat, æſtus jam formati perpetuò turbabuntur, ex quo ob æquabilitatem continuò ſublatam effectus tardiores neceſſariò conſequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs Maris horizontalis

zontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æstum formandum motu horizontali progredi debeat, perspicuum est hinc retardationem in æstu oriri oportere. CAP. VI.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus capitibus posuimus, inertiâ careret, tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus sollicitantibus in æquilibrio consisteret. Maxima igitur depressio etiam tum Lunæ horizontali responderet, cùm est $y = 0$, foretque spatium depressionis $CM = \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulsum ad meridianum continget, fiet per spatium $CN = \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare si aqua inertiâ careret, foret spatium MN, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admissâ agitationes perficientur in spatio majore $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}$, cujus excessus super spatium MN erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æstûs pendet à valore litteræ g; qui quidem semper est affirmativus; nam si foret $g = 0$, quod evenit si gravitatis vis esset infinitè magna respectu virium Lunæ & Solis, tum etiam nullus æstus orietur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æstus, qui adeo in infinitum excrescere posset si foret $8g = 1$; hoc quippe casu vis Lunæ gravitatem superaret, omnesque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non potest, multo minus autem esse potest $8g > 1$, quod tamen si eveniret, maxima elevatio appulsui Lunæ ad horizontem, maximaque depressio Lunæ meridianum occupanti responderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, si inertiâ careret, agitetur per spatium $MN = \frac{3g}{h}$, suprà autem §. 41. eâdem hâc hypothesi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari supra libellam per spatium 2,260 pedum, infra eam verò deprimi spatio 1,112 pedum, erit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, ideoque $\frac{g}{h} = 1,124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipsius g cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipsum arcum circuli cujus radius est $= 1$ expressimus: hinc itaque valor ipsius g respectu unitatis definietur tempore eodem modo expresso, quo aqua in M usque depressa solâ vi gravitatis se in C restitueret, quod tem-



tempus ex circumſtantiis facilè poterit æſtimari: prodibit autem per calculum tempus hujus reſtitutionis $= \frac{\pi}{2} \sqrt{2g}$, denotante π ſemiperipheriam circuli radium $= 1$ habentis, ſeu tempus duodecim horarum Lunarium. Quòd ſi igitur reſtitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi \sqrt{2g}}{2}$ & $g = \frac{2}{nn}$, ex quo perſpicuum eſt, quò citiùs aqua ſe propriâ ſuâ vi reſtituere valeat, eò minùs exceſſurum eſſe ſpatium AB ſpatium MN. Cùm autem de hâc reſtitutione non ſatis tutò judicare queamus, præſtabit ex obſervationibus rationem ſpatii AB ad MN proximè aſſumere. Si enim ponamus eſſe $AB = 2\,MN$, erit $\frac{3}{1-8g} = 6$, erit $g = \frac{2}{16}$; ſin autem ſit $AB = 3\,MN$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ & $g = \frac{2}{12}$: at poſito $AB = 4\,MN$, erit $g = \frac{2}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus ſpatium abſolvere poni poteſt, aſſumamus $g = \frac{2}{36}$ ſeu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2 horarum in ſtatum naturalem ſe reſtituere valeat. Poſito autem $g = \frac{1}{18}$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 5,4$; ſpatiumque $AB = 6$ ped. proximè. Ne autem tractatio nimis fiat ſpecialis, retineamus litteram n, cujus valorem eſſe circiter 6 vel 5 notaſſe ſufficiet, qui valor ſatis propè ad æſtimationem accedit: ita ut ſit $g = \frac{2}{nn}$ & $AB = \frac{3nn}{nn-16} \cdot \frac{9}{8}$ pedum: unde ſatis patet n neceſſariò eſſe debere > 4, eritque adeo vel 5 vel 6.

CAP. VI.

§. 83.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc problema in sensu latiori, ac ponamus regionis C elevationis poli sinum esse $= P$, cosinum $= p$; Lunae verò declinationis borealis sinum esse $= Q$, cosinum $= q$; Lunamque super Terra jam per meridianum transiisse, ab eoque distare angulo horario $= z$, ita ut z ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii $= 1$ designet; quòd si nunc arcûs z cosinus ponatur $= t$, erit sinus altitudinis Lunae super horizonte $= tpq + PQ$; ideoque vis Lunae Mare elevans $= \frac{L}{2b^3}$ CAP. VI.

$(3(tpq + PQ)^2 - 1) = \frac{3p^2q^2tt + 6pqPQt + 3P^2Q^2 - 1}{h}$, posito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò est $t = \text{cos.}\, z$ erit $2tt - 1 = \text{cos.}\, 2z$ & $tt = \frac{1 + \text{cos.}\, 2z}{2}$, ex quo vis Lunae ad Mare elevandum habebitur $=$ $\frac{3p^2q^2\,\text{cos.}\,2z}{2h} + \frac{6pqPQ\,\text{cos.}\,z}{h} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h}$. Ponamus nunc superficiem aquae in M versari, existente $CM = s$, & celeritatem ejus quâ actu ascendit debitam esse altitudini v, erit $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \text{vi Lunae}\right)$, cùm verò sit $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ seu $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} =$ ipsi celeritati ascensûs erit $v =$ $\frac{2ds\,dds}{dz}$, posito dz constante: hinc igitur emerget ista aequatio $2dds + dz^2$ $\left(\frac{s}{g} + \frac{3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2}{2h} + \frac{6pqPQ\,\text{cos.}\,z}{h} + \frac{3p^2q^2\,\text{cos.}\,2z}{2h}\right)$ relationem inter tempus z & statum Maris s continens.

§. 84. Quòd si nunc haec aequatio eodem modo tractetur, quo superior, ea pariter bis integrari posse deprehendetur, integrationibus autem singulis debito modo absolutis, & constantibus ita determinatis ut motus aquae fiat uniformis, reperietur $s = \frac{-g(3p^2q^2 + 6P^2Q^2 - 2)}{2h} - \frac{6gpqPQ\,\text{cos.}\,z}{h(1 - 2g)}$ $- \frac{3gp^2q^2\,\text{cos.}\,2z}{2h(1 - 8g)}$ ac celeritas ascensûs $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{-6gpqPQ\,\text{fin.}\,z}{h(1 - 2g)} - \frac{3gp^2q^2\,\text{fin.}\,2z}{h(1 - 8g)}$ Cùm autem sit fin. $2z = 2$ fin. z cof. z, celeritas duobus casibus evanescit, quorum primus est si fin. $z = 0$, alter si cof. $z = \frac{-PQ(1 - 8g)}{pq(1 - 2g)}$; illi casus dabunt aquam summam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam summam contingere debere iis ipsis momentis, quibus Luna per meridianum transit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, si est cof. $z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò est ima si est cof. $z = \frac{-PQ(1 - 8g)}{pq(1 - 2g)} = \frac{-5PQ}{8pq}$ posito $g = \frac{1}{18}$. Hic autem idem est notandum quod suprà, scilicet nos posuisse motum aquae esse unifor-

CAP. VI. mem seu quotidie sui similem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, seu saltem suam declinationem non variare. Quoniam verò ob variabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iste motus perpetuò turbatur, atque insuper motûs Maris horizontalis nulla adhuc habita est ratio, facilè intelligitur, tàm Fluxus quàm Refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis sequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent Fluxus, alter si Luna super horizonte ad meridianum appellit, alter si sub Terra; priori casu est cos. $z=1$, & cos. $2z=1$, hoc itaque tempore Mare supra libellam C elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h}+\frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)}+\frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna sub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per spatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h}+\frac{3p^2q^2}{2h(1-8g)}-\frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter cos. $z=-1$ ac cos. $2z=1$ hoc casu: harum igitur altitudinum differentia est $=\frac{12pqPQ}{h(1-2g)}$; atque Mare in transitu Lunæ per meridianum supra horizontem altiùs elevatur, si declinatio Lunæ sit borealis; contrà verò si declinatio fuerit australis, major Maris elevatio respondebit appulsui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipso æquatore versante, ambo Fluxus inter se erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum Fluxuum successivorum inæqualitas erit maxima sub elevatione poli 45°, pro his enim regionibus fit pP maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint à latitudine 45° remotæ. Mare autem maximè deprimetur, si fuerit cos. $z=-\frac{PQ(1-8)}{pq(1-2g)}$; quo valore substituto, reperietur aqua infra libellam C subsidere per spatium $=\frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)}-\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h}+\frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æstu movebitur per spatium $=\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)}\pm\frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}+\frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum signorum ambiguorum superius $+$ valet si Luna super horizonte, alterum verò $-$ si Luna sub horizonte in Fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum superiore Lunæ transitu per meridianum elevaretur supra libellam C per spatium $=\frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò transitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum discrimen est $=\frac{12gpqPQ}{h}g$; ita ut discrimen admissâ inertiâ majus sit parte circiter octavâ, quàm idem discrimen si inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua sublatâ inertiâ, si fuerit cos.

cos. $z = \frac{-PQ}{pq}$; tumque infra libellam erit constituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo spatiũ, per quod æstus Maris fit sublatâ inertiâ, prodit $= \frac{3p^2q^2 + 3P^2Q^2 \pm 6pqPQ}{h}g$; cùm igitur idem spatium concessâ inertiâ, sit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6grpPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit excessus hujus spatii super illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{-12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12g^2pqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo potest ut spatium, in quo æstus Maris continetur, majus sit sublatâ inertiâ, quàm si ea aquæ tribuatur, id quod eveniet si $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc est $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, posito $g = \frac{1}{18}$; quod verò si evenit, Luna ne quidem horizontem in cursu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo sequitur æstum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad usum magis accommodatè spatium AB, per quod Mare agitatur, ita expressum ut sit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi signorum ambiguorum superius transitum Lunæ per meridianum super horizonte, inferius verò sub horizonte respicit.

§. 87. Cùm sit $\frac{3g}{h} = 3,372$ pedum, Lunâ mediocrem à Terrâ distantiam tenente, atque g sit circiter $\frac{2}{35}$ vel $\frac{1}{18}$; erit posito $g = \frac{2}{35}$ spatium $AB = \frac{25}{9}(pq \pm \frac{3}{7}PQ)^2$, 3.372 ped. at facto $g = \frac{1}{18}$ erit spatium $AB = \frac{9}{5}(pq \pm \frac{5}{8}PQ)^2$. 3,372 ped. Ex his colligitur æstum fore maximum pro eadem elevatione poli, si fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ casu $g = \frac{2}{35}$ vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ casu $g = \frac{1}{18}$: horum autem casuum prior veritati magis videtur consentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{35}$ retineamus: hinc igitur sequitur sub æquatore æstum fore maximum si Luna nullam habeat declinationem, atque simul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit assignari, cui maximus æstus respondeat: uti ex adjecto laterculo apparet:

CAP. VI.

Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽		Elevatio Poli.	Declinatio ☽
0°.	0°,	0′	30°.	13°,	54′	60°.	———
5°.	2°,	8′	35°.	16°,	42′	65°.	———
10°.	4°,	19′	40°.	19°,	46′	70°.	———
15°.	6°,	33′	45°.	23°,	11′	75°.	———
20°.	8°,	52′	50°.	27°,	3′	80°.	———
25°.	11°,	18′	55°.	maxima.		85°.	———

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æſtus erit maximus, ſi Luna maximam obtineat declinationem, ſi quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$. ac ſi per obſervationes conſtet cuinam Lunæ declinationi maximus æſtus reſpondeat, tum inde valor litteræ g innoteſcet: quoniam autem ſub elevatione poli 50°. æſtus maximi nondum maximæ declinationi reſpondere obſervantur, ponamus id evenire ſub elevatione poli 60°, reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipſius g tutò hi limites conſtitui poſſe videntur $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{18}$; ex hâc verò hypotheſi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiamnum nil definimus, ſed obſervationes hunc in finem ſollicitè inſtitutas expectamus.

§. 88. Quòd ſi autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æſtus ſucceſſivi, dum Luna in maximâ declinatione verſatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipſo theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim ſit horum binorum æſtuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, ſit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ ſi ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hâc itaque hypotheſi erit quantitas æſtûs majoris $= (pq + \frac{1}{4}PQ)^2 . 16, 86$ ped. minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2 . 16, 86$ ped. At inter hos binos æſtus aqua humillima non medium interjacet, ſed minori eſt vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos Fluxus dirimit, quàm fieret, ſi ima aqua Lunæ horizontali reſponderet. Si enim tempus medium inter binos Fluxus ponatur z, erit coſ. $z = 0$, at temporis, quo Refluxus Fluxum majorem inſequitur, coſinus eſt $= \frac{-PQ}{4pq}$, ejuſque ergo intervalli à tempore medio ſinus eſt $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ expreſſio adeo ſub elevatione poli 60°, pro maxima Lunæ declinatione 28°, tantum fit $= 13°$, unde Refluxus

fluxus à tempore inter Fluxus medio circiter 54′ aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ tùm Luna ad æquatorem versentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipsius g assumto consequuntur, imprimis notari oportet, litteram g non posse absolutè determinari, sed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius Oceani spectat, cùm ab extensione tùm etiam profunditate Maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera g, varias significationes sortietur.

Cap. VI.

§. 89. Ex solutione horum duorum problematum, quæ quidem in se spectata non solum sunt attentione digna, sed etiam cùm analysin tùm etiam motûs scientiam amplificant, quamvis ea casum propositum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ nostræ jam insigne addit firmamentum. Simili autem modo vis à sole profecta cum inertiâ aquæ potest conjungi, atque æstus Maris definiri, quâtenus à solâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æstus quovis tempore & quovis loco debeat evenire. In hoc quidem capite cogitationes adhuc ab omnibus obstaculis à Terrâ & littoribus oriundis prorsus abstrahimus, atque universam Terram undiquaque aquâ circumfusam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejusmodi observationibus, quæ in amplissimo Oceano apud exiguas insulas sunt institutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progressivi, quo alternativè ad loca, in quibus Fluxus & Refluxus accidit, progreditur & recedit, rationem habuimus, necesse est ut etiam hunc motum & Phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui opposita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus consequitur: unde Fluxus non ad transitus Lunæ per meridianum contingent, sed aliquanto seriùs evenient, omnino uti experientia testatur.

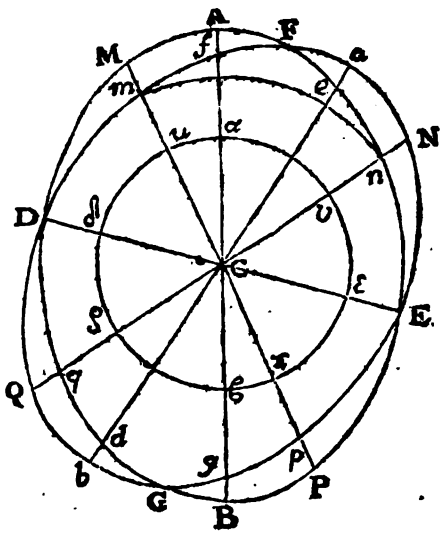
§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non potest, quia à motu aquæ ejusque profunditate plurimum pendeat, prout etiam videmus in diversis locis eam vehementer esse diversam, atque aliis locis Fluxum contingere post Lunæ culminationem tribus horis nondum elapsis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem insignis retardatio terrarum positioni est adscribenda; interim tamen hinc sufficienter constat motum Maris admodum posse impediri. Pro eodem verò loco satis luculenter perspicitur, quò major atque altior Fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd si enim æstus contingat infinitè parvus, dubium est nullum, quin is stato tempore adveniat, cùm impedimentis hoc casu ne locus quidem concedatur agendi: unde dilucidè sequitur æstus eò tardiùs advenire debere, quò

CAP. VI. sint majores. Atque hoc ipsum experientia confirmat, quâ constat æstus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs insequi transitum Lunæ per meridianum, quàm æstus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs respectu Solis per meridianum transeat, quàm in syzygiis, æstus tamen non 6 horis tardiùs, sed tantum circiter 5 ¼ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim institui potest simili modo, quo pro solâ vi Lunæ fecimus, ejus modi retardationem majorem in syzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamsi eum ob summas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen satis planum est præcipuam ejus causam in ipsâ naturâ aquæ esse quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis à *Flamstedio* maximè probatur, quippe qui observavit maximam retardationem non tam syzygiis luminarium, neque minimam quadraturis respondere, sed iis tempestatibus, quibus æstus soleant esse maximi & minimi, id quod demum post syzygias & quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem Fluxuum à syzygiis ad quadraturas accelerationem, respectu transitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem à quadraturis ad syzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus post syzygias Fluxum transitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, stabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia sequentibus æstus Maris citiùs insequi debet transitum Lunæ per meridianum, quàm in ipsis syzygiis, id quod etiam observationes mirificè confirmant; inter Fluxum enim quintum & sextum post syzygias retardatio respectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24' retardetur. Hanc ob rem à Sole determinatur æstus ad actionem virium magis exactè sequendam, quæ determinatio cùm duret usque ad quadraturas, mirum non est, quòd æstus tùm respectu Lunæ citiùs contingant, magisque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progressu à quadraturis ad syzygias, quo tempore æstus à Sole continuò retardantur, hocque necessariò efficitur, ut tandem in ipsis syzygiis Fluxus tardiùs insequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æstûs conjungendam esse putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, sæpissimè enim in hâc quæstione plures causæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem est id ipsum quod calculus ille summoperè implicatus & molestus quasi per transennam ostendere visus est.

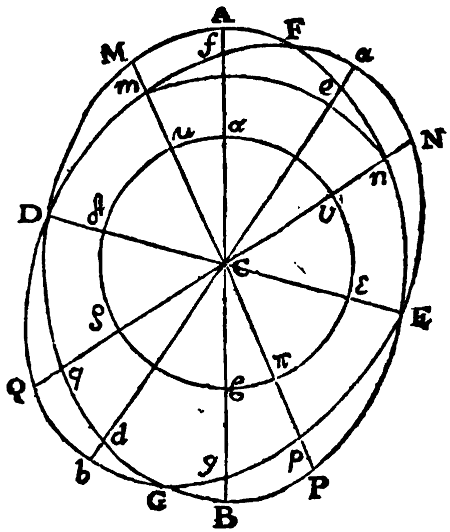
§. 92. Quò autem tam de his Phænomenis quàm reliquis certiùs & solidiùs judicare queamus, ipsum motum progressivum, quem aqua ab æstu recipit, investigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur, nunc subsidat, necesse est ut priori casu aqua aliunde affluat, posteriori tiori verò ab eodem loco defluat, unde nomina Fluxûs ac Refluxûs originem traxerunt. Repræsentet igitur tempore quocunque figura $ADBE$ statum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis A & B aqua maximè sit elevata, in locis verò mediis ab A & B æquidistantibus, maximè depressa. Post aliquod tempus transferatur æstus summus ex A & B in a & b, sitque $a\,D\,b\,E$ figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore necesse est, ut à parte oceani DF defluxerit aquæ copia $FAMDmf$, in partem verò FE tantundem aquæ affluxerit, portio scilicet $FaNEne$: simili modo portio EG decrevit copia aquæ $EPBGgp$, portioque GD augmentum accepit $GbQDqd$. Si nunc ponamus portionem FMm transire in locum FNn, ac portionem EPp in ENn deferri, satis clarè motum aquæ progressivum intelligere licebit. Cùm enim motus aquæ summæ A fiat ab ortu in occasum, aqua quæ circa A versùs orientem scilicet ab M ad N usque est sita, in occasum movebitur; similiterque ea quæ huic è diametro est opposita & spatium PQ occupat. Contrà verò reliqua aqua in MQ & NP contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim M, N, P & Q quippe limitibus inter motus versùs ortum & obitum, celeritas erit nulla, deinde ab M usque ad F crescet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut A sint differentiis Af proportionalia: ab F verò usque ad N celeritas decrescere debet, & decrementum celeritatis in e erit ut ae; similique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propositæ.

CAP. VI.



§. 93. Si hæc diligentiùs prosequamur ac punctum a ipsi A proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque M fore intervallum Mm sinui dupli anguli MCA proportionale. Quare si anguli ACM sinus ponatur $= x$, cosinus $= y$, ac celeritas quam aqua in M habet, versùs occasum $= u$ erit du ut $2xy$. Cùm autem elementum arcûs AM sit ut $\frac{dx}{g}$; nam figuram instar circuli considerari licet: erit du ut $2x\,dx$, atque u proportionale erit ipsi $2xx - 1$ ejusmodi adjecta constante, ut ubi Mm est maximum, ibi celeritas evanescat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quo-

CAP. VI. quocunque *M*, quam aqua versùs occidentem habebit, uti cosinus dupli anguli *M C A*. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè est elevata; huicque celeritati æqualis est ea, quâ aqua in locis ubi maximè est depressa, versùs orientem promovetur; si quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in sphæra motus aliquantum diversus erit, sed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A & *B* 45 grad. distant, ob cosinum dupli anguli $=0$, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non solum motus aquæ progressivus cognoscitur, quo alterna elevatio ac depressio producitur, sed etiam luculenter perturbationes, quæ à Terris, littoribus atque etiam à fundo Maris proficisci possunt, perspiciuntur. Ceterum quanquam sectio nostra plana *A D B E* æquatorem solum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis significandum satis commodè adhiberi potest: quin etiam motus pro sphæra hinc satis distinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per solidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.



§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquisitioni insistemus, quòd celeritas progressiva insuper à profunditate maris pendeat. Quòd si enim ponamus *m n* jam esse Maris fundum, ita ut profunditas Maris in *M* major non esset quàm *M m*, tum isti aquæ tantus motus inesse deberet, quo ea, dum Fluxus ex *A* in *a* transit, ex situ *n E M m* in situm *m F N n* transferri posset. Hic autem motus quamvis sit difformis & per totam massam inæquabilis, tamen si tota translatio spectetur, totus motus ex spatio à centro gravitatis interea percurso est æstimandus. Hoc igitur casu, quo Terræ superficiem solidam ad *m n* usque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis massæ *n F M m* ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum *A*, ex quo ejus celeritas tanta esse deberet, quâ tempore unius horæ spatium ferè 15 graduum percurrere posset, quæ celeritas undique foret enormis ac stupenda. At si Mari profunditatem majorem tribuamus, scilicet ad μ ν usque, tum illa celeritas multò fiet minor, decrescet namque in eadem ratione in qua profunditas crescit. Cùm igitur celeritas Maris, quæ antè in se spectata inventa

inventa est cosinui dupli anguli MCA proportionalis, eò fiat minor, quò majorem Mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compositam ex ratione directâ cosinûs dupli anguli MCA atque ex inversâ profunditatis. CAP. VI.

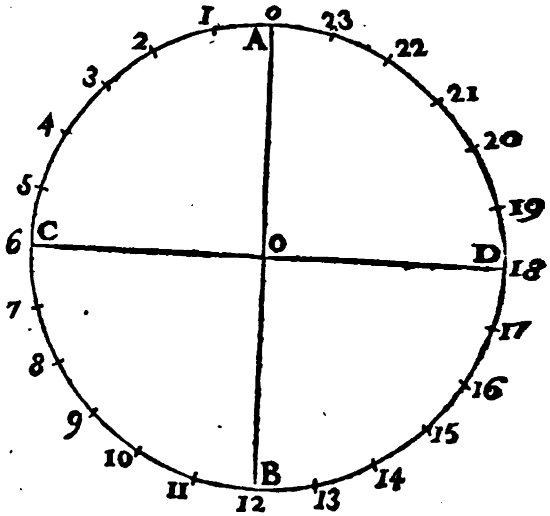
§. 95. Datur autem alius modus celeritatem Maris horizontalem, positâ scilicet ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diversas profunditates patet, si cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu Maris verticali, quo modò ascendit modò descendit, qui jam suprà est definitus. Primò enim manifestum est, si Mare ubique eâdem celeritate, (positâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem mansuram esse eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam esse. At si aqua motu inæquabili progrediatur, manifestum est iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgescere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ crescat, ibi aquam subsidere oportere. Quare cùm elevatio & depressio Maris à motûs progressivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu ascensûs & descensûs cognito. Cùm enim celeritas ascensûs sit decremento celeritatis progressivæ æqualis, celeritas descensûs verò incremento eeleritatis progressivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem suprà §. 84, si Luna à meridiano versùs occasum jam recessit angulo z, hoc est cùm regio proposita ab eâ, in quâ aqua est summa, versùs orientem secundùm longitudinem distet angulo z, fore celeritatem quâ aqua ascendit $= \frac{-6gpqPQ\,\mathrm{fin}.\,z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,\mathrm{fin}.\,2z}{h(1-8g)}$. Quare cùm huic celeritati ascensûs proportionale sit decrementum motûs horizontalis, erit ipsa celeritas horizontalis versùs occasum ut $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{6gpqPQ\,\mathrm{cof}.\,z}{h(1-2g)} + \frac{3gp^2q^2\,\mathrm{cof}.\,2z}{2h(1-8g)}$; hujus enim differentiale negativè sumtum & per dz divisum dat ipsam celeritatem ascensûs. Quoniam autem hæc expressio simul exhibet spatium, quo Mare supra libellam elevatur, erit celeritas Maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi supra libellam, & inversè profunditati Maris, quæ est vera regula pro motu Maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo insufficienti supersedere potuissemus.

§. 96. Consideremus ergo motum, quo aqua tàm verticaliter quàm horizontaliter promovetur à Fluxu usque ad Refluxum, indeque ad sequentem Fluxum, idque sub æquatore, dum Luna pariter in æquatore versatur: erit itaque celeritas ascensûs

 ut

CAP. VI.

ut − sin. 2 z, celeritas autem horizontalis versùs occasum ut 15 cos. 2 z + 1 posito $g = \frac{1}{15}$, cui expressioni simul altitudo aquæ supra libellam est proportionalis. Quòd si ergo superficies Terræ seu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis *A* & *B* aqua sit maximè elevata, in *C* & *D* verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. designabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ Lunari 62 minuta. In Tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tam verticalis, quàm horizontalis, ad singulas horas post Fluxum elapsas.



Horæ post Fluxum	*Celeritas Maris verticalis.*		*Celeritas Maris horizontalis.*	
0	0,000	descendit.	1,067	in occasum.
1	0,500	descendit.	0,927	in occasum.
2	0,860	descendit.	0,567	in occasum.
3	1,000	descendit.	0,067	in occasum.
4	0,860	descendit.	0,432	in ortum.
5	0,500	descendit.	0,792	in ortum.
6	0,000	ascendit.	0,932	in ortum.
7	0,500	ascendit.	0,792	in ortum.
8	0,860	ascendit.	0,432	in ortum.
9	1,000	ascendit.	0,067	in occasum.
10	0,860	ascendit.	0,567	in occasum.
11	0,500	ascendit.	0,927	in occasum.
12	0,000	descendit.	1,067	in occasum.

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè si Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox ascensum citiùs absolvi mox verò descensum; totus autem motus faciliùs ex ipsis formulis datis cognoscetur. Hîc denique profunditatem ubique eandem posuimus; quòd si enim esset diversa, sa, motus horizontalis simul rationem inversam profunditatis tenebit. CAP. VI.

§. 97. Denique antequam hoc caput finiamus, notari oportet, neque maximos æstus iis ipsis temporibus evenire posse, quibus vires Solis & Lunæ maximè vigent, nec minimos æstus tum, cùm vis à Luna & Sole nata est debilissima, sed aliquanto tardiùs. Æstûs enim magnitudo non solum à quantitate virium sollicitantium pendet, uti id usuveniret, si aqua inertiâ careret, sed insuper à motu jam antè concepto. Quòd si enim antè Mare omnino quievisset, tum primus certè æstus oriundus admodum futurus esset exilis, etiamsi vires sollicitantes essent maximæ; sequentes verò æstus continuò crescerent, donec tandem post tempus infinitum magnitudinem assignatam obtinerent, si quidem vires sollicitantes idem robur perpetuò servarent: atque hoc idem evenire debet, si æstus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus sollicitantibus convenit. Quare cùm æstus novilunia ac plenilunia præcedentes sint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò subitò totam suam quantitatem consequentur, atque hanc ob rem æstus etiamnum post syzygias augmenta accipient, donec ob tum secutura virium decrementa, æstus iterum decrescere incipiant. Ita tempore noviluniorum & pleniluniorum non tam ipsi æstus quàm incrementa eorum censenda sunt maxima, quatenus scilicet æstus præcedentes maximè deficiunt, ab iis qui sequi deberent; ex quo manifestum est non illos æstus, qui in ipsis syzygiis luminarium contingunt, esse maximos, sed sequentes esse majores. Hocque idem intelligendum est de æstibus minimis, qui non in ipsas quadraturas incidunt, sed tardiùs sequuntur: unde ratio luculenter perspicitur, cur æstus tàm maximi quàm minimi non ipsis syzygiarum & quadraturarum tempestatibus respondeant, sed seriùs observentur, tertii scilicet demum vel quarti post hæc tempora.

CAPUT SEPTIMUM.

Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æstum Maris observatorum.

§. 98. IN præcedentibus capitibus fusiùs exposuimus effectus, qui in Mari à viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam est directa, altera versùs Solem, produci debent; eosque cùm per calculum analyticum, tùm per solida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum existentiâ dubitari omnino non liceat, si quidem illæ vires admittantur. At verò istas vires in mundo existere non solum per alia phæ-

CAP. VII. nomena evidentissimè probavimus, sed etiam earum causam physicam assignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam sit constitutus, posuimus, quippe quæ est unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in suis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipsa phænomena internam vorticum structuram & indolem commonstrarunt; ob eaque vortices ita comparatos esse statuimus, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò assumserimus, si effectus ex iis oriundi cum phænomenis æstûs Maris conveniant, certissimè nobis persuadere poterimus, in assignatis viribus veram æstûs Maris causam contineri; absonumque omninò fore, si causam æstûs Maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc capite constituimus omnes effectus, qui in superioribus capitibus sparsim sunt eruti, conjunctim & ordine proponere, summumque eorum consensum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum à littoribus terrisque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejusmodi anomalias æstûs Maris, quæ evidentissimè à Terris contingentibus ortum habeant, cujusmodi sunt æstus vel vehementer enormes vel vix sensibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel insignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis sequens caput ultimum destinavimus: ita in hoc capite tantum ea æstûs Maris phænomena explicanda suscipimus, quæ in portubus amplissimum Oceanum respicientibus vel insulis observari solent in Oceano sitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus Fluxus ac Refluxus Maris præditus esse observatur, distinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres classes revocari debere. Ad primam scilicet classem referenda sunt phænomena, quæ in uno æstu in se spectato conspiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodissimè sub varietatibus diurnis comprehendi possunt, quâtenus ea se offerunt observatori, qui per integrum tantum diem observationes instituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda classis complectitur varietates menstruas, quæ sese observatori per integrum mensem æstum Maris contemplanti offerunt, quorsum pertinent æstus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique classis comprehendit varietates annuas ac plusquam annuas, quæ sequuntur vel varias Lunæ à Terrâ distantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuscujusque classis recensebimus, atque quomodo singula cum theoriâ traditâ congruant, ostendemus. Hic verò, ut jam est monitum, à perturbationibus quæ à Terris ac littoribus provenire possunt, animum prorsus abstinemus, eas sequenti capiti reservantes. Multò mi-

nùs

nis verò ad ventum hìc respicimus, quo æstus Maris cùm ratione magnitudinis tùm temporis plurimum affici observatur; sed tantùm ejusmodi phænomena explicare hìc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè sint obnoxia. Cap. VII.

§. 100. Quod igitur ad primam classem attinet, præcipuum Phænomenum in hoc consistit, quòd ubique in amplissimo Oceano quotidie bini Maris Fluxus seu elevationes, binique Refluxus seu depressiones observentur, atque tempus inter binos Fluxus successivos circiter 12. h. 24'. deprehendatur. Huic verò Phænomeno, si ulli alii, per theoriam nostram plenissimè est satisfactum, ubi ostendimus maximam aquæ elevationem deberi transitui Lunæ per meridianum tam supra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejusdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12. hor. 24', necessariò sequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos Fluxus tanto tempore à se invicem dissitos oriri debere, quemadmodum hoc ipsum calculus tam pro hypothesi aquæ inertiâ carentis, quàm admissâ inertiâ, clarissimè indicavit. Simul autem ex iisdem determinationibus intelligitur sub ipsis polis nullum omnino æstum dari diurnum, in regionibus verò à polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt, quotidie unum tantum Fluxum unicumque Refluxum contingere debere; quæ consequentia theoriæ, etsi observationibus nondum satis est comprobata, tamen quia ex iisdem principiis sequitur quæ institutis observationibus satisfaciant, nulli ampliùs dubio subjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini Fluxus totidemque Refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non satis exactè medium interjacere observatur inter Fluxuum momenta, sed mox priori mox posteriori est propius, quod Phænomenum cum nostrâ theoriâ apprimè congruit; ostendimus enim momentum Refluxûs non exactè tempori medio inter Fluxus respondere, nisi vel locus situs sit sub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, sed modò priori modò posteriori Fluxui esse propius.

§. 101. Secundum Phænomenum huc redit, ut ubique locorum Fluxus post transitum Lunæ per meridianum venire observetur, idque aliquot horarum spatio, in portubus versùs apertum Oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum Oceano non liberrimè communicantur, sed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multo tardiùs æstus advenit, quæ retardatio si ferè ad 12 horas ascendit, in causa esse solet, ut hujusmodi in locis Fluxus ante transitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri posset Fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè consideratâ, à præcedente culminatione oriatur, atque adeo eam 9 ferè horis demum sequatur, uti apparebit si æstuum momenta, quæ successivè ad littora Britanniæ minoris

CAP. VI. & Normanniæ observantur continuóque magis retardantur, attentiùs inspiciantur. Deberet quidem ubique Fluxus in ipsos Lunæ transitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non solum demtâ inertiâ, sed etiam eâ positâ, si tantum aquæ motus verticalis spectetur; at si etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè ostendimus Fluxum perpetuò retardari, ac demum post Lunæ transitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm sit admodum variabile pluribusque circumstantiis subjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis sese in situm æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum n esse circiter 5 vel 6, manifestum est tanto etiam tempore opus esse, quo aqua eum situm quem vires intendunt, induat, ex quo Fluxus circiter 2 horas vel 2 ½ hor. post transitnm Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum observationibus in Oceano libero institutis egregiè convenit; hancque idcirco præcipuam hujus retardationis causam meritò assignamus.

§. 102. Tertium Phænomenon suppeditat æstûs magnitudo, quæ autem tam diversis locis quàm diversis tempestatibus maximè est mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æstubus, qui nonnullis in portubus observari solent, reliqui cum nostrâ Theoriâ egregiè consentiunt; inertiâ enim sublatâ, invenimus sub æquatore maximum æstum fore per spatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo & plus fiat majus, prout valor ipsius g (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui à facultate Oceani sese propriâ suâ vi in statum æquilibrii restituendi pendet; ex quo sub æquatore spatium per quod maximus æstus agitatur ad 8., 12, 16 & plures pedes exsurgere potest. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æstûs tenere rationem duplicatam cosinuum elevationis poli, unde sub elevatione poli 45°., magnitudo æstûs circiter duplo erit minor quàm sub ipso æquatore; cujus veritas in locis à littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis à littoribus remotis æstus multò minor quàm ad littora; cujus discriminis causa in sequenti capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio Mari plerumque æstus adhuc minor observatur, quàm hæc regula requirit; id autem ostendetur à non satis amplâ Oceani extensione secundùm longitudinem proficisci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui versùs Occidentem littoribus Americæ; versùs Orientem verò littoribus Africæ & Europæ terminatur, quæ amplitudo non est satis magna, ut integram æstûs quantitatem suscipere queat.

§. 103.

§. 103. Quartum Phænomenon varietates menſtruas reſpicit, atque oſtendit æſtus, qui circa plenilunia & novilunia contingunt, inter reliquos ejuſdem menſis eſſe maximos, æſtus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ noſtrâ ad amuſſim quadrat. Cùm enim æſtus Maris non ſolum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, ſed etiam à vi Solem ſpectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor eſt vi Lunæ, manifeſtum eſt æſtum Maris maximum eſſe debere, ſi ambæ vires inter ſe conſpirent, atque aquam ſimul vel elevent vel deprimant, id quod accidere oſtendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde ſimili modo, quoniam iſtæ vires inter ſe maximè diſcrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua à Lunâ maximè elevatur, ſimul à Sole maximè deprimitur ac viciſſim, perſpicuum eſt iiſdem temporibus æſtum minimum eſſe debere. Præterea verò ipſum diſcrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æſtus maximos & minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis inveſtigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ abſolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex obſervationibus Briſtolii & Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ inſtitutis, concluſionibus mirificè inter ſe congruentibus: qualis conſenſus profectò expectari non poſſet, ſi theoria veritati non eſſet conſentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujuſmodi ſunt *Galilæi*, *Walliſii* atque *Carteſii*, qui cauſam in preſſione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè ſatisfaciunt, ſed potiùs prorſùs evertuntur. Cap. VII.

§. 104. Quintum Phænomenon in hoc conſiſtat, quòd unius menſis intervallo maximi æſtus non ſint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè inſequuntur, ſed ſequentes tertii ſcilicet circiter vel quarti, ſimilique intervallo æſtus minimi demum poſt quadraturas contingunt. Hujus autem Phænomeni ratio in §. 97. fuſiùs eſt expoſita, ubi oſtendimus, cùm æſtus ante ſyzygias incidentes eſſent minores, maximam vim à Sole & Lunâ ortam non ſubitò æſtum maximum producere valere, ſed tantùm Mare ad eum ſtatum ſolicitare. Cùm igitur poſt ſyzygias vis æſtum efficiens ſenſibiliter non decreſcat, æſtus etiamnum poſt hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum poſt ſyzygias fiet maximus; ſimiliſque eſt ratio diminutionis æſtuum, quæ etiamnum poſt quadraturas contingere debet, ita ut æſtus minimi demum poſt quadraturas eveniant. Hujuſmodi autem retardationes effectuum à viribus in mundo exiſtentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob ſimilem enim rationem ſingulis diebus maximum calorem non in ipſo meridie ſentimus, etiamſi hoc tempore vis Solis calefaciens ſine dubio ſit maxima, ſed demum aliquot horis poſt meridiem, atque propter eandem cauſam neque ſolſtitii æſtivi momento maximus calor annuus ſentitur, neque tempore ſolſtitii hyberni frigus ſummum, ſed utrumque notabiliter tardiùs.

CAP. VII. §. 105. Sextum Phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta Fluxuum tempore syzygiarum multo strictiùs ordinem tenere observantur, quàm circa quadraturas. Hic verò ante omnia animadvertendum est præcipuam sensibilem anomaliam in momentis æstuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore solari atque à vero meridie seu transitu Solis per meridianum soleant computari, cùm ea potiùs à transitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd si autem ad has observationes tempus lunare à transitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evanescent, hoc verò multo magis in fluxubus circa syzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum transit, Sol non semper in horizonte versatur, sed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, necesse est ut illo casu Fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod discrimen cùm partim ab elevatione poli, partim à declinatione luminarium pendeat, momenta Fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumstantiarum ratione satis propè definiri potest. Circa tempora Fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc sola correctio seu reductio ad transitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorsum spectat regula à celeb. *Cassino* in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium seu novilunium vel ante meridiem vel post incidit, totidem bina minuta ad tempus Fluxûs medium vel addere vel ab eo subtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ est petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia superesse deprehenditur, cujus autem ratio ex nostrâ theoriâ sponte sequitur. Quando enim syzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum transit, Sol jam ante eum est transgressus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo necesse est ut Fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula sola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis Fluxuum Dunkerquæ & in Portu Gratiæ observatorum, Mem. 1710. insertis, manifesto conspicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum Fluxus citiùs advenisse observatur, quàm calculus Cassinianus indicabat; contrà verò tardiùs si syzygiæ demum pluribus horis post meridiem inciderint, cujus majoris retardationis causa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente est quærenda.

§. 106. Septimum Phænomenon suppeditat diversa retardatio Fluxuum in syzygiis luminarium & quadraturis respectu appulsûs Lunæ ad meridianum; tardiùs scilicet ubique locorum Fluxus, qui in syzygiis contingunt, insequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem Phænomeni duplex causa potest assignari, quarum prima à solâ quantitate æstuum petitur, quia enim æstus syzygiarum multò sunt majores quàm æstus quadraturarum, consentaneum vide-

videtur illos tardiùs venire quàm hos. Alterâ verò causa quæ hoc Phænomenon multò distinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, nostræ theoriæ omnino est propria, priorique longè est præferenda. Ponamus enim t esse tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis Fluxus post appulsum Lunæ ad meridianum venire solet; sequentibus igitur diebus hoc tempus t continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano versatur, Mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè usque ad quadraturas, necesse est ut his temporibus Fluxus multò citiùs post culminationem Lunæ sequantur, viribusque sollicitantibus magis obtemperent, uti hoc fusiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t - \theta$ Post quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum Fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo usque ad sequentem syzygiam intervallum $t - \theta$ iterum ad t usque augebitur. Hujusque Phænomeni solius explicatio sufficere posset ad veritatem theoriæ nostræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu sit insuperabile; neque à nemine adhuc saltem probabilis ejus causa sit assignata. Cap. VII.

§. 107. Octavum Phænomenon petamus ex inæqualitate duorum Fluxuum sese immediatè insequentium, quorum alter transitui Lunæ superiori per meridianum respondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè observatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum cùm Lunæ declinatio est maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamsi in ipso æquatore versetur, tamen majori vi gaudere ad Mare movendum, quando super horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at discrimen sub æquatore tam est exiguum, ut vix in sensus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus Phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ seu distantiâ ab horizonte continetur; hinc enim sequitur quò major fuerit differentia inter distantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit tum super horizonte tum sub horizonte, eò majorem esse debere differentiam inter binos Fluxus successivos, ex quo perspicuum est istam differentiam versùs polos continuò crescere debere, si quidem Luna habeat declinationem. Quòd si ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus septentrionalibus Fluxus erit major qui transitum Lunæ per meridianum superiorem sequitur, alter verò sequens, qui transitui inferiori respondet, minor. Contrà autem si Lunæ declinatio fuerit australis, appulsui Lunæ ad meridianum superiori Fluxus succedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam *Flamstedius* observavit diligenter, nullumque est dubium, quin ea per copiosissimas observationes, quas Academia Celeberrima Regia Parisina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles Fluxuum probè est inspicienda, quoniam aliquibus in

CAP. VII. portubus tantopere retardantur, ut sequentibus Lunæ transitibus per meridianum sint propiores, quàm illi, cui suam originem debent; ita Dunkerquæ circa syzygias Fluxus circiter meridie observari solet, neque verò illi ipsi transitui Lunæ per meridianum est tribuendus qui eodem tempore fit, sed præcedenti, prouti successiva retardationis incrementa ad littora Galliæ & Belgii borealia evidentissimè testantur. Quare si verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujusmodi observationes perlustrare voluerit, is quemque Fluxum non cum transitu Lunæ per meridianum proximo comparet, sed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria Phænomena esset deprehensurus.

§. 108. Commodus hîc nobis præbetur locus explicandi transitum à binis æstubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares sitis eveniunt, ad singulos æstus, qui secundùm theoriam nostram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria nostra monstrat, in zonis temperatis & torridâ quotidie duos Fluxus observari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, transitio subitanea à binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri posset. Sed quia, si Fluxus bini successive inter se sunt inæquales, Refluxus aquæ seu maxima depressio Fluxui minori est vicinior, bini æstus quoque successivi ratione temporis inter se erunt inæquales, si quidem voce æstûs intelligamus motum aquæ à summâ elevatione ad imam depressionem usque, ac vicissim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æstus successivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò simul ubique absolventur tempore 12 horarum, cum 24′ circiter: quòd si itaque in eas regiones usque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel super horizonte vel sub horizonte meridianum attingit, æstus minor omnino evanescet, solusque major supererit, qui tempus 12 h. 24′. adimplebit. Ex quibus perspicuum est, si Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æstuum successivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evanescere debere, quod cùm evenit, bini æstus in unum coalescunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æstûs Maris menstruis, pervenimus ad anomalias annuas vel plusquam annuas, ac nonum quidem Phænomenon desumimus ex variatione æstûs, quæ à diversis Lunæ à Terrâ distantiis proficiscitur. Observantur enim æstus ubique majores ceteris paribus, in iisdem scilicet luminarium aspectibus iisdemque declinationibus, si Luna in suo perigæo versetur, minores verò, Lunâ in apogæo existente. Egregiè autem hæc conveniunt cum nostrâ theoriâ, quâ demonstravimus Lunæ vires ad Mare movendum decrescere in triplicatâ ratione distantiarum Lunæ à Terrâ: quòd si igitur Luna versetur in perigæo, Fluxus debebunt esse majores, quàm si Luna apogæum occupat. Præterea etiam tabula

tabula quam Celeb. *Cassini* in Mem. 1713. pro diversis Lunæ à Terrâ distantiis ex plurimis observationibus Brestiæ institutis collegit, satis accuratè cum theoriâ nostrâ conspirat, etiamsi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm ista ratio requireret, tamen discrimen valde est exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum suum effectum non tam citò consequi posse, quem consequeretur, si Luna perpetuò in perigæo versaretur. Aliter autem Luna apogæa est comparata, quæ ad diminuendum æstum Maris tendit, cùm enim Mare ob inertiam & impedimenta ipsum ad diminutionem æstûs sit proclive, sine ullâ resistentiâ Luna in apogæo constituta effectum suum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter Celeb. *Cassini* se observasse testatur, similem differentiam etsi multò minorem à variis Solis à Terrâ distantiis produci, id quod nostræ theoriæ non solum est consentaneum, sed inde etiam ipsa quantitas hujus differentiæ potest definiri.

§. 110. Denique decimum Phænomenon sese nobis contemplandum offert, quo vulgò statui solet æstus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoctia, cæteris esse majores, etiamsi observationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æstus cæteris paribus comparatus esse debeat pro diversis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex nostrâ theoriâ (§. 87) æstus dum Luna in æquatore versatur, maximos esse non posse, nisi in locis sub ipso æquatore sitis; atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æstus respondeant. Ita pro elevatione poli 50°, æstus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°, si quidem g ponatur $= \frac{2}{25}$; at posito $g = \frac{1}{18}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æstum producens circiter 16°, id quod mirificè convenit cum observationibus ad Littora Galliæ Septentrionalia institutis, quibus constat maximos syzygiarum æstus mensibus Novembri & Februario accidere solere, quibus temporibus Luna ferè assignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore versanti maximi æstus adscribi solet, ansam præbuisse videtur, est modus æstuum quantitates definiendi peculiaris ac satis perversus; cùm enim crederent plerique observatores causis alienis tribuendam esse inæqualitatem, quæ inter binos æstus successivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire sunt arbitrati, si sumerent medium inter binos Fluxus successivos. Quòd si autem hoc modo quique æstus æstimentur, tum utique maximi æstus in æquinoctia incidere observabuntur, id quod etiam nostræ theoriæ maximè est conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cùm enim positis sinu elevationis poli $= P$, cosinu $= p$, sinu declinationis Lunæ $= Q$, cosinu $= q$, major æstus fiat per spatium $\frac{3g}{h(1-8g}\left(pq + \frac{PQ(1-8g)^2}{1-2g}\right)$, minor verò per spatium =

CAP. VII. $\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq-\frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, §. 86.) erit per hunc æstum Maris mensurandi modum quantitas æstûs $=\frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2q^2-\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)=\frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2-p^2Q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex quâ expressione perspicitur maximos æstus ubique, si quidem modo recensito mensurentur, Lunæ in ipso æquatore degenti respondere, nisi sit $\frac{(1-8g)^2P^2}{(1-2g)^2}>p^2$, hoc est nisi tangens elevationis poli major sit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his scilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æstus producet. At si ponatur $g=\frac{2}{25}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66°; sin autem ponatur $g=\frac{1}{58}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at posito $g=\frac{1}{16}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis observationes institui non soleant, satis tutò affirmare licet, maximos æstus menstruos accidere circa æquinoctia, si quidem quantitas æstûs quotidie mensuretur per medium arithmeticum inter spatia, quæ duo æstus successivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ nostrâ sit sentiendum, nisi eam veram & genuinam æstûs Maris causam, qualis ab Illustrissima Academia Regia in propositâ quæstione desideratur, in se complecti, non videmus? Non solum enim omnia Phænomena, quæ in æstu Maris observantur, clarè & distinctè explicavimus, sed etiam existentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adscribimus, evidentissimè demonstravimus; ex quo efficitur causam à nobis assignatam, non tantum omnibus Phænomenis satisfacere, sed etiam esse unicam quæ cum verâ consistere queat. Quòd si enim quispiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia Phænomena explicare posset, etiamsi hoc fieri posse minimè concedamus, ejus certè explicatio subitò concideret & everteretur à viribus nostræ theoriæ, quas aliunde in mundo existere abundè constat; quoniam ab illis viribus imaginariis hisque realibus conjunctim effectus duplicatus consequi deberet, quem experientia aversatur. Nunc igitur nobis summo jure asserere posse videmur, veram æstûs Maris causam in duobus vorticibus esse positam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus sit indolis, ut vires centrifugæ decrescant in duplicatâ ratione distantiarum à centris utriusque vorticis: quæ proprietas obtinetur, si celeritas materiæ subtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam subduplicatam distantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum sunt excogitati, sed ille qui Solem circumdat est is ipse, qui omnes planetas in suis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etsi ejus vis nisi in æstu Maris non sentitur, tamen sine ullâ hæsitatione admitti potest, cùm certò constet

Ter-

Terram, Jovem ac Saturnum similibus vorticibus esse cinctos, unde ejusmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari posse videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamsi in illis veram æstûs Maris causam ponamus; hoc autem de industriâ fecimus, cùm hoc argumentum jam toties sit tractatum ac ferè exhaustum; neque nobis persuadere possumus, si hâc occasione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum à quoquam est factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri. CAP. VII.

CAPUT OCTAVUM.

De Æstûs Maris perturbatione à Terris ac littoribus oriundâ.

§. 112. PERVENIMUS tandem ad ultimam nostræ disquisitionis partem, quæ præcipua est, in quâ Theoriam expositam ad statum telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua ista disquisitio facilior redderetur ab omnibus circumstantiis externis quibus effectus à viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi possent, cogitationem abstraximus. Primò scilicet non solum totam Terram ex aquâ conflatam posuimus, sed etiam inertiam aquæ mente sustulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ superessent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus, verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfusam assumsimus, seu etiamnum anomalias à Terris neglexîmus. Nunc itaque nostra theoria eò est perducta, ut nihil ampliùs adjicere necesse foret, si quidem æstus Maris à Terris littoribusque sensibiliter non afficeretur; nisi fortè anomaliæ quædam à ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perspecto facilè adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc caput destinavimus explicationi Phænomenorum quorumdam singularium, quorum causa non tam in ipsâ aquâ viribusque eam sollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribusque est quærenda: hac enim parte absolutâ nihil ampliùs restare videtur, quod vel ad Theoriæ nostræ confirmationem, vel ad omnium Phænomenorum adæquatam explicationem desiderari queat. Quamvis enim Illustrissima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæstiones de eodem in posterum proponere constituisset, tamen quia hoc tempore vera causa physica desideratur, veritatem nostræ theoriæ non satis confirmari arbitramur, nisi ejus convenientiam cum omnibus Phænomenis dilucidè ostenderemus, cùm si vel

 uni-

CAP. VII. unicum Phænomenon refragaretur, eo ipso tota theoria subverteretur; quam ob causam prolixitatem nostræ tractationis, atque transgressionem limitum præscriptorum nobis sine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perspicuum est, motum Maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpositam non solum perturbari, verùm etiam quandoque prorsus impediri debere. Suprà enim ostendimus, si tota Terra aquâ esset circumfusa, tum ubique ad Fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd si ergo Oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore Fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipso cursus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus Mare attollere conantur, effectum consequi non poterunt, nisi aqua ab Occidente afferatur: sic quando ad littora Europæ aqua à viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab Occidente eò deferatur necesse est, ab iis scilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ & Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Asiæ & Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in Fluxu ab oriente adveniet, in Refluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per se determinant, sed eâtenus tantum, quâtenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum seligit motum, quo facillimè à locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iste motus maximè à Terris oceanum includentibus determinetur necesse est. Hinc igitur perspectâ positione littorum cujusvis Maris facilè definiri poterit, à quanam plagâ aqua in Fluxu venire, quorsumque in Refluxu decedere debeat, si modò elevationes & depressiones aquæ per totum Mare attentè considerentur: tota enim hæc quæstio pertinebit ad hydrostaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, nisi affluxus ab occidente fiat copiosus, ad littora quæ versùs occidentem respiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam sunt disposita, aquæ cursus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priusquam eò pertingat, omnino uti inspectio mapparum docebit. Quoniam verò iste aquæ juxta littora Fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, necesse est, ut Fluxus ad littora magis ad orientem sita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perspicua est in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ & Hiberniæ; cùm enim ad ostia fluviorum Garumnæ & Ligeris, quæ versùs Oceanum amplissimum patent, tempore pleniluniorum ac noviluniorum Fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis censeri potest, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus Fluxus tardiùs evenire observantur. Sic ad Portum S. Malo tempore syzygiarum Fluxus demum horâ sextâ sequitur, ad ostia verò Sequanæ usque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in freto Gallico Dunkerquæ & Ostendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innotescit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ spatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam absolvere debet usque ad Dublinum, quantam ad fretum Gallicum, ex quo Fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ observari solet. Atque simili modo retardatio Fluxuum ad littora aliarum regionum sine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æstûs Maris ad littora attinet, facilè intelligitur æstum Maris ad littora majorem esse debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapsu solo jam intumescentia oriri dedet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat Oceano, ubi maxima est profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadosa vehementer inturgescet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum sufficeret ad spatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iste aquæ affluxus in finibus vadosis multò adhuc magis increscere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum appulsa ad latera diffluere nequit, si quidem sinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non solum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio Mari, sed etiam cur Bristolii tam enormis Fluxus circa syzygias luminarium observetur; cùm enim in hâc regione littus sit valdè sinuosum ac vadosum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob sinuositatem tam citò diffluere potest. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconsuetorum æstuum, qui passim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis Phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm consideratio littorum & Fluxûs aquæ eò sponte quasi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam Affluxus aquæ ex Oceano atlantico, quàm Refluxus per fretum Galliam ab Angliâ dirimens, ingenti fiat celerita-

(†) Ita legitur in exemplari Parisino, procul dubio mendosè, sed locum restituere non sumus ausi; ab ostio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur viâ rectissimâ, quæ horis 7 à fluxu percurruntur, qui ideo 70 milliaria singulis horis ad minimum emetiretur: unde 80 milliaria pro 8 milliaribus scribenda conjectamur.

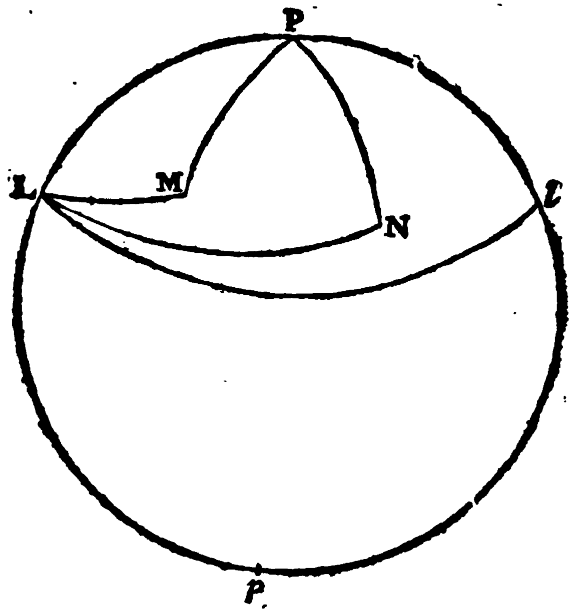
CAP. VIII. leritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum Mare mox vehementer dilatetur, ab isto alterno Fluxu ac Refluxu altitudo Maris in Oceano Germanico sensibiliter mutari nequit. Atque hanc ob causam statui oportet, in hoc Mari æstum proficisci maximam partem ab affluxu & refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus Maris cum Oceano Atlantico multo major patet; quam sententiam magnopere confirmat ingens æstuum retardatio ad littora Belgii & Angliæ orientalia observata: ad Ostia scilicet Thamisis pertingit Fluxus elapsis jam duodecim horis post transitum Lunæ per meridianum, atque Londinum usque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod Phænomenon consistere non posset si aqua per fretum Gallicum solùm moveretur, cùm jam in ipso freto duodecim horis retardetur Fluxus. Interim tamen negari non potest quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per fretum Gallicum æstum quodammodo afficiat, atque Fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad Mare elevandum ac deprimendum vel magis inter se conspirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æstum Maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari posse, cùm intervallo sex horarum per freta Herculea & Oresundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde refluere, ut sensibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in istiusmodi maribus quæ à vasto Oceano tantum angustis fretis separantur, æstus omnino nullus contingere potest, nisi forte talia maria Terris inclusa ipsa tam sint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æstum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem æstum; quorum alter, qui quidem longè est minor, per fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter singularem littorum quorumdam situm mirabilia Phænomena in æstu Maris evenire possunt. Quòd si enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æstus in id duplici viâ vel ex eodem Oceano, vel ex diversis communicetur, ratione temporis, quo bini isti æstus adveniunt, insignes discrepantiæ oriri poterunt. Nam si per utramque viam Fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo simul Refluxus congruant, æstus multo majores existere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam Fluxus advenit, ex alterâ viâ Refluxus incidat, tum æstus omnino destruetur si quidem per utramque viam aqua æqualiter vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non sufficit ambæ viæ sint æquales, sed etiam requiritur ut bini æstus successivi sint æquales, id quod evenit si Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit positum. Quòd si autem eâdem duplici communicatione positâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore sit motum, tum ob inæ-

inæqualitatem binorum æstuum sese insequentium, Fluxus majores ex altera via advenientes, superabunt Refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore singulis diebus non bini Fluxus, sed unus tantum accidet; hancque rationem allegat NEWTONUS æstûs illius singularis Tunquini observati, ubi si Luna in æquatore versatur, nullus æstus deprehenditur, sin autem Luna habeat declinationem, unicus tantum una Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis Phænomeni aliam magis naturalem, nostræque theoriæ conformem indicabimus caussam. CAP. VIII.

§. 118. Hactenus æstum Maris, quemadmodum in amplissimo Oceano à viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum situ cùm ratione quantitatis tùm retardationis diversimodè turbetur, sumus contemplati, neque necesse esse duximus ventorum Marisque cursuum propriorum rationem habere: cùm satis pronum sit, perspicere, quomodo his rebus æstus Maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Superest igitur ut exponamus, quomodo in satis amplo tractu Maris, qui ab Oceano vel omnino est sejunctus, vel per angustum tantùm canalem conjunctus, peculiaris æstus à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perspicuum enim est, si talis tractus secundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æstum pari modo generari debere, ac in amplissimo Oceano, qui totam tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extensio tanta est, ut vires Lunæ & Solis in eo tractu simul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, necesse est etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, si iste tractus omnino non esset terminatus. At si iste tractus tam fuerit parvus ut singulæ partes æqualibus fere viribus simul vel attollantur vel deprimantur, nulla sensibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit nisi in alio subsidat & contrà, si quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conservetur. Atque hæc est ratio ut in Mari Baltico, Caspio, Nigro, aliisque minoribus lacubus nullus omnino æstus deprehendatur.

§. 119. Quòd si autem istiusmodi Maris tractus tantum spatium occupet, ut vires attollentes & deprimentes in extremitatibus sensibiliter differant, tum necesse est ut non solum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, sed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta sit, quanta in aperto Oceano eidem virium differentiæ respondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diversis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, solam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; & quoniam effectu Lunæ cognito facile est Solis effectum æstimando vel adjicere vel auferre.



Repræsentet ergo $P\,L\,p\,l$ superficiem Terræ cujus poli sint P & p, atque M & N sint duo termini in eodem Maris tractu assumti, in quibus quantum Maris altitudo quovis tempore differat, sit investigandum. Repræsentet porro $L\,l$ parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore, sitque Luna in L; atque exprimet angulus $L\,P\,M$ tempus, quod post Lunæ transitum per meridianum termini M est præterlapsum, angulus verò $L\,P\,N$ tempus post transitum Lunæ per meridianum alterius termini N. Ductis autem circulis maximis $P\,M$ & $P\,N$, erit arcus $P\,M$ complementum latitudinis loci M, arcus $P\,N$ verò loci N; angulus verò $M\,P\,N$ dabit differentiam longitudinis locorum M & N; quæ proinde omnia ponuntur cognita.

§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ L ad terminos M & N circuli maximi $L\,M$ & $L\,N$, exhibebuntque isti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis M & N supra horizontem elevata conspicitur. Ponatur arcûs $P\,L$ sinus $= q$, cosinus $= Q$, erit Q sinus declinationis borealis Lunæ, si quidem Q habeat valorem affirmativum, ac P polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs $P\,M$ sinus $= p$, cosinus $= P$, erit P sinus elevationis poli pro loco M; similique modo sit arcûs $P\,N$ sinus $= r$ & cosinus $= R$, ita ut R sit sinus elevationis poli loci N: denique sit anguli $M\,P\,N$ sinus $= M$ & cosinus $= m$, anguli verò $L\,P\,M$ sinus $= T$, cosinus $= t$; unde erit anguli $L\,P\,N$ cosinus $= m\,t - M\,T$.

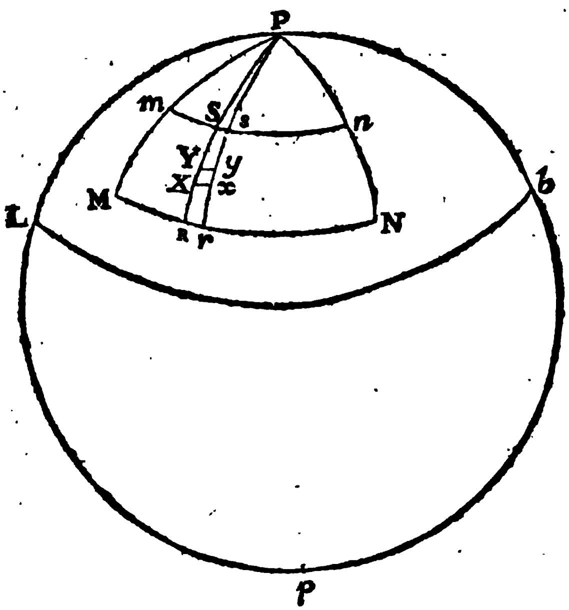
Ex

Ex his per trigonometriam sphæricam reperietur sinus altitudinis Lunæ supra horizontem loci M seu cosinus arcûs $LM = tpq + QP$: pro loco N verò erit altitudinis Lunæ sinus $= (mt - MT)qr + QR$. Quare si, ut suprà, vis absoluta ad Lunam urgens ponatur $= L$ & distantia Lunæ à Terrâ $= b$, erit altitudo ad quam aqua in M elevari deberet $= \frac{L(3(tpq + PQR)^2 - 1)}{2b^3}$, & altitudo ad quam aqua in N elevari deberet $= \frac{L(3((mt - MT)qr + QR)^2 - 1)}{2b^3}$, utroque casu supra libellam naturalem. Si ergo illa expressio hanc excedat, aqua in M altiùs erit elevata quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((tpq + PQ)^2 - ((mt - MT)qr + QR)^2)$, hæcque expressio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in N altiùs consistat quàm in M. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè Phænomena hujusmodi casibus oriunda indicare annitimur; si enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus. CAP. VIII.

§. 121. Ponamus tractum nostrum Maris ab oriente N versùs occidentem M sub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis M & N sit eadem; erit adeo $R = P$, & $r = p$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, ita ut sit $T = 0$, $t = 1$; hoc ergo tempore magis erit elevata in M quàm in N intervallo $\frac{3L}{2b^3}((pq + PQ)^2 - mpq + PQ)^2) = \frac{3L}{2b^3}(M^2p^2q^2 + 2(1 - m)pqPQ)$. At quando Luna per meridianum loci N supra Terram transit, aqua tantundem magis erit elevata in N quàm in M. Ex quo sequitur, dum Luna à meridiano loci N ad meridianum loci M progreditur, aquam in M sensim elevari per spatium $\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq + 2(1 - m)PQ)$ interea verò in N tantundem subsidere. Sin autem Luna infra Terram à meridiano loci N ad meridianum loci M progrediatur, aqua in M elevabitur interea per spatium $= \frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq - 2(1 - m)PQ)$, per tantumque spatium aqua in N subsidet. Ponamus nunc angulum LPM esse 90 graduum, seu quæstionem institui, cùm Luna jam ante sex horas meridianum loci M sit transgressa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis M & $N = \frac{3L}{2b^3}(P^2Q^2 - (PQ - Mpq)) = \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ - M^2pq)$. Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci M appellit, aqua in N magis erit elevata quàm in M intervallo $= \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ + M^2pq)$. Sequuntur hæc si inertia aquæ negligatur; at inertiâ admissâ ex præcedentibus satis clarum est, cùm has differentias majores esse debere, tùm tempora mutationum tardiùs sequi debere.

 §.

CAP. VIII. §. 122. Quoniam verò in hoc Maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, necesse ut quantùm aquæ unâ parte supra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem Maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum nostrum secundùm longitudinem terminari binis



meridianis PM & PN, secundùm latitudinem verò binis parallelis MN & mn, positâque Lunâ in L sit sinus $PL = q$, cosinus $= Q$; sinus $LPM = T$, cosinus $= t$. Porro sit sinus arcûs $PM = p$, cosinus $= P$, sinus $Pm = r$, cosinus $= R$, atque anguli MPN sinus $= M$ & cosinus $= m$. Præterea sit elevatio in M dum Luna in L versatur, supra libellam $= \alpha$, ita ut hoc loco suprema aquæ superficies à centro Terræ distet intervallo $= 1 + \alpha$, unde cùm sinus altitudinis Lunæ in M sit $= tpq + PQ$, erit gravitatio totius columnæ aqueæ ab M ad centrum Terræ $=$

$$\frac{(1+\alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3} = \frac{1}{1+n} + \alpha + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3},$$

prouti suprà §. §. 43. & 44. demonstravimus. Consideretur jam locus quicunque X in nostro tractu, in quo aqua supra libellam sit elevata spatio $= \phi$; ac ducto per hunc locum meridiano PR, sit anguli LPR sinus $= X$, cosinus $= x$; arcûs PX sinus $= z$ & cosinus $= Z$, unde gravitatio columnæ aqueæ ex X ad centrum Terræ pertingentis erit $=$

1

CAP. VIII.

$\frac{1}{1+n} + \phi + \frac{L(1-3(xqz\,QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio æqualis eſſe debeat illi, orietur $\varphi = \alpha + \frac{3L}{2b^3}((xqz \pm QZ)^2 - (tpq + PQ)^2)$, ex quâ formulâ ſi modò conſtaret elevatio aquæ in M, ſimul innoteſceret elevatio vel depreſſio in quovis loco X.

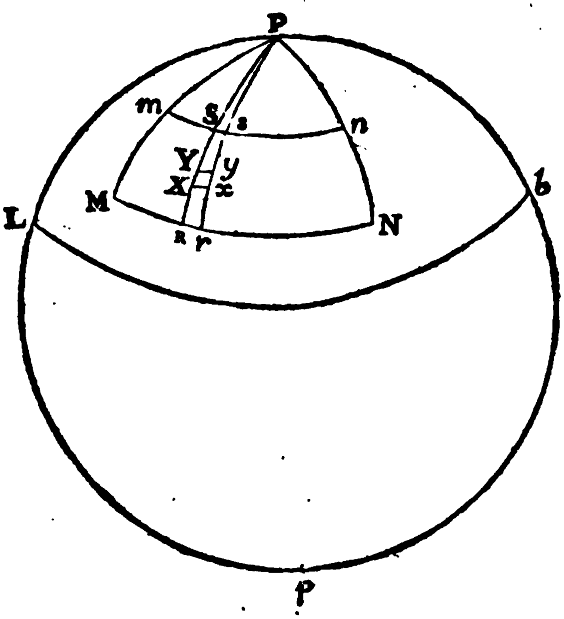
§. 123. Cùm ergo in X aqua ſupra libellam elevetur ſpatio φ, in elemento tractûs infinitè parvo $XYyx$, plus inerit aquæ, quàm in ſtatu naturali, & quidem quantitas $XY.\ Xx.\ \varphi$, cujus elementi integrale per totum tractum ſumtum debet eſſe $=0$, ex quo valor ipſius α innoteſcet. Erit autem angulus $RPr = \frac{dY}{x}$, hincque arculus $Xx = \frac{z\,dX}{x}$, at elementum $XY = \frac{dZ}{z}$, ex quo infinitè parvum rectangulum $XYyx = \frac{dX\,dZ}{x}$, in quo ergo exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem eſt $= \frac{\phi\,dXdZ}{x} = \frac{dX}{x}(\alpha\,dZ + \frac{3L\,dZ}{2b^3}((xqz + QZ)^2 - (tpq + PQ)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò X conſtans, & integratione abſolutâ reperietur in elemento $RSsr$ exceſſus aquæ ſupra ſtatum naturalem $= \frac{dX}{x}(\alpha(R-P) + \frac{3L}{2b^3}(q^2x^2(R-P) - \frac{x^2q^2}{3}(R^3-P^3) - \frac{2xQq}{3}(r^3-p^3) + \frac{Q^2}{3}(R^3-P^3) - (tpq + PQ)^2(R-P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum $MNnm$ extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui acceſſiſſe oporteret, $= \alpha(R-P)A\,\text{ſin.}\,M + \frac{3L}{2b^3}\Big(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(Mm(1-2TT) - 2M^2Tt) + \frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T - Mt - mT) + \frac{q^2(R-P)}{2}A\,\text{ſin.}\,M + \frac{(3Q^2-1)(R^3-P^3)}{2}A\,\text{ſin.}\,M - (tpq + PQ)^2(R-P)A\,\text{ſin.}\,M\Big)$, quæ adeo quantitas debet eſſe $=0$: unde oritur $\alpha = \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{ſin}\,M}\Big(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T - Mt - mT)\Big)$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in M ſupra libellam, quam antè poſuimus $=\alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio ſupra libellam in loco quocunque X. Ponatur enim ſinus anguli $MPX = S$ & coſinus $= s$, erit ſin. $LPR = X = Ts + tS$ & $x = ts - TS$, manentibuſque arcûs PX ſinus $= z$ & coſinu $= Z$, erit elevatio aquæ in $X = \varphi = \alpha + \frac{3L}{2b^3}((ts - TS)qz + QZ)^2 - \frac{3L}{2b^3}(tpq + PQ)^2$; quare loco α valore

CAP. VIII. lore invento ſubſtituto, reperietur aqua in X ſupra libellam attolli actu per ſpatium $= \frac{3L}{2b^3}((ts - TS)qz + QZ)^2 + \frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{ſin.}\,M}\left(\frac{q^2(3(R-P)-R^3-P^3)}{6}(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + \frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T - Mt - mT)\right)$. Quòd ſi ergo ponatur tractus noſter ita augeri ut totam tellurem ambiat, orietur caſus jam ſuprà tractatus; quoniam enim fit $MN = 360^\circ$, ſeu A ſin. $M = 2\pi$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $M = 0$ & $m = 1$: præterea verò quia M in polum auſtralem p, m verò in borealem P incidit, erit $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = +1$: ſi hi valores ſubſtituantur, prodibit elevatio aquæ in $X = \frac{L}{2b^3}(3((ts - TS)qz + QZ)^2 - 1)$, quæ expreſſio, quia $ts - TS$ denotat coſinum anguli LPX atque $(ts - TS)qz + QZ$ ſinum altitudinis Lunæ ſupra horizontem in X, cum ſuperioribus formulis exactiſſimè convenit: ſi quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipſa expreſſio quoque emergit, ſi tantum alterum hemiſphærium vel boreale vel auſtrale ponatur aquâ totum circumfuſum, manent enim omnia ut antè, niſi quòd fiat $p = 1$ & $P = 0$: utroque enim caſu fit $R^2 + PR + P^2 = 1$; ultimuſque terminus ob $M = 0$ utroque caſu evaneſcit.

§. 125. Ponamus nunc tractum Maris ſecundùm longitudinem MN uſque ad 180 gradus extendi, erit $M = 0$ & $m = -1$ & A ſin. $M = \pi$, denotat enim A ſin. M ſemper arcum circuli, qui menſura eſt anguli MPN: hinc ſi brevitatis gratiâ ponatur ſinus anguli, quo Luna in X ſupra horizontem elevata apparet, $= v$, erit aquæ elevatio in X ſupra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{L(1-3QQ)(R^2+PR+P^2)}{4b^3} - \frac{3Lqq}{4b^3} + \frac{2LTQq(p^3-r^3)}{(R-P)b^3\pi}$. Ponamus porro integrum hemiſphærium $LPlp$ aquâ eſſe circumfuſum, fiet $p = 0$, $P = -1$, $r = 0$ & $R = 1$; unde elevatio aquæ in X erit $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3}$, omnino ac ſi tota Terra aquâ cincta eſſet, uti in præcedentibus capitibus poſuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua ſuper Terra mutuam habeat communicationem ſatis amplam. Quòd ſi autem tractus noſter Maris tantum ad æquatorem uſque porrigatur à polo P, ita ut quartam ſuperficiei terreſtris partem ſolum obtegat, tum erit $p = 1$, $P = 0$, $r = 0$ & $R = 1$, hoc itaque caſu aqua in X elevabitur ad altitudinem $= \frac{L(3v^2-1)}{2b^3} + \frac{2LTQq}{\pi b^3}$ ex quo perſpicitur hoc caſu elevationem in X majorem, quàm ſi tota Terra aquâ eſſet circumdata, ſi expreſſio TQq habeat valorem affirmativum, minorem verò ſi TQq habeat valorem negativum. Sed limites huic quæſtioni præſcripti non permittunt hinc plura conſectaria deducere, cùm debita evolutio ſatis amplum tractatum requirat,

quirat, neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum casus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam singularia explicanda inservire poterunt. CAP. VIII.



§. 126. Ponamus igitur latitudinem Mm infinitè esse parvam, seu $R = P$ & $r = p$, reperietur aquæ in X elevatio supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{3L(P^2 - q^2 - 3P^2Q^2)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A \sin. M}\left(\frac{pq}{2}(2M^2Tt - Mm(1 - 2TT)) + 2PQ(T - Mt - mT)\right)$. Consideremus autem elevationem in M, ubi cùm sit $v = tpq + PQ$, erit ea $= \frac{3Lpq(2ttpq + 4tPQ - pq)}{4b^3}$ $+ \frac{3Lpq}{4b^3 A \sin. M}(pq(2M^2Tt - Mm(1 - 2TT)) + 4PQ(T - Mt - mT))$. Transeat nunc Luna per meridianum loci M supra Terram, erit $T = 0$, & $t = 1$, atque elevatio in M prodibit $= \frac{3Lpq(pq + 4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A \sin. M}(Mmpq \pm 4MPQ)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3Lpq(pq - 4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A \sin. M}(Mmpq - 4MPQ)$. Quòd si autem Luna versùs ortum à meridiano distet angulo horario 90 graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in M superio-

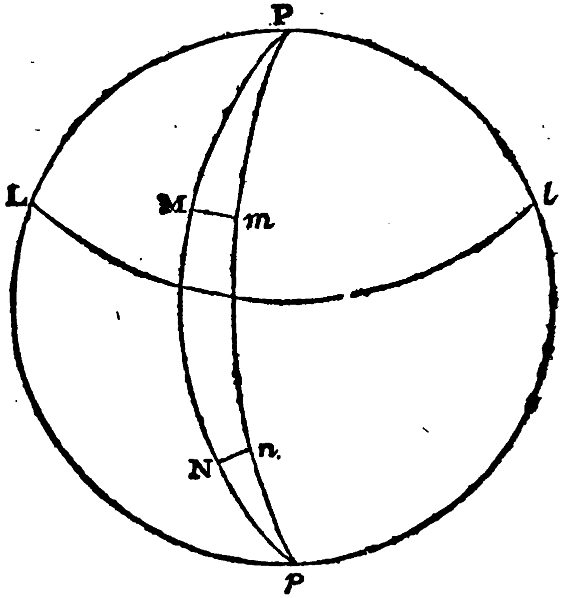
CAP. VIII. periorem, erit $T = -1$ & $t = 0$, unde elevatio erit $= \frac{-3Lp^2q^2}{4bs} + \frac{3Lpq}{2bs\,A\,\text{fin.}\,M}$ $(pqMm - 2PQ(1 - m))$; fex verò horis poft tranfitum Lunæ per meridianum loci M versùs occafum, erit altitudo aquæ in M fupra libellam $= - \frac{3Lp^2q^2}{4bs} + \frac{3Lpq}{2bs\,A\,\text{fin.}\,M}(2pqMm - 2PQ(1 + m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut fit $M = 1$, $m = 0$, & A fin. $M = \frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M = \frac{3Lpq(2ttpq + 4tPQ - pq)}{4bs} + \frac{3Lpq}{2\pi bs}(2pqTt + 4PQ(T - t))$. Quæ fi etiam declinatio Lunæ ponatur $= 0$, fiet $= \frac{3Lp^2q^2(2tt - 1)}{4bs} + \frac{3Lp^2q^2Tt}{\pi bs}$ exiftente $q = 1$, unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci M tranfit, fed tardiùs, & quidem fi dupli anguli LPM finus fuerit $= \frac{2}{\pi}$, hoc eft ferè unâ horâ poft tranfitum Lunæ per meridianum, hoc igitur cafu Fluxus in M unâ ferè horâ tardiùs obfervetur, quàm fi tota Terra aquâ effet circumfufa. Dum autem Luna per meridianum fuperius tranfit, erit elevatio $= \frac{3Lpp}{4bs}$, quæ etiam valet fi Luna infra Terram meridianum attingat; at fex horis vel antè vel poft, quando Luna in horizonte verfatur, erit aquæ depreffio $= \frac{-3Lpp}{4bs}$. Unde intelligitur in tali Maris tractu pariter quotidie binos Fluxus totidemque Refluxus accidere debere, atque æftum propemodum fore fimilem æftui generali, nifi quòd majoribus anomaliis fit obnoxius, præcipuè fi Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari poteft ratio æftûs, qui in Mari Mediterraneo obfervatur, & qui in ipfo hoc Mari generatur. Cùm enim longitudo hujus Maris ne 60 quidem gradus attingat, æftus erunt multò minores; decrefcunt enim fi cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd fi ergo in his formulis angulus MPN ponatur fere 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æftus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri fint multò minores, quàm in medio Mari, & pluribus anomaliis fubjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æftus à ventis & curfu aquæ, qui in hoc Mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque Littora hujus Maris vix ufquam æftus regularis obfervabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm finum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò fenfibiliorem parietur, à quo æftus Maris Venetiis obfervatus originem habet. Tametfi enim Mare Mediterraneum non fo-

lùm,

lum ſatis amplam habeat latitudinem, ſed etiam vehementer inæqualem, tamen ejuſmodi marium æſtus admodum exquiſitè ex præſenti caſu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi poteſt, quia extenſio Maris in longitudinem præcipuam cauſam æſtuum binorum ſingulis diebus evenientium continet, neque extenſio latitudinis multum conferat. CAP. VII.



§. 129. Ponamus nunc tractûs noſtri Maris longitudinem evaneſcere, totumque tractum in eodem meridiano Pp ab M uſque ad N extendi, ita ut ſit $M=0$, $m=1$; ſinus autem elevationis poli in M ſit $=P$, coſinus $=p$, in N verò ſit ſinus elevationis poli $=R$, coſinus $=r$. Ex his ſi Luna in L verſetur, ob A ſin. $M=M$, erit in M elevatio aquæ ſupra libellam $= \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)(P^2+PR+R^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{L}{4b^3}$ $(q^2(3-P^2-PR-RR)(2TT-1) - \frac{4Qq^3(p^3-r^3)}{R-P} = \frac{L}{2b^3}((ttqq-QQ)$ $(R^2+PR-2P^2) + \frac{2Qq^3(3PpR+r^3-3P^2p-p^3)}{R-P}$. Quòd ſi nunc ponatur alter terminus N ultra æquatorem versùs auſtrum ſitus, ita ut ſinus elevationis poli auſtralis in N duplo major ſit quàm ſinus elevationis borealis in M, ſeu $R=-2P$ & $r=\sqrt{(1-4P^2)}$, erit $R^2+PR-2P^2=0$, atque elevatio aquæ in M ſupra libellam erit $= \frac{LQq^3}{3b^3P}$

 $(9P^2$

CAP. VIII.

$(9P^2p+p^3-{}^3)$. Ex hâc igitur formulâ sequitur, si Lunæ declinatio sit nulla seu $Q=0$, tum nullum omnino æstum in M observari debere. Quòd si autem Luna habeat borealem, tum ad transitum Lunæ per meridianum superiorem aquam attolli ad spatium $=\frac{LQq}{2b^3P}(9P^2p+p^3-r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario sexto versetur, tum aquam ad libellam naturalem fore constitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depressum iri per spatium $=\frac{LQq}{2b^3P}(9P^2p+p^3-r^3)$; contrarium denique fore æstum, si Luna habeat declinationem australem. In tali igitur Maris tractu quotidie semel tantum aqua affluet, semelque refluet, si quidem Luna habeat declinationem; nam si Luna æquatorem occupat, æstus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc casu aptissimè explicari posse videtur Phænomenon illud æstûs singularis, qui in portu Tunquini ad Batsham observatur, ubi omninò ut in præsente casu dum Luna in æquatore versatur, Mare nullum æstum sentit; at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs austrum, quotidie aqua semel tantum affluit semelque refluit, prorsus ut calculus monstravit; scilicet si Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occasum, hoc est post transitum Lunæ per meridianum super horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ & motu ad littora provenire intelligitur ut suprà. Contrà verò si Lunæ declinatio sit australis, aqua deprimitur Lunâ ad occasum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ Phænomena apprimè conveniunt cum casu modò exposito. Est præterea elevatio poli Tunquini 20°. 50′, borealis, atque Mare utrinque cùm peninsulis tùm insulis ab utroque Oceano Pacifico & Indico fere prorsus separatur, saltem ut libera communicatio non adsit: præterea hic idem Maris tractus, qui versùs boream ad littora regni Tunquini terminatur, extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45, cujus latitudinis sinus circiter duplo major est, quàm sinus latitudinis borealis 20°, 51′: Quocirca ex his circumstantiis per nostram Theoriam eadem ipsa singularia Phænomena æstûs Maris observari debent, quæ actu observantur: atque hoc modo si ullum adhuc dubium circa nostram theoriam reliquum fuisset, id resolutione hujus mirabilis Phænomeni funditùs sublatum iri confidimus.

FINIS I. Part. TOMI III.

CONTENTA PARTIS I^æ. TOMI III.