



S-804-C.9











*R E C U E I L*

*D E S P I E C E S*

*QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX*

*DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.*

*T O M E N E U V I E M E.*



R E C U E I L  
D E S P I E C E S

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX  
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Depuis leur fondation en M. DCC. XX.

T O M E N E U V I E M E .

*Qui contient les Pieces de 1764, 1765, 1766, 1770  
& 1772.*



A P A R I S ;

Chez PANCKOUCKE, rue des Poitevins, à l'Hôtel de Thou.

---

M. D C C. L X X V I I .

*Avec Approbation & Privilege du Roi.*

# RECUR

THE UNIVERSITY OF

THE STATE OF

THE UNIVERSITY OF

THE UNIVERSITY OF

THE UNIVERSITY OF

THE UNIVERSITY OF

THE UNIVERSITY OF

THE UNIVERSITY OF

THE UNIVERSITY OF

---

# AVERTISSEMENT,

*Au sujet des Pièces qui composent ce neuvieme Volume.*

PAR l'Avertissement qui se trouve dans le huitieme Volume de cette Collection, publié au mois de Mars 1771, on voit que la Piece couronnée en 1764, devoit commencer le neuvieme Volume, & c'est celui que nous publions aujourd'hui; il s'étend jusqu'à 1772, & terminera la Collection des Pièces des Prix: l'Académie a décidé qu'à l'avenir ces Ouvrages seront imprimés chaque année dans le Volume des *Mémoires présentés par des Savans Etrangers*, & l'on a déjà commencé, en insérant les deux Pièces de 1774, dans le septieme Volume de ces Mémoires qui est pour l'année 1773, & qui a été publié par l'Académie au mois de Mai 1776.

En terminant ce Recueil des Prix, très-digne de l'attention des Savans par l'importance des Pièces qui le composent, nous croyons devoir donner ici une notice des neuf Volumes, afin que chacun puisse juger de ce qu'il doit avoir pour que la Collection soit complète, cela sera d'autant plus utile, que les premiers Volumes sont devenus très-rares, & qu'il y a plusieurs Pièces détachées & imprimées séparément.

DANS LE PREMIER VOLUME, on trouve d'abord la Piece qui remporta le Prix de 1720, sur le Mouvement, par M. CROUZAS; ensuite une Dissertation sur cette question: *Quelle seroit la meilleure maniere de conserver sur mer l'égalité du mouvement d'une pendule?* par M. MASSY.

Après une interruption qui dura jusqu'en 1724, on proposa en 1724 & 1726, la Question du choc des corps & de la communication du mouvement.

Les Pièces de MAC-LAURIN, de JEAN BERNOULLI & du P. MAZIERE; Oratorien, furent imprimées, avec un Traité des petits Tourbillons de la matiere subtile, pour servir d'éclaircissement à la Piece du P. MAZIERE.

Pour 1725, Discours sur la maniere la plus parfaite de conserver sur mer l'égalité du mouvement des Clepsidres ou Sabliers, par M. DANIEL BERNOULLI, célèbre Géometre, qui a remporté plusieurs autres Prix depuis 1725.

1727. De la Mâturation des Vaisseaux, par M. BOUGUER.

DANS LE TOME II, suite de 1727, *De implantatione malorum*, Piece qui avoit eu l'*Accessit*, de même que le Mémoire de la Mâturation des Vaisseaux, par M. CAMUS.

1728. *De causa gravitatis Physica generali disquisitio Physica experimentalis.* GEORG. BERNN. BULEFINGER.

1729. De la Méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des Astres, par BOUGUER.

## A V E R T I S S E M E N T.

1730. Nouvelles Pensées sur le Systême de Descartes & sur la manière d'en déduire les Orbites & les Aphelies des Planetes, par J. BERNOULLI.

1731. De la méthode d'observer en mer la déclinaison de la Bouffole, par BOUGUER.

1732 & 1734. Sur la cause de l'inclinaison des Orbites des Planetes, par BOUGUER; il y en a une seconde Edition de 1748.

1733. De la meilleure maniere de mesurer sur mer le chemin du Vaisseau, par le Marquis POLENI.

DANS LE TOME III, on trouve deux Mémoires sur les inclinaisons des Orbites des Planetes, par JEAN BERNOULLI & DANIEL BERNOULLI; un sur la propagation de la Lumiere, de JEAN BERNOULLI; & quatre Pieces sur la forme & la fabrication des Ancres, pour le Prix de 1735 & 1737, par JEAN BERNOULLI, DANIEL BERNOULLI, POLENI & TRESAGUET.

DANS LE TOME IV, cinq Pieces sur la nature du Feu, par M. EULER, le P. LOZERAN DU FIESC, M. le Comte de CREQUY, Madame la Marquise DU CHATELET & M. DE VOLTAIRE.

Prix de 1740, sur la cause du Flux & du Reflux de la mer, quatre Pieces de MAC-LAURIN, EULER, DANIEL BERNOULLI & du P. CAVALLERI; les trois premieres ont été réimprimées dans le Commentaire des PP. JACQUIER & LE SEUR, sur NEWTON, & font encore ce qu'il y a de mieux sur cette matiere.

DANS LE TOME V, sur le Cabestan, Prix de 1739-41, il y a sept Pieces, dont quatre partagerent le Prix, & trois eurent l'*Accessit*, elles forment 296 pages *in-4°*.

1743. Sur l'inclinaison de l'Aiman, par DANIEL BERNOULLI & L. EULER.

1744-46. Sur l'Aiman, trois Pieces de M. EULER, de M. DU FOUR & de MM. DANIEL & JEAN BERNOULLI, conjointement entre les deux freres.

TOME VI. Ce Volume publié en 1750, contient en 526 pages *in-4°*. les Pieces qui concoururent en 1745 & 1747, sur la meilleure maniere de trouver l'heure en mer, au nombre de cinq, dont la premiere est de M. DANIEL BERNOULLI, les autres sans nom d'Auteurs.

TOME VII, publié en 1769. Piece du Prix de 1748, sur les inégalités de Saturne, par M. EULER; imprimée séparément en 1749, chez M. Delatour.

1751. Sur la nature des courans, par M. BERNOULLI.

1752. Sur les inégalités de Jupiter, par M. EULER.

1753. Sur la manière de suppléer à l'action du Vent, par M. BERNOULLI.

1755. Sur le Roulis & le Tangage, par M. CHAUCHOT, imprimée séparément chez Delatour.

1759. Sur le Roulis & le Tangage, par M. GROIGNARD.

1760. Sur la perfection des Verreries, par M. D'ANTIC.



## AVERTISSEMENT.

1761. Sur l'Arrimage, deux Pieces, de M. J. A. EULER & de M. l'Abbé BOSSUT.

Ainsi ce Volume contient sept Pieces, sans compter les deux qui avoient été imprimées séparément, & qu'on peut y réunir.

TOME VIII, publié au mois d'Avril 1771.

1753. Sur la maniere de suppléer à l'action du Vent, deux *Accessit*, par M. EULER & M. MATHON DE LA COUR.

1756. Sur les inégalités de la Terre, par M. L. EULER.

1757. Sur le Roulis & le Tangage, par M. BERNOULLI.

1759. Sur le Roulis & le Tangage, par M. L. EULER.

1760. Sur les altérations du moyen mouvement des Planètes, par M. CHARLES EULER, second fils du célèbre L. EULER.

1762. Sur la résistance de l'Ether, une Piece de M. l'Abbé BOSSUT, qui remporta le Prix, imprimée séparément à Charleville en 1766, & une de J. A. EULER, qui eut l'*Accessit*.

Ainsi ce huitieme Volume contient sept Pieces, indépendamment de celle de M. l'Abbé BOSSUT, qu'on peut y réunir.

TOME IX, publié au mois de Décembre 1776.

Prix de 1764, sur la Libration de la Lune, par M. DE LA GRANGE; quatre Pieces de 1766, sur l'Arrimage du Navire, par M. l'Abbé BOSSUT, M. BOURDÉ DE VILLEHUET, M. GROIGNARD & un Auteur anonyme.

1766. Sur les inégalités des Satellites de Jupiter, par M. DE LA GRANGE.

1768 & 1770. Sur la Théorie de la Lune, & spécialement l'Equation Séculaire, par MM. LÉONARD EULER & J. A. son fils, conjointement.

1772. Sur la Théorie de la Lune, un Mémoire de M. L. EULER, & un de M. DE LA GRANGE.

Ainsi ce neuvieme Volume contient neuf Pieces & finit à 1772.

Le Prix de 1773 avoit pour objet la perfection des Horloges Marines, & M. LE ROY se propose de publier son Mémoire séparément, ainsi il n'entrera point dans cette Collection qui se trouve finie, puisque l'on a vu ci-devant que les Pieces de 1774 sont déjà imprimées, comme les autres le seront à l'avenir, dans les *Mémoires présentés à l'Académie par les Savans Etrangers*. Mais la Collection des neuf Volumes des Prix, formera désormais une partie intéressante des Ouvrages de l'Académie, qui composent jusqu'à présent 115 Volumes *in-4*. Nous ne comptons pas dans ce nombre quelques Ouvrages particuliers qui se distribuent comme suite des Mémoires de l'Académie; savoir, la Figure de la Terre de M. CASSINI, ses Élémens d'Astronomie en deux Volumes & sa Méridienne vérifiée; les Infinitement petits de M. DE FONTENELLE; l'Optique de M. BOUGUER, & les Mémoires de Calcul intégral de M. FONTAINE. Ce qui formeroit en tout 122 Volumes, y compris les deux Volumes de Mémoires pour 1772.

A Paris le 25 Novembre 1776. DE LA LANDE.

On trouvera sur la page suivante une Figure qui manque dans le Tome VII de ce Recueil, & que l'Auteur nous a adressée pour la placer dans ce Volume.

Prix Je 1761  
 Recherches sur l'Arrimage des Vaisseaux  
 Tome VII.<sup>me</sup> du Recueil des pieces qui ont remporté les prix  
 de l'Académie Royale des sciences de Paris

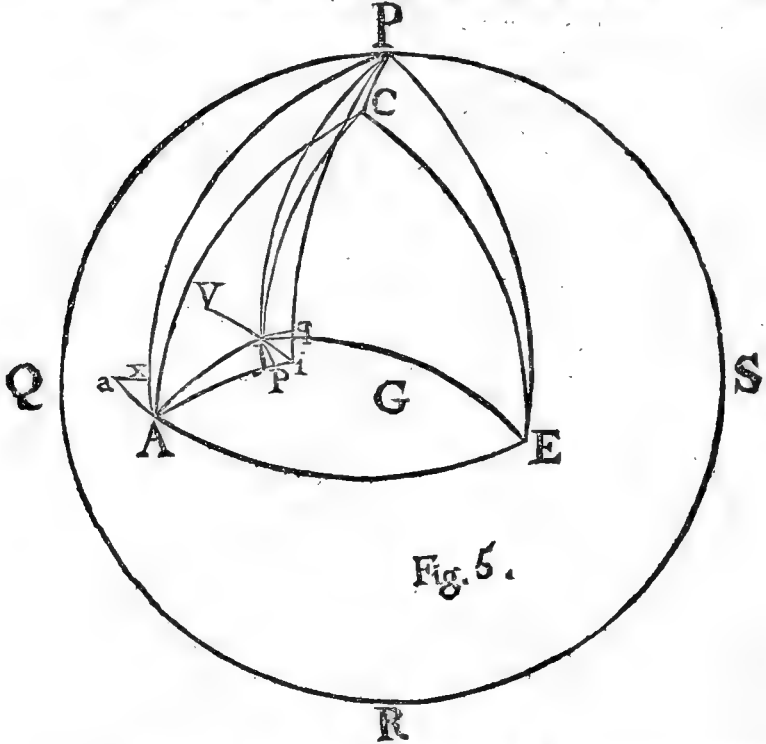
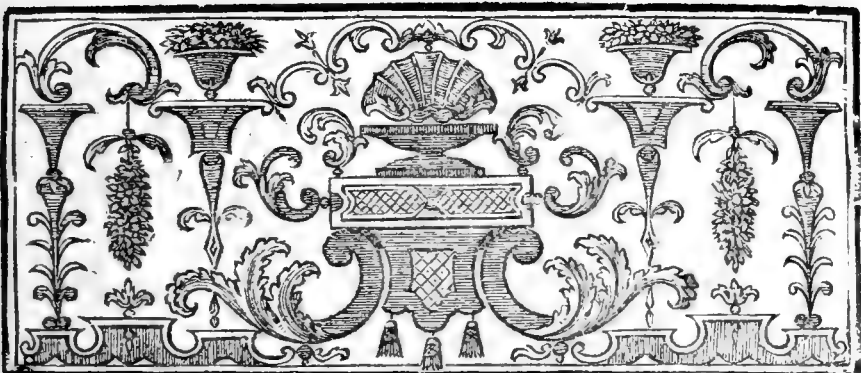


Fig. 5.

R  
 Figure cinquieme de la Piece de M. Jean Albert Euler;  
 où elle est citée au §. 71. pag. 41.  
 et au §. 88. pag. 49

Dans cette Figure , au lieu de la lettre X lisez a.



# RECHERCHES

SUR

## LA LIBRATION DE LA LUNE,

*Dans lesquelles on tâche de résoudre la Question proposée  
par l'Académie Royale des Sciences ,  
pour le Prix de l'année 1764.*

I.



ET écrit a pour objet d'examiner les différens mouvemens apparens , ou réels que la Lune peut avoir autour de son centre. Je suppose d'abord que cette Planette à une figure quelconque ; & je cherche le mouvement qu'elle doit recevoir de l'action de la terre & du soleil. Quoi qu'un très-grand Geomètre ait déjà donné des méthodes & des formules générales , qui peuvent aisément s'appliquer à la recherche dont il s'agit ici , néanmoins il m'a paru plus commode de reprendre la question en entier , & de

*Prix de l'Acad. Tome IX.*

A

la résoudre par une méthode que je crois nouvelle à plusieurs égards, & qui est d'un usage simple & général pour tous les Problèmes de Dynamique. Cette méthode me conduit naturellement à trois équations générales, qui reviennent au même, pour le fond, que celles qu'on trouve dans les Mémoires de l'Académie de 1754, pag. 424, 425; & pour en faciliter la comparaison à ceux qui voudront prendre la peine de la faire, j'expose en peu de mots les principales différences qu'il y a entr'elles par rapport à la diversité des dénominations. D'après ces équations, j'examine quels changemens l'action de la terre & du soleil doit produire dans la rotation de la Lune, & dans la position de son axe. Après avoir prouvé, que l'action du soleil est presque insensible par rapport à celle de la terre, je trouve qu'en supposant, avec M. Newton, que la Lune est un sphéroïde allongé vers la terre, cette Planette doit faire autour de son axe une espèce de balancement ou de vibration, par lequel sa vitesse de rotation est tantôt accélérée, tantôt retardée; & j'explique alors avec facilité pourquoi la Lune doit nous montrer toujours à-peu-près la même face, quoique elle n'ait point reçu d'abord, comme il est très-naturel de l'imaginer, une rotation exactement égale à son mouvement moyen autour de la terre. Je fais voir ensuite que l'axe de cette Planette doit être sujet à un mouvement semblable à celui de la terre, comme M. d'Alembert l'a déjà démontré dans la supposition que la Lune soit un sphéroïde homogène & elliptique dans tous les sens; mais je diffère essentiellement de lui sur la quantité de la précession & de la nutation qui doit avoir lieu dans cette hypothèse; je donne la raison de la différence qui se trouve entre nos résultats en faisant voir que les formules qui sont vraies pour la terre ne s'appliquent pas indistinctement à la Lune, comme le suppose cet Auteur. Je fais voir de plus que la figure de la Lune pourroit aussi être

telle que la précession de ses points équinoxiaux fût exactement , ou à très-peu près égale au mouvement des nœuds de la Lune ; comme l'a trouvé M. Cassini ; & dans ce cas je démontre qu'il ne doit plus y avoir de nutation sensible dans l'axe de cette Planette. Au reste , c'est aux Astronomes seuls à nous instruire pleinement la-dessus ; mais pour les mettre plus à portée de connoître ces différens mouvemens , je propose des méthodes que je crois assez simples pour déterminer , par le moyen des observations des tâches de la Lune , la position de son axe de rotation , & la quantité de sa libration tant apparente que réelle,

Tels sont , en abrégé , les points principaux de la Dissertation suivante. L'Académie Royale des Sciences ayant proposé pour le sujet du Prix de l'année prochaine : » Si on peut expliquer par quelque raison physique pourquoi la Lune nous présente toujours à-peu-près la même face ; & comment on peut déterminer par les observations & par la théorie si l'axe de cette Planette est sujet à quelque mouvement propre , semblable à celui qu'on connoît dans l'axe de la terre , & qui produit la précession des équinoxes , & la nutation « ; j'ose lui présenter le fruit de mon travail sur cette importante matière. S'il ne répond pas entièrement aux vues de cette sçavante Compagnie , au moins servira-t-il à jeter de nouvelles lumières sur un des principaux phénomènes célestes.

## I . I.

Comme il n'est question ici que du mouvement que la Lune doit avoir autour de son centre de gravité , en vertu de l'action du soleil & de la terre , il est évident qu'on peut regarder le centre de la Lune comme immobile par rapport à la terre & au soleil , en transportant à ces deux Planettes en sens contraire le mouve-

ment que la Lune a réellement autour d'elles, c'est-à-dire en imaginant que la Terre & le Soleil se meuvent autour du centre de la Lune supposé fixe, comme les verroit un Observateur placé dans ce centre.

Cela posé, j'imagine par le centre de la Lune un plan parallèle à l'écliptique, auquel je rapporte la position des centres de la Terre & du Soleil, comme aussi celle de tous les points de la masse de la Lune; pour cela ayant mené du centre de cette Planette dans le plan dont je parle, une ligne fixe & dirigée vers le premiers point d'Aries, laquelle fert d'axe commun à toutes les abscisses,

Soient  $x$  l'abscisse &  $y$  l'ordonnée rectangle qui répondent à la projection du centre de la Terre sur ce plan, & soit  $z$  l'autre coordonnée rectangle qui exprime la distance du centre de la Terre au point qui en est la projection.

Soient aussi  $x'$   $y'$   $z'$  les coordonnées semblables pour la position du centre du Soleil.

Enfin soient  $X$  l'abscisse &  $Y$ ,  $Z$  les deux ordonnées correspondantes à un point quelconque  $\alpha$  de la masse de la Lune.

Il est visible 1°. que la distance de ce point au centre de la Terre sera exprimé par  $\sqrt{(x-X)^2 + y-Y^2 + z-Z^2}$ , quantité que j'appelle  $R$  pour abréger.

2°. Que la distance du même point au centre du Soleil sera exprimée de même par la quantité  $\sqrt{(x'-X')^2 + y'-Y'^2 + z'-Z'^2}$  que j'appelle  $R'$ .

Donc si on nomme  $T$  la masse de la Terre, &  $S$  celle du Soleil, chaque point  $\alpha$  de la Lune sera tiré par deux forces, l'une dans la direction de la ligne  $R$  &  $= \frac{T}{R^2}$ ; l'autre suivant la ligne  $R'$  &  $= \frac{S}{R'^2}$ .

De plus, si on prend l'élément du tems  $dt$  pour constant, on aura  $\frac{d^2 X}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 Y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 Z}{dt^2}$  pour les forces accélératri-

ces dont le point  $\alpha$  est sollicité suivant la direction des espaces  $dX, dY, dZ$ , qu'il parcourt dans l'interval  $dt$ , & il faudra, par le principe général de la Dynamique que ces forces prises en sens contraire, & combinées avec les forces  $\frac{T}{R^2}, \frac{S}{R'^2}$  tiennent le système de tous les points  $\alpha$ , c'est-à-dire la masse entière de la Lune en équilibre autour de son centre de gravité supposé fixe.

I I I.

C'est un principe généralement vrai en Statique que, si un système quelconque de tant de corps ou de points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques est en équilibre; & qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcourt un espace infiniment petit; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point, où elle est appliquée, parcourt suivant la direction de cette même puissance, fera toujours = 0.

Dans la question présente, si on imagine que les lignes  $X, Y, Z, R, R'$ , deviennent, en variant infiniment peu la position de la Lune autour de son centre,  $X + \delta X, Y + \delta Y, Z + \delta Z, R + \delta R, R' + \delta R'$ , il est facile de voir que les différences  $\delta X, \delta Y, \delta Z, \delta R, \delta R'$ , exprimeront les espaces parcourus en même tems par le point  $\alpha$  dans des directions opposées à celles des puissances  $\alpha \frac{d^2 X}{dt^2}, \alpha \frac{d^2 Y}{dt^2}, \alpha \frac{d^2 Z}{dt^2}, \alpha \frac{T}{R^2}, \alpha \frac{S}{R'^2}$ , qui sont sensées agir sur ce point; on aura donc, pour les conditions de l'équilibre, l'équation générale.

$$\int \left( \alpha \frac{d^2 X}{dt^2} \times - \delta X + \alpha \frac{d^2 Y}{dt^2} \times - \delta Y + \alpha \frac{d^2 Z}{dt^2} \times - \delta Z + \alpha \frac{T}{R^2} \times - \delta R + \alpha \frac{S}{R'^2} \times - \delta R' \right) = 0.$$

Savoir, en changeant les signes.

$$\frac{1}{dt^2} \int \alpha (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z) \\ + T \int \frac{\alpha \delta R}{R^2} + S \int \frac{\alpha \delta R'}{R'^2} = 0. . . . . (A)$$

Les quantités  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta Z$ ,  $\delta R$ ,  $\delta R'$ , ne sont autre chose que les différentielles des lignes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  : prises à l'ordinaire & affectées de la caractéristique  $\delta$  au lieu de la commune  $d$ , pour les distinguer des autres différentielles des mêmes lignes qui ont rapport au mouvement réel du corps.

Quant au signe d'intégration  $\int$  il est mis pour marquer la somme de toutes les formules semblables qui répondent à tous les élémens  $\alpha$  de la masse de la Lune.

## I V.

SCHOLIE. Le principe de Statique que je viens d'exposer n'est, dans le fond qu'une généralisation de celui qu'on nomme communément le principe des vitesses virtuelles, & qui est reconnu depuis longtems par les Géomètres pour le principe fondamental de l'équilibre. M. Jean Bernouilli est le premier, que je sache, qui ait envisagé ce principe sous un point de vue général & applicable à toutes les questions de Statique, comme on le peut voir dans la Section IX. de la nouvelle Mécanique de M. Varignon, où cet habile Géomètre, après avoir rapporté, d'après M. Bernouilli, le principe dont il s'agit, fait voir par différentes applications, qu'il conduit aux mêmes conclusions que celui de la composition des forces.

C'est aussi ce même principe qui sert de base à celui que M. de Maupertuis a donné dans les Mémoires de l'Académie de 1740, sous le nom de Loi du Repos; & que M. Euler a développé ensuite & rendu très-général dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1751.



Enfin c'est de ce principe que dépend celui de la conservation des forces vives, comme M. d'Alembert l'a remarqué le premier à la fin de sa Dynamique; ce qui peut d'ailleurs se démontrer généralement ainsi. Soit un système quelconque de tant de corps qu'on voudra  $m, m', m'', \&c.$  qui pesent, ou qui soient attirés vers des centres par des forces quelconques; soient  $P, Q, R, \&c.$  les forces qui agissent sur le corps  $m$ , &  $p, q, r, \&c.$  les distances respectives de ce corps, aux centres de ses forces; soient aussi  $P', Q', R', \&c. P'', Q'', R'', \&c. \&c.$  les forces des corps  $m', m'', \&c. \& p', q', r', \&c. p'', q'', r'' \&c. \&c.$  leurs distances aux centres des forces; si l'on imagine que tous ces corps se meuvent, durant un instant quelconque  $dt$ , par les espaces  $ds, ds', ds'', \&c.$  avec les vitesses  $v, v', v'', \&c.$  il faudra, par le principe général de la Dynamique, que le système des corps  $m, m', m'', \&c.$  animés chacun des forces  $— \frac{mdv}{dt}, — \frac{m'dv'}{dt}, — \frac{m''dv''}{dt}, \&c.$  dans la direction même des espaces  $ds, ds', ds''$  soit en équilibre avec les forces  $mP, mQ, mR, \&c. m'P', m'Q', m'R', \&c. m''P'', m''Q'', m''R'', \&c. \&c.$  Or si l'on considère le système pendant que les corps changent infiniment peu de position, en parcourant les espaces  $ds, ds', ds'', \&c.$  il est clair que  $dp, dq, dr, \&c. dp', dq', dr', \&c. dp'', dq'', dr'', \&c. \&c.$  exprimeront les espaces parcourus par chacun des corps, dans des directions contraires à celles des forces  $P, Q, R, \&c. P', Q', R', \&c. \&c.$  on aura donc, par le principe de l'équilibre dont nous parlons.

$$\begin{aligned}
 &— \frac{m'dv}{dt} \times ds + mP \times — dp + mQ \times — dp + mR \times — dr + \&c. \\
 &— \frac{m'dv'}{dt} \times ds' + m'P' \times — dp' + m'Q' \times — dq' + m'R' \times — dr' + \&c. \\
 &— \frac{m''dv''}{dt} \times ds'' + m''P'' \times — dp'' + m''Q'' \times — dq'' + m''R'' \times — dr'' + \&c.
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} &— \frac{m'dv}{dt} \times ds + mP \times — dp + mQ \times — dp + mR \times — dr + \&c. \\ &— \frac{m'dv'}{dt} \times ds' + m'P' \times — dp' + m'Q' \times — dq' + m'R' \times — dr' + \&c. \\ &— \frac{m''dv''}{dt} \times ds'' + m''P'' \times — dp'' + m''Q'' \times — dq'' + m''R'' \times — dr'' + \&c. \end{aligned}} \right\} = 0$$

$\&c.$

Mettant, au lieu de  $dt$ , les valeurs  $\frac{ds}{v}$ ,  $\frac{ds'}{v'}$ ,  $\frac{ds''}{v''}$ , &c.

& intégrant, on aura

$$mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \&c. = mV^2 + m'V'^2 + m''V''^2 + \&c.$$

$$- 2m \int (P dp + Q dq + R dr + \&c.)$$

$$- 2m' \int (P' dp' + Q' dq' + R' dr' + \&c.)$$

$$- 2m'' \int (P'' dp'' + Q'' dq'' + R'' dr'' + \&c.) - \&c.$$

$V, V', V''$  &c. étant les valeurs primitives de  $v, v', v''$ , &c. & cette équation renferme, comme on le voit, la conservation des forces vives prise dans toute son étendue.

Au reste, le Principe de Statique que je viens d'exposer, étant combiné avec le Principe Dynamique donné par M. d'Alembert, constitue une espèce de formule générale qui renferme la solution de tous les problèmes qui regardent le mouvement des corps. Car on aura toujours une équation semblable à l'équation (A), art. préc. & toute la difficulté ne consistera plus qu'à trouver l'expression analytique des forces qu'on suppose agir sur les corps, & des lignes suivant lesquelles ces forces agissent, en n'employant dans ces expressions que le plus petit nombre possible de variables indéterminées, de manière que leurs différentielles désignées par le  $\delta$  soient entièrement indépendantes les unes des autres; après quoi faisant séparément égaux à zéro, les termes qui se trouveront multipliés par chacune des différentielles dont je parle, on aura tout d'un coup autant d'équations particulières qu'il en faudra pour la solution du problème; comme on le verra dans les articles qui suivent.

## V.

Soient présentement l'inclinaison du plan de l'équateur lunaire par rapport à celui de l'écliptique. . .  $\pi$ .

La longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire, c'est-à-dire l'angle que l'intersection de cet équateur,

teur, avec l'écliptique, ou avec le plan parallèle à l'écliptique, & passant par le centre de la Lune fait avec l'axe des absciffes ( art. II. ) . . . . . e.

La distance d'un méridieu lunaire pris à volonté sur la surface de la Lune, & qu'on appellera dorénavant le premier méridien, au nœud descendant de l'équateur, cette distance étant comptée à l'ordinaire sur l'équateur & selon la suite des signes. . . . . o.

Il est aisé de voir que ces trois variables suffiront pour déterminer à chaque instant, la situation de la Lune par rapport à son centre qui est censé immobile; aussi ce seront les seules qu'il faudra faire varier dans les différentielles des lignes  $X, Y, Z, R, R'$ .

Soit de plus le rayon ou la distance d'un point quelconque  $\alpha$  au centre de gravité de la Lune. . . . . r.

L'angle que ce rayon fait avec le plan de l'équateur, ou la distance du point  $\alpha$  à l'équateur comptée sur le méridien qui passe par ce point. . . . . P.

L'angle que le méridien passant par le point  $\alpha$  fait avec le premier méridien, c'est-à-dire la distance entre ces deux méridiens comptée sur l'équateur en allant d'Occident en Orient. . . . . Q.

Il est visible que ces trois nouvelles indéterminées ne dépendent nullement de la position de la Lune sur son centre, mais seulement de la situation particulière de chacun de ces points  $\alpha$  par rapport à tous les autres. Ainsi ces quantités  $r, P, Q$ , ne seront variables dans nos formules que relativement aux intégrations indiquées par le signe  $\int$  dans l'équation (A).

Au reste il est bon de remarquer d'avance que, comme on suppose que le centre de rotation de la Lune soit dans son centre même de gravité, on aura par la propriété connue de ce centre les trois conditions suivantes:  $\int \alpha r \sin. P = 0; \int \alpha r \cos. P \sin. Q = 0; \int \alpha r \cos. P \cos. Q = 0$ . . . . . (B).

## V I.

Maintenant pour avoir les valeurs des coordonnées  $X, Y, Z$  exprimées en  $r, P, Q, \omega, \varepsilon, \pi$ , je considère que l'angle  $P$  peut être regardé comme exprimant la déclinaison du point  $\alpha$  vu du centre de la Lune, & rapporté à l'équateur lunaire; & que dans cette supposition, l'angle  $Q + \omega$ , que je nommerai  $Q'$  pour abrégé sera l'ascension droite du même point comptée à l'ordinaire depuis le nœud descendant de l'équateur. Donc en rapportant le point  $\alpha$  au plan de l'écliptique lunaire (j'appelle ainsi le plan que nous avons imaginé parallèle à l'écliptique, & passant par le centre de la Lune) lequel est incliné à l'équateur de l'angle  $\pi$ , on trouvera facilement, par les formules de la trigonometrie, sa latitude que j'appellerai  $p$ , & sa longitude que je nommerai  $q'$ ; car on aura, comme il aisé de le démontrer.

$$\left. \begin{aligned} \sin. p &= \sin. P \cos. \pi - \cos. P \sin. Q' \sin. \pi \\ \sin. q' &= \frac{\sin. P \sin. \pi + \cos. P \sin. Q' \cos. \pi}{\cos. p.} \\ \cos. q' &= \frac{\cos. P \cos. Q'}{\cos. p.} \end{aligned} \right\} \dots (D).$$

Mais il est clair d'autre part que l'angle  $p$  n'est autre chose que l'angle fait par le rayon  $r$  avec le plan des  $X$  &  $Y$ ; & que  $q' + \varepsilon$ , que je nomme  $q$ , est l'angle que la projection de  $r$  sur ce plan fait avec l'axe des  $X$ ; on aura donc, comme il est facile de le concevoir même sans figure:  $Z = r \sin. p$ .

$$\left. \begin{aligned} Y &= r \cos. p \sin. q = r \cos. p \cos. q' \sin. \varepsilon \\ &\quad + r \cos. p \sin. q' \cos. \varepsilon \\ X &= r \cos. p \cos. q = r \cos. p \cos. q' \cos. \varepsilon \\ &\quad - r \cos. p \sin. q' \sin. \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots (D).$$

& substituant pour  $\sin. p$ , & pour  $\sin. q'$ , &  $\cos. q'$  leurs valeurs, ci-devant,

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos. P \cos. Q' \cos. \epsilon - r \cos. P \sin. Q' \sin. \epsilon \cos. \omega \\ &\quad - r \sin. P \sin. \epsilon \sin. \pi \\ Y &= r \cos. P \cos. Q' \sin. \epsilon + r \cos. P \sin. Q' \cos. \epsilon \cos. \omega \\ &\quad + r \sin. P \cos. \epsilon \sin. \pi \\ Z &= r \sin. P \cos. \pi - r \cos. P \sin. Q' \sin. \pi \end{aligned} \right\} \dots (E).$$

où l'on se ressouviendra que  $Q' = Q + \omega$ .

V I I.

On différenciera d'abord ces valeurs de  $X, Y, Z$ , en faisant varier seulement  $\omega, \epsilon, \pi$  (Art. V.), & en mettant la caractéristique  $\delta$  au lieu de la  $d$ , pour avoir celles de  $\delta X, \delta Y, \delta Z$ ; on différenciera ensuite les mêmes valeurs  $X, Y, Z$  deux fois à l'ordinaire, pour avoir les différentio-différentielles  $d^2 X, d^2 Y, d^2 Z$ ; après quoi on fera les produits  $d^2 X \delta X, d^2 Y \delta Y, d^2 Z \delta Z$ ; & l'on aura, après avoir effacé ce qui se détruit, & mis pour  $\sin. Q' \cos. Q', \sin. Q'^2 \cos. Q'^2$ , leurs valeurs  $\frac{1}{2} \sin. 2 Q', \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2 Q', \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2 Q'$ .

$$\begin{aligned} d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z &= r^2 \cos. P^2 [ d^2 \omega + d ( \cos. \pi d \epsilon ) + \frac{1}{2} \sin. 2 Q' ( \sin. \pi^2 d \epsilon^2 - d \pi^2 ) + \cos. 2 Q' \sin. \pi d \pi d \epsilon ] \delta \omega + r^2 \sin. P \cos. P [ \sin. Q' ( \sin. \pi^2 d^2 \epsilon + 2 \cos. \pi d \omega d \epsilon ) + \cos. Q' ( d^2 \pi - \sin. \pi \cos. \pi d \epsilon^2 ) ] \delta \omega + r^2 \cos. P^2 [ d. ( \cos. \pi d \omega + d \epsilon - \frac{1}{2} \sin. \pi^2 d \epsilon ) - \sin. 2 Q' ( \sin. \pi^2 d \omega d \epsilon + \frac{1}{2} d ( \sin. \pi d \pi ) ) + \cos. 2 Q' ( \frac{1}{2} d. ( \sin. \pi^2 d \epsilon ) - \sin. \pi d \omega d \epsilon ) ] \delta \epsilon + r^2 \sin. P \cos. P [ \sin. Q' ( \sin. \omega d^2 \omega + d. ( \sin. 2 \pi d \epsilon ) ) + \cos. Q' ( \sin. \pi d \omega^2 + \sin. 2 \pi d \epsilon d \omega + d. ( \cos. \pi d \pi ) ) ] \delta \epsilon + r^2 \sin. P^2 [ d. ( \sin. \pi^2 d \epsilon ) ] \delta \epsilon + r^2 \cos. P^2 [ \sin. \pi d \omega d \epsilon + \frac{1}{2} \sin. \pi \cos. \pi d \epsilon^2 + \frac{1}{2} d^2 \pi + \sin. 2 Q' ( d \omega d \pi - \frac{1}{2} \sin. \pi d^2 \epsilon ) - \cos. 2 Q' ( \sin. \pi d \omega d \epsilon + \frac{1}{2} \sin. \pi \cos. \pi d \epsilon^2 + \frac{1}{2} d^2 \pi ) ] \delta \pi + r^2 \sin. P \cos. P [ - \sin. Q' \times ( 2 \cos. \pi d \omega d \epsilon + d \epsilon^2 \cos. 2 \pi + d \omega^2 ) + \cos. Q' \times d. \end{aligned}$$

B ij

$$(d\omega + \cos. \pi d\epsilon) \delta\pi + r^2 \sin. P^2 [d^2\pi - \sin. \pi \cos. \omega d\epsilon^2] \delta\pi.$$

On multipliera cette quantité par  $\alpha$ , & on en prendra l'intégrale en faisant varier seulement  $r$ ,  $P$ ,  $Q$ , (Art. V.); l'on aura ainsi la valeur de  $\int \alpha (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$  qu'il faudra substituer dans l'équation (A), Art. III.

## V I I I.

*Remarque.* Il y a plusieurs moyens d'abrégier le calcul de la valeur de  $d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z$ ; en voici un qui quoique indirect est néanmoins préférable par sa simplicité & sa généralité. On commencera par chercher la valeur de  $dX^2 + dY^2 + dZ^2$ ; & pour ce j'observerai dans la supposition présente, que la valeur de  $X$  devient celle de  $Y$ , en mettant simplement  $-\cos. \epsilon$  à la place de  $\sin. \epsilon$ , &  $\sin. \epsilon$  à la place de  $\cos. \epsilon$ , c'est-à-dire en augmentant l'angle  $\epsilon$  de  $90^\circ$ ; ce qui aura par conséquent lieu aussi dans les valeurs de  $dX^2$ , & de  $dY^2$ ; d'où il s'enfuit que dès que l'on aura la valeur de  $dX$ , on en pourra tirer tout de suite celle de  $dY$  en négligeant simplement dans le carré de  $dX$  tous les termes qui renfermeroient  $\sin. \epsilon \cos. \epsilon$ , & effaçant dans les autres les carrés  $\sin. \epsilon^2$ , &  $\cos. \epsilon^2$ ; après cela il n'y aura plus qu'à faire le carré de  $dZ$ , & l'on aura après quelques réductions:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = r^2 \cos. P^2 [d\omega^2 + 2 \cos. \pi d\omega d\epsilon + d\epsilon^2 - \frac{1}{2} \sin. \pi^2 d\epsilon^2 + \frac{1}{2} d\pi^2 + \frac{1}{2} \cos. 2 Q' (\sin. \pi^2 d\epsilon^2 - d\pi^2) + \sin. 2 Q' \sin. \pi d\pi d\epsilon] + 2 r^2 \sin. P \cos. P [\sin. Q' \times (\sin. \pi d\omega d\epsilon + \sin. \pi \cos. \pi d\epsilon^2) + \cos. Q' (d\omega d\pi + \cos. \pi d\epsilon d\pi)] + r^2 \sin. P^2 [\sin. \pi^2 d\epsilon^2 + d\pi^2].$$

Je différentie à présent cette équation par  $\delta$ , c'est-à-dire en affectant les différentielles de  $\delta$  au lieu de  $d$ ; j'aurai après avoir divisé par 2,  $dX \delta dX + dY \delta dY + dZ \delta dZ$

$\equiv r^2 \cos. P^2 [ d\omega d\delta\omega + \cos. \pi d\epsilon d\delta\omega + \cos. \omega d\omega d\delta\epsilon -$   
 $\sin. \pi d\omega d\epsilon d\pi \&c.$  Je ne mets pas cette différentielle en  
 entier parce que je ne veux que donner une idée de la  
 méthode que je propose. Maintenant je considère que  $d\delta X$   
 est la même chose que  $d\delta X$ , comme il est aisé de s'en  
 convaincre en considérant la nature du calcul différen-  
 tiel ; il en est de même des autres différentes affectées de  
 $\delta d$  ; on peut donc mettre par tout  $d\delta$  au lieu de  $\delta d$  ; &  
 l'on aura  $dX d\delta X + dY d\delta Y + dZ d\delta Z = r^2 \cos. P^2$   
 $[ d\omega d\delta\omega + \cos. \pi d\epsilon d\delta\omega + \cos. \pi d\omega d\delta\epsilon - \sin. \pi d\omega$   
 $d\epsilon d\pi \&c.$  On prendra l'intégrale de cette équation, & re-  
 gardant les différences affectées de  $\delta$  comme de simples  
 variables on fera disparaître leurs différentielles par l'opé-  
 ration assez connue des intégrations par parties ; ce qui  
 donnera  $dX \delta X + dY \delta Y + dZ \delta Z - \int (d^2 X \delta X +$   
 $d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z) = r^2 \cos. P^2 [ d\omega \delta\omega + \cos. \pi d\epsilon \delta\omega$   
 $+ \cos. \pi d\omega \delta\epsilon \&c. - \int ( \cos. P^2 ] d^2 \omega \delta\omega + d. ( \cos. \pi d\epsilon )$   
 $\delta\omega + d. ( \cos. \pi d\omega ) \delta\epsilon + \sin. \pi d\omega d\epsilon d\pi \&c.$  Or, il est  
 aisé de comprendre que cette équation doit être identi-  
 que ; & que par conséquent il faut que la partie algébri-  
 que du premier membre soit égale à la partie algébrique  
 du second, & la partie intégrale à la partie intégrale ;  
 donc, n'ayant égard qu'à la partie intégrale de l'un & de  
 l'autre membre, & ôtant le signe  $\int$  on aura sur le champ  
 $d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z = r^2 \cos. P^2 [ d^2 \pi \delta\omega + d.$   
 $( \cos. \pi d\epsilon ) \delta\omega + d. ( \cos. \pi d\omega ) \delta\epsilon + \sin. \pi d\omega d\epsilon d\pi \&c.$

On peut remarquer encore que cette valeur ne diffère  
 de celle de  $dX \delta dX + dY \delta dY + dZ \delta dZ$ , qu'en ce  
 que la lettre  $d$  qui étoit après la  $\delta$  dans les différentielles  
 affectées de  $\delta d$  se trouve maintenant devant les quanti-  
 tés mêmes qui multiplient ces différentielles ; & que les  
 autres termes qui ne renferment point de semblables dif-  
 férentielles, ont des signes contraires. Ainsi ayant la va-  
 leur de  $dX^2 + dY^2 + dZ^2$  on aura facilement celle de

$d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z$  dont on a besoin dans la solution de tous les problèmes de Dynamique qu'on voudra traiter suivant notre méthode.

## I X.

Jusqu'ici la position de l'axe de rotation, autour duquel nous supposons que la Lune tourne en décrivant d'occident en orient l'angle  $\omega$ , est absolument arbitraire, & nous pourrons prendre telle ligne qu'il nous plaira pourvu qu'elle passe par le centre de gravité; mais le calcul sera beaucoup simplifié si on suppose, qu'abstraction faite des forces étrangères, la rotation de la Lune doit être uniforme, & son axe une ligne fixe & invariable. Voyons donc les conditions qui résultent de ces suppositions; pour cela il n'y a qu'à faire  $T = 0$ , &  $S = 0$  dans l'équation (A); ce qui la réduit à  $\frac{1}{dt^2} \int (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z) \alpha = 0$  & il faudra que cette équation soit vraie en faisant  $d^2 \omega = 0$ ,  $d^2 \epsilon = 0$  &  $d^2 \pi = 0$ ; or, dans ce cas on aura (Art. VII.)  $d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z = r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q' \sin. \pi d\omega^2 \delta \epsilon - r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' d\omega^2 \delta \pi$ ; donc l'équation à vérifier sera  $\frac{\sin. \pi d\omega^2 \delta \epsilon}{dt^2} \int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q' + \frac{d\omega^2 \delta \pi}{dt^2} \int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' = 0$ , laquelle donne séparément les deux suivantes (IV. à la fin)  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q' = 0$ ; &  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' = 0$ . (F)

Telles sont les conditions nécessaires pour que la Lune puisse d'elle-même tourner uniformément autour d'un axe fixe; par conséquent si on suppose, comme les observations de la Libration paroissent le démontrer, que ces conditions aient lieu dans la rotation de la Lune, il faudra négliger dans la valeur de  $d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z$  (Art. VII.) tous les termes où se trouvent  $\sin. P \cos. P \cos. Q'$ ,



&  $\sin. P \cos. P \sin. Q'$ ; & pour avoir l'intégrale  $\int \alpha (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$ , il n'y aura plus qu'à mettre au lieu de  $Q'$  sa valeur  $Q + \omega$ ; ce qui donne  $\cos. 2 Q' = \cos. 2 Q \cos. 2 \omega - \sin. 2 Q \sin. 2 \omega$ ,  $\sin. 2 Q' = \cos. 2 Q \sin. 2 \omega + \sin. 2 Q \cos. 2 \omega$ ; en supposant pour abrégér,

$$\left. \begin{aligned} \int \alpha r^2 \cos. P^2 &= H; \int \alpha r^2 \sin. P^2 &= K; \\ \int \alpha r^2 \cos. P^2 \cos. 2 Q &= M; \int \alpha r^2 \cos. P^2 \sin. 2 Q &= N \end{aligned} \right\} (G)$$

On trouvera pour la valeur de  $\frac{1}{dt^2} \int \alpha (d^2 X \delta X + d^2 Y \delta Y + d^2 Z \delta Z)$  une expression de cette forme  $\Omega \delta \omega + E \delta \varepsilon + \Pi \delta \pi$ ; dans laquelle

$$\Omega = \frac{d(d\omega + \cos. \pi d\varepsilon)}{dt^2} \times H + \frac{\sin. \pi^2 d\varepsilon^2 - d\pi^2}{2 dt^2} \times (M \sin. 2 \omega + N \cos. 2 \omega) + \frac{\sin. \pi d\pi d\varepsilon}{dt^2} \times (M \cos. 2 \omega - \sin. 2 \omega).$$

$$E = \frac{d(\cos. \pi d\omega + d\varepsilon)}{dt^2} \times H + \frac{d(\sin. \pi^2 d\varepsilon)}{dt^2} \times (K - \frac{1}{2} H) - \frac{\sin \pi^2 d\omega d\varepsilon + \frac{1}{2} d.(\sin. \pi d\pi)}{dt^2} \times (M \sin. 2 \omega + N \cos. 2 \omega) + \frac{\frac{1}{2} d(\sin. \pi^2 d\varepsilon) - \sin. \pi d\pi d\omega}{dt^2} \times (M \cos. 2 \omega - N \sin. 2 \omega)$$

$$\Pi = \frac{\sin. \pi d\omega d\varepsilon}{dt^2} \times H + \frac{d^2 \pi}{dt^2} \times (\frac{1}{2} H + K) + \frac{\sin. \pi \cos. \pi d\varepsilon}{dt^2} \times (\frac{1}{2} H - K) + \frac{d\omega d\pi - \frac{1}{2} \sin. \pi d^2 \varepsilon}{dt^2} \times (M \sin. 2 \omega + N \cos. 2 \omega) - \frac{\sin. \pi d\omega d\varepsilon + \frac{1}{2} d^2 \pi + \frac{1}{2} \sin. \pi \cos. \pi d\varepsilon^2}{dt^2} \times (M \cos. 2 \omega - N \sin. 2 \omega).$$

X.

SCHOLIE I. On auroit tort de croire que les conditions  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q = 0$ , &  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q = 0$ , rendissent notre solution moins générale; car je vais démontrer que dans quel corps que ce soit, on peut tou-

jours trouver trois axes qui passent par le centre de gravité, par rapport à chacun desquels ces deux équations ayent lieu en même tems.

Pour cela imaginons pour un moment que la position de la Lune, que je considérerai ici comme un corps quelconque, soit fixe par rapport au plan de son écliptique; & cherchons la position du plan de l'équateur de maniere que l'on ait  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q' = 0$ ,  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' = 0$ ; on aura d'abord en combinant les formules (C) de l'Art. VI.  $\sin. P = \sin. \pi \cos. p \sin. q' + \cos. \pi \sin. p$ ;  $\cos. P \sin. Q = \cos. \pi \cos. p \sin. q' - \sin. \pi \sin. p$ ;  $\cos. P \cos. Q' = \cos. p \cos. q'$ ; donc  $\sin. P \cos. P \sin. Q' = \sin. \pi \cos. \pi (\cos. p^2 \sin. q'^2 - \sin. p^2) + (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2) \cos. p \sin. p \sin. q'$  = en mettant pour  $q'$  sa valeur  $q - \epsilon$  afin que l'angle  $q$  ait une origine fixe)  $\sin. \pi \cos. \pi (\cos. p^2 \sin. q^2 \cos. \epsilon^2 - 2 \cos. p^2 \sin. q \cos. q \sin. \epsilon \cos. \epsilon + \cos. p^2 \cos. q^2 \sin. \epsilon^2 - \sin. p^2) + (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2) \times (\cos. p \sin. p \sin. q \cos. \epsilon - \cos. p \sin. p \cos. q \sin. \epsilon)$  &  $\sin. P \cos. P \cos. Q' = \sin. \pi \cos. \pi \cos. p^2 \sin. q' \cos. q' + \cos. \pi \sin. p \cos. p \cos. q' = \sin. \pi \cos. \pi \cos. p^2 \sin. q \cos. (\cos. \epsilon^2 - \sin. \epsilon^2) + \sin. \pi \sin. p \cos. \epsilon (\cos. p^2 \sin. q^2 - \cos. p^2 \cos. q^2) + \cos. \pi (\sin. p \cos. p \sin. q \sin. \epsilon + \sin. p \cos. p \cos. q \cos. \epsilon)$ . Donc si l'on fait pour abrégé :

$\int \alpha r^2 \cos. p^2 \sin. q^2 = A$ ;  $\int \alpha r^2 \cos. p^2 \cos. q^2 = B$ ;  $\int \alpha r^2 \cos. p^2 \sin. q \cos. q = C$ ;  $\int \alpha r^2 \cos. p \sin. p \sin. q = D$ ;  $\int \alpha r^2 \cos. p \sin. p \cos. q = E$ ;  $\int \alpha r^2 \sin. p^2 = F$ ; on aura  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \sin. Q' = \sin. \pi \cos. \pi (A \cos. \epsilon^2 - 2C \sin. \epsilon \cos. \epsilon + B \sin. \epsilon^2 - F) + (\cos. \pi^2 - \sin. \pi^2) (D \cos. \epsilon - E \sin. \epsilon) = 0$ ; &  $\int \alpha r^2 \sin. P \cos. P \cos. Q' = \sin. \pi (\cos. \pi (A - B) \sin. \epsilon \cos. \epsilon + C (\cos. \epsilon^2 - \sin. \epsilon^2)) + \cos. \pi (D \sin. \epsilon + E \cos. \epsilon) = 0$ ; deux équations d'où l'on tirera les valeurs de  $\epsilon$ , &  $\pi$ .

La première nous donne

$$\frac{\text{tang. } \pi}{1 - \text{tang. } \pi} = \frac{E \sin. \epsilon - D \cos. \epsilon}{A \cos. \epsilon - 2C \sin. \epsilon \cos. \epsilon + B \sin. \epsilon^2 - F}, \text{ \& la seconde}$$

$$\text{nous donne aussi } \text{tang. } \pi = \frac{-D \sin. \epsilon - E \cos. \epsilon}{(A - B) \sin. \epsilon \cos. \epsilon + C (\cos. \epsilon^2 - \sin. \epsilon^2)}$$

donc chassant  $\text{tang. } \pi$ , & faisant  $\sin. \epsilon = x$ , on aura, après les réductions, une équation de cette forme  $ax + bx^3 + f\sqrt{1-x^2} + gx^2\sqrt{1-x^2} = 0$ ; dans laquelle

$$a = CDR - EHK - C^2E - 2CHD + 2D^2E - E^3,$$

$$b = -2CDK - EHK + 3CDH + 2EH^2 + 2C^2E - 3DE - E^3;$$

$$f = CEK - C^2D + E^2D;$$

$$g = DHK - 2CEK + 3CFH + 2C^2D + D^3 - H^2D - 3E^2D;$$

$K$  étant  $= A - F$ , &  $H = A - B$ ; cette équation étant dégagée des signes radicaux, devient celle-ci

$$x^6 + \frac{2ab + 2bg - g^2}{b^2 + g^2} x^4 + \frac{a^2 + f^2 - 2fg}{b^2 + g^2} x^2 - \frac{f^3}{b^2 + g^2} = 0,$$

laquelle ayant son dernier terme négatif, & ne renfermant aucune puissance impaire de  $x$ , aura nécessairement, comme l'on fait, au moins deux racines réelles & égales, l'une positive & l'autre négative; donc puisque

$$\text{tang. } \epsilon = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{f+gx^2}{x+gx^2},$$

on aura au moins une valeur réelle de  $\text{tang. } \epsilon$ , & par conséquent de l'angle  $\epsilon$ ; & cette valeur étant substituée dans l'expression de  $\text{tang. } \pi$  ci-dessus, on aura l'angle  $\pi$  correspondant. Ayant les angles  $\epsilon$ , &  $\pi$ , on aura, comme on le voit, la position du plan cherché de l'Équateur, par rapport au plan donné de l'Écliptique. Si  $D = 0$ , &  $E = 0$ , alors  $\text{tang. } \pi = 0$ ,

& le plan cherché tomberoit dans le plan donné, ce qui est évident, parce que les deux équations

$$\int a r^2 \cos. p \sin. p \sin. q = 0; \int a r^2 \cos. p \sin. p \cos. q = 0,$$

$$\text{sont analogues aux équations de condition } \int a r^2 \cos. P \sin. P$$

$$\sin. Q' = 0; \text{ \& } \int a r^2 \cos. P \sin. P \cos. Q' = 0;$$

mais en re-

prenant les équations qui résultent immédiatement de ces deux dernières équations, & y mettant  $D=0$  &  $E=0$ , on trouve  $\sin \pi \cos \pi (A \cos \epsilon - 2C \sin \epsilon \cos \epsilon + B \sin \epsilon^2 - F) = 0$ ; &  $\sin \pi (A - B \sin \epsilon \cos \epsilon + C \times \cos \epsilon^2 - \sin \epsilon^3) = 0$ , équations qui, outre la racine  $\pi = 0$ , donnent encore  $\cos \pi = 0$  &  $(A - B) \sin \epsilon \cos \epsilon + C (\cos \epsilon^2 - \sin \epsilon^3) = 0$ ; savoir en faisant  $\text{tang. } \epsilon = t, t + \frac{P-A}{C} t - 1 = 0$ , dont les deux racines sont nécessairement réelles, à cause du dernier terme négatif: de-là il s'en suit que si, après avoir trouvé par les équations ci-dessus, la position du plan cherché, on regarde maintenant ce plan comme donné, on trouvera encore deux autres plans qui auront la même propriété, & dont la position par rapport à celui-la sera déterminé par les équations  $\cos \pi = 0$ ; &  $t^2 + \frac{B-A}{C} t - 1 = 0$ . Donc 1.<sup>o</sup> ces deux derniers plans couperont le premier à angles droits: 2.<sup>o</sup> ils se couperont l'un l'autre avec un angle égal à la différence des angles qui ont pour tangentes les deux racines de l'équation en  $t$ ; c'est-à-dire, qu'en nommant  $t'$ , &  $t''$  ces racines, la tangente de l'angle en question sera  $= \frac{t' - t''}{1 + t't''} =$  (à cause de  $t't'' = -1$ )  $\frac{t' - t''}{0} = \infty$ .

## X I.

SCHOLIE II. A l'égard des quantités H, K, M, N de l'art IX, (G); il est clair que leur valeur dépend entièrement de la figure & de la constitution intérieure de la Lune; car, soit  $D$  la densité d'une particule quelconque  $a$ , on trouvera aisément  $a = Dr^2 \cos P dQ dP dr$ , & l'on aura  $H = \int Dr^4 dr \cos P^3 dP dQ$ ;  $K = \int Dr^4 dr \sin P^2 \cos P dP dQ$ ;  $M = \int Dr^4 dr \cos P^3 dP \cos 2Q dQ$ ;  $N = \int Dr^4 dr \cos P^2 dP \sin 2Q dQ$ : & pour avoir la valeur complète de ces intégrales, il faudra, après avoir substitué

pour  $D$  sa valeur en  $r$ ,  $P$  &  $Q$ , intégrer 1.<sup>o</sup> en faisant varier  $r$ , & en mettant, après l'intégration, sa valeur en  $P$  & en  $Q$ , qui dépend de la figure de la Lune; 2.<sup>o</sup> en faisant varier  $Q$  & en mettant, après l'intégration  $Q=c$ ,  $c$  étant circonférence d'un cercle dont le rayon  $=1$ ; 3.<sup>o</sup> en faisant varier  $P$ ; & en mettant, après l'intégration,  $P=\frac{c}{r}$ , & doublant les termes. Comme la figure de la Lune est sensiblement sphérique, on ne s'éloignera pas de la vérité en la regardant comme formée de différentes couches à-peu-près sphériques, & dont chacune soit par-tout de la même densité; soit donc  $r'(1+c\xi)$  le rayon variable d'une couche quelconque de densité uniforme;  $r'$  étant le rayon de cette couche, qui est perpendiculaire au plan de l'Équateur;  $e$  une quantité constante très-petite, &  $\xi$  une fonction quelconque de  $r$ ,  $P$  &  $Q$ , qui soit nulle, lorsque  $P=90^\circ$ . On remarquera 1.<sup>o</sup> que la quantité  $D$  sera une fonction de  $r'$  seulement; 2.<sup>o</sup> que si on néglige les quarrés & les puissances plus hautes de  $e$ , on aura

$$r^4 dr = r'^4 dr' + e \frac{d(r'^4 \xi)}{dr'} dr' = (\text{en faisant pour abrégér } \frac{d(r'^4 \xi)}{dr'} = X)$$

$r'^4 dr' + e X dr'$ ; d'où il suit qu'on aura

$$\left. \begin{aligned} H &= \int D r'^4 dr' \cos. P^3 dP dQ + e \int D X dr' \cos. P^3 dP dQ \\ K &= \int D r'^4 dr' \sin. P^2 \cos. P dP dQ + e \int D X dr' \sin. P^2 \cos. P dP dQ \\ M &= \int D r'^4 dr' \cos. P^3 \cos. 2Q dP dQ + e \int D X dr' \cos. P^3 \cos. 2Q dP dQ \\ N &= \int D r'^4 dr' \cos. P^3 d^2 \sin. 2Q dQ + e \int D X dr' \cos. P^3 d^2 P \sin. 2Q dQ \end{aligned} \right\} \dots (H)$$

Soit  $\int D r'^4 dr' = F$ ; on aura

$$\int D r'^4 dr' \cos. P^3 dP dQ = F \int \cos. P^3 dP dQ = c F \int \cos. P^3 dP = \frac{4}{3} c F;$$

on trouvera de la même manière

$$\int D r'^4 dr' \sin. P^2 \cos. P dP dQ = \frac{2}{3} c F;$$

$$\int D r'^4 dr' \cos. P^3 d^2 P \cos. 2Q dQ = 0; \&$$

$$\int D r'^4 dr' \cos. P^3 d^2 P \sin. 2Q dQ = 0; \text{ on aura donc}$$

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{4}{3}CF + e \int DXdr' \cos. P. dPdQ = \frac{4}{3}CF \\
 K &= \frac{2}{3}CF + e \int DXdr' \sin. P. \cos. PdPdQ = \frac{2}{3}CF \\
 M &= e \int DXdr' \cos. P. dP \cos. 2QdQ \\
 N &= e \int DXdr' \cos. P. dP \sin. 2QdQ
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} H \\ K \\ M \\ N \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{à-très-peu-près} \\ \dots(I) \end{array}$$

D'où l'on voit 1.<sup>o</sup> que les quantités  $H$  &  $K$  sont des quantités finies; 2.<sup>o</sup> que les quantités  $M$  &  $N$  sont des quantités très petites par rapport à  $H$  &  $K$ , étant de l'ordre de  $e$ ; 3.<sup>o</sup> que la quantité  $K - \frac{1}{2}H$  est aussi une quantité très-petite du même ordre, étant

$$= e \int DXdr' (\sin P^2 - \frac{1}{2} \cos. P^2) \cos. PdPdQ.$$

Quant à la masse de la Lune, on la trouve en intégrant l'expression de  $\alpha$ , savoir  $Dr^2 dr \cos. PdPdQ =$  (dans la supposition présente)  $Dr' dr' \cos. PdPdQ + e DXdr' \cos. PdPdQ$ ; & son intégrale sera  $2e \int Dr'^2 dr' + e \int DXdr' \cos. PdPdQ$ , en prenant ici  $X'$  pour la valeur de  $\frac{d(r' \cdot E)}{dr'}$ .

Donc nommant cette masse  $L$ , on aura aux quantités de l'ordre de  $e$  près,  $L = 2e \int Dr'^2 dr'$ ; d'où  $\int Dr'^2 dr' = \frac{L}{2e}$ . Or quoique sans connoître la valeur de  $D$  on ne puisse déterminer le rapport de  $F$  ou de  $\int Dr'^4 dr'$  à  $\int Dr'^2 dr'$ ; on peut néanmoins trouver des limites entre lesquelles ce rapport doit nécessairement demeurer. Il est clair 1.<sup>o</sup> que si  $f$  exprime la valeur de  $r'$  à la surface,  $\int Dr'^4 dr' < f^2 \int D r'^2 dr'$ , parce que  $r'^4$  est toujours  $< f^2 r'^2$ . De plus on a  $\int Dr'^4 dr' = \frac{1}{3} Df^3 - \frac{1}{3} \int r'^3 dD$ , &  $\int Dr'^2 dr' = \frac{1}{3} Df^3 - \frac{1}{3} \int r'^3 dD$ ; ce qui donne  $3 \int Dr'^3 dr' - 5 \int Dr'^2 dr' = \int r'^3 r'^2 - f^2 dD =$  à une quantité positive, si  $dD$  est négatif, & à une quantité négative si  $dD$  est positif, parce que  $r'^2 < f^2$ ; donc 2.<sup>o</sup> si la densité diminue du centre à la circonférence,  $\int Dr'^4 dr' < \frac{3}{5} \int Dr'^2 dr'$ ; mais si elle augmente,

$\int Dr'^4 dr' > \frac{1}{5} f^2 \int Dr'^4 dr'$  ; ainsi dans ce dernier cas , la valeur de  $F$  sera contenue entre les limites  $\frac{f^2 L}{2c}$  , &  $\frac{1}{4} \times \frac{f^2 L}{2c}$  . Si la densité étoit par-tout la même , on auroit alors  $F = \frac{2}{5} \cdot \frac{f^2 L}{2c}$  .

V I I.

SCHOLIE III. On peut au reste déterminer la figure de la Lune , par la théorie , en suposant qu'elle ait été originairement fluide , & qu'elle ait conservé , en se durcissant , la forme qu'elle auroit dû prendre , en vertu de la gravitation mutuelle de ses parties , combinée avec la force centrifuge , & avec l'attraction de la Terre. Pour cela , nous suposerons que le premier méridien de la Lune , d'où l'on commence à compter les angles  $Q$  , soit celui qui passe par la Terre , lorsque le lieu moyen de cette planète est égal à son lieu vrai , & nous regarderons l'attraction de la Terre comme agissant dans le sens du diamètre de l'Équateur qui se trouve dans le premier méridien ; ce qui est vrai à très-peu-près , à cause que la Lune nous présente toujours sensiblement la même face. Or soit  $\phi$  le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur de la Lune &  $\rho$  la distance moyenne du centre de la Lune à la Terre , on trouvera généralement pour la figure de chaque couche  $\xi = A \cos P + B \cos P^2 \cos Q$  , & les deux quantités  $A$  &  $B$  seront déterminées par les deux équations suivantes

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \times \frac{5Lr'^5}{4c^5} - \frac{5Lr'^4 A}{2c} + \int Dd(Ar'^5) + r'^5(\beta - f DdA) = 0 \\ \frac{1}{c} \times \frac{3T}{2p} \times \frac{5r'^5}{2c} - \frac{5Lr'^4 B}{2c} + \int Dd(Br'^5) + r'^5(\eta - f DdB) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (K)$$

$\beta$  &  $\eta$  étant égales à ce que deviennent  $f DdA$  &  $f DdB$  , lorsque  $r' = f$  ; la démonstration de ces formules est facile à trouver par les principes établis par MM. Clairaut & d'Alembert ; je ne la donne point ici , pour ne pas

m'écarter trop de mon objet principal. On aura donc dans cette hypothèse

$$X = \frac{d(r^1 \xi)}{d r^1} = \frac{d(A^1)}{d r^1} \cos f . P^2 + \frac{d(B^1)}{d r^1} \cos f . P^2 \cos f . Q^2 ;$$

& par conséquent on trouvera

$$\begin{aligned} \int D X d r^1 \cos f . P^3 d P d Q &= \frac{1}{15} c \int D d(A^1) + \frac{1}{15} c \int D d(r^1 B), \\ \int D X d r^1 \sin f . P^2 \cos f . P d P d Q &= \frac{4}{15} c \int D d(r^1 A) + \frac{1}{15} c \int D d(r^1 B)^2 \\ \int D X d r^1 \cos f . P^3 d P \cos f . 2 Q d Q &= \frac{4}{15} c \int D d(r^1 B) ; \& \\ \int D X d r^1 \cos f . P^3 d P \sin f . 2 Q d Q &= 0. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Par-là on aura } M &= \frac{4cc}{15} \int D d(r^1 B) ; N = 0, \\ K - \frac{1}{2} H &= -\frac{4cc}{15} \int D d(r^1 A) - \frac{2cc}{15} \int D d(r^1 B). \end{aligned} \right\} \dots \dots (L)$$

Si on suppose  $D=1$ , on aura alors  $M = \frac{4ccf^1 B^1}{15}$ ,  $N=0$ ,

&  $K - \frac{1}{2} H = -\frac{4ccf^1}{15} (A^1 + \frac{1}{2} B^1)$ , en prenant  $A^1$  &  $B^1$  pour les valeurs de  $A$  &  $B$ , lorsque  $r^1=f$ . Mais si l'on veut avoir égard aux conditions de l'équilibre, on aura, par les équations (K), quelque soit d'ailleurs la densité  $D$ ,

$$\int D d(r^1 A) = \frac{5 L f^1 A^1}{2c} - \frac{5 L \phi f^1}{4cc} ; \& \int D d(r^1 B) = \frac{5 L f^1 B^1}{2c} - \frac{3 T}{2 \rho^1} \times \frac{5 f^1}{2cc},$$

en mettant  $r^1=f$ . Si l'on supposoit de plus la densité con-

stante &  $=1$ , on auroit  $Ae = \frac{5 L \phi}{10L - 4cf^1} =$  (à cause de

$$L = \frac{2cf^1}{3} \text{ dans cette hypothèse}) \frac{5}{4} \phi ; \& B'e = \frac{15 T f^1}{2 \rho^1 (5L - 2cf^1)}$$

$=$  (par la même raison)  $\frac{15 T f^1}{4 \rho^1 L}$ . Du reste on remarquera

que  $e(A^1+B^1)$  sera dans ce cas l'ellipticité du premier méridien . &  $eA^1$  celle du méridien qui est à  $90^\circ$  de là ; d'où il suit que les deux demi-axes de l'Équateur seront  $f(1+eA^1+eB^1)$ , &  $f(1+eA^1)$  ; & que son ellipticité sera, à-très-peu-près,  $=eB^1$ .



XIII.

Il reste encore à trouver la valeur des deux termes  $\int \frac{\alpha \delta R}{R^2}$ , &  $\int \frac{\alpha \beta R'}{R'^2}$  de l'équation (A). Pour cela soient

Le rayon de l'orbite la Terre autour de la Lune, projeté sur le plan de l'écliptique lunaire; ou ce qui revient au même, le rayon de l'orbite de la Lune autour de la Terre, réduit à l'écliptique . . . . .  $\rho$

La longitude de la terre, vue du centre de la Lune; ce qui est la même chose que la longitude de la Lune vue du centre de la Terre & augmentée de  $180^\circ$  . . . . .  $v$

La tangente de la latitude de la Terre, vue de la Lune, & supposée au-dessus de l'écliptique lunaire, laquelle est égale mais de signe contraire à celle de la Lune vue de la Terre . . . . .  $\lambda$

On aura, comme, il est très-facile de le concevoir,  $x = \rho \cos v$ ,  $y = \rho \sin v$ ,  $z = \rho \lambda$ ; & si  $\zeta$  exprime la longitude du nœud ascendant de la Lune, &  $i$  l'inclinaison de l'orbite, la valeur de  $\lambda$  sera, suivant les dénominations qu'on vient de poser,  $= -i \sin(v - 180^\circ - \zeta) = i \sin(v - \zeta)$

Soyent aussi le rayon de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre . . . . .  $\rho'$   
sa longitude . . . . .  $v'$

Il est visible qu'on aura  $x' - x = \rho' \cos v'$ ;  $y' - y = \rho' \sin v'$ ; &  $z' = z$ ; savoir  $x' = \rho' \cos v' + \rho \cos v$ ;  $y' = \rho' \sin v' + \rho \sin v$ , &  $z' = z = \rho \lambda$ .

On fera donc toutes ces substitutions dans l'expression de  $R$  & de  $R'$ , art. II, & l'on aura, après quelques réductions fort simples,

$$R^2 = \rho^2 (1 + \lambda^2) - 2\rho (X \cos v + Y \sin v + Z \lambda) + X^2 + Y^2 + Z^2 =$$

(en substituant pour  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , leurs valeurs art. VI, (E), & réduisant)

$$\begin{aligned} \rho'(1+\lambda^2) &= 2\rho r \sin.P(\sin.(v-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda \cosf.\pi) \\ &= 2\rho r \cosf.P \sin.Q'(\sin.(v-\varepsilon)\cosf.\pi-\lambda \sin.\pi) \\ &= \rho r \cosf.P \cosf.Q' \cosf.(v-\varepsilon)+q^2. \end{aligned}$$

On aura de même  $R'^2 = \rho'^2 + 2\rho'\rho \cosf.(v'-u) + \rho^2(1+\lambda^2)$

$$\begin{aligned} &= 2\rho'(X \cosf.v'+Y \sin.v') - 2\rho(X \cosf.v+Y \sin.v+Z \lambda) + X^2 \\ &+ Y^2 + Z^2 = \rho'^2 + 2\rho'\rho \cosf.(v'-u) + \rho^2(1+\lambda^2) - 2\rho'r \sin.P \\ &\sin.(v'-\varepsilon)\sin.\pi - 2\rho'r \cosf.P \sin.Q' \sin(v'-\varepsilon)\cosf.\pi - 2\rho r \cosf.P \\ &\cosf.Q' \cosf.(v'-\varepsilon) - 2\rho r \sin.P(\sin(v-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda \cosf.\pi) - 2\rho r \\ &\cosf.P \sin.Q'(\sin.(v-\varepsilon)\cosf.\pi-\lambda \sin.\pi) - 2\rho r \cosf.P \cosf.Q' \\ &\cosf.(v-\varepsilon) + r^2. \end{aligned}$$

Substituant au lieu de  $Q'$ , sa valeur  $Q+\omega$ , & faisant, pour abrégé, après avoir développé les *sinus* & les *cosinus* de  $Q+\omega$ .

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sin.(v-\varepsilon)\sin.\pi+\lambda \cosf.\pi. \\ \Delta &= \sin.\omega \sin.(v-\varepsilon)\cosf.\pi+\cosf.\omega \cosf.(v-\varepsilon)-\lambda \sin.\omega \sin.\pi. \\ \Lambda &= \cosf.\omega \sin.(v-\varepsilon)\cosf.\pi-\sin.\omega \cosf.(v-\varepsilon)-\lambda \cosf.\omega \sin.\pi. \\ \Gamma' &= \sin.(v'-\varepsilon)\sin.\pi. \\ \Delta' &= \sin.\omega \sin.(v'-\varepsilon)\cosf.\pi+\cosf.\omega \cosf.(v'-\varepsilon). \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (M)$$

$\Lambda' = \cosf.\omega \sin.(v'-\varepsilon)\cosf.\pi - \sin.\omega \cosf.(v'-\varepsilon)$ , On aura

$$R^2 = \rho'(1+\lambda^2) - 2\rho r \sin.P \times \Gamma - 2\rho r \cosf.P \cosf.Q \times \Delta - 2\rho r \cosf.P \sin.Q \times \Lambda + r^2.$$

$$\begin{aligned} R'^2 &= \rho'^2 + 2\rho'\rho \cosf.(v'-u) + \rho^2(1+\lambda^2) - 2r \sin.P(\rho'\Gamma' + \rho\Gamma) \\ &= 2r \cosf.P \cosf.Q(\rho'\Delta' + \rho\Delta) - 2r \cosf.P \sin.Q(\rho'\Lambda' + \rho\Lambda) + r^2. \end{aligned}$$

## X I V.

Je différencie maintenant la valeur de  $R^2$  qu'on vient de trouver, en faisant varier seulement  $\omega$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$ , & en écrivant  $\delta$  au lieu de  $d$ , j'aurai, en retenant les lettres  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $\Lambda$ , & divisant par  $z$

$$R\delta R = -\rho r(\sin.P \times \delta \Gamma + \cosf.P \cosf.Q \times \delta \Delta + \cosf.P \sin.Q \times \delta \Lambda) ;$$

On a de plus, en négligeant les quarrés & les autres<sup>s</sup> puissances de  $r$  vis-à-vis de  $\rho \frac{1}{R^3} = \frac{1}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\rho r}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}$   
 $(\sin.P \times \Gamma + \cos.P \cos.Q \times \Delta + \cos.P \sin.Q \times \Lambda).$

On multipliera donc ensemble ces valeurs de  $R \delta R$ , & de  $\frac{1}{R^3}$ , en ayant attention de rejeter tous les termes qui renfermeroient  $r \sin.P$ ,  $r \cos.P \sin.Q$ ,  $r \cos.P \cos.Q$ ,  $r^2 \sin.P \cos.P \cos.Q$ , &  $r^2 \sin.P \cos.P \sin.Q$ ; par la raison que l'intégrale de ces termes, après avoir été multipliés par  $\alpha$ , est = 0 (art. V, (B); art. IX, (F)); on multipliera ensuite chaque terme du produit par  $\alpha$ , & on en prendra l'intégrale, en se souvenant que l'on a  $\int \alpha r^2 \cos.P^2 = H$ ,  $\int \alpha r^2 \sin.P^2 = K$ ,  $\int \alpha r^2 \cos.P^2 \cos.Q = M$ ,  $\int \alpha r^2 \cos.P^2 \sin.Q = N$  (art. IX, (G)); ce qui donne  $\int \alpha r^2 \cos.P^2 \cos.Q^2 = \frac{1}{2}(H+M)$ ;  $\int \alpha r^2 \cos.P^2 \sin.Q^2 = \frac{1}{2}(H-M)$ , &  $\int \alpha r^2 \cos.P^2 \sin.Q \cos.Q = \frac{1}{2}N$ . Par ce moyen on aura

$$\int \frac{\alpha \delta R}{R^2} = \frac{3\rho^2}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left( K \Gamma \delta \Gamma + \frac{1}{2} H (\Delta \delta \Delta + \Lambda \delta \Lambda) + \frac{1}{2} M (\Delta \delta \Delta - \Lambda \delta \Lambda) + \frac{1}{2} N (\Delta \delta \Delta + \Delta \delta \Delta) \right)$$

Or on trouve, par la différentiation des valeurs de  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $\Lambda$ , art. précédent,

$$\begin{aligned} \delta \Gamma &= -\cos.(v-\epsilon) \sin.\pi \delta \epsilon + (\sin(v-\epsilon) \cos.\pi - \lambda \sin.\pi) \delta \pi. \\ \delta \Delta &= (\cos.\omega \sin.(v-\epsilon) \cos.\pi - \sin.\omega \cos.(v-\epsilon) - \lambda \cos.\omega \sin.\pi) \delta \omega \\ &\quad - (\sin.\omega \cos.(v-\epsilon) \cos.\pi - \cos.\omega \sin.(v-\epsilon)) \delta \epsilon - (\sin.\omega \sin.(v-\epsilon) \sin.\pi - \lambda \sin.\omega \cos.\pi) \delta \pi. \end{aligned}$$

Savoir, comme il est facile de le voir, par la seule inspection des formules (M), art. précédent;

$$\delta \Delta = \Lambda \delta \omega + (\Lambda \cos.\pi + \Gamma \cos.\omega \sin.\pi) \delta \epsilon - \Gamma \sin.\omega \delta \pi.$$

On a de même

$$\delta \Lambda = -\Delta \delta \omega - (\Delta \cos.\pi + \Gamma \sin.\omega \sin.\pi) \delta \epsilon - \Gamma \cos.\omega \delta \pi; \text{ donc}$$

$$\Delta\delta\Delta + \Lambda\delta\Lambda = \Gamma(\Delta\cos\omega - \Lambda\sin\omega)\sin\pi\delta\epsilon - \Gamma(\Delta\sin\omega + \Lambda\cos\omega)\delta\pi.$$

$$\Delta\delta\Delta - \Lambda\delta\Lambda = 2\Delta\Lambda\delta\omega + 2\Delta\Lambda\cos\omega\pi\delta\epsilon + \Gamma(\Delta\cos\omega + \Lambda\sin\omega)\sin\pi\delta\epsilon - \Gamma(\Delta\sin\omega - \Gamma\cos\omega)\delta\pi.$$

$$\Lambda\delta\Delta + \Delta\delta\Lambda = (\Lambda^2 - \Delta^2)\delta\omega + (\Lambda^2 - \Delta^2)\cos\omega\pi\delta\epsilon + \Gamma(\Lambda\cos\omega - \Delta\sin\omega)\sin\pi\delta\epsilon - \Gamma(\Lambda\sin\omega + \Delta\cos\omega)\delta\pi.$$

Donc si l'on fait, pour abrégér,

$$\int \frac{\omega\delta R}{R^2} = \frac{3\rho^2}{\rho^2(1+\lambda)^{\frac{3}{2}}}(\Omega'\delta\omega + E'\delta\epsilon + \Pi'\delta\pi), \text{ on aura}$$

$$\Omega' = M\Delta\Lambda + \frac{1}{2}N(\Lambda^2 - \Delta^2).$$

$$E' = (-K + \frac{1}{2}H)\Gamma\cos\omega(v-\epsilon)\sin\pi + \frac{1}{2}M[2\Delta\Lambda\cos\omega\pi + \Gamma(\Delta\cos\omega + \Lambda\sin\omega)\sin\pi] + \frac{1}{2}N[(\Lambda^2 - \Delta^2)\cos\omega\pi + \Gamma(\Lambda\cos\omega - \Delta\sin\omega)\sin\pi]$$

$$\Pi' = (K - \frac{1}{2}H)\Gamma[\sin\omega(v-\epsilon)\cos\omega\pi - \lambda\sin\pi] - \frac{1}{2}M\Gamma[\Delta\sin\omega - \Lambda\cos\omega] - \frac{1}{2}N\Gamma[\Lambda\sin\omega + \Delta\cos\omega].$$

On remarquera que dans ces formules j'ai mis pour  $\Delta\cos\omega - \Lambda\sin\omega$  la valeur  $\cos\omega(v-\epsilon)$ , & pour  $\Delta\sin\omega + \Lambda\cos\omega$ ,  $\sin\omega(v-\epsilon)\cos\omega\pi - \lambda\sin\pi$ ; mais j'ai conservé dans les autres termes les lettres  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $\Lambda$ , tant pour rendre les expressions moins composées, que pour les raisons qu'on verra plus bas.

## XV.

On cherchera d'une manière semblable la valeur de  $\int \frac{\omega\delta R'}{R'^2}$ ; & pour cela il suffira de remarquer 1.<sup>o</sup> que dans l'expression de  $R'^2$  (art. XIII), on peut négliger les termes  $\rho\Gamma$ ,  $\rho\Delta$ ,  $\rho\Lambda$  vis-à-vis de  $\rho'\Gamma'$ ,  $\rho'\Delta'$ ,  $\rho'\Lambda'$ , parce que le rayon  $\rho'$  de l'orbire du soleil est incomparablement plus grand que le rayon  $\rho$  de l'orbite de la Lune. 2.<sup>o</sup> Que la valeur de

$R^2$  ne différera, après cela, de celle de  $R^2$ , qu'en ce qu'il y aura au lieu de  $\rho^2(1+\lambda^2)$ ,  $\rho^2+2\rho'\rho\cos.(v'-v)+\rho^2(1+\lambda^2)$ , quantité qu'on peut réduire par la même raison à  $\rho'^2$ ; & au lieu des  $\Gamma, \Delta, \Lambda, \rho, \& \lambda$ ;  $\Gamma', \Delta', \Lambda', \rho'$  & zéro: d'où il s'enfuit que si l'on fait pareillement

$$\int \frac{\omega \delta R'}{K^2} = -\frac{3\rho'^2}{\rho^2} (\Omega'' \delta \omega + E'' \delta \varepsilon + \Pi'' \delta \pi), \text{ on trouvera aussi}$$

$$\Omega'' = M \Delta' \Lambda' + \frac{1}{2} N (\Lambda'^2 - \Delta'^2)$$

$$E'' = (K - \frac{1}{2} H) \Gamma' \cos.(v - \varepsilon) \sin.\pi + \frac{1}{2} M [2 \Delta' \Lambda' \cos.\pi + \Gamma' (\Delta' \cos.\omega - \Lambda' \sin.\omega) \sin.\pi] + \frac{1}{2} N [(\Lambda'^2 - \Delta'^2) \cos.\pi + \Gamma' (\Lambda' \cos.\omega - \Delta' \sin.\omega) \sin.\pi].$$

$$\Pi'' = (K - \frac{1}{2} H) \Gamma' \times \sin.(v' - \varepsilon) \cos.\pi - \frac{1}{2} M \Gamma' [\Delta' \sin.\omega - \Lambda' \cos.\omega] - \frac{1}{2} N \Gamma' [\Lambda' \sin.\omega + \Delta' \cos.\omega].$$

X V I.

*Remarque.* La valeur de  $R$  de l'art. XIII nous fournit un moyen commode & simple de trouver la position du centre apparent de la Lune par rapport à son équateur & à son premier méridien. Car comme la quantité  $R$  exprime la distance de chaque point  $\alpha$  de la Lune au centre de la Terre, il est évident qu'elle sera la plus petite, lorsque le rayon  $r$  fera dans la ligne qui joint les centres de la Lune & de la Terre, c'est-à-dire qui passe par le centre apparent de la Lune: donc si on fait

La distance du centre apparent de la Lune au plan de l'équateur Lunaire . . . . .  $\downarrow$

La distance du méridien qui passe par le centre apparent au premier méridien . . . . .  $\theta$

Il n'y aura qu'à mettre, dans l'expression de  $R$ ,  $\downarrow$  au lieu de  $P$ , &  $\theta$  au lieu de  $Q$ ; & faire ensuite sa différentielle égale à zéro, en regardant  $\downarrow$  &  $\theta$  comme variables; ce qui donnera

$-2pr(\Gamma \cos.\psi - \Delta \cos.\theta \sin.\psi - \Lambda \sin.\theta \sin.\psi) d\psi + 2pr(\Delta \cos.\psi \sin.\theta - \Lambda \cos.\psi \cos.\theta) d\theta = 0$  ; d'où l'on tire séparément les deux équations  $\Gamma \cos.\psi - \Delta \cos.\theta \sin.\psi - \Lambda \sin.\theta \sin.\psi = 0$  ;  $\Delta \cos.\psi \sin.\theta - \Lambda \cos.\psi \cos.\theta = 0$  ; la dernière donne d'abord

$$\frac{\cos.\theta}{\sin.\theta} = \frac{\Lambda}{\Delta} ; \text{ d'où } \sin.\theta = \frac{\Lambda}{\sqrt{(\Lambda^2 + \Delta^2)}} \text{ \& } \cos.\theta = \frac{\Delta}{\sqrt{(\Lambda^2 + \Delta^2)}} ; \text{ ensuite}$$

la première nous donnera  $\frac{\sin.\psi}{\cos.\psi} = \frac{\Gamma}{\Delta \cos.\theta + \Lambda \sin.\theta} =$  ( en substituant pour  $\sin.\theta$  &  $\cos.\theta$  les valeurs qu'on vient de trouver )

$$\frac{\Gamma}{\sqrt{(\Delta^2 + \Lambda^2)}} ; \text{ d'où l'on tire } \sin.\psi = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\Gamma^2 + \Delta^2 + \Lambda^2)}} ; \text{ \&}$$

$$\cos.\psi = \frac{\sqrt{(\Delta^2 + \Lambda^2)}}{\sqrt{(\Gamma^2 + \Delta^2 + \Lambda^2)}} ; \text{ mais on a par les valeurs de } \Gamma, \Delta, \Lambda ;$$

art. XIII (M),  $\Gamma^2 + \Delta^2 + \Lambda^2 = 1 + \lambda^2$  ; donc substituant cette

$$\text{valeur, on aura } \Gamma = \sin.\psi \sqrt{1 + \lambda^2} ; \sqrt{(\Delta^2 + \Lambda^2)} = \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2} ;$$

$$\text{\& par-là } \Delta = \cos.\theta \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2} ; \Lambda = \sin.\theta \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2} .$$

Ainsi l'on aura les valeurs de  $\Gamma, \Delta, \Lambda$ , exprimées par les angles  $\theta$  &  $\psi$ , & *vice-versâ* on aura ces angles exprimés par les quantités  $\Gamma, \Delta, \Lambda$  ; c'est-à-dire par les angles  $\omega, \varepsilon, \pi$  &  $v$ .

On trouvera de la même manière, en changeant simplement  $\Gamma, \Delta, \Lambda$ , en  $\Gamma', \Delta', \Lambda'$ , & faisant  $\lambda = 0$ , les angles  $\theta'$  &  $\psi'$  qui donnent le centre apparent de la Lune vue du Soleil, c'est-à-dire du centre de l'hémisphère éclairé ; & combinant ces angles avec les angles  $\theta$  &  $\psi$ , il sera aisé de déterminer généralement les phases de cette Planète.

## X V I I.

**COROLLAIRE GÉNÉRAL.** Il faut maintenant substituer dans l'équation (A) les valeurs que nous avons trouvées (art. IX, XIV & XV) ; ce qui la changera en celle-ci

$$\left( \Omega - \frac{3T}{r^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Omega' - \frac{3S}{r^3} \times \Omega'' \right) d\omega + \left( E - \frac{3T}{r^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times E' - \frac{3S}{r^3} \times E'' \right) d\varepsilon$$

+  $\left( \Pi - \frac{3T}{\rho^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Pi' - \frac{3S}{\rho^3} \times \Pi'' \right) \delta\pi = 0$ ; laquelle devant être vraie, quelles que soient les valeurs des différentielles  $\delta\omega, \delta\varepsilon, \delta\pi$  (art. III & IV), nous fournit les trois suivantes.

$$\Omega - \frac{3T}{\rho^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Omega' - \frac{3S}{\rho^3} \times \Omega'' = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$E - \frac{3T}{\rho^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times E' - \frac{3S}{\rho^3} \times E'' = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\Pi - \frac{3T}{\rho^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Pi' - \frac{3S}{\rho^3} \times \Pi'' = 0 \dots\dots\dots (3).$$

La première de ces équations servira à déterminer les loix de la rotation de la Lune autour de son axe; la seconde à déterminer la nutation, & la troisième à déterminer la précession.

X V I I I.

**SCHOLIE.** Les équations (1), (2), (3), que nous venons de trouver répondent exactement aux équations (G), (H), (K) données par M. d'Alembert, dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1754, pag. 424, 425, pour la précession des équinoxes & la nutation de l'axe de la Terre, en vertu de l'action du Soleil & de la Lune.

Pour en faire la comparaison, on remarquera

- 1.<sup>o</sup> Que les angles  $P, \varepsilon, \pi$ , dans les formules de M. d'Alembert, répondent dans les nôtres aux complémens des angles  $\omega, \varepsilon, \pi$ .
- 2.<sup>o</sup> Que les lignes  $f$  &  $a-b$  dans celles-là, ont dans celle-ci pour valeurs  $r \cos. P$  &  $r \sin. P$ ; & que les angles  $X''$  font la même chose que les complémens des angles  $Q'$ .
- 3.<sup>o</sup> Que les angles  $V', X', V, X$  répondent aux complémens des angles  $\psi - 180^\circ, Q - \theta, \psi - 180^\circ, Q - \theta'$ .
- 4.<sup>o</sup> Que les angles  $v',$  &  $v$  répondent ici aux angles  $v - (\varepsilon + 270^\circ), v' - (\varepsilon + 270^\circ)$ .

Enfin on mettra dans les formules citées  $T$  au lieu de  $L$ , &  $\rho, \rho'$  &  $-\lambda$ , au lieu de  $u', u$ , &  $\rho'$ .

## X I X.

*Résolution de l'Équation*

$$\Omega - \frac{3T}{\rho^2(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \times \Omega' - \frac{3S}{\rho^2} \times \Omega'' = 0 \dots \dots (1).$$

J'observerai d'abord qu'en regardant la Lune comme peu différente d'un globe, ainsi qu'elle l'est en effet, les quantités  $M, N$  sont incomparablement plus petites que les quantités  $H, K$  (art. XI); d'où il suit que dans l'expression de  $\Omega$  (art. IX), on peut négliger les termes qui renferment  $M$  &  $N$  vis-à-vis de ceux qui renferment  $H$ ;

ce qui la réduit à  $\frac{d(d\omega + \text{cof.}\pi d\epsilon)}{dt^2} \times H$ . J'observe ensuite qu'au lieu de l'angle  $\omega$ , qui représente le mouvement de rotation de la Lune, il est beaucoup plus commode d'employer l'angle  $\theta$  (art. XVI), lequel est toujours nécessairement très-petit, à cause que la Lune montre toujours à-peu-près la même face à la Terre. Or pour trouver la valeur de  $\omega$  en  $\theta$ , on aura recours aux formules de l'article cité,

& l'on remarquera 1.<sup>o</sup> que  $\Delta \sin. \omega + \Lambda \text{cof.} \omega = \sqrt{1+\lambda^2} \text{cof.} \downarrow (\text{cof.} \theta \sin. \omega + \sin. \theta \text{cof.} \omega) = \sqrt{1+\lambda^2} \text{cof.} \downarrow \sin. (\omega + \theta)$ ; & que de même  $\Delta \text{cof.} \omega - \Lambda \sin. \omega = \sqrt{1+\lambda^2} \text{cof.} \downarrow \text{cof.} (\omega + \theta)$ .

2.<sup>o</sup> Que  $\Delta \sin. \omega + \Lambda \text{cof.} \omega =$  (en substituant pour  $\Delta$  & pour  $\Lambda$  leurs valeurs, art. XIV, (M))  $\sin. (v - \epsilon) \text{cof.} \pi - \lambda \sin. \pi$ ; & que  $\Delta \text{cof.} \omega - \Lambda \sin. \omega =$  (par les mêmes substitutions)

$\text{cof.} (v - \epsilon)$ ; d'où il s'ensuit que l'on aura  $\frac{\sin. (\omega + \theta)}{\text{cof.} (\omega + \theta)} = \frac{\sin. (v - \epsilon) \text{cof.} \pi - \lambda \sin. \pi}{\text{cof.} (v - \epsilon)}$ , ou bien  $\text{tang.} (\omega + \theta) = \text{tang.} (v - \epsilon) \text{cof.} \pi - \lambda \sin. \pi \sec. (v - \epsilon) = \text{tang.} (v - \epsilon) - 2 \sin. (\frac{\pi}{2})^2 \text{tang.} (v - \epsilon) -$



$\lambda \sin. \pi \sec. (\nu - \varepsilon)$ , parce que  $\sin. (\frac{\pi}{2})^2 =$  (comme l'on fait)

$\frac{1 - \cos. \pi}{2}$ . 3.° Que la quantité  $\lambda$ , qui dénote la tangente de la latitude de la Lune (art. XIII) est toujours une quantité assez petite, puisque sa plus grande valeur est d'environ *tang.* 5° 9'. 4.° Que l'angle  $\pi$  qui représente l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique (art. V) est aussi très-petit ; car suivant les observations de M. Cassini, on a  $\pi = 2^\circ 30'$ , & suivant celles de M. Mayer, on a seulement  $\pi = 1^\circ 19'$ . D'où il s'ensuit qu'on aura à-très-peu-près *tang.*  $(\omega + \theta) = \text{tang.} (\nu - \varepsilon)$ , & par conséquent  $\omega + \theta = \nu - \varepsilon$ , ou, si on veut faire le calcul plus exactement, en ne négligeant que les quantités de l'ordre  $\sin. \pi^4$ , & de

$$\lambda^2 \sin. \pi^2, \omega + \theta = \nu - \varepsilon - \frac{2 \sin. \frac{\pi^2}{2} \text{tang.} (\nu - \varepsilon)}{1 + \text{tang.} (\nu - \varepsilon)^2} - \frac{\lambda \sin. \pi \sec. (\nu - \varepsilon)}{1 + \text{tang.} (\nu - \varepsilon)^2} = \nu - \varepsilon - \sin. (\frac{\pi}{2})^2 \sin. (2\nu - 2\varepsilon) - \lambda \sin. \pi \cos. (\nu - \varepsilon).$$

Mais nous nous contenterons ici de prendre simplement  $\nu - \varepsilon$  pour la valeur de  $\omega + \theta$ , ce qui nous donnera  $\omega = \nu - \varepsilon - \theta$ ;  $d\omega = d\nu - d\varepsilon - d\theta$ ; &  $d\omega + \cos. \pi d\varepsilon = d\nu - (1 - \cos. \pi) d\varepsilon - d\theta = d\nu - 2 \sin. \frac{\pi^2}{2} d\varepsilon - d\theta =$  (en négligeant, comme on vient de le faire, les termes de l'orde de  $\overline{\sin. \frac{\pi^2}{2}} d\nu - d\theta$ . Faisant donc cette substitution dans la valeur de  $\Omega$  ci-dessus, on aura  $\Omega = \frac{d^2 \nu - d^2 \theta}{dt^2} \times H$ .

Soit maintenant  $V$  le mouvement moyen de la Lune autour de la Terre, en regardant l'orbite de cette planète comme circulaire,  $\frac{dV^2}{dt^2} = \frac{T}{\rho^3 (1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$ , (il faudroit mettre à la vérité  $T + L$  au lieu de  $T$ ; mais la différence qui en résulte est trop petite pour qu'il soit nécessaire d'en tenir compte ici). Donc  $\frac{3T}{\rho^3 (1 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3dV^2}{dt^2} \times \frac{1 + \lambda^2}{1} =$  (en négligeant le carré de la quantité très-petite  $\lambda$ )  $\frac{3dV^2}{dt^2}$ .

On trouvera de même en nommant  $V'$  le mouvement moyen de la Terre autour du Soleil  $\frac{3S}{r^3} = \frac{3dV'^2}{dt^2}$ ; mais on remarquera que  $V' = \text{à-très-peu-près} \frac{V}{13\frac{1}{2}}$ , & par conséquent  $\frac{3dV'^2}{dt^2} = \text{environ} \frac{1}{180} \times \frac{3dV^2}{dt^2}$ ; d'où il s'enfuit qu'on peut négliger entièrement le terme  $\frac{3dV'^2}{dt^2} \times \Omega''$  venant de l'action du Soleil, vis-à-vis du terme  $\frac{3dV^2}{dt^2} \times \Omega'$  qui vient de l'action de la Terre, desorte que l'équation (1) deviendra simplemet, après avoir fait les substitutions précédentes, & divisé par  $\frac{dt^2}{H}$ ,  $-d^2\theta + d^2v - \frac{3dV^2}{H} \Omega' = 0 \dots \dots \dots (4)$ .

Or par l'art. XIV, on a  $\Omega' = M \Delta \Lambda + \frac{1}{2} N (\Lambda^2 - \Delta^2)$ ; & par l'art. XVI,  $\Delta = \text{cos}.\theta \text{cos}.\psi \sqrt{1+\lambda^2}$ ,  $\Lambda = \text{sin}.\theta \text{cos}.\psi \sqrt{1+\lambda^2}$ ; donc puisque  $\text{sin}.\theta \text{cos}.\psi = \frac{1}{2} \text{sin}.\ 2\theta$  &  $\text{sin}.\theta^2 - \text{cos}.\theta^2 = -\text{cos}.\ 2\theta$ , on aura  $\Omega' = \frac{1}{2} \text{cos}.\psi \sqrt{1+\lambda^2} (M \text{sin}.\ 2\theta - N \text{cos}.\ 2\theta)$ ; mais on a, par le même art. XVI,  $\text{sin}.\psi \sqrt{1+\lambda^2} = \Gamma = (\text{art. XIII}, (M)) \text{sin}.\ (v-\epsilon) \text{sin}.\ \pi + \lambda \text{cos}.\ \pi$ ; d'où l'on tire  $\text{cos}.\psi \sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{(1+\lambda^2 \text{sin}.\ \pi^2 - 2\lambda \text{sin}.\ \pi \text{cos}.\ \pi \text{sin}.\ (v-\epsilon) - \text{sin}.\ \pi^2 \text{sin}.\ (v-\epsilon)^2)}$   $= 1$ , en négligeant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les termes où se trouvent les quantités très petites  $\lambda$  &  $\text{sin}.\ \pi$  formant des produits de de deux ou de plusieurs dimensions.

De plus si on suppose, ce qui est permis, que le premier méridien de la Lune soit celui qui passe par la Terre, lorsque le lieu vrai de cette planète est égal à son lieu moyen, il est clair que l'angle  $\theta$  qui représente la distance du méridien, qui passe par le centre apparent de la Lune, à son premier méridien (XVI) sera toujours très-petit; car, suivant les observations de la libration, cet angle ne va guères au-delà de  $8^\circ$ ; par conséquent on aura à-très-peu-près

peu-près, & avec une exactitude suffisante pour notre objet,  $\sin. 2\theta = 2\theta$ , &  $\cos. 2\theta = 1$ . Donc enfin  $\Omega' = -\frac{1}{2}N + M\theta$ .

Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de  $d^2v$ ; pour cela, on remarquera que  $v - 180^\circ =$  à la longitude vraie de la Lune, (art. XIII); par conséquent, si on appelle  $m$  le rapport du mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune, à son mouvement moyen, & qu'on n'ait égard qu'à la première inégalité, on aura  $v - 180^\circ = \text{long. moy.} - a \sin mV$ ;  $a$  étant, suivant M. Clairaut,  $6^\circ 19'$ , &  $m$  un nombre très-peu différent de l'unité; d'où l'on tire

$$d^2v = m^2 a \sin. mV dV^2.$$

Faisant donc ces substitutions dans l'équation (4) ci-dessus, on la changera en celle-ci :

$$-d^2\theta - \frac{3M}{H}\theta dV^2 + \frac{3N}{2H}dV^2 + m^2 a \sin. mV dV^2 = 0, \text{ d'où l'on aura, par les méthodes connues.}$$

$$\theta = \frac{N}{2M} \left[ 1 - \cos \left( V \sqrt{\frac{3M}{H}} \right) \right] + C \sin. \left( V \sqrt{\frac{3M}{H}} \right) - \frac{m^2 a}{m^2 - \frac{3M}{H}} \sin. mV. (5)$$

C est l'une des deux constantes indéterminées introduites par la double intégration; l'autre ayant été supposée telle que l'angle  $\theta$  soit nul lorsque  $V = 0$ , c'est-à-dire lorsque le lieu vrai de la Lune est le même que son lieu moyen.

De-là il est facile de voir que si on veut tenir compte des autres inégalités du mouvement vrai de la Lune, & qu'on suppose pour cela

$$v - 180^\circ = \text{long. moy.} - a \sin. mV - b \sin. nV - c \sin. pV \text{ \&c.}$$

on trouvera pareillement

$$\theta = C \sin. \left( V \sqrt{\frac{3M}{H}} \right) + \frac{N}{2M} \times \left[ 1 - \cos \left( V \sqrt{\frac{3M}{H}} \right) \right]$$

$$- \frac{m^2 a}{m^2 - \frac{3M}{H}} \sin. mV - \frac{n^2 b}{n^2 - \frac{3M}{H}} \sin. nV \text{ \&c.}$$

## X X.

*Conséquences qui résultent de la formule précédente, par rapport à la libration de la Lune, & à sa rotation.*

Comme l'Équateur Lunaire n'est que très-peu incliné à l'écliptique, il est clair que l'angle  $\theta$  représentera, sans erreur sensible, la libration de la Lune en longitude; d'où l'on voit que cette libration différera un peu de celle qui a été supposée jusqu'à présent par les Astronomes. Pour en faire la comparaison avec plus de facilité, on mettra l'expression de  $\theta$  sous la forme suivante :

$$\theta = -a \sin. mV - b \sin. nV - \&c.$$

$$= -\frac{3M}{H} \times \frac{a}{m^2 - \frac{3M}{H}} \sin. mV - \frac{3M}{H} \times \frac{b}{n^2 - \frac{3M}{H}} \sin. nV - \&c.$$

$$+ C \sin. \left( V \sqrt{\frac{3M}{H}} \right) + \frac{N}{2M} \times \left[ 1 - \cos. \left( V \sqrt{\frac{3M}{H}} \right) \right].$$

& l'on remarquera qu'elle comprend, pour ainsi dire, trois sortes de librations.

La première est représentée par les termes  $-a \sin. mV - b \sin. nV$  &c. qui expriment la différence entre le mouvement vrai & le mouvement moyen de la Lune; ainsi cette libration est purement optique; & c'est la seule qu'on ait observée jusqu'ici.

La seconde est contenue dans les termes

$$= -\frac{3M}{H} \times \frac{a}{m^2 - \frac{3M}{H}} \sin. mV - \frac{3M}{H} \times \frac{b}{n^2 - \frac{3M}{H}} \sin. nV - \&c. : \& \text{ vient en}$$

partie de l'irrégularité du mouvement de la Lune, & en partie de la non-sphéricité de cette Planète; mais elle sera presque insensible, en supposant, comme on l'a fait

au commencement de l'article précédent,  $M$  incomparablement plus petite que  $H$ ; & cela doit en effet être ainsi; autrement il seroit impossible que les Astronomes ne s'en fussent pas encore aperçus.

La troisième enfin est celle qui est représentée par les termes  $C \sin. (V \sqrt{\frac{3M}{H}}) + \frac{N}{2M} \times [1 - \cos. (V \sqrt{\frac{3M}{H}})]$ , & qui ne dépend aucunement du mouvement de la Lune autour de la Terre; mais simplement de sa figure non sphérique. Elle sera la plus grande, lorsque  $\text{tang.} (V \sqrt{\frac{3M}{H}}) = \frac{2CM}{N}$ ; & alors sa valeur sera  $\frac{N + \sqrt{N^2 + 4C^2 M^2}}{2M}$ ; le signe

$+$  a lieu lorsque la libration se fait dans le sens de la rotation de la Lune, c'est-à-dire d'occident en orient par rapport au centre de la Lune, & d'orient en occident par rapport à la Terre; & le signe  $-$  est pour la libration du côté opposé; d'où l'on voit que ces deux librations ne seront jamais égales, excepté que  $N=0$ , auquel cas elles seront entièrement analogues aux oscillations d'un pendule simple de la longueur  $\frac{H}{3M}$ , qui décroît des arcs  $= 2C$ .

Au reste, soit que  $N=0$ , ou non, la durée d'une libration entière, composée d'une allée & d'un retour, sera toujours égale à la durée d'une oscillation totale du même pendule, ou bien, elle sera au tems périodique de

la Lune comme  $1 : \sqrt{\frac{3M}{H}}$ .

A l'égard de la rotation de la Lune, comme on a trouvé dans l'art. XIX,  $\omega + \theta =$ , à-très-peu-près,  $\nu - \epsilon$ , on aura, en substituant les valeurs de  $\nu$  & de  $\theta$ ,  $\omega = \text{long. moy.}$

$$\textcircled{C} + 180^\circ - \epsilon + \frac{3M}{H} \times \frac{a}{m^2 \frac{3M}{H}} \sin. mV + \frac{3M}{H} \times \frac{b}{n^2 \frac{3M}{H}} \sin. nV \&c.$$

$$- C \sin. (V \sqrt{\frac{3M}{H}}) - \frac{N}{2M} \times [1 + \cos. (V \sqrt{\frac{3M}{H}})].$$

D'où l'on voit

1.<sup>o</sup> Que la rotation moyenne de la Lune est égale à son mouvement moyen autour de la Terre, moins le mouvement moyen de ses points équinoxiaux; condition nécessaire pour que cette planète nous présente toujours à peu près la même face.

2.<sup>o</sup> Que la vitesse de la rotation vraie de la Lune est variable; cette vitesse étant à celle du mouvement moyen autour de la Terre dans le rapport de  $d\omega$  à  $dV$ , c'est-à-dire, de

$$1 - \frac{de}{dV} + \frac{3M}{H} \times \frac{ma}{m^2 - \frac{3M}{H}} \cos. mV + \frac{3M}{H} \times \frac{nb}{n^2 - \frac{3M}{H}} \cos. mV \&c.$$

$$- C \sqrt{\frac{3M}{H}} \times \cos. (V \sqrt{\frac{3M}{H}}) - \frac{N}{2M} \times \sqrt{\frac{3M}{H}} \times \sin. (V \sqrt{\frac{4M}{H}}),$$

à 1.

Ainsi faisant  $V=0$ , on a

$$2 - \frac{de}{dV} + \frac{3M}{H} \times \frac{ma}{m^2 - \frac{3M}{H}} + \frac{3M}{H} \times \frac{nb}{n^2 - \frac{3M}{H}} \&c. - C \sqrt{\frac{3M}{H}}, \text{ pour la}$$

valeur de la vitesse primitive de rotation, qui aura dû être imprimée à la Lune au commencement de son mouvement. Donc, à cause de l'indéterminée  $C$ , il est clair que cette vitesse aura pu être quelconque, pourvu qu'elle différât très-peu de 1, c'est-à-dire de la vitesse du mouvement moyen, & que d'ailleurs la valeur de  $M$  ne soit pas nulle; ni négative.

## X X I.

*Remarque.* Jusqu'ici les Astronomes avoient toujours supposé que la Lune tournoit autour de son centre d'un mouvement parfaitement uniforme; & ils avoient été obligés, en conséquence, pour sauver le phœnomène de la non-rotation apparente de cette Planète, d'imaginer qu'elle eût reçu d'abord une vitesse de rotation exactement égale à celle de son mouvement moyen autour de la Terre,

ou plutôt de celui de ses points équinoxiaux ; ce qui étoit néanmoins très difficile à comprendre. Il me semble que la théorie précédente fournit un dénouement tout simple de ce paradoxe, ou, pour mieux dire, ce paradoxe n'a point lieu dans la théorie que je viens de donner de la rotation de la Lune. Ainsi je puis à cet égard, me flatter d'avoir pleinement satisfait à la première partie de la question proposée par l'Académie.

X X I I.

SCHOLIE. Si on suppose la Lune homogène, & que sa figure soit celle d'un sphéroïde dont l'équateur & les méridiens seroient des ellipses, comme dans l'art. XII, on trouvera (art. XI & XII),  $H = \frac{4}{3}cF =$  (en faisant  $D = 1$ )  $\frac{4cf^2}{15}$ ,  $M = \frac{4cf^2eB'}{15}$ , &  $N = 0$  ; d'où l'on aura  $\frac{M}{N} = eB' =$  à l'ellipticité de l'équateur, c'est-à-dire à la quantité dont le demi axe de l'équateur, qui est à peu près dans la même ligne que le centre de la Terre surpasse l'autre demi axe ; cette quantité étant supposée divisée par le rayon de la Lune ; donc suivant l'art. XX, la Lune fera réellement autour de son axe, en vertu de l'action de la Terre, des oscillations exprimées par la formule  $C \sin. (V\sqrt{3eB'})$ .

Si on veut que l'allongement de la Lune vers la Terre ait été produit par l'action même de la Terre sur cette Planète supposée fluide ; alors on aura (art. XII)  $eB' = \frac{15f^3}{4f^3} \times \frac{T}{L}$ .

Pour évaluer cette expression, nous ferons, avec M. Clairaut,  $\frac{T}{L} = 67$  ; & avec M. de Lalande  $\frac{f}{r} = \frac{1}{11}$  ( $f$  est le rayon de la Terre) ; ensuite nous prendrons  $\rho = 60f'$ , ce qui donnera  $\frac{f}{\rho} = \frac{1}{11.60}$  ; de-là je trouve  $eB' = \frac{1}{100000000}$  ;

&  $\sqrt{3eB} = \frac{8414}{1000000}$ . Donc le tems d'une oscillation totale sera de  $\frac{1000000}{8414}$  mois périodiques = environ 3848 jours.

On peut regarder au reste tout ce que nous venons de dire sur la libration de la Lune comme un commentaire de la Prop. XXXVIII, liv. 3, *Princ. Math.*

### XXXIII.

#### Résolution de l'Équation

$$E - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \times E' - \frac{3S}{\rho^3} \times E'' = 0 \dots (2).$$

On aura d'abord, en négligeant dans la valeur de E (art. IX) les termes qui renferment les quantités très-petites

$M, N,$  &  $K - \frac{1}{2} \dot{H}$ ,  $E = \frac{d(\cos.\pi d\omega + d\epsilon)}{dt^2} \times H$ ; expression qu'on

peut mettre sous cette forme  $\frac{\cos.\pi d(\cos.d\omega + \cos.\pi d\epsilon)}{dt^2} \times H$

$-\frac{\sin.\pi d\omega d\omega}{dt^2} \times H + \frac{\sin.\pi^2 d^2\epsilon + \sin.\pi \cos.\omega d\pi d\epsilon}{dt^2} \times H$ , ou simplement

à cause de  $\sin.\pi$  très-petit, & de  $d\pi$ , &  $d\epsilon$  très-petits aussi par rapport à  $d\omega$ , comme on le verra dans la suite,

$\frac{\cos.\pi d(d\omega + \cos.\pi d\epsilon)}{dt^2} \times H - \frac{\sin.\pi d\pi d\omega}{dt^2} \times H$ ; c'est-à-dire, (art. XIX)

$$E = \Omega \cos.\pi - \frac{\sin.\pi d\pi d\omega}{dt^2} \times H.$$

En second lieu, on aura (art. XIV)  $E' = -(K - \frac{1}{2} H)$

$\Gamma \cos.(v - \epsilon) \sin.\pi + M \Delta \Lambda \sin.\pi + \frac{1}{2} M \Gamma (\Delta \cos.\omega + \Lambda \sin.\omega) \sin.\pi$

$+ \frac{1}{2} N (\Lambda^2 - \Delta^2) \cos.\pi + \frac{1}{2} N \Gamma (\Lambda \cos.\omega - \Delta \sin.\omega) \sin.\pi$ ; c'est-à-

dire, en substituant pour  $\Delta$  & pour  $\Lambda$ , les expressions

$\cos.\theta \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2}$ , (art. XIV), & mettant  $\Omega'$  à la place de

$M \Delta \Lambda + \frac{1}{2} N (\Lambda^2 - \Delta^2)$ , art. XIV,  $E' = \Omega' \cos.\pi + \Gamma \sin.\pi$

$(\frac{1}{2} H - K \times \cos.(v - \epsilon) + \frac{1}{2} M \cos.\psi \sqrt{1 + \lambda^2} \cos.(\omega - \theta) - \frac{1}{2} N \cos.\psi$

$\sqrt{1 + \lambda^2} \sin.(\omega - \theta))$ .



On mettra ici, comme dans l'art. XIX, 1 au lieu de  $\cos. \sqrt{1+\lambda^2}$  &  $v-\varepsilon-\theta$  au lieu de  $\omega$ , c'est-à-dire  $v-\varepsilon-2\theta$  au lieu de  $\omega-\vartheta$ , ou bien simplement  $v-\varepsilon$ , à cause que l'angle  $\theta$  est toujours très-petit, & l'on aura :

$$E^1 = \Omega^1 \cos.\pi + \Gamma \sin.\pi \left( \frac{1}{2}H - K + \frac{1}{2}M \times \cos.(v-\varepsilon) - \frac{1}{2}N \sin.(v-\varepsilon) \right).$$

On substituera donc ces valeurs dans l'équation proposée (2), & ôtant ce qui se détruit en vertu de l'équation

(1), on aura, après avoir mis  $\frac{3dV^2}{dt^2}$  au lieu de  $\frac{3T}{p^3 \cdot 1 + \lambda \cdot \frac{1}{2}}$  &

effacé les termes qui contiennent  $\frac{3S}{p^3}$  comme dans l'art.

XIX, l'équation

$$-d\pi d\omega - \frac{3(H-2K+M)}{2H} \Gamma \cos.(v-\varepsilon) dV^2 + \frac{3N}{2H} \Gamma \sin.(v-\varepsilon) dV^2 = 0 \dots (6).$$

Or  $\Gamma = \sin.(v-\varepsilon) \sin.\pi + \lambda \cos.\pi$  (art. XIII) &  $\lambda = i \sin.(v-\zeta)$ , article cité ; donc  $\Gamma \cos.(v-\varepsilon) = \frac{1}{2} \sin.(2v-2\varepsilon) \sin.\pi - \frac{1}{2} i \cos.(2v-\varepsilon-\zeta) \cos.\pi + \frac{1}{2} i \cos.(\zeta-\varepsilon) \cos.\pi$ . De plus  $v = v-\varepsilon-\theta$ , &  $d\omega = dv - d\varepsilon - d\theta = \lambda$  très-peu-près,  $dV(1+\mu)$ ,  $\mu$  étant le rapport de la précession moyenne des points équinoxiaux lunaires au mouvement moyen  $V$  ; en faisant ces substitutions, on remarquera que les termes qui renferment les angles  $\zeta-\varepsilon$  deviendront, par l'intégration, beaucoup plus grands que les autres. parce qu'ils auront alors pour diviseur la quantité très-petite  $\mu-p$ ,  $p$  exprimant le rapport du mouvement rétrograde moyen des nœuds de la Lune, à son mouvement moyen  $V$  ; donc n'ayant égard qu'aux termes dont nous parlons, on changera l'équation (6) en celle-ci

$$d\pi = - \frac{3(H-2K+M) i \cos.\pi}{4(1+\mu)H} \sin.(\zeta-\varepsilon) dV + \frac{3N i \cos.\pi}{4(1+\mu)H} \cos.(\zeta-\varepsilon) dV + \frac{3N \sin.\pi}{4(1+\mu)H} dV. \dots \dots \dots (7).$$

D'où l'on tire, en prenant  $\varpi$  pour la valeur moyenne de  $\pi$ ,

$$\pi = \omega + \frac{3(H-2K+M) i \operatorname{cof} . \omega}{4(1+\mu)(\mu-p)H} \operatorname{cof} . (\zeta - \varepsilon) + \frac{3Ni \operatorname{cof} . \omega}{4(1+\mu)(\mu-p)H} \sin . (\zeta - \varepsilon) + \frac{4^{1+\mu} H}{3N \operatorname{fin} . \omega} V \dots \dots \dots (8).$$

Et en supposant que  $\pi'$ ,  $\zeta'$ ,  $\varepsilon'$  soient les valeurs de  $\pi$ ,  $\zeta$ ,  $\varepsilon$ , lorsque  $V=0$ , on aura

$$\omega = \pi' - \frac{3(H-2K+M) i \operatorname{cof} . \omega}{4(1+\mu)(\mu-p)H} \operatorname{cof} . (\zeta' - \varepsilon') - \frac{3Ni \operatorname{cof} . \omega}{4(1+\mu)(\mu-p)H} \sin . (\zeta' - \varepsilon').$$

### X X I V.

#### *Résolution de l'Équation*

$$\Pi - \frac{3T}{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \times \Pi' - \frac{3S}{\rho^{1/2}} \times \Pi'' = 0 \dots \dots (3)'$$

1.° La valeur de  $\Pi$  est, par l'article IX, (en négligeant les termes multipliés par les constantes très-petites  $M$ ,  $N$ ,  $\frac{1}{2}H-K$ )  $\frac{\operatorname{fin} . \pi \, d\omega \, d\varepsilon}{dt^2} \times H + \frac{d^2 \pi}{dt^2} \times (\frac{1}{2}H+K)$ .

2.° La valeur de  $\Pi'$  est<sup>1</sup>, par l'article XIV, (en mettant au lieu de  $\Delta \operatorname{fin} . \omega - \Lambda \operatorname{cof} . \omega$ ,  $\operatorname{fin} . (v-\varepsilon)$ , & au lieu de  $\Lambda \operatorname{fin} . \omega + \Delta \operatorname{cof} . \omega$ ,  $\operatorname{cof} . (v-\varepsilon)$ , comme dans l'article précédent, & négligeant de plus la quantité infiniment petite du second ordre  $\lambda \operatorname{fin} . \pi$ , comme on l'a fait toujours)  $((K-\frac{1}{2}H) \operatorname{cof} . \pi - \frac{1}{2}M) \Gamma \operatorname{fin} . (v-\varepsilon) - \frac{1}{2}N \Gamma \operatorname{cof} . (v-\varepsilon)$ .

3.° On mettra, comme dans l'article précédent au lieu  $\Gamma \operatorname{fin} . (v-\varepsilon)$ ,  $\frac{1}{2} \operatorname{fin} . \pi + \frac{1}{2} i \operatorname{cof} . (\zeta - \varepsilon) \operatorname{cof} . \pi$ , au lieu de  $\Gamma \operatorname{cof} . (v-\varepsilon)$ ,  $\frac{1}{2} i \operatorname{fin} . (\zeta - \varepsilon) \operatorname{cof} . \pi$ , au lieu de  $d\omega$ ,  $(1+\mu)dV$ , & au lieu de  $\frac{\rho^3(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{3T}$ ,  $\frac{3dV^2}{dt^2}$ ; on effacera le terme  $\frac{3S}{\rho^{1/2}} \times \Pi'$ , par les raisons alléguées, article XIX, & divisant toute l'équation (3) par  $\frac{\operatorname{fin} . \pi \, d\omega}{dt^2} \times H$ , on aura

$$d\varepsilon =$$

$$d\epsilon = \frac{H+2K}{2H(1+\mu)} \times \frac{d\pi}{\sin.\pi} + 3 \frac{(2K-H)\cos\pi-M}{4(1+\mu)H} dV$$

$$+ 3 \frac{(2K-H)\cos\pi-M}{4(1+\mu)H} \times \frac{\cos.\pi}{\sin.\pi} \times i \cos.(\zeta-\epsilon) dV - 3 \frac{N i \cos.\pi}{4(1+\mu)H \sin.\pi} \sin.(\zeta-\epsilon) dV.$$

Ce qui donne en intégrant, après avoir mis  $\varpi$  au lieu de  $\pi$ ,

$$\epsilon = \eta - \frac{H+2K}{2(1+\mu)H} \times \frac{d\pi}{\sin.\pi} + 3 \frac{(2K-H)\cos\pi-M}{4(1+\mu)H} V$$

$$+ 3 \frac{(2K-H)\cos\pi-M}{4(1+\mu)(\mu-p)H} \times \frac{\cos.\pi}{\sin.\pi} \times i \sin.(\zeta-\epsilon) + 3 \frac{N i \cos.\pi}{4(1+\mu)(\mu-p)H \sin.\pi} \cos.(\zeta-\epsilon).$$

$$\eta \text{ étant } = \epsilon' - 3 \frac{(2K-H)\cos.\pi-M}{3(1+\mu)(\mu-p)H} \times \frac{\cos.\pi}{\sin.\pi} i \sin.(\zeta'-\epsilon')$$

$$- 3 \frac{4(1+\mu)(\mu-p)H \sin.\pi}{N i \cos.\pi} \cos.(\zeta'-\epsilon').$$

On remarquera que la valeur de  $\frac{d\pi}{dV}$  peut être négligée, parce qu'elle ne contiendra plus le diviseur  $\mu-p$  qui se trouve dans les autres termes.

XXV.

*Conséquences qui résultent des formules précédentes (8), (9), par rapport à la précession des équinoxes & à la nutation de l'axe de la Lune.*

Si on fait, ce qui est permis,  $H-2K+M=b \cos.g$ , &  $N=b \sin.g$ ; savoir  $b=\sqrt{(H-2K+M^2+N^2)}$  &  $\text{tang.g} = \frac{N}{H-2K+M}$ , & qu'on mette 1 au lieu de  $\cos.\pi$ , on aura, en négligeant  $\mu$  vis-à-vis de 1,

$$\pi = \varpi + \frac{3hi}{4(\mu-p)H} \cos.(\zeta-\epsilon-g) + \frac{3N \sin.\pi}{4H} V$$

$$\varepsilon = \eta - \frac{3(H-2K+M)}{4H} V - \frac{3hi}{4(\mu-p)\sin.\varpi H} \sin.(\zeta - \varepsilon - g).$$

D'où l'on voit 1.<sup>o</sup> que si  $N$  n'est pas  $= 0$ , l'inclinaison de l'Équateur sera sujette à une diminution ou augmentation constante selon que  $N$  sera positive ou négative.

2.<sup>o</sup> Que la valeur de  $\mu$ , c'est à-dire la précession moyenne des équinoxes sera  $\frac{3(H-2K+M)}{4H}$ .

3.<sup>o</sup> Que le pole de l'équateur de la Lune décrira, pendant une révolution des nœuds de l'orbite par rapport aux nœuds de l'Équateur, un petit cercle dont le rayon sera  $\frac{3hi}{4(p-\mu)H}$ .

Mais si  $\mu = p$ , c'est-à-dire si le mouvement des points équinoxiaux de la Lune est égal au mouvement des nœuds de l'orbite, comme l'a trouvé M. Cassini; les formules précédentes ne serviront plus, mais il faudra mettre d'abord au lieu de  $\varpi$  la valeur  $\pi' - \frac{3hi}{3(\mu-p)H} \cos.(\zeta' - \varepsilon' - g)$ ; & au

lieu de  $\eta$  la valeur  $\varepsilon' + \frac{3hi}{4(\mu-p)\sin.\varpi H} \sin.(\zeta' - \varepsilon' - g)$ ; on mettra ensuite au lieu de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon' + \mu V$ , & au lieu de  $\zeta$ ,  $\zeta' - pV$ ; après quoi, regardant  $(\mu - p)V$  comme une quantité infiniment petite, on aura

$\cos.(\zeta - \varepsilon - g) = \cos.(\zeta' - \varepsilon' - g) - (\mu - p)V \sin.(\zeta' - \varepsilon' - g)$ ; &  $\sin.(\zeta - \varepsilon - g) = \sin.(\zeta' - \varepsilon' - g) + (\mu - p)V \cos.(\zeta' - \varepsilon' - g)$ ; & les valeurs de  $\varepsilon$  & de  $\pi$  deviendront les suivantes

$$\pi = \pi' + \left( \frac{3N \sin.\varpi}{4H} - \frac{3hi}{4H} \sin.(\zeta' - \varepsilon' - g) \right) V.$$

$$\varepsilon = \varepsilon' - \left( \frac{3(H-2K+M)}{4H} + \frac{4hi}{4 \sin.\varpi H} \cos.(\zeta' - \varepsilon' - g) \right) V.$$

D'où il s'ensuit que  $\mu = \frac{3(H-2K+M)}{4H} + \frac{3hi}{4 \sin.\varpi H}$

$\cos.(\zeta' - \epsilon - g)$  ; & qu'il n'y aura plus de nutation sensible dans l'axe de la Lune.

X X V I.

*Remarque.* Il est bon de remarquer que, si on vouloit appliquer à la Terre regardée comme un sphéroïde quelconque les formules (8) & (9), il faudroit effacer par-tout les lettres  $M$  &  $N$ ; la raison de cela est que l'angle  $\theta$  n'étant plus alors très-petit par rapport à  $v$ , il ne seroit plus permis de mettre, comme nous l'avons fait,  $\sin.(v - \epsilon)$  ; &  $\cos.(v - \epsilon)$  au lieu de  $\Delta \sin.\omega - \Lambda \cos.\omega$ , & de  $\Lambda \sin.\omega + \Delta \cos.\omega$  dans les expressions de  $E'$  & de  $\Pi'$  ; mais il faudroit substituer pour  $\Lambda$  & pour  $\Delta$  leurs valeurs (art. XIII, (M)) ; cependant comme les termes venant de ces substitutions seroient tous multipliés par  $\sin.2\omega$ , ou  $\cos.2\omega$ , & que  $\omega$  seroit dans ce cas beaucoup plus grand que  $V$ , étant à-très-peu près dans le rapport de 27 à 1 ; il est clair que ces termes pourroient être négligés entièrement comme devant être, après l'intégration, considérablement plus petits que les autres. M. d'Alembert a fait le premier cette importante observation, sans laquelle il eût été comme impossible de résoudre le problème de la précession des équinoxes dans la Terre considérée comme une sphéroïde à méridiens dissemblables ; mais elle n'a plus lieu à l'égard de la Lune, dans laquelle  $\omega =$  à-peu près  $V$  ; & c'est ce qui fait que nos résultats diffèrent un peu de ceux de ce grand Géomètre, comme on va le voir.

X X V I I.

SCHOLIE I. En supposant la Lune homogène, & de figure elliptique, comme dans l'article XXII, on aura

$$H = \frac{4cf^3}{15}, M = \frac{4cf^3}{15} e B', N = 0, \text{ \& } K = \frac{1}{2} H = \frac{4cf^3}{15} (e A'$$

F ij

+  $\frac{1}{2}eB'$ ), article XII; donc, article XXV,  $g=0$ ;

$$L = H - 2K + M = \frac{0c'}{15}(eA' + eB'), \text{ \& } \frac{I}{H} = 2eA' + 2eB';$$

$$\text{donc, } \pi = \omega + \frac{3^i(eA' + eB')}{2(\mu - p)} \cos(\zeta - \varepsilon),$$

$$e = \eta - \mu V - \frac{3^i(eA' + eB')}{2(\mu - p)\sin\omega} \sin(\zeta - \varepsilon), \text{ \& } \mu = \frac{2e(A' + B')}{2}.$$

Où l'on remarquera que  $eA' + eB'$  représente l'ellipticité du premier méridien, c'est à dire l'allongement de la Lune (dans le sens de la ligne qui joint le centre de la Lune & de la Terre à-très-peu-près), par rapport au demi-axe de la Lune; & que par conséquent le mouvement de l'axe de cette Planète dépend en ce cas uniquement de la quantité de cet allongement.

Par la théorie de la figure de la Lune, on a, art. XII,

$$eB' = \frac{15f^3 T}{4p^3 L} = \frac{1536}{100000000} \text{ (art. XXII), \& } eA' = \frac{1}{4}\phi; \text{ or } \phi \text{ ex-}$$

prime le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur de la Lune; donc si on nomme  $\phi'$  ce même rapport sous l'équateur de la Terre,  $f'$  le rayon de la Terre,  $t$ ,  $t'$  les tems de la rotation de la Lune & de la Terre, on voit facilement qu'on aura

$$\phi : \phi' = \frac{f}{t^2} \times \frac{T}{f'} : \frac{f'}{t'^2} \times \frac{L}{f'}; \text{ ce qui donne } \phi = \frac{f^3}{f'^3} \times \frac{T}{L} \times \frac{t'^2}{t^2} \times \phi';$$

mettant au lieu de  $\phi'$ ,  $\frac{1}{288}$ ; au lieu de  $f'$ ,  $\frac{3}{11}$ ; au lieu de  $\frac{T}{L}$ ,

67; & au lieu de  $\frac{t'}{t}$ ,  $\frac{1}{27\frac{1}{3}}$ , je trouve  $\phi = \frac{6326}{1000000000}$ ; d'où

$$eA = \frac{79}{100000000} \text{ \& par conséquent } eA' + eB' = \frac{315}{100000000};$$

donc  $\mu = \frac{47}{100000000}$ , & multipliant ce nombre par  $360^0$ , on aura en secondes  $6''$  pour la précession moyenne des points équinoxiaux lunaires dans un mois périodique.

Pour avoir la nutation, il faut multiplier  $\mu$  par  $\frac{i}{\mu - p}$ , ou bien par  $\frac{i}{2}$  simplement, à cause de  $\mu$  extrêmement petit,

Or en prenant pour la tangente  $i$  de l'inclinaison de l'orbite lunaire, *tang.*  $5^{\circ}, 9'$ , & pour le rapport  $p$  du mouvement moyen des nœuds au mouvement périodique de la Lune  $\frac{1^{\circ}, 26', 43''}{360^{\circ}}$ , je trouve la nutation de l'axe  $= 3'$ ,  $39''$ ; & divisant ce nombre par  $\sin. \varpi$ , (en prenant pour  $\varpi$ ,  $2^{\circ}$ , valeur moyenne entre celles de M. Cassini & de M. Mayer) j'ai  $1^{\circ}, 44', 15''$  pour la plus grande équation de la précession.

Selon M. d'Alembert (Voyez le dernier Mémoire de ses Opuscules) la précession moyenne des équinoxes dans l'hypothèse présente est seulement de  $\frac{3eA' + \frac{1}{2}eB'}{2}$ ; & la nutation est aussi diminuée à proportion: c'est ce qui fait que nos résultats ne s'accordent point; mais j'ai donné ci-dessus, art. XVII, la raison de cette différence entre les formules de ce grand Géomètre & les miennes.

X X I X.

SCHOLIE II. Voyons maintenant quelle devrait être la valeur de  $eA' + eB'$ , pour que la précession moyenne des équinoxes lunaires fût égale au mouvement des nœuds de la Lune, dans ce cas on aura, (art. XXV),  $u = p =$

$$\frac{3(H - 2K + M)}{4H} + \frac{3hi}{4 \sin. \varpi H} \cos. (\zeta' - e' - g) = \frac{1}{2}(eA' + eB') \times (1 + \frac{i}{\sin. \varpi} \cos. (\zeta' - e'))$$

donc  $eA' + eB' = \frac{2p}{3(1 + \frac{i}{\sin. \varpi} \cos. (\zeta' - e'))}$ .

Donc si l'on veut, avec M. de Cassini, que le nœud descendant de l'équateur lunaire soit toujours au même point que le nœud ascendant de l'orbite de la Lune, on fera  $e' = \zeta'$ , & l'on aura  $eA' + eB' = \frac{2p}{3(1 + \frac{i}{\sin. \varpi})} = \frac{747}{1000000}$ ; & dans ce cas, il n'y aura plus de nutation sensible dans l'axe

## X X X.

SCHOLIE III. Au reste, quelle que soit la valeur de  $eA' + eB'$ : pourvû qu'elle surpasse  $\frac{747}{1000000}$ , je dis que le mouvement des équinoxes lunaires deviendra toujours, de lui-même égal au mouvement des nœuds de la Lune; car il est clair que l'on pourra toujours trouver un angle

$\zeta' - \epsilon'$  tel que l'on ait  $eA' + eB' = \frac{2p}{3(1 + \frac{i}{\mu n \cdot \pi} \cos(\zeta' - \epsilon'))}$ ; donc

lorsque les nœuds de l'équateur & de l'orbite, à force de s'éloigner, seront parvenus à la distance  $= \zeta' - \epsilon'$  entr'eux, le nœud de l'équateur recevra un mouvement égal à celui de l'orbite.

Il est vrai que l'inclinaison de l'axe sera sujette à une augmentation ou diminution constante, selon que  $\epsilon' > \zeta'$ , ou  $< \zeta'$ , en vertu de laquelle la valeur  $\sin. \pi$  changera un

peu, & l'équation  $eA' + eB' = \frac{2p}{3(1 + \frac{i}{\mu n \cdot \pi} \cos(\zeta' - \epsilon'))}$  cessera

d'être vraie; mais elle se rétablira ensuite par la variation de la distance  $\zeta' - \epsilon'$ . Peut-être pourroit-on démontrer, par ce raisonnement, que les nœuds de l'équateur lunaire devront enfin coïncider pour toujours avec ceux de l'orbite.

## X X X I.

SCHOLIE IV. Un moyen de déterminer si le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire est exactement égal à celui des nœuds de l'orbite, ce seroit d'observer pendant une longue suite de révolutions de la Lune, la quantité de sa plus grande libration en latitude. Car il est clair que cette libration peut être représentée sans erreur sensible par l'angle que nous avons nommé  $\psi$ , (article XVI), à cause que l'inclinaison de l'équateur à



l'écliptique est extrêmement petite; or  $\sin. \downarrow = \frac{r}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$ ,

art. cité,  $= \frac{\sin.(v-i)\sin.\pi + \lambda \cos.\pi}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$ , art. XIII, = (en mettant

pour  $\lambda$  la valeur  $i \sin.(v-\zeta)$ )  $\frac{\sin.(v-i)\sin.\pi + i \sin.(v-\zeta) \cos.\pi}{\sqrt{1+i^2 \sin.(v-\zeta)^2}}$ .

Donc si  $\zeta = \epsilon$ , on aura  $\sin. \downarrow = \frac{\sin.(v-\zeta)}{\sqrt{(1+i^2 \sin.(v-\zeta)^2)}} \times (\sin.\pi + i$

$\cos.\pi)$ , & comme  $v = \text{long. } \odot + 180$  (art. XIII), &  $\zeta = \text{long. } \Omega$ ,

lorsque la Lune fera dans ses plus grandes latitudes

boréales, on aura  $v - 180 - \zeta = 90$ , savoir  $v - \zeta = 270$ ,

&  $\sin.(v-\zeta) = -1$ ; on trouvera de même  $\sin.(v-\zeta) = 1$

pour les plus grandes latitudes méridionales; donc la

libration totale en latitude fera  $2 \frac{\sin.\pi + i \cos.\pi}{\sqrt{1+i^2}}$ , ce qui va

à  $\frac{1}{4}$  environ du rayon de la Lune. Soit maintenant  $\epsilon >$ ,

ou  $< \zeta$ , il est évident qu'après quelques révolutions de

la Lune, on devra avoir  $\epsilon = \zeta + 180^\circ$ ; & alors  $\sin. \downarrow$  sera

$= \frac{\sin.(v-\zeta)}{\sqrt{(1+i^2 \sin.(v-\zeta)^2)}} \times (-\sin.\pi + i \cos.\pi)$ ; & la libration totale

$= 2 \frac{-\sin.\pi + i \cos.\pi}{\sqrt{(1+i^2)}} = \frac{1}{9}$  seulement du rayon de la Lune.

X · X · X I · I.

SCHOLIE V. Je finirai ces recherches par exposer une méthode par laquelle, ayant trois observations d'une même tache de la Lune, on pourra connoître la position de l'équateur de cette Planète par rapport à l'écliptique. Soit (comme dans l'article XIII),  $v = 180^\circ$  la longitude du centre de la Lune, &  $\lambda$  sa latitude supposée australe;  $U = 180^\circ$  la longitude de la tache, &  $\lambda = b$  la tangente de sa latitude, dans une observation quelconque; il est

facile de voir, en conservant les suppositions & les noms de l'article II, que l'on aura

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} = \text{cof.}v; \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho} = \text{sin.}v; \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z}{\rho} = \lambda;$$

& de même

$$\frac{y-Y}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}} = \text{sin.}U; \quad \frac{z-Z}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}} = \lambda - l; \text{ or}$$

$x-X^2+y-Y^2 =$  à-très-peu-près  $x^2+y^2-2xX-2yY = \rho^2-2xX-2yY$ ; donc en négligeant les quarrés, & les puissances plus hautes de  $X, Y$ , aussi bien que leurs pro-

duits, on aura 
$$\frac{y-Y}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}} = \frac{y}{\rho} - \frac{Y}{\rho} + \frac{xyX}{\rho^2} + \frac{y^2Y}{\rho^2} =$$

(en mettant  $\text{sin.}v$  &  $\text{cof.}v$  au lieu de  $\frac{y}{\rho}, \frac{x}{\rho}$ ),  $\text{sin.}v + \text{cof.}v \frac{X \text{sin.}v - Y \text{cof.}v}{\rho}$ ; par conséquent si on fait  $\text{sin.}U = \text{sin.}v - S$ , on aura l'équation

$$(1) \dots \dots \frac{\rho S}{\text{cof.}v} = Y \text{cof.}v - X \text{sin.}v.$$

On trouvera de la même manière  $\frac{z-Z}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}} = \frac{z}{\rho} - \frac{Z}{\rho} + \frac{zX}{\rho^2} + \frac{zY}{\rho^2} = \lambda - \frac{Z}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho} \times (X \text{cof.}v + Y \text{sin.}v) =$ , (hypot:),  $\lambda - l$ ; ce qui donnera

$$(2) \dots \dots \frac{Z - \rho l}{\lambda} = X \text{cof.}v + Y \text{sin.}v.$$

Il faut tirer de ces deux équations les valeurs de  $X, Y, Z$ ; & pour cela on remarquera que,  $r$  étant le rayon de la Lune, on aura  $X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2$ ; & que  $Y \text{cof.}v - X \text{sin.}v^2 + X \text{cof.}v^2 + Y \text{sin.}v^2 = X^2 + Y^2 = r^2 - Z^2$ ; on aura donc

$$r^2 - Z^2 =$$

$r^2 - Z^2 = \frac{(Z - \rho l)^2}{\lambda^2} + \frac{\rho^2 S^2}{\cos^2 v^2}$ , d'où l'on tire, en faisant pour

abrégé  $h = \sqrt{\left(1 + \lambda^2 \times r^2 - \frac{\rho^2 S^2}{\cos^2 v^2} - \rho^2 l^2\right)}$ ,  $Z = \frac{\rho l + h \lambda}{1 + \lambda^2}$ ;

Ayant la valeur de  $Z$ , on trouvera aussitôt celle de  $X$ , & de  $Y$ , par les équations (1), (2) car

$$X = \frac{Z - \rho l}{\mu} \cos v - \rho S \operatorname{tang} v; \quad Y = \frac{Z - \rho l}{\lambda} \sin v + \rho S.$$

On fera le même calcul pour chacune des deux autres observations, & l'on appellera  $X', Y', Z'$ ;  $X'', Y'', Z''$ , les valeurs correspondantes de  $X, Y, Z$ .

Maintenant on a ( article VI, (D) )  $Z = r \sin p$ ,  $Y = r \cos p \sin q$ ,  $X = r \cos p \cos q$ ; de plus en combinant les deux premières formules (C),  $\sin P = \sin p \cos \pi + \cos p \sin q' \sin \pi$ , = ( en mettant au lieu de  $q'$ ,  $q - \epsilon$  )  $\sin p \cos \pi + \cos p \sin q \cos \epsilon \sin \pi - \cos p \cos q \sin \epsilon \sin \pi$ ; donc substituant pour  $\sin p$ ,  $\cos p \sin q$ ,  $\cos p \cos q$ , leurs valeurs  $\frac{Z}{r}$ ,  $\frac{Y}{r}$ ,  $\frac{X}{r}$ , on aura

$$(3) \dots \dots r \sin P = Z \cos \pi + Y \cos \epsilon \sin \pi - X \sin \epsilon \sin \pi.$$

Et de même pour les deux autres observations.

$$(4) \dots \dots r \sin P = Z' \cos \pi + Y' \cos \epsilon \sin \pi - X' \sin \epsilon \sin \pi.$$

$$(5) \dots \dots r \sin P = Z'' \cos \pi + Y'' \cos \epsilon \sin \pi - X'' \sin \epsilon \sin \pi$$

en supposant que la position de l'équateur demeure la même.

Retranchant l'équation (4) de l'équation (3), & l'équation (5) de l'équation (4) on aura deux nouvelles équations

$$6) (Z - Z') \cos \pi + (Y - Y') \cos \epsilon \sin \pi - (X - X') \sin \epsilon \sin \pi = 0$$

$$(7). (Z' - Z'') \cos \pi + (Y' - Y'') \cos \epsilon \sin \pi - (X' - X'') \sin \epsilon \sin \pi = 0$$

d'où l'on tire  $\frac{(X - X') \sin \epsilon - (Y - Y') \cos \epsilon}{Z - Z'} = \frac{\cos \pi}{\sin \pi}$

$$\frac{(X' - X'') \sin \epsilon - (Y' - Y'') \cos \epsilon}{Z' - Z''}; \text{ \& par conséquent}$$

$$\text{tang. } \epsilon = \left( \frac{Y - Y'}{Z - Z'} - \frac{Y' - Y''}{Z' - Z''} \right) : \left( \frac{X - X'}{Z - Z'} - \frac{X' - X''}{Z' - Z''} \right);$$

Connoissant  $\epsilon$ , on trouvera  $\pi$  par la formule

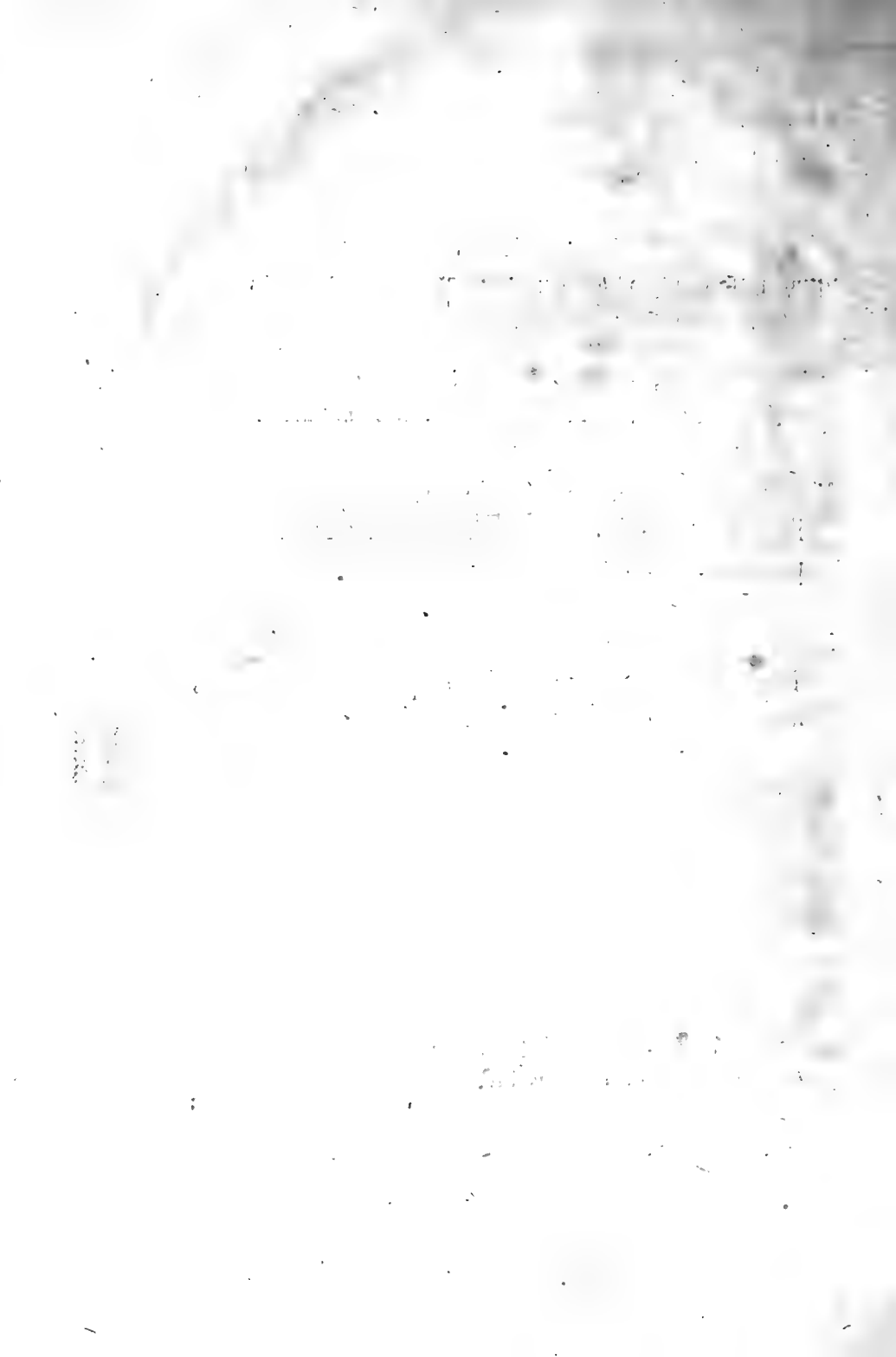
$$\text{tang. } \pi = \frac{Z - Z'}{(X - X') \sin \epsilon - (Y - Y') \cos \epsilon}.$$

**F I N.**

# DE L'ARRIMAGE *DES VAISSEAUX.*

MÉMOIRE pour concourir au prix proposé par  
l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris  
pour l'année 1765.

*Par M. GROIGNARD, Constructeur en chef des  
vaisseaux du Roi & de la Compagnie des Indes,  
au Port de l'Orient.*





# MÉMOIRE SUR L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX.

---

Qui dubiis ausus committere flatibus alnum,  
Quas natura negat præbuit arte vias.

---



OUR me conformer aux vues de l'Académie, & discuter avec ordre le sujet qu'elle propose, je diviserai ce Mémoire en trois Chapitres.

Le premier traitera des méthodes usitées dans les Ports, pour lester ou arrimer les vaisseaux de toutes sortes de grandeur, & de différentes espèces.

Le second, des poids & de la distribution des matières qu'on employe, & de l'effet qu'elles produisent sur le

4 MÉMOIRE SUR L'ARRIMAGE  
sillage, sur les lignes d'eau, sur les propriétés de bien  
gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer,  
& sur les autres qualités d'un vaisseau.

Le troisième, des inconvéniens de ces méthodes & des  
remèdes qu'on pourroit y apporter.

L'objet de ce Mémoire étant des plus intéressans, & de-  
vant être à la portée de tous les Marins, j'essayerai de le  
traiter de la façon la plus simple, & la plus praticable, &  
de le rendre aussi utile à la Marine du Roi, qu'à celle de la  
Compagnie des Indes & des Marchands.





## C H A P I T R E I.

*Des méthodes usitées dans les Ports pour arrimer & lester les vaisseaux de toutes sortes de grandeurs, & de différentes espèces.*

ARRIMER un vaisseau, c'est le charger, ou placer dans sa calle, dans ses soutes, entre-ponts & gaillards les différentes matières ou effets qu'exigent son espèce & sa destination.

Comme ces effets peuvent être plus ou moins pesans relativement à la capacité ou au déplacement d'eau du vaisseau, & plus ou moins avantageusement placés relativement à sa stabilité, on se sert de lest, ou de matières plus ou moins pesantes, comme la pierre, le fer ou le plomb, pour augmenter le déplacement ou la stabilité, & c'est ce qu'on appelle lester un vaisseau.

L'arrimage & lestage des vaisseaux doit donc varier suivant leurs espèces & leurs destinations. On ne finiroit pas si on vouloit entreprendre de détailler toutes les espèces de vaisseaux & les différens arrimages qu'exigeroient leurs différens armemens.

Je me bornerai à parler des espèces de vaisseaux les plus connues, les plus en usage, & les plus nécessaires au service du Roi, de la Compagnie des Indes & des Marchands, & je donnerai pour ces espèces de vaisseaux des principes applicables à toutes les autres.

*De l'arrimage des vaisseaux de Roi.*

Je prends pour exemple un vaisseau de soixante-quatorze canons.

*La Calle.*

L'arrimage des vaisseaux de Roi est le plus connu, & celui qui peut le moins varier, parce que chaque chose y est toujours la même, & à sa même place distincte.

Dans la partie la plus basse du vaisseau que l'on appelle la calle, sont à-peu-près sur le même plan, & successivement à commencer par l'arrière ou l'étambot jusques en avant ou l'étrave.

1.<sup>o</sup> Les coffres & la soute aux poudres ; cette soute occupe à-peu-près une espace de 5 à 6 pieds de hauteur & de 41 pieds de longueur à prendre du dehors de l'étambot : elle doit contenir en barils & engargouffes la quantité de poudres nécessaires pour fournir au moins soixante coups pour chaque canon ; cette soute est terminée par deux cloisons à un pied de distance l'une de l'autre ; & cet intervalle entre les deux cloisons est ordinairement rempli de sable ou de terre pour préserver les poudres du feu ou de l'humidité voisine.

2.<sup>o</sup> Sur l'avant & joignant la soute aux poudres, est la cave du Capitaine de 8 à 9 pieds de hauteur & 5 à 6 pieds de longueur : cette cave doit contenir la quantité de vin nécessaire à la table du Capitaine pour 6 à 7 mois de campagne ; elle est terminée par une simple cloison qui prend tout le travers ou la largeur du Vaisseau.

3.<sup>o</sup> La calle au vin & provisions de l'équipage de 8 à 9 pieds de hauteur, & 24 à 26 pieds de longueur. Cette calle ou cave doit contenir le vin & partie des provisions de l'équipage pour 6 à 7 mois de campagne, elle est terminée par une cloison joignant l'archipompe, & sur l'avant, & à-peu-près de la grandeur de l'archipompe est le parquet ou coffre aux boulets. Ce coffre monte jusques à la hauteur du faux-pont est divisé par cases, & doit

contenir tous les boulets de différens calibres, à l'exception de ceux que l'on met dans de petits parquets entre les batteries, pour les avoir sous la main. On embarque la quantité de boulets pour au moins soixante coups par canon.

4.<sup>o</sup> La calle à eau de 8 à 9 pieds de hauteur & de 48 à 50 pieds de longueur; elle doit contenir en pièces de quatre, de trois, de deux, & d'une barrique, la quantité d'eau pour deux mois & demi ou trois mois au plus, à raison d'une barrique par jour pour cent hommes. Il ne seroit pas possible d'en prendre davantage sans trop charger le vaisseau, & l'on renouvelle cette eau dans les relaches. Cette calle à eau est terminée pour une simple cloison en travers du vaisseau

5.<sup>o</sup> La fosse aux cables de 8 à 9 pieds de hauteur & de 22 à 24 pieds de longueur; elle doit contenir tous les cables, grelins; aussières &c. nécessaires à l'armement & au rechange du vaisseau.

6.<sup>o</sup> En avant de la cloison de la fosse aux cables, & vis-à-vis du mât de mizaine, sont deux petits coffres à poudre qui se terminent sur l'extrémité, ou sur l'avant du vaisseau, l'on y met dans un combat des gargouilles pour accélérer le service des canons de l'avant.

Le lest se place dans la calle au-dessous des pièces à eau, à vin & des cables.

### *Le Faux-pont.*

Au dessus & à la longueur des soutes à poudre, est un plancher ou platte-forme sur laquelle sont établis le rechange du maître Canonnier de 5 à 6 pieds de longueur, & cinq soutes à pain, dont une en travers du vaisseau sur l'arrière, & deux de chaque côté séparées par un courroir suivant la longueur du vaisseau, pour communiquer de l'une à l'autre, & pouvoir descendre dans la soute aux

## S. MÉMOIRE SUR L'ARRIMAGE

poudres au moyen de deux écoutilles pratiquées sur ce plancher, l'une en avant, & l'autre en arrière de l'archipompe d'artimon. Ces soutes à pain contiennent la quantité de biscuit nécessaire à l'équipage.

Au dessus & à la longueur de la cave du Capitaine & de la cave au vin de l'équipage, est un plancher sur lequel sont établies plusieurs soutes à grain & à légumes, séparées par un grand courroir au milieu, pour pouvoir au moyen de deux écoutilles descendre dans la cave du Capitaine & dans la cave au vin.

C'est sur ce plancher que l'on appelle la platte-forme du maître-valet que se fait la distribution journalière des vivres, & c'est dans ces soutes divisées en plusieurs compartimens que sont placées les provisions, légumes & grains du Capitaine & du Commis.

Au-dessus & à la longueur de la calle à eau, est un plancher volant, ou couvert de planches levatis, sur lequel on établit les soutes du Chirurgien, du Pilote, du Charpentier, le théâtre des malades ou blessés dans un combat, & la soute à voile de 5 à 6 pieds de longueur tout en travers du vaisseau & joignant la cloison de la fosse aux cables.

Au dessus & à la longueur de la fosse aux cables & coffres à poudres de l'avant, sont la platte-forme du cable d'affourche, la fosse à Léon, & quelques soutes pour les rechanges des maîtres d'équipage, calfats &c. & pour des grains.

Tous ces différens planchers joints ensemble, & prolongés depuis l'avant jusqu'à l'arrière du vaisseau, à l'exception du plancher des soutes à pain qui est deux à trois pieds plus bas que tous les autres, forment ce qu'on appelle le *faux-pont*. Tout autour de ce faux-pont à trois pieds de distance du bord, régne un espace vide ou galeries pour voir dans un combat les boulets qui pourroient percer le vaisseau à fleur d'eau, & boucher les trous des boulets avec des tapons de calibre,

*Le premier Pont.*

A cinq pieds & demi de hauteur, au-dessus du faux-pont, sous poutre ou sous beaux, est un autre plancher, prolongé depuis l'arrière jusqu'à l'avant du vaisseau, que l'on appelle le premier-pont.

Sur ce premier pont, à commencer par l'arrière, est la sainte-barbe de 24 à 25 pieds de longueur, terminée par une cloison que l'on peut démonter dans un combat.

Dans la sainte-barbe sont établies de chaque côté les chambres, de l'Écrivain & du maître Canonnier, & les lits du Chirurgien, de l'Aumonier, &c.

Depuis la cloison de la sainte-barbe, jusqu'en avant du vaisseau, sont établis le cabestan, le four, le parc à moutons, les bittes, la gatte ou compartiment pour recevoir les eaux qui entrent par les écubiers, & tous les lits ou hamacs des matelots suspendus au-dessous des beaux ou poutres du second-pont.

Ce premier pont est percé de plusieurs trous, écoutilles ou panneaux, de grandeur convenable pour pouvoir descendre sur les différens planchers, ou compartimens du faux-pont, & y embarquer les pièces de quatre ou autres effets qui doivent être placés dans ces compartimens ou dans la calle.

C'est ce premier pont qui porte le poids immense de la première batterie de 28 canons de 36, montés sur leurs affuts avec palants & ustensilles nécessaires.

*Le second Pont.*

Sur le second pont, à commencer par l'arrière, est la grande-chambre ou salle à manger de 20 à 22 pieds de longueur, terminée par une cloison qui peut se démonter dans un combat; dans la grande chambre joignant cette

cloison & de chaque côté du vaisseau, sont pratiquées quatre ou six chambres en toile, qui peuvent aussi se démonter.

En avant de cette grande chambre, est le poste des Gardes de la Marine, l'office, la boucherie, & sur le même pont, sous le gaillard d'avant, sont les cuisines, les potagers, & un petit four pour la table du Capitaine.

C'est le second Pont qui porte le poids de la seconde batterie de 30 canons de 18 liv. de la Chaloupe, Canots, & mâts d'hune de rechange, que l'on place ordinairement entre les deux gaillards.

La hauteur du premier au second pont, ou de l'*entrepont* pour un vaisseau de 74 canons, est de 5 pieds 8 à 10 pouces sous beau ou sous poutre au milieu.

#### *Les Gaillards.*

A cinq pieds 6 à 8 pouces au-dessus du second pont sous poutre, est sur l'arrière du vaisseau un plancher de 80. à 85 pieds de longueur qu'on appelle le *gaillard d'arrière* qui est prolongé jusques sur l'avant du grand mâ, & sur l'avant du vaisseau est un autre plancher à-peu-près de même hauteur de 40 à 42 pieds de longueur qu'on nomme le *gaillard d'avant*.

Sur le gaillard d'arrière sont établies la chambre de Conseil ou de parade de 18 pieds de longueur, & en avant de cette chambre de Conseil, & de chaque côté du vaisseau, six chambres pour le Capitaine, & les cinq premiers Officiers: entre ces chambres & sur l'arrière du mâ d'artimon, est la roue du gouvernail, & l'habitacle où sont les bouffolles ou compas de route.

En avant du mâ d'artimon, sur le Gaillard d'arrière, sont au milieu les cages à poules & à dindes, & sur les côtés 10 canons de 8 l.

Sur le gaillard d'avant sont le petit cabestan, les bossoirs qui supportent les ancres & six canons de 8 liv.

*La Dunette.*

A cinq pieds huit pouces ou six pieds au-dessus du gaillard d'arrière sous poutre ou sous barrot, est un plancher de 35 pieds de longueur prolongé jusques en avant du mâc d'artimon, sur lequel sont établies sur l'arrière & de chaque côté, quatre cabanes de 4 pieds de hauteur & 6 pieds de longueur, chacune, pour le logement des Maîtres & Pilotes; en avant de ces cabanes, sont des cages à poules.

C'est sur cette Dunette, qui est l'endroit le plus élevé du vaisseau qu'on établit la mousqueterie dans un combat.

Le détail que je viens de faire des emménagemens ou distributions des différentes parties de la calle, du faux-pont, entre-pont, &c. d'un vaisseau de guerre de 74 canons, peut convenir également aux vaisseaux du Roi de tous les rangs, en imaginant ces distributions relatives à la différente grandeur des vaisseaux, & même des frégates qui n'ont qu'un pont, une batterie, & une Dunette de moins que les vaisseaux, & qui d'ailleurs sont également emménagées, à peu de chose près.

On trouvera dans les différens Traités de construction, Dictionnaires de Marine, & sur-tout dans le Traité de M. Duhamel, des plans & coupes de différens vaisseaux de guerre, frégates & flutes qui représentent les emménagemens & distributions de ces bâtimens, que j'ai cru inutile de retracer ici.

D'après ce que je viens de dire des emménagemens & des distributions des différentes parties d'un vaisseau de guerre &c. l'arrimage des vaisseaux & frégates du Roi doit paroître d'autant plus aisé, que chaque chose a sa place distincte, & que chaque place est plus grande à proportion, que ce quelle doit contenir.

Cela seroit exactement vrai s'il n'étoit question pour

faire un bon arrimage, que de placer ce que le vaisseau doit porter; cette condition n'est pas la plus difficile à remplir: il faut qu'un vaisseau de guerre tout chargé ou arrimé, ait de la batterie, porte bien la voile, marche bien, gouverne bien, ait les mouvemens doux, & tout cela dépend beaucoup de la quantité, de l'espèce & de la position de son lest, qui est la seule chose qui paroisse indéterminée & la plus nécessaire à l'arrimage d'un vaisseau de guerre; elle demande les plus sérieuses combinaisons, puisque c'est de là que dépendent toutes ses bonnes qualités. C'est ce qui fera le sujet du second Chapitre: je me bornerai à dire dans celui-ci que la bonne façon d'arrimer un vaisseau de guerre, est de lui donner la quantité & l'espèce de lest proportionnée à sa capacité ou déplacement, & à sa stabilité, & de distribuer ce lest de façon que chaque chose à embarquer mise à la place que j'ai ci-dessus désignée, le vaisseau ou la frégate soit au tirant d'eau, ait la hauteur de la batterie proposée & toutes les autres qualités que l'on peut en attendre.

Comme il est très-difficile de rencontrer au juste ce tirant d'eau, ou l'assiette du vaisseau, sur-tout à ceux qui n'ont pas encore navigué, on conserve une certaine quantité de lest portatif que l'on place après l'arrimage sur l'avant ou sur l'arrière du vaisseau dans des endroits que l'on ménage exprès dans la calle, afin de pouvoir, au moyen de ce nouveau lest, corriger la différence du tirant d'eau. On peut aussi faire déplacer quelques futailles dans la calle à eau qui n'est jamais pleine, si ce lest portatif ne suffit pas pour mettre le vaisseau en assiette.

### *De l'arrimage des vaisseaux de la Compagnie des Indes.*

La Compagnie des Indes à trois espèces de vaisseaux relatifs à ses objets de commerce.



Les vaisseaux pour l'Isle de France, Pondichery, &c. peuvent être du port de 1200 tonneaux, sans comprendre le poids de leur cocque, & de la force des vaisseaux du Roi de 64 Canons.

Les vaisseaux pour la Chine font de 900 tonneaux, & à-peu-près de la grandeur & de la force des vaisseaux de 50 canons.

Ceux pour Bengale ou pour la côte, font de 600 tonneaux, & à-peu-près de la grandeur, & de la force d'une frégate de 26 canons; l'objet des vaisseaux de la Compagnie étant de porter & rapporter des provisions & autres munitions & marchandises relatives à son commerce, le chargement de ces vaisseaux varie suivant les besoins & les denrées des colonies; soit en partant de l'Orient, soit en revenant des différens lieux d'ou ils rapportent des marchandises différentes.

Ces trois espèces de vaisseaux font différemment emménagés que ceux du Roi, seulement dans leur calle & dans leur entrepont.

Il n'y a dans leur calle sur l'arrière, qu'une petite soute à poudre & au-dessus des soutes à pain; & sur l'avant qu'une calle à eau. Ces soutes & cette calle à eau, qui n'occupent, pour ainsi dire, que la partie irrégulière des façons de l'arrière & de l'avant du vaisseau, n'ont que la longueur strictement nécessaire pour contenir la poudre, le biscuit, & l'eau pour trois mois à un équipage bien moins nombreux qu'aux vaisseaux du Roi: ces vaisseaux portent ordinairement des vivres pour 18 mois que dure leur campagne.

On a jugé à propos de placer la calle à eau sur l'avant de ces vaisseaux, parce que cette partie étant plus exposée aux égouts, aux voyes d'eau, & à l'humidité, & d'une figure très-irrégulière, est moins propre à l'arrimage & à la conservation des marchandises légères & précieuses, & que la calle à eau placée comme dans les vaisseaux de

guerre, au milieu de la longueur de la calle & de ces mêmes marchandises, leur communiqueroit de l'humidité, &c.

Ces raisons ont prévalu sur les inconvéniens qui résultent de la position de la calle à eau sur l'étrave ou sur l'avant du vaisseau. Le poids immense de cette eau tend à faire plonger & à délier cette partie, & rend les mouvemens de tangage fort durs : on est en même-temps obligé de mettre beaucoup de lest de fer, ou les effets les plus lourds, sur la partie de l'arrière du vaisseau, pour balancer le poids de la calle à eau sur l'avant, qui joint à celui des cambuses, des ancres, mât de mizaine, du beaupré, &c. ne peut que contribuer à faire promptement arquer, & délier ces vaisseaux.

L'espace immense de la calle, compris entre la cloison des soutes à pain, & celle de la calle à eau, est ordinairement occupé par cent ou cent cinquante tonneaux de lest de fer & de pierres, ou fer de cargaison. Sur ce lest de fer & de pierre, sont établis deux ou trois plans de futailles ou pièces de deux remplies de différens vins & eau-de-vie, & tous ces plans sont prolongés ordinairement depuis la cloison de la calle à eau, jusqu'à la distance de 8 à 12 pieds de la cloison des soutes à pain & à poudre ; l'on met dans ce vide de 8 à 12 pieds, du charbon de terre, & au-dessus du charbon de terre, jusqu'à la hauteur du pont, de la poudre en barrils pour les colonies, que l'on masque avec des pièces de toile à voile.

Au-dessus de ces plans de vin & eau-de-vie, on met d'abord joignant la cloison de la calle à eau, en venant sur l'arrière, des barrils de brays, goudron, cordages, caisses d'armes, d'habillemens de troupes, toiles & autres effets relatifs aux besoins & commerce des colonies, & l'on finit de remplir & de bonder la calle avec des farines ou autres effets les plus légers,

Il n'y a point de faux-pont dans les vaisseaux de la Compagnie, mais seulement quelques barrots ou poutres dans la calle environ à cinq pieds au-dessous du premier pont, sur lesquels on place quelquefois des mâts bruts pour servir au vaisseaux dans les colonies, & pour pouvoir faire entrer & sortir ces mâts, on pratique, à-peu-près à la hauteur de ces barrots, dans l'arcaste ou sur l'arrière du vaisseau, un sabord de charge & un courroir entre les soutes à pain, du côté où est placé ce sabord.

Sur le premier pont des vaisseaux de la Compagnie, est, comme aux vaisseaux du Roi, la sainte-barbe avec les chambres de l'Écrivain, du maître Canonnier, les lits du Chirurgien, de l'Aumonier, &c. Mais comme la calle de ces vaisseaux n'est presque occupée que des effets de cargaison, on est obligé de se servir de ce premier pont pour mettre les vivres qui ne peuvent être placés dans la calle; ainsi en avant de la sainte-barbe, sont pratiquées au milieu du vaisseau, des soutes à grain & à légumes. Il y a aussi un parc à moutons, à double étage pour de plus longues campagnes, & tout en avant du vaisseau, & au dessus de la calle à eau, sont des cambuses ou soutes pour les provisions du Capitaine, du Commis pour la distribution journalière des vivres, les soutes des Maîtres Charpentiers, Calfats, Maîtres-d'équipage, le poste du Chirurgien, des malades, &c. sont aussi sur ce premier pont.

Le reste de ce premier pont est ordinairement rempli de barrils de farine, des coffres & hardes des équipages, des voiles, des cables, cordages, &c. parce qu'il n'y a point de canons ou de première batterie, quand ces vaisseaux ne sont point armés en guerre.

Le second pont, gaillards & dunettes de ces vaisseaux sont à-peu près emménagés comme les vaisseaux du Roi, à cela près, que tout est, à proportion, plus resserré, plus multiplié, & relatif aux plus longues campagnes, & que le cabestan & les écubiers sont établis sur le second pont.

On voit par ce que je viens de dire de l'arrimage des vaisseaux de la Compagnie, que ces trois espèces de bâtimens, en partant de l'Orient, doivent toujours être très-chargés & submergés, parce que les effets qui composent leur arrimage sont très-lourds, & remplissent toujours tout l'espace de leur calle & de leur entrepont, espace que l'on rend d'autant plus considérable, qu'il ne doit contenir, au retour des mêmes vaisseaux, que des marchandises légères, & d'un grand volume, comme le thé, le café, le poivre, le coton, &c.

La construction des vaisseaux de la Compagnie, demande donc plus de combinaison, que celle des vaisseaux de guerre, puisqu'ils doivent être faits de façon, à pouvoir être chargés de marchandises lourdes pour l'approvisionnement des colonies, & à rapporter beaucoup de marchandises légères pour augmenter les profits & dédommager la Compagnie de leur armement; l'arrimage de ces vaisseaux demande aussi plus de combinaison dans ces différens cas.

Pour bien arrimer un vaisseau de la Compagnie partant de l'Orient, chargé de marchandises ou effets très lourds, il faut combiner les différentes parties qui doivent composer son chargement, éloigner des extrémités du vaisseau les effets les plus lourds qui n'ont point de place décidée, les placer le plus bas qu'il est possible, pour baisser le centre de gravité, & diminuer d'autant la quantité de lest qu'on est obligé de donner à ce vaisseau pour lui faire porter la voile, & le mettre en assiette ou en différence; parce que ce lest est un poids inutile qui ne sert qu'à augmenter le déplacement d'eau du vaisseau, la résistance du fluide, & à tenir la place d'autres effets beaucoup plus nécessaires que l'on pourroit porter.

On peut aussi diminuer la quantité & le volume du lest, en augmentant sa pesanteur spécifique, & pour de pareils vaisseaux, le lest de fer & de plomb doit être préféré au lest de pierre.

Pour

Pour bien arrimer ce même vaisseau venant de la Chine, où les marchandises occupent à proportion beaucoup plus de place qu'elles ne pèsent, on ne sçauroit avoir trop d'attention à ne point perdre de terrain; pour cet effet les Chinois font des caisses de thé de différentes grandeurs & figures relatives à la courbure des côtés du vaisseau; & après avoir mis dans le fond la quantité de lest de fer, de pierre, & de caisses de porcelaine nécessaires pour suppléer au défaut de la pesanteur du thé, & pour faire un grenier ou une plate forme assez élevée pour empêcher que l'eau ou l'humidité ne se communique au thé, on remplit exactement de plusieurs rangs de caisses de thé, de hauteur & figures convenables toute la calle du vaisseau, depuis la cloison des soutes à pain & à poudre, jusqu'à la cloison de la calle à eau, que l'on diminue le plus qu'il est possible.

On a attention, avant d'arrimer le thé, de faire calfater la cloison de la calle à eau, de la tapisser de nates, ainsi que les côtés du vaisseau, & l'on prend toutes les précautions nécessaires pour empêcher les égoûts & l'humidité.

On remplit aussi de caisses de thé la partie de l'entrepont comprise entre la sainte-barbe, & les environs de l'archipompe.

On arrime à peu-près de la même façon les vaisseaux de la Compagnie chargés de café, & autres marchandises légères; c'est-à-dire, que pour bien arrimer ces vaisseaux il faut proportionner la quantité & l'espèce du lest à la pesanteur spécifique des matières qui composent leur chargement, & à la stabilité qui leur est nécessaire, & distribuer ce lest relativement à l'assiette de ces vaisseaux.

### *De l'Arrimage des Vaisseaux marchands.*

LES vaisseaux marchands sont à peu-près emménagés comme les vaisseaux de la Compagnie.

L'arrimage ou le chargement des vaisseaux marchands est relatif à l'objet de leur destination, & de leur commerce.

On porte chez l'étranger les denrées du pays, & l'on rapporte celles de l'étranger : Il est de l'intérêt des Armateurs de porter & de rapporter le plus qu'il est possible, pour diminuer les frais de transport ; l'on ne peut rien ajouter à l'expérience & à l'attention qu'ont les Arrimeurs des différens ports marchands pour tirer parti de l'espace de la calle & de l'entrepont des vaisseaux faits, pour ainsi dire, pour l'objet du commerce de chaque pays : Ceux destinés pour porter des effets de grandeur connue, ont une longueur & hauteur de calle & entrepont proportionnées, pour loger, comme dans un coffre, une certaine quantité de rangs les uns sur les autres ; par exemple, de barriques de sucre, de jarres d'huile, de balles de café, &c.

En général, tous ces arrimages n'ont rien de recherché, puisqu'il n'est question que d'entasser pièces sur pièces, avec le plus de précision & d'attention ; sur tout lorsque ces pièces ne sont pas susceptibles de pression, comme le sont les balles de laine, de coton, &c.

L'arrimage de ces marchandises, susceptibles de pression, qu'on appelle estiver à *grillou* ou à *traou*, demande plus d'attention, de précision, est moins ordinaire, & mérite d'être cité.

Pour arrimer ou estiver à *grillox*, on garnit les balles en dessus & en dessous de languettes ou coins de bois fort larges ; on fait prendre à ces balles, sous un pressoir avec ces mêmes languettes que l'on arrête, la forme d'un coin :

on introduit ensuite ces balles, ainsi formées en coin, avec ces languettes, entre les rangs de celles qui ont d'abord été rangées successivement dans la calle & entassées jusqu'à la hauteur du pont; de façon que sur un rang de six balles de hauteur, on introduit cinq autres balles pressées en coin, au moyen du traou ou bellier que l'on pousse avec différentes manœuvres frappées au cabestan; & quand ces balles, ainsi pressées, ont été introduites à force entre les autres, on retire les languettes au moyen d'une manœuvre frappée à chaque bout de ces languettes, & virée au cabestan. On fait entrer, par ce moyen 1000 à 1100 balles dans la calle & entrepont d'un vaisseau, qui n'en auroient contenu que 600. Cette façon d'arrimer est très-ingénieuse, & demande beaucoup plus de temps & d'attention; mais tous ces arrimages des vaisseaux Marchands exigent moins de théorie, que ceux des vaisseaux du Roi & de la Compagnie des Indes, parce qu'on n'a en vue que de faire porter aux vaisseaux Marchands le plus qu'il est possible, sans faire attention aux inconvéniens qui peuvent en résulter par rapport aux qualités de ces vaisseaux, qui, faits au hazard, & par des Charpentiers ou Constructeurs ignorans, ne peuvent qu'être très-mauvais voiliers, & être arrimés au hazard. Ce n'est que la pratique qui a fait connoître à peu-près la figure & la façon d'arrimer ces vaisseaux pour leur faire passablement porter la voile avec les chargemens connus, & toujours les mêmes pour lesquels ils sont construits. Mais si l'on avoit à arrimer des vaisseaux Marchands faits par d'habiles Constructeurs, dont on connoîtroit les capacités, la stabilité & le tirant d'eau ou l'assiette, tout ce que j'ai dit au sujet des différentes façons d'arrimer les vaisseaux de la Compagnie des Indes, suffiroit pour le bon arrimage de ces bons vaisseaux Marchands, qui seroient aussi utiles au Commerce qu'à l'État.

---

## C H A P I T R E I I.

*Du poids & de la distribution des Matières qu'on emploie dans l'Arrimage des Vaisseaux, & de l'effet qu'elles produisent sur le sillage, sur les lignes d'eau, sur les propriétés de bien gouverner, de bien porter la voile, d'être doux à la mer, & sur les autres qualités du Vaisseau.*

**L**E poids des matières qu'on emploie dans l'arrimage des vaisseaux du Roi, de la Compagnie des Indes & des Marchands, &c, doit toujours être égal à la capacité ou au déplacement d'eau du vaisseau; ainsi, pour connoître d'avance le poids de ces matières, il faut connoître le déplacement d'eau auquel il doit être comparé.

La figure de la carène ou de la partie du vaisseau qui entre dans l'eau étant très-irrégulière, on la divise en plusieurs tranches. On réduit ensuite, en pieds cubes, la solidité de chaque tranche supposée homogène, & l'on ajoute ensemble la somme des pieds cubes de toutes ces tranches, pour avoir la solidité entière de la carène ou de la partie submergée du vaisseau, supposée homogène.

Cette solidité entière de la carène est précisément égale au volume d'eau, dont elle occupe la place, & au poids de ce volume d'eau, parce qu'il est démontré que tout corps flottant déplace un volume d'eau précisément égal à son poids; ainsi, connoissant la solidité de la carène ou la quantité de pieds cubes d'eau qu'elle a déplacée, on



connoîtra leur poids, en les multipliant par celui du pied cube d'eau de mer, qui est à-peu-près de 72 livres; & pour réduire ce même poids en tonneaux, on le divisera par 2000 livres, poids ordinaire du tonneau d'eau de mer.

On aura donc toujours, par ce moyen, le poids ou le déplacement d'eau du vaisseau qui doit être égal & comparé au poids des différentes parties qui doivent composer la cocque, son gréement & sa charge, ou son arrimage, pour être assuré que ce vaisseau n'enfoncera dans l'eau que de la quantité projetée.

## E X E M P L E.

Du déplacement d'eau d'un vaisseau de 74 canons, comparé au poids de sa cocque, de ses appareils & de ses munitions.

*Déplacement d'eau jusqu'à cinq pieds de batterie au sabord du milieu.*

PIEDS CUBES.

Première tranche comprise, depuis le dessous de la quille, jusqu'à 46 pouces de hauteur au milieu audessus de la quille . . .	4514 liv.
Deuxième tranche de 24 pouces de hauteur . . .	7641
Troisième tranche de 24 pouces id. . . .	8559
Quatrième tranche de 24 pouces id. . . .	9668
Cinquième tranche de 24 pouces id. . . .	10873
Sixième tranche de 24 pouces id. . . .	12072
Septième tranche de 24 pouces id. . . .	13310
Huitième tranche de 24 pouces id. . . .	14413
<b>TOTAL du déplacement en pieds cubes. .</b>	<b>81050</b>

22 MÉMOIRE SUR L'ARRIMAGE

Lesquels 81050 pieds cubes d'eau pèsent  
à raison de 72 livres le pied cube, &  
de 2000 livres le tonneau . . . 2917<sup>ton.</sup> 1600 liv.

*Poids de la cocque du vaisseau.*

	Tonneaux.
Bois de chêne travaillé 35250 pieds cubes, à 59 livres le pied cube, l'un dans l'autre, pèse . . . . .	1539 1750 liv.
Bois de sapin 7500 pieds cubes, à 50 livres le pied cube . . . . .	187 1000
Sculpture . . . . .	6
Fer en courbes du premier pont, faux-pont, & une partie de celles du second pont . . . . .	26
Fer en chevilles de toutes sortes, ferrures de gouvernail, chaînes d'haubans & cloux . . . . .	50
Plomb des écubiers, dalots & coutures . . . . .	3
Rouets de fonte aux sèps de drisse & boffoirs . . . . .	1
Serrurerie . . . . .	1
Etoupe . . . . .	6
Goloron . . . . .	1
Peinture . . . . .	2
Cuisines, fours & potages . . . . .	14
<b>TOTAL du poids de la cocque . . . . .</b>	<u><u>1640<sup>ton.</sup> 750 liv.</u></u>

*Poids des appareils.*

	Tonneaux.
Mâture complète & celle de rechange	66
Poules & pompes	14
Rouets de fonte & de fer des Poules	1
Voiles & leurs étuis	11
Cables, grêlins, orins & cordages pour les ancres	43
Cordages de la garniture	34
Rechange du Maître	11
Ancres avec les fûts	17
Chaloupe & canots	12
<b>TOTAL</b> du poids des appareils	<b>209</b> tonneaux.

*Lest.*

En fer	80
En pierres	120
<b>TOTAL</b>	<b>200</b>

*Munitions de guerre.*

Canons de fer	163
Affûts garnis	35
Boulets ronds & ramés	56
Poudre avec les barils	22
Valets	6
Pinces, anspects, ustencilles & re- change du M <sup>e</sup> . Canonnier	10
Fusils, mousquetons, haches d'ar- mes, &c.	2
<b>TOTAL</b> des Munitions de guerre	<b>294</b>

*Poids des munitions de bouche.*

	Tonneaux.
Vivres pour six mois à 700 hommes	378
Eau pour deux mois . . . . .	150
Furailles . . . . .	46
Table du Capitaine . . . . .	30
<b>TOTAL des munitions de bouche.</b>	<b>604 tonneaux.</b>

*Poids des menus effets de l'armement & rechanges.*

Effets du Chirurgien . . . . .	4	
Du Pilote . . . . .	2	
De l'Aumonier . . . . .	.	1000 liv.
Rechange du Charpentier . . . . .	4	1000
Du Calfat . . . . .	2	
<b>TOTAL des menus effets, &amp;c.</b>	<b>13 tonneaux.</b>	

*Poids de l'État-Major & équipage.*

19 Officiers-Majors . . . . .	5
700 Hommes d'équipage . . . . .	70
<b>TOTAL de l'Etat-Major &amp; équipage.</b>	<b>75 tonneaux.</b>

*Récapitulation des différens poids.*

Cocque du vaisseau . . . . .	1640 ton.	750 l.
Appareux . . . . .	209	
Lett . . . . .	200	
Munitions de guerre . . . . .	294	
Munitions de bouche . . . . .	604	
Menus effets de l'armement & rechanges	13	
État-Major & équipage . . . . .	75	
<b>TOTAL des différens poids.</b>	<b>3035 ton.</b>	<b>750 l.</b>

Le déplacement d'eau de ce vaisseau ayant été trouvé de 2910 tonneaux, & le poids de sa cocque & de sa charge ou de son armement devant être de 2908 tonneaux 1250 livres, il reste un tonneau 750 livres de bénéfice que l'on mettra en outre des 200 tonneaux de lest.

Ce n'est que par une pareille opération ou combinaison du déplacement d'eau du vaisseau, avec le poids de sa cocque & des matières qui doivent composer son armement ou son arrimage, qu'un habile Constructeur s'assure d'avance, que son vaisseau tout armé ou chargé aura précisément le tirant d'eau, & la hauteur de la batterie qu'il projette de lui donner.

L'exemple que je viens de donner pour un vaisseau de 74 canons, peut convenir aux vaisseaux & frégates du Roi de tous les rangs, aux vaisseaux de la Compagnie, & aux vaisseaux Marchands; il suffit de connoître le déplacement d'eau du vaisseau, & d'en déduire le poids de la cocque, pour connoître son port, ou le poids des matières qui doivent composer son chargement ou son arrimage.

Mais ce n'est pas assez pour le bon arrimage que le poids des matières soit précisément égal au déplacement d'eau, il faut aussi que ce poids, & sur tout la distribution de ces matières, soient relatifs à la stabilité & à l'assiette du vaisseau.

On a vu, en comparant les différens poids qui entrent dans l'arrimage d'un vaisseau de 74 canons avec son déplacement, que la quantité de lest a été portée à 200 tonneaux; mais cette quantité de lest sera-t-elle suffisante pour que le vaisseau porte bien la voile? & sera-t-elle distribuée de façon que, lorsque le vaisseau sera chargé, il ait l'assiette ou la différence du tirant d'eau projetée? C'est-là l'ouvrage du plus habile Constructeur qui joint la théorie à la pratique, & la condition la plus essentielle du bon arrimage, qui étant une suite des combinaisons & des cal-

culs de ce Constructeur , doit concourir à procurer à son vaisseau les qualités qu'il a projeté de lui donner.

Cet habile Constructeur , en combinant le plan de son vaisseau , a calculé ses capacités ou son déplacement , & les a comparées aux poids qu'il doit porter. Il a fixé la quantité de lest , relativement à ses capacités. Il a examiné si , avec cette quantité , & telle espèce de lest répandu le plus uniformément dans la calle , & le plus éloigné des extrémités , le centre de gravité commun de toutes les matières , seroit effectivement audessous du meta-centre , & si son vaisseau auroit la stabilité nécessaire ; d'après ces calculs , il a déterminé le tirant d'eau de l'avant & de l'arrière , ou l'assiette de son vaisseau. Il a arrêté & travaillé son plan en conséquence , trouvé les lignes d'eau les plus douces & les plus propres à diviser le fluide ; placé le centre de gravité par rapport à la longueur du vaisseau , ou le centre de rotation le plus avantageusement , pour bien gouverner , & avoir les mouvemens doux , déterminé le point vélique. Enfin , il a fait sur ce plan tous les calculs nécessaires pour s'affurer au plus haut degré de toutes les bonnes qualités que peut réunir le meilleur vaisseau de ce rang & de cette espèce.

Quelqu'attention qu'ait pris cet habile Constructeur pour procurer à ce vaisseau ces qualités supérieures , il ne faut qu'un mauvais arrimage pour en faire un mauvais vaisseau : cent tonneaux de lest de plus ou de moins , & différemment placés , vont tout gêner , & voici les inconvéniens qu'ils peuvent produire.

Je suppose qu'au lieu de 200 tonneaux de lest , qui ; joints aux poids des différentes parties du chargement , font un poids égal au déplacement d'eau du vaisseau , & ont été jugés nécessaires à sa stabilité , on en mette 300 tonneaux , il est clair que le vaisseau , au lieu de conserver le tirant d'eau qu'il devoit avoir , enfoncera jusqu'à ce qu'il ait déplacé un volume d'eau égal à ce plus grand

pois de 100 tonneaux , ce qui fait à peu-près pour un pareil vaisseau une tranche ou excès de tirant d'eau d'environ six pouces ; ainsi ce vaisseau qui devoit avoir cinq pieds de batterie , n'aura plus que quatre pieds six pouces , & ne fera plus en état de se servir de sa première batterie, pour peu que la mer soit grosse , ce qui le mettroit dans le cas d'être pris par un vaisseau beaucoup plus petit.

Ce n'est pas là le seul inconvénient ; ce plus grand tirant d'eau de six pouces ayant augmenté d'autant la colonne d'eau que sa proue doit refouler , sa marche doit être d'autant plus retardée , que son poids a augmenté de 100 tonneaux. Il doit , par la même raison , trouver plus de difficulté à se mouvoir de côté , à virer de bord , & à obéir à son gouvernail dont la partie haute ne fait pas grand effet.

La stabilité de ce vaisseau ne devant exiger que 200 tonneaux de lest , l'augmentation inutile de 100 tonneaux doit rendre ses mouvemens trop durs & trop vifs , pour ne pas fatiguer le corps du vaisseau , & rompre sa mâture.

Enfin , si , en mettant ces 100 tonneaux de lest de plus , on les place au hazard , & de façon que le vaisseau n'enfoncé pas parallèlement au premier tirant d'eau projeté , il doit en résulter un changement total dans la figure des lignes d'eau , dans la position du centre de gravité , de rotation , du meta-centre , du point vélique , ce n'est plus le même vaisseau , & toutes les combinaisons du Constructeur deviennent inutiles.

Si , au lieu de mettre 100 tonneaux de lest de plus , on mettoit 100 tonneaux de lest de moins que celui trouvé nécessaire , le vaisseau en seroit d'autant plus léger & plus flottant , & il s'en faudroit d'environ six pouces qu'il n'eût le tirant d'eau projeté ; c'est-à-dire , qu'au lieu d'avoir cinq pieds de batterie , il auroit cinq pieds & demi : mais alors cette plus grande hauteur de batterie & de tous les

autres poids, élevant le centre de gravité, & augmentant la bricolle, & la quantité de lest n'étant pas suffisante à la stabilité du vaisseau, il ne porteroit pas la voile, & ne sçauroit naviguer avec sûreté.

La résistance du fluide sur la proue seroit moins forte, à la vérité; mais celle du côté n'étant pas proportionnée à la hauteur des œuvres mortes, le vaisseau dériveroit beaucoup, & sentiroit moins son gouvernail qui enfonceroit moins dans l'eau; & si ce vaisseau, devenant plus flottant avec cette moindre quantité de lest, n'avoit pas conservé le parallélisme projeté, il pourroit, outre les inconvéniens de ne pas porter la voile & de dériver beaucoup, très-mal marcher, très-mal gouverner, & avoir des mouvemens de tangage fort durs.

Il pourroit se faire que le même vaisseau, fait & combiné pour porter six mois de vivres, ne fût armé que pour trois mois; ce qui seroit (la quantité d'eau restant la même) une différence ou un déficit de 200 tonneaux, dont le vaisseau deviendroit plus flottant, & pourroit produire les effets que je viens de citer, de ne pas porter la voile, de dériver beaucoup, &c.

Pour remédier à ce défaut de poids, & donner à ce vaisseau, qui n'auroit que trois mois de vivres, le même tirant d'eau, que s'il avoit six mois, il faudroit augmenter son lest d'une quantité égale aux poids des vivres supprimés; mais comme ce lest seroit d'une pesanteur spécifique plus grande, & beaucoup plus avantageusement placé que les vivres, son centre de gravité seroit beaucoup plus bas, augmenteroit la stabilité du vaisseau, & causeroit des mouvemens fort durs qui pourroient faire rompre la mâture.

Pour obvier à ces inconvéniens, il faudroit avoir attention de choisir ce nouveau lest le plus léger qu'il seroit possible, de supprimer même le lest de fer qu'on avoit jugé nécessaire à la stabilité du vaisseau, pour le rempla-



cer en pierre, d'élever tout le lest autant qu'on pourroit sur les ailes, ou sur le bout des varangues, & de faire enforte que cette plus grande quantité de lest ne fît pas trop baisser le centre de gravité commun du vaisseau par rapport au meta centre, ou n'augmentât pas trop la stabilité: c'est là le moyen de faire un bon arrimage, & de tirer le meilleur parti d'un vaisseau, dont le plan a été bien fait & bien combiné.

Ceci doit s'appliquer aux vaisseaux de la Compagnie des Indes, comme aux vaisseaux Marchands; un bon Constructeur, connoissant l'objet du Commerce, & la destination de chaque vaisseau, combine l'espèce & le poids des matières qu'il doit porter, & lui donne des capacités, un tirant d'eau & une figure relatives; mais si on changeoit l'espèce & la pesanteur spécifique des marchandises ou effets que ce vaisseau devoit porter, il faudroit augmenter, diminuer, ou supprimer la quantité de lest, relativement à la différence du poids de ces marchandises.

Si on chargeoit, par exemple, un vaisseau de canons, de mortiers, de fer ou de plomb, dont la pesanteur spécifique seroit considérablement plus grande que celle des matières qu'il devoit porter, il ne faudroit pas remplir sa calle de ces canons, fer, &c; parce que, leur pesanteur étant beaucoup plus forte que leur déplacement, le vaisseau couleroit bas sous ce chargement; mais il faudroit en mettre seulement une quantité d'un poids égal au port du vaisseau, en tonneaux de poids, qu'il faut bien distinguer du tonneau d'arrimage. Le tonneau de poids est comme nous l'avons dit ci-dessus de 2000 livres, & sert pour exprimer le poids du déplacement d'eau du vaisseau, ou le poids de la charge. Le tonneau d'arrimage est de 42 pieds cubes, & sert pour mesurer l'espace, ou ce que peut contenir la calle, l'entrepont, &c. du vaisseau.

Comme cette espèce de chargement en canons, &c. seroit beaucoup plus lourd, tiendroit moins d'espace dans la

calle, & auroit son centre de gravité beaucoup plus bas que le chargement ordinaire, la stabilité du vaisseau en seroit considérablement augmentée, & sa cocque, ainsi que sa mâture seroient en grand danger par la vivacité des mouvemens du rangage & du roulis; c'est ce que l'expérience ne prouve que trop souvent pour de pareils arrimages faits au hazard.

On a jusqu'aujourd'hui regardé comme impossible ou très-difficile de faire un bon arrimage de cette espèce. Le sûr moyen d'y réussir est de répandre & d'élever tout ce chargement qui occupera peu d'espace dans la calle, de façon que son centre de gravité se trouve à-peu-près semblablement placé par rapport à la longueur du vaisseau, & à la même distance au-dessous du meta-centre, que devoit être le centre de gravité du chargement ordinaire.

On peut se servir de plusieurs moyens pour élever ce chargement ou ces canons audeffus de la carlingue ou du fond de la calle; je préférerois un grillage de bois de sapin le plus léger, où je pratiquerois le plus de vide, aux autres matières, comme fagots, billettes, &c, qui se compriment & se broyent dans les mouvemens du vaisseau, & ne produisent plus leur effet.



## C H A P I T R E I I I .

*Des inconvéniens qui doivent résulter des méthodes usitées dans les Ports pour lester & arrimer les Vaisseaux, & des remèdes qu'on pourroit y apporter.*

ON a pensé, & beaucoup de personnes pensent encore aujourd'hui dans les ports qu'il n'y a aucune règle certaine pour bien arrimer les vaisseaux. Chacun veut arrimer à sa fantaisie ; en général, on veut une trop grande quantité de lest pour naviguer avec plus de sûreté, & mieux porter la voile.

L'un veut plus de lest de fer & le placer dessus, ou le plus près de la carlingue ; l'autre veut plus de lest de pierre, & pense que le lest de fer doit être plus élevé & placé sur l'extrémité des varangues ; qu'il doit être répandu dans la calle de telle ou telle façon ; que le vaisseau doit être mis sur ce lest à la différence qu'il avoit lorsqu'il a été mis à l'eau ; que cette même différence du tirant d'eau ou assiette doit lui être conservé, quand il est chargé.

Toutes ces différentes opinions prouvent la disette des principes, & que c'est le hazard qui fait faire presque tous les arrimages des différens ports ; doit-on s'étonner des inconvéniens qui en résultent ?

On voit le même vaisseau dans une campagne avoir d'excellentes qualités, les mouvemens doux, une belle batterie, bien gouverner, bien marcher, bien porter la voile, & dans une autre campagne avoir toutes sortes de défauts.

On voit deux vaisseaux faits sur le même plan , sur le même gabarit ou sur le même moule , partir ensemble , & avoir des qualités toutes différentes : doit-on s'en étonner , s'ils sont différemment arrimés & lestés , & s'ils n'ont pas le même tirant d'eau & la même assiette ?

On voit enfin des vaisseaux rompus , arqués ou déliés avant le tems , parce que pour leur donner une assiette ou une différence de tirant d'eau qu'ils ne devoient pas avoir , on a chargé l'une ou l'autre de leurs extrémités de lest ou autres poids , ce qui a rendu les mouvemens de tangage trop durs , & fait rompre les parties surchargées.

Voilà les inconvéniens trop fréquens d'un arrimage fait au hazard , & suivant le caprice de quelqu'un qui ne connoît pas le vaisseau qu'il arrime , & qui se croit assez savant , & a trop d'amour-propre pour consulter ou écouter les avis d'un habile Constructeur , qui gémit de voir son vaisseau mal arrimé , & toutes ces combinaisons infructueuses.

Je ne dois pas dissimuler que c'est autant la faute des Constructeurs que des Marins ; si ces préjugés se sont introduits dans les ports , on faisoit autrefois , & l'on fait encore aujourd'hui , même dans les Ports du Roi , la plupart des vaisseaux au hazard , il n'est pas étonnant qu'on les arrime encore au hazard.

Le seul & plus sûr remède , qu'on puisse apporter à ces inconvéniens , est de ne confier la construction des vaisseaux qu'à des Constructeurs instruits , qui soient en état de combiner & calculer leurs plans , comme je l'ai expliqué dans le Chapitre précédent , & de charger ces mêmes Constructeurs de veiller dans les ports à l'arrimage de leurs vaisseaux , afin qu'ils soient faits relativement à leur projet , ou à la différente destination de ces mêmes vaisseaux.

Il conviendrait aussi d'engager les Marins de se conformer aux instructions qui leur seroient données par les  
Constructeurs

Constructeurs des vaisseaux qu'ils commanderoient, pour leur conserver, dans le cours de la navigation, autant que la consommation des vivres, de l'eau, & des autres munitions peuvent le permettre, le tirant d'eau le plus parallèle à celui qu'ils avoient en partant, & le plus avantageux à leurs bonnes qualités, & à la douceur de leurs mouvemens.

On doit juger, par tout ce que je viens de dire, de quelle conséquence il est, pour le bien du service, d'avoir des Constructeurs instruits ; ce n'est que par leur moyen que le Roi & la Compagnie des Indes peuvent réussir à avoir d'excellens vaisseaux, & à les garantir des accidens qui peuvent provenir d'un mauvais arrimage, qui contribue autant à leurs mauvaises qualités, qu'à leur peu de durée.

Il seroit même à desirer, pour le bien de l'État & du Commerce, que la construction des vaisseaux Marchands fût confiée à leurs soins, & non à des Charpentiers ignorans, qui font au hazard les vaisseaux qui demandent le plus de combinaison, & dont l'arrimage ne peut qu'être aussi fait au hazard. Ces vaisseaux Marchands n'ont ni marche, ni qualités, tirent beaucoup d'eau, ont besoin de beaucoup de monde pour manœuvrer, & sont sûrement pris en tems de guerre, dès qu'ils sont aperçus.

On pourroit faire des vaisseaux de même port, qui ne couteroient pas plus cher, navigueroient avec moins de monde, tireroient beaucoup moins d'eau, auroient d'excellentes qualités, & marcheroient comme des frégates. Ces vaisseaux, en tems de paix, procureroient, par de plus courtes traversées, plus de profit aux Armateurs, & la santé aux équipages : en tems de guerre, ils approvisionneroient plus sûrement les Colonies, feroient le Commerce avec moins de risque, & conserveroient à l'État,

par leur marche supérieure, des Matelots, dont l'espèce est aussi précieuse que rare, parce qu'ils sont presque tous pris dans les mauvais vaisseaux Marchands & Corsaires mal construits, & périssent dans les prisons.

Ce que je dis ici, sur la meilleure construction des vaisseaux Marchands, n'est point une idée, ni un problème à résoudre. Il est des Constructeurs qui en ont démontré la possibilité & la vérité, tant pour les vaisseaux de la Compagnie, que pour les flutes & bâtimens de transport, qu'ils ont construits pour des particuliers auxquels ils ont sçu procurer une marche supérieure avec les qualités de porter beaucoup, de tirer peu d'eau, & de naviguer avec peu de monde.

L'on doit sentir le prix de pareils Constructeurs aussi utiles que savans, pour porter à ce haut degré de perfection un art aussi difficile que nécessaire, & l'on ne devrait rien épargner pour les encourager, & en augmenter le petit nombre, en distinguant leur état, & rétablissant les Écoles qui ont formé d'ailli excellens sujets.

Il peut arriver néanmoins qu'on ait à arrimer un vaisseau fait au hazard, & dont on ne connoît ni le plan, ni la stabilité, ni l'assiette; il faut alors que l'intelligence des Constructeurs & Officiers qui doivent arrimer ce vaisseau, supplée à l'ignorance de celui qui l'a fait. On peut avoir à-peu-près la figure de la carène, en la mesurant à différentes hauteurs & largeurs, déterminer en conséquence la quantité de lest, le chargement, & le tirant d'eau que l'on estime le plus avantageux; mais ce n'est que par les observations & les expériences que l'on doit faire dans le cours de la navigation, que l'on peut porter cet arrimage à son point de perfection.

Si on s'apperçoit à la première campagne que ce vaisseau ne porte pas bien la voile, il faudra augmenter la quantité de lest, ou bien lui donner un lest d'une pesanteur

spécifique plus forte ; s'il a des mouvemens trop durs , il faudra au contraire diminuer son lest, ou supprimer celui de fer pour le remplacer en pierre ; s'il ne gouverne pas bien , il faudra changer son assiette , en distribuant autrement son lest , ou son chargement. Enfin , il faudra se servir , pour corriger l'arrimage de ce vaisseau , des principes établis dans ce Mémoire , & des défauts qu'on aura reconnus pendant le cours de sa navigation , qui peuvent provenir , & de la mauvaise construction du vaisseau , & de ce qu'on n'avoit pas d'abord trouvé l'assiette qui lui convenoit.

### C O N C L U S I O N.

Les différentes Méthodes que j'ai données , pour arrimer dans différens cas , & avec des chargemens différens , les vaisseaux du Roi , de la Compagnie des Indes , & les vaisseaux Marchands , sont applicables , & peuvent convenir aux vaisseaux de toutes sortes de grandeurs , & de différentes espèces

Elles m'ont paru suffisantes pour faire connoître le poids & la distribution des matières qu'on y emploie , l'effet qu'elles produisent sur le sillage , sur les lignes d'eau , sur les propriétés de bien gouverner , de bien porter la voile , d'être doux à la mer , & sur les autres qualités d'un vaisseau , les inconvéniens dont les méthodes usitées dans les ports sont susceptibles , & les remèdes qu'on peut y apporter.

L'on peut en conclure que la seule & bonne façon de bien arrimer , & lester un vaisseau , est de connoître son plan , ses capacités , sa stabilité & son assiette , de les comparer aux poids qu'il doit porter , & déterminer en conséquence la distribution de sa charge , & la quantité , l'espèce & la position du lest qu'on doit lui donner , afin que chaque chose étant à sa place , le vaisseau ait le tirant d'eau ,

la hauteur de la batterie, & toutes les autres qualités projetées; c'est - là l'ouvrage du plus habile Constructeur: Personne ne peut mieux que lui connoître son vaisseau, & l'arrimage qui lui convient.

*Hoc opus hic labor est.*

Je pourrois donner ici les méthodes de calculer les capacités, la stabilité & l'assiette du vaisseau; mais je ne ferois que répéter ce qu'ont écrit à ce sujet M Bouguer dans son Traité du Navire, & M. Duhamel dans son Traité de Construction.

L'on trouvera dans ces deux excellens Ouvrages, non-seulement ces méthodes; mais encore tous les calculs les plus difficiles que doit savoir le meilleur Constructeur, & qui ont servi de base à ce Mémoire; je ferai très flatté s'il peut être utile aux Marins, & remplir les vues de l'Académie.

*F I N.*



Fig. 3.

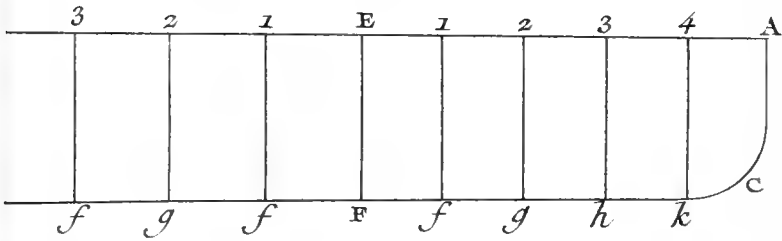


Fig. 2.

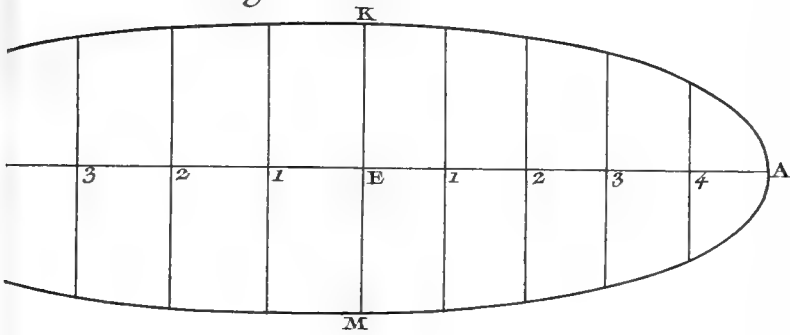


Fig 1<sup>ere</sup>

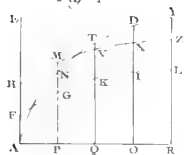


Fig 3

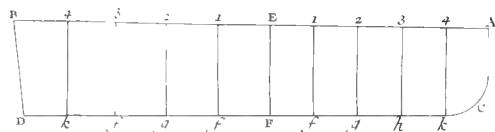


Fig 4

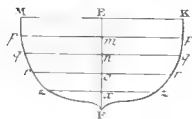
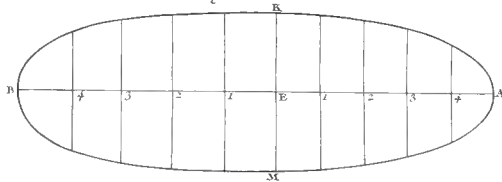
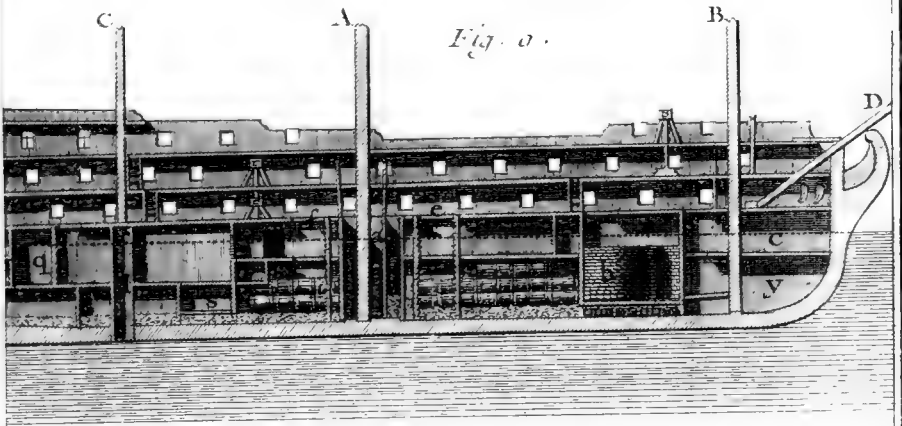


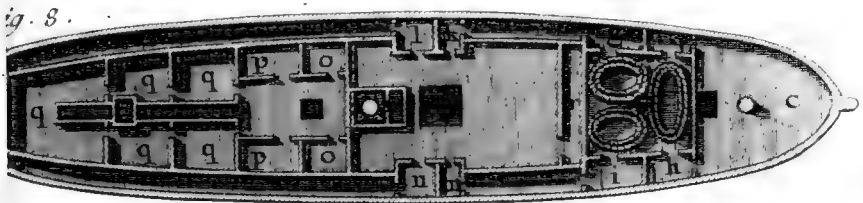
Fig 2



Coupe sur la longueur du Vaisseau l'Altier.



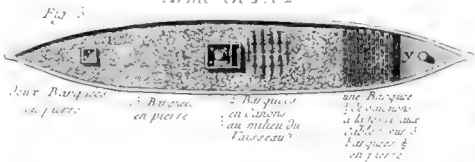
Plan à fleur d'eau du Vaisseau l'Altier.



Renvoy

- A. Grand Mât
- B. Mât de Misaine
- C. Mât de Trinquet
- D. Mât de Beugne
- a. Archipompe Du grand Mât
- b. Escabeaux aux Câbles
- c. Escabeaux aux Locons
- d. Archipompe de Misaine
- e. Grand Escotail
- é. Escotille aux vivres
- g. Soute au Voilier
- g. Soute au Calfat
- h. Soute au Pilote
- i. Soute au Charpentier
- y. Mât aux moules, poulies &
- k. Soute aux Gardes Marines
- l. Soute au Charbon
- m. Soute au Chirurgien
- n. Soute au Capitaine
- o. Soute aux Legumes
- p. Case Du Capitaine
- q. Soute au Pain
- r. Chambre aux Toiles
- s. Soute aux Poudres
- t. Caissons à Poudre

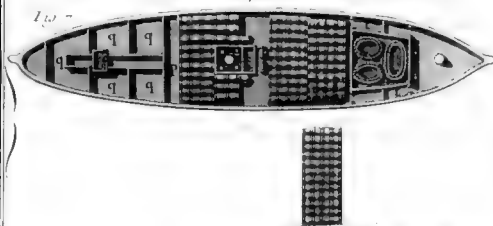
Plan en Lest du Taisseau l'Altier de 64 Canons Armé en 1762



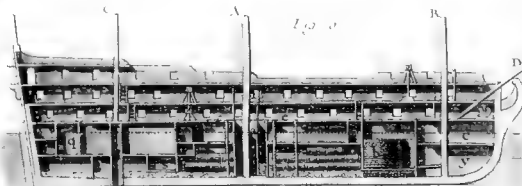
1<sup>er</sup> Plan des Barriques du Taisseau l'Altier



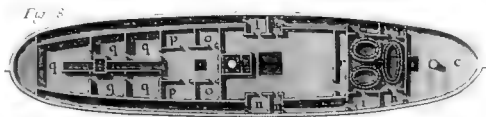
2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> Plan des Barriques du Taisseau l'Altier



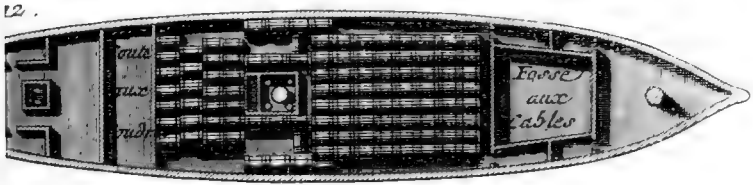
Coupe sur la longueur du Taisseau l'Altier



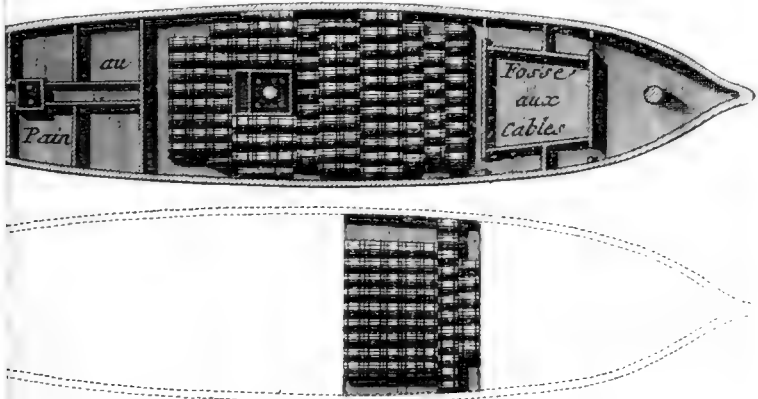
Plan à fleur d'eau du Taisseau l'Altier



1.<sup>er</sup> Plan des Barriques.



2.<sup>e</sup> et 3.<sup>e</sup> Plan des Barriques.



1<sup>er</sup> Plan en Lest du Vaisseau le Kentasque de 64 Canons  
Armé en 1700



Barrière de Lest 2 Barrières  
à l'Avant sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière

1<sup>er</sup> Plan des Barriques



2<sup>e</sup> Plan en Lest



Dans le 1<sup>er</sup> Barrière en Lest  
et le 2<sup>e</sup> Barrière en Lest  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière  
à l'Arrière sans place en Canonnière

2 et 3<sup>e</sup> Plan des Barriques

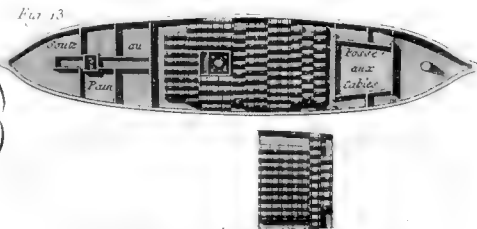


Fig. 15.

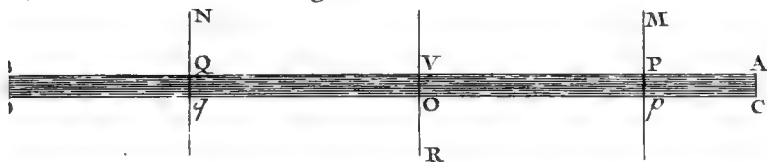
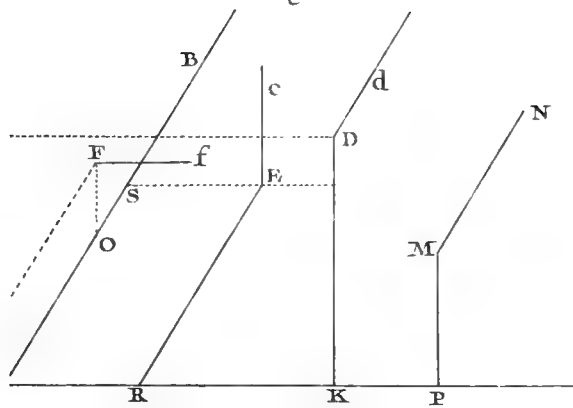
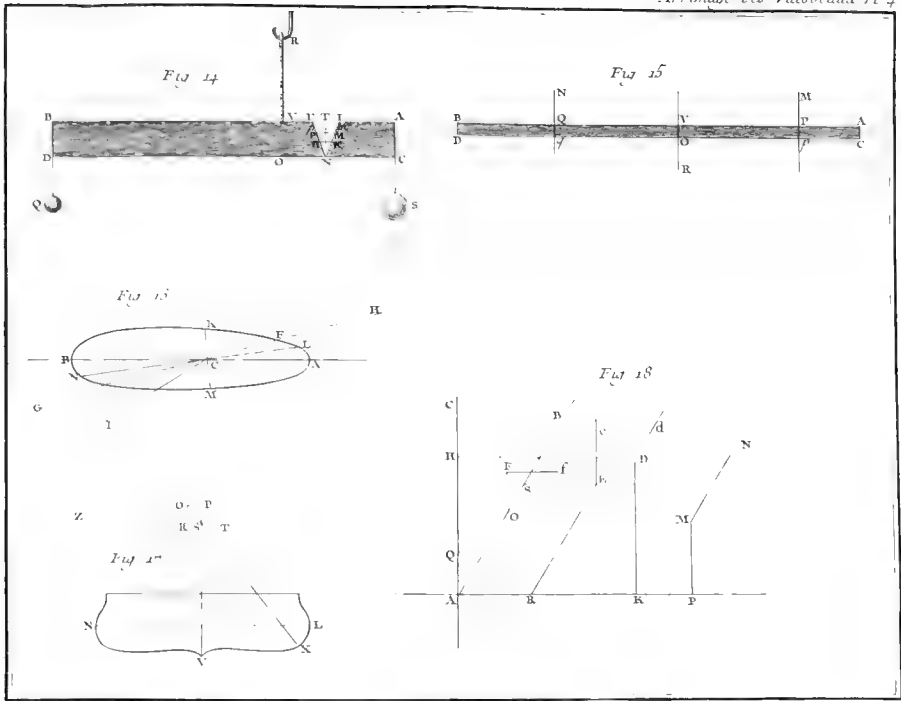
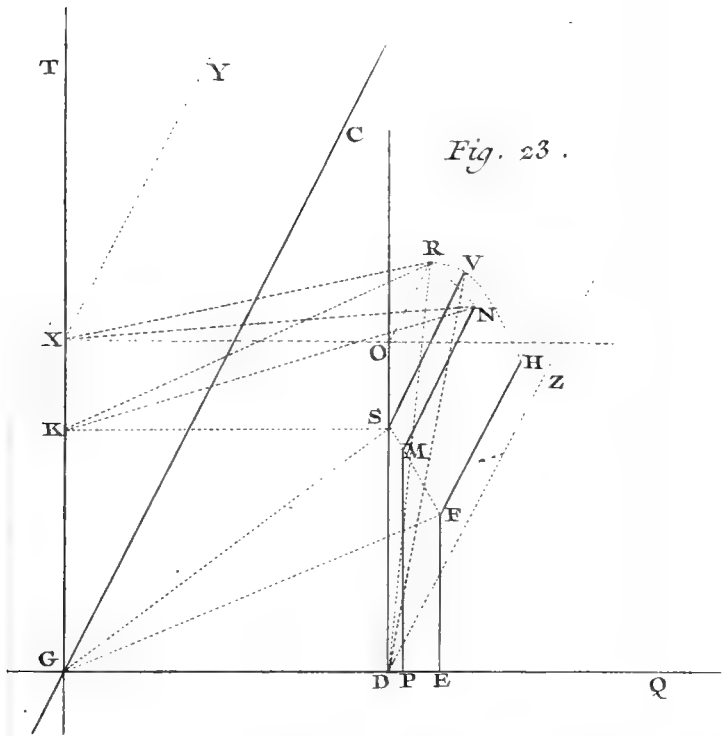
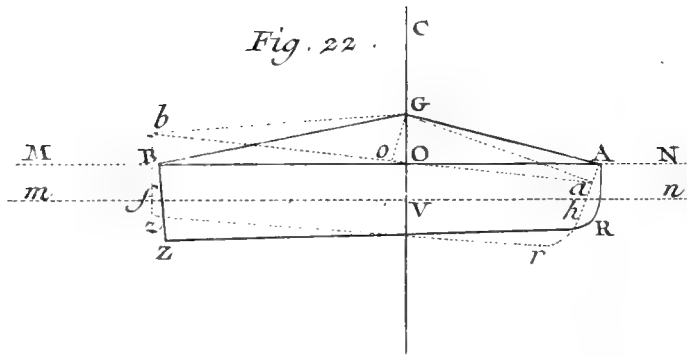


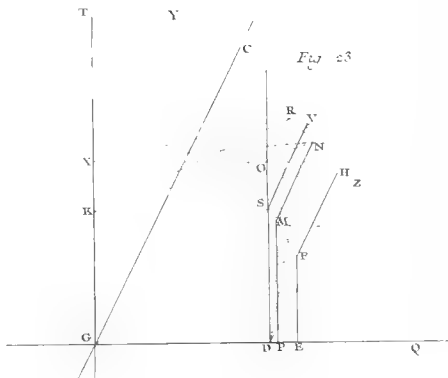
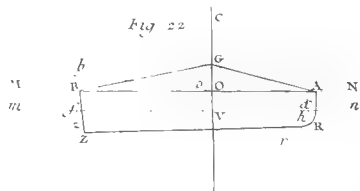
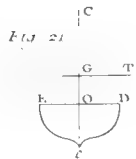
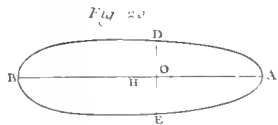
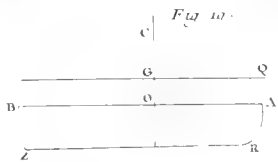
Fig. 18.











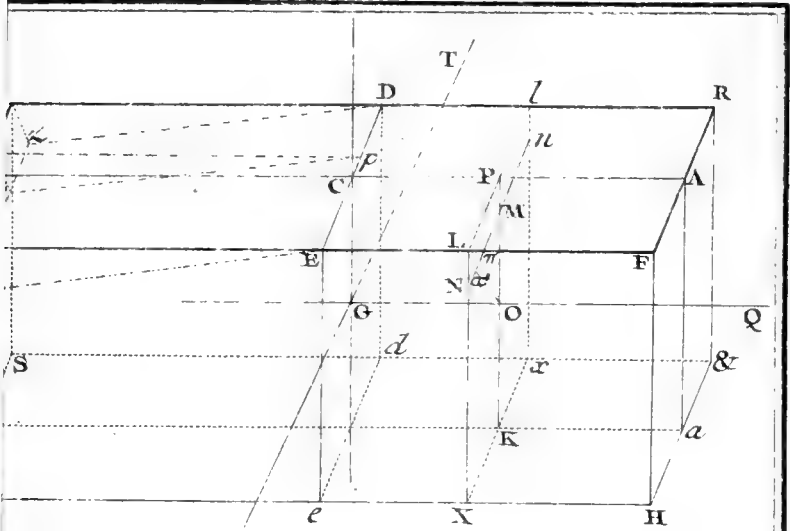


Fig. 27.

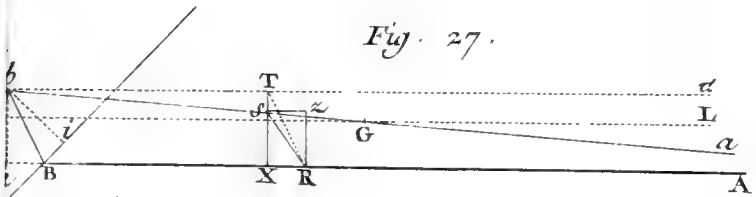
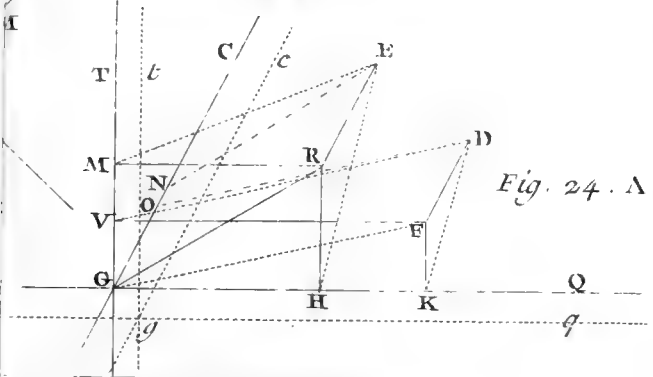
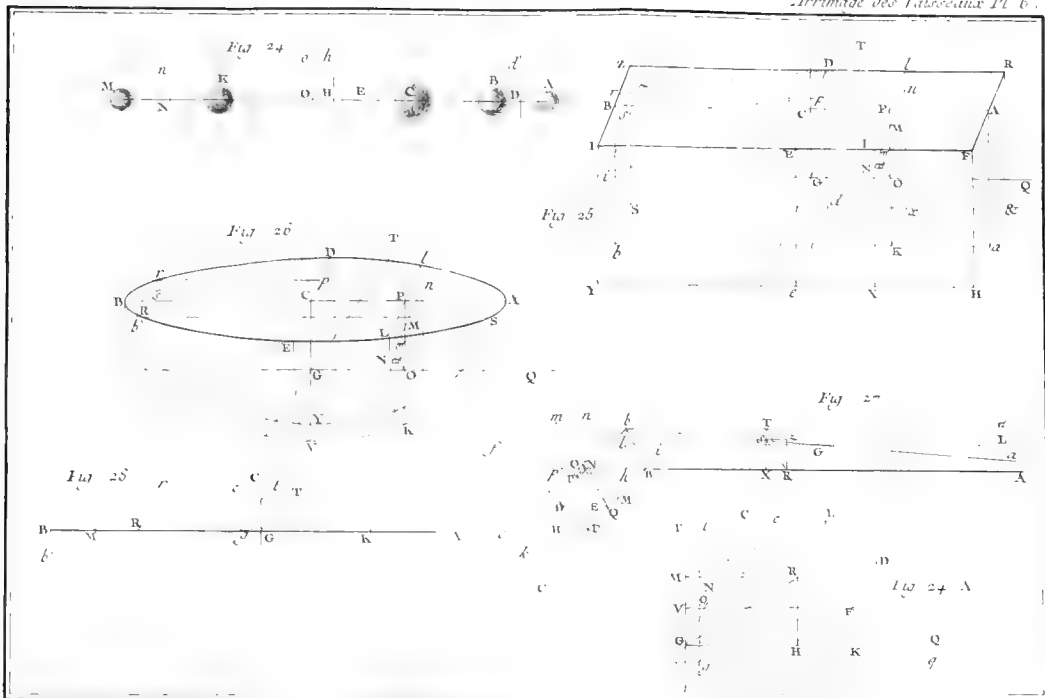
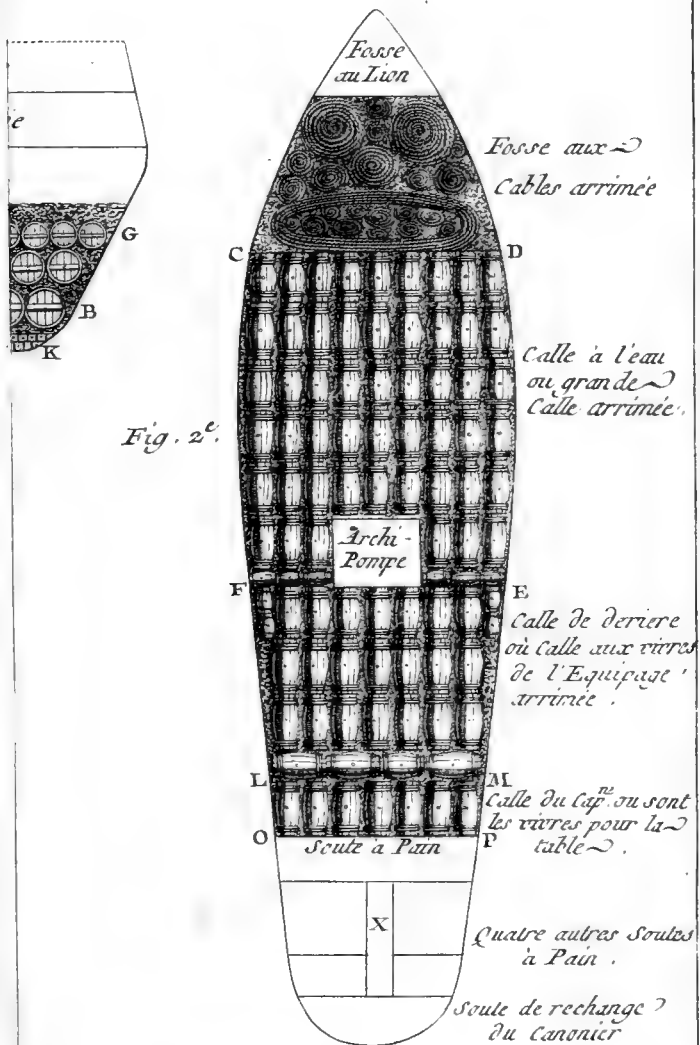


Fig. 24. A.





de Piece par M.<sup>r</sup> Bourde'.



Seconde Piece par M. Bourde.

Fig 1<sup>re</sup>

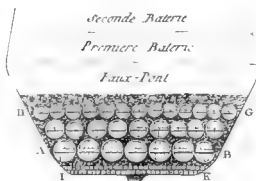
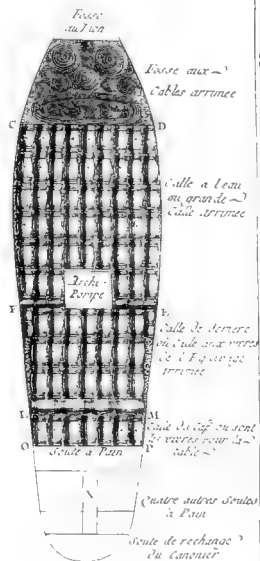


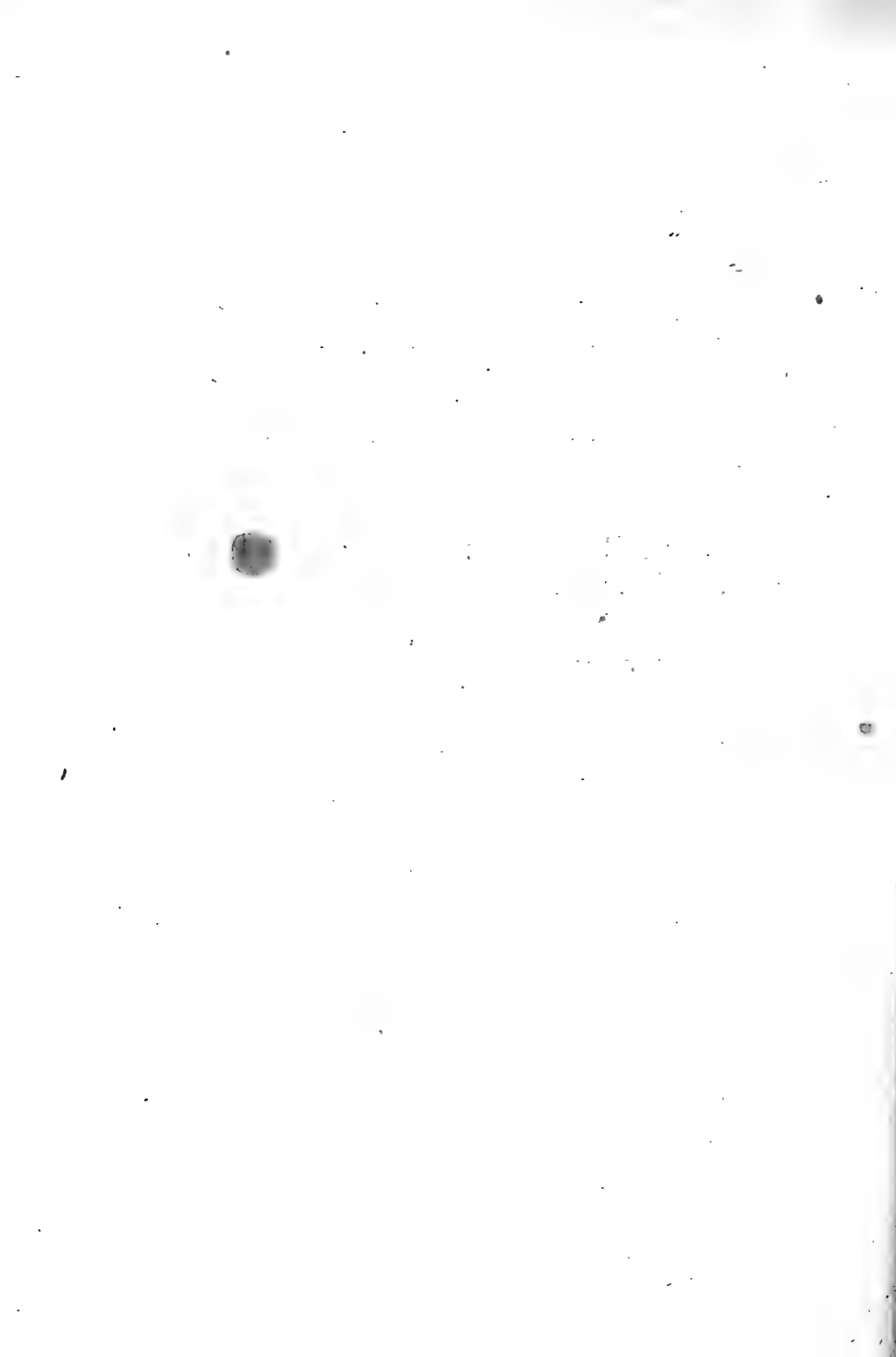
Fig 2<sup>e</sup>



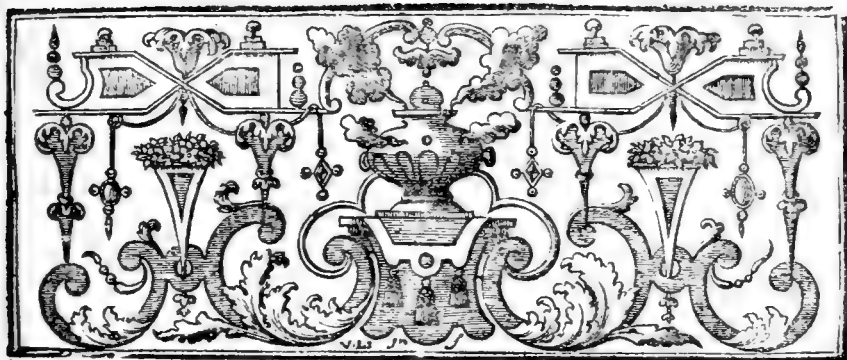
# DE L'ARRIMAGE DU NAVIRE.

PIÈCE qui a remporté le prix proposé par  
l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris  
pour l'année 1766.

*Par M. BOURDÉ DE VILLEHUET, Officier des  
vaisseaux de la Compagnie des Indes, à Saint-  
Malo.*







# DE L'ARRIMAGE DU NAVIRE.

---

*Les qualités du Navire se feront  
connoître par un bon arrimage.*

---



**A**RRIMAGE est l'art de disposer & d'arranger tout ce qui entre dans un vaisseau, le plus solidement & le plus avantageusement possible, pour que tout se conserve sans avarie, en même tems que l'on conservera aussi, par l'arrangement des effets, les qualités du navire.

## DÉFINITIONS.

Le rang se forme par des futailles, ballots ou caisses *Figure I.* que l'on arrange à côté les uns des autres sur la même ligne, comme AB, d'un travers du vaisseau à l'autre.

L'antenne est composée de rangs au-dessus les uns des autres & vus par le bout verticalement comme ABGH.

Figure II. Le plan est composé de rangs bout à bout en vue d'oiseau, comme CDEF.

Figure I. Le premier rang est le principe du premier plan qui est arrimé sur un petit grenier de bois de billetes que l'on fait au dessus du lest IK, quand il est en fer ou grosses pierres, afin d'empêcher les futailles de porter en plein & de se crever au mouvement, ou par leur propre poids.

Il suit de ce que nous venons d'expliquer, qu'un arrimage entier est composé de plans, si on en fait autant de tranches horizontales qu'il y a de rangs dans l'antenne.

Il est composé d'antennes, si on en fait autant de tranches verticales qu'il y a de rangs dans le plan.

La premiere figure représente une antenne entière d'un vaisseau de guerre, formée du lest, du grenier, des trois rangs de futailles arrimées & garnies de bois à brûler, soutenues de leurs pailles d'arrimage, & appuyées de leurs coins; le tout étant baroté de bois à feu.

La seconde figure représente le troisième plan d'un vaisseau de guerre découvert; on y voit le plan de la calle à l'eau CDEF garni de bois ainsi que les futailles en bréton EF, la calle aux vivres de l'équipage EFLM, avec des torains remplis de barillages & de pièces en bréton LM.

On voit à la suite la calle du Capitaine LMOP arrimée & les soutes à pain avec leurs courcives X.

On voit en avant la fosse au lions, & celle aux cables, greslins, aussières, & cordages de rechange de toute espèce.

### *Description de l'usage de lester & arrimer un Vaisseau de guerre.*

Les vaisseaux de guerre n'ont ordinairement que du fer pour lest, soit en gueuses, vieux canons, morceaux d'ancres, ou autres.

On donne aux vaisseaux plus ou moins de lest, quoique de même grandeur; souvent un vaisseau plus petit demande plus de lest qu'un plus grand; cela dépend de leurs formes. Le vaisseau fin en demande plus que le vaisseau qui est à plattes varangues, parce que son centre de gravité est plus haut, & ils peuvent cependant avoir la même propriété de bien diviser le fluide.

J'ai été sur le Comte de Provence, vaisseau de 74 canons, qui par ses qualités supérieures, fera toujours honneur à son constructeur: il avoit 160 pieds de quille, 176 de longueur, absolue & 43 pieds de bau de dehors en dehors les membres; ses maitresses varangues étoient plattes, c'est-à-dire sans acculement; son lest n'étoit que de 90 à 100 tonneaux en fer, & il étoit en tout temps fin voilier, même après être rompu & cassé; il rouloit & tanguoit peu; le seul défaut de ce vaisseau unique étoit sa charpente, défaut dans lequel tombent aujourd'hui tous les constructeurs, défaut en un mot qui ruinera l'état maritime en France, si on n'y remédie pas: le vaisseau le Comte de Provence marchoit comme les meilleures frégates. J'ai passé ensuite sur le vaisseau le Fortuné de 64 canons qui pouvoit passer pour une grande frégate, par ses qualités, sa figure & sa forme; sa quille étoit de 146 pieds, sa longueur absolue n'alloit pas au-delà de 156, & son bau de dehors en dehors les membres étoit de 40 pieds; ses maitresses varangues étoient fort acculées, & son lest étoit de 120 tonneaux en fer & de 30 tonneaux en petits cailloux, dans lesquels on engravoit le premier plan dans les calles à l'eau & aux vivres; il étoit fin voilier, mais le Comte de Provence avoit au moins  $\frac{1}{2}$  de marche de plus. Ces vaisseaux armés l'un à 4 pieds 8 pouces de batteries belle, & l'autre à 6 pieds, & 5 pieds 10 pouces, portoient pour six mois de vivres à 600 & 700 hommes, ce qui est toujours aisé à approximer en tonneaux, parce que les

Ordonnances fixent ce qu'il faut pour chaque homme ; ainsi que la quantité des autres effets d'armement.

On fait un plan du lest sur le vaigrage du fond de la grande calle, & calle aux vivres ; on en met aussi en avant sous la plateforme de la fosse aux cables, en arrière sous celle des soutes à poudre, de manière que le vaisseau sur son lest soit au tirant d'eau d'arrière & d'avant désigné par le Constructeur ; ensuite travaillant dans la calle à l'eau (ou dans toutes les calles en même temps) on fait un lit de bois de billetes, & l'on arrime par-dessus le premier plan d'eau, en bottes de quatre, employant des pailles d'arrimage (2), que l'on met en travers sous les bouts des pièces, pour les élever, afin d'empêcher le ventre des futailles de porter avec tout leur poids sur les billetes qui couvrent le lest ; & lorsque la première pièce est bien parallèle au plan du lest sur ses pailles, on la coince avec quatre coins, deux de chaque bord, pour l'affujettir & lui ôter tout mouvement dans les plus grands tangages ou roulis du vaisseau ; cette pièce une fois placée au milieu de son rang, répondant sur la quille, & joignant exactement la cloison de la fosse aux cables, on continue d'arrimer les autres pièces des deux bords pour achever ce rang, en allant chercher les côtés du vaisseau de travers en travers ; quand il est fini, on remplit le plus exactement possible l'entre-deux des pièces par dessous de bois de billetes, ainsi que les vides qui se trouvent quelquefois à bord ; ce rang ainsi achevé, on en recommence au milieu un second parallèle au premier, que l'on conduit de la même manière, avec les mêmes précautions & la même exactitude, faisant toujours ensorte qu'une

---

(2) On appelle *pailles d'arrimage* des bûches de 3 à 4 pieds de long & de 5 à 6 pouces de diamètre, que l'on met en travers sous les bouts des futailles que l'on arrime.

pièce ( n'importe dans quel rang elle se trouve ), ne soit jamais plus haute que les autres ; car il faut absolument que tout ce qui compose le premier plan d'un arrimage soit de niveau , afin qu'il ne se trouve point d'inégalités dans le second , qui doit être arrimé par-dessus le premier avec le même soin & la même régularité ; soit qu'il doive être composé de pièces de quatre ou de trois , ou mêlé de ces deux espèces de futailles , dessous lesquelles on met le bois nécessaire pour remplir les vides qui se trouvent entre les pièces du premier plan. On met dessous tout ce second plan des pailles , qui doivent porter en plein sur les billettes de garniture du premier , & sur les bottes de dessous : ensuite on assujettit les pièces que l'on arrime avec des coins , & de la même manière qu'au premier plan , ayant bien attention que tous les jables des futailles qui sont bout-à-bout , se joignent bien exactement , remplissant toujours de bois les vides ( ou interstices ) qu'elles laissent entr'elles par les bouges ; le second plan achevé , on procède à l'arrimage du troisième , qui est ordinairement composé de pièces de deux , & quelquefois mêlé de pièces de trois ; dans les uns & les autres de ces plans on met dans les forains des barriques , afin de ménager l'espace & de n'en point perdre , sur tout quand il s'agit d'entreprendre de longues traversées , dans lesquelles on n'a jamais trop d'eau ; on n'épargne pas non-plus le bois à brûler , crainte d'en manquer , & l'on ne manque jamais de baroter avec ce dernier.

Si , en arrière de chaque plan , il se trouve trop peu d'espace , quand il est fini pour arrimer de long quelques pièces , on tâche de les placer en bréton ; mais on ne pratique cette manière que quand on ne peut pas faire autrement , & pour ménager l'espace sans le perdre , si on ne peut pas mettre de futailles d'une façon ou de l'autre , on remplit de bois , & tout l'espace est employé.

Dans la calle aux vivres , on dispose l'arrimage comme

nous venons de le voir, observant de mettre dans le fond les futailles les plus considérables & les plus pesantes en liqueurs ou viande salée, plaçant au premier plan ce qui doit être consommé le dernier ou en retour; au second ce dont on a besoin quelque tems après être en mer, ce qui est ordinairement contremarqué, tant pour les boissons, que pour les viandes, beurres, graisses, huiles & légumes, ou farines; dans le troisième plan & dans les vides qui se trouvent au-dessus, on met tout ce qui sera d'abord consommé en partant, disposant les choses de manière qu'à mesure qu'on les consume, on puisse découvrir celles dont on aura besoin tout-de-suite après.

Quoique la calle du Capitaine soit fort petite, en comparaison des autres, on l'arrime cependant de la même manière que celle aux vivres de l'équipage & avec les mêmes précautions.

Les soutes à poudre sont remplies de barrils qui contiennent chacun cent ou deux cens livres de poudre de guerre, & comme ils sont fort maniables, on les arrime très-aisément les uns sur les autres par plans, & de manière à n'avoir point de jouement; on remplit les coffres à poudre de gargouilles pleines, & l'on place dans les différens endroits ou forains des soutes, les méches & autres ustensiles susceptibles d'embrâsement, & qui ne sont jamais d'un grand poids.

En avant de la calle à l'eau est la fosse aux cables, on les y arrime, en les rouant ou cueillant de façon qu'il y en ait toujours au moins trois de parés à entalinguer: les uns mettent la grande touée (3) sous le panneau; d'autres la placent tout-à-fait sur l'avant de la fosse aux cables;

---

(3) La grande touée est composée de deux cables de même grosseur, & quelquefois de trois épices bout-à-bout. J'ai vu un vaisseau de guerre anglois qui avoit une touée de 7 cables: on s'en sert pour mouiller dans un grand fond, ou pour tenir contre un fort coup de vent.

mais de quelque façon que ce soit, on tient les autres cables tribord & bas-bord vis-à-vis l'un de l'autre, plaçant les greffins & aunières dans les cables ou entr'eux, ainsi que le gros cordage de rechange, laissant toujours l'espace nécessaire pour passer librement les poudres qui sont en gargouffes sous la fosse aux lions dans des coffres d'attache doublés de plomb, dont les ouvertures se regardent, étant séparés par une petite courcive. ( Ces coffres doivent contenir deux mille coups de canon). Dans la fosse aux lions se place tout ce qui concerne le rechange du Maître-d'équipage, en menus cordages, comme le petit filain, carenthunier, lusin, merlin, ligne d'amarrage, bitord, fil de caret, suif, huile à brûler, goudron, &c.

Depuis la fosse au lions en arrière, jusqu'aux soutes à poudre & à pain qui sont au-dessus les unes des autres, est compris le faux-pont, porté par les faux baux, au-dessous desquels est fait l'arrimage que nous avons détaillé.

Au-dessus de la fosse aux cables, entre les cloisons du théâtre & de la fosse aux lions, est compris un espace faisant partie du faux-pont, dans lequel on trouve des soutes à grain, la soute du Voilier de travers en travers sur l'avant, celles du Charpentier, du Tonnelier & du calfat; les unes & les autres contiennent tout ce qui est propre à ces différens états pour le voyage, à l'exception du brai, goudron & suif, que l'on place dans les forains des autres endroits, parce qu'ils font d'un trop gros volume pour entrer dans les petites soutes, autour desquelles règnent les galeries du vaisseau. (Galerie, dans ce sens, se dit d'un espace libre autour du vaisseau par-dessus le faux-pont, pour boucher en dedans les coups de canon que l'on peut recevoir à l'eau pendant un combat: les galeries ont ordinairement trois pieds de large).

Le théâtre ou poste du Chirurgien est compris entre les cloisons de la cambuse (4) & de la fosse aux cables,

(4) *Cambuse*, lieu où l'on distribue, à tous les repas, les vivres de l'Équipage.

dans tout l'espace qui est au-dessus de la grande calle ou calle à l'eau ; il doit être absolument vide de tout ce qui pourroit gêner les malades ou blessés, & contenir ce qui regarde les médicamens & les choses propres aux pansemens.

En arrière du théâtre, entre les cloisons des soutes à pain & du théâtre, au-dessus des calles aux vivres, est la cambuse autour de laquelle il y a plusieurs aménagemens, pour le Capitaine, en soutes qui contiennent différentes choses propres à l'avitaillement de table.

En arrière de tout cela sont les soutes à pain, & une petite soute de rechange tout-à-fait sur l'arrière pour les ustensiles du Canonier ; entre les soutes à pain il y a une petite courcive pour le passage des poudres qui vont se distribuer pendant le combat au panneau de la cambuse.

Il y a quelquefois des changemens dans la distribution de la calle d'un vaisseau de guerre ; mais comme il n'est pas possible d'entrer dans le détail de ces sortes de choses qui peuvent être variées à l'infini, selon les différentes circonstances & les différentes idées, je m'en tiendrai à ce que je viens d'expliquer, comme à ce qu'il y a de plus usité & de meilleur, à ce que je crois.

### OBSERVATION.

Quand au lieu d'avoir tout en lest de fer, on a du cailloutage, & que l'on craint qu'il monte trop haut, ou que le vaisseau soit trop rude dans ses roulis, on engrave le premier plan d'eau parmi les cailloux qui doivent être les plus petits possibles, afin que le lest ne soit pas trop mat, c'est à-dire, que le centre de gravité du lest ne soit pas trop au-dessous de celui du vaisseau chargé & prêt à prendre la mer, parce qu'il le rappelleroit trop vite, & donneroit trop de vivacité au roulis.



*Description de l'usage de lester & arrimer un vaisseau de charge.*

Les vaisseaux qui chargent en marchandises ou en flutes, prennent tant d'effets différens dans leurs cargaisons, qu'il est impossible d'entrer dans le détail de ces sortes d'arrimages: d'ailleurs chaque port & chaque navigation ont leurs différentes manières adoptées; ainsi nous ne pouvons que supposer une cargaison compliquée, & qui ne ressemblera peut-être à aucune de celles qui composent le chargement des vaisseaux que l'État employe à son commerce; mais comme il faut partir d'après quelque chose, je me propose un vaisseau qui doit charger en plein de fer & plomb, de canons & d'ancre, de vin ou eau-de-vie, farines, viandes, toiles & ballots de différentes marchandises sèches, &c.

Les canons & ancre sont ce qu'il y a de plus embarrassant dans un arrimage; mais on en tire parti, en arrimant d'abord pour lest les canons ou mortiers que l'on met sur un petit lit de billettes; on place les canons de long, arrimant tout d'un temps entre les pièces les verges des ancre, mettant des semelles dessous les angles des becs qui doivent être arrimés à plat, de sorte qu'il ne paroisse rien au-dessus des canons, & de façon que le vaisseau soit à son tirant d'eau tel que le Constructeur l'aura donné pour son lest; on égalise ensuite par-tout avec du bois, des boulets, plomb, bombes ou fer vierge: ce grenier est haut, mais on ne fait pas autrement. Si le vaisseau est fort de côté & bien construit, il roule vivement & compromet sa mâturation, au lieu que si on avoit élevé le lest de fer sur un grenier ou fardage de bois à trois pieds de haut, on auroit modéré ce mouvement.

Ce premier plan étant fait, on arrime dessus le vin & l'eau-de-vie de cargaison avec toutes les précautions

possibles, & de la même manière que nous l'avons déjà vu dans l'arrimage du vaisseau de guerre, mettant dans les forains des quarts de viande ou autres petits barrillages, de façon qu'ils ne soient pas trop pressés par les autres marchandises du dessus; ensuite, lorsqu'on a fini d'arrimer bien solidement les marchandises les plus pesantes, on arrime les viandes salées sur les boissons, & par-dessus on met les farines, en appuyant bien le tout avec le bois d'arrimage: on conserve ordinairement la partie de l'arrière de la calle pour les marchandises en ballots & les toiles, en un mot pour tout ce qui doit être conservé le plus séchement (le gaillard d'arrière faisant un troisième pont, met à l'abri de l'eau ces sortes d'effets); on ne perd point d'espace dans la calle, & l'on vient peu à peu à barroter par-tout au plein des écouteilles, depuis la calle à l'eau jusqu'à la cloison des soutes à poudre & à pain.

La calle à l'eau est comprise depuis l'arrière du panneau d'avant jusqu'à l'étrave, & est arrimée par rangs, antennes & plans, de la même manière que nous l'avons déjà dit ci-devant, de sorte que la calle se trouve pleine en total de l'avant à l'arrière.

On met les cables entre pont & tout le rechange, mettant le menu cordage dans les endroits qui se trouvent débarrassés dans des soutes que l'on pratique en avant auprès des cambuses qui sont aussi entre pont, & que je trouverois bien mieux placées au milieu, parce qu'elles ne chargeroient pas l'extrémité du vaisseau, & qu'elles le fatigueroient moins.

Les soutes à poudre sont, comme dans les autres vaisseaux, sous celles à pain; & les boulets, qui ne vont point dans les parcs, se mettent dans l'archi-pompe.

## OBSERVATIONS.

Si un vaisseau est obligé de charger en fer ou plomb, on fait d'abord un grenier en bois de billes haut de trois pieds environ, & on arrime dessus une bonne quantité de fer, en laissant dans le milieu un vide que l'on remplit à mesure avec du bois, afin de balancer le poids des deux côtés de l'axe du mouvement du roulis, en mêlant dans l'arrimage beaucoup de bois parmi le fer, pour le faire monter plus haut, & le rendre moins mat.

D'autres arriment différemment, en faisant d'abord un lit de bois, ensuite un lit de plomb, sur le plomb, un second lit de bois; par-dessus, un second plan de plomb, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le vaisseau soit entièrement chargé, élevant le bois plus ou moins.

Si, au lieu de fer, le vaisseau charge de laine, il prend son lest en fer ou plomb, afin de conserver plus d'espace que s'il prenoit des pierres, qui sont d'un bien plus grand volume, & on le dispose de façon à ne pas rendre le vaisseau trop dur dans ses mouvemens: ensuite on arrime la laine en balles, en se servant de presses, pour ménager l'espace. Les Provençaux, qui font le commerce dans le Levant, appellent cette façon d'arrimer *estiver à traou*.

Les vaisseaux de la Compagnie des Indes, qui chargent richement dans les endroits où son commerce est établi, à Mahé, en poivre; à Pondichéri, en toiles de coton, mouffelines de la côte Coromandel, chittes, mouchoirs de toutes espèces & café moka; à Bengale, en mouffelines fines & poivres; à la Chine, en porcelaines, thé & soieries; aux Isles de France & de Bourbon, en café, prennent beaucoup plus de précautions.

On commence par faire le plan du lest, & d'un grenier élevé en tout de deux pieds à deux pieds & demi, afin de mettre les marchandises au-dessus de l'eau qui se range

toujours au fond : ensuite on met une garniture d'un pied environ tout autour de la calle en rotin , bois de sapan ou autres espèces de bois de cargaïson, selon l'endroit où l'on charge , & par-dessus le tout un chemise de toile à voile que l'on cloue, à mesure que l'on monte avec l'arrimage : cette garniture à bord est pour empêcher que l'eau qui s'écoule le long des côtés du navire, ne touche aux marchandises : quand tout cela est fait , on arrime les caïsses de thé à la Chine (la porcelaine en bonnes caïsses étant enterrée dans le lest dont elle fait partie), par rangs & par plans , en commençant par l'avant à joindre la cloïson de la calle à l'eau ; on force à coups de masse , que l'on frappe sur des planches qui sont mises pour l'instant par-dessus les caïsses , pour les mettre de niveau les unes avec les autres , de façon qu'il n'y ait pas un coup de ligne de différence : on met aussi des planches devant les bouts des caïsses , afin de les faire entrer de force dans les rangs : on fait ensuite entrer des quarts de caïsse ou demi-caïsses dans les forains , & l'on ne perd pas un pouce d'espace , desorte qu'il faut ordinairement rompre une caïsse de chaque rang , pour défaire cet arrimage quand on décharge le vaisseau.

Si c'est à Pondicheri ou Bengale que l'on charge en ballots , on prend les mêmes précautions , quant à la garniture autour de la calle , & au grenier du lest ; mais l'on engrave tous les plans de balles avec du poivre ( 5 ) en grenier , desorte que le moindre petit vuïde se remplit , en même temps que tout est préservé d'insectes.

On arrime les balles de caïfé comme les ballots ; mais l'on n'y met point de poivre , à cause du goût : c'est le chargement le plus aisé à faire , parce que tout est égal , & les vides ne s'apperçoivent pas.

---

( 5 ) Cet arrimage est terrible pour la santé de ceux qui le font , par la poussière qui en sort , & qui affecte la poitrine.

Lorsqu'on charge en plein avec du grain de même espèce, on partage la calle d'un bout à l'autre par le milieu, avec une forte cloison du haut en bas bien étançonnée; ensuite on arrime le lest, comme nous l'avons dit, observant de ne pas tant lester le vaisseau, que s'il prenoit une autre cargaison; car celle-ci pèse ordinairement plus que les autres, puisqu'elle laisse moins de vide; & lorsque cela est fait, on arrange un grenier de bois, & l'on garnit à bord; ensuite on met une chemise par toute la calle, & l'on remplit de grain jusqu'à charger le vaisseau; il reste ordinairement un peu de vide, la cloison du milieu ne se pratique que pour obvier au risque qu'une forte bande feroit courir au vaisseau, car alors elle empêche le grain du vent de tomber sous le vent. Si on charge de différentes espèces de grains, on fait des parquets pour les séparer, & on garnit de toiles.

*Défauts des arrimages usités, & moyens d'y remédier, autant qu'il me paroît possible de le faire.*

Dans les vaisseaux de guerre, les aménagemens de la calle sont autant bien distribués qu'ils puissent l'être pour l'objet auquel on les destine; mais l'inconvénient que je trouve dans leurs arrimages, vient de ce qu'on ne peut pas transporter, à la mer, les parties de la cargaison de l'avant à l'arrière, pour remettre avec facilité le vaisseau dans son affiette, quand il l'a perdue, en devenant trop léger dans l'une ou l'autre de ses extrémités, par la consommation des vivres ou du bois, ou par celle de ses munitions de guerre; elles peuvent aller à trente-cinq tonneaux dans une action de quatre ou cinq heures, sur un vaisseau de soixante-quatorze canons, comme je l'ai vu

arriver (6); & quand aussi il se trouve trop léger en total, ce qui le met dans le cas de porter peu de voiles & de perdre sur toutes les autres qualités, de bien gouverner, bien marcher, & ne point fatiguer sa mâture.

Les mêmes inconvéniens ne sont jamais aussi considérables sur les vaisseaux marchands, parce qu'à proportion de leurs grandeurs, les consommations ne sont pas aussi fortes, de sorte qu'ils sont toujours assez callés; mais leur affiette peut également se troubler & se perdre, s'ils légifient plus par une des extrémités que par l'autre.

Un autre inconvénient, qui est commun aux vaisseaux de guerre comme aux vaisseaux marchands, c'est que l'on étend le lest sur l'avant & l'arrière du centre de gravité du vaisseau, de manière que, par rapport au lest seulement, on rend les extrémités du navire presque aussi pesantes que le milieu, quoiqu'elles ne déplacent pas autant d'eau à beaucoup près; & cette méthode ne contribue pas peu à faire arquer les vaisseaux, & à leur rendre le mouvement du tangage fort dur.

On peut aisément remédier à ces accidens sur les vaisseaux de guerre, en embarquant une certaine quantité de barriques en fagot, afin de pouvoir les monter pour les remplir d'eau de mer, lorsqu'on verra le vaisseau trop léger, & qu'il y aura de l'espace dans les calles par les consommations de bois & autres effets, ayant attention de remplir aussi toutes les autres futailles à mesure qu'elles se vident d'eau douce, de viandes salées, vin & eau-de-vie; ainsi l'on pourra mettre dans la place du bois à feu qui se consume, au moins vingt-cinq à trente tonneaux

---

(6) En 1747, le vaisseau du Roi l'Invincible, défendu par les Officiers de la Compagnie des Indes, le 14 Mai, tira 2270 coups de canon & 10000 coups de fusil, ce qui fait plus de 40 tonneaux de munitions de guerre, sans compter plus de 150 hommes, qui furent tués & jetés à la mer pendant l'action qui dura quatre heures, Je cave au plus bas dans ces approximations, qui exactement iroient en total à plus de 52 tonneaux.

d'eau de mer, sans se gêner, sur un vaisseau de 74 canons; ee qu'il sera encore aisé de passer de l'avant dans la fosse aux cables, ou de l'arrière dans la calle aux vivres, puisque ce sont de petites futailles aisées à manier.

Pour plus de commodité & de certitude, je propose un moyen de plus, pour remettre le vaisseau en tonture, & en affiette à sa ligne d'eau favorable, quand il l'aura perdue à la mer. Je voudrois avoir dans le faux-pont de chaque côté de l'archi-pompe ou par-dessus les pièces du dernier plan de la calle, (n'importe où, pourvu que ce soit au milieu du vaisseau), dix tonneaux de plomb en saumons de soixante livres, toujours parés au besoin pour transporter de l'avant à l'arrière, selon qu'on le jugera nécessaire, pour essayer sa marche avec d'autres vaisseaux, observant bien dans ces opérations, la quantité que l'on en transportera, avec la distance du changement en pieds, & le profit ou perte que l'on fera dans la vitesse.

On doit, avant de partir du port, & lorsque le vaisseau est armé, prêt à prendre la mer, transporter les vingt tonneaux de plomb en avant du milieu où on les a placés de dix pieds & voir de combien dix & vingt tonneaux feront caller le vaisseau sur nez, ensuite les porter à dix autres pieds plus loin, & faire la même observation, desorte que continuant la même expérience de dix pieds en dix pieds jusqu'en avant, & prenant toujours note des changemens de la ligne d'eau, on fera ensuite dans le cas de s'en servir à la mer avec connoissance; l'on saura toujours de combien on fera plonger l'avant de plus qu'il n'étoit, & l'on verra aisément l'avantage que cela donnera dans la marche & le gouvernail, ou la perte que l'on y fera. L'on fera les mêmes opérations pour la partie de l'arrière & les mêmes observations à la mer: cela est fort aisé à pratiquer, il ne faut que la bonne volonté; mais comme les vaisseaux de guerre ont leur centre de gravité très-haut, à cause de leur artillerie, ces opérations se pratiqueront à la mer,

en faisant passer le plomb dans la fosse aux cables & dans celle aux lions, sur le faux-pont du théâtre, dans la cambuse & dans la soute de rechange du Canonier.

Ces observations sont d'une très-grande conséquence pour les circonstances pressantes de chasse; l'on ne peut trop y faire attention dans les temps tranquilles, afin d'en tirer parti dans les événemens critiques.

Dans les cas de chasse forcée, où le vaisseau donneroit trop de bande, en portant (selon la routine) trop de voiles, on pourra faire passer dans le faux pont, du côté du vent, les dix tonneaux de plomb qui seroient sous le vent, afin de faire équilibre un peu plus avec l'effort des voiles, & tenir le vaisseau gouvernant & droit dans ses lignes d'eau les plus avantageuses à sa marche, se tenant d'ailleurs toujours prêt à remettre vivement le même poids à sa place.

Dans les vaisseaux marchands chargés en plein, on distribuera le long de l'entrepont, au milieu de la longueur, une dixaine de tonneaux de ce même plomb, pour s'en servir dans les mêmes circonstances, observant de le parqueter, afin d'obvier aux accidens d'une trop forte bande, & l'empêcher de tomber tout-à fait sous le vent.

### *Observation pour les vaisseaux garde-côtes ou corsaires.*

Les vaisseaux de guerre, frégates ou corsaires qui vont en croisière avec trois ou quatre mois de vivres, ont plus d'espace que les autres, puisqu'ils ne sont jamais boudés; ainsi ils ont plus d'aisance à se tenir en assiette, & à la chercher; ils ne doivent donc négliger aucun des moyens que nous proposons pour la trouver; ils doivent même se servir de tous ceux que leur sagacité pourra leur suggérer, afin d'acquiescer cette première qualité du vaisseau de guerre.



*Conclusion du meilleur lestage & arrimage des vaisseaux pour les grands avantages à la mer.*

Quand on fait le chargement d'un navire, il faut être persuadé que la vivacité des mouvemens du tangage & du roulis dépendent non-seulement de sa forme, mais encore plus de la distribution plus ou moins avantageuse des parties pesantes de sa cargaison.

On doit d'abord chercher à modérer le tangage, parce que c'est ce qui retarde le sillage, en même temps que le mouvement fatigue extraordinairement un vaisseau & sa mâture: c'est presque toujours dans une de ces secouffes qu'on voit les mâts se rompre, particulièrement quand l'avant se relève après avoir plongé.

Le roulis est proportionnellement plus grand que le tangage; mais on ne voit que peu d'accidens arriver par ce mouvement qui est toujours lent: cependant il est à propos de le prévenir le plus qu'il est possible, parce que la lame vient souvent du travers, & porte le vaisseau à de très-grandes inclinaisons sur le côté. On y parviendra facilement, sans empêcher le vaisseau de bien porter la voile, en arrimant le lest, quand il est en fer, sur les empâtures des varangues de fond, parce qu'il rappellera avec moins de force le navire, lorsqu'il aura incliné, en agissant sur un point qui sera un peu éloigné tribord & bas-bord plus bas que le centre de gravité du navire chargé: on observera de ne pas faire monter trop haut le lest des deux côtés du vaisseau, en remplissant l'entre-deux du premier & second plan, même du troisième, s'il est nécessaire avec du bois, afin de l'assujettir immuable; ensuite on arrime le reste en plein, sans laisser de vide pour le bois au milieu; & lorsque tout le lest sera disposé & arrimé autour & sous le centre de gravité du vaisseau, comme nous venons de le dire, en l'étendant un peu sur

l'avant & l'arrière (de 20 à 30 pieds) de ce point, en en mettant plus dans l'une ou l'autre de ces parties pour tenir le vaisseau exactement au tirant d'eau marqué par le Constructeur, on arrimera par-dessus très-solidement & à l'ordinaire la cargaison, observant de placer au fond les parties les plus pesantes & les plus capables de supporter le poids des autres que l'on doit arrimer par-dessus.

Je place le lest autour & fort près du centre de gravité du vaisseau, afin de rendre le mouvement du tangage moins rude que si le poids étoit éloigné sur l'avant & l'arrière de ce point.

Le vaisseau n'est jamais porté par une seule lame; lorsque la mer est un peu agitée, il y en a toujours deux ou trois qui passent dessous en même temps, à moins que ce ne soit quand la mer est extrêmement longue, que le houle vient de loin, & dans des parages fort éloignés de terre, alors il arrive que les plus grands vaisseaux sont quelquefois portés par une seule lame (7). Mais dans l'une & l'autre circonstance, je dis qu'il ne faut pas étendre le lest sur l'avant ni sur l'arrière du centre de gravité, aussitôt que le navire est dans la parallèle de son tirant d'eau marqué pour le lest, ce qu'il est absolument essentiel au Constructeur de bien déterminer, afin de faire caller le vaisseau en grand jusqu'au point fixé de sa première ligne d'eau de chargement, que nous supposons être celle que le lest doit donner.

Je vais essayer de prouver ce que j'ai avancé en supposant dans l'un & l'autre cas d'une mer longue ou courte, que l'eau vient choquer le vaisseau de l'avant, afin qu'il soit examiné dans les circonstances du plus grand & du

---

(7) On trouve à l'est & à l'ouest du Cap de Bonne-espérance depuis les 30° de latitude sud jusqu'au 40°, où j'ai été, des mers fort longues & fort élevées, sur-tout quand le vent a soufflé de la partie de l'ouest pendant quelques jours; je crois que plus sud c'est la même chose.

plus vif tangage , comme nous l'avons éprouvé une infinité de fois ; car dans le cas ou la lame se prend par l'arrière ou la hanche , ses mouvemens , s'il a de la vitesse , ne sont jamais dangereux , parce qu'en fuyant devant le houle , il se soustrait en partie à son impulsion ; & s'il s'en trouve , malgré cela , incommodé , on force de voile , & l'on fuit à la lame ( en terme marin ) ; au lieu que dans l'autre hypothèse , le choc de l'eau augmente sur la proue en raison du quarré de la vitesse de la lame qui vient choquer la proue , de sorte que l'impulsion totale de l'eau sur la partie de la carène choquée , se trouve en raison composée de la somme du quarré de la vitesse de la lame & du quarré de la vitesse du vaisseau qui va la choquer ; tandis que dans la circonstance où le vaisseau fuit la lame , la résistance de l'eau sur la proue est en raison simple du quarré de la vitesse du vaisseau , moins le quarré de l'excès de la vitesse de l'eau sur celle du vaisseau .

Le vaisseau dont les extrémités sont moins chargées ( 8 ) , étant supposé courir avec une vitesse quelconque au devant de la lame qui vient à lui par l'avant , la choque sans contredit avec une force exprimée par la somme des deux quarrés de la vitesse du vaisseau & de celle de la lame , la divise & passe au travers , en même temps qu'il est élevé par la poussée verticale de cette colonne d'eau qui lui oppose un poids plus considérable que son déplacement ; la lame qui fuit produit le même effet . en recevant l'avant du vaisseau qui retombe , parce que la première est déjà au milieu , d'où elle passe à l'arrière qu'elle soutient , tandis que la seconde a pris sa place au milieu , & que la troisième supporte l'avant en les suivant l'une & l'autre : ce

---

( 8 ) La cargaison qui s'attime sur le vegre du fond en avant ou de l'arrière est moins pesante que le lest qu'on y met ordinairement , à volume égal ; & dans les vaisseaux armés en guerre , il y a toujours une grande partie des extrémités de vide ou peu chargée .

mouvement se perpétue tant que la mer est agitée, d'où il suit que le vaisseau n'est jamais tranquille ; il retombe par son propre poids aussitôt que la lame est passée, & il retombe moins vivement en raison de ce que son avant est moins pesant, & qu'il est balancé par son centre de gravité, qui n'est jamais fort éloigné du milieu de la plus grande longueur, & où se trouve le plus grand poids ; la secousse est donc moins violente, puisqu'il choque l'eau avec moins de masse, ce qui l'empêche de plonger autant que s'il avoit plus de pesanteur ; ainsi la mâture ne souffre pas, & le sillage est moins retardé, la partie la plus renflée de la proue ne se trouvant que peu exposée au choc de l'eau.

Si le vaisseau se trouve porté par une seule lame ; il retombe encore moins bas, s'il est peu chargé en avant, lorsqu'il n'est soutenu que par l'arrière ou le milieu ; il se relève donc plus aisément au moment que l'autre lame vient le choquer, & la secousse est moins violente : si l'avant étoit plus pesant, il plongeroit davantage en retombant entre les deux lames, & celle qui succède à la première pourroit se trouver fort au-dessus de la proue, (comme cela arrive tous les jours par les arrimages du lest en plein, & par le trop grand poids des extrémités) ; ainsi la colonne d'eau d'en-haut passeroit par-dessus en partie, parce que le poids du vaisseau, résisteroit à céder à l'impulsion verticale du pied de la lame, qui ne lui oppose pas subitement une résistance suffisante, puisqu'il est emporté au-delà de son déplacement ordinaire par la vivacité de sa chute occasionnée par l'excès de sa pesanteur. Le vaisseau se trouvant arrêté tout-d'un-coup dans sa chute, bien au-dessus de sa ligne d'eau de flottaison, il se fait une secousse violente en avant qui rappelle vivement toute la mâture aussi sur l'avant, parce qu'elle s'étoit portée en arrière pendant le temps de la chute ; mais par ce choc il se trouve un retard momentané entre les deux mouvemens

de tomber & de se redresser; l'avant est rappelé en-haut par un autre mouvement violent occasionné par un déplacement d'eau plus considérable que son poids. Ce poids en rappelant ensuite les mâts sur l'avant avec vivacité, les compromet si souvent, qu'à la fin ils se rompent par une répétition non interrompue de deux ou trois minutes en deux ou trois minutes, qui dure souvent plus de vingt-quatre heures; de plus cette colonne d'eau qui passe par-dessus l'avant, le charge encore davantage, & le fait caler en total jusqu'à ce que toute l'eau soit écoulée par les sabords & les dulots de la seconde batterie; car il arrive quelquefois que le coffre du navire est plein: alors le vaisseau, trouvant par ce nouveau poids plus de difficulté à s'élever à la lame, peut se trouver, par une récédive subite, dans le dernier péril.

### OBSERVATIONS.

Toutes ces considérations bien observées dans le lestage & l'arrimage des vaisseaux, ne doivent pas dispenser de garder une certaine quantité de lest mouvant en plomb sur leurs ponts ou faux-ponts, afin de faire les expériences & les changemens que les circonstances exigeront: on observera seulement d'en garder plus ou moins selon la grandeur des Bâtimens.

Si dans la totalité du lest, il y a une grande quantité en pierres ou cailloutage, on pourra arrimer le fer sur le vaigrage en plein, sans laisser d'intervalle entre les plans de gueuses; ensuite ayant fait un petit lit de bois de billetes, on arrimera le premier plan de la cargaison, & on l'arrimera avec les pierres & cailloux, n'y mettant de bois que ce qu'il en faudra pour assujettir l'arrimage; cette manière d'arrimer produira le même effet que si on avoit tout fer pour lest, & qu'on l'eût disposé comme nous

l'avons dit, parce que les pierres monteront fort haut, & ne feront point perdre d'espace dans l'arrimage, si ce n'est qu'il n'y entrera pas tant de bois à feu.

Si l'on n'a que du lest de cailloux, on en fera seulement une couche d'un pied de haut, ensuite arrimant dessus, on engravera le premier & second plan du chargement, même le troisième, observant dans toutes les circonstances de ne pas trop s'écarter sur l'avant ni l'arrière du centre de gravité du vaisseau.

On peut faire une observation (dans le chargement total) qui devrait être, selon moi le principe de tout Arrimage; c'est de supposer le vaisseau coupé de l'arrière à l'avant dans un certain nombre de tranches verticales, & de faire en sorte que chacune de ces tranches, y compris son poids & celui de tout ce qu'elle contient, ne soit pas plus pesante que son déplacement d'eau; de cette manière, le vaisseau semble bien porté par-tout sous sa charge; mais j'ajoute à cette idée, qu'il vaut mieux, par tout ce que nous avons déjà dit, que les tranches des extrémités déplacent plus d'eau qu'elles ne pèsent, parce qu'étant obligées d'enfoncer dans le fluide par leur adhérence aux tranches du milieu que l'on chargera davantage, elles feront soutenues par la poussée verticale de l'eau & empêcheront en partie la tendance que tous les vaisseaux ont à se délier dans le sens de leur longueur, en même temps qu'elles diminueront le mouvement du tangage, puisqu'elles tenderont continuellement à s'élever; ainsi le fillage ne fera que peu retardé par ce mouvement qui deviendra très-lent; je regarde la chose comme susceptible d'une application très-essentielle & fort praticable dans les vaisseaux de guerre qui ont toujours une grande partie de leur calle à vide.

*Réflexions*

*Réflexions sur les changemens qui se trouveront dans les qualités du vaisseau, lorsqu'il sera plus ou moins chargé en avant ou en arrière.*

Si on charge le vaisseau plus sur nez, sa ligne d'eau la plus avantageuse 1 deviendra 2, en augmentant par son renflement la résistance du fluide sur la proue, & le déplacement d'eau de l'avant, d'où il résulte une diminution de vitesse à impulsion égale de la part du vent; si au contraire on charge le vaisseau plus sur cul, la ligne d'eau 1 deviendra 3, en augmentant le déplacement d'eau de l'arrière, & diminuant la résistance du fluide sur la proue, puisque la ligne d'eau devient plus douce; d'où il résulteroit une augmentation de vitesse à impulsion égale de la part du vent; mais il faut faire attention que l'arrière de la carène, en plongeant davantage par ce second mouvement, présente au cours de l'eau, très-obliquement à la vérité, une plus grande partie de sa surface submergée, ce qui pourroit devenir équivalent à-peu-près à ce que l'on gagne de l'autre côté. Une autre considération plus secrète, & qui certainement est un obstacle à la rapidité du sillage, c'est que le point vélique, dans le premier cas, monte, puisqu'en plongeant davantage, la proue se présente plus directement au fluide, tandis que le centre d'effort des voiles reste à la même élévation; d'où il suit dans la circonstance rare de la mâture parfaite, que le vaisseau n'a plus assez de voilure, puisque l'impulsion de l'eau sur la proue a augmenté, en élevant la direction de son effort absolu, en même temps que le centre de gravité du navire a aussi changé de place, en s'approchant un peu de l'avant de C en B. Il en résulte une plus grande puissance aux voiles de l'arrière pour faire venir le vaisseau au vent, pendant que le gouvernail, en sortant un peu

Figure III.

de l'eau , perd de son effet , de sorte que le vaisseau peut devenir très-ardent & obligé d'avoir presque toujours la barre au vent , en présentant continuellement une grande partie de la surface du gouvernail au cours de l'eau , ce qui devient encore une cause de diminution de vitesse ; la vérité de ces conséquences m'a toujours été confirmée par l'expérience , dans le cas où des vaisseaux passablement construits , ont été trop callés sur l'avant .

Lorsque le vaisseau se trouve trop chargé sur l'arrière , il en résulte des effets tout contraires ; le point vélique baisse parce que la proue , en sortant de l'eau , se présente plus obliquement au fluide , & la direction de l'impulsion absolue sur la proue coupant la verticale au centre de gravité de la surface de flottaison ( qui a changé ainsi que celui du vaisseau , un peu plus ou un peu moins , en s'approchant de l'arrière de C en A ) montre le point vélique bien audessous du centre d'effort des voiles . Le vaisseau se trouvant alors trop de voilure , incline facilement sur le côté , & diminue par conséquent sa disposition la plus avantageuse pour diviser le fluide , en même temps que les voiles d'avant acquierent plus de puissance , à cause de leur position plus éloignée du centre de gravité ; ainsi le navire devient lâche , & on est obligé de se servir continuellement du gouvernail & des voiles de l'arrière pour le rappeler au vent ; c'est encore ce qui m'a été confirmé par l'expérience .

Ces observations ne sont sensibles dans les grands vaisseaux que lorsque la différence de leur tirant d'eau le plus favorable est audessus de six pouces , car la plupart du temps si elle est audessous , il ne se fait pas un grand changement dans les qualités du navire .

Il résulte de tout ce que nous venons d'expliquer , qu'il n'y a qu'une seule ligne d'eau favorable pour la plus grande vitesse du vaisseau , de quelque figure qu'il soit , & cette ligne d'eau doit être connue & déterminée par le calcul



du plan pour la plus avantageuse de toutes celles qu'on peut lui donner sous charge ; c'est aux Constructeurs à la déterminer même avant de mettre le vaisseau sur chantier ; car c'est celle qui doit aussi leur servir pour fixer le plus ou le moins d'élévation de mâture , en déterminant le centre d'effort des voiles à la hauteur du point vélique donné par la ligne d'eau la plus avantageuse de la carène sous charge , pour bien gouverner , marcher , & porter la voile dans les routes obliques.

J'observe que quand je dis vaisseaux sous charge , je suppose le vaisseau de guerre armé & prêt à faire voile pour combattre ; & le vaisseau marchand dans le même cas sous cargaison complète.

Les vaisseaux jusqu'à présent n'ont jamais été mâtés aussi parfaitement qu'ils auroient pu l'être , puisque les Constructeurs se sont pour ainsi dire fait une loi de s'écarter de plus en plus des vrais principes , en élevant dans ces derniers temps la mâture plus qu'elle ne l'avoit encore été , quoiqu'elle fût déjà trop haute ; ainsi le centre d'effort des voiles a constamment été au-dessus du point vélique , ce qui fait qu'on a vu quelquefois des vaisseaux avoir plus d'avantage , lorsqu'ils ont été plus chargés sur le nez que ne le demandoit leur meilleure ligne d'eau de vitesse en charge ; mais nous sommes en état par le transport d'une partie du lest mouvant de l'avant à l'arrière de faire baisser ou monter le point vélique de quelque chose ; ainsi on peut trouver une position plus avantageuse pour la marche , dans l'état actuel de la mâture que celle que devrait naturellement avoir le vaisseau s'il étoit bien mâté ; car il pourra se faire qu'elle soit plus analogue à sa mâture actuelle , que sa vraie position , dans le cas où il seroit mâté parfaitement , ne le seroit avec les mâts trop élevés qu'on lui donne toujours ; d'où il résulte que le vaisseau n'est pas à beaucoup près dans son état de perfection , quelque bien chargé qu'il soit.

Il ne reste plus qu'à voir les Constructeurs se donner la peine dans la suite de chercher, ce qui n'est pas difficile, la ligne d'eau de flottaison la plus avantageuse pour allier & déterminer toutes les qualités des vaisseaux qu'ils construiront; ensuite qu'ils ayent le courage de mettre tout préjugé de routine à part, en mâtant selon le point vélique de cette ligne d'eau, disposant en même temps l'effort latéral des voiles en équilibre exact autour du point où l'impulsion de l'eau sur la proue coupe l'axe du vaisseau dans la route oblique; & nous aurons certainement des vaisseaux qui par ces dispositions favorables de la mâture parfaite, & celles que l'on pourra donner à leurs arrimages, seront dans l'assiete de leur plus grande vitesse, que l'on trouvera, à ce que je présume, bien au delà de ce que nous pouvons avoir vu jusqu'à présent, à coupe de carène égale & semblable.

J'ajoute que, comme les qualités du navire ne dépendent pas seulement de la perfection de sa mâture & de son chargement, il faut encore lui procurer la durée (9), en lui donnant une forme qui, en divisant bien le fluide, le rende doux à la mer, en même-temps qu'on le rendra solide par la force de sa charpente; c'est-à-dire, qu'il tanguera peu, & sa mâture ne fatiguera pas, non plus que ses liaisons bien placées; si son mouvement est doux, son sillage ne sera point interrompu & sa vitesse sera uniforme alors, ce qui est le but du bon arrimage & de ce que je me suis proposé dans cet Ouvrage.

---

(9) La durée des vaisseaux doit être un objet principal du Constructeur; les vaisseaux que l'on construit aujourd'hui ne passent pas huit ans sans être refondus, & il en coûte autant que pour en faire de neufs. On s'est faussement imaginé que la légèreté prouvoit la plus grande vitesse; sans faire attention que c'est la coupe la plus savante & la plus propre à diviser le fluide & à rendre le vaisseau doux dans ses mouvemens, quelque solide qu'il soit.

*Objection à la méthode que je prescris pour la  
meilleure façon d'arrimer les vaisseaux.*

Les extrémités du vaisseau étant plus légères que leur déplacement d'eau , tendront continuellement à s'élever ; ainsi la lame pourra les mettre en mouvement avec plus de facilité , & les élever davantage par son impulsion , ce qui fera augmenter considérablement la vivacité & la secousse du ramage , parce qu'elles tomberont de plus haut.

Cette objection , qui m'a été faite par un Marin consommé , tombe cependant d'elle-même , ou je me trompe fort ; car les deux extrémités du vaisseau doivent être également légères , & déplacer un plus grand volume d'eau que leur poids selon notre principe ; ainsi elles tendront l'une & l'autre à s'élever par la poussée verticale qui agit continuellement ; desorte que quand le choc de la lame viendra ajoûter son effort à cette disposition continue à s'élever ; l'autre partie , qui ne sera pas choquée , résistera de plus en plus à plonger , & s'opposera par conséquent à l'élévation de la partie sur laquelle la lame agit ; ainsi l'avant ne cédera pas avec plus de facilité que s'il étoit plus pesant ; mais supposons qu'il s'éleve effectivement plus haut , il doit retomber dans ce cas avec plus de vitesse , mais la masse est moindre ; d'où il est aisé de conclure que le moment de cette partie plus élevée est moindre que celui qu'elle produiroit si elle retomboit de moins haut avec plus de masse. Toutes choses sont à-peu-près égales jusqu'à présent , mais je trouve ensuite plus d'avantage à rendre les extrémités légères dans le cas où un coup de mer de l'avant passe par-dessus le vaisseau ; car alors la tendance des extrémités à s'élever servira , dans cet instant critique , à

débarasser le vaisseau de dessous la colonne d'eau qui le surcharge ; ce qu'il ne pourra jamais faire avec autant de promptitude si ses extrémités sont plus pesantes que leur déplacement d'eau. Un Auteur a avancé néanmoins que cela devoit être ; mais c'est d'après d'autres principes que je ne trouve pas convaincans.

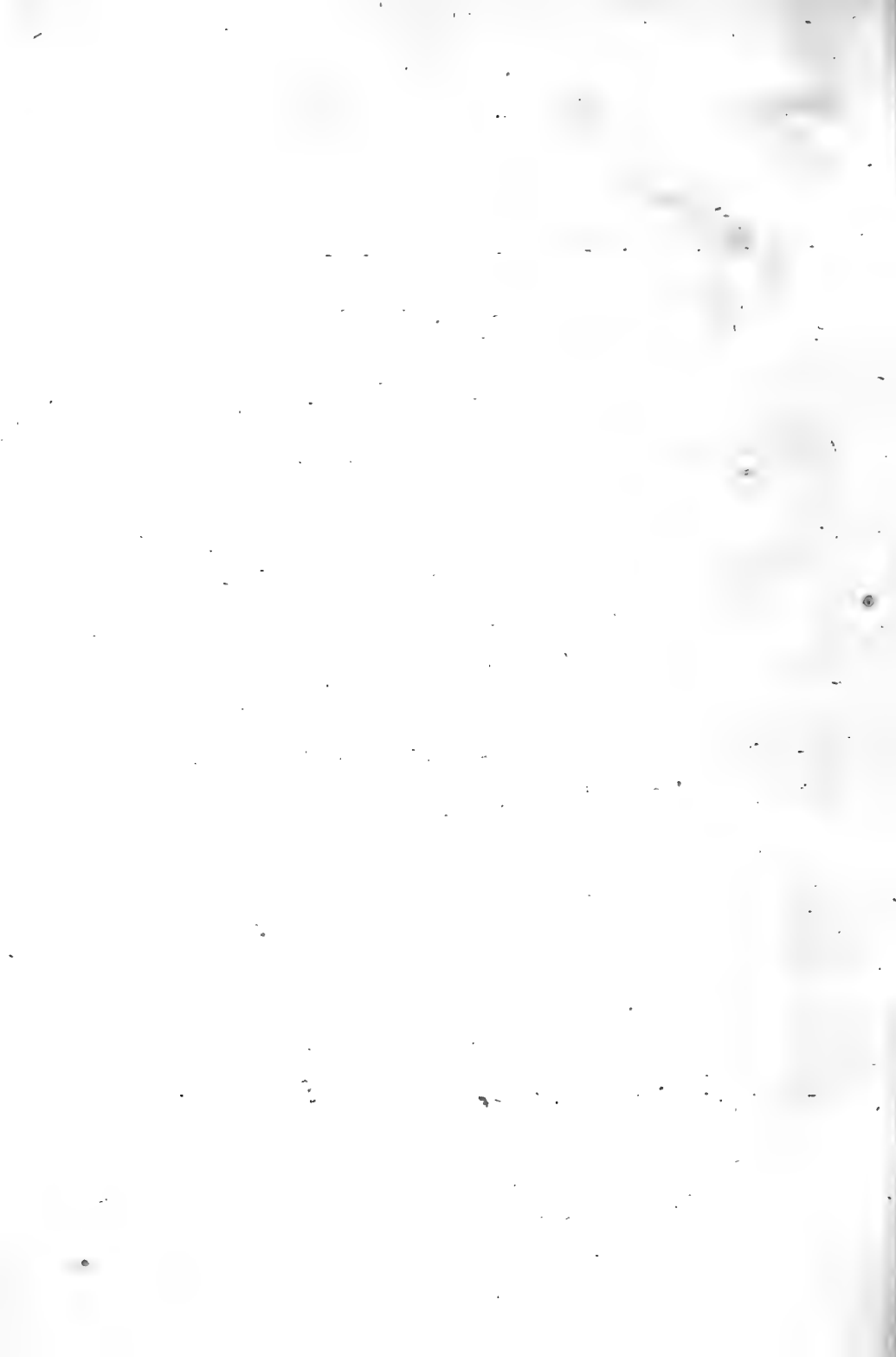
*F I N.*

RECHERCHES  
SUR LES INÉGALITÉS  
DES SATELLITES DE JUPITER,

*CAUSÉES PAR LEUR ATTRACTION MUTUELLE.*

PIÈCE qui a remporté le prix proposé par  
l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris  
pour l'année 1766.

*Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie de Berlin,  
de la Société Royale des Sciences de Turin, &  
Associé étranger de l'Académie Royale des  
Sciences de Paris.*



# T A B L E

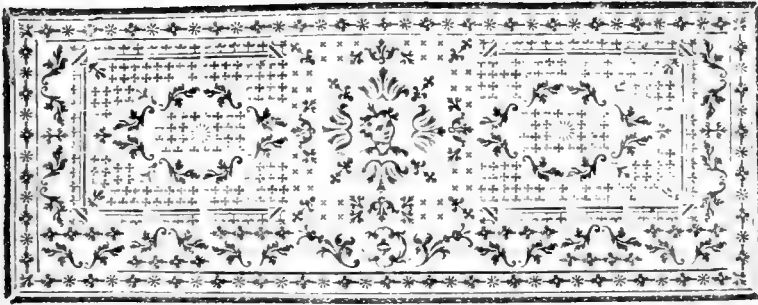
DES TITRES contenus dans cette Dissertation.

<b>C</b> HAPITRE I. <i>Formules générales pour le mouvement des Satellites de Jupiter. . . . .</i>	ART. I.
<b>C</b> HAPITRE II. <i>Détermination des forces perturbatrices des Satellites . . . . .</i>	IX.
<b>C</b> HAPITRE III. <i>Calcul des perturbations des Satellites. . . . .</i>	XXIV.
§. I. <i>Premières formules du mouvement des Satellites . . . . .</i>	XXLV.
§. II. <i>Valeurs numériques des coefficients des formules précédentes . . . . .</i>	XLIII.
§. 3. <i>Formules des rayons vecteurs &amp; des longitudes vraies des Satellites de Jupiter, par rapport au plan de l'orbite de cette Planète . . . . .</i>	XLIX.
§. 4. <i>Où l'on donne les inégalités des Satellites qui dépendent de leurs configurations, &amp; qui ont lieu au tems des éclipses . . . . .</i>	LII.
§. 5. <i>Comparaison des formules précédentes avec les observations, &amp; conséquences qui en résultent par rapport aux masses des Satellites. . . . .</i>	LVII.
<b>C</b> HAPITRE. IV. <i>Suite du calcul des perturbations des Satellites. . . . .</i>	LXXV.
§. 1. <i>Premières valeurs du mouvement des apsides &amp; des nœuds des Satellites. . . . .</i>	LXXVIII.

- §. 2. Où l'on montre la nécessité d'avoir égard dans les calculs de l'équation du centre  $\mathcal{E}$  de la latitude, à quelques termes de l'ordre  $n$ , des équations (G) & (K) . . . . . LXXXVII.]
- §. 3. Où l'on donne une nouvelle méthode pour intégrer les équations précédentes. . . . . XCII.]
- §. 4. Sur les inégalités des Satellites qui dépendent de la période de 12 ans. . . . . CXVI.]
- §. 5. Des durées des éclipses des Satellites. . . CXIX.]
- §. 6. Des inclinaisons & des nœuds des Satellites. CXXV.]

Fin de la Table.





# RECHERCHES

## SUR LES INÉGALITÉS

### DES

## SATELLITES DE JUPITER,

CAUSÉES PAR LEUR ATTRACTION MUTUELLE.

Multùm adhuc restat operis Sen. Epist. 64.

## CHAPITRE I.

*Formules générales pour le mouvement des  
Satellites de Jupiter.*

### ARTICLE PREMIER.

**S**OIENT nommés :

Le rayon vecteur de l'orbite d'un satellite quelconque  
projetée sur le plan de l'orbite de Jupiter . . . . .  $r$

La tangente de la latitude du satellite par rapport à ce  
même plan. . . . .  $p$

A 2

La force que Jupiter exerce sur le fatellite à la distance  $1...F$   
 On aura la distance du fatellite au plan de l'orbite de  
 Jupiter.....  $rp$

Donc la distance du fatellite au centre de Jupiter  
 fera.....  $r\sqrt{1+p^2}$

Par conséquent la force, par laquelle le fatellite est  
 poussé vers Jupiter sera.....  $\frac{F}{r^2(1+p^2)}$

Cette force peut être regardée comme composée de  
 deux autres.

L'une parallèle au rayon vecteur & égale à...  $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$

L'autre perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter,  
 & égale à.....  $\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$

Or on peut en général réduire les forces perturbatrices  
 du fatellite à trois forces uniques, dont

La première que j'appelle.....  $R$   
 soit parallèle au rayon  $r$ .

La seconde que j'appelle.....  $Q$   
 soit perpendiculaire au rayon vecteur, & parallèle au plan  
 de l'orbite de Jupiter.

La troisième que j'appelle.....  $P$   
 soit perpendiculaire à ce même plan.

Donc le fatellite sera sollicité dans les directions dont  
 nous parlons, par les forces  $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} + R$ ,  $Q$ ,  $\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} + P$ ;  
 dont les deux premières déterminent le mouvement que  
 le fatellite doit avoir dans le plan de l'orbite de Jupiter,  
 ou pour mieux dire, parallèlement à ce plan.

## I I.

Cela posé, soit le tems écoulé depuis le commencement

du mouvement . . . . .  $t$

L'angle décrit par le rayon  $r$  durant ce tems . . . . .  $\varphi$

L'élément du tems  $dt$  constant, c'est-à-dire,  $d^2t = 0$ .

On aura pour la vitesse circulaire du satellite, parallèlement au plan de l'orbite de Jupiter  $\frac{rd\varphi}{dt}$ , d'où résulte la force centrifuge  $\frac{r^2 d\varphi^2}{rdt^2} = \frac{rd\varphi^2}{dt^2}$ , laquelle étant retranchée de la force  $\frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + R$ , on aura la véritable force qui tend à diminuer le rayon  $r$ .

Donc, par le principe des forces accélératrices, on aura

$$-\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{F}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + R - \frac{rd\varphi^2}{dt^2} \dots \dots \dots (A)$$

Maintenant on fait que, si la force perpendiculaire  $Q$  étoit nulle, le rayon  $r$  décrirait des aires proportionnelles aux tems, de sorte que l'on auroit, à cause de  $dt$  constant,  $\frac{d(r^2 d\varphi)}{2} = 0$ ; mais la force  $Q$  fait parcourir perpendiculairement à  $r$  l'espace  $Qdt^2$  pendant le tems  $dt$ ; donc le secteur  $\frac{r^2 d\varphi}{2}$  croîtra pendant ce tems de la quantité  $\frac{Qrdt^2}{2}$ ; par conséquent on aura l'équation  $d.(r^2 d\varphi) = Qrdt^2$ , dont l'intégrale, en ajoutant  $cdt$ , est  $r^2 d\varphi = cdt + dt \int Qrdt$ ; d'où l'on tire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c + \int Qrdt}{r^2} \dots \dots \dots (B)$$

Enfin on aura, en vertu de la force perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter,  $-\frac{d^2(p r)}{dt^2} = \frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + P$ ,

ou bien  $\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{2dpdr}{rdt^2} + \frac{pd^2r}{rdt^2} + \frac{Fp}{r^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{P}{r} = 0$ , d'où, en mettant pour  $\frac{d^2r}{rdt^2}$ , sa valeur  $\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{F}{r^3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{r}$  tirée

de l'équation (A), & effaçant ce qui se détruit, on aura l'équation suivante :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + p \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2dpdr}{rdt^2} + \frac{P - Rp}{r} = 0 \dots\dots\dots (C)$$

I I I.

Les équations (A), (B), (C) donneront  $r$ ,  $\varphi$  &  $p$  en  $t$ , ce qui suffira pour faire connoître le lieu du satellite à chaque instant. Que si on vouloit connoître la figure même de l'orbite qu'il décrit, il faudroit éliminer des équations (A), (C) l'élément  $dt$ . Or, de l'équation (B), on tire, après quelques réductions fort simples,

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{\sqrt{c^2 + 2fQr^2 d\varphi}}$$

donc si on substitue cette valeur dans (A), (C), & qu'on fasse pour plus de simplicité,  $\frac{1}{r} = u$ ; on aura, en prenant  $d\varphi$  constant,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{F(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + Rr^2 - Q \frac{dr}{d\varphi}}{c^2 + 2fQr^2 d\varphi} = 0 \dots\dots\dots (a)$$

$$\frac{d^2 p}{d\varphi^2} + p + \frac{r^3(P - pR + Q \frac{dp}{d\varphi})}{c^2 + 2fQr^2 d\varphi} = 0 \dots\dots\dots (c)$$

Supposons pour un moment que les forces perturbatrices  $P, Q, R$  soient nulles, on aura par l'équation (c),  $\frac{d^2 p}{d\varphi^2} + p = 0$ ; dont l'intégrale est, comme on fait,  $p = G \sin. \varphi + H \cos. \varphi$ ; ou bien  $p = \lambda \sin. (\varphi - \epsilon)$ ,  $\lambda$  &  $\epsilon$  étant deux constantes arbitraires. Cette dernière expression de  $p$  fait voir que l'orbite est toute dans un plan fixe, dont la position dépend des quantités  $\lambda, \epsilon$ , qui expriment, la première, la tangente de l'inclinaison; & la seconde, la longitude du nœud. Retenons maintenant cette même expression de  $p$ , & supposons, à cause des forces perturbatrices,  $\lambda$  &  $\epsilon$  variables, on aura  $dp = d\lambda \sin. (\varphi - \epsilon) + \lambda \cos. (\varphi - \epsilon) (d\varphi - d\epsilon)$ ; or afin que le corps puisse être regardé comme se mouvant réellement

ment dans le plan déterminé par  $\lambda$  &  $\epsilon$ , il faut que la valeur de  $dp$  soit la même que si ces quantités demeuroident constantes, c'est-à-dire, que  $dp = \lambda \cos.(\varphi - \epsilon) d\varphi$ ; donc  $d\lambda \sin.(\varphi - \epsilon) = \lambda \cos.(\varphi - \epsilon) d\epsilon$ ; par conséquent, à cause de  $d\varphi$  constant,  $\frac{d^2p}{d\varphi^2} = -\lambda \sin.(\varphi - \epsilon) + \frac{\lambda d\epsilon}{\sin.(\varphi - \epsilon) d\varphi}$ , &  $\frac{d^2p}{d\varphi^2} + p =$

$\frac{\lambda d\epsilon}{\sin.(\varphi - \epsilon) d\varphi}$ . On réduira ainsi l'équation (c) ci-dessus à deux

équations du premier degré, qui donneront  $\lambda$  &  $\epsilon$  en  $\varphi$ ; d'où l'on connoîtra la variation de l'inclinaison de l'orbite, & le mouvement de la ligne des nœuds. C'est ainsi que la plupart des Géomètres en ont usé jusqu'ici dans la recherche des orbites des planètes; mais il nous paroît plus court de chercher directement la latitude  $p$  par une seule équation; d'autant plus que les quantités  $\lambda$  &  $\epsilon$  s'en déduiront plus aisément; car puisque  $p = \lambda \sin.(\varphi - \epsilon)$ , &

$\frac{dp}{d\varphi} = \lambda \cos.(\varphi - \epsilon)$ , on aura  $\lambda = \sqrt{p^2 + \frac{dp^2}{d\varphi^2}}$ , &

$\text{tang.}(\varphi - \epsilon) = \frac{pd\varphi}{dp}$ .

On pourroit faire une pareille transformation sur l'équation (a); ce qui réduiroit l'orbite à une ellipse dont l'excentricité, & la position de la ligne des apsides seroient variables, ainsi que M. Newton l'a pratiqué par rapport à la Lune. En effet, si on suppose d'abord  $Q, R,$  &  $p = 0$ ,

l'équation (a) devient  $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{F}{c^2} = 0$ , dont l'intégrale,

étant mise sous cette forme  $u - \frac{F}{c^2} = f \cos(\varphi - \alpha)$ , donne

une ellipse dans laquelle  $\frac{c^2}{F}$  est le demi-parametre,  $\frac{pc^2}{F}$  l'ex-

centricité, &  $\alpha$  la longitude de l'apside inférieure. Qu'on regarde maintenant  $p$  &  $\alpha$  comme variables, & qu'on suppose, par une raison analogue à celle que nous avons

expliquée ci-dessus,  $du = -\rho \sin.(\varphi - \alpha)d\varphi$ , on trouvera ;

$$d\rho \cos.(\varphi - \alpha) + \rho \sin.(\varphi - \alpha)d\alpha = 0, \text{ \& } \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{F}{c^2} = \frac{\rho d\alpha}{\cos.(\varphi - \alpha)d\varphi}.$$

Ainsi l'équation (a) se réduira à deux équations du premier degré d'où l'on tirera aisément  $\rho$  &  $\alpha$ .

## I V.

Les observations nous apprennent que les inégalités des mouvemens des satellites de Jupiter sont très-petites, aussi bien que les inclinaisons de leurs orbites, par rapport à l'orbite de cette Planète; d'où il suit que si on nomme

La valeur moyenne de  $r$  . . . . .  $a$

La valeur moyenne de  $\frac{d\varphi}{dt}$ , c'est-à-dire la vitesse angulaire moyenne . . . . .  $\mu$

& qu'on dénote par  $n$  un coefficient très-petit, & par  $x, y, z$ , des quantités variables, on aura les expressions suivantes

$$r = a(1 + nx)$$

$$\varphi = \mu t + ny$$

$$p = nz$$

où l'on remarquera que les valeurs de  $x$  & de  $\frac{dy}{dt}$  ne doivent contenir aucun terme constant; autrement  $a$  &  $\mu$  ne feroient plus les valeurs moyennes de  $r$  & de  $\frac{d\varphi}{dt}$  ce qui est contre l'hypothèse.

## V.

Substituons maintenant ces expressions de  $r, \varphi, p$  dans les équations de l'art. II, & négligeons les termes qui se trouveroient multipliés par des puissances de  $n$  plus hautes que  $n^2$ , parce qu'une plus grande exactitude seroit superflue dans le sujet que nous traitons, nous changerons

d'abord l'équation (A) en celle-ci :

$$-na \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{a^2} (1 - 2nx + 3n^2x^2) (1 - \frac{1}{2}n^2z^2) + R$$

$$-a(1+nx) \times (\mu^2 + 2n\mu \frac{dy}{dt} + n^2 \frac{dy^2}{dt^2}); \text{ ou bien}$$

$$na \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 - n \left( \frac{2F}{a^2} + a\mu^2 \right) x + n^2 \frac{F}{a^2} (3x^2 - \frac{1}{2}z^2) - 2na\mu \frac{dy}{dt}$$

$$- 2n^2 a \mu x \frac{dy}{dt} - n^2 a \frac{dy^2}{dt^2} + R = 0.$$

Si  $n$  étoit  $= 0$ , on auroit  $\frac{F}{a^2} - a\mu^2 + R = 0$ ; donc,  $n$  étant très-petite, la quantité  $\frac{F}{a^2} - a\mu^2 + R$  devra l'être aussi; de sorte qu'on pourra supposer  $R + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 = n \frac{F}{a^2} X$ .

Cette substitution faite, on divisera toute l'équation par  $na$ , & l'on aura, en mettant pour plus de simplicité,  $f$  au lieu de  $\frac{F}{a^2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (2f + \mu^2)x - 2\mu \frac{dy}{dt} + fX \\ + nf(3x^2 - \frac{1}{2}z^2) - 2n\mu x \frac{dy}{dt} - n \frac{dy^2}{dt^2} \end{aligned} \right\} = 0.$$

### V I.

L'équation (B) deviendra, par les mêmes substitutions,

$$\mu + n \frac{dy}{dt} = \left( \frac{c}{a^2} + \frac{\int Q(1+nx)dt}{a} \right) (1 - 2nx + 3n^2x^2).$$

Si  $n = 0$ , on auroit  $\int Q dt = a\mu - \frac{c}{a}$ ; supposons donc

$$\int Q(1+nx)dt = a\mu - \frac{c}{a} + n \frac{F}{a^2} Y,$$

on aura, après les réductions:

$$\frac{dy}{dt} = -2\mu x + fY + 3n\mu^2 - 2nfX.$$

V I I.

Enfin l'équation (C) se changera en celle-ci :

$$n \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + n z \left( \mu^2 + 2n\mu \frac{dy}{dt} \right) + 2n^2 \frac{d\zeta dx}{dt^2} + \frac{P - nR\zeta}{a(1 + nx)} = 0 ; \text{ \& l'on}$$

prouvera ici, comme on fait ci-dessus, qu'il faut que la quantité  $P$  soit très-petite de l'ordre  $n$  ; c'est pourquoi nous supposerons . . . . .  $\frac{P - nR\zeta}{1 + nx} = n \frac{F}{a^2} Z$ ,

d'où nous aurons l'équation

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \mu^2 z + fZ + 2n\mu z \frac{dy}{dt} + 2n \frac{d\zeta dx}{dt^2} = 0.$$

V I I I.

Voilà les formules par lesquelles on pourra déterminer les inégalités des satellites de Jupiter, dès qu'on aura trouvé les valeurs des quantités  $X, Y, Z$  qui résultent de leur action mutuelle.

Pour rendre ces formules encore plus commodes pour le calcul, nous substituerons dans celles des art. V & VII, la valeur de  $\frac{dy}{dt}$  tirée de l'art. VI.

De cette manière, on aura, en négligeant toujours les termes affectés de  $n^3, n^4, \text{ \&c.}$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{d^2 x}{dt^2} + (3\mu^2 - 2f)x + fX - 2\mu fY \\ &- n(6\mu^2 - 3f)x^2 - \frac{1}{2}nfz^2 + 6n\mu f x Y - nf^2 Y^2 \end{aligned} \right\} = 0 \dots (D)$$

$$\frac{dy}{dt} + 2\mu x - fY - 3n\mu x^2 + 2nf x Y = 0 \dots \dots \dots (E)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \mu^2 z + fZ - 4n\mu^2 z x + 2n \frac{d\zeta dx}{dt^2} + 2n\mu f z Y = 0 \dots (F)$$



Nous avons dit que les valeurs de  $x$  &  $\frac{dy}{dt}$  ne doivent renfermer aucun terme constant ; on remplira ces deux conditions par le moyen des constantes  $f$  &  $c$ .

## CHAPITRE II.

### *Détermination des forces perturbatrices des Satellites de Jupiter.*

#### IX.

SOIT la masse de Jupiter .....  $\mathcal{M}$   
 La masse du premier satellite .....  $\mathcal{C}^I$   
     du second satellite .....  $\mathcal{C}^{II}$   
     du troisième satellite .....  $\mathcal{C}^{III}$   
     du quatrième satellite .....  $\mathcal{C}^{IV}$

Supposons de plus que toutes les quantités que nous avons nommées  $r, p, \varphi, F, R, Q, P$ , &c, dans le Chapitre précédent, soient désignées ici, relativement au premier satellite, par  $r^I, p^I, \varphi^I, F^I, R^I, Q^I, P^I$ , &c ; relativement au second satellite, par  $r^{II}, p^{II}, \varphi^{II}, F^{II}, R^{II}, Q^{II}$ , &c ; relativement au troisième, par  $r^{III}, p^{III}, \varphi^{III}, F^{III}$ , &c ; & relativement au quatrième, par  $r^{IV}, p^{IV}, \varphi^{IV}$ , &c.

En général, nous conserverons toujours dans la suite les noms donnés dans les articles précédens, avec cette seule différence que nous marquerons les lettres d'un trait pour le premier satellite, de deux traits pour le second satellite, &c.

Enfin nous dénoterons, pour plus de simplicité, la

distance entre deux satellites quelconques, c'est-à-dire, la ligne droite qui joint leurs centres, par  $\Delta(r, r)$ ;  $r, r$ , étant les rayons vecteurs des deux satellites: ainsi la distance entre le premier & le second satellite sera désignée par  $\Delta(r^I, r^{II})$ , la distance entre le premier & le troisième par  $\Delta(r^I, r^{III})$ , & ainsi des autres.

X.

Cela posé, il est visible, 1.º que le satellite  $\mathcal{C}^I$  est attiré vers Jupiter avec une force  $= \frac{\mathcal{Z}^I}{r^{I^2}(1+p^I)}$ , & qu'en même temps Jupiter est attiré lui-même vers le satellite avec une force  $= \frac{\mathcal{C}^I}{r^{I^2}(1+p^{I^2})}$ ; d'où il suit, que la force totale qui tend à rapprocher le satellite de Jupiter est  $\frac{\mathcal{Z}^I + \mathcal{C}^I}{r^{I^2}(1+p^{I^2})}$ . Cette expression doit être comparée avec l'expression de la force centrale  $\frac{F}{r^2(1+p^2)}$  (art. I), c'est-à-dire, en la rapportant au premier satellite, avec  $\frac{F^I}{r^{I^2}(1+p^{I^2})}$ , ce qui donne d'abord . . . . .  $F^I = \mathcal{Z}^I + \mathcal{C}^I$ .

2.º Que le satellite  $\mathcal{C}^I$  est attiré vers le satellite  $\mathcal{C}^{II}$  avec une force  $= \frac{\mathcal{C}^{II}}{\Delta(r^I, r^{II})^2}$ , laquelle peut se décomposer en deux autres: l'une dans la direction du rayon mené du satellite  $\mathcal{C}^I$  à Jupiter, qui sera  $= \frac{\mathcal{C}^{II} r^{II} \sqrt{1+p^{II^2}}}{\Delta(r^I, r^{II})^3}$ : l'autre parallèle au rayon mené du satellite  $\mathcal{C}^{II}$  à Jupiter, & qui sera  $\frac{\mathcal{C}^{II} r^{II} \sqrt{1+p^{II^2}}}{\Delta(r^I, r^{II})^3}$ .

De plus le même satellite  $\mathcal{C}^I$  doit être regardé comme attiré par une force égale, & en sens contraire à celle avec laquelle Jupiter est attiré par le satellite  $\mathcal{C}^{II}$ , c'est-à-dire,

par une force  $= \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{r^{\text{II}}(1+p^{\text{II}})}$ , & dirigée parallèlement au rayon mené de ce dernier satellite à Jupiter. Donc l'action du satellite  $\mathbb{C}^{\text{II}}$  produit dans le satellite  $\mathbb{C}^{\text{I}}$  deux forces: l'une  $= \frac{\mathbb{C}^{\text{II}} r^{\text{I}} \sqrt{1+p^{\text{I}}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3}$  dirigée vers Jupiter, l'autre  $= \mathbb{C}^{\text{II}} \left( \frac{1}{r^{\text{II}}(1+p^{\text{II}})} - \frac{r^{\text{II}} \sqrt{1+p^{\text{II}}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} \right)$  dans une direction parallèle à celle qui va du satellite  $\mathbb{C}^{\text{II}}$  à Jupiter.

3.° Or la force  $\frac{\mathbb{C}^{\text{II}} r^{\text{I}} \sqrt{1+p^{\text{I}}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3}$  se décompose en deux autres: l'une perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter  $= \frac{\mathbb{C}^{\text{II}} r^{\text{I}} p^{\text{I}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3}$ , l'autre parallèle au même plan dans la direction du rayon  $r^{\text{I}}$ , qui fera  $= -\frac{\mathbb{C}^{\text{II}} r^{\text{I}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3}$ . Pareillement la force  $\mathbb{C}^{\text{II}} \left( \frac{1}{r^{\text{II}}(1+p^{\text{II}})} - \frac{r^{\text{II}} \sqrt{1+p^{\text{II}}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} \right)$  se change en deux autres forces: l'une perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter,  $= \mathbb{C}^{\text{II}} \left( \frac{p^{\text{II}}}{r^{\text{II}}(1+p^{\text{II}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{\text{II}} p^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} \right)$ , & l'autre parallèle à ce plan dans la direction du rayon  $r^{\text{II}} = \mathbb{C}^{\text{II}} \left( \frac{1}{r^{\text{II}}(1+p^{\text{II}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} \right)$ . Enfin cette dernière force se décompose encore en deux autres: l'une dans la direction du rayon  $r^{\text{I}}$ , avec lequel le rayon  $r^{\text{II}}$  fait l'angle  $\phi^{\text{II}} - \phi^{\text{I}}$ ; l'autre perpendiculaire à cette direction; la première sera exprimée par  $\mathbb{C}^{\text{II}} \left( \frac{1}{r^{\text{II}}(1+p^{\text{II}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} \right) \cos. (\phi^{\text{II}} - \phi^{\text{I}})$ , la seconde par  $\mathbb{C}^{\text{II}} \left( \frac{1}{r^{\text{II}}(1+p^{\text{II}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} \right) \sin. (\phi^{\text{II}} - \phi^{\text{I}})$  & tendra à diminuer l'angle  $\phi^{\text{I}}$ , au lieu que nous avons supposé

## 16 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS

(art. II) que la force perpendiculaire  $Q$  tendoit à augmenter l'angle  $\phi$ ; c'est pourquoi il faudra la prendre négativement.

4.° comparant donc toutes ces forces avec les forces  $R, Q, P$  (art. I), ou bien  $R^I, Q^I, P^I$  (art. IX) on aura en conséquence de l'action du satellite  $\mathcal{C}^{II}$  les expressions suivantes :

$$R^I = \mathcal{C}^{II} \left( \frac{r^I - r^{II} \cos(\phi^{II} - \phi^I)}{\Delta(r^I, r^{II})^2} + \frac{\cos(\phi^{II} - \phi^I)}{r^{II2}(1 + p^{II2})^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$Q^I = \mathcal{C}^{II} \left( \frac{r^{II} \sin(\phi^{II} - \phi^I)}{\Delta(r^I, r^{II})^2} - \frac{\sin(\phi^{II} - \phi^I)}{r^{II2}(1 + p^{II2})^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$P^I = \mathcal{C}^{II} \left( \frac{r^I p^I - r^{II} p^{II}}{\Delta(r^I, r^{II})^2} + \frac{p^{II}}{r^{II2}(1 + p^{II2})^{\frac{1}{2}}} \right)$$

On trouvera de la même manière les expressions des forces  $R^I, Q^I, P^I$ , en tant qu'elles résultent de l'action des satellites  $\mathcal{C}^{III}$  &  $\mathcal{C}^{IV}$ ; & il est clair qu'on aura les mêmes formules que ci-dessus, en marquant seulement de trois traits ou de quatre traits, les lettres qui sont marquées de deux traits.

### X I.

Si on veut avoir égard aussi à l'action du soleil sur le satelite  $\mathcal{C}^I$  on nommera ;

La masse du Soleil . . . . .  $\odot$

La distance du satelite  $\mathcal{C}^I$  au Soleil . . . . .  $\delta^I$

Le rayon vecteur de l'orbite du Soleil autour de Jupiter...  $\rho^I$

La longitude du Soleil vu du centre de  $\mathcal{Z}$  . . . . .  $\psi$ ,

& il n'y aura qu'à mettre dans les expressions de  $R^I, Q^I, P^I$  de l'article X,  $\odot$  au lieu de  $\mathcal{C}^{II}$ ,  $\delta^I$  au lieu de  $\Delta(r^I, r^{II})$ ,  $\rho^I$  au lieu de  $r^{II}$ ,  $\psi$  au lieu de  $\phi^{II}$ , & supposer  $p^{II} = 0$ . De cette manière on aura, en vertu de l'action du Soleil

$$R^I =$$

$$R^I = \odot \left( \frac{r^I - r^I \cos(\psi - \varphi^I)}{d^{I3}} + \frac{\cos(\psi - \varphi^I)}{r^{I2}} \right)$$

$$Q^I = \odot \left( \frac{r^I \sin(\psi - \varphi^I)}{d^{I3}} - \frac{\sin(\psi - \varphi^I)}{r^{I2}} \right)$$

$$P^I = \odot \frac{r^I p^I}{d^{I3}}$$

## X I I.

Donc en joignant ensemble les forces qui proviennent de l'action des trois satellites  $\mathcal{C}^{II}$ ,  $\mathcal{C}^{III}$ ,  $\mathcal{C}^{IV}$ , & du Soleil sur le satellite  $\mathcal{C}^I$ , on aura les valeurs complètes de  $R^I$ ,  $Q^I$ ,  $P^I$  exprimées de la manière suivante:

$$\begin{aligned} R^I = & \mathcal{C}^{II} \left( \frac{r^I - r^{II} \cos(\varphi^{II} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{II})^3} + \frac{\cos(\varphi^{II} - \varphi^I)}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \mathcal{C}^{III} \left( \frac{r^I - r^{III} \cos(\varphi^{III} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{III})^3} + \frac{\cos(\varphi^{III} - \varphi^I)}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \mathcal{C}^{IV} \left( \frac{r^I - r^{IV} \cos(\varphi^{IV} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{IV})^3} + \frac{\cos(\varphi^{IV} - \varphi^I)}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \odot \left( \frac{r^I - r^I \cos(\psi - \varphi^I)}{d^{I3}} + \frac{\cos(\psi - \varphi^I)}{r^{I2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^I = & \mathcal{C}^{II} \left( \frac{r^{II} \sin(\varphi^{II} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{II})^3} - \frac{\sin(\varphi^{II} - \varphi^I)}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \mathcal{C}^{III} \left( \frac{r^{III} \sin(\varphi^{III} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{III})^3} - \frac{\sin(\varphi^{III} - \varphi^I)}{r^{III2}(1+p^{III2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \mathcal{C}^{IV} \left( \frac{r^{IV} \sin(\varphi^{IV} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{IV})^3} - \frac{\sin(\varphi^{IV} - \varphi^I)}{r^{IV2}(1+p^{IV2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \odot \left( \frac{r^I \sin(\psi - \varphi^I)}{d^{I3}} - \frac{\sin(\psi - \varphi^I)}{r^{I2}} \right) \end{aligned}$$

$$P^I = \mathcal{C}^{II} \left( \frac{r^I p^I - r^{II} p^{II}}{\Delta(r^I, r^{II})^3} + \frac{p^{II}}{r^{II2}(1+p^{II2})^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \mathcal{C}^{\text{III}} \left( \frac{r^{\text{I}} p^{\text{I}} - r^{\text{III}} \rho^{\text{III}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{III}})^{\frac{3}{2}}} + \frac{p^{\text{III}}}{r^{\text{III}2}(\mathbf{I} + p^{\text{III}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \mathcal{C}^{\text{IV}} \left( \frac{r^{\text{I}} p^{\text{I}} - r^{\text{IV}} \rho^{\text{IV}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{IV}})^{\frac{3}{2}}} + \frac{p^{\text{IV}}}{r^{\text{IV}2}(\mathbf{I} + p^{\text{IV}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \odot \frac{r^{\text{I}} p^{\text{I}}}{\rho^{\text{I}2}}
\end{aligned}$$

## XIII.

Telles sont les expressions des forces perturbatrices du satellite  $\mathcal{C}^{\text{I}}$ ; d'où il est facile de déduire celles des trois autres satellites  $\mathcal{C}^{\text{II}}$ ,  $\mathcal{C}^{\text{III}}$ ,  $\mathcal{C}^{\text{IV}}$ . En effet un peu de réflexion suffit pour faire voir que les quantités  $R^{\text{I}}$ ,  $Q^{\text{I}}$ ,  $P^{\text{I}}$ , deviendront  $R^{\text{II}}$ ,  $Q^{\text{II}}$ ,  $P^{\text{II}}$ , en marquant seulement de deux traits les lettres qui sont marquées d'un trait, & réciproquement: ainsi l'on aura pour les forces perturbatrices du second satellite les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
R^{\text{II}} = & \mathcal{C}^{\text{I}} \left( \frac{r^{\text{II}} - r^{\text{I}} \cos(\varphi^{\text{I}} - \varphi^{\text{II}})}{\Delta(r^{\text{II}}, r^{\text{I}})^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos(\varphi^{\text{I}} - \varphi^{\text{II}})}{r^{\text{I}2}(\mathbf{I} + p^{\text{I}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \mathcal{C}^{\text{III}} \left( \frac{r^{\text{II}} - r^{\text{III}} \cos(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{II}})}{\Delta(r^{\text{II}}, r^{\text{III}})^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{II}})}{r^{\text{III}2}(\mathbf{I} + p^{\text{III}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \mathcal{C}^{\text{IV}} \left( \frac{r^{\text{II}} - r^{\text{IV}} \cos(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{II}})}{\Delta(r^{\text{II}}, r^{\text{IV}})^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{II}})}{r^{\text{IV}2}(\mathbf{I} + p^{\text{IV}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \odot \left( \frac{r^{\text{II}} - \rho^{\text{I}} \cos(\psi - \varphi^{\text{II}})}{\rho^{\text{II}2}} + \frac{\cos(\psi - \varphi^{\text{II}})}{\rho^{\text{I}2}} \right) \\
Q^{\text{II}} = & \mathcal{C}^{\text{I}} \left( \frac{r^{\text{I}} \sin(\varphi^{\text{I}} - \varphi^{\text{II}})}{\Delta(r^{\text{II}}, r^{\text{I}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin(\varphi^{\text{I}} - \varphi^{\text{II}})}{r^{\text{I}2}(\mathbf{I} + p^{\text{I}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \mathcal{C}^{\text{III}} \left( \frac{r^{\text{III}} \sin(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{II}})}{\Delta(r^{\text{II}}, r^{\text{III}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{II}})}{r^{\text{III}2}(\mathbf{I} + p^{\text{III}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \mathcal{C}^{\text{IV}} \left( \frac{r^{\text{IV}} \sin(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{II}})}{\Delta(r^{\text{II}}, r^{\text{IV}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{II}})}{r^{\text{IV}2}(\mathbf{I} + p^{\text{IV}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& + \odot \left( \frac{\rho^{\text{I}} \sin(\psi - \varphi^{\text{II}})}{\rho^{\text{II}2}} - \frac{\sin(\psi - \varphi^{\text{II}})}{\rho^{\text{I}2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^{\text{II}} = & \textcircled{\text{I}} \left( \frac{r^{\text{II}} p^{\text{II}} - r^{\text{I}} p^{\text{I}}}{\Delta (r^{\text{II}}, r^{\text{I}})^3} + \frac{P^{\text{I}}}{r^{\text{I}2} (1 + p^{\text{I}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 & + \textcircled{\text{III}} \left( \frac{r^{\text{II}} p^{\text{II}} - r^{\text{III}} p^{\text{III}}}{\Delta (r^{\text{II}}, r^{\text{III}})^3} + \frac{P^{\text{III}}}{r^{\text{III}2} (1 + p^{\text{III}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 & + \textcircled{\text{IV}} \left( \frac{r^{\text{II}} p^{\text{II}} - r^{\text{IV}} p^{\text{IV}}}{\Delta (r^{\text{II}}, r^{\text{IV}})^3} + \frac{P^{\text{IV}}}{r^{\text{IV}2} (1 + p^{\text{IV}2})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 & + \textcircled{\text{O}} \frac{r^{\text{II}} p^{\text{II}}}{p^{\text{II}3}}
 \end{aligned}$$

On aura pareillement les expressions de  $R^{\text{III}}$ ,  $Q^{\text{III}}$ ,  $F^{\text{III}}$ , & de  $R^{\text{IV}}$ ,  $Q^{\text{IV}}$ ,  $F^{\text{IV}}$ , en marquant successivement de trois traits & de quatre traits les lettres qui ne sont marquées que d'un seul trait dans les expressions de  $R^{\text{I}}$ ,  $Q^{\text{I}}$ ,  $P^{\text{I}}$ , & réciproquement.

X I V.

Il reste à chercher les valeurs des quantités  $\Delta (r^{\text{I}}, r^{\text{II}})$ ,  $\Delta (r^{\text{I}}, r^{\text{III}})$ , &c, qui expriment les distances entre le premier satellite & le second, entre le premier & le troisième, &c. (art. IX). Or il est facile de trouver qu'on aura  $\Delta (r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^2 = (r^{\text{II}} p^{\text{II}} - r^{\text{I}} p^{\text{I}})^2 + (r^{\text{I}} \sin. (\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}))^2$   
 $(+ r^{\text{II}} - r^{\text{I}} \cos. (\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}))^2 = r^{\text{I}2} (1 + p^{\text{I}2}) - 2 r^{\text{I}} r^{\text{II}} (\cos. (\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})$   
 $+ p^{\text{I}} p^{\text{II}}) + r^{\text{II}2} (1 + p^{\text{II}2})$ , donc tirant la racine quarrée  
 $\Delta (r^{\text{I}}, r^{\text{II}}) = \sqrt{r^{\text{I}2} (1 + p^{\text{I}2}) - 2 r^{\text{I}} r^{\text{II}} (\cos. (\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + p^{\text{I}} p^{\text{II}}) + r^{\text{II}2} (1 + p^{\text{II}2})}$

On trouvera pareillement

$\Delta (r^{\text{I}}, r^{\text{III}}) = \sqrt{r^{\text{I}2} (1 + p^{\text{I}2}) - 2 r^{\text{I}} r^{\text{III}} (\cos. (\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) + p^{\text{I}} p^{\text{III}}) + r^{\text{III}2} (1 + p^{\text{III}2})}$   
 & ainsi des autres. On voit par-là que  $\Delta (r^{\text{II}}, r^{\text{I}}) = \Delta (r^{\text{I}}, r^{\text{II}})$ , car l'expression de cette dernière quantité demeure la même, en changeant  $r^{\text{I}}$ ,  $p^{\text{I}}$ ,  $\varphi^{\text{I}}$  en  $r^{\text{II}}$ ,  $p^{\text{II}}$ ,  $\varphi^{\text{II}}$ , & réciproquement ; ce qui est d'ailleurs évident.

## X V.

Pour avoir maintenant la valeur de  $\Delta^I$ , il n'y aura qu'à changer dans celle de  $\Delta(r^I, r^{II})$ ,  $r^{II}$  en  $\rho^I$ ,  $\phi^{II}$  en  $\psi$ , & effacer la quantité  $\rho^{II}$  (art. XI); on aura donc ainsi

$$\Delta^I = \sqrt{r^{I2}(1 + \rho^{I2}) - 2r^I \rho^I \cos(\psi - \phi^I) + \rho^{I2}};$$

on trouvera pareillement

$$\Delta^{II} = \sqrt{r^{II2}(1 + \rho^{II2}) - 2r^{II} \rho^I \cos(\psi - \phi^{II}) + \rho^{I2}}, \text{ \& ainsi des autres.}$$

## X V I.

Nous avons supposé (article X) que l'attraction de Jupiter sur les satellites étoit exactement en raison inverse du quarré des distances; c'est ce qui n'est rigoureusement vrai, qu'en regardant Jupiter comme un globe de densité uniforme.

Or on fait par les observations & par la théorie, que cette Planète est considérablement applatie; de plus il peut se faire qu'elle ne soit pas par-tout de la même densité; deux circonstances qui peuvent aussi influer sur le mouvement des satelites, & auxquelles il est bon par conséquent d'avoir égard ici. Pour cela nous supposons 1.<sup>o</sup> que la figure de Jupiter soit celle d'un sphéroïde elliptique peu différent d'une sphère; 2.<sup>o</sup> que ce sphéroïde soit formé d'une infinité de couches toutes sphéroïdiques, & de densités différentes. 3.<sup>o</sup> Que l'équateur de Jupiter soit dans le plan de l'orbite de cette Planète.

Cette dernière supposition n'est pas tout-à-fait exacte; car on fait que l'équateur de Jupiter est incliné d'environ trois degrés sur le plan de son orbite; mais l'erreur qui en résulte est si petite qu'il seroit superflu d'en tenir compte.

Cela posé, soit  $A$  le demi-axe d'une couche quelconque,  $E$  son ellipticité, &  $D$  sa densité; on trouvera par les



théorèmes de la figure de la Terre de M. Clairaut (§. XXVI & XLVI seconde Partie) que l'attraction de Jupiter sur un fatellite quelconque produit deux forces : l'une dirigée

au centre de Jupiter  $= \frac{2\pi}{r^2(1+p^2)} (\int D A^2 dA + \frac{2}{3} \int D d. (A^3 E))$   
 $+ \frac{2\pi(1-2p^2)}{5r^4(1+p^2)^3} \int D d. (A^5 E)$  ; l'autre perpendiculaire à cette

direction dans le plan d'un méridien  $= \frac{4\pi p}{5r^4(1+p^2)^3}$   
 $\int D d. (A^5 E)$  ; ( $\pi$  dénote ici la périmétrie d'un cercle dont

le rayon  $= 1$ ). La partie  $\frac{2\pi}{r^2(1+p^2)} (\int D A^2 dA + \frac{2}{3} \int D d. (A^3 E))$

de la première de ces deux forces, étant réciproquement proportionnelle au carré de la distance, doit être comparée avec la force  $\frac{\mathcal{T}^2}{r^2(1+p^2)}$  (art. X) ; d'où l'on aura

$\mathcal{T} = 2\pi (\int D A^2 dA + \frac{2}{3} \int D d. (A^3 E))$ . L'autre partie de la

même force :  $\frac{2\pi(1-2p^2)}{5r^4(1+p^2)^3} \int D d. (A^5 E)$ , aussi bien que la

force perpendiculaire  $\frac{4\pi p}{5r^4(1+p^2)^3} \int D d. (A^5 E)$ , devront être

regardées comme des forces perturbatrices, & par conséquent décomposées suivant les directions de  $R, Q, P$  ; cette décomposition étant faite, on aura les deux forces suivantes :

$\frac{2\pi}{5r^4} \times \frac{1-4p^2}{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}} \int D d. (A^5 E)$ , dans la direction de la

force  $R$ , &  $\frac{2\pi}{5r^4} \times \frac{3p-2p^3}{(1+p^2)^{\frac{7}{2}}} \int D d. (A^5 E)$  dans la direction de

la force  $P$  ; donc si on suppose  $v = \frac{\int D d. (A^5 E)}{A^2 (\int D A^2 dA + \frac{2}{3} \int D d. (A^3 E))}$  ;

les forces perturbatrices  $R$  &  $P$  qui résultent de l'appiaissement de Jupiter, & de l'hétérogénéité de ses couches

seront en général . . . . .  $R = \frac{v A^2 \mathcal{T}^2 (1-4p^2)}{5r^4(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}$

& .....  $P = \frac{v A^2 \mathcal{T}^2 (3p - 2p^3)}{5r^4(1+p^2)^{\frac{7}{2}}}$

d'où l'on tire, par rapport au premier satellite

$$R^I = \frac{v A^2 \mathcal{T}^2 (1 - 4p^{12})}{5r^{14}(1+p^{12})^{\frac{7}{2}}}, \text{ \& } P^I = \frac{v A^2 \mathcal{T}^2 (3p^3 - 2p^{13})}{5r^{14}(1+p^{12})^{\frac{7}{2}}};$$

par rapport au second satellite,

$$R^{II} = \frac{v A^2 \mathcal{T}^2 (1 - 4p^{112})}{5r^{114}(1+p^{112})^{\frac{7}{2}}}, \text{ \& } P^{II} = \frac{v A^2 \mathcal{T}^2 (3p^{11} - 2p^{113})}{5r^{114}(1+p^{112})^{\frac{7}{2}}}, \text{ \& ainsi des}$$

autres.

Il n'y aura donc qu'à ajouter ces valeurs à celles des articles XII & XIII. Au reste comme l'applatissement de Jupiter n'est que d'environ  $\frac{1}{3}$ , suivant les dernières observations, la quantité  $E$  sera fort petite, aussi bien que la quantité  $v$ ; de plus le rapport de  $A^2$  à  $r^2$  sera toujours exprimé par une fraction fort petite; de sorte que les forces perturbatrices, dont nous venons de parler, seront nécessairement très-petites.

Si on suppose  $D$  constante, on aura  $v = \frac{3E}{1+2E}$ . En général, quelle que soit  $D$ , on aura, par les conditions de l'équilibre,  $\int D d.(A^2 E) = 5 A^2 (E - \frac{1}{2} \mathcal{C}) \int D A^2 dA$ , ( $\mathcal{C}$  étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, sous l'équateur); donc  $v = 5E - \frac{1}{2} \mathcal{C}$  à très-peu-près.

### X V I I.

Il faut maintenant développer les expressions des forces perturbatrices  $P, Q, R$ , en employant les suppositions de l'article V. Pour cela nous remarquerons d'abord que nous pouvons négliger dans ce calcul tous les termes de l'ordre  $n^2$ ; parce que les quantités  $P, Q, R$  sont déjà elles-mêmes de l'ordre  $n$ , comme nous le verrons plus bas. Donc mettant premièrement dans la valeur de  $\Delta(r^I, r^{II})$ , art. XIV, au lieu de  $r^I, a^I(1+nx^I)$ , au lieu de  $p^I, nz^I$ ; &

de même, au lieu de  $r^{\text{II}}$ ,  $a^{\text{II}}(1+nx^{\text{II}})$  & au lieu de  $p^{\text{II}}$ ,  $nz^{\text{II}}$ , suivant ce que nous avons dit à l'art. IX, on aura :

$$\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}}) = \sqrt{a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{II}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{II}2}} \\ = \sqrt{a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{II}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{II}2} - 2na^{\text{I}2}x^{\text{I}} + a^{\text{II}2}x^{\text{II}} - 2na^{\text{I}}a^{\text{II}}(x^{\text{I}} + x^{\text{II}}) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})}$$

d'où l'on tire, par les séries,

$$\frac{\text{I}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})} = (a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{II}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{II}2})^{-\frac{1}{2}} \\ - 3n(a^{\text{I}2}x^{\text{I}} + a^{\text{II}2}x^{\text{II}} - a^{\text{I}}a^{\text{II}}(x^{\text{I}} + x^{\text{II}}) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})) \times \\ (a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{II}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{II}2})^{-\frac{3}{2}} + \&c.$$

On trouvera de même :

$$\frac{\text{I}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{III}})} = (a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{III}} \cos(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{III}2})^{-\frac{1}{2}} \\ - 3n(a^{\text{I}2}x^{\text{I}} + a^{\text{III}2}x^{\text{III}} - a^{\text{I}}a^{\text{III}}(x^{\text{I}} + x^{\text{III}}) \cos(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}})) \times (a^{\text{I}2} \\ - 2a^{\text{I}}a^{\text{III}} \cos(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{III}2})^{-\frac{3}{2}} + \&c.$$

Et pareillement]

$$\frac{\text{I}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{IV}})} = (a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{IV}} \cos(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{IV}2})^{-\frac{1}{2}} \\ - 3n(a^{\text{I}2}x^{\text{I}} + a^{\text{IV}2}x^{\text{IV}} - a^{\text{I}}a^{\text{IV}}(x^{\text{I}} + x^{\text{IV}}) \cos(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}})) \times (a^{\text{I}2} \\ - 2a^{\text{I}}a^{\text{IV}} \cos(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{IV}2})^{-\frac{3}{2}} + \&c.]$$

Et ainsi des autres.

### X V I I I.

Mais il se présente ici une difficulté, par rapport aux quantités  $(a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{II}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{II}2})^{-\frac{1}{2}}$ ,  $(a^{\text{I}2} - 2a^{\text{I}}a^{\text{II}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{II}2})^{-\frac{3}{2}}$  &c ; c'est de pouvoir les réduire à une forme rationnelle ; condition absolument nécessaire pour l'intégration des équations des satellites.

Pour résoudre cette difficulté, on écrira d'abord les radicaux proposés ainsi :  $a^{\text{II}-3} \left( 1 - \frac{2a^{\text{I}}}{a^{\text{II}}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \frac{a^{\text{I}2}}{a^{\text{II}2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $a^{\text{II}-5} \left( 1 - \frac{2a^{\text{I}}}{a^{\text{II}}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \frac{a^{\text{I}2}}{a^{\text{II}2}} \right)^{-\frac{3}{2}}$  &c ; & la question se

réduira à changer en une fonction rationnelle, une quantité de cette forme  $(1 - 2q \cos. \theta + q^2)^{-\lambda}$ , dans laquelle  $q$  est un nombre moindre que l'unité.

Pour y parvenir, je remarque que la quantité  $1 - 2q \cos. \theta + q^2$  est égale au produit de ces deux quantités:  $1 - q (\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1})$ , &  $1 - q (\cos. \theta - \sin. \theta \sqrt{-1})$ ; je les élève donc l'une & l'autre à la puissance  $-\lambda$ , en écrivant au lieu du quarré de  $\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1}$ ,  $\cos. 2\theta \pm \sin. 2\theta \sqrt{-1}$ , & ainsi de suite; j'ai  $(1 - q (\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1}))^{-\lambda} = 1 + \lambda q (\cos. \theta \pm \sin. \theta \sqrt{-1}) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 (\cos. 2\theta \pm \sin. 2\theta \sqrt{-1}) + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} q^3 (\cos. 3\theta \pm \sin. 3\theta \sqrt{-1}) + \&c.$

Soit pour abrégér,

$$1 + \lambda q \cos. \theta + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 \cos. 2\theta + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} q^3 \cos. 3\theta + \&c. = M,$$

$$\lambda q \sin. \theta + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 \sin. 2\theta + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+1)}{2 \cdot 3} q^3 \sin. 3\theta + \&c. = N$$

on aura:

$$(1 - q (\cos. \theta + \sin. \theta \sqrt{-1}))^{-\lambda} = M + N \sqrt{-1}, \&$$

$$(1 - q (\cos. \theta - \sin. \theta \sqrt{-1}))^{-\lambda} = M - N \sqrt{-1}; \text{ donc}$$

$$(1 - q \cos. \theta + q^2)^{-\lambda} = (M + N \sqrt{-1}) \times (M - N \sqrt{-1}) = M^2 + N^2.$$

Or si on fait les quarrés des deux séries  $M$  &  $N$ , qu'on ajoute ensemble les termes qui ont le même coefficient; & qu'on remarque que  $\cos. m\theta \times \cos. n\theta + \sin. m\theta \times \sin. n\theta$  est  $= \cos. (m-n)\theta$ ,  $m$  &  $n$  étant des nombres quelconques; on trouvera  $(1 - 2q \cos. \theta + q^2)^{-\lambda} = A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta + D \cos. 3\theta + \&c.$  Et les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. seront exprimés de la manière suivante.

$$A = 1 + \lambda^2 q^2 + \frac{\lambda^2(\lambda+1)^2}{2^2} q^4 + \frac{\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2}{2^2 \cdot 3^2} q^6 + \&c.$$

$B =$

$$B = 2\lambda q + 2\lambda \times \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^3 + 2 \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \times \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} q^5 \\ + 2 \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} \times \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^7 + \&c.$$

$$C = 2 \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} q^2 + 2\lambda \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} q^4 + \&c.$$

& ainsi de suite.

Au reste il ne sera nécessaire que de connoître les deux premiers coefficients  $A$ ,  $B$ , pour avoir tous les autres  $C$ ,  $D$ , &c; car on trouvera par les formules de l'article XXVI de la Pièce sur le mouvement de Saturne (Prix 1748)

$$C = \frac{(1+q^2)B - 2\lambda q A}{(2-\lambda)q}$$

$$D = \frac{2(1+q^2)C - (1+\lambda)q B}{(3-\lambda)q}$$

$$E = \frac{3(1+q^2)D - (2+\lambda)q C}{(4-\lambda)q} \quad \& \text{ ainsi de suite.}$$

### X I X.

Tout consiste donc à déterminer les valeurs de  $A$ , &  $B$ ; Or, dans la théorie des satellites de Jupiter, la plus grande valeur de  $q$  est d'environ  $\frac{2}{3}$ , comme on le verra plus bas; donc  $q^2$  fera toujours moindre que  $\frac{1}{2}$ ; donc si on fait  $\lambda = \frac{1}{2}$ , les suites  $A$  &  $B$  seront assez convergentes pour qu'on puisse se contenter d'un petit nombre de termes. Ces suites seront représentées en général par celles-ci

$$A = 1 + \frac{2}{4} q^2 + \frac{2}{4} \times \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 6} q^4 + \frac{2}{4} \times \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 6} \times \frac{4 \cdot 9}{3 \cdot 6} q^6 + \&c.$$

$$B = \frac{1}{2} q + \frac{2}{4} \times \frac{5}{4} q^3 + \frac{2}{4} \times \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 6} \times \frac{7}{6} q^5 + \&c.$$

dont les coefficients numériques sont très aisés à calculer.

Voici les logarithmes de ces coefficients pour les différentes puissances de  $q$  qui entrent dans les deux séries

*Prix de l'Académie, tome IX.*

D

## 26 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS

dont il s'agit ; les logarithmes qui répondent aux puissances paires de  $q$  sont ceux des coefficients des termes de la série  $A$  ; & les logarithmes qui répondent aux puissances impaires de  $q$  sont ceux des coefficients des termes de la série  $\frac{B}{2}$ .

$q$	0. 176091	$q^{16}$	I. 047096	$q^{31}$	I. 315612
$q^2$	0. 352182	$q^{17}$	I. 070577	$q^{32}$	I. 328976
$q^3$	0. 449092	$q^{18}$	I. 094058	$q^{33}$	I. 341565
$q^4$	0. 546002	$q^{19}$	I. 115247	$q^{34}$	I. 354154
$q^5$	0. 612949	$q^{20}$	I. 136436	$q^{35}$	I. 366053
$q^6$	0. 679896	$q^{21}$	I. 155741	$q^{36}$	I. 377952
$q^7$	0. 731049	$q^{22}$	I. 175046	$q^{37}$	I. 389233
$q^8$	0. 782202	$q^{23}$	I. 192775	$q^{38}$	I. 400514
$q^9$	0. 823595	$q^{24}$	I. 210504	$q^{39}$	I. 411238
$q^{10}$	0. 864988	$q^{25}$	I. 226895	$q^{40}$	I. 421962
$q^{11}$	0. 899750	$q^{26}$	I. 243286	$q^{41}$	I. 432181
$q^{12}$	0. 934512	$q^{27}$	I. 258526	$q^{42}$	I. 442400
$q^{13}$	0. 964475	$q^{28}$	I. 273766	$q^{43}$	I. 452160
$q^{14}$	0. 994438	$q^{29}$	I. 288007	$q^{44}$	I. 461920
$q^{15}$	I. 020767	$q^{30}$	I. 302248	&c.	&c.

Il ne s'agira donc plus que d'ajouter à chacun de ces logarithmes celui de la puissance correspondante de  $q$ , &

de chercher ensuite le nombre qui répond à chaque somme; on aura ainsi les valeurs d'autant de termes des deux séries  $A$  &  $\frac{B}{2}$ , qu'on voudra; d'où l'on pourra tirer pour  $A$  &  $B$  des valeurs aussi approchées qu'on le croira nécessaire. Pour juger de la quantité de l'approximation, on remarquera que les différences des logarithmes de la table précédente forment une progression décroissante; d'où il suit que si après avoir pris la somme d'un nombre quelconque de termes de la série  $A$  ou  $\frac{B}{2}$ , on regarde le reste de la série comme une progression géométrique, l'erreur sera toujours moindre que la somme de cette progression. Au reste dans le cas même où  $q$  sera la plus grande (ce cas est celui où  $q = \frac{a''}{a'''} = \frac{900}{1438}$ , comme on le verra dans la suite); il suffira de prendre les dix premiers termes des séries  $A$  &  $\frac{B}{2}$ , pour avoir les valeurs de ces coefficients en millièmes, c'est-à-dire aux dix-millièmes près, & en prenant encore trois ou quatre termes, on poussera l'exactitude jusqu'aux dix-millièmes & au-delà.

## X X.

Ayant ainsi les valeurs des coefficients  $A, B, C$ , &c. de la suite qui représente  $(1 - 2q \cos. \theta + q^2)^{-\frac{1}{2}}$  on trouvera aisément ceux de la suite qui exprime  $(1 - 2q \cos. \theta + q^2)^{-\frac{5}{2}}$ ; car dénotant ces derniers par  $(A), (B), (C)$ , &c. il faudra que la série  $(A) + (B) \cos. \theta + (C) \cos. 2\theta + \&c.$  étant multipliée par  $1 - 2q \cos. \theta + q^2$ , devienne égale à la série  $A + B \cos. \theta + C \cos. 2\theta + \&c.$  La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes:

$$A = (1 + q^2)(A) - q(B), \text{ \&}$$

$$B = (1 + q^2)(B) - 2q(A) - q(C).$$

Or (C) est donné en (A) & (B) de la même manière que C est donné en A & B ; il suffira pour cela de mettre dans l'expression de C (art. XVIII, (A) au lieu de A, (B) au lieu de B, (C) au lieu de C, &  $\lambda + 1$  au lieu de  $\lambda$  ; ce qui donnera  $(C) = \frac{(1+q^2)(B) - 2(\lambda+1)q(A)}{(1-\lambda)q}$  ; donc si on substitue cette valeur de (C), on aura deux équations en A, B, (A), (B), d'où l'on tirera  $(A) = \frac{(1+q^2)A + \frac{\lambda-1}{\lambda}qB}{(1-q^2)^2}$  ;  $(B) = \frac{\frac{\lambda-1}{\lambda}(1+q^2)B + 4qA}{(1-q^2)^2}$ . Connoissant (A) & (B), on connoîtra tous les suivans (art. XVIII).

## X X I.

De ce qu'on vient de démontrer, il suit qu'on peut supposer :

$$(a^{I2} - 2a^I a^{II} \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + a^{II2})^{-\frac{1}{2}} = \Gamma(a^I, a^{II}) + \Gamma_1(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + \Gamma_2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \Gamma_3(a^I, a^{II}) \cos. 3(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c. \&$$

$$(a^{I2} - 2a^I a^{II} \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + a^{II2})^{-\frac{3}{2}} = \Lambda(a^I, a^{II}) + \Lambda_1(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + \Lambda_2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \Lambda_3(a^I, a^{II}) \cos. 3(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.$$

J'entends par  $\Gamma(a^I, a^{II})$ ,  $\Gamma_1(a^I, a^{II})$ ,  $\Gamma_2(a^I, a^{II})$ , &c ;  $\Lambda(a^I, a^{II})$ ,  $\Lambda_1(a^I, a^{II})$ ,  $\Lambda_2(a^I, a^{II})$ , &c. des fonctions données de  $a^I$ ,  $a^{II}$  ; dont on trouvera la valeur par les méthodes des articles précédens.

Donc si on fait ces substitutions dans la quantité  $\frac{1}{\Delta(r^I, r^{II})^2}$  (art. XVII), & qu'on développe les produits des sinus & des cosinus, on trouvera



$$\frac{1}{\Delta(r^I, r^{II})^2} =$$

$$\Gamma(a^I, a^{II}) + \Gamma_1(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + \Gamma_2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I)$$

$$+ \Gamma_3(a^I, a^{II}) \cos. 3(\varphi^{II} - \varphi^I) \&c.$$

$$- 3nx^I (a^{I2} \Lambda(a^I, a^{II}) - a^I a^{II} \frac{\Lambda_1(a^I, a^{II})}{2})$$

$$- 3nx^I (a^{I2} \Lambda_1(a^I, a^{II}) - a^I a^{II} \frac{2\Lambda(a^I, a^{II}) + \Lambda_2(a^I, a^{II})}{2}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I)$$

$$- 3nx^I (a^{I2} \Lambda_2(a^I, a^{II}) - a^I a^{II} \frac{\Lambda_1(a^I, a^{II}) + \Lambda_3(a^I, a^{II})}{2}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) \&c.$$

$$- 3nx^{II} (a^{II2} \Lambda(a^I, a^{II}) - a^I a^{II} \frac{\Lambda_1(a^I, a^{II})}{2})$$

$$- 3nx^{II} (a^{II2} \Lambda_1(a^I, a^{II}) - a^I a^{II} \frac{2\Lambda(a^I, a^{II}) + \Lambda_2(a^I, a^{II})}{2}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I)$$

$$- 3nx^{II} (a^{II2} \Lambda_2(a^I, a^{II}) - a^I a^{II} \frac{\Lambda_1(a^I, a^{II}) + \Lambda_3(a^I, a^{II})}{2}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) \&c.$$

## X X I I.

Soit fait, pour plus de simplicité :

$$\Pi(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_1(a^I, a^{II}) - 2a^{I2} \Lambda(a^I, a^{II})}{2}$$

$$\Pi_1(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_2(a^I, a^{II}) - 2a^{I2} \Lambda_1(a^I, a^{II}) + 2a^I a^{II} \Lambda(a^I, a^{II})}{2}$$

$$\Pi_2(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_3(a^I, a^{II}) - 2a^{I2} \Lambda_2(a^I, a^{II}) + a^I a^{II} \Lambda_1(a^I, a^{II})}{2}$$

$$\Pi_3(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_4(a^I, a^{II}) - 2a^{I2} \Lambda_3(a^I, a^{II}) + a^I a^{II} \Lambda_2(a^I, a^{II})}{2}$$

& ainsi de suite.

Soit aussi

$$\Psi(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_1(a^I, a^{II}) - 2a^{II2} \Lambda(a^I, a^{II})}{2}$$

$$\Psi_1(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_2(a^I, a^{II}) - 2a^{II2} \Lambda_1(a^I, a^{II}) + 2a^I a^{II} \Lambda(a^I, a^{II})}{2}$$

$$\Psi_2(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_3(a^I, a^{II}) - 2a^{II2} \Lambda_2(a^I, a^{II}) + a^I a^{II} \Lambda_1(a^I, a^{II})}{2}$$

$$\Psi_3(a^I, a^{II}) = \frac{a^I a^{II} \Lambda_4(a^I, a^{II}) - 2a^{II2} \Lambda_3(a^I, a^{II}) + a^I a^{II} \Lambda_2(a^I, a^{II})}{2} \&c.$$

On aura la quantité  $\frac{1}{\Delta(r^I, r^{II})^3}$  exprimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(r^I, r^{II})^3} = & \Gamma(a^I, a^{II}) + \Gamma_1(a^I, a^{II}) \cos.(\varphi^{II} - \varphi^I) \\ & + \Gamma_2(a^I, a^{II}) \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c. \\ & + 3nx^I (\Pi(a^I, a^{II}) + \Pi_1(a^I, a^{II}) \cos.(\varphi^{II} - \varphi^I) \\ & + \Pi_2(a^I, a^{II}) \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ & + 3nx^{II} (\Psi(a^I, a^{II}) + \Psi_1(a^I, a^{II}) \cos.(\varphi^{II} - \varphi^I) \\ & + \Psi_2(a^I, a^{II}) \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \end{aligned}$$

On trouvera de même, en changeant simplement  $r^{II}$  en  $r^{III}$ ,  $a^{II}$  en  $a^{III}$ ,  $\varphi^{II}$  en  $\varphi^{III}$ , &  $x^{II}$  en  $x^{III}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(r^I, r^{III})^3} = & \Gamma(a^I, a^{III}) + \Gamma_1(a^I, a^{III}) \cos.(\varphi^{III} - \varphi^I) \\ & + \Gamma_2(a^I, a^{III}) \cos.2(\varphi^{III} - \varphi^I) + \&c. \\ & + 3nx^I (\Pi(a^I, a^{III}) + \Pi_1(a^I, a^{III}) \cos.(\varphi^{III} - \varphi^I) \\ & + \Pi_2(a^I, a^{III}) \cos.2(\varphi^{III} - \varphi^I) + \&c.) \\ & + 3nx^{III} (\Psi(a^I, a^{III}) + \Psi_1(a^I, a^{III}) \cos.(\varphi^{III} - \varphi^I) \\ & + \Psi_2(a^I, a^{III}) \cos.2(\varphi^{III} - \varphi^I) + \&c.) \end{aligned}$$

Et pareillement,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(r^I, r^{IV})^3} = & \Gamma(a^I, a^{IV}) + \Gamma_1(a^I, a^{IV}) \cos.(\varphi^{IV} - \varphi^I) \\ & + \Gamma_2(a^I, a^{IV}) \cos.2(\varphi^{IV} - \varphi^I) + \&c. \\ & + 3nx^I (\Pi(a^I, a^{IV}) + \Pi_1(a^I, a^{IV}) \cos.(\varphi^{IV} - \varphi^I) \\ & + \Pi_2(a^I, a^{IV}) \cos.2(\varphi^{IV} - \varphi^I) + \&c.) \\ & + 3nx^{IV} (\Psi(a^I, a^{IV}) + \Psi_1(a^I, a^{IV}) \cos.(\varphi^{IV} - \varphi^I) \\ & + \Psi_2(a^I, a^{IV}) \cos.2(\varphi^{IV} - \varphi^I) + \&c.) \end{aligned}$$

### X X I I I.

Cela posé, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{r^I}{\Delta(r^I, r^{II})} &= \frac{a^I(1+nx^I)}{\Delta(r^I, r^{II})} = a^I(\Gamma(a^I, a^{II}) + \Gamma I(a^I, a^{II}) \\ &\quad \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + \Gamma 2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ + nx^I a^I &(3\Pi(a^I, a^{II}) + \Gamma(a^I, a^{II}) + (3\Pi I(a^I, a^{II}) + \Gamma I(a^I, a^{II})) \times \\ &\quad \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + (3\Pi 2(a^I, a^{II}) + \Gamma 2(a^I, a^{II})) \times \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) \\ &\quad + \&c.) \\ + 3nx^{II} a^I &(\Psi(a^I, a^{II}) + \Psi I(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) \\ &\quad + \Psi 2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \end{aligned}$$

On trouvera de la même manière :

$$\begin{aligned} \frac{r^{II}}{\Delta(r^I, r^{II})} &= a^{II}(\Gamma(a^I, a^{II}) + \Gamma I(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) \\ &\quad + \Gamma 2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ + 3nx^I a^{II} &(\Pi(a^I, a^{II}) + \Pi I(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) \\ &\quad + \Pi 2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ + nx^{II} a^{II} &(3\Psi(a^I, a^{II}) + \Gamma(a^I, a^{II}) + (3\Psi I(a^I, a^{II}) \\ &\quad + \Gamma I(a^I, a^{II})) \times \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + (3\Psi 2(a^I, a^{II}) \\ &\quad + \Gamma 2(a^I, a^{II})) \times \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \end{aligned}$$

On aura ensuite  $\frac{1}{r^{II_2(1+p^{II_2})^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{a^{II_2}} (1 - 2nx^{II} + \&c.)$

Donc  $-\frac{r^{II}}{\Delta(r^I, r^{II})} + \frac{1}{r^{II_2(1+p^{II_2})^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{a^{II_2}} - a^{II} \Gamma(a^I, a^{II})$   
 $- a^{II} \Gamma I(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) - a^{II} \Gamma 2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I)$   
 $- \&c.$

$- 3nx^I a^{II} (\Pi(a^I, a^{II}) + \Pi I(a^I, a^{II}) \cos(\varphi^{II} - \varphi^I)$   
 $+ \Pi 2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.)$

$- nx^{II} \left( \frac{2}{a^{II_2}} + 3a^{II} \Psi(a^I, a^{II}) + a^{II} \Gamma(a^I, a^{II}) + (3a^{II} \Psi I(a^I, a^{II}) \right.$   
 $+ a^{II} \Gamma I(a^I, a^{II})) \times \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + (3a^{II} \Psi 2(a^I, a^{II})$   
 $+ a^{II} \Gamma 2(a^I, a^{II})) \times \cos. 2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c. )$

Cette quantité étant multipliée par  $\cos(\varphi^{II} - \varphi^I)$ , on aura

$$\begin{aligned}
& - \frac{r^{\text{II}} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} + \frac{\cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}})^{\frac{1}{2}}} = - \frac{a^{\text{II}}\Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \\
& - \left( \frac{a^{\text{II}}\Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + 2a^{\text{II}}\Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} - \frac{1}{a^{\text{II}2}} \right) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \\
& - \frac{a^{\text{II}}\Gamma_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + a^{\text{II}}\Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) - \& c. \\
& - nx^{\text{I}} \left( 3a^{\text{II}} \frac{\Pi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + 3a^{\text{II}} \frac{\Pi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + 2\Pi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \right. \\
& \left. + 3a^{\text{II}} \frac{\Pi_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \Pi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \& c. \right) \\
& - nx^{\text{II}} \left( \frac{3a^{\text{II}}\Psi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + a^{\text{II}}\Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + \left( 3a^{\text{II}} \frac{\Psi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + 2\Psi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. + a^{\text{II}} \frac{\Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + 2\Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + \frac{2}{a^{\text{II}2}} \right) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \right. \\
& \left. + \left( 3a^{\text{II}} \frac{\Psi_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \Psi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + a^{\text{II}} \frac{\Gamma_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \right) \right. \\
& \left. \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \& c. \right)
\end{aligned}$$

Enfin multipliant la même quantité par  $-\sin.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})$  on aura :

$$\begin{aligned}
& \frac{r^{\text{II}} \sin(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^3} - \frac{\sin(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}})^{\frac{1}{2}}} = - \left( a^{\text{II}} \frac{\Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + \frac{1}{a^{\text{II}2}} \right) \\
& \sin.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) - a^{\text{II}} \frac{\Gamma_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - \Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \sin.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) - \& c. \\
& - nx^{\text{I}} \left( 3a^{\text{II}} \frac{\Pi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - 2\Pi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \sin.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \right. \\
& \left. + 3a^{\text{II}} \frac{\Pi_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - \Pi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \sin.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \& c. \right) \\
& - nx^{\text{II}} \left( \left( 3a^{\text{II}} \frac{\Psi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - 2\Psi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + a^{\text{II}} \frac{\Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - 2\Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} - \frac{2}{a^{\text{II}2}} \right) \right. \\
& \left. \sin.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \left( 3a^{\text{II}} \frac{\Psi_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - \Psi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + a^{\text{II}} \frac{\Gamma_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - \Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} \right) \right. \\
& \left. \sin.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \& c. \right)
\end{aligned}$$

## X X I V.]

Soit maintenant

$$\checkmark \Gamma(a^I, a^{II}) = \frac{a^{I^3} a^{II} \Gamma_1(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Gamma(a^I, a^{II})}{2},$$

$$\checkmark \Gamma_1(a^I, a^{II}) = \frac{a^{I^2} a^{II} \Gamma_2(a^I, a^{II}) - 2a^I \Gamma_1(a^I, a^{II}) + 2a^{I^2} a^{II} \Gamma(a^I, a^{II})}{2} - \frac{a^{I^2}}{a^{II^2}},$$

$$\checkmark \Gamma_2(a^I, a^{II}) = \frac{a^{I^3} a^{II} \Gamma_3(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Gamma_2(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Gamma_1(a^I, a^{II})}{2},$$

$$\checkmark \Gamma_3(a^I, a^{II}) = \frac{a^{I^3} a^{II} \Gamma_4(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Gamma_3(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Gamma_2(a^I, a^{II})}{2}, \&c.$$

$$\checkmark \Pi(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Pi_1(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Pi(a^I, a^{II})}{2} - a^I \Gamma(a^I, a^{II}),$$

$$\checkmark \Pi_1(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Pi_2(a^I, a^{II}) - 2a^I \Pi_1(a^I, a^{II}) + 2a^{I^2} a^{II} \Pi(a^I, a^{II})}{2} - a^I \Gamma_1(a^I, a^{II}),$$

$$\checkmark \Pi_2(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Pi_3(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Pi_2(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Pi_1(a^I, a^{II})}{2} - a^I \Gamma_2(a^I, a^{II}),$$

$$\checkmark \Pi_3(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Pi_4(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Pi_3(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Pi_2(a^I, a^{II})}{2} - a^I \Gamma_3(a^I, a^{II}), \&c.$$

$$\checkmark \Psi(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Psi_1(a^I, a^{II}) - 2a^I \Psi(a^I, a^{II})}{2} + \frac{a^{I^2} a^{II} \Gamma_1(a^I, a^{II})}{2},$$

$$\checkmark \Psi_1(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Psi_2(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Psi_1(a^I, a^{II}) + 2a^{I^2} a^{II} \Psi(a^I, a^{II})}{2} + \frac{a^{I^2} a^{II} \Gamma_2(a^I, a^{II}) + 2a^{I^2} a^{II} \Gamma(a^I, a^{II})}{2} + \frac{2a^{I^2}}{a^{II^2}},$$

$$\checkmark \Psi_2(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Psi_3(a^I, a^{II}) - 2a^I \Psi_2(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Psi_1(a^I, a^{II})}{2} + \frac{a^{I^2} a^{II} \Gamma_3(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Gamma_1(a^I, a^{II})}{2},$$

$$\checkmark \Psi_3(a^I, a^{II}) = 3 \frac{a^{I^2} a^{II} \Psi_4(a^I, a^{II}) - 2a^{I^2} \Psi_3(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Psi_2(a^I, a^{II})}{2} + \frac{a^{I^2} a^{II} \Gamma_4(a^I, a^{II}) + a^{I^2} a^{II} \Gamma_2(a^I, a^{II})}{2}, \&c.$$

$$\text{On aura } \mathfrak{C}^{II} \left( \frac{r^I - r^{II} \cos(\varphi^{II} - \varphi^I)}{\Delta(r^I, r^{II})^{\frac{1}{2}}} + \frac{\cos(\varphi^{II} - \varphi^I)}{r^{II^2}(1 + p^{II^2})^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Prix de l'Académie, Tome IX.

E

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mathfrak{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}^2}} (\check{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \check{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \\
&\quad + \check{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \&c.) \\
&\quad - n \frac{\mathfrak{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}^2}} x^{\text{I}} (\check{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \check{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \\
&\quad + \check{\Pi}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \&c.) \\
&\quad - n \frac{\mathfrak{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}^2}} x^{\text{II}} (\check{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \check{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \\
&\quad + \check{\Psi}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) \&c.)
\end{aligned}$$

C'est la partie de la force  $R^{\text{I}}$  qui résulte de l'action du satellite  $\mathfrak{C}^{\text{II}}$ , (art. X).

## X X V.

Soit de plus

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - 2 a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + \frac{a^{\text{I}^2}}{a^{\text{II}^2}}, \\
\hat{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Gamma_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2}, \\
\hat{\Gamma}^{\text{III}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Gamma_4(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2}, \&c. \\
\hat{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= 3 \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Pi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - 2 a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Pi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2}, \\
\hat{\Pi}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= 3 \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Pi_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Pi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2}, \\
\hat{\Pi}^{\text{III}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= 3 \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Pi_4(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Pi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2}, \&c. \\
\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= 3 \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Psi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - 2 a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Psi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + \hat{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - 3 \frac{a^{\text{I}^2}}{a^{\text{II}^2}}, \\
\hat{\Psi}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= 3 \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Psi_3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Psi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + \hat{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}), \\
\hat{\Psi}^{\text{III}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= 3 \frac{a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Psi_4(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - a^{\text{I}^2} a^{\text{II}} \Psi_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2} + \hat{\Gamma}^{\text{III}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}), \&c.
\end{aligned}$$

$$\text{On aura } \mathfrak{C}^{\text{II}} \left( \frac{r^{\text{II}} \sin(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^2} - \frac{\sin(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}})}{r^{\text{II}^2} (1 + p^{\text{II}^2})^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$= -\frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}2}} (\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \hat{\Gamma}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.)$$

$$- n \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}2}} x^{\text{I}} (\hat{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \hat{\Pi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.)$$

$$- n \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}2}} x^{\text{II}} (\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \hat{\Psi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.)$$

C'est la valeur de la force  $Q^{\text{I}}$ , en tant qu'elle vient de l'action du satellite  $\mathbb{C}^{\text{II}}$ .

X X V I.

Enfin on trouvera  $\mathbb{C}^{\text{II}} \left( \frac{r^{\text{I}} p^{\text{I}} - r^{\text{II}} p^{\text{II}}}{\Delta(r^{\text{I}}, r^{\text{II}})^2} + \frac{p^{\text{II}}}{r^{\text{II}2}(1+p^{\text{II}2})^{\frac{1}{2}}} \right)$

$$= n \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}2}} z^{\text{I}} (a^{\text{I}3} \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + a^{\text{I}3} \Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{I}3} \Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.)$$

$$- n \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{a^{\text{I}2}} z^{\text{II}} (a^{\text{I}2} a^{\text{II}} \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) - \frac{a^{\text{I}2}}{a^{\text{II}2}} + a^{\text{I}2} a^{\text{II}} \Gamma_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + a^{\text{I}2} a^{\text{II}} \Gamma_2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.2(\varphi^{\text{II}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.)$$

C'est la partie de force  $P^{\text{I}}$ , qui vient de l'action du même satellite  $\mathbb{C}^{\text{II}}$ .

On changera maintenant dans les expressions précédentes les quantités  $\mathbb{C}^{\text{II}}$ ,  $a^{\text{II}}$ ,  $\varphi^{\text{II}}$ ,  $x^{\text{II}}$ ,  $z^{\text{II}}$  en  $\mathbb{C}^{\text{III}}$ ,  $a^{\text{III}}$ ,  $\varphi^{\text{III}}$ ,  $x^{\text{III}}$ ,  $z^{\text{III}}$ ; & en  $\mathbb{C}^{\text{IV}}$ ,  $a^{\text{IV}}$ ,  $\varphi^{\text{IV}}$ ,  $x^{\text{IV}}$ ,  $z^{\text{IV}}$  successivement, & l'on aura les valeurs de  $R^{\text{I}}$ ,  $Q^{\text{I}}$ ,  $P^{\text{I}}$ , dues à l'action des satellites  $\mathbb{C}^{\text{III}}$ ;  $\mathbb{C}^{\text{IV}}$ .

Il ne restera donc plus qu'à chercher les valeurs de ces mêmes forces, en tant qu'elles viennent de l'action du Soleil.

Pour cela nous remarquerons d'abord que le rayon  $\rho^{\text{I}}$  de l'orbite de Jupiter est considérablement plus grand

que le rayon  $r$  de l'orbite d'un satellite quelconque; d'où il suit que la valeur de  $\delta$ , qui est exprimée généralement par  $\sqrt{\rho^{12} - 2\rho^1 r \cos(\psi - \phi) + r^2(1 + \rho^2)}$  (art. XV) se réduira en une suite très-convergente, dont il suffira de prendre les premiers termes; on aura donc :

$$\frac{1}{\delta^3} = \frac{1}{\rho^{13}} + \frac{3r \cos(\psi - \phi)}{\rho^{14}} + \&c.$$

$$\text{donc } -\frac{\rho^1 \cos(\psi - \phi)}{\delta^3} + \frac{\cos(\psi - \phi)}{\rho^{12}} = -\frac{3r}{2\rho^{13}} (1 + \cos.2(\psi - \phi));$$

$$\frac{\rho^1 \sin(\psi - \phi)}{\delta^3} - \frac{\sin(\psi - \phi)}{\rho^{12}} = \frac{3r}{2\rho^{13}} \sin.2(\psi - \phi) ; \& \frac{r}{\delta^3} = \frac{r}{\rho^{13}}.$$

X X V I I.

Soit à présent :

La valeur moyenne de  $\rho^1$  . . . . .  $\alpha$

La valeur moyenne de  $\frac{d\psi}{dt}$ , c'est-à-dire, la vitesse angulaire moyenne de Jupiter autour du Soleil . . . . .  $m$

On supposera, à l'imitation de ce que nous avons fait (art. IV), . . . . .  $\rho^1 = \alpha(1 + n\xi)$

& . . . . .  $\psi = mt + nJ$

Dans ces formules,  $n\xi$  représente l'équation de la distance de Jupiter au Soleil, &  $nJ$  l'équation du centre de Jupiter; lesquelles sont connues par la théorie de cette Planète. En effet, en n'ayant égard qu'aux équations elliptiques, & supposant que  $ne$  soit l'excentricité, &  $U$  l'anomalie moyenne, on a à très-peu près  $\xi = e \cos.U$ , &  $J = -2e \sin.U$ .

$$\text{On aura donc } \frac{r}{\rho^{13}} = \frac{\alpha}{\alpha^3} (1 + n\xi) (1 - 3n\xi) =$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^3} \times (1 + nx - 3n\xi); \text{ donc enfin :}$$

$$\odot \left( \frac{r - \rho^1 \cos(\psi - \phi^1)}{\delta^{13}} + \frac{\cos(\psi - \phi^1)}{\rho^{12}} \right) = -\frac{\alpha^1 \odot}{2\alpha^3} (1 + 3 \cos.2(\psi - \phi^1))$$

$$-n \frac{\alpha^1 \odot}{2\alpha^3} (x^1 - 3\xi) (1 + 3 \cos.2(\psi - \phi^1));$$



$$\odot \left( \frac{p^I \sin.(\psi - \phi^I)}{d^{1\frac{1}{2}}} - \frac{\sin.(\psi - \phi^I)}{r^{1\frac{1}{2}}} \right) = \frac{3a^I \odot}{2a^3} \sin.2(\psi - \phi^I)$$

$$+ n \frac{3a^I \odot}{2a^3} (x^I - 3\xi) \sin.2(\psi - \phi^I);$$

$$\odot \frac{r^I p^I}{d^{1\frac{1}{2}}} = n \frac{a^I \odot}{a^{1\frac{1}{2}}} z^I.$$

Ce sont les valeurs des forces  $R^I$ ,  $Q^I$ ,  $P^I$ , qui viennent de l'action du Soleil (art. XI).

XXVII.

En joignant ensemble toutes ces différentes valeurs, on aura les valeurs complètes des forces  $R^I$ ,  $Q^I$ ,  $P^I$  exprimées de la manière suivante.

$$\begin{aligned} R^I = & - \frac{\odot^{II}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} (\check{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \check{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \cos.(\phi^{II} - \phi^I) + \&c.) \\ & - \frac{\odot^{III}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^I} (\check{\Gamma}(a^I, a^{III}) + \check{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \cos.(\phi^{III} - \phi^I) + \&c.) \\ & - \frac{\odot^{IV}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} (\check{\Gamma}(a^I, a^{IV}) + \check{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \cos.(\phi^{IV} - \phi^I) + \&c.) \\ & - \frac{a^I \odot}{a^3 \mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos.2(\psi - \phi^I) \right) \\ & - n \frac{\odot^{II}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} x^I (\check{\Pi}(a^I, a^{II}) + \check{\Pi}^I(a^I, a^{II}) \cos.(\phi^{II} - \phi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\odot^{III}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} x^I (\check{\Pi}(a^I, a^{III}) + \check{\Pi}^I(a^I, a^{III}) \cos.(\phi^{III} - \phi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\odot^{IV}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} x^I (\check{\Pi}(a^I, a^{IV}) + \check{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) \cos.(\phi^{IV} - \phi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{a^I \odot}{a^3 \mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} x^I \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos.2(\psi - \phi^I) \right) \\ & - n \frac{\odot^{II}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} x^{II} (\check{\Psi}(a^I, a^{II}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{II}) \cos.(\phi^{II} - \phi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\odot^{III}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} x^{III} (\check{\Psi}(a^I, a^{III}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{III}) \cos.(\phi^{III} - \phi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\odot^{IV}}{\mathcal{P}^I} \times \frac{\mathcal{P}^I}{a^{1\frac{1}{2}}} x^{IV} (\check{\Psi}(a^I, a^{IV}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{IV}) \cos.(\phi^{IV} - \phi^I) + \&c.) \end{aligned}$$

$$+ n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} \xi \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \text{eos} . 2 (\psi - \varphi^I) \right).$$

$$\begin{aligned} Q^I = & - \frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} (\hat{\Gamma} I(a^I, a^{II}) \sin. (\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - \frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} (\hat{\Gamma} I(a^I, a^{III}) \sin. (\varphi^{III} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - \frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} (\hat{\Gamma} I(a^I, a^{IV}) \sin. (\varphi^{IV} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - \frac{a^{13} \odot}{a^3 \mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} \times \frac{1}{2} \sin. 2 (\psi - \varphi^I) \\ & - n \frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} x^I (\hat{\Pi} I(a^I, a^{II}) \sin. (\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} x^I (\hat{\Pi} I(a^I, a^{III}) \sin. (\varphi^{III} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} x^I (\hat{\Pi} I(a^I, a^{IV}) \sin. (\varphi^{IV} - \varphi^I) + \&c.) \\ & + n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} x^I \times \frac{1}{2} \sin. 2 (\psi - \varphi^I) \\ & - n \frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} x^{II} (\hat{\Psi} I(a^I, a^{II}) \sin. (\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} x^{III} (\hat{\Psi} I(a^I, a^{III}) \sin. (\varphi^{III} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} x^{IV} (\hat{\Psi} I(a^I, a^{IV}) \sin. (\varphi^{IV} - \varphi^I) + \&c.) \\ & - n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} \xi \times \frac{2}{2} \sin. 2 (\psi - \varphi^I). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^I = & n \frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} z^I (a^{13} \Gamma(a^I, a^{II}) + a^{13} \Gamma I(a^I, a^{II}) \text{cosf.} (\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \\ & + n \frac{\mathbb{C}^{III}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} z^I (a^{13} \Gamma(a^I, a^{III}) + a^{13} \Gamma I(a^I, a^{III}) \text{cosf.} (\varphi^{III} - \varphi^I) + \&c.) \\ & + n \frac{\mathbb{C}^{IV}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} z^I (a^{13} \Gamma(a^I, a^{IV}) + a^{13} \Gamma I(a^I, a^{IV}) \text{cosf.} (\varphi^{IV} - \varphi^I) + \&c.) \\ & + n \frac{a^{13} \odot}{a^3 \mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} z^I \\ & - n \frac{\mathbb{C}^{II}}{\mathcal{H}^4} \times \frac{\mathcal{H}^2}{a^{12}} z^{II} (a^{12} a^{II} \Gamma(a^I, a^{II}) - \frac{a^{12}}{a^{12}} \\ & + a^{12} a^{II} \Gamma I(a^I, a^{II}) \text{cosf.} (\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -n \frac{\mathcal{C}^{\text{III}}}{\mathcal{T}^{\text{III}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{III}}}{a^{12}} z^{\text{III}} (a^{12} a^{\text{III}} \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) - \frac{a^{12}}{a^{12}} \\
 & \quad + a^{12} a^{\text{III}} \Gamma I(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.(\varphi^{\text{III}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.) \\
 & -n \frac{\mathcal{C}^{\text{IV}}}{\mathcal{T}^{\text{IV}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{IV}}}{a^{12}} z^{\text{IV}} (a^{12} a^{\text{IV}} \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) - \frac{a^{12}}{a^{12}} \\
 & \quad + a^{12} a^{\text{IV}} \Gamma I(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.(\varphi^{\text{IV}} - \varphi^{\text{I}}) + \&c.)
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à substituer pour  $\varphi^{\text{I}}, \varphi^{\text{II}}, \varphi^{\text{III}}, \varphi^{\text{IV}}$ , &  $\downarrow$  leurs valeurs,  $\mu^{\text{I}}t + ny^{\text{I}}, \mu^{\text{II}}t + ny^{\text{II}}, \mu^{\text{III}}t + ny^{\text{III}}, \mu^{\text{IV}}t + ny^{\text{IV}}$ , &  $mt + nJ$ ; ce qui est très-facile, car il n'y aura qu'à changer  $\varphi^{\text{I}}, \varphi^{\text{II}}, \varphi^{\text{III}}, \varphi^{\text{IV}}, \downarrow$  en  $\mu^{\text{I}}t, \mu^{\text{II}}t, \mu^{\text{III}}t, \mu^{\text{IV}}t, mt$ , & ajouter ensuite aux expressions de  $R^{\text{I}}$  &  $Q^{\text{I}}$  les quantités suivantes.

$$\begin{aligned}
 & n \frac{\mathcal{C}^{\text{II}}}{\mathcal{T}^{\text{II}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{II}}}{a^{12}} (y^{\text{II}} - y^{\text{I}}) (\check{\Gamma} I(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})t + 2\check{\Gamma} 2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \dots \&c.) \\
 & + n \frac{\mathcal{C}^{\text{III}}}{\mathcal{T}^{\text{III}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{III}}}{a^{12}} (y^{\text{III}} - y^{\text{I}}) (\check{\Gamma} I(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})t + 2\check{\Gamma} 2(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \dots \&c.) \\
 & + n \frac{\mathcal{C}^{\text{IV}}}{\mathcal{T}^{\text{IV}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{IV}}}{a^{12}} (y^{\text{IV}} - y^{\text{I}}) (\check{\Gamma} I(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})t + 2\check{\Gamma} 2(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \dots \&c.) \\
 & + n \frac{a^{\text{I}} \odot}{a^3 \mathcal{T}^{\text{I}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{I}}}{a^{12}} (J - y^{\text{I}}) \times 3 \sin. 2(m - \mu^{\text{I}})t, \& \\
 & -n \frac{\mathcal{C}^{\text{II}}}{\mathcal{T}^{\text{II}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{II}}}{a^{12}} (y^{\text{II}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma} I(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})t + 2\hat{\Gamma} 2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \dots \&c.) \\
 & -n \frac{\mathcal{C}^{\text{III}}}{\mathcal{T}^{\text{III}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{III}}}{a^{12}} (y^{\text{III}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma} I(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})t + 2\hat{\Gamma} 2(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \dots \&c.) \\
 & -n \frac{\mathcal{C}^{\text{IV}}}{\mathcal{T}^{\text{IV}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{IV}}}{a^{12}} (y^{\text{IV}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma} I(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})t + 2\hat{\Gamma} 2(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \dots \&c.) \\
 & + n \frac{a^{\text{I}} \odot}{a^3 \mathcal{T}^{\text{I}}} \times \frac{\mathcal{T}^{\text{I}}}{a^{12}} (J - y^{\text{I}}) \times 3 \cos. 2(m - \mu^{\text{I}})t.
 \end{aligned}$$

Pour trouver les valeurs de  $R^{\text{II}}, Q^{\text{II}}, P^{\text{II}}$ , il ne faudra qu'ajouter un trait aux lettres qui n'en ont qu'un, & en ôter un à celles qui en ont deux; & ainsi des autres quantités  $R^{\text{III}}, Q^{\text{III}}, P^{\text{III}}, R^{\text{IV}}, Q^{\text{IV}}, P^{\text{IV}}$ , (art. XIII).

A l'égard des forces perturbatrices qui viennent de la

non-sphéricité de Jupiter, on trouvera, en négligeant dans les formules de l'art. XVI, ce qu'on y doit négliger, qu'il faut ajouter aux valeurs de  $R^I$  &  $P^I$  les quantités suivantes:

$$\frac{1A^2}{5a^{12}} \times \frac{7^2}{a^{12}} (1 - 4nx^{II}), \text{ \& } n \frac{3^2 A^2}{5a^{12}} \times \frac{7^2}{a^2} z^I; \text{ \& de même aux}$$

$$\text{valeurs de } R^{II}, P^{II} \text{ les quantités } \frac{1A^2}{5a^{12}} \times \frac{7^2}{a^{12}} (1 - 4nx^{II}), \text{ \&}$$

$$n \frac{3^2 A^2}{5a^{12}} \times \frac{7^2}{a^{12}} z^{II}, \text{ \& ainsi de suite.}$$

### C H A P I T R E I I I.

#### *Calcul des perturbations des Satellites de Jupiter.*

#### X X I X.

**N**ous nous contenterons ici de chercher les formules qui déterminent le mouvement du premier Satellite, parce que les autres s'en déduiront aisément par les remarques des articles IX & XIII.

Pour appliquer au mouvement du premier satellite, les équations générales de l'article VIII, il est visible qu'il ne faut que marquer les lettres d'un trait, & substituer ensuite pour  $X^I, Y^I, z^I$  leurs valeurs tirées de celles de  $R^I, Q^I, P^I$ , (art. préc.). Mais avant que de faire cette substitution, nous remarquerons que les équations  $R + \frac{F}{a^2} - a\mu^2 = n \frac{F}{a^2} X$ , &  $\int Q(1 + nx) dt = a\mu - \frac{c}{a} + n \frac{F}{a^2} Y$  (art. V & VI) ne peuvent subsister dans l'hypothèse de  $n$  très-petit, à moins que les quantités constantes  $\frac{F}{a^2} - a\mu^2$ ,  $a\mu - \frac{c}{a}$ , & les quantités variables  $R$  &  $Q$  ne soient chacune très-petites de l'ordre  $n$ ,

Or

Or en examinant les valeurs de  $R$  &  $Q$  (art. préc.) il est facile de voir qu'elles ne sauroient être supposées très-petites qu'en regardant comme telles les quantités con-

stantes  $\frac{\mathbb{C}}{\mathcal{T}^2}$ ,  $\frac{a^3 \odot}{a^3 \mathcal{T}^2}$  &  $v \frac{A^2}{a^2}$  ;

Soit donc en général....  $\frac{\mathbb{C}}{\mathcal{T}^2} = n\chi$

$$\frac{a^3 \odot}{a^3 \mathcal{T}^2} = nK$$

$$v \frac{A^2}{a^2} = nX$$

Soit de plus.....  $1 - \frac{\mu^2}{f} = nG$

$$- \frac{\mu - \frac{c}{a^2}}{f} = nH$$

Nous aurons (à cause de  $f = \frac{F}{a^3}$ , art. V)

$X = g + \frac{a^2}{F} \times \frac{R}{n}$ , &  $Y = H + \frac{a^2}{F} \times \frac{\int Q(1+nx)dt}{n}$  ; c'est-à-dire, à cause de  $F = \mathcal{T}^2 + \mathbb{C}$  (art. X),

$$X = g + \frac{a^2}{\mathcal{T}^2} \times \frac{R}{n(1+nx)}, \quad Y = H + \frac{a^2}{\mathcal{T}^2} \times \frac{\int Q(1+nx)dt}{n(1+nx)}.$$

À l'égard de la quantité  $Z$ , elle sera déterminée par l'équation  $\frac{P-nR\chi}{1+nx} = n \frac{F}{a^2} Z$  (art. VII) laquelle se réduit à

$Z = \frac{a^2}{\mathcal{T}^2} \times \frac{P-nR\chi}{n(1+nx)(1+nx)}$  ; où l'on remarquera que  $P$  est déjà toute multipliée par  $n$  (art. XXVIII).

### X X X.

Appliquons maintenant ces formules au premier Satellite. Nous aurons d'abord en substituant la valeur de  $R^2$  (art. XXVIII).

*Prix de l'Académie, Tome IX.* F

$$X^I = g^I$$

$$- \frac{\lambda^{II}}{1+n\chi^I} (\check{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \check{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \operatorname{cosec}(\mu^{II} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{II} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{\lambda^{III}}{1+n\chi^I} (\check{\Gamma}(a^I, a^{III}) + \check{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \operatorname{cosec}(\mu^{III} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{III} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{\lambda^{IV}}{1+n\chi^I} (\check{\Gamma}(a^I, a^{IV}) + \check{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \operatorname{cosec}(\mu^{IV} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{IV} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{K^I}{1+n\chi^I} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \operatorname{cosec}(m - \mu^I) \varepsilon \right)$$

$$- \frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^I} x^I (\check{\Pi}(a^I, a^{II}) + \check{\Pi}^I(a^I, a^{II}) \operatorname{cosec}(\mu^{II} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Pi}^2(a^I, a^{II}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{II} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^I} x^I (\check{\Pi}(a^I, a^{III}) + \check{\Pi}^I(a^I, a^{III}) \operatorname{cosec}(\mu^{III} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Pi}^2(a^I, a^{III}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{III} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^I} x^I (\check{\Pi}(a^I, a^{IV}) + \check{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) \operatorname{cosec}(\mu^{IV} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Pi}^2(a^I, a^{IV}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{IV} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{nK^I}{1+n\chi^I} x^I \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \operatorname{cosec}(m - \mu^I) \varepsilon \right)$$

$$- \frac{n\chi^{II}}{1+n\chi^I} x^{II} (\check{\Psi}(a^I, a^{II}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{II}) \operatorname{cosec}(\mu^{II} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Psi}^2(a^I, a^{II}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{II} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{n\chi^{III}}{1+n\chi^I} x^{III} (\check{\Psi}(a^I, a^{III}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{III}) \operatorname{cosec}(\mu^{III} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Psi}^2(a^I, a^{III}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{III} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$- \frac{n\chi^{IV}}{1+n\chi^I} x^{IV} (\check{\Psi}(a^I, a^{IV}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{IV}) \operatorname{cosec}(\mu^{IV} - \mu^I) \varepsilon \\ + \check{\Psi}^2(a^I, a^{IV}) \operatorname{cosec} 2(\mu^{IV} - \mu^I) \varepsilon + \&c.)$$

$$+ \frac{nK^I}{1+n\chi^I} \xi \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \operatorname{cosec} 2(m - \mu^I) \varepsilon \right).$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n\chi^{\text{II}}}{1+n\chi^{\text{I}}} (y^{\text{II}} - y^{\text{I}}) (\check{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & \quad + 2\check{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin. 2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) \\
 & + \frac{n\chi^{\text{III}}}{1+n\chi^{\text{I}}} (y^{\text{III}} - y^{\text{I}}) (\check{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & \quad + 2\check{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin. 2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) \\
 & + \frac{n\chi^{\text{IV}}}{1+n\chi^{\text{I}}} (y^{\text{IV}} - y^{\text{I}}) (\check{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & \quad + 2\check{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin. 2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) \\
 & + \frac{nK^{\text{I}}}{1+n\chi^{\text{I}}} (J - y) \times 3 \sin. 2(m - \mu^{\text{I}}) t \\
 & + \frac{\chi^{\text{I}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{3} n\chi^{\text{I}} \right).
 \end{aligned}$$

X X X I.

Multipliant la valeur de  $Q^{\text{I}}$  par  $1 + n\chi^{\text{I}}$ , & faisant pour abrégér :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= \hat{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}), \\
 \tilde{\Pi}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= \hat{\Pi}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \hat{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}), \\
 \tilde{\Pi}^{\text{III}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= \hat{\Pi}^{\text{III}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \hat{\Gamma}^{\text{III}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}), \&c.
 \end{aligned}$$

On aura, après l'intégration & la substitution,

$$Y^{\text{I}} = H^{\text{I}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\chi^{\text{II}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \left( \frac{\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}} \cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + \frac{\hat{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})} \cos. 2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + \&c. \right) \\
 & + \frac{\chi^{\text{III}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \left( \frac{\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}})}{\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}} \cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t + \frac{\hat{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}})}{2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})} \cos. 2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t + \&c. \right) \\
 & + \frac{\chi^{\text{IV}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \left( \frac{\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}})}{\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}} \cos.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t + \frac{\hat{\Gamma}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}})}{2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})} \cos. 2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t + \&c. \right) \\
 & - \frac{K^{\text{I}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \times \frac{3}{4(m - \mu^{\text{I}})} \cos. 2(m - \mu^{\text{I}}) t. \\
 & - \frac{n\chi^{\text{II}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int x^{\text{I}} (\tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & \quad + \tilde{\Pi}^{\text{II}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin. 2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + \&c.) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n\chi^{\text{III}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int x^{\text{I}} (\tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + \tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin. 2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& - \frac{n\chi^{\text{IV}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int x^{\text{I}} (\tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + \tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin. 2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& + \frac{nK^{\text{I}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int x^{\text{I}} \times 3 \sin. 2(m - \mu^{\text{I}}) t dt. \\
& - \frac{n\chi^{\text{II}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int x^{\text{II}} (\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + \hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}} - a^{\text{II}}) \sin. 2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& - \frac{n\chi^{\text{III}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int x^{\text{III}} (\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + \hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}} - a^{\text{III}}) \sin. 2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& - \frac{n\chi^{\text{IV}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int x^{\text{IV}} (\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + \hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}} - a^{\text{IV}}) \sin. 2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& - \frac{nK^{\text{I}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int \xi \times \frac{2}{2} \sin. 2(m - \mu^{\text{I}}) t dt \\
& - \frac{n\chi^{\text{II}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int (y^{\text{II}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + 2\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos. 2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& - \frac{n\chi^{\text{III}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int (y^{\text{III}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + 2\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos. 2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& - \frac{n\chi^{\text{IV}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int (y^{\text{IV}} - y^{\text{I}}) \hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& \quad + 2\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos. 2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t + \& c.) dt \\
& + \frac{nK^{\text{I}}}{1+n\chi^{\text{I}}} \int (J - y^{\text{I}}) \times 3 \cos. 2(m - \mu^{\text{I}}) t dt.
\end{aligned}$$

X X X I I.

Enfin si l'on fait :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= a^{\text{I}} \Gamma(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \check{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}), \\
\tilde{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) &= a^{\text{I}} \Gamma^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \check{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}),
\end{aligned}$$



$$\tilde{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) = a^{I2} \Gamma^2(a^I, a^{II}) + \check{\Gamma}^2(a^I, a^{II}),$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) = a^{I2} a^{II} \Gamma(a^I, a^{II}) - \frac{a^{I2}}{a^{II2}},$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}^1(a^I, a^{II}) = a^{I2} a^{II} \Gamma^1(a^I, a^{II}),$$

$\overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) = a^{I2} a^{II} \Gamma^2(a^I, a^{II})$ , & ainsi de suite, on trouvera

$$Z^I =$$

$$\frac{n\chi^{II}}{1 + n\chi^I} z^I (\tilde{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \tilde{\Gamma}^1(a^I, a^{II}) \cos(\mu^{II} - \mu^I) t$$

$$+ \tilde{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^I) t \&c.)$$

$$+ \frac{n\chi^{III}}{1 + n\chi^I} z^I (\tilde{\Gamma}(a^I, a^{III}) + \tilde{\Gamma}^1(a^I, a^{III}) \cos(\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$+ \tilde{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^I) t \&c.)$$

$$+ \frac{n\chi^{IV}}{1 + n\chi^I} z^I (\tilde{\Gamma}(a^I, a^{IV}) + \tilde{\Gamma}^1(a^I, a^{IV}) \cos(\mu^{IV} - \mu^I) t$$

$$+ \tilde{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^I) t \&c.)$$

$$+ \frac{nK^I}{1 + n\chi^I} z^I \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos.2(m - \mu^I) t \right)$$

$$+ \frac{n\chi^I}{1 + n\chi^I} \times \frac{1}{2} z^I.$$

$$- \frac{n\chi^{II}}{1 + n\chi^I} z^{II} (\overset{\circ}{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \overset{\circ}{\Gamma}^1(a^I, a^{II}) \cos(\mu^{II} - \mu^I) t$$

$$+ \overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^I) t \&c.)$$

$$- \frac{n\chi^{III}}{1 + n\chi^I} z^{III} (\overset{\circ}{\Gamma}(a^I, a^{III}) + \overset{\circ}{\Gamma}^1(a^I, a^{III}) \cos(\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$+ \overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^I) t \&c.)$$

$$- \frac{n\chi^{IV}}{1 + n\chi^I} z^{IV} (\overset{\circ}{\Gamma}(a^I, a^{IV}) + \overset{\circ}{\Gamma}^1(a^I, a^{IV}) \cos(\mu^{IV} - \mu^I) t$$

$$+ \overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^I) t \&c.)$$

### X X X I I I.

Et le mouvement du satellite  $\mathcal{C}^I$  sera déterminé par les équations suivantes (art. VIII).

$$\begin{aligned}
1.^\circ \quad & \frac{d^2x^1}{dt^2} + (3\mu^{12} - 2f^1)x^1 + f^1X^1 - 2\mu^1f^1Y^1 \\
& - n(6\mu^{12} - 3f^1)x^{12} - \frac{3}{2}nf^1z^{12} + 6n\mu^1f^1x^1Y^1 - n^1f^{12}Y^{12} = 0 \\
2.^\circ \quad & \frac{dy^1}{dt} + 2\mu^1x^1 - f^1Y^1 - 3n\mu^1x^{12} + 2nf^1x^1Y^1 = 0 \\
3.^\circ \quad & \frac{d^2z^1}{dt^2} + \mu^{12}z^1 + f^1Z^1 - 4n\mu^{12}z^1x^1 + 2n\frac{dz^1dx^1}{dt^2} \\
& + 2n\mu^1f^1z^1Y^1 = 0.
\end{aligned}$$

On se fouviendra que les quantités  $x^1$  &  $\frac{dy^1}{dt}$  ne doivent renfermer aucun terme constant, suivant la remarque de l'article IV.

## X X X I V.

Il ne s'agit donc plus que d'intégrer les équations que nous venons de donner; pour cela, on commencera par rejeter tous les termes affectés de  $n$ , & on cherchera par l'intégration les valeurs de  $x^1, y^1, z^1$ ; on substituera ensuite ces valeurs dans les termes qu'on avoit négligés, & on en tirera de nouvelles valeurs de  $x^1, y^1, z^1$  plus approchées que les premières. On opéreroit ainsi de suite, si nous avions eu égard aux termes affectés de  $n^2, n^3$ , &c. Par ce moyen, l'intégration de la première & de la troisième équation de l'article précédent se réduira à celle d'une équation de cette forme:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + M^2u + T = 0.$$

$T$  étant une fonction composée de sinus & de cosinus d'angles multiples de  $t$ ; or l'intégrale de cette équation est, comme l'on fait,

$$u = G \sin.Mt + H \cos.Mt + \frac{\cos.Mt \int T \sin.Mt dt - \sin.Mt \int T \cos.Mt dt}{M};$$

de sorte qu'en supposant:

$$T = A + B \cos.pt + b \sin.pt + C \cos.qt + c \sin.qt + \&c.$$

on aura

$$\begin{aligned}
 u = & -\frac{A}{M^2} + \left( H + \frac{A}{M^2} - \frac{B}{p^2 - M^2} - \frac{C}{q^2 - M^2} - \& c. \right) \cos. Mt \\
 & + \left( G - \frac{pb}{M(p^2 - M^2)} - \frac{qc}{M(q^2 - M^2)} - \& c. \right) \sin. Mt + \frac{B}{p^2 - M^2} \cos. pt \\
 & + \frac{b}{p^2 - M^2} \sin. pt + \frac{C}{q^2 - M^2} \cos. qt + \frac{c}{q^2 - M^2} \sin. qt + \& c. \\
 H \ \& \ G \text{ font les valeurs de } u \ \& \ \text{de } \frac{du}{Mdt} \text{ lorsque } t = 0.
 \end{aligned}$$

On voit de là que pour avoir la valeur de  $u$ , il n'y a qu'à diviser chacun des sinus & des cosinus qui entrent dans  $T$ , par  $p^2 - M^2$ ,  $p$  étant le coefficient de  $t$ , & y ajouter encore deux autres termes, qui renferment  $\sin. Mt$ , &  $\cos. Mt$  avec des coefficients arbitraires.

Il ne peut y avoir de difficulté que dans le cas où  $p$  seroit égale à  $M$ ; car alors le diviseur  $p^2 - M^2$  sera nul, & les termes  $-\frac{B}{p^2 - M^2} \cos. Mt + \frac{B}{p^2 - M^2} \cos. pt$ , aussi bien que les termes  $-\frac{pb}{M(p^2 - M^2)} \sin. Mt + \frac{b}{p^2 - M^2} \sin. pt$  deviendroient  $-\infty + \infty$ ; ce qui ne fait rien connoître.

Pour résoudre cette difficulté, on supposera que  $p$  ne soit pas tout-à-fait égale à  $M$ , mais qu'elle en diffère d'une quantité infiniment petite; & on trouvera que les deux premiers termes se réduisent à  $-\frac{Bt}{2p} \sin. Mt$ , & les deux autres à  $\frac{bt}{2p} \cos. Mt$ ; d'où l'on voit que la valeur de  $u$  contiendra des termes multipliés par l'angle  $t$ .

Au reste si dans la quantité  $T$  il se trouve des termes de cette forme  $\cos. pt$ , ou  $\sin. pt$ ,  $p$  étant  $= M + nb$ , il est visible que ces termes augmenteront beaucoup par l'intégration, puisqu'ils se trouveront divisés par la quantité très-petite  $p^2 - M^2 = nb(2M + nb)$ .

Donc si ces sortes de termes ont des coefficients finis dans l'équation différentielle, ils deviendront comme

infinis dans l'intégrale ; & s'ils n'ont que des coefficients très-petits de l'ordre  $n$  dans la différentielle, il deviendront finis dans l'intégrale, & appartiendront à la première valeur de  $n$ .

## §. I.

*Premières formules du mouvement des Satellites de Jupiter autour de cette Planète,*

## X X X V.

Si on substitue dans les trois équations de l'art. XXXIII les valeurs  $X^I$ ,  $Y^I$  &  $Z^I$ , qu'on rejette d'abord tous les termes affectés de  $n$ , & que l'on fasse pour abrégér :

$$L^I = g^I - 2\mu^I H^I - \chi^{II} \check{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) - \chi^{III} \check{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \\ - \chi^{IV} \check{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) - \frac{1}{2}K^I + \frac{1}{5}K^I, \text{ \& } M^{I2} = 3\mu^{I2} - 2f^I, \\ N^{I2} = \mu^I, \text{ on trouvera les trois équations suivantes :}$$

$$1.^o \frac{d^2x}{dt^2} + M^{I2}x^I + f^IL^I \\ - \chi^{II}f^I(\check{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{II} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II})) \cos.(\mu^{II} - \mu^I)t \\ - \chi^{II}f^I(\check{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{II} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{II})) \cos.2(\mu^{II} - \mu^I)t \text{ \& c.} \\ - \chi^{III}f^I(\check{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{III} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III})) \cos.(\mu^{III} - \mu^I)t \\ - \chi^{III}f^I(\check{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{III} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{III})) \cos.2(\mu^{III} - \mu^I)t \text{ \& c.} \\ - \chi^{IV}f^I(\check{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{IV} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV})) \cos.(\mu^{IV} - \mu^I)t \\ - \chi^{IV}f^I(\check{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{IV} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{IV})) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^I)t \text{ \& c.} \\ - K^I f^I \left( \frac{1}{2} - \frac{3\mu^I}{2(m - \mu^I)} \right) \cos.2(m - \mu^I)t = 0,$$

$$2.^\circ \frac{dy^I}{dt} + 2\mu^I x^I - f^I b^I$$

$$- \chi^{II} f^I \left( \frac{\hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II})}{\mu^{II} - \mu^I} \cosf.(\mu^{II} - \mu^I)t + \frac{\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{II})}{2(\mu^{II} - \mu^I)} \cosf.2(\mu^{II} - \mu^I)t \&c. \right)$$

$$- \chi^{III} f^I \left( \frac{\hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III})}{\mu^{III} - \mu^I} \cosf.(\mu^{III} - \mu^I)t + \frac{\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{III})}{2(\mu^{III} - \mu^I)} \cosf.2(\mu^{III} - \mu^I)t \&c. \right)$$

$$- \chi^{IV} f^I \left( \frac{\hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV})}{\mu^{IV} - \mu^I} \cosf.(\mu^{IV} - \mu^I)t + \frac{\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{IV})}{2(\mu^{IV} - \mu^I)} \cosf.2(\mu^{IV} - \mu^I)t \&c. \right)$$

$$+ K^I \times \frac{3f^I}{4(m - \mu^I)} \cosf.2(m - \mu^I)t.$$

$$3.^\circ \frac{d^2 z^I}{dt^2} + N^I z^I = 0.$$

X X X V I.

La première équation étant intégrée par la méthode de l'article XXXIV, on trouvera que la valeur de  $x^I$  renferme premièrement le terme constant  $-\frac{f^I L^I}{M^{I2}}$ , lequel devant être nul (art. XXXIII) on aura l'équation  $Z^I = 0$ .

Ensuite la valeur de  $x^I$  renfermera deux termes, tels que *fin. Mt* & *cosf. M<sup>I</sup>t*, avec des coefficients arbitraires, lesquels pourront se réduire à un seul terme représenté par  $\varepsilon^I \cosf.(M^I t + \omega^I)$ ;  $\varepsilon^I, \omega^I$  étant pareillement des constantes arbitraires.

De cette manière, si on fait

$$\varepsilon_1(a^I, a^{II}) = \left( \check{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{II} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \right) \frac{f^I}{(\mu^{II} - \mu^I)^2 - M^{I2}}$$

$$\varepsilon_2(a^I, a^{II}) = \left( \check{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{II} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) \right) \frac{f^I}{4(\mu^{II} - \mu^I)^2 - M^{I2}}$$

$$\varepsilon_3(a^I, a^{II}) = \left( \check{\Gamma}^3(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{3(\mu^{II} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^3(a^I, a^{II}) \right) \frac{f^I}{9(\mu^{II} - \mu^I)^2 - M^{I2}} \&c.$$

& de même

$$\varepsilon_1(a^I, a^{III}) = \left( \check{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{III} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \right) \frac{f^I}{(\mu^{III} - \mu^I)^2 - M^{I2}}$$

$$\varepsilon_2(a^I, a^{III}) = \left( \check{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{III} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \right) \frac{f^I}{2(\mu^{III} - \mu^I)^2 - M^{I2}}$$

$$\beta^I = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu^I}{m - \mu^I} \right) \frac{f^I}{c(m - \mu^I)^2 - M^{I2}}, \text{ on aura}$$

$$x^I = e^I \text{cosf.} (M^I t + \omega^I)$$

$$- \chi^{II} (\Xi 1^I a^I, a^{II}) \text{cosf.} (\mu^{II} - \mu^I) t + \Xi 2^I a^I, a^{II}) \text{cosf.} 2(\mu^{II} - \mu^I) t + \&c.)$$

$$- \chi^{III} (\Xi (a^I, t^{III}) \text{cosf.} (\mu^{III} - \mu^I) t + \Xi 2(a^I, a^{III}) \text{cosf.} 2(\mu^{III} - \mu^I) t + \&c.)$$

$$- \chi^{IV} (\Xi 1^I (t^I, t^{IV}) \text{cosf.} (\mu^{IV} - \mu^I) t + \Xi 2(a^I, a^{IV}) \text{cosf.} 2(\mu^{IV} - \mu^I) t + \&c.)$$

$$- K^I \beta^I \text{cosf.} 2(m - \mu^I) t.$$

### X X X V I I.

Ayant trouvé la valeur  $x^I$ , on aura l'expression du rayon vecteur  $r^I$  de l'orbite du premier satellite rapportée au plan de l'orbite de Jupiter, par la formule  $r^I = a^I (1 + n x^I)$ , art. IV.

Or, en examinant cette expression de  $r^I$ , on reconnoîtra aisément que le terme  $n a^I e^I \text{cosf.} (M^I t + \omega^I)$  représente l'équation elliptique qui vient de l'excentricité de l'orbite, desorte que  $n e^I$  exprimera la valeur de l'excentricité, &  $M^I t + \omega^I$  fera l'anomalie moyenne; d'où l'on voit que le mouvement de cette anomalie sera au mouvement moyen du satellite comme  $M^I$  à  $\mu^I$ ; par conséquent le mouvement moyen de la ligne des apsides sera au mouvement moyen du satellite comme  $\mu^I - M^I$  :  $\mu^I$ . Nous verrons plus bas (art. XLV), qu'en négligeant les quantités de l'ordre  $n$ , on a  $M^I = \mu^I$ , de sorte que la ligne des apsides sera fixe, au moins par cette première approximation.

A l'égard de  $\omega^I$ , on le déterminera par le moyen d'une époque quelconque donnée de l'anomalie moyenne; ainsi les quantités  $e^I$  &  $\omega^I$  dépendent entièrement des observations.

Les autres termes de la valeur de  $r^I$  expriment les inégalités qui viennent de l'action des trois satellites  $\mathbb{C}^{II}$ ,  $\mathbb{C}^{III}$ ,  $\mathbb{C}^{IV}$  & du Soleil, sur le satellite  $\mathbb{C}^I$ .

## X X X V I I I.

On substituera maintenant la valeur de  $x^I$  dans la seconde équation de l'article XXXV, & on tirera par l'intégration la valeur de  $y^I$ , mais on aura attention de faire évanouir auparavant (art. XXXIII) le terme constant  $f^I H^I$ ; ce qui donnera  $H^I = 0$ .

Soit pour abrégér

$$\Phi I(a^I, a^{II}) = \frac{2\mu^I}{\mu^{II} - \mu^I} \Xi I(a^I, a^{II}) + \frac{f^I}{(\mu^{II} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{II})$$

$$\Phi 2(a^I, a^{II}) = \frac{2\mu^I}{2(\mu^{II} - \mu^I)} \Xi 2(a^I, a^{II}) + \frac{f^I}{4(\mu^{II} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} 2(a^I, a^{II})$$

$$\Phi 3(a^I, a^{II}) = \frac{2\mu^I}{3(\mu^{II} - \mu^I)} \Xi 3(a^I, a^{II}) + \frac{f^I}{9(\mu^{II} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} 3(a^I, a^{II}) \&c.$$

& pareillement

$$\Phi I(a^I, a^{III}) = \frac{2\mu^I}{\mu^{III} - \mu^I} \Xi I(a^I, a^{III}) + \frac{f^I}{(\mu^{III} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{III})$$

$$\Phi 2(a^I, a^{III}) = \frac{2\mu^I}{2(\mu^{III} - \mu^I)} \Xi 2(a^I, a^{III}) + \frac{f^I}{4(\mu^{III} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} 2(a^I, a^{III}) \&c.$$

& ainsi de suite.

Soit de plus

$$\gamma^I = \frac{\kappa^I}{m - \mu^I} \beta^I - \frac{3f^I}{8(m - \mu^I)^2}, \text{ on trouvera}$$

$$y^I = - \frac{2\mu^{I^2}}{M^I} \sin.(M^I t + \omega^I)$$

$$+ \chi^{II}(\Phi I(a^I, a^{II}) \sin.(\mu^{II} - \mu^I)t + \Phi 2(a^I, a^{II}) \sin.2(\mu^{II} - \mu^I)t + \&c.)$$

$$+ \chi^{III}(\Phi I(a^I, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^I)t + \Phi 2(a^I, a^{III}) \sin.2(\mu^{III} - \mu^I)t + \&c.)$$

$$+ \chi^{IV}(\Phi I(a^I, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^I)t + \Phi 2(a^I, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV} - \mu^I)t + \&c.)$$

$$+ K^I \gamma^I \sin.2(m - \mu^I)t.$$

## X X X I X.

Puisque  $\phi^I = \mu^I t + n\gamma^I$ , (art. IV) on aura, en connoissant  $\gamma^I$ , l'expression du mouvement vrai du premier satellite par son mouvement moyen.

Le terme  $-\frac{2n\mu^1 t^1}{M^1} \sin.(M^1 t + \omega^1)$  représentera l'équation du centre qui vient de la figure elliptique de l'orbite, & les termes suivans exprimeront les inégalités causées par l'action des trois autres satellites & du Soleil.

## X L.

Enfin l'équation  $\frac{d^2 z^1}{dt^2} + N^1 z^1 = 0$  donnera  $z^1 = \lambda^1 \sin.(N^1 t + \eta^1)$ ,  $\lambda^1$  &  $\eta^1$  étant des quantités arbitraires; car il est visible que cette expression  $G \sin. N^1 t + H \cos. N^1 t$ , laquelle représente généralement la valeur de  $z^1$  (art. XXXIV) peut se réduire à celle-ci:  $\lambda^1 \sin.(N^1 t + \eta^1)$ .

## X L I.

On aura donc, à cause de  $p^1 = nz^1$  (art. IV),  $p^1 = n\lambda^1 \sin.(N^1 t + \eta^1) =$  tangente de la latitude du satellite par rapport au plan de l'orbite de Jupiter; d'où l'on voit que l'orbite réelle du satellite sera toute dans un plan passant par le centre de Jupiter, & dont on reconnoîtra la position; en remarquant, 1.<sup>o</sup> que  $n\lambda^1$  étant la plus grande valeur de  $p^1$ , exprimera la tangente de l'inclinaison; 2.<sup>o</sup> que  $N^1 t + \eta^1$  fera la distance du satellite au nœud ascendant, comptée sur l'orbite de Jupiter, laquelle étant retranchée de la longitude moyenne  $\mu^1 t$ , on aura  $(\mu^1 - N^1)t - \eta^1$  pour la longitude moyenne du nœud.

Au reste, puisque l'on a ici  $N^1 = \mu^1$  (art. XXXV), le mouvement du nœud sera nul, & sa longitude moyenne sera  $-\eta^1$ , ou plutôt  $360^\circ - \eta^1$ , quantité qui dépend des observations; mais il faut se souvenir que ce résultat n'est exact qu'aux quantités de l'ordre  $n$  près.

## X L I I.

On trouvera de même pour le second satellite, les formules suivantes.



$$x^{II} = \varepsilon^{II} \cos.(M^{II}t + \omega^{II})$$

$$-\chi^I(\Xi I(a^I, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^I)t + \Xi 2(a^I, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^I)t \&c.)$$

$$-\chi^{III}(\Xi I(\mu^{II}, \mu^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^{II})t + \Xi 2(a^{II}, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^{II})t + \&c.)$$

$$-\chi^{IV}(\Xi I(a^{II}, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \Xi I(a^{II}, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \&c.)$$

$$-K^{II} \beta^{II} \cos.2(m - \mu^{II})t.$$

$$y^{II} = -\frac{2\mu^{II}}{M^{II}} \sin.(M^{II}t + \omega^{II})$$

$$+\chi^I(\Phi I(a^{II}, a^I) \sin.(\mu^I - \mu^{II})t + \Phi 2(a^{II}, a^I) \sin.2(\mu^I - \mu^{II})t + \&c.)$$

$$+\chi^{III}(\Phi I(a^{II}, a^{III}) \sin.(\mu^{III} - \mu^{II})t + \Phi 2(a^{II}, a^{III}) \sin.2(\mu^{III} - \mu^{II})t + \&c.)$$

$$+\chi^{IV}(\Phi I(a^{II}, a^{IV}) \sin.(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \Phi 2(a^{II}, a^{IV}) \sin.2(\mu^{IV} - \mu^{II})t + \&c.)$$

$$+K^{II} \gamma^{II} \sin.2(m - \mu^{II})t.$$

$$z^{II} = \lambda^{II} \sin.(\mu^{II}t + \eta^{II}).$$

Et l'on aura ensuite  $r^{II} = a^{II} (1 + n x^{II})$ ,  $\varphi^{II} = \mu^{II}t + n y^{II}$ ,

$$p^{II} = n z^{II}.$$

Quant aux quantités marquées par  $\Xi$  &  $\Phi$ , on aura

$$\Xi I(a^{II}, a^I) = (\check{\Gamma} I(a^{II}, a^I) + \frac{2\mu^{II}}{\mu^I - \mu^{II}} \hat{\Gamma} I(a^{II}, a^I)) \frac{f^{II}}{(\mu^I - \mu^{II})^2 - M^{II2}}$$

$$\Xi 2(a^{II}, a^I) = (\check{\Gamma} 2(a^{II}, a^I) + \frac{2\mu^{II}}{2(\mu^I - \mu^{II})} \hat{\Gamma} 2(a^{II}, a^I)) \frac{f^{II}}{4(\mu^I - \mu^{II})^2 - M^{II2}} \&c.$$

$$\Phi I(a^{II}, a^I) = \frac{2\mu^{II}}{\mu^I - \mu^{II}} \Xi I(a^{II}, a^I) + \frac{f^{II}}{(\mu^I - \mu^{II})^2} \hat{\Gamma} I(a^{II}, a^I)$$

$$\Phi 2(a^{II}, a^I) = \frac{2\mu^{II}}{2(\mu^I - \mu^{II})} \Xi 2(a^{II}, a^I) + \frac{f^{II}}{4(\mu^I - \mu^{II})^2} \hat{\Gamma} 2(a^{II}, a^I) \&c.$$

Outre cela on aura

$$L^{II} = g^{II} - 2\mu^{II} H^{II} - \chi^I \check{\Gamma}(a^{II}, a^I) - \chi^{III} \check{\Gamma}(a^{II}, a^{III})$$

$$- \chi^{IV} \check{\Gamma}(a^{II}, a^{IV}) - \frac{1}{2} K^{II} + \frac{1}{5} x^{II}.$$

$$M^{II2} = 3\mu^{II2} - 2f^{II}.$$

$$\beta^{II} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu^{II}}{m - \mu^{II}} \right) \frac{f^{II}}{4(m - \mu^{II})^2 - M^{II2}}$$

$$\gamma^{II} = \frac{\mu^{II}}{m - \mu^{II}} \beta^{II} - \frac{3f^{II}}{8(m - \mu^{II})^2}$$

Enfin on trouvera les deux conditions  $L^{II} = 0$  &

$H'' = 0$ , qui serviront à déterminer les deux constantes  $f''$  &  $\epsilon''$ , (art. XIX.)

On aura des formules analogues pour le troisième & le quatrième satellite, que nous nous dispenserons de rapporter ici, parce qu'elles se déduisent à l'œil de celles que nous venons de donner.

## §. 2.

*Valeurs numériques des coefficients des formules précédentes.*

## X L I I I.

Soit en général, suivant l'article XVIII,

$(1 - 2q \cos.\theta + q^2)^{-\frac{1}{2}} = A + B \cos.\theta + C \cos.2\theta + D \cos.3\theta + \&c.$   
 $q$  étant une fraction moindre que l'unité; on aura, en faisant  $q = \frac{a^I}{a^{II}}$ , &  $\theta = \varphi^{II} - \varphi^I$ ,

$(a^{II} - 2a^I a^{II} \cos.(\varphi^{II} - \varphi^I) + a^{II2})^{-\frac{1}{2}} = a^{II-3} (A + B \cos.(\varphi^{II} - \varphi^I) + C \cos.2(\varphi^{II} - \varphi^I) + \&c.)$ ; donc (art. XXI),  
 $\Gamma(a^I, a^{II}) = \frac{A}{a^{II3}}$ ,  $\Gamma I(a^I, a^{II}) = \frac{B}{a^{II3}}$ ,  $\Gamma 2(a^I, a^{II}) = \frac{C}{a^{II3}}$  &c.

On trouvera de même en faisant successivement

$q = \frac{a^I}{a^{III}}$ ,  $q = \frac{a^I}{a^{IV}}$ ,  $q = \frac{a^{II}}{a^{III}}$ ,  $q = \frac{a^{II}}{a^{IV}}$ ,  $q = \frac{a^{III}}{a^{IV}}$ , on trouvera, dis-je,

$$\Gamma(a^I, a^{III}) = \frac{A}{a^{III3}}, \Gamma I(a^I, a^{III}) = \frac{B}{a^{III3}}, \&c.$$

$$\Gamma(a^I, a^{IV}) = \frac{A}{a^{IV3}}, \Gamma I(a^I, a^{IV}) = \frac{B}{a^{IV3}}, \&c.$$

$$\Gamma(a^{II}, a^{III}) = \frac{A}{a^{III3}}, \Gamma I(a^{II}, a^{III}) = \frac{B}{a^{III3}}, \&c. \& \text{ainsi de suite.}$$

A l'égard des quantités  $\Gamma(a^{II}, a^I)$ ,  $\Gamma(a^{III}, a^I)$ , &c.

il est évident qu'elles doivent être égales à leurs réciproques  $\Gamma(a^I, a^{II})$ ,  $\Gamma(a^I, a^{III})$ , &c. car les fonctions  $a^{I2} - 2a^I a^{II} \cos(\varphi^{II} - \varphi^I) + a^{II2}$ ,  $a^{I2} - 2a^I a^{III} \cos(\varphi^{III} - \varphi^I) + a^{III2}$ , &c. demeurent les mêmes, en changeant  $a^I$  en  $a^{II}$ , &  $a^{II}$  en  $a^I$ , ou bien  $a^I$  en  $a^{III}$ , &  $a^{III}$  en  $a^I$ , &c.

## X L I V.

De-là on trouvera (art. XXIV),  $q$  étant  $= \frac{ra^I}{a^{II}}$ ,

$$\checkmark\Gamma(a^I, a^{II}) = \frac{q^2 B - 2q^2 A}{2},$$

$$\checkmark\Gamma_1(a^I, a^{II}) = \frac{q^2 C - 2q^2 B + 2q^2 A}{2} - q^2$$

$$\checkmark\Gamma_2(a^I, a^{II}) = \frac{q^2 D - 2q^2 C + q^2 B}{2},$$

$$\checkmark\Gamma_3(a^I, a^{II}) = \frac{q^2 E - 2q^2 D + q^2 C}{2}, \text{ \&c.}$$

Et par l'article XXV on aura

$$\hat{\Gamma}_1(a^I, a^{II}) = \frac{q^2 C - 2q^2 A}{2} + q^2,$$

$$\hat{\Gamma}_2(a^I, a^{II}) = \frac{q^2 D - q^2 B}{2},$$

$$\hat{\Gamma}_3(a^I, a^{II}) = \frac{q^2 E - q^2 C}{2}, \text{ \&c.}$$

& ces mêmes formules serviront aussi pour les quantités  $\checkmark\Gamma(a^I, a^{III})$ ,  $\checkmark\Gamma(a^I, a^{IV})$ ,  $\checkmark\Gamma(a^{II}, a^{III})$ , &c.  $\hat{\Gamma}(a^I, a^{III})$ ,  $\hat{\Gamma}(a^I, a^{IV})$ ,

$\hat{\Gamma}(a^{II}, a^{III})$ , &c. en faisant successivement  $q = \frac{a^I}{a^{III}}$ ,

$q = \frac{a^I}{a^{IV}}$ ,  $q = \frac{a^{II}}{a^{III}}$ , &c.

Mais pour les quantités réciproques  $\checkmark\Gamma(a^{II}, a^I)$ ,  $\hat{\Gamma}(a^{II}, a^I)$ , &c. on aura les formules suivantes:

$$\checkmark\Gamma(a^{II}, a^I) = \frac{qB - 2A}{2},$$

$$\check{\Gamma}^1(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{qC - 2B + 2qA}{2} - \frac{1}{q^2},$$

$$\check{\Gamma}^2(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{qD - 2C + qB}{2},$$

$$\check{\Gamma}^3(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{qE - 2D + qC}{2}, \text{ \&c.}$$

$$\hat{\Gamma}^1(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{qC - 2qA}{2} + \frac{1}{q^2},$$

$$\hat{\Gamma}^2(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{qD - qB}{2},$$

$\hat{\Gamma}^3(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{qE - qC}{2}$ , &c. lesquelles auront lieu pareillement pour les quantités  $\check{\Gamma}(a^{\text{III}}, a^{\text{I}})$ ,  $\hat{\Gamma}(a^{\text{III}}, a^{\text{I}})$ , &c. en faisant comme ci-devant  $q = \frac{a^{\text{I}}}{a^{\text{III}}}$ , &c.

## X L V.

On formera ensuite les quantités marquées par  $\approx$  & par  $\Phi$ , (art. XXXIV & XXXVIII), ce qui n'aura aucune difficulté. On remarquera seulement que, à cause de  $1 - \frac{\mu^2}{f} = ng$  (art. XXIX), on aura, en négligeant la quantité  $ng$  qui est de l'ordre  $n$ ,  $f = \mu^2$ , & de-là  $f^{\text{I}} = \mu^{\text{I}^2}$ ,  $f^{\text{II}} = \mu^{\text{II}^2}$ ,  $f^{\text{III}} = \mu^{\text{III}^2}$ ,  $f^{\text{IV}} = \mu^{\text{IV}^2}$ ; par conséquent  $M^{\text{I}} = \mu^{\text{I}}$  (article XXXV), & pareillement  $M^{\text{II}} = \mu^{\text{II}}$ ,  $M^{\text{III}} = \mu^{\text{III}}$ ,  $M^{\text{IV}} = \mu^{\text{IV}}$ .

Donc supposant  $s = \frac{\mu^{\text{II}}}{\mu^{\text{I}}}$ , on aura

$$\approx 1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) = \left( \check{\Gamma}^1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \frac{2}{s-1} \check{\Gamma}^1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \right) \frac{1}{(s-1)^2-1},$$

$$\approx 2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) = \left( \check{\Gamma}^2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \frac{2}{2(s-1)} \check{\Gamma}^2(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \right) \frac{1}{4(s-1)^2-1},$$

$$\approx 3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) = \left( \check{\Gamma}^3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \frac{2}{3(s-1)} \check{\Gamma}^3(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \right) \frac{1}{9(s-1)^2-1}, \text{ \&c.}$$

$$\Phi I(a^I, a^{II}) = \frac{2}{s-1} \Xi I(a^I, a^{II}) + \frac{1}{(s-1)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{II}),$$

$$\Phi 2(a^I, a^{II}) = \frac{2}{2(s-1)} \Xi 2(a^I, a^{II}) + \frac{1}{4(s-1)^2} \hat{\Gamma} 2(a^I, a^{II}),$$

$$\Phi 3(a^I, a^{II}) = \frac{2}{3(s-1)} \Xi 3(a^I, a^{II}) + \frac{1}{9(s-1)^2} \hat{\Gamma} 3(a^I, a^{II}), \&c.$$

De même en faisant  $s = \frac{\mu^{III}}{\mu^I}$ , on aura

$$\Xi I(a^I, a^{III}) = (\check{\Gamma} I(a^I, a^{III}) + \frac{2}{s-1} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{III})) \frac{1}{(s-1)^2-1} \&c.$$

$$\Phi I(a^I, a^{III}) = \frac{2}{s-1} \Xi I(a^I, a^{III}) + \frac{1}{(s-1)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{III}) \&c.$$

Pareillement on trouvera,  $s$  étant  $= \frac{\mu^I}{\mu^{II}}$ ,

$$\Xi I(a^{II}, a^I) = (\check{\Gamma} I(a^{II}, a^I) + \frac{2}{s-1} \hat{\Gamma} I(a^{II}, a^I)) \frac{1}{(s-1)^2-1} \&c.$$

$$\Phi I(a^{II}, a^I) = \frac{2}{s-1} \Xi I(a^{II}, a^I) + \frac{1}{(s-1)^2} \hat{\Gamma} I(a^{II}, a^I) \&c.$$

Et ainsi des autres.

### X L V I.

Cela posé, on remarquera :

1.<sup>o</sup> Que les quantités  $\mu^I, \mu^{II}, \mu^{III}, \mu^{IV}$  expriment les vitesses angulaires moyennes des satellites  $\mathcal{C}^I, \mathcal{C}^{II}, \mathcal{C}^{III}, \mathcal{C}^{IV}$  autour de Jupiter (art. IV & IX); d'où il suit que ces quantités sont réciproquement proportionnelles aux aux temps périodiques des mêmes satellites.

Or on a, par les observations, en négligeant les secondes,

*Révolutions périodiques.*

$$1^j. 18^h. 27', 3^j. 13^h. 13', 7^j. 3^h. 42', 16 16^h. 32'.$$

Donc réduisant ces quantités en minutes, on aura

$$\mu^I = \frac{1}{2547}, \mu^{II} = \frac{1}{5113}, \mu^{III} = \frac{1}{10302}, \mu^{IV} = \frac{1}{24032}.$$

2.<sup>o</sup> Que l'on a généralement  $f = \mu^2$  (art. XLV); c'est-à-

dire (à cause de  $f = \frac{F}{a^3}$  (art. V) & de  $F = \mathcal{F} + \mathcal{C}$ , (art. X)



Et de-là (art. XLIV),

	$(a^I, a^{II})$	$(a^I, a^{III})$	$(a^I, a^{IV})$	$(a^{II}, a^{III})$	$(a^{II}, a^{IV})$	$(a^{III}, a^{IV})$
$\checkmark \Gamma$	0.224	0.037	0.007	0.213	0.027	0.142
$\checkmark \Gamma^1$	0.313	0.032	0.003	0.286	0.021	0.175
$\checkmark \Gamma^2$	0.611	0.104	0.017	0.559	0.088	0.382
$\checkmark \Gamma^3$	0.499	0.048	0.005	0.415	0.032	0.255
$\checkmark \Gamma^4$	0.436	0.022	0.001	0.334	0.027	0.156
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
$\hat{\Gamma}^1$	-0.059	-0.010	-0.001	-0.078	-0.000	-0.050
$\hat{\Gamma}^2$	-0.412	-0.099	-0.017	-0.457	-0.056	-0.327
$\hat{\Gamma}^3$	-0.276	-0.052	-0.005	-0.365	-0.029	-0.240
$\hat{\Gamma}^4$	-0.111	-0.024	-0.001	-0.234	-0.026	-0.172
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

	$(a^{II}, a^I)$	$(a^{III}, a^I)$	$(a^{IV}, a^I)$	$(a^{III}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{III})$
$\checkmark \Gamma$	-1.471	-1.136	-1.039	-1.467	-1.097	-1.349
$\checkmark \Gamma^1$	-4.373	-7.328	-20.375	-4.395	-8.684	-4.631
$\checkmark \Gamma^2$	-1.298	-0.393	-0.116	-1.262	-0.328	-0.960
$\checkmark \Gamma^3$	-0.938	-0.166	-0.017	-0.853	-0.341	-0.592
$\checkmark \Gamma^4$	-0.736	-0.031	-0.004	-0.465	-0.096	-0.351
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.





	$(a^{III}, a^I)$	$(a^{III}, a^{II})$	$(a^{III}, a^{IV})$	$(a^{IV}, a^I)$	$(a^{IV}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{III})$
$\Xi_1$	-0.409	-31.500	-0.518	-0.224	-0.363	-1.243
$\Xi_2$	-0.013	-0.635	2.338	-0.000	-0.007	-0.064
$\Xi_3$	-0.002	-0.150	0.275	-0.000	-0.003	-0.053
$\Xi_4$	-0.000	-0.041	-0.066	-0.000	-0.000	-0.017
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
$\Phi_1$	0.380	-60.322	1.659	0.224	0.354	-0.492
$\Phi_2$	-0.011	-0.803	-4.338	0.000	-0.004	-0.129
$\Phi_3$	-0.002	-0.163	-0.400	0.000	-0.001	-0.052
$\Phi_4$	0.000	-0.041	-0.089	0.000	-0.000	-0.017
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

En consultant cette dernière Table, on voit qu'il y a des quantités dont les valeurs numériques sont fort grandes; telles sont les quantités  $\Xi_2(a^I, a^{II})$ ,  $\Xi_1(a^{II}, a^I)$ ,  $\Xi_2(a^{II}, a^{III})$ ,  $\Xi_1(a^{III}, a^{II})$ , & leurs correspondantes  $\Phi_2(a^I, a^{II})$ ,  $\Phi_1(a^{II}, a^I)$ ,  $\Phi_2(a^{II}, a^{III})$ ,  $\Phi_1(a^{III}, a^{II})$ .

La raison pour laquelle ces quantités ont des valeurs si considérables, c'est que le diviseur  $4(s-1)^2-1$  se trouve fort petit dans le cas où  $s = \frac{\mu^{II}}{\mu^I}$ , &  $s = \frac{\mu^{III}}{\mu^{II}}$ ; & que pareillement le diviseur  $(s-1)^2-1$  est fort petit lorsque  $s = \frac{\mu^I}{\mu^{II}}$ , &  $s = \frac{\mu^{II}}{\mu^{III}}$ , comme il est facile de s'en assurer, au moyen des valeurs de  $\mu^I$ ,  $\mu^{II}$ ,  $\mu^{III}$  données ci-dessus.

## 62 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS

Cette remarque est d'autant plus essentielle qu'elle sert à expliquer pourquoi les équations empiriques des satellites de Jupiter sont en effet les seules qui puissent être bien sensibles: voyez plus bas art. LVIII & suiv.

### X L V I I I.

Il ne reste plus maintenant qu'à chercher les valeurs des quantités  $\beta$  &  $\gamma$ . (art. XXXVI & XXXVIII).

Pour cela, on remarquera que la quantité  $m$  qui représente la vitesse angulaire moyenne du Soleil autour de Jupiter (art. XXVII), est extrêmement petite par rapport aux quantités  $\mu$ , vitesses moyennes des satellites; d'où il suit qu'elle pourra être négligée vis-à-vis de ces dernières quantités; or on a généralement (art. cités),

$$\beta = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\mu}{m-\mu} \right) \frac{f}{4(m-\mu)^2 - M^2}, \quad \& \quad \gamma = \frac{\mu}{m-\mu} \beta - \frac{3f}{8(m-\mu)^2}$$

c'est-à-dire, à cause de  $f = \mu^2$ , &  $M = \mu$  (art. XLV)

$$\beta = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\mu}{m-\mu} \right) \frac{\mu^2}{4(m-\mu)^2 - \mu^2}, \quad \gamma = \frac{\mu}{m-\mu} \beta - \frac{3\mu^2}{8(m-\mu)^2}$$

donc en négligeant les quantités  $m$ , on aura:

$$\beta = 1, \quad \& \quad \gamma = -1 - \frac{3}{8} = -\frac{11}{8}.$$

A l'égard des quantités  $g$  &  $c$  qui doivent être déterminées par les équations  $L = 0$ , &  $H = 0$ , (art. XXIX, XXXV & suiv.) il est inutile d'en chercher la valeur, puisqu'elles ne se trouvent point dans l'expression des coefficients de nos formules.

### §.

*Formules des rayons vecteurs, & des longitudes vraies des Satellites de Jupiter par rapport au plan de l'orbite de cette Planète.*

### X L I X.

Dans les formules suivantes, j'ai remis au lieu de  $n\chi^1$ ,

$n\chi^{\text{II}}, n\chi^{\text{III}}, n\chi^{\text{IV}}$ , les quantités  $\frac{\mathcal{C}^{\text{I}}}{\mathcal{T}^{\text{I}}}, \frac{\mathcal{C}^{\text{II}}}{\mathcal{T}^{\text{II}}}, \frac{\mathcal{C}^{\text{III}}}{\mathcal{T}^{\text{III}}}, \frac{\mathcal{C}^{\text{IV}}}{\mathcal{T}^{\text{IV}}}$  (art. XXIX); & j'ai substitué pour  $nK^{\text{I}}, nK^{\text{II}}, nK^{\text{III}}, nK^{\text{IV}}$ , leurs valeurs en nombres; car puisque  $nK = \frac{a^3 \odot}{a^1 \mathcal{T}^2}$  (article cité), & que  $\frac{\mathcal{T}^2}{a^3} = \mu^2$  (art. XLVI), & par conséquent aussi  $\frac{\odot}{a^3} = m^2$ , on aura  $nK = \frac{m^2}{\mu^2}$ ; donc  $nK^{\text{I}} = \frac{m^2}{\mu^{\text{I}^2}}, nK^{\text{II}} = \frac{m^2}{\mu^{\text{II}^2}}$  &c.

Or  $m$  étant la vitesse moyenne angulaire du Soleil autour de Jupiter, &  $\mu$  les vitesses moyennes angulaires des Satellites, on aura  $\frac{m}{\mu^{\text{I}}} = \frac{1^{\text{j}} \quad 18^{\text{h}} \quad 27'}{4332^{\text{j}} \quad 12^{\text{h}} \quad 20'}$ ,  $\frac{m}{\mu^{\text{II}}} = \frac{3^{\text{j}} \quad 13^{\text{h}} \quad 13'}{4332^{\text{j}} \quad 12^{\text{h}} \quad 20'}$ ,  $\frac{m}{\mu^{\text{III}}} = \frac{7^{\text{j}} \quad 12^{\text{h}} \quad 13'}{4332^{\text{j}} \quad 12^{\text{h}} \quad 20'}$ , &  $\frac{m}{\mu^{\text{IV}}} = \frac{16^{\text{j}} \quad 16^{\text{h}} \quad 32'}{4332^{\text{j}} \quad 12^{\text{h}} \quad 20'}$ ; d'où l'on tire à-très-peu près  $nK^{\text{I}} = \frac{m^2}{\mu^{\text{I}^2}} = 0.0000002$ ,  $nK^{\text{II}} = 0.0000007$ ,  $nK^{\text{III}} = 0.0000027$ ,  $nK^{\text{IV}} = 0.0000148$ .

Outre cela, au lieu de  $\mu^{\text{I}}t, \mu^{\text{II}}t, \mu^{\text{III}}t, \mu^{\text{IV}}t$ , &  $mt$ , qui représentent les valeurs moyennes des angles  $\phi^{\text{I}}, \phi^{\text{II}}, \phi^{\text{III}}, \phi^{\text{IV}}$  &  $\psi$ , c'est-à-dire des longitudes moyennes des quatre satellites, & du Soleil vus de Jupiter, & rapportés au plan de son orbite, j'ai mis les lettres  $u^{\text{I}}, u^{\text{II}}, u^{\text{III}}, u^{\text{IV}}$  &  $v$ .

De même au lieu de  $M^{\text{I}}t + \omega^{\text{I}}, M^{\text{II}}t + \omega^{\text{II}}, M^{\text{III}}t + \omega^{\text{III}}, M^{\text{IV}}t + \omega^{\text{IV}}$ , anomalies moyennes des Satellites, j'ai substitué pour plus de simplicité  $V^{\text{I}}, V^{\text{II}}, V^{\text{III}}, V^{\text{IV}}$ .

Enfin j'ai exprimé les rayons vecteurs en demi-diametres de Jupiter, & les longitudes en minutes. De cette manière j'ai trouvé :

L.

*Rayon vecteur du premier Satellite.*

$$r^{\text{I}} = \zeta, 67(1 + n^{\text{I}} \cos V^{\text{I}})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{4} (4, 19 \text{ cof. } (u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) - 1014, 93 \text{ cof. } 2 (u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) \\
& \quad - 3, 87 \text{ cof. } 3 (u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) - 1, 02 \text{ cof. } 4 (u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) \&c.) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{III}}}{7^{\frac{1}{2}}} (0, 75 \text{ cof. } (u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) - 1, 06 \text{ cof. } 2 (u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) \\
& \quad - 0, 13 \text{ cof. } 3 (u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) - 0, 02 \text{ cof. } 4 (u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) \&c.) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{IV}}}{7^{\frac{1}{2}}} (0, 14 \text{ cof. } (u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) - 0, 09 \text{ cof. } 2 (u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) \\
& \quad - 0, 00 \text{ cof. } 3 (u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) - 0, 00 \text{ cof. } 4 (u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) \&c.) \\
& - 0, 0000009 \text{ cof. } 2 (v - u^{\text{I}})
\end{aligned}$$

*Rayon vecteur du second Satellite.*

$$\begin{aligned}
& r^{\text{II}} = 9, 00 (1 + n e^{\text{II}} \text{ cof. } V^{\text{II}}) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{I}}}{7^{\frac{1}{2}}} (518, 78 \text{ cof. } (u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) + 5, 73 \text{ cof. } 2 (u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) \\
& \quad + 1, 36 \text{ cof. } 3 (u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) + 0, 49 \text{ cof. } 4 (u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) \&c.) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{III}}}{7^{\frac{1}{2}}} (7, 16 \text{ cof. } (u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) - 824, 07 \text{ cof. } 2 (u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) \\
& \quad - 6, 29 \text{ cof. } 3 (u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) - 1, 66 \text{ cof. } 4 (u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) \&c.) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{IV}}}{7^{\frac{1}{2}}} 0, 52 \text{ cof. } (u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) - 4, 85 \text{ cof. } 2 (u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) \\
& \quad - 0, 11 \text{ cof. } 3 (u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) - 0, 04 \text{ cof. } 4 (u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) \&c.) \\
& - 0, 0000060 \text{ cof. } 2 (v - u^{\text{II}}).
\end{aligned}$$

*Rayon vecteur du troisième Satellite.*

$$\begin{aligned}
& r^{\text{III}} = 14, 38 (1 + n e^{\text{III}} \text{ cof. } V^{\text{III}}) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{I}}}{7^{\frac{1}{2}}} (5, 88 \text{ cof. } (u^{\text{I}} - u^{\text{III}}) + 0, 19 \text{ cof. } 2 (u^{\text{I}} - u^{\text{III}}) \\
& \quad + 0, 03 \text{ cof. } 3 (u^{\text{I}} - u^{\text{III}}) + 0, 00 \text{ cof. } 4 (u^{\text{I}} - u^{\text{III}}) \&c.) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{7^{\frac{1}{2}}} (452, 98 \text{ cof. } (u^{\text{II}} - u^{\text{III}}) + 9, 13 \text{ cof. } 2 (u^{\text{II}} - u^{\text{III}}) \\
& \quad + 2, 16 \text{ cof. } 3 (u^{\text{II}} - u^{\text{III}}) + 0, 59 \text{ cof. } 4 (u^{\text{II}} - u^{\text{III}}) \&c.) \\
& + \frac{\mathbb{C}^{\text{IV}}}{7^{\frac{1}{2}}} 7, 46 \text{ cof. } (u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}) - 33, 62 \text{ cof. } 2 (u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}) \\
& \quad - 3, 95 \text{ cof. } 3 (u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}) + 0, 95 \text{ cof. } 4 (u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}) \&c.) \\
& - 0, 0000392 \text{ cof. } 2 (v - u^{\text{III}}).
\end{aligned}$$

*Rayon*

*Rayon vecteur du quatrième Satellite.*

$$\begin{aligned}
 r^{\text{IV}} &= 25,30(1+n\epsilon^{\text{IV}}\cos.V^{\text{IV}}) \\
 + \frac{C^{\text{I}}}{P} &(5,66\cos.(u^{\text{I}}-u^{\text{IV}})+0,01\cos.2(u^{\text{I}}-u^{\text{IV}}) \\
 &+0,00\cos.3(u^{\text{I}}-u^{\text{IV}})+0,00\cos.4(u^{\text{I}}-u^{\text{IV}})\&c.) \\
 + \frac{C^{\text{II}}}{P} &(9,18\cos.(u^{\text{II}}-u^{\text{IV}})+0,17\cos.2(u^{\text{II}}-u^{\text{IV}}) \\
 &+0,07\cos.3(u^{\text{II}}-u^{\text{IV}})+0,00\cos.4(u^{\text{II}}-u^{\text{IV}})\&c.) \\
 + \frac{C^{\text{III}}}{P} &(31,55\cos.(u^{\text{III}}-u^{\text{IV}})+1,62\cos.2(u^{\text{III}}-u^{\text{IV}}) \\
 &+1,35\cos.3(u^{\text{III}}-u^{\text{IV}})+0,43\cos.4(u^{\text{III}}-u^{\text{IV}})\&c.) \\
 -0,0003754\cos.2(v-u^{\text{IV}}).
 \end{aligned}$$

L I.

*Longitude vraie du premier Satellite.*

$$\begin{aligned}
 \phi^{\text{I}} &= u^{\text{I}}-114^{\circ}, 35'n\epsilon^{\text{I}}\sin.V^{\text{I}} \\
 + \frac{C^{\text{II}}}{P} &(9300'\sin.(u^{\text{II}}-u^{\text{I}})-1227214'\sin.2(u^{\text{II}}-u^{\text{I}}) \\
 &-3526'\sin.3(u^{\text{II}}-u^{\text{I}})-705'\sin.4(u^{\text{II}}-u^{\text{I}})\&c.) \\
 + \frac{C^{\text{III}}}{P} &(1158'\sin.(u^{\text{III}}-u^{\text{I}})-1007'\sin.2(u^{\text{III}}-u^{\text{I}}) \\
 &-101'\sin.3(u^{\text{III}}-u^{\text{I}})-18'\sin.4(u^{\text{III}}-u^{\text{I}})\&c.) \\
 + \frac{C^{\text{IV}}}{C} &(188'\sin.(u^{\text{IV}}-u^{\text{I}})-81'\sin.2(u^{\text{IV}}-u^{\text{I}})-3' \\
 &\sin.3(u^{\text{IV}}-u^{\text{I}})-0'\sin.4(u^{\text{IV}}-u^{\text{I}})\&c.) \\
 -0'', 047\sin.2(v-u^{\text{I}}).
 \end{aligned}$$

*Longitude vraie du second Satellite.*

$$\phi^{\text{II}} = u^{\text{II}}-114^{\circ}, 35'n\epsilon^{\text{II}}\sin.V^{\text{II}}$$

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

I

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathcal{C}^I}{7\frac{1}{2}} (-387482' \sin.(u^I - u^{II}) - 2727' \sin.2(u^I - u^{II}) \\
& \quad - 509' \sin.3(u^I - u^{II}) - 12' \sin.(u^I - u^{II}) \&c.) \\
& + \frac{\mathcal{C}^{III}}{7\frac{1}{2}} (10067' \sin.(u^{III} - u^{II}) - 626246' \sin.2(u^{III} - u^{II}) \\
& \quad - 3717' \sin.3(u^{III} - u^{II}) - 825' \sin.4(u^{III} - u^{II}) \&c.) \\
& + \frac{\mathcal{C}^{IV}}{7\frac{1}{2}} (506' \sin.(u^{IV} - u^{II}) - 3123' \sin.2(u^{IV} - u^{II}) - 52' \\
& \quad \sin.3(u^{IV} - u^{II}) - 17' \sin.4(u^{IV} - u^{II}) \&c.) \\
& - 0'', 190 \sin.2(v - u^{II}).
\end{aligned}$$

*Longitude vraie du troisième Satellite.*

$$\begin{aligned}
\phi^{III} & = u^{III} - 114^\circ, 35' n\epsilon^{III} \sin.V^{III} \\
& + \frac{\mathcal{C}^I}{7\frac{1}{2}} (1306' \sin.(u^I - u^{III}) - 38' \sin.2(u^I - u^{III}) - 8' \\
& \quad \sin.3(u^I - u^{III}) - 1' \sin.4(u^I - u^{III}) \&c.) \\
& + \frac{\mathcal{C}^{II}}{7\frac{1}{2}} (-207375' \sin.(u^{II} - u^{III}) - 2760' \sin.2(u^{II} - u^{III}) \\
& \quad - 559' \sin.3(u^{II} - u^{III}) - 142' \sin.4(u^{II} - u^{III}) \&c.) \\
& + \frac{\mathcal{C}^{IV}}{7\frac{1}{2}} (5703' \sin.(u^{IV} - u^{III}) - 14911' \sin.2(u^{IV} - u^{III}) \\
& \quad - 1376' \sin.3(u^{IV} - u^{III}) - 306' \sin.4(u^{IV} - u^{III}) \&c.) \\
& - 0'', 977 \sin.(v - u^{III}).
\end{aligned}$$

*Longitude vraie du quatrième Satellite.*

$$\begin{aligned}
\phi^{IV} & = u^{IV} - 114^\circ, 35' n\epsilon^{IV} \sin.V^{IV} \\
& + \frac{\mathcal{C}^I}{7\frac{1}{2}} (768' \sin.(u^I - u^{IV}) - 0' \sin.2(u^I - u^{IV}) - 0' \\
& \quad \sin.3(u^I - u^{IV}) - 0' \sin.4(u^I - u^{IV}) \&c.) \\
& + \frac{\mathcal{C}^{II}}{7\frac{1}{2}} (1219' \sin.(u^{II} - u^{IV}) - 15' \sin.2(u^{II} - u^{IV}) - 3' \\
& \quad \sin.3(u^{II} - u^{IV}) - 0' \sin.4(u^{II} - u^{IV}) \&c.)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{C^{\text{III}}}{7^2} & (-1691' \sin.(u^{\text{III}} - u^{\text{IV}}) - 444' \sin.2(u^{\text{III}} - u^{\text{IV}}) \\
 & - 180' \sin.3(u^{\text{III}} - u^{\text{IV}}) - 59 \sin.4(u^{\text{III}} - u^{\text{IV}}) \&c.) \\
 - 4'' & , 208 \sin.2(v - u^{\text{IV}}).
 \end{aligned}$$

## §. 4.

Où l'on donne les inégalités des Satellites, qui dépendent de leurs configurations, & qui ont lieu au temps des éclipses.

## L I I.

Il est visible que les éclipses des Satellites, c'est-à-dire leurs conjonctions avec Jupiter, arrivent lorsque leurs longitudes  $\phi$  diffèrent de  $180^\circ$  de la longitude  $\psi$  du Soleil vu de Jupiter; de sorte qu'on aura généralement l'équation  $\phi - \psi = 180^\circ$ ; ou bien, en mettant pour  $\phi$  &  $\psi$ , leurs valeurs  $u + nJ$ ; &  $v + nJ$ ;  $u - v = 180^\circ + nJ - nJ$ ; où  $nJ$  exprime l'équation de Jupiter,  $nJ$  l'équation, ou plutôt la somme des équations du Satellite, &  $u - v$  la distance, ou bien l'élongation moyenne du satellite; donc pour avoir la conjonction vraie, il n'y aura qu'à ajouter au temps de la conjonction moyenne la quantité  $nJ - nJ$  convertie en temps, à raison du mouvement moyen du satellite au Soleil, conversion qu'on fera aisément en multipliant la quantité proposée par 0, 1179 pour le premier satellite, par 0, 2369 pour le second, par 0, 4771 pour le troisième & par 1, 1169 pour le quatrième; & changeant ensuite les degrés en heures, les minutes en minutes de degrés, &c, ces nombres se trouvent, en divisant les durées des révolutions synodiques des satellites, lesquelles sont de  $1^{\text{h}} 18^{\text{m}} 28^{\text{s}} 36''$ ,  $3^{\text{h}} 13^{\text{m}} 17^{\text{s}} 54''$ ,  $7^{\text{h}} 3^{\text{m}} 59^{\text{s}} 36''$ ,  $16^{\text{h}} 18^{\text{m}} 5^{\text{s}} 7''$  par  $360^\circ$ , après avoir réduit le tout en secondes.

## L I I I.

Nous allons donc donner ici les équations des conjonctions des satellites ; mais nous ferons abstraction de celles qui viennent de l'excentricité de Jupiter, & des excentricités particulières des satellites , parce que les unes sont assez connues des Astronomes , & que les autres ne sont pas assez exactes pour qu'on puisse s'y fier.

## L I V.

*Équation du premier Satellite.*

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{C}^{\text{II}}}{\mathbb{T}^{\text{II}}} (-1097' \sin. (u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) + 144800' \sin. 2(u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) \\ & \quad + 416' \sin. 3(u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) + 83' \sin. 4(u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) \&c.) + \\ & \frac{\mathbb{C}^{\text{III}}}{\mathbb{T}^{\text{III}}} (-137' \sin. (u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) + 119' \sin. 2(u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) + 12' \\ & \quad \sin. 3(u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) + 1' \sin. 4(u^{\text{III}} - u^{\text{I}}) \&c.) + \\ & \frac{\mathbb{C}^{\text{IV}}}{\mathbb{T}^{\text{IV}}} (-22' \sin. (u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) + 9' \sin. 2(u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) + 0' \\ & \quad \sin. 3(u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) + 0' \sin. 4(u^{\text{IV}} - u^{\text{I}}) \&c.) \end{aligned}$$

## L V.

*Équation du second Satellite.*

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{C}^{\text{I}}}{\mathbb{T}^{\text{I}}} (91810' \sin. (u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) + 646' \sin. 2(u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) + 121' \\ & \quad \sin. 3(u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) + 3' \sin. 4(u^{\text{I}} - u^{\text{II}}) \&c.) + \\ & \frac{\mathbb{C}^{\text{III}}}{\mathbb{T}^{\text{III}}} (-2385' \sin. (u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) + 148383' \sin. 2(u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) \\ & \quad + 881' \sin. 3(u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) + 195' \sin. 4(u^{\text{III}} - u^{\text{II}}) \&c.) + \\ & \frac{\mathbb{C}^{\text{IV}}}{\mathbb{T}^{\text{IV}}} (-119' \sin. (u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) + 740' \sin. 2(u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) + 12' \\ & \quad \sin. 3(u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) + 4' \sin. 4(u^{\text{IV}} - u^{\text{II}}) \&c.) \end{aligned}$$



## L V I.

*Équation du troisième Satellite.*

$$\begin{aligned} & \frac{C^I}{T} (-624' \sin.(u^I - u^{III}) + 18' \sin.2(u^I - u^{III}) + 4' \\ & \quad \sin.3(u^I - u^{III}) + 0' \sin.4(u^I - u^{III}) \&c.) + \\ & \frac{C^{II}}{T} (99075' \sin.(u^{II} - u^{III}) + 1319' \sin.2(u^{II} - u^{III}) \\ & \quad + 267' \sin.3(u^{II} - u^{III}) + 68' \sin.4(u^{II} - u^{III}) \&c.) + \\ & \frac{C^{IV}}{T} (-2725' \sin.(u^{IV} - u^{III}) + 7124' \sin.2(u^{IV} - u^{III}) \\ & \quad + 627' \sin.3(u^{IV} - u^{III}) + 146' \sin.4(u^{IV} - u^{III}) \&c.) \end{aligned}$$

## L V I I.

*Équation du quatrième Satellite.*

$$\begin{aligned} & \frac{C^I}{T} (-858' \sin.(u^I - u^{IV}) + 0' \sin.2(u^I - u^{IV}) \&c.) + \\ & \frac{C^{II}}{T} (-1362' \sin.(u^{II} - u^{IV}) + 18' \sin.2(u^{II} - u^{IV}) \\ & \quad + 4' \sin.3(u^{II} - u^{IV}) - 0' \sin.4(u^{II} - u^{IV}) \&c.) + \\ & \frac{C^{III}}{T} (1888' \sin.(u^{III} - u^{IV}) + 496' \sin.2(u^{III} - u^{IV}) \\ & \quad + 201' \sin.3(u^{III} - u^{IV}) + 66' \sin.4(u^{III} - u^{IV}) \&c.) \end{aligned}$$

J'ai négligé dans ces formules les termes dus à l'action du Soleil, & qui sont de la forme de  $\sin.2(v - u)$ , parce que ces termes deviennent nuls au temps des conjonctions ou l'on a  $u - v = 180^\circ$ .

## §. 5.

*Comparaison des formules précédentes avec les observations, & conséquences qui en résultent par rapport aux masses des Satellites.*

## L V I I I.

Nous nous contenterons ici de comparer nos formules avec les tables de M. Wargent, qui sont, comme l'on fait, le résultat d'un grand nombre d'observations; mais avant d'entreprendre ce parallèle, il est bon d'avertir que les tables de ce grand Astronome sont dressées de manière qu'il n'y a aucune équation soustractive, quoique les équations qu'il a employées, soient de nature à être tantôt additives & tantôt soustractives; cela vient de ce que l'Auteur a retranché, par avance des époques, chacune des plus grandes équations soustractives; de sorte que les équations des tables se trouvent nulles dans le cas où elles auroient été les plus grandes à soustraire, & que leur plus grande valeur est double de ce qu'elle auroit dû être.

## L I X.

En examinant les différens termes de la formule de l'article LIV, on voit qu'il y en a un dont le coefficient numérique est très-grand, & vis-à-vis duquel tous les autres termes ne sont presque d'aucune considération; c'est le terme  $\frac{C''}{z} 144800' \sin. 2(u'' - u')$ , d'où résulte une équation qui a pour argument  $2(u'' - u')$ , savoir le double de la distance moyenne du second satellite au premier, au temps des conjonctions de celui-ci, & dont

la plus grande valeur est de  $\frac{C^{II}}{Z} = 144800'$ ,  $\frac{C^{II}}{Z}$  exprimant le rapport de la masse du second satellite à celle de Jupiter.

Pour mieux connoître la nature de cette inégalité qui doit avoir lieu dans les conjonctions du premier satellite, il faut chercher sa période, laquelle dépend du rapport des révolutions synodiques des deux premiers satellites. Or suivant M. Wargentín, on a pour la durée de la révolution synodique du premier,  $1^h 18^m 28' 35'' 56''' 58^{IV}$ , & pour celle du second,  $3^h 13^m 17' 53'' 45''' 7^{IV}$ ; d'où l'on trouve, en additionnant successivement ces nombres, que 247 révolutions du premier font  $437^h 3^h 43' 59'' 31'''$ , & que 123 révolutions du second font  $437^h 3^h 41' 11'' 29'''$ ; ainsi pendant que le premier fait une révolution par rapport au Soleil, le second ne fait que  $\frac{123}{247}$  d'une pareille révolution; d'où il suit que la distance  $u^{II} - u^I$  du second satellite au premier augmente dans l'intervalle d'une conjonction à l'autre, de  $(\frac{123}{247} - 1) 360^\circ$ ; pour avoir une exactitude plus grande, on additionnera de nouveau les périodes du premier & du second satellite que nous venons de trouver, jusqu'à ce qu'ils fassent des sommes à-peu-près égales, & l'on trouvera que 449538 révolutions du premier font  $795619^h 13^h 28' 8'' 26'''$ , & que 223860 révolutions du second font  $795619^h 13^h 32' 19'' 40'''$ ; c'est pourquoi on aura, au lieu de la fraction  $\frac{123}{247}$ , celle-ci beaucoup plus exacte  $\frac{223860}{449538}$ .

Soit maintenant  $\theta$  la distance du second satellite au premier au temps d'une conjonction de celui-ci, cette distance deviendra, après  $n$  révolutions  $\theta + n(\frac{223860}{449538} - 1) 360^\circ = u^{II} - u^I$ ; donc on aura  $2(u^{II} - u^I) = 2\theta + n(\frac{447720}{449538} - 2) 360^\circ = 2\theta - n(\frac{1818}{449538} + 1) 360^\circ$ ;

&  $\sin. 2(u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) = \sin. (2\theta - n \frac{1818}{449538} 380^\circ)$  ; donc pour que cette quantité redevienne  $\sin. 2\theta$ , il faut que  $\frac{1818n}{449538} = 1$ , ce qui donne  $n = \frac{449538}{1818} = 247, 270$  ; c'est le nombre des révolutions du premier satellite qui exprime la période de l'équation  $\sin. 2(u^{\text{II}} - u^{\text{I}})$ .

Or 247 révolutions font à-très-peu-près  $437^{\text{h}} 3^{\text{h}} 44' 0''$  ; &  $\frac{27}{100}$  de révolutions font  $1^{\text{h}} 28' 7''$ , donc la période cherchée fera de  $437^{\text{h}} 15^{\text{h}} 12' 7''$ .

## L X.

Voyons à-présent quelle doit être la marche de cette équation ; pour cela, nous supposons  $\theta = 0$ , c'est-à-dire, que les deux satellites se trouvent à-la-fois en conjonction, & nous aurons, après un nombre quelconque  $n$  de révolutions du premier satellite,  $\sin. 2(u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) = -\sin. n \frac{1818}{449538} 360^\circ$ , ou bien en faisant, pour abrégér,  $p = \frac{449538}{1818} =$  au nombre des révolutions qui forment la période de l'équation,  $\sin. 2(u^{\text{II}} - u^{\text{I}}) = -\sin. \frac{n}{p} 360^\circ$ .

De-là on voit que l'équation  $\sin. 2(u^{\text{II}} - u^{\text{I}})$  fera nulle au commencement de la période, qu'ensuite elle deviendra soustractive, & qu'elle fera la plus grande à soustraire, lorsque  $n = \frac{p}{4}$ , c'est-à-dire, au quart de la période ; après quoi elle redeviendra nulle à la moitié de la période, ensuite se changera en additive croissante jusqu'aux trois quarts de la période, où elle fera la plus grande, & enfin décroîtra pendant le dernier quart, pour se retrouver nulle au commencement de la période suivante,

## L X I.

Je dis maintenant que l'équation que nous venons d'examiner est la même que celle qui se trouve dans les tables

tables du premier satellite, désignée par la lettre *C*, & qui est la seule que les observations aient fait connoître jusqu'ici. En effet 1.° la période de cette équation est, selon M. Wargentin de 437<sup>h</sup> 19<sup>h</sup> 41' environ, ce qui s'accorde admirablement bien avec ce que nous avons trouvé dans l'article LIX; car la différence de 4<sup>h</sup> 28' qui s'y trouve, n'est d'aucune considération par rapport à un intervalle de 437<sup>h</sup> 2.° Si on examine l'équation *C* on verra qu'en ôtant toujours 3' 30" (moitié de la plus grande valeur de cette équation, selon la remarque de l'article LVIII), & établissant le commencement de la période (qui est ici divisée en mille parties) au nombre 750, on verra, dis-je, que la marche de cette équation est la même que celle de l'équation *sin. 2(u<sup>II</sup> — u<sup>I</sup>)* (art. préc.). De plus on trouvera, par les tables du premier & du second satellite, que dans les conjonctions du premier satellite, qui répondent exactement au nombre 750, l'élongation du second satellite est nulle. Donc, &c.

## L X I I.

De-là il suit que les nombres *C* des tables du premier satellite ne sont autre chose que les distances, c'est à-dire, les élongations du second satellite au premier, au temps des conjonctions de celui-ci, le cercle étant supposé divisé en 1000 parties, de sorte que le nombre 750 répond aux conjonctions des deux satellites & 250 à leurs oppositions; cette remarque fournit un moyen de rectifier les époques de ces nombres, si elles en avoient besoin, & de les prolonger autant qu'on voudra, sans craindre de s'égarer.

## L X I I I.

La plus grande valeur de l'équation *C* du premier satellite est de 7', dont il ne faut prendre que la moitié  
*Prix de l'Académie, Tome IX.* K

74 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS  
 (art. LVIII); donc, comparant cette valeur avec le coefficient de l'équation  $\sin. 2(u'' - u')$  lequel est  $\frac{C''}{T''} 144800'$  on aura  $\frac{C''}{T''} 144800 = \frac{7}{2}$ , d'où l'on tire  $\frac{C''}{T''} = \frac{7}{289600} = 0,00002417 = \frac{11}{40000}$  à-peu-près; c'est le rapport de la masse du second satellite à celle de Jupiter. Si on prend la masse de la Terre pour l'unité, on a  $T'' = 363,9$ , ce qui donne  $C'' = 0,008794 = \frac{11}{1250}$  à-peu-près.

Supposons que la densité de ce satellite soit la même que celle de Jupiter, ou au moins qu'elle n'en diffère que très-peu, ce qui est très-naturel, on trouvera, en prenant le demi-diamètre de Jupiter pour l'unité, que celui du satellite est  $0,0289$ , c'est-à-dire, environ  $\frac{1}{34}$ , ce qui donneroit pour le temps que le satellite doit employer à entrer dans l'ombre de Jupiter  $5' 14''$ , ce qui est à-peu près le milieu entre les résultats des observations de M. Maraldi & de M. Whiston, (Mém. Acad. 1734).

#### L X I V.

Il seroit tout à-fait inutile d'examiner les autres termes de la formule de l'article LIV; car il est clair qu'il n'en pourroit résulter que des équations extrêmement petites, & par conséquent insensibles, à moins qu'on ne voulût supposer les masses du troisième & du quatrième satellite, énormément grandes par rapport à celle du second, ce qui ne paroît guères naturel; d'ailleurs l'équation que nous avons examinée est la seule qu'on ait jusqu'ici déduite des observations.

#### L X V.

Passons donc à la formule de l'article LV, qui renferme les équations des conjonctions du second satellite. Parmi tous les termes dont cette formule est composée, j'en

distingue d'abord deux qui sont beaucoup plus considérables que les autres par les coefficients numériques dont ils sont affectés ; savoir :

$$\frac{C^I}{7^I} 91810' \sin. (u^I - u^{II}) + \frac{C^{III}}{7^I} 148383' \sin. 2(u^{III} - u^{II}).$$

Dont l'un vient de l'action du premier satellite, & l'autre de l'action du troisième. Ces deux termes produisent, comme l'on voit, deux équations dont les argumens sont  $u^I - u^{II}$ , distance moyenne du premier satellite au second, &  $2(u^{III} - u^{II})$  double de la distance moyenne du troisième satellite au second au temps des conjonctions de celui-ci.

Je remarque maintenant que la durée de la révolution synodique du troisième satellite est de  $7^h 3^m 59' 35'' 55''' 23^{IV}$ , selon M. Wargentin ; ce qui donne, pour 61 révolutions,  $437^h 3^h 35' 31'' 18'''$ , & pour 111021 révolutions  $795619^h 13^h 29' 1'' 55'''$  ; or nous avons déjà trouvé que 449538 révolutions du premier sont  $795619^h 13^h 28' 8'' 26'''$ , & que 223860 révolutions du second sont  $795619^h 13^h 32' 19'' 40'''$  (art. LIX) ; donc les mouvemens des trois premiers satellites au Soleil sont entr'eux comme les nombres 449538, 223860, 111021, & les différences entre les mouvemens des deux premiers & les mouvemens du second & du troisième sont au mouvement du second comme les nombres 225678, 112839 au nombre 223860 ; donc pendant que le second acheve une révolution au Soleil, les angles  $u^I - u^{II}$ , &  $u^{III} - u^{II}$  croissent de  $\frac{225678}{223860} 360^\circ$ , &  $-\frac{112839}{223860} 360^\circ$  ; donc l'angle  $2(u^{III} - u^{II})$  diminue à chaque révolution du second de la même quantité dont l'angle  $u^I - u^{II}$  augmente, savoir de  $\frac{225678}{223860} 360^\circ$  ; donc la quantité  $u^I - u^{II} + 2(u^{III} - u^{II})$  est toujours la même dans les conjonctions du second satellite.

Examinons donc une conjonction quelconque de ce

fatellite, & voyons quelles sont les élongations du premier & du troisième, c'est-à-dire, les valeurs de  $u^I - u^{II}$ , & de  $u^{III} - u^{II}$ ; je prends pour exemple la première conjonction de l'année 1760, laquelle est marquée dans les tables à  $2^h 13^m 42' 50''$ , à quoi ajoutant la moitié des plus grandes équations, savoir,  $1^h 35' 6''$ , (art. LVIII) on a  $2^h 15^m 17' 56''$  pour le tems moyen de la conjonction moyenne du second fatellite; je trouve de la même manière, que les premières conjonctions moyennes du premier & du troisième fatellite ont dû arriver à  $1^h 10^m 48' 48''$ , & à  $3^h 5^m 54' 56''$  de tems moyen; d'où je conclus qu'au tems de la conjonction du second fatellite, le premier étoit plus avancé de  $1^h 4^m 29'$ , ce qui fait  $241^{\circ} 24'$ , & que le troisième étoit en arrière de  $14^h 37'$ , ce qui vaut  $30^{\circ} 27'$ ; donc  $u^I - u^{II} = 241^{\circ} 24'$ , &  $u^{III} - u^{II} = -30^{\circ} 27'$ ; par conséquent  $u^I - u^{II} + 2(u^{III} - u^{II}) = 180^{\circ} 30' = 180^{\circ}$  à très-peu-près.

On aura donc en général  $2(u^{III} - u^{II}) = 180^{\circ} - (u^I - u^{II})$  &  $\sin 2(u^{III} - u^{II}) = \sin(u^I - u^{II})$ ; ainsi les deux termes  $\frac{C^I}{\mathcal{P}} 91810' \sin(u^I - u^{II}) + \frac{C^{III}}{\mathcal{P}} 148383' \sin 2(u^{III} - u^{II})$  peuvent se réduire à un terme unique; tel que  $(\frac{C^I}{\mathcal{P}} 91810' + \frac{C^{III}}{\mathcal{P}} 148383') \sin(u^I - u^{II})$ , lequel ne donne qu'une équation dépendante de l'élongation du premier fatellite au second.

## L X V I.

Soit, dans une conjonction du second fatellite,  $u^I - u^{II} = \theta$ , on aura, par ce que nous avons démontré dans l'article précédent, après  $n$  révolutions de ce même fatellite,  $u^I - u^{II} = \theta + n \frac{225678}{223860} 360^{\circ}$ ; & par conséquent  $\sin(u^I - u^{II}) = \sin(\theta + n \frac{225678}{223860} 360^{\circ}) = \sin(\theta + n$



$\frac{1818}{223860} 360^\circ$ ); d'où l'on voit que cette quantité ne peut redevenir  $\sin. \theta$ , à moins que l'on n'ait  $n \frac{1818}{223860} = 1$ , ce qui donne  $n = \frac{223860}{1818} = 123, 135$ ; c'est le nombre des révolutions du second satellite qui forment la période de l'équation  $\sin. (u^I - u^{II})$ , & l'on trouvera que cette période est la même que celle de l'équation du premier satellite, favoir de  $437^j 15^h 12' 7''$  (art. LIX).

Mettons  $p$  au lieu du nombre  $\frac{223860}{1818}$ , nous aurons  $\sin. (u^I - u^{II}) = \sin. (\theta + \frac{n}{p} 360^\circ)$ ; donc supposant au commencement de la période  $\theta = 0$ , c'est-à-dire, les deux premiers satellites en conjonction à la fois, & faisant successivement  $n = 0$ ,  $n = \frac{p}{4}$ ,  $n = \frac{p}{2}$ ,  $n = \frac{3p}{4}$ , &  $n = p$  on trouvera que l'équation dont il s'agit est nulle au commencement de la période, qu'ensuite elle augmente jusqu'au quart de la période, où elle est la plus grande; que de-là elle diminue & redevient nulle à la moitié de la période, après quoi elle se change en négative, &c.

## L X V I I.

Si on compare maintenant la marche de cette équation avec celle de l'équation  $C$  des tables du second satellite, on verra qu'elles s'accordent parfaitement, pourvu que l'on ait attention d'ôter constamment de cette dernière équation  $16' 30''$  moitié de sa plus grande valeur, & qu'on fixe le commencement de la période au nombre 250. Ainsi les nombres  $C$  des tables du second satellite indiquent les élongations du premier au tems des conjonctions du second. de sorte que le nombre 250 répond aux conjonctions des deux satellites, & le nombre 750 à leurs oppositions. Voyez là-dessus la dissertation de M. Wargentin qui est à la tête des Observations du second satellite, dans les Mémoires de la Société d'Upsal pour l'année 1743.

## L X V I I I.

Il ne reste donc plus qu'à égaler le coefficient de l'équation *fin.* ( $u^I - u^{II}$ ) à la plus grande valeur de l'équation  $C$  des tables, ce qui donne  $\frac{C^I}{T} 91810 + \frac{C^{III}}{T} 148383 = \frac{33}{2}$ ; desorte qu'en supposant  $C^{III} = m C^I$ , on aura  $\frac{C^I}{T} = \frac{33}{183620 + 296766m}$  &  $\frac{C^{III}}{T} = \frac{33m}{183620 + 296766m}$ .

Soit par exemple  $m = 1$ , c'est-à-dire, les masses du premier & du troisième satellite égales entr'elles, on aura  $\frac{C^I}{T} = \frac{C^{III}}{T} = \frac{33}{480386} = 0,0006869 = \frac{1}{14500}$  environ; d'où, en supposant les densités des satellites égales à celles de Jupiter, on tire leurs demi diamètres  $= 0,0409 =$  environ  $\frac{1}{25}$  de celui de Jupiter; ce qui donne pour le tems que le premier devoit employer à entrer dans l'ombre  $5' 51''$ , & pour le tems que devoit employer le troisième  $9' 21''$ .

Au reste, quelque soit le nombre  $m$ , comme il ne faudroit être ni infini ni nul, il est clair que les quantités  $\frac{C^I}{T}$ ,  $\frac{C^{III}}{T}$  sont toujours nécessairement moindres que la fraction  $\frac{33}{296766} = 0,00111$ , c'est-à-dire, en prenant la masse de la Terre pour l'unité  $\left. \begin{matrix} C^I \\ C^{III} \end{matrix} \right\} < 0,0404$ , environ  $\frac{1}{25}$ ,

## L X I X.

A l'égard des autres termes de la formule de l'art. LV, il est facile de voir qu'ils ne donnent que des équations extrêmement petites, & qui peuvent par conséquent être négligées; en effet, le terme qui a le plus grand coefficient numérique, après ceux que nous venons d'examiner, est

$\frac{C^{III}}{T^2} \times 2385' \sin. (u^{III} - u^{II})$ ; or nous avons trouvé que

$\frac{C^{III}}{T^2} < 0,000111\dots$ , donc la plus grande équation sera  $< 15''$ .

## L X X.

L'équation  $u^I - u^{II} + 2(u^{III} - u^{II}) = 180^\circ 30'$ , trouvée dans l'article XLV, & d'où nous avons tiré  $\sin. 2(u^{III} - u^{II}) = \sin. (u^I - u^{II})$  à très-peu-près, est une suite du rapport que nous avons établi entre les révolutions synodiques des trois premiers satellites; ce rapport n'est pas exact à la rigueur, mais il ne s'écarte de la vérité que d'une quantité infiniment petite, desorte qu'au bout de mille ans, l'erreur qui en pourra résulter sera encore presque insensible.

En effet, on trouve qu'il faudroit environ 1317900 ans, pour que l'équation dont nous parlons devint  $u^I - u^{II} + 2(u^{III} - u^{II}) = 360^\circ$ , pourvu que les moyens mouvemens des satellites fussent assez exacts pour pouvoir être employés dans une si longue suite de siècles. Voyez l'ouvrage de M. Wargentia cité ci-dessus.

## L X X I.

La formule de l'article LVI qui renferme les équations du troisième satellite, ne nous présente qu'un terme qui puisse être de quelque considération; c'est le terme  $\frac{C^{II}}{T^2} 99075' \sin. (u^{II} - u^{III})$ , dont l'argument est l'élongation du second satellite au troisième au tems des conjonctions de celui-ci.

Avant d'entrer dans le détail de l'inégalité qui en résulte, voyons si elle est assez considérable pour qu'on doive en tenir compte. Pour cela on substituera au lieu de

$\frac{C''}{7}$  la valeur trouvée ci-dessus (article LXIII) savoir  $\frac{7}{289600}$ , & l'on trouvera  $\frac{C''}{7} 99075' = 2', 24''$ , desorte que l'inégalité dont il s'agit montera à  $4' 48''$ , à cause que l'équation *sin.* ( $u'' - u'''$ ) est, tantôt additive, tantôt soustractive.

Maintenant on fait que les mouvemens moyens du second & du troisième satellites sont entr'eux comme les nombres 233860, 111021 (article LXV) d'où il suit que pendant que le troisième acheve une révolution au soleil, la distance  $u'' - u'''$  augmente de  $\frac{112839}{111021} 360^\circ$ ; desorte que si on appelle  $\theta$  l'élongation du second satellite au troisième au tems d'une conjonction quelconque de ce dernier, on aura après  $n$  révolutions  $u'' - u''' = \theta + n \frac{112839}{111021} 360^\circ$ , & de la *sin.* ( $u'' - u'''$ ) = *sin.* ( $\theta + n \frac{112839}{111021} 360^\circ$ ) = *sin.* ( $\theta + n \frac{1818}{111021} 360^\circ$ ), d'où l'on voit 1.<sup>o</sup> que la période de cette équation sera de  $\frac{111021}{1818}$  révolutions du troisième satellite, ce qui revient au même que celles du premier & du second satellite (article LIX & LXVI); 2.<sup>o</sup> que si on prend pour le commencement de la période une conjonction du troisième satellite dans laquelle  $\theta = 0$ , c'est-à-dire, que le second satellite soit aussi en conjonction, on trouvera que la marche de l'équation dont il s'agit sera entièrement analogue à celle de l'équation du second satellite (article LXVI).

## L X X I I.

L'équation que nous venons d'examiner ne se trouve point dans les tables du troisième satellite; M. Wargentin s'est contenté de l'indiquer dans la Préface de ses Tables (Mémoire de la Société d'Upsal. pour l'année 1741), où il dit; *Multæ etiam observationes satis manifestè indicant tertium æquatione aliâ indigere cujus ferè eadem*

*eadem est quantitas & natura cum æquatione novâ primi ; sed quoniam observationes non paucas habeam quæ eam vel minorem, vel nullam arguant, hujus æquationis in tabulis nullam habere rationem satius judicavi ; & ailleurs ( dans la Dissertation qui est à la tête des Observations du second satelite ) : In motibus tertii satellitis deprehenditur inæqualitas quædam quæ indicat eum esse retardatum in conjunctionibus, sed accleratum in oppositionibus secundi ; & plus bas : Est etiam hæc inæqualitas tertii similis inæqualitati suprâ descriptæ secundi ; ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé dans l'article précédent. Il est vrai que cette équation a paru à M. Wargentin de la même quantité que celle du premier satelite, au lieu qu'elle n'en est qu'environ les deux tiers, suivant notre théorie ; mais ce savant Astronome avoue lui même qu'il ne regarde pas son résultat comme fort exact, l'ayant trouvé quelquefois moindre, & même nul, & que c'est pour cette raison qu'il a cru devoir s'abstenir d'en faire usage dans ses Tables.*

## L X X I I I.

Avant de quitter la formule de l'article LVI, nous dirons deux mots des termes qui dépendent de  $u^{IV} - u^{III}$ , élongation du quatrième satelite au troisième, & dont le plus considérable est celui-ci :  $\frac{C^{IV}}{P} 7124' \sin. 2(u^{IV} - u^{III})$ .

Supposons d'abord que l'équation qui en provient soit, lorsqu'elle est la plus grande, de  $m$  minutes ; on aura  $\frac{C^{IV}}{P} 7124 = m$  ; donc  $\frac{C^{IV}}{P} = \frac{m}{7124} = 0,000140 m$  ; d'où l'on voit que pour que  $m$  soit au moins = 1, il faut que la masse du quatrième satelite surpasse de beaucoup celles des trois premiers.

Si on veut que la densité de ce satelite soit la même que  
*Prix de l'Académie, Tome IX.* L

celle de Jupiter, on trouvera son diamètre  $= 0,0519 \sqrt{m}$  de celui de Jupiter ; & par conséquent le tems qu'il doit employer à entrer dans l'ombre  $= 15' 46'' \sqrt{m}$  ; ce qui , en faisant  $m = 1$  , est assez conforme au résultat des observations de M. Maraldi.

Cette équation , au reste , supposé qu'elle montât à quelques minutes , ce qui ne seroit nullement impossible , mériteroit d'autant plus l'attention des Astronomes , qu'elle varie beaucoup d'une conjonction à l'autre ; en effet , les révolutions synodiques du troisième & du quatrième satellite étant de  $619176''$  , &  $1447507''$  , on trouve que l'angle  $u^{IV} - u^{III}$  doit augmenter pendant une révolution du troisième de  $(\frac{619176}{1447507} - 1) 360^\circ$  , c'est-à-dire , diminuer de  $\frac{828331}{1447507} 360^\circ$  ; donc , nommant  $\theta$  l'angle  $u^{IV} - u^{III}$  dans le tems d'une conjonction quelconque de ce satellite , on aura après  $n$  révolutions ,  $u^{IV} - u^{III} = \theta - n \frac{828331}{1447507} 360^\circ$  , &  $2(u^{IV} - u^{III}) = 2\theta - n \frac{1656662}{1447507} 360^\circ$  , d'où  $\sin. 2(u^{IV} - u^{III}) = \sin. (2\theta - n \frac{209155}{1447507} 360^\circ)$  ; par conséquent la période de cette équation ne sera que de  $\frac{1447507}{209155}$  révolutions , c'est-à-dire , de  $6,920$  révolutions , ce qui fait  $49^h 14^h$  ,  $12'$  à-peu-près. Ne seroit-ce point là la source de ces inégalités qu'on observe dans les conjonctions du troisième satellite , & qui font des sauts considérables d'une conjonction à l'autre ? c'est une vue que nous proposons aux Astronomes qui s'occupent de la théorie des satellites.

## L X X I V.

Il ne resteroit plus qu'à examiner les équations des conjonctions du quatrième satellite , contenues dans la formule de l'article LVIII : mais ayant déjà trouvé

$$C^I = 0,00002417^{\mathcal{W}} \text{ , \& } \left. \begin{matrix} C^I \\ C^{III} \end{matrix} \right\} < 0,000111^{\mathcal{W}} \text{ (articles$$

DES SATELLITES DE JUPITER. . . 83  
 LXIII & LXVIII), on verra aisément que les coefficients de ces équations ne s'étendent point au-delà d'un petit nombre de secondes; ce qui est trop peu de chose pour qu'on doive en tenir compte dans le mouvement de ce satellite, sur-tout vu l'imperfection qui regne encore dans les tables de Jupiter.

## CHAPITRE IV.

*Suite du calcul des perturbations des Satellites de Jupiter.*

### L X X V.

AYANT trouvé les premières valeurs de  $x, y, z$  (article XXXVI & suivans), on reprendra les équations de l'article XXXII; & après y avoir mis au lieu de  $X, Y, Z$  leurs expressions (article XXX & suivans), sans négliger les termes de l'ordre de  $n$ , on substituera dans tous les termes de cet ordre les valeurs trouvées de  $x, y, z$ , & l'on aura de nouvelles équations en  $x, y, z$  plus exactes que celles de l'article XXXV, & qui s'intégreront encore par la même méthode.

### L X X V I.

Soit pour le premier satellite, (ces formules s'appliqueront également aux trois autres, suivant les remarques des articles IX & XIII).

$$Z^I = g^I - 2\mu^I H^I - \frac{\chi^{II}}{1+n\chi^I} \Upsilon(a^I, a^{II}) - \frac{\chi^{III}}{1+n\chi^I} \Upsilon(a^I, a^{III}) \\ - \frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^I} \Upsilon(a^I, a^{IV}) - \frac{1}{2} \frac{K^I}{1+n\chi^I} + \frac{1}{5} \frac{x^I}{1+n\chi^I};$$

L 2

$$M^{12} = 3\mu^{12} - 2f^1 - nf^1 (\chi^{II} \overset{\vee}{\Pi}(a^1, a^{II}) + \chi^{III} \overset{\vee}{\Pi}(a^1, a^{III})) \\ + \chi^{IV} \overset{\vee}{\Pi}(a^1, a^{IV}) + \frac{1}{2} K^1 + \frac{4}{5} x^1;$$

$$N^{12} = \mu^{12} + nf^1 (\chi^{II} \overset{\sim}{\Gamma}(a^1, a^{II}) + \chi^{III} \overset{\sim}{\Gamma}(a^1, a^{III})) \\ + \chi^{IV} \overset{\sim}{\Gamma}(a^1, a^{IV}) + \frac{1}{2} K^1 + \frac{3}{5} x^1) 2n\mu^1 f^1 H^1.$$

Supposons de plus

$$\theta^1 = - \frac{\chi^{II}}{1+n\chi^1} (\Xi_1(a^1, a^{II}) \text{ cof. } (\mu^{II} - \mu^1) \varepsilon \\ + \Xi_2(a^1, a^{II}) \text{ cof. } 2(\mu^{II} - \mu^1) \varepsilon + \&c.) \\ - \frac{\chi^{III}}{1+n\chi^1} (\Xi_1(a^1, a^{III}) \text{ cof. } (\mu^{III} - \mu^1) \varepsilon \\ + \Xi_2(a^1, a^{III}) \text{ cof. } 2(\mu^{III} - \mu^1) \varepsilon + \&c.) \\ - \frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^1} (\Xi_1(a^1, a^{IV}) \text{ cof. } (\mu^{IV} - \mu^1) \varepsilon \\ + \Xi_2(a^1, a^{IV}) \text{ cof. } 2(\mu^{IV} - \mu^1) \varepsilon + \&c.) \\ - \frac{K^1}{1+n\chi^1} (\beta^1 \text{ cof. } 2(m - \mu^1) \varepsilon, (\text{art. XXXVI})).$$

$$\vartheta^1 = \frac{\chi^{II}}{1+n\chi^1} (\Phi_1(a^1, a^{II}) \text{ fin. } (\mu^{II} - \mu^1) \varepsilon \\ + \Phi_2(a^1, a^{II}) \text{ fin. } 2(\mu^{II} - \mu^1) \varepsilon + \&c.) \\ + \frac{\chi^{III}}{1+n\chi^1} (\Phi_1(a^1, a^{III}) \text{ fin. } (\mu^{III} - \mu^1) \varepsilon \\ + \Phi_2(a^1, a^{III}) \text{ fin. } 2(\mu^{III} - \mu^1) \varepsilon + \&c.) \\ + \frac{\chi^{IV}}{1+n\chi^1} (\Phi_1(a^1, a^{IV}) \text{ fin. } (\mu^{IV} - \mu^1) \varepsilon \\ + \Phi_2(a^1, a^{IV}) \text{ fin. } 2(\mu^{IV} - \mu^1) \varepsilon + \&c.) \\ + \frac{K^1}{1+n\chi^1} \gamma^1 \text{ fin. } 2(m - \mu^1) \varepsilon, (\text{art. XXXVIII}), \&$$

faisons  $x^1 = \theta^1 + x^{.1}$ ,  $y^1 = \vartheta^1 + y^{.1}$ , (nous verrons bientôt la raison de ces substitutions). Les équations de l'article XXXII se changeront en celles-ci, dans lesquelles nous avons négligé les termes affectés de  $n^2$ .



$$\frac{d^2 x^I}{dt^2} + M^I x^I + f^I L^I - n(6\mu^{I_2} - 3f^I x^{I_2} - \frac{1}{2} n f^I z^{I_2} - n f^{I_2} Y^{I_2}$$

$$- n \chi^{II} f^I x^I (\check{\Pi}^I(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{II} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II})) \cos. (\mu^{II} - \mu^I) t$$

$$- n \chi^{II} f^I x^I (\check{\Pi}^2(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{II} - \mu^I)} \check{\Gamma}^2(a^I, a^{II})) \cos. 2(\mu^{II} - \mu^I) t$$

&c.

$$- n \chi^{III} f^I x^I (\check{\Pi}^I(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{III} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III})) \cos. (\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$- n \chi^{III} f^I x^I (\check{\Pi}^2(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{III} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{III})) \cos. 2(\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$- n \chi^{IV} f^I x^I (\check{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{IV} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV})) \cos. (\mu^{IV} - \mu^I) t$$

$$- n \chi^{IV} f^I x^I (\check{\Pi}^2(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{IV} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{IV})) \cos. 2(\mu^{IV} - \mu^I) t$$

&c.

$$- n K^I f^I x^I (\frac{1}{2} - \frac{3\mu^I}{2(m - \mu^I)}) \cos. 2(m - \mu^I) t$$

$$- n \chi^{II} f^I x^{II} (\check{\Psi}^I(a^I, a^{II}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{II}) \cos. (\mu^{II} - \mu^I) t + \check{\Psi}^2(a^I, a^{II}) \cos. 2(\mu^{II} - \mu^I) t \&c.)$$

$$- n \chi^{III} f^I x^{III} (\check{\Psi}^I(a^I, a^{III}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{III}) \cos. (\mu^{III} - \mu^I) t + \check{\Psi}^2(a^I, a^{III}) \cos. 2(\mu^{III} - \mu^I) t \&c.)$$

$$- n \chi^{IV} f^I x^{IV} (\check{\Psi}^I(a^I, a^{IV}) + \check{\Psi}^I(a^I, a^{IV}) \cos. (\mu^{IV} - \mu^I) t + \check{\Psi}^2(a^I, a^{IV}) \cos. 2(\mu^{IV} - \mu^I) t \&c.)$$

$$+ n K^I f^I \zeta (\frac{1}{2} + \frac{2}{2} \cos. 2(m - \mu^I) t)$$

$$+ n \chi^{II} f^I (y^{II} - y^I) (\check{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \sin. (\mu^{II} - \mu^I) t + 2\check{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) \sin. 2(\mu^{II} - \mu^I) t \&c.)$$

$$+ n \chi^{III} f^I (y^{III} - y^I) (\check{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \sin. (\mu^{III} - \mu^I) t + 2\check{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \sin. 2(\mu^{III} - \mu^I) t \&c.)$$

$$+ n \chi^{IV} f^I (y^{IV} - y^I) (\check{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \sin. (\mu^{IV} - \mu^I) t + 2\check{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) \sin. 2(\mu^{IV} - \mu^I) t \&c.)$$

$$+ n K^I f^I (v - y^I) \times 3 \sin. 2(m - \mu^I) t$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2n\chi^{\text{II}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int x^{\text{I}} (\tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + \tilde{\Pi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{III}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int x^{\text{I}} \tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + \tilde{\Pi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{IV}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int x^{\text{I}} (\tilde{\Pi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + \tilde{\Pi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &- 2nK^{\text{I}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int x^{\text{I}} \times 3 \sin.2(m - \mu^{\text{I}}) t dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{II}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int x^{\text{II}} (\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + \hat{\Psi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \sin.2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{III}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int x^{\text{III}} (\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + \hat{\Psi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \sin.2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{IV}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int x^{\text{IV}} (\hat{\Psi}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + \hat{\Psi}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \sin.2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &+ 2nK^{\text{I}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int \xi \times \frac{2}{2} \sin.2(m - \mu^{\text{I}}) t dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{II}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int (y^{\text{II}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + 2\hat{\Gamma}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \cos.2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{III}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int (y^{\text{III}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + 2\hat{\Gamma}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \cos.2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &+ 2n\chi^{\text{IV}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int (y^{\text{IV}} - y^{\text{I}}) (\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 &\quad + 2\hat{\Gamma}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \cos.2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \&c.) dt \\
 &- 2nK^{\text{I}} f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \int (J - y^{\text{I}}) \times 3 \cos.2(m - \mu^{\text{I}}) t dt \leftarrow 0 \dots \dots (G)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy^{\text{I}}}{du} + 2\mu^{\text{I}} x^{\text{I}} - f^{\text{I}} H^{\text{I}} - 3n\mu x^{\text{I}2}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2n\chi^{\text{II}} f^{\text{I}} x^{\text{I}} \left( \frac{\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}} \cos.(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + \frac{\hat{\Gamma}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})}{2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})} \cos.2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \&c. \right) \\
 &+ 2n\chi^{\text{III}} f^{\text{I}} x^{\text{I}} \left( \frac{\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}})}{\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}} \cos.(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t + \frac{\hat{\Gamma}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}})}{2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})} \cos.2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \&c. \right) \\
 &+ 2n\chi^{\text{IV}} f^{\text{I}} x^{\text{I}} \left( \frac{\hat{\Gamma}^{\text{I}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}})}{\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}} \cos.(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t + \frac{\hat{\Gamma}^{\text{2}}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}})}{2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}})} \cos.2(\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \&c. \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2n K^I f^I x^I \times \frac{3}{4(m-\mu^I)} \text{cosf. } 2(m-\mu^I) t \\
 & + n\chi^{II} f^I \int x^I (\tilde{\Pi}^I(a^I, a^{II}) \text{sin.} (\mu^{II}-\mu^I) t \\
 & \quad + \tilde{\Pi}^2(a^I, a^{II}) \text{sin.} 2(\mu^{II}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + n\chi^{III} f^I \int x^I (\tilde{\Pi}^I(a^I, a^{III}) \text{sin.} (\mu^{III}-\mu^I) t \\
 & \quad + \tilde{\Pi}^2(a^I, a^{III}) \text{sin.} 2(\mu^{III}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + n\chi^{IV} f^I \int x^I (\tilde{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) \text{sin.} (\mu^{IV}-\mu^I) t \\
 & \quad + \tilde{\Pi}^2(a^I, a^{IV}) \text{sin.} 2(\mu^{IV}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + nK^I f^I \int x^I \times 3 \text{sin.} 2(m-\mu^I) t dt \\
 & + n\chi^{II} f^I \int x^{II} (\hat{\Psi}^I(a^I, a^{II}) \text{sin.} (\mu^{II}-\mu^I) t \\
 & \quad + \hat{\Psi}^2(a^I, a^{II}) \text{sin.} 2(\mu^{II}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + n\chi^{III} f^I \int x^{III} (\hat{\Psi}^I(a^I, a^{III}) \text{sin.} (\mu^{III}-\mu^I) t \\
 & \quad + \hat{\Psi}^2(a^I, a^{III}) \text{sin.} 2(\mu^{III}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + n\chi^{IV} f^I \int x^{IV} (\hat{\Psi}^I(a^I, a^{IV}) \text{sin.} (\mu^{IV}-\mu^I) t \\
 & \quad + \hat{\Psi}^2(a^I, a^{IV}) \text{sin.} 2(\mu^{IV}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + nK^I f^I \int \xi \times \frac{2}{2} \text{sin.} 2(m-\mu^I) t dt \\
 & + n\chi^{II} f^I \int (y^{II}-y^I) (\hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \text{cosf.} (\mu^{II}-\mu^I) t \\
 & \quad + 2\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) \text{cosf.} 2(\mu^{II}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + n\chi^{III} f^I \int (y^{III}-y^I) (\hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \text{cosf.} (\mu^{III}-\mu^I) t \\
 & \quad + 2\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \text{cosf.} 2(\mu^{III}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & + n\chi^{IV} f^I \int (y^{IV}-y^I) (\hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \text{cosf.} (\mu^{IV}-\mu^I) t \\
 & \quad + 2\hat{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) \text{cosf.} 2(\mu^{IV}-\mu^I) t \&c.) dt \\
 & - K^I f^I \int (J-y^I) \times 3 \text{cosf.} 2(m-\mu^I) t = 0 \dots \dots (H) \\
 & \frac{d^2 \chi^I}{dt^2} + N^{12} - 4n\mu^{12} z^I x^I + 2n \frac{dx^I dz^I}{dt^2} \\
 & + n\chi^{II} f^I z^I (\tilde{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{II}-\mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \text{cosf.} (\mu^{II}-\mu^I) t \\
 & + n\chi^{II} f^I z^I (\tilde{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{II}-\mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) 2 \text{cosf.} (\mu^{II}-\mu^I) t \&c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + n\chi^{III} f^I z^I (\tilde{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{III} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^I) t \\
 & + n\chi^{III} f^I z^I (\tilde{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{III} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^I) t \&c. \\
 & + n\chi^{IV} f^I z^I (\tilde{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{\mu^{IV} - \mu^I} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^I) t \\
 & + n\chi^{IV} f^I z^I (\tilde{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) + \frac{2\mu^I}{2(\mu^{IV} - \mu^I)} \hat{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^I) t \&c. \\
 & + nK^I f^I z^I \left( \frac{1}{2} - \frac{3\mu^I}{2(m - \mu^I)} \right) \cos.2(m - \mu^I) t \\
 & - n\chi^{II} f^I z^{II} \left( \overset{\circ}{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) + \overset{\circ}{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \cos.(\mu^{II} - \mu^I) t \right. \\
 & \quad \left. + \overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{II}) \cos.2(\mu^{II} - \mu^I) t \&c. \right) ; \\
 & - n\chi^{III} f^I z^{III} \left( \overset{\circ}{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) + \overset{\circ}{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \cos.(\mu^{III} - \mu^I) t \right. \\
 & \quad \left. + \overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{III}) \cos.2(\mu^{III} - \mu^I) t \&c. \right) \\
 & - n\chi^{IV} f^I z^{IV} \left( \overset{\circ}{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) + \overset{\circ}{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \cos.(\mu^{IV} - \mu^I) t \right. \\
 & \quad \left. + \overset{\circ}{\Gamma}^2(a^I, a^{IV}) \cos.2(\mu^{IV} - \mu^I) t \&c. \right) = 0 \dots\dots (K)
 \end{aligned}$$

L X X V I I.

Si on rejette dans les équations (G) & (H) tous les termes affectés de  $n$ , comme aussi tous les termes constans qui doivent être nuls par les conditions de l'article XXXII, on a  $\frac{d^2x}{dt^2} + M^I x^I = 0$ , &  $\frac{dy^I}{dt} + 2\mu^I x^I = 0$ ,

D'où l'on tire :

$$x^I = \varepsilon^I \cos.(M^I t + \omega^I), \text{ \& } y^I = -\frac{2\mu^I}{M^I} \varepsilon^I \sin.(M^I t + \omega^I)$$

ce qui donne pour  $x^I$  &  $y^I$  les mêmes valeurs que nous avons déjà trouvées (art. LXXV).

La quantité  $-\frac{2\mu^I}{M^I} \varepsilon^I \sin.(M^I t + \omega^I)$  n'est que le premier terme de l'équation du centre calculée dans une ellipse mobile (art. XXXVIII) ; si on vouloit avoir le terme suivant

fuyant, c'est-à-dire celui qui contient le carré de l'excentricité, il n'y auroit qu'à mettre au lieu de  $x^I$  dans les termes  $-n(6\mu^{I2} - 3f^I)x^{I2}$ , &  $-3n\mu^I x^{I2}$  des équations (G), (H), la valeur de  $x^I$  qu'on vient de trouver.

On auroit donc, en négligeant toujours les termes constans;

$$\frac{d^2 x^I}{dt^2} + M^{I2} x^I - n(6\mu^{I2} - 3f^I) \frac{\varepsilon^{I2}}{2} \cos. 2(M^I t + \omega^I) = 0, \text{ \&}$$

$$\frac{dy^I}{dt} + 2\mu^I x^I - 3n\mu^I \frac{\varepsilon^{I2}}{2} \cos. 2(M^I t + \omega^I) = 0.$$

La première de ces équations donne, (art. XXXIV)

$$x^I = \varepsilon^I \cos. (M^I t + \omega^I) - n(6\mu^{I2} - 3f^I) \frac{\varepsilon^{I2}}{2} \times \frac{\cos. 2(M^I t + \omega^I)}{3M^{I2}},$$

c'est-à-dire, en mettant au lieu de  $f^I$ , & de  $M^{I2}$  leurs valeurs approchées  $\mu^{I2}$  (art. XLV)

$$x^I = \varepsilon^I \cos. (M^I t + \omega^I) - n \frac{\varepsilon^{I2}}{2} \cos. 2(M^I t + \omega^I).$$

Donc substituant cette valeur de  $x^I$  dans la seconde, & l'intégrant ensuite, on aura

$$y^I = -\frac{2\mu^I}{M^I} \varepsilon^I \sin. (M^I t + \omega^I) + n \frac{5\mu^I}{4M^I} \varepsilon^{I2} \sin. 2(M^I t + \omega^I).$$

Ce qui s'accorde avec ce que l'on fait d'ailleurs; mais nous verrons plus bas qu'il y a dans l'équation (G) d'autres termes qui influent considérablement sur l'équation du centre, & qui empêchent qu'on ne puisse regarder l'expression précédente comme assez exacte, même dans le cas où l'on néglige les quantités de l'ordre  $n$ .

Il en faut dire autant de l'expression de la latitude que nous avons déjà tronvée (art. XL); mais avant que d'entrer dans cette discussion, il est bon de voir ce que donnent les nouvelles valeurs de  $M$  & de  $N$  (art. préc.) pour le mouvement des apfides & des nœuds.

## §. I.

*Premières valeurs du mouvement des apsidés & des nœuds des Satellites.*

## L X X V I I I.

‘ Nous avons trouvé (art. LXXVI)

$$M^{12} = 3\mu^{12} - 2f^1 - nf^1(\chi^{II}\check{\Pi}(a^I, a^{II}) + \chi^{III}\check{\Pi}(a^I, a^{III}) + \chi^{IV}\check{\Pi}(a^I, a^{IV}) + \frac{1}{2}K^I + \frac{4}{5}x^I);$$

or l'on a généralement (art. XXIX)  $1 - \frac{\mu^2}{f} = ng$ , d'où  $f = \frac{\mu^2}{1-ng} = \mu^{12}(1+ng^1)$ ,

& par conséquent  $f^1\mu^{12}(1+ng^1)$ ; donc négligeant les termes affectés de  $n$ , on aura:

$$M^{12} = \mu^{12}(1 - 2ng^1 - n\chi^{II}\check{\Pi}(a^I, a^{II}) - n\chi^{III}\check{\Pi}(a^I, a^{III}) - n\chi^{IV}\check{\Pi}(a^I, a^{IV}) - \frac{1}{2}K^I - \frac{4}{5}nx^I).$$

Maintenant on a par l'équation  $L^I = g^I - \&c.$  de l'article LXXV,

$$g^I = L^I + 2\mu^I H^I + \frac{1}{1+n\chi^I}(\chi^{II}\check{\Gamma}(a^I, a^{II}) + \chi^{III}(\check{\Gamma}(a^I, a^{III}) + \chi^{IV}(a^I, a^{IV}) + \frac{1}{2}K^I - \frac{1}{5}x^I));$$

donc

$$M^{12} = \mu^{12}(1 - n\chi^{II}(\check{\Pi}(a^I, a^{II}) + 2\check{\Gamma}(a^I, a^{II})) - n\chi^{III}(\check{\Pi}(a^I, a^{III}) + 2\check{\Gamma}(a^I, a^{III})) - n\chi^{IV}(\check{\Pi}(a^I, a^{IV}) + 2\check{\Gamma}(a^I, a^{IV})) - \frac{1}{2}nK^I - \frac{2}{5}nx^I - 2nL^I - 4n\mu^I H^I),$$

les quantités  $L^I$ ,  $H^I$  devant être déterminées par la condition que les équations (G), (H) ne renferment aucun terme constant.

Pour remplir ces deux conditions, on supposera que  $(x^{12})$ , soit la quantité constante qui entre dans la valeur de  $x^{12}$ ; (car la valeur de  $x$  étant composée de *sinus* & de *cosinus*, il est évident que le carré  $x^{12}$  contiendra

nécessairement des termes constans, quoique  $x^I$  n'en contiennent point; de même soient  $(z^{I^1})$ ,  $(Y^{I^1})$  les quantités constantes qui entreront dans les valeurs de  $z^{I^1}$ ,  $Y^{I^1}$ ; on aura donc

$$f^I L - n(6\mu^{I^2} - 3f^I)(x^{I^2}) - \frac{1}{2}nf^I(z^{I^2}) - nf^{I^2}(Y^{I^2}) = 0,$$

$$\& -f^I H^I - 3n\mu^I(x^{I^1}) = 0:$$

d'où l'on tirera  $L^I$ , &  $H^I$ , qui seront de l'ordre de  $n$ ; c'est pourquoi on peut négliger dans la valeur de  $M^{I^2}$  les quantités  $2nL^I$ , &  $4n\mu^I H^I$ , qui seroient de l'ordre  $n^2$ .

## L X · X I X.

Donc, si on fait pour abrégér

$$\mathcal{C}^I = \chi^{II}(\check{\Pi}(a^I, a^{II}) + 2\check{\Gamma}(a^I, a^{II})) + \chi^{III}(\check{\Pi}(a^I, a^{III}) + 2\check{\Gamma}(a^I, a^{III})) + \chi^{IV}(\check{\Pi}(a^I, a^{IV}) + 2\check{\Gamma}(a^I, a^{IV})) + \frac{1}{2}K^I + \frac{2}{5}x^I,$$

& de même (art. IX).

$$\mathcal{C}^{II} = \chi^I(\check{\Pi}(a^{II}, a^I) + 2\check{\Gamma}(a^{II}, a^I)) + \chi^{III}(\check{\Pi}(a^{II}, a^{III}) + 2\check{\Gamma}(a^{II}, a^{III})) + \chi^{IV}(\check{\Pi}(a^{II}, a^{IV}) + 2\check{\Gamma}(a^{II}, a^{IV})) + \frac{1}{2}K^{II} + \frac{2}{5}x^{II}$$

$$\mathcal{C}^{III} = \chi^I(\check{\Pi}(a^{III}, a^I) + 2\check{\Gamma}(a^{III}, a^I)) + \chi^{IV}(\check{\Pi}(a^{III}, a^{IV}) + 2\check{\Gamma}(a^{III}, a^{IV})) + \chi^{II}(\check{\Pi}(a^{III}, a^{II}) + 2\check{\Gamma}(a^{III}, a^{II})) + \chi^{IV}(\check{\Pi}(a^{III}, a^{IV}) + 2\check{\Gamma}(a^{III}, a^{IV})) + \frac{1}{2}K^{III} + \frac{2}{5}x^{III},$$

$$\mathcal{C}^{IV} = \chi^I(\check{\Pi}(a^{IV}, a^I) + 2\check{\Gamma}(a^{IV}, a^I)) + \chi^{II}(\check{\Pi}(a^{IV}, a^{II}) + 2\check{\Gamma}(a^{IV}, a^{II})) + \chi^{III}(\check{\Pi}(a^{IV}, a^{III}) + 2\check{\Gamma}(a^{IV}, a^{III})) + \frac{1}{2}K^{IV} + \frac{2}{5}x^{IV}.$$

On aura

$$M^{I^2} = \mu^{I^2}(1 - n\mathcal{C}^I), \quad M^I = \mu^I(1 - \frac{1}{2}n\mathcal{C}^I)$$

$M^{II^2} = \mu^{II^2}(1 - n\mathcal{C}^{II})$ ;  $M^{II} = \mu^{II}(1 - \frac{1}{2}n\mathcal{C}^{II})$  & ainsi des autres.

Or le mouvement de la ligne des apsidés étant au mouvement moyen comme  $\mu - M$  à  $\mu$  (art. XXXVII), cette

ligne avancera pendant une révolution de  $\frac{n^6}{2} 360^\circ$ , d'où l'on connoîtra le mouvement des apfides de tous les fatellites.

## L X X X.

Pour évaluer en nombres les quantités  $\zeta$ , il faut commencer par chercher les valeurs des quantités  $\prod (a^I, a^{II})$  &c. lesquelles dépendent des quantités  $\Lambda (a^I, a^{II})$  &c. c'est-à-dire, des coeficiens de la serie qui représente la quantité radicale  $(1 - 2q\theta + q^2)^{-\frac{1}{2}}$ , (art. XX & suiv.)

Soit donc, comme dans cet article,

$$(1 - 2q \cos.\theta + q^2)^{-\frac{1}{2}} = (A) + (B)\cos.\theta + (C)\cos.2\theta + \&c.$$

on aura, en faisant  $q = \frac{a^I}{a^{II}}$ , &  $\theta = \phi^{II} - \phi^I$ ,

$$(a^{II} - 2a^I a^{II} \cos.(\phi^{II} - \phi^I) + a^{II^2})^{-\frac{1}{2}} = a^{II-s} ((A) + (B)\cos.(\phi^{II} - \phi^I) + (C)\cos.2(\phi^{II} - \phi^I) + \&c.);$$

donc (art. XXI),

$$\Lambda(a^I, a^{II}) = a^{II-s} (A), \Lambda_1(a^I, a^{II}) = a^{II-s} (B) \&c.$$

De même en faisant  $q = \frac{a^I}{a^{III}}$ ,  $= \frac{a^{II}}{a^{III}}$ , &c. on aura

$$\Lambda(a^I, a^{III}) = a^{III-s} (A), \Lambda_1(a^I, a^{III}) = a^{III-s} (B) \&c.$$

& ainsi de suite; où l'on remarquera que les quantités réciproques  $\Lambda(a^{II}, a^I)$ ,  $\Lambda(a^{III}, a^I)$  &c. sont les mêmes que les quantités  $\Lambda(a^I, a^{II})$ ,  $\Lambda(a^I, a^{III})$  &c. (art. XLIII);

Cela posé, on trouvera (art. XXII.)  $q$  étant  $= \frac{a^I}{a^{II}}$

$$\prod(a^I, a^{II}) = \frac{q(B) - 2q^2(A)}{2a^{II}}$$

$$\prod_1(a^I, a^{II}) = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2a^{II}}$$

$$\prod_2(a^I, a^{II}) = \frac{q(D) - 2q^2(C) + q(B)}{2a^{II}} \&c.$$

& de là, en faisant pour abrégér



$$P = \frac{q(B) - q^2(A)}{2}$$

$$P_1 = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2}$$

$$P_2 = \frac{q(D) - q^2(C) + q(B)}{2}$$

on aura par l'art. XXIV,

$$\checkmark \Pi(a^I, a^{II}) = 3 \frac{q^2 P_1 - 2q^3 P}{2} - q^3 A$$

$$\checkmark \Pi^I(a^I, a^{II}) = 3 \frac{q^2 P_2 - 2q^3 P_1 + 2q^2 P}{2} - q^3 B$$

$$\checkmark \Pi^2(a^I, a^{II}) = 3 \frac{q^2 P_3 - 2q^3 P_2 + q^2 P_1}{2} - q^3 C \text{ \&c.}$$

On trouvera des expressions semblables pour les fonctions  $\checkmark$  de  $(a^I, a^{III})$ ,  $(a^{II}, a^{III})$  &c. en faisant  $q = \frac{a^I}{a^{III}}$ ,  $= \frac{a^{II}}{a^{III}}$  &c.

De la même manière on trouvera que l'on a,  $q$  étant encore  $= \frac{a^I}{a^{II}}$ ,

$$\Pi(a^{II}, a^I) = \frac{q(B) - 2(A)}{2a^{II3}}$$

$$\Pi^I(a^{II}, a^I) = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2a^{II2}}$$

$$\Pi^2(a^{II}, a^I) = \frac{q(D) - 2(C) + q(B)}{2a^{II3}} \text{ \&c.}$$

d'où l'on tire, en faisant

$$Q = \frac{q(B) - 2(A)}{2}$$

$$Q_1 = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2}$$

$$Q_2 = \frac{q(D) - 2(C) + q(B)}{2} \text{ \&c.}$$

$$\checkmark \Pi(a^{II}, a^I) = 3 \frac{qQ_1 - 2Q}{2} - A$$

$$\checkmark \Pi^I(a^{II}, a^I) = 3 \frac{qQ_2 - 2Q_1 + 2qQ}{2} - B$$



	$(a^I, a^{II})$	$(a^I, a^{III})$	$(a^I, a^{IV})$	$(a^{II}, a^{III})$	$(a^{II}, a^{IV})$	$(a^{III}, a^{IV})$
$\checkmark \Pi$	0,534	0,050	0,008	0,514	0,036	0,389
	$(a^{II}, a^I)$	$(a^{III}, a^I)$	$(a^{IV}, a^I)$	$(a^{III}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{III})$
$\checkmark \Pi$	4,564	2,579	2,128	4,401	2,454	3,837

## L X X X I I.

A l'égard des valeurs de  $\checkmark \Gamma (a^I, a^{II})$  &c. nous les avons données ci-dessus (art. XLVII); aussi bien que celles  $nx^I$ ,  $nx^{II}$  &c. (art. XLIX; & pour ce qui est des quantités  $nx = \frac{A^2}{a^2}$  (art. XXIX) on aura, en faisant  $A$ , demi-diametre de Jupiter,  $= I$ , & mettant pour  $a^I, a^{II}$  &c. leur valeurs (art XLVI), on aura dis-je :

$$nx^I = 0,03110..v, \quad nx^{II} = 0,01234..v, \quad nx^{III} = 0,00484..v$$

$$nx^{IV} = 0,00156...v.$$

la quantité  $v$  dépendant de la figure, & de la constitution intérieure de Jupiter, comme on l'a vu (art. XVI).

## L X X X I I I.

Toutes ces substitutions faites, on aura, après avoir remis au lieu de  $nx^I, nx^{II}$  &c. les quantités  $\frac{C^I}{T^I}, \frac{C^{II}}{T^{II}}$  &c.

$$nc^I = 0,982 \frac{C^{II}}{T^I} + 0,124 \frac{C^{III}}{T^I} + 0,022 \frac{C^{IV}}{T^I} + 0,012440v$$

$$+ 0,0000003,$$

$$nc^{II} = 1,582 \frac{C^I}{T^I} + 0,940 \frac{C^{III}}{T^I} + 0,090 \frac{C^{IV}}{T^I} + 0,004936v$$

$$+ 0,0000010,$$

$$n^{\text{CIII}} = 0,307 \frac{\text{C}^{\text{I}}}{\text{P}} + 1,467 \frac{\text{C}^{\text{II}}}{\text{P}} + 0,673 \frac{\text{C}^{\text{IV}}}{\text{P}} + 0,001936 \\ + 0,0000040.$$

$$n^{\text{CIV}} = 0,050 \frac{\text{C}^{\text{I}}}{\text{P}} + 0,260 \frac{\text{C}^{\text{II}}}{\text{P}} + 1,139 \frac{\text{C}^{\text{III}}}{\text{P}} + 0,000624 \\ + 0,0000222.$$

## L X X X I V.

Passons maintenant aux formules qui donnent le mouvement des nœuds, & nous trouvons d'abord pour le premier satellite (art. LXXV).

$$N^{\text{I}} = \mu^{\text{I}} + n f^{\text{I}} (\chi^{\text{II}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \chi^{\text{III}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) + \chi^{\text{IV}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) + \frac{1}{2} K^{\text{I}} + \frac{1}{3} x^{\text{I}}) + 2n\mu^{\text{I}} f^{\text{I}} H^{\text{I}};$$

c'est-à-dire, en mettant  $\mu^{\text{I}}$  au lieu de  $f^{\text{I}}$ , & négligeant le terme  $2n\mu^{\text{I}} f^{\text{I}} H^{\text{I}}$  qui est du second ordre, à cause que  $H^{\text{I}}$  est déjà de l'ordre de  $n$  (art. LXXVIII).

$$N^{\text{II}} = \mu^{\text{I}} (1 + n\chi^{\text{II}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + n\chi^{\text{III}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \\ + n\chi^{\text{IV}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) + \frac{1}{2} nK^{\text{I}} + \frac{1}{3} nx^{\text{I}});$$

donc si on fait pour abrégé,

$$\pi^{\text{I}} = \chi^{\text{II}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) + \chi^{\text{III}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) + \chi^{\text{IV}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) + \frac{1}{2} K^{\text{I}} + \frac{1}{3} x^{\text{I}}$$

de même

$$\pi^{\text{II}} = \chi^{\text{I}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) + \chi^{\text{III}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) + \chi^{\text{IV}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) \\ + \frac{1}{2} K^{\text{II}} + \frac{1}{3} x^{\text{II}}$$

$$\pi^{\text{III}} = \chi^{\text{I}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{III}}, a^{\text{I}}) + \chi^{\text{II}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{III}}, a^{\text{II}}) + \chi^{\text{III}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{III}}, a^{\text{IV}}) \\ + \frac{1}{2} K^{\text{III}} + \frac{1}{3} x^{\text{III}}$$

$$\pi^{\text{IV}} = \chi^{\text{I}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{IV}}, a^{\text{I}}) + \chi^{\text{II}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{IV}}, a^{\text{II}}) + \chi^{\text{III}} \tilde{\Gamma}(a^{\text{IV}}, a^{\text{III}}) \\ + \frac{1}{2} K^{\text{IV}} + \frac{1}{3} x^{\text{IV}}.$$

On aura pour tous les quatre satellites

$$N^{\text{II}} = \mu^{\text{I}} (1 + n\pi^{\text{I}}), \quad N^{\text{I}} = \mu^{\text{I}} (1 + \frac{1}{2} n\pi^{\text{I}})$$

$$N^{\text{III}} = \mu^{\text{II}} (1 + n\pi^{\text{II}}), \quad N^{\text{II}} = \mu^{\text{II}} (1 + \frac{1}{2} n\pi^{\text{II}}) \text{ \&c.}$$

Pour

Pour tirer de-là le mouvement des nœuds, on remarquera que  $(\mu - N) t - \eta$  exprime en général la longitude moyenne du nœud ascendant (art. XLI); d'où il suit que le mouvement de la ligne des nœuds sera au mouvement moyen, comme  $\mu - N$  à  $\mu$ , c'est-à-dire, comme  $-\frac{n\pi}{2}$  à 1; par conséquent les nœuds reculeront à chaque révolution de  $\frac{1}{2} n\pi \times 360^\circ$ .

L X X X V.

Or, on trouve par l'art. XXXII, en faisant successive-

ment  $q = \frac{a^I}{a^{II}}, = \frac{a^I}{a^{III}} \&c.$

$\tilde{\Gamma}(a^I, a^{II}) = q^3 A + \check{\Gamma}(a^I, a^{II})$

$\tilde{\Gamma}(a^I, a^{III}) = q^3 A + \check{\Gamma}(a^I, a^{III})$

&c. ensuite,

$\tilde{\Gamma}(a^{II}, a^I) = A + \check{\Gamma}(a^{II}, a^I)$

$\tilde{\Gamma}(a^{III}, a^I) = A + \check{\Gamma}(a^{III}, a^I) \&c.$

ce qui donne (art. XLVII)

	$(a^I, a^{II})$	$(a^I, a^{III})$	$(a^I, a^{IV})$	$(a^{II}, a^{III})$	$(a^{II}, a^{IV})$	$(a^{III}, a^{IV})$
$\check{\Gamma}$	0,981	0,126	0,018	0,942	0,087	0,576
	$(a^{II}, a^I)$	$(a^{III}, a^I)$	$(a^{IV}, a^I)$	$(a^{III}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{III})$
$\check{\Gamma}$	1,558	0,320	0,083	1,506	0,245	1,013

L X X X V I.

Donc faisant ces substitutions, & remettant  $\frac{C}{T}$ ,  $\frac{C}{T}$

&c. au lieu de  $n\chi^I, n\chi^{II}, \&c.$  on aura  
*Prix de l'Académie, Tome IX.*

N

$$\begin{aligned}
 n\pi^I &= 0,981 \frac{C^{II}}{T} + 0,126 \frac{C^{III}}{T} + 0,018 \frac{C^{IV}}{T} \\
 &+ 0,018660v + 0,0000003 \\
 n\pi^{II} &= 1,558 \frac{C^I}{T} + 0,942 \frac{C^{III}}{T} + 0,087 \frac{C^{IV}}{T} \\
 &+ 0,007404v + 0,0000010 \\
 n\pi^{III} &= 0,320 \frac{C^I}{T} + 1,506 \frac{C^{II}}{T} + 0,576 \frac{C^{IV}}{T} \\
 &+ 0,002904v + 0,0000040 \\
 n\pi^{IV} &= 0,083 \frac{C^I}{T} + 0,245 \frac{C^{II}}{T} + 1,013 \frac{C^{III}}{T} \\
 &+ 0,000936v + 0,0000222
 \end{aligned}$$

§. 2.

Où l'on montre la nécessité d'avoir égard, dans les calculs de l'équation du centre, & de la latitude, à quelques termes de l'ordre  $n$ , des équations (G), & (K).

L X X X V I I.

Nous avons trouvé (art. LXXVII)  $x^I = \varepsilon^I \cos(M^I t + \omega^I)$ ,  
 &  $y^I = -\frac{2\mu^I}{M^I} \varepsilon^I \sin(M^I t + \omega^I)$ ; on trouvera de même  
 $x^{II} = \varepsilon^{II} \cos(M^{II} t + \omega^{II})$ ,  $y^{II} = -\frac{2\mu^{II}}{M^{II}} \varepsilon^{II} \sin(M^{II} t + \omega^{II})$   
 & ainsi des autres. Cela posé, si on reprend l'équation (G)  
 de l'article LXXVI, & qu'on substitue dans le terme  
 $n\chi^{II} f^I x^{II} \Psi^I (a^I, a^{II}) \cos(\mu^{II} - \mu^I) t$ , au lieu de  $x^{II}$  sa  
 valeur  $x^{II} + \theta^{II}$ , on verra que la quantité  $x^{II} \cos(\mu^{II} - \mu^I) t$   
 renfermera un terme de cette forme  $\cos((M^{II} - \mu^{II}) t$

$+ \mu^I) t + \omega^{II}) = \cos. \left( (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{II}}}{2}) t + \omega^{II} \right)$ , lequel étant

intégré deviendra  $\frac{\cos. \left( (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{II}}}{2}) t + \omega^{II} \right)}{(\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{II}}}{2})^2 - (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^I}}{2})^2}$ ; ainsi le terme

$n \chi^{II} f^I \checkmark \Psi^I(a^I, a^{II}) x^{II} \cos. (\mu^{II} - \mu^I) t$  de l'équation différentielle donnera dans la valeur de  $x^I$  le terme suivant :

$$\frac{\frac{1}{2} n \chi^{II} f^I \checkmark \Psi^I(a^I, a^{II}) \cos. \left( (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{II}}}{2}) t + \omega^{II} \right)}{(\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{II}}}{2})^2 - (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^I}}{2})^2} = \frac{\chi^{II} f^I \checkmark \Psi^I(a^I, a^{II})}{2(\epsilon^I - \epsilon^{II})}$$

$\cos. \left( (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{II}}}{2}) t + \omega^{II} \right)$ , lequel appartient, comme l'on

voit à la première valeur de  $x^I$ . Pareillement le terme

$n \chi^{III} f^I x^{III} \checkmark \Psi^I(a^I, a^{III}) \cos. (\mu^{III} - \mu^I) t$  donnera dans la

valeur de  $x^I$  le terme  $\frac{\chi^{III} f^I \checkmark \Psi^I(a^I, a^{III})}{2(\epsilon^I - \epsilon^{III})} \cos. \left( (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{III}}}{2}) t + \omega^{III} \right)$ ;

& il en fera de même de quelques autres termes de l'équation (G) dont nous parlerons plus bas.

On trouvera de la même manière dans la valeur de  $x^{II}$  les termes  $\frac{\chi^I f^{II} \checkmark \Psi^I(a^{II}, a^I)}{2(\epsilon^{II} - \epsilon^I)} \cos. \left( (\mu^{II} - \frac{n^{\epsilon^I}}{2}) t + \omega^I \right)$ ,

$\frac{\chi^{III} f^{II} \checkmark \Psi^I(a^{II}, a^{III})}{2(\epsilon^{II} - \epsilon^{III})} \cos. \left( (\mu^{II} - \frac{n^{\epsilon^{III}}}{2}) t + \omega^{III} \right)$ ; lesquels étant

de nouveau substitués dans le terme  $n \chi^{II} f^I \checkmark \Psi^I(a^I, a^{II}) x^{II} \cos. (\mu^{II} - \mu^I) t$  de l'équation (G), en donneront deux

autres de cette forme  $\frac{1}{2} n \chi^{II} f^I \checkmark \Psi^I(a^I, a^{II}) \times \frac{\chi^I f^{II} \checkmark \Psi^I(a^{II}, a^I)}{2(\epsilon^{II} - \epsilon^I)}$

$\cos. \left( (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^I}}{2}) t + \omega^I \right)$ ,  $\frac{1}{2} n \chi^{II} f^I \checkmark \Psi^I(a^I, a^{II}) \times \frac{\chi^{III} f^{II} \checkmark \Psi^I(a^{II}, a^{III})}{2(\epsilon^{II} - \epsilon^{III})}$

$\cos. \left( (\mu^I - \frac{n^{\epsilon^{III}}}{2}) t + \omega^{III} \right)$ ; le premier de ces deux termes

produira (à cause de  $\mu^I - \frac{n^{\epsilon^I}}{2} = M$ ) dans la valeur de

$x^I$  un terme qui sera multiplié par l'angle  $t$ , (art. XXXIV); ce qui donnera des arcs de cercle dans le rayon vecteur

de l'orbite; le second y produira le terme  $\frac{x^{II} f^I \Psi_1(a^I, a^{II})}{2(\epsilon^{III} - \epsilon^I)} x$   
 $\frac{x^{III} f^{II} \Psi_1(a^{II}, a^{III})}{2(\epsilon^{III} - \epsilon^{II})} \cos. \left( (\mu^I - \frac{n\epsilon^{III}}{2}) t + \omega^{III} \right)$  qui est de la  
 même forme que celui que nous avons déjà trouvé.

Ces termes en reproduiront d'autres dans la valeur de  $x^{II}$ , de la même forme que ceux que nous venons d'examiner, d'où il naîtra encor dans la valeur de  $x$  d'autres termes de la même espèce que les précédens, & ainsi de suite à l'infini.

## L X X X V I I I.

De-là je tire ces deux conséquences fort importantes; 1.<sup>o</sup> que les termes dont il s'agit, quoique de l'ordre  $n$  dans l'équation différentielle, appartiennent cependant à la première approximation, & ne doivent point être négligés dans les premières valeurs de  $x$ ,  $y$ ; 2.<sup>o</sup> Que la méthode ordinaire d'approximation, suivant laquelle on emploie à chaque nouvelle correction les valeurs trouvées dans la correction précédente est absolument insuffisante pour calculer ces fortes de termes.

On appliquera le même raisonnement à l'équation (K) & on en tirera des conclusions analogues par rapport à la valeur de  $z$ .

## L X X X I X.

Il est donc nécessaire d'avoir une méthode particulière pour intégrer les équations (G), (K); on verra dans le paragraphe suivant comment je m'y suis pris pour arriver à ce but; mais il faut commencer ici par voir quels sont les termes de ces équations, auxquels on doit avoir égard.

Pour peu qu'on examine l'équation (G), on reconnoîtra aisément que les termes dont il s'agit viennent uniquement des termes qui renferment

$$x^{II} \cos. (\mu^{II} - \mu^I) t, x^{III} \cos. (\mu^{III} - \mu^I) t, x^{IV} \cos. (\mu^{IV} - \mu^I) t,$$



$$\begin{aligned}
& y^{\text{II}} \sin. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t, y^{\text{III}} \sin. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t, y^{\text{IV}} \sin. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t, \\
& \int x^{\text{II}} \sin. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t dt, \int x^{\text{III}} \sin. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t dt, \\
& \int x^{\text{IV}} \sin. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t dt, \\
& \int y^{\text{II}} \cos. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t dt, \int y^{\text{III}} \cos. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t dt, \\
& \int y^{\text{IV}} \cos. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t dt,
\end{aligned}$$

en tant qu'on y substitue  $x^{\text{II}}, x^{\text{III}}, x^{\text{IV}}; y^{\text{II}}, y^{\text{III}}, y^{\text{IV}}$ , à la place de  $x^{\text{II}}, x^{\text{III}}, x^{\text{IV}}; y^{\text{II}}, y^{\text{III}}, y^{\text{IV}}$ ; de sorte qu'on pourra réduire cette équation à celle-ci

$$\frac{d^2 x^{\text{I}}}{dt^2} + M^{\text{I}} x^{\text{I}}.$$

$$\begin{aligned}
& - n f^{\text{I}} \chi^{\text{II}} \overset{\vee}{\Psi}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) x^{\text{II}} \cos. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& - n f^{\text{I}} \chi^{\text{III}} \overset{\vee}{\Psi}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) x^{\text{III}} \cos. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& - n f^{\text{I}} \chi^{\text{IV}} \overset{\vee}{\Psi}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) x^{\text{IV}} \cos. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& + n f^{\text{I}} \chi^{\text{II}} \overset{\vee}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) y^{\text{II}} \sin. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& + n f^{\text{I}} \chi^{\text{III}} \overset{\vee}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) y^{\text{III}} \sin. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& + n f^{\text{I}} \chi^{\text{IV}} \overset{\vee}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) y^{\text{IV}} \sin. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& + 2 n f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \chi^{\text{II}} \overset{\wedge}{\Psi}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \int x^{\text{II}} \sin. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t dt \\
& + 2 n f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \chi^{\text{III}} \overset{\wedge}{\Psi}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \int x^{\text{III}} \sin. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t dt \\
& + 2 n f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \chi^{\text{IV}} \overset{\wedge}{\Psi}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \int x^{\text{IV}} \sin. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t dt \\
& + 2 n f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \chi^{\text{II}} \overset{\wedge}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) \int y^{\text{II}} \cos. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t dt \\
& + 2 n f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \chi^{\text{III}} \overset{\wedge}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) \int y^{\text{III}} \cos. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t dt \\
& + 2 n f^{\text{I}} \mu^{\text{I}} \chi^{\text{IV}} \overset{\wedge}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) \int y^{\text{IV}} \cos. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t dt = 0 \dots (L)
\end{aligned}$$

A l'égard de l'équation (K) on trouvera qu'elle se réduit de même à celle-ci :

$$\frac{d^2 z^{\text{I}}}{dt^2} + N^{\text{I}} z^{\text{I}}$$

$$\begin{aligned}
& - n f^{\text{I}} \chi^{\text{II}} \overset{\circ}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) z^{\text{II}} \cos. (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& - n f^{\text{I}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{III}}) z^{\text{III}} \cos. (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
& - n f^{\text{I}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Gamma}^{\text{I}} (a^{\text{I}}, a^{\text{IV}}) z^{\text{IV}} \cos. (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t = 0 \dots (N)
\end{aligned}$$

## X C.

Comme notre dessein n'est pas d'avoir égard dans les valeurs de  $x, y$  &  $z$  aux termes de l'ordre  $n$ , mais seulement à ceux qui ont des coefficients finis; nous pourrons négliger, dans les équations (L) & (N) tous les termes qui se trouveront affectés de  $n^2$ , parce que ces termes seront encore de l'ordre  $n$  après l'intégration.

Or les équations (G) & (H) donnent, en rejetant les termes affectés de  $n$ ,  $\frac{d^2 x^I}{dt^2} + M^{II} x^I = 0$ , &  $\frac{dy^I}{dt} + 2\mu^I x^I = 0$ ; d'où l'on tire  $\frac{dy^I}{dt} - \frac{2\mu^I}{M^{II}} \times \frac{d^2 x^I}{dt^2} = 0$ , & intégrant  $y^I - \frac{2\mu^I}{M^{II}} \times \frac{dx^I}{dt} = 0$ ; il ne faut point ici de constante, ce qui est évident par la nature de nos formules; on trouvera de même  $y^{II} - \frac{2\mu^{II}}{M^{2II}} \times \frac{dx^{II}}{dt} = 0$ ,  $y^{III} - \frac{2\mu^{III}}{M^{III_2}} \times \frac{dx^{III}}{dt} = 0$ , &  $y^{IV} - \frac{2\mu^{IV}}{M^{IV_2}} \times \frac{dx^{IV}}{dt} = 0$ ; donc substituant ces valeurs de  $y^{II}, y^{III}, y^{IV}$  dans l'équation (L) de l'article précédent, on changera les termes

$$\begin{aligned} & n f^I \chi^{II} \overset{\vee}{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) y^{II} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t \\ & + n f^I \chi^{III} \overset{\vee}{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) y^{III} \sin.(\mu^{III} - \mu^I) t \\ & + n f^I \chi^{IV} \overset{\vee}{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) y^{IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t \text{ en ceux-ci} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 n f^I \chi^{II} \frac{\mu^{II}}{M^{II}} \overset{\vee}{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t \\ & + 2 n f^I \chi^{III} \frac{\mu^{III}}{M^{III_2}} \overset{\vee}{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \frac{dx^{III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^I) t \\ & + 2 n f^I \chi^{IV} \frac{\mu^{IV}}{M^{IV_2}} \overset{\vee}{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \frac{dx^{IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t \end{aligned}$$

& les termes:

$$2 n f^I \mu^I \chi^{II} \overset{\wedge}{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) f y^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^I) t dt$$

$$+ 2nf^I \mu^I \chi^{III} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \int y^{III} \cosf.(\mu^{III} - \mu^I) t dt$$

$$+ 2nf^I \mu^I \chi^{IV} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \int y^{IV} \cosf.(\mu^{IV} - \mu^I) t dt$$

en ceux-ci :

$$4nf^I \mu^I \chi^{II} \frac{\mu^{II}}{M^{II_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \int \frac{dx^{II}}{dt} \cosf.(\mu^{II} - \mu^I) t dt$$

$$+ 4nf^I \mu^I \chi^{III} \frac{\mu^{III}}{M^{III_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \int \frac{dx^{III}}{dt} \cosf.(\mu^{III} - \mu^I) t dt$$

$$+ 4nf^I \mu^I \chi^{IV} \frac{\mu^{IV}}{M^{IV_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \int \frac{dx^{IV}}{dt} \cosf.(\mu^{IV} - \mu^I) t dt ;$$

que l'on peut encore changer en ceux-ci :

$$4nf^I \mu^I \chi^{II} \frac{\mu^{II}}{M^{II_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) x^{II} \cosf.(\mu^{II} - \mu^I) t$$

$$+ 4nf^I \mu^I \chi^{III} \frac{\mu^{III}}{M^{III_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) x^{III} \cosf.(\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$+ 4nf^I \mu^I \chi^{IV} \frac{\mu^{IV}}{M^{IV_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) x^{IV} \cosf.(\mu^{IV} - \mu^I) t$$

$$+ 4nf^I \mu^I \chi^{II} \frac{\mu^{II}(\mu^{II} - \mu^I)}{M^{II_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \int x^{II} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t dt$$

$$+ 4nf^I \mu^I \chi^{III} \frac{\mu^{III}(\mu^{III} - \mu^I)}{M^{III_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \int x^{III} \sinf.(\mu^{III} - \mu^I) t dt$$

$$+ 4nf^I \mu^I \chi^{IV} \frac{\mu^{IV}(\mu^{IV} - \mu^I)}{M^{IV_2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \int x^{IV} \sinf.(\mu^{IV} - \mu^I) t dt$$

Par ce moyen , l'équation (L) ne contiendra plus que des termes de la forme de  $x^{II} \cosf.(\mu^{II} - \mu^I) t$ , de  $\frac{dx^{II}}{dt} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t$ , & de  $\int x^{II} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t dt$ .

Je reprends maintenant l'équation  $\frac{d^2 x^I}{dt^2} + M^{I_2} x^I = 0$ , laquelle étant rapportée au second satellite , devient  $\frac{dx^{II}}{dt^2} + M^{II_2} x^{II} = 0$ ; je multiplie cette dernière par  $\sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t dt$ ; je l'integre, j'ai :  $\int \frac{d^2 x^{II}}{dt^2} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t dt + M^{II_2} \int x^{II} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t dt = 0$ ; je change l'ex-

pression  $\int \frac{d^2 x^{II}}{dt^2} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t dt$  en son équivalente

$$\frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t - (\mu^{II} - \mu^I) x^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^I) t \\ - (\mu^{II} - \mu^I)^2 \int x^{II} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t dt,$$

& il me vient l'équation :

$$\frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t - (\mu^{II} - \mu^I) x^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^I) t + (M^{III} \\ - (\mu^{II} - \mu^I)^2) \int x^{II} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t dt = 0; \text{ d'où je tire :}$$

$$\int x^{II} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t dt = \frac{(\mu^{II} - \mu^I) x^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^I) t - \frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t}{M^{III} - (\mu^{II} - \mu^I)^2}$$

Je trouve de la même manière ,

$$\int x^{III} \sin.(\mu^{III} - \mu^I) t dt = \frac{(\mu^{III} - \mu^I) x^{III} \cos.(\mu^{III} - \mu^I) t - \frac{dx^{III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^I) t}{M^{III} - (\mu^{III} - \mu^I)^2}$$

$$\int x^{IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t dt = \frac{(\mu^{IV} - \mu^I) x^{IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^I) t - \frac{dx^{IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t}{M^{IV} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2}$$

On fera toutes ces substitutions dans l'équation (L), moyennant quoi elle n'aura plus que des termes de la

forme de  $x^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^I) t$ , &  $\frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t$ .

## X C I,

Donc si on fait, pour abrégér :

$$\Psi^{\circ} I(a^I, a^{II}) = \check{\Psi} I(a^I, a^{II}) - 4 \frac{\mu^I \mu^{II}}{M^{II} - (\mu^{II} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{II}) - (2 \hat{\Psi} I(a^I, a^{II}) \\ + 4 \frac{\mu^{II}(\mu^{II} - \mu^I)}{M^{II} - (\mu^{II} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{II})) \frac{\mu^I(\mu^{II} - \mu^I)}{M^{II} - (\mu^{II} - \mu^I)^2}$$

$$\Psi^{\circ} I(a^I, a^{III}) = \check{\Psi} I(a^I, a^{III}) - 4 \frac{\mu^I \mu^{III}}{M^{III} - (\mu^{III} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{III}) - (2 \hat{\Psi} I \\ (a^I, a^{III}) + 4 \frac{\mu^{III}(\mu^{III} - \mu^I)}{M^{III} - (\mu^{III} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{III})) \frac{\mu^I(\mu^{III} - \mu^I)}{M^{III} - (\mu^{III} - \mu^I)^2}$$

$$\Psi^{\circ} I(a^I, a^{IV}) = \check{\Psi} I(a^I, a^{IV}) - 4 \frac{\mu^I \mu^{IV}}{M^{IV} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{IV}) - (2 \hat{\Psi} I \\ (a^I, a^{IV}) + 4 \frac{\mu^{IV}(\mu^{IV} - \mu^I)}{M^{IV} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2} \hat{\Gamma} I(a^I, a^{IV})) \frac{\mu^I(\mu^{IV} - \mu^I)}{M^{IV} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2}$$

$$(a^I, a^{IV}) + 4 \frac{\mu^{IV}(\mu^{IV} - \mu^I)}{M^{IV2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \frac{\mu^I(\mu^{IV} - \mu^I)}{M^{IV2} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2}$$

& de plus

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{II}) &= \frac{-2\mu^{II}}{M^{II2}} \check{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) + (2\hat{\Psi}^I(a^I, a^{II})) \\ &+ 4 \frac{\mu^{II}(\mu^{II} - \mu^I)}{M^{II2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) \frac{\mu^I}{M^{II2} - (\mu^{II} - \mu^I)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{III}) &= \frac{-2\mu^{III}}{M^{III2}} \check{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) + (2\hat{\Psi}^I(a^I, a^{III})) \\ &+ 4 \frac{\mu^{III}(\mu^{III} - \mu^I)}{M^{III2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{III}) \frac{\mu^I}{M^{III2} - (\mu^{III} - \mu^I)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) &= \frac{-2\mu^{IV}}{M^{IV2}} \check{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) + (2\hat{\Psi}^I(a^I, a^{IV})) \\ &+ 4 \frac{\mu^{IV}(\mu^{IV} - \mu^I)}{M^{IV2}} \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{IV}) \frac{\mu^I}{M^{IV2} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2} \end{aligned}$$

On aura, pour le premier satellite, l'équation:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x^I}{dt^2} + M^{I2} x^I \\ &- nf^I \chi^{II} \hat{\Psi}^I(a^I, a^{II}) x^{II} \cos.(\mu^{II} - \mu^I) t \\ &- nf^I \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{II}) \frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t \\ &- nf^I \chi^{III} \hat{\Psi}^I(a^I, a^{III}) x^{III} \cos.(\mu^{III} - \mu^I) t \\ &- nf^I \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{III}) \frac{dx^{III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^I) t \\ &- nf^I \chi^{IV} \hat{\Psi}^I(a^I, a^{IV}) x^{IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^I) t \\ &- nf^I \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) \frac{dx^{IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t \\ &= 0 \dots \dots \dots (M_I) \end{aligned}$$

Et de même pour les trois autres satellites:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x^{II}}{dt^2} + M^{II2} x^{II} \\ &- nf^{II} \chi^I \hat{\Psi}^I(a^{II}, a^I) x^I \cos.(\mu^I - \mu^{II}) t \\ &- nf^{II} \chi^I \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{II}, a^I) \frac{dx^I}{dt} \sin.(\mu^I - \mu^{II}) t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -nf^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) x^{\text{III}} \text{cosf.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{II}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) \frac{dx^{\text{III}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{II}}) t \\
 & -nf^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) x^{\text{IV}} \text{cosf.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{II}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) \frac{dx^{\text{IV}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{II}}) t \\
 & = 0 \dots \dots \dots (M_2) \\
 & \frac{d^2 x^{\text{III}}}{dt^2} + M^{\text{III}_2} x^{\text{III}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -nf^{\text{III}} \chi^{\text{I}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{III}}, a^{\text{I}}) x^{\text{I}} \text{cosf.} (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{III}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{III}} \chi^{\text{I}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{III}}, a^{\text{I}}) \frac{dx^{\text{I}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{III}}) t \\
 & -nf^{\text{III}} \chi^{\text{II}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{III}}, a^{\text{II}}) x^{\text{II}} \text{cosf.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{III}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{III}} \chi^{\text{II}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{III}}, a^{\text{II}}) \frac{dx^{\text{II}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{III}}) t \\
 & -nf^{\text{IV}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{III}}, a^{\text{IV}}) x^{\text{IV}} \text{cosf.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{III}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{III}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{III}}, a^{\text{IV}}) \frac{dx^{\text{IV}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{III}}) t \\
 & = 0 \dots \dots \dots (M_3) \\
 & \frac{d^2 x^{\text{IV}}}{dt^2} + M^{\text{IV}_2} x^{\text{IV}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -nf^{\text{IV}} \chi^{\text{I}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{IV}}, a^{\text{I}}) x^{\text{I}} \text{cosf.} (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{IV}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{IV}} \chi^{\text{I}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{IV}}, a^{\text{I}}) \frac{dx^{\text{I}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{IV}}) t \\
 & -nf^{\text{IV}} \chi^{\text{II}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{IV}}, a^{\text{II}}) x^{\text{II}} \text{cosf.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{IV}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{IV}} \chi^{\text{II}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{IV}}, a^{\text{II}}) \frac{dx^{\text{II}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{IV}}) t \\
 & -nf^{\text{IV}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Psi} \text{I} (a^{\text{IV}}, a^{\text{III}}) x^{\text{III}} \text{cosf.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{IV}}) t \\
 & \quad -nf^{\text{IV}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{IV}}, a^{\text{III}}) \frac{dx^{\text{III}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{IV}}) t \\
 & = 0 \dots \dots \dots (M_4)
 \end{aligned}$$

Pareillement on aura, par rapport aux variables  $z$ , ces quatre équations: (art. LXXXIX).

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \zeta^I}{dt^2} + N^{I2} z^I \\ & - n f^I \chi^{\text{II} \circ \text{I}} (a^I, a^{\text{II}}) z^{\text{II}} \text{cosf.} (\mu^{\text{II}} - \mu^I) t \\ & - n f^I \chi^{\text{III} \circ \text{I}} (a^I, a^{\text{III}}) z^{\text{III}} \text{cosf.} (\mu^{\text{III}} - \mu^I) t. \\ & - n f^I \chi^{\text{IV} \circ \text{I}} (a^I, a^{\text{IV}}) z^{\text{IV}} \text{cosf.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^I) = 0 \dots (N1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \zeta^{\text{II}}}{dt^2} + N^{\text{II}2} z^{\text{II}} \\ & - n f^{\text{II}} \chi^{\text{I} \circ \text{I}} (a^{\text{II}}, a^I) z^I \text{cosf.} (\mu^I - \mu^{\text{II}}) t \\ & - n f^{\text{II}} \chi^{\text{III} \circ \text{I}} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) z^{\text{III}} \text{cosf.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{II}}) t \\ & - n f^{\text{II}} \chi^{\text{IV} \circ \text{I}} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) z^{\text{IV}} \text{cosf.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{II}}) t = 0 \dots (N2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \zeta^{\text{III}}}{dt^2} + N^{\text{III}2} z^{\text{III}} \\ & - n f^{\text{III}} \chi^{\text{I} \circ \text{I}} (a^{\text{III}}, a^I) z^I \text{cosf.} (\mu^I - \mu^{\text{III}}) t \\ & - n f^{\text{III}} \chi^{\text{II} \circ \text{I}} (a^{\text{III}}, a^{\text{II}}) z^{\text{II}} \text{cosf.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{III}}) t \\ & - n f^{\text{III}} \chi^{\text{IV} \circ \text{I}} (a^{\text{III}}, a^{\text{IV}}) z^{\text{IV}} \text{cosf.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{III}}) t = 0 \dots (N3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \zeta^{\text{IV}}}{dt^2} + N^{\text{IV}2} z^{\text{IV}} \\ & - n f^{\text{IV}} \chi^{\text{I} \circ \text{I}} (a^{\text{IV}}, a^I) z^I \text{cosf.} (\mu^I - \mu^{\text{IV}}) t \\ & - n f^{\text{IV}} \chi^{\text{II} \circ \text{I}} (a^{\text{IV}}, a^{\text{II}}) z^{\text{II}} \text{cosf.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{IV}}) t \\ & - n f^{\text{IV}} \chi^{\text{III} \circ \text{I}} (a^{\text{IV}}, a^{\text{III}}) z^{\text{III}} \text{cosf.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{IV}}) t = 0 \dots (N4) \end{aligned}$$

## §. 3.

Où l'on donne une nouvelle méthode pour intégrer  
les équations précédentes.

## X C I I.

Je fais

$$\begin{aligned} x^{\text{II}} \text{cosf.} (\mu^{\text{II}} - \mu^I) t &= P, \quad x^{\text{II}} \text{sin.} (\mu^{\text{II}} - \mu^I) t = p \\ x^{\text{III}} \text{cosf.} (\mu^{\text{III}} - \mu^I) t &= Q, \quad x^{\text{III}} \text{sin.} (\mu^{\text{III}} - \mu^I) t = q. \end{aligned}$$

$x^{IV} \cos.(\mu^{IV} - \mu^I) t = R$ ,  $x^{IV} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t = r$   
 d'où je tire

$$\frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t = \frac{dp}{dt} - (\mu^{II} - \mu^I) P$$

$$\frac{dx^{III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^I) t = \frac{dq}{dt} - (\mu^{III} - \mu^I) Q$$

$$\frac{dx^{IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t = \frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^I) R$$

Je substitue ces valeurs dans l'équation (M<sub>1</sub>), ce qui la change en celle-ci :

$$\frac{d^2 x^I}{dt^2} + M^{II} x^I$$

$$- n f^I \chi^{II} (\Psi^{\circ I}(a^I, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I) \Pi^{\circ I}(a^I, a^{II})) P$$

$$- n f^I \chi^{II} \Pi^{\circ I}(a^I, a^{II}) \frac{dp}{dt}$$

$$- n f^I \chi^{III} (\Psi^{\circ I}(a^I, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I) \Pi^{\circ I}(a^I, a^{III})) Q$$

$$- n f^I \chi^{III} \Pi^{\circ I}(a^I, a^{III}) \frac{dq}{dt}$$

$$- n f^I \chi^{IV} (\Psi^{\circ I}(a^I, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \Pi^{\circ I}(a^I, a^{IV})) R$$

$$- n f^I \chi^{IV} \Pi^{\circ I}(a^I, a^{IV}) \frac{dr}{dt} = 0.$$

C'est l'équation qu'il s'agit maintenant d'intégrer; en regardant les quantités  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , chacune comme une variable particulière. Pour y parvenir, voici comment je m'y prens.

### X C I I I.

Je reprends les formules :

$$\frac{dx^{II}}{dt} \sin.(\mu^{II} - \mu^I) t = \frac{dp}{dt} - (\mu^{II} - \mu^I) P$$

$$\frac{dx^{III}}{dt} \sin.(\mu^{III} - \mu^I) t = \frac{dq}{dt} - (\mu^{III} - \mu^I) Q$$

$$\frac{dx^{IV}}{dt} \sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t = \frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^I) R$$



& je trouve de même :

$$\frac{dx^{II}}{dt} \cosf.(\mu^{II} - \mu^I) t = \frac{dP}{dt} + (\mu^{II} - \mu^I) p$$

$$\frac{dx^{III}}{dt} \cosf.(\mu^{III} - \mu^I) t = \frac{dQ}{dt} + (\mu^{III} - \mu^I) q$$

$$\frac{dx^{IV}}{dt} \cosf.(\mu^{IV} - \mu^I) t = \frac{dR}{dt} + (\mu^{IV} - \mu^I) r$$

De là je tire , par la différentiation , les formules suivantes :

$$\frac{d^2 x^{II}}{dt^2} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t = \frac{d^2 p}{dt^2} - 2(\mu^{II} - \mu^I) \frac{dP}{dt} - (\mu^{II} - \mu^I)^2 p$$

$$\frac{d^2 x^{II}}{dt^2} \cosf.(\mu^{II} - \mu^I) t = \frac{d^2 P}{dt^2} + 2(\mu^{II} - \mu^I) \frac{dP}{dt} - (\mu^{II} - \mu^I)^2 P$$

$$\frac{d^2 x^{III}}{dt^2} \sinf.(\mu^{III} - \mu^I) t = \frac{d^2 q}{dt^2} - 2(\mu^{III} - \mu^I) \frac{dQ}{dt} - (\mu^{III} - \mu^I)^2 q$$

$$\frac{d^2 x^{III}}{dt^2} \cosf.(\mu^{III} - \mu^I) t = \frac{d^2 Q}{dt^2} + 2(\mu^{III} - \mu^I) \frac{dQ}{dt} - (\mu^{III} - \mu^I)^2 Q$$

$$\frac{d^2 x^{IV}}{dt^2} \sinf.(\mu^{IV} - \mu^I) t = \frac{d^2 r}{dt^2} - 2(\mu^{IV} - \mu^I) \frac{dR}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2 r$$

$$\frac{d^2 x^{IV}}{dt^2} \cosf.(\mu^{IV} - \mu^I) t = \frac{d^2 R}{dt^2} + 2(\mu^{IV} - \mu^I) \frac{dR}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2 R$$

Cela posé , je multiplie d'abord l'équation ( $M_2$ ) par  $\sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t$ , j'ai :

$$\frac{d^2 x^{II}}{dt^2} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t + M^{II_2} x^{II} \sinf.(\mu^{II} - \mu^I) t$$

$$- \frac{n}{2} f^{II} \chi^I \Psi^I(a^{II}, a^I) x^I \sinf.2(\mu^{II} - \mu^I) t$$

$$- \frac{n}{2} f^{II} \chi^I \Pi^I(a^{II}, a^I) \frac{dx^I}{dt} (-1 + \cosf.2(\mu^{II} - \mu^I) t)$$

$$- \frac{n}{2} f^{III} \chi^{III} \Psi^I(a^{III}, a^{III}) x^{III} \sinf.(\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$- \sinf.(\mu^{III} - 2\mu^{II} + \mu^I) t$$

$$- \frac{n}{2} f^{III} \chi^{III} \Pi^I(a^{III}, a^{III}) \frac{dx^{III}}{dt} (-\cosf.(\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$+ \cosf.(\mu^{III} - 2\mu^{II} + \mu^I) t)$$

$$-\frac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \Psi^{\circ} I (a^{II}, a^{IV}) x^{IV} (\sin. (\mu^{IV} - \mu^I) t - \sin. (\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^I) t)$$

$$-\frac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \Pi^{\circ} I (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{IV}}{dt} (-\cos. (\mu^{IV} - \mu^I) t + \cos. (\mu^{IV} - 2\mu^{II} + \mu^I) t) = 0.$$

Je ne conserve dans cette équation que les termes analogues à ceux de l'équation (M<sub>1</sub>), c'est-à-dire, les termes, qui en faisant pour  $x^I, x^{II}$ , &c. les substitutions de l'article LXXXVII, en donneroient d'autres, où le coefficient de  $t$  seroit presque égal à  $\mu^I$ , & qui sont les seuls auxquels nous devons avoir égard dans l'intégration de l'équation de l'article XCII.

J'aurai donc simplement :

$$\frac{d^2 x^I}{dt^2} \sin. (\mu^{II} - \mu^I) t + M^{II_2} x^{II} \sin. (\mu^{II} - \mu^I) t + \frac{n}{2} f^{II} \chi^I \Pi^{\circ} I (a^{II}, a^I) \frac{dx^I}{dt}$$

$$-\frac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \Psi^{\circ} I (a^{II}, a^{III}) x^{III} \sin. (\mu^{III} - \mu^I) t + \frac{n}{2} f^{II} \chi^{III} \Pi^{\circ} I (a^{II}, a^{III}) \frac{dx^{III}}{dt} \cos. (\mu^{III} - \mu^I) t$$

$$-\frac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \Psi^{\circ} I (a^{II}, a^{IV}) x^{IV} \sin. (\mu^{IV} - \mu^I) t + \frac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} \Pi^{\circ} I (a^{II}, a^{IV}) \frac{dx^{IV}}{dt} \cos. (\mu^{IV} - \mu^I) t = 0.$$

Je substitue au lieu de  $\frac{d^2 x^I}{dt^2} \sin. (\mu^{II} - \mu^I) t, x^{II} \cos. (\mu^{II} - \mu^I) t$  &c. leurs valeurs en  $P, p$ , &c. j'ai

( I. ° )

$$\frac{dp^2}{dt^2} - 2 (\mu^{II} - \mu^I) \frac{dP}{dt} (M^{II_2} - (\mu^{II} - \mu^I)^2) p + \frac{n}{2} f^{II} \chi^I \Pi^{\circ} I (a^{II}, a^I) \frac{dx^I}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} (\Psi^{\circ} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) - (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}})) q \\
 & + \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) \frac{dQ}{dt} \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} (\Psi^{\circ} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) - (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}})) r \\
 & + \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) \frac{dR}{dt} = 0.
 \end{aligned}$$

Je multiplie en second lieu la même équation (*M*<sub>2</sub>) par *cos. (μ<sup>II</sup> - μ<sup>I</sup>) t* j'ai :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 x^{\text{II}}}{dt^2} \text{cos.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + M^{\text{II}2} x^{\text{II}} \text{cos.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{I}} \Psi^{\circ} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) x^{\text{I}} (1 + \text{cos.} 2 (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t) \\
 & + \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{I}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) \frac{dx^{\text{I}}}{dt} \text{sin.} 2 (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t. \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \Psi^{\circ} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) x^{\text{III}} (\text{cos.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & + \text{cos.} (\mu^{\text{III}} - 2\mu^{\text{II}} + \mu^{\text{I}}) t) \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) \frac{dx^{\text{III}}}{dt} (\text{sin.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & + \text{sin.} (\mu^{\text{III}} - 2\mu^{\text{II}} + \mu^{\text{I}}) t) \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) x^{\text{IV}} (\text{sin.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & + \text{cos.} (\mu^{\text{IV}} - 2\mu^{\text{II}} + \mu^{\text{I}}) t) \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) \frac{dx^{\text{IV}}}{dt} (\text{sin.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & + \text{sin.} (\mu^{\text{IV}} - 2\mu^{\text{II}} + \mu^{\text{I}}) t) = 0.
 \end{aligned}$$

équation que je réduis, par la raison que j'ai dite tantôt, à celle-ci :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 x^{\text{II}}}{dt^2} \text{cos.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t + M^{\text{II}2} x^{\text{II}} \text{cos.} (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{I}} \Psi^{\circ} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) x^{\text{I}} \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \Psi^{\circ} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) x^{\text{III}} \text{cos.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) \frac{dx^{\text{III}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \Psi^{\circ} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) x^{\text{IV}} \text{cos.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t \\
 & -\frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I} (a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) \frac{dx^{\text{IV}}}{dt} \text{sin.} (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) t = 0.
 \end{aligned}$$

laquelle me donne, après les substitutions :

(2.<sup>o</sup>)

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dt^2} + 2(\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) \frac{dP}{dt} + (M^{\text{II},2} - (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}})^2) P \\ - \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{I}} \Psi^{\text{O}} \text{I}(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) x^{\text{I}} \\ - \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} (\Psi^{\text{O}} \text{I}(a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) - (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{II}}, a^{\text{III}})) Q \\ - \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{III}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{II}}, a^{\text{III}}) \frac{dQ}{dt} \\ - \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} (\Psi^{\text{O}} \text{I}(a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) - (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{II}}, a^{\text{IV}})) R \\ - \frac{n}{2} f^{\text{II}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{II}}, a^{\text{IV}}) \frac{dR}{dt} = 0. \end{aligned}$$

En troisième lieu, je multiplie l'équation (M<sub>3</sub>) par *sin.*  $(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t$ ; j'aurai, après les réductions & les substitutions,

(3.<sup>o</sup>)

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{dt^2} - 2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) \frac{dq}{dt} + (M^{\text{III},2} - (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})^2) q \\ + \frac{n}{2} f^{\text{III}} \chi^{\text{I}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{I}}) \frac{dx^{\text{I}}}{dt} \\ - \frac{n}{2} f^{\text{III}} \chi^{\text{II}} (\Psi^{\text{O}} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{II}}) - (\mu^{\text{II}} - \mu^{\text{I}}) \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{II}})) p \\ + \frac{n}{2} f^{\text{III}} \chi^{\text{II}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{II}}) \frac{dp}{dt} \\ - \frac{n}{2} f^{\text{III}} \chi^{\text{IV}} (\Psi^{\text{O}} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{IV}}) - (\mu^{\text{IV}} - \mu^{\text{I}}) \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{IV}})) r \\ + \frac{n}{2} f^{\text{III}} \chi^{\text{IV}} \overset{\circ}{\Pi} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{IV}}) \frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}$$

En quatrième lieu, je multiplie la même équation par *cos.*  $(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) t$ , & je trouve

(4.<sup>o</sup>)

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt^2} + 2(\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}}) \frac{dQ}{dt} + (M^{\text{III},2} - (\mu^{\text{III}} - \mu^{\text{I}})^2) Q \\ - \frac{n}{2} f^{\text{III}} \chi^{\text{I}} \Psi^{\text{O}} \text{I}(a^{\text{III}}, a^{\text{I}}) x^{\text{I}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n}{2} f^{III} \chi^{II} (\Psi^{\circ I} (a^{III}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II})) P \\
 & -\frac{n}{2} f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II}) \frac{dp}{dt} \\
 & -\frac{n}{2} f^{III} \chi^{IV} (\Psi^{\circ I} (a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{IV})) R \\
 & -\frac{n}{2} f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{IV}) \frac{dr}{dt} = 0.
 \end{aligned}$$

En cinquième lieu, je multiplie l'équation (M4) par  $\sin.(\mu^{IV} - \mu^I) t$ , j'ai

(5.°)

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 r}{dt^2} & - 2(\mu^{IV} - \mu^I) \frac{dR}{dt} + (M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2) r \\
 & + \frac{n}{2} f^{IV} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^I) \frac{dx^I}{dt} \\
 & -\frac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} (\Psi^{\circ I} (a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II})) p \\
 & + \frac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II}) \frac{dp}{dt} \\
 & -\frac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} (\Psi^{\circ I} (a^{IV}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III})) q \\
 & + \frac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III}) \frac{dq}{dt} = 0.
 \end{aligned}$$

En sixième & dernier lieu, je multiplie la même équation par  $\cos.(\mu^{IV} - \mu^I) t$ , & je trouve

(6.°)

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 R}{dt^2} & + 2(\mu^{IV} - \mu^I) \frac{dr}{dt} + (M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2) R \\
 & -\frac{n}{2} f^{IV} \chi^I \Psi^{\circ I} (a^{IV}, a^I) x^I \\
 & -\frac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} (\Psi^{\circ I} (a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II})) P \\
 & -\frac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II}) \frac{dp}{dt} \\
 & -\frac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} (\Psi^{\circ I} (a^{IV}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III})) Q \\
 & -\frac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III}) \frac{dq}{dt} = 0.
 \end{aligned}$$

Voilà, comme l'on voit, six équations différentielles de la même nature que l'équation de l'article XCII, & qui étant combinées avec cette dernière équation, suffiront pour déterminer les sept variables  $x^I$ ,  $P$ ,  $p$ ,  $Q$ ,  $q$ ,  $R$ ,  $r$ .

## X C I V.

Pour cet effet, je multiplie l'équation de l'article XCII par  $e^{V^I} dt$ , l'équation (1.<sup>o</sup>) de l'article précédent par  $\alpha^I e^{V^I} dt$ , l'équation (2.<sup>o</sup>) par  $A^I e^{V^I} dt$ , l'équation (3.<sup>o</sup>) par  $\beta^I e^{V^I} dt$ , l'équation (4.<sup>o</sup>) par  $B^I e^{V^I} dt$ , l'équation (5.<sup>o</sup>) par  $\gamma^I e^{V^I} dt$ , l'équation (6.<sup>o</sup>) par  $C^I e^{V^I} dt$  ( $\alpha^I$ ,  $\beta^I$ ,  $\gamma^I$ ,  $A^I$ ,  $B^I$ ,  $C^I$  &  $V^I$  sont des constantes indéterminées) & après en avoir fait une somme, j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{d^2 x^I}{dt^2} + \alpha^I \frac{d^2 p}{dt^2} + A^I \frac{d^2 P}{dt^2} + \beta^I \frac{d^2 q}{dt^2} + B^I \frac{d^2 Q}{dt^2} + \gamma^I \frac{d^2 R}{dt^2} \right. \\ & \quad \left. + C^I \frac{d^2 r}{dt^2} \right) e^{V^I} dt \\ & + \int \left\{ \frac{n}{2} (\alpha^I f^{II} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^I) + \beta^I f^{III} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^I) \right. \\ & \quad \left. + \gamma^I f^{IV} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^I)) \frac{dx^I}{dt} \right. \\ & + (-n f^I \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{II}) + 2A^I (\mu^{II} - \mu^I) \\ & \quad \left. - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II}) - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II})) \frac{dP}{dt} \right. \\ & + (-2\alpha (\mu^{II} - \mu^I) + \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II}) \\ & \quad \left. + \frac{n}{2} 2^I f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II})) \frac{dP}{dt} \right. \\ & + (-n f^I \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{III}) - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III}) \\ & \quad \left. + B^I (\mu^{III} - \mu^I) - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III})) \frac{dq}{dt} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III}) - 2\beta^I (\mu^{III} - \mu^I) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III}) \right) \frac{dQ}{dt} \\
 & + \left( -nf^I \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{IV}) - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{IV}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{IV}) + 2C^I (\mu^{IV} - \mu^I) \right) \frac{dr}{dt} \\
 & + \left( \frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{IV}) + \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{IV}) \right. \\
 & \quad \left. + 2\gamma^I (\mu^{IV} - \mu^I) \right) \frac{dR}{dt} \} e^{P^I} dt \\
 & + f \{ (M^{II} - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^I \overset{\circ}{\Psi} I (a^{II}, a^I) - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^I \overset{\circ}{\Psi} I (a^{III}, a^I) \\
 & \quad - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^I \overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^I)) x^I \\
 & + (\alpha^I (M^{II_2} - (\mu^{II} - \mu^I)^2) - \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{III}, a^{II}) \\
 & \quad - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II})) - \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{II}) \\
 & \quad - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II})) \} p \\
 & + \left( -nf^I \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^I, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{II})) \right. \\
 & \quad \left. + A^I M^{II_2} - (\mu^{II} - \mu^I)^2 - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{III}, a^{II}) \right. \\
 & \quad \left. - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{II})) - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{II}) \right. \\
 & \quad \left. - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{II})) \right) P \\
 & + \left( -\frac{n}{2} \alpha f^{II} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III})) \right. \\
 & \quad \left. + \beta^I (M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^I)^2) - \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{III}) \right. \\
 & \quad \left. - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III})) \right) q \\
 & + \left( -nf^I \chi^{III} \overset{\circ}{\Psi} I (a^I, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{III}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{III})) \right. \\
 & \quad \left. + B^I (M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^I)^2) - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Psi} I (a^{IV}, a^{III}) \right. \\
 & \quad \left. - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{IV}, a^{III})) \right) Q \\
 & + \left( -\frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^{IV} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{IV})) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{IV} (\overset{\circ}{\Psi} I (a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{IV})) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma^I (M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2) \right) r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left( -nf^I \chi^{IV} (\Psi^{\circ I}(a^I, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{IV})) \right. \\
 &\quad - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{IV} (\Psi^{\circ I}(a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV})) \\
 &\quad \left. - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{IV} (\Psi^{\circ I}(a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV})) \right) \\
 &\quad + C^I (M^{IV} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2) R \} e^{V^I} dt \\
 &= \text{constante.}
 \end{aligned}$$

X C V.

Cela fait, je transforme les expressions intégrales  $\int \frac{d^2 x^I}{dt^2} e^{V^I} dt$ ,  $\int \frac{d^2 p}{dt^2} e^{V^I} dt$ , &c. en leurs équivalentes  $\left( \frac{dx^I}{dt} - V^I x^I \right) e^{V^I} + V^{II} \int x^I e^{V^I} dt$ ,  $\left( \frac{dp}{dt} - V^I p \right) e^{V^I} + V^{II} \int p e^{V^I} dt$ , &c. De même je change les expressions  $\int \frac{dx^I}{dt} e^{V^I} dt$ ,  $\int \frac{dp}{dt} e^{V^I} dt$ , &c. en celles-ci :  $x^I e^{V^I} - V^I \int x^I e^{V^I} dt$ ,  $p e^{V^I} - V^I \int p e^{V^I} dt$ , &c.

Par ce moyen, l'équation se trouve composée de deux parties; l'une finie, & l'autre indéfinie, laquelle renferme les quantités intégrales  $\int x^I e^{V^I} dt$ ,  $\int p e^{V^I} dt$ ,  $\int P e^{V^I} dt$ ,  $\int q e^{V^I} dt$ ,  $\int Q e^{V^I} dt$ ,  $\int r e^{V^I} dt$ ,  $\int R e^{V^I} dt$ .

Je fais les coefficients de ces quantités chacun égal à zéro, ce qui me donne sept équations, entre les sept inconnues  $\alpha^I$ ,  $\beta^I$ ,  $\gamma^I$ ,  $A^I$ ,  $B^I$ , &  $C^I$ ; savoir

( I.° )

$$\begin{aligned}
 &V^{II} - \frac{n}{2} (\alpha^I f^{II} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^I) + \beta^I f^{III} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^I) \\
 &\quad + \gamma^I f^{IV} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^I) V^I + M^{II} - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^I \Psi^{\circ I}(a^{II}, a^I) \\
 &\quad - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^I \Psi^{\circ I}(a^{III}, a^I) - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^I \Psi^{\circ I}(a^{IV}, a^I) = 0.
 \end{aligned}$$



(2.°)

$$\begin{aligned} & a^I V^{I_2} + (nf^I \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{II}) - 2A^I (\mu^{II} - \mu^I) \\ & + \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{II}) + \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II})) V^I \\ & + a^I (M^{III_2} - (\mu^{II} - \mu^I)^2) - \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{III}, a^{II})) \\ & - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{II}) - \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{IV}, a^{II})) \\ & - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II}) = 0. \end{aligned}$$

(3.°)

$$\begin{aligned} & A^I V^{I_2} - (-2a^I (\mu^{II} - \mu^I) + \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{II})) \\ & + \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II})) V^I - nf^I \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^I, a^{II})) \\ & - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{II}) + A^I (M^{III_2} - (\mu^{II} - \mu^I)^2) \\ & - \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{III}, a^{II})) - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{II}) \\ & - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{IV}, a^{II})) - (\mu^{II} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II}) \\ & = 0. \end{aligned}$$

(4.°)

$$\begin{aligned} & \beta^I V^{I_2} + (nf^I \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{III}) + \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{III})) \\ & - 2B^I (\mu^{III} - \mu^I) + \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III})) V^I \\ & - \frac{n}{2} \alpha f^{II} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{II}, a^{III})) - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{III}) \\ & + \beta^I (M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^I)^2) - \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{IV}, a^{III})) \\ & - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III}) = 0. \end{aligned}$$

(5.°)

$$\begin{aligned} & B^I V^{I_2} - (\frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{III}) - 2\beta^I (\mu^{III} - \mu^I) \\ & + \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III})) V^I - nf^I \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^I, a^{III})) \\ & - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{III}) - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{II}, a^{III})) \\ & - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{III}) + B^I (M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^I)^2) \\ & - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{IV}, a^{III})) - (\mu^{III} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III}) \\ & = 0. \end{aligned}$$

(6.°)

$$\begin{aligned} & \gamma^I V^{I_2} + (n f^I \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{IV}) + \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV}) \\ & + \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV}) - 2 C^I (\mu^{IV} - \mu^I)) V^I \\ & - \frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^{IV} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV})) \\ & - \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{IV} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV})) \\ & + \gamma^I (M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2) = 0. \end{aligned}$$

(7.°)

$$\begin{aligned} & C^I V^{I_2} - (\frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV}) + \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV})) \\ & - 2 \gamma^I (\mu^{IV} - \mu^I) V^I - \frac{n}{2} f^I \chi^{IV} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^I, a^{IV}) \\ & - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{IV}) - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{IV} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{II}, a^{IV}) \\ & - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{IV})) - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{IV} (\overset{\circ}{\Psi} I(a^{III}, a^{IV}) \\ & - (\mu^{IV} - \mu^I) \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{IV})) + C^I (M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^I)^2) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Ensuite j'ai l'équation intégrale,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dx^I}{dt} + \alpha^I \frac{dp}{dt} + A^I \frac{dP}{dt} + \beta^I \frac{dq}{dt} + B^I \frac{dQ}{dt} + \gamma^I \frac{dr}{dt} + C^I \frac{dR}{dt} \right. \\ & + (-V^I + \frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^I) + \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^I) \\ & + \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^I \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^I)) x^I \\ & + (-\alpha^I V^I - n f^I \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{II}) + 2 A^I (\mu^{II} - \mu^I) \\ & - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{II}) - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II})) P \\ & + (-A^I V^I - 2 \alpha (\mu^{II} - \mu^I) + \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{III}, a^{II}) \\ & + \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{II} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{II})) P \\ & + (-\beta^I V^I - n f^I \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^I, a^{III}) - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{III}) \\ & + 2 B^I (\mu^{III} - \mu^I) - \frac{n}{2} C^I f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III})) Q \\ & + (-B^I V^I + \frac{n}{2} \alpha^I f^{II} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{II}, a^{III}) - 2 \beta^I (\mu^{III} - \mu^I) \\ & + \frac{n}{2} \gamma^I f^{IV} \chi^{III} \overset{\circ}{\Pi} I(a^{IV}, a^{III})) Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (-\gamma^I V^I - n f^I \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) - \frac{n}{2} A^I f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{IV}) \\
 &\quad - \frac{n}{2} B^I f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{III}, a^{IV}) + 2 C^I (\mu^{IV} - \mu^I)) r \\
 &+ (-C^I V^I + \frac{n}{2} a^I f^{II} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{II}, a^{IV}) \\
 &\quad + \frac{n}{2} \beta^I f^{III} \chi^{IV} \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{III}, a^{IV}) + 2 \gamma^I (\mu^{IV} - \mu^I)) R) e^{V^I} \\
 &= \text{constante} \dots \dots \dots (P)
 \end{aligned}$$

X C V I.

Qu'on multiplie l'équation (2.<sup>o</sup>) par  $\pm \sqrt{-1}$ , & qu'on y ajoute l'équation (3.<sup>o</sup>), on aura

$$\begin{aligned}
 &(M^{II_2} - (\mu^{II} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1})^2) (A^I \pm a^I \sqrt{-1}) \\
 &- n f^I \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi}^I(a^I, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{II})) \\
 &- \frac{n}{2} f^{III} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi}^I(a^{III}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{III}, a^{II})) \\
 &\quad (B^I \pm \beta^I \sqrt{-1}) \\
 &- \frac{n}{2} f^{IV} \chi^{II} (\overset{\circ}{\Psi}^I(a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \\
 &\quad \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{IV}, a^{II})) (C^I \pm \gamma^I \sqrt{-1}) \\
 &= 0 \dots \dots \dots (Q)
 \end{aligned}$$

De même, en multipliant l'équation (4.<sup>o</sup>) par  $\pm \sqrt{-1}$ , & y ajoutant l'équation (5.<sup>o</sup>), on aura

$$\begin{aligned}
 &(M^{III_2} - (\mu^{III} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1})^2) (B^I \pm \beta^I \sqrt{-1}) \\
 &- n f^I \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi}^I(a^I, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \overset{\circ}{\Pi}^I(a^I, a^{III})) \\
 &- \frac{n}{2} f^{II} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi}^I(a^{II}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \\
 &\quad \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{II}, a^{III})) (A^I \pm a^I \sqrt{-1}) \\
 &- \frac{n}{2} f^{IV} \chi^{III} (\overset{\circ}{\Psi}^I(a^{IV}, a^{III}) - (\mu^{III} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \\
 &\quad \overset{\circ}{\Pi}^I(a^{IV}, a^{III})) (C^I \pm \gamma^I \sqrt{-1}) \\
 &= 0 \dots \dots \dots (R)
 \end{aligned}$$

Enfin multipliant l'équation (6.<sup>o</sup>) par  $\pm \sqrt{-1}$ , & y ajoutant l'équation (7.<sup>o</sup>), on aura

$$(M^{IV_2} - (\mu^{IV} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1})^2) (C^I \pm \gamma^I \sqrt{-1})$$

$$\begin{aligned}
 & -nf^I \chi^{IV} (\Psi^{\circ I} (a^I, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \Pi^{\circ I} (a^I, a^{IV})) \\
 & - \frac{n}{2} f^{II} \chi^{IV} (\Psi^{\circ I} (a^{II}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \\
 & \quad \Pi^{\circ I} (a^{II}, a^{IV})) (A^I \pm a^I \sqrt{-1}) \\
 & - \frac{n}{2} f^{III} \chi^{IV} (\Psi^{\circ I} (a^{III}, a^{IV}) - (\mu^{IV} - \mu^I \pm V^I \sqrt{-1}) \\
 & \quad \Pi^{\circ I} (a^{III}, a^{IV})) (B^I \pm \beta^I \sqrt{-1}) \\
 & = 0 \dots \dots \dots (S)
 \end{aligned}$$

Chacune de ces trois équations en vaut deux, comme l'on voit, à cause de l'ambiguïté du signe de  $\sqrt{-1}$ .

Maintenant il est visible par l'équation (I.<sup>o</sup>), que si  $n$  étoit  $= 0$ : on auroit:  $V^{I2} + M^{I2} = 0$ , c'est-à-dire (à cause de  $M^{I2} = \mu^{I2}(1 - n\epsilon^I)$ , art. LXXIX)  $V^{I2} + \mu^{I2} = 0$ , &  $V^{I2} = -\mu^{I2}$ .

Supposons donc en général . . . .  $V^{I2} = -\mu^{I2}(1 - nv^I)$ ; & l'équation dont nous parlons se changera en celle-ci :

$$\begin{aligned}
 & \mu^{I2}(v^I - \epsilon^I) - \frac{1}{2} f^{II} \chi^I (\Psi^{\circ I} (a^{II}, a^I) A^I + \Pi^{\circ I} (a^{II}, a^I) a^I V^I) \\
 & - \frac{1}{2} f^{III} \chi^I (\Psi^{\circ I} (a^{III}, a^I) B^I + \Pi^{\circ I} (a^{III}, a^I) \beta^I V^I) \\
 & - \frac{1}{2} f^{IV} \chi^I (\Psi^{\circ I} (a^{IV}, a^I) C^I + \Pi^{\circ I} (a^{IV}, a^I) b^I V^I) \\
 & = 0 \dots \dots \dots (T)
 \end{aligned}$$

X C V I I.

L'équation  $V^{I2} = -\mu^{I2}(1 - nv^I)$  donne  $V^I = \mu^I(1 - \frac{n}{2} v^I \sqrt{-1})$ ; donc  $V^I \sqrt{-1} = -\mu^I(1 - \frac{1}{2} nv^I)$ ; donc substituant cette valeur dans l'équation (Q), aussi bien que celle de  $M^{II2}$  qui est  $\mu^{II2}(1 - n\epsilon^{II})$  (art. XXIX), on aura :

$$\begin{aligned}
 & (\mu^{II2}(1 - n\epsilon^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I \mp \mu^I(1 - \frac{1}{2} nv^I))^2) (A^I \pm a^I \sqrt{-1}) \\
 & - nf^I \chi^{II} (\Psi^{\circ I} (a^I, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I \mp \mu^I(1 - \frac{1}{2} nv^I)) \Pi^{\circ I} (a^I, a^{II}))
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}nf^{III}\chi^{II}(\Psi^{\circ}I(a^{III}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I \mp \mu^I(1 - \frac{1}{2}nv^I)) \Pi^{\circ}I(a^{III}, a^{II})) (B^I \pm \beta^I \sqrt{-1})$$

$$-\frac{1}{2}nf^{IV}\chi^{II}(\Psi^{\circ}I(a^{IV}, a^{II}) - (\mu^{II} - \mu^I \mp \mu^I(1 - \frac{1}{2}nv^I)) \Pi^{\circ}I(a^{IV}, a^{II})) (C^I \pm \gamma^I \sqrt{-1}) = 0.$$

Donc 1.<sup>o</sup> si on prend le signe supérieur, & qu'on néglige les termes affectés de  $n$ , on aura  $(\mu^{II} - \mu^I - 2\mu^I)^2 (A^I + \alpha^I \sqrt{-1}) = 0$ ; ce qui donne  $A^I + \alpha^I \sqrt{-1} = 0$ , &  $\alpha^I \sqrt{-1} = -A^I$ .

2.<sup>o</sup> Si on prend le signe inférieur, & qu'après avoir ôté ce qui se détruit, on divise toute l'équation par  $n$ , on aura, en négligeant toujours les termes affectés de  $n$ ,

$$\begin{aligned} &\mu^{II} \left( \frac{\mu^I}{\mu^{II}} v^I - \mathcal{C}^{II} \right) (A^I - \alpha^I \sqrt{-1}) - f^I \chi^{II} (\Psi^{\circ}I(a^I, a^{II}) \\ &\quad - \mu^{II} \Pi^{\circ}I(a^I, a^{II})) \\ &-\frac{1}{2}f^{III}\chi^{II}(\Psi^{\circ}I(a^{III}, a^{II}) - \mu^{II} \Pi^{\circ}I(a^{III}, a^{II})) (B^I - \beta^I \sqrt{-1}) \\ &-\frac{1}{2}f^{IV}\chi^{II}(\Psi^{\circ}I(a^{IV}, a^{II}) - \mu^I \Pi^{\circ}I(a^{IV}, a^{II})) (C^I - \gamma^I \sqrt{-1}) \\ &= 0 \dots \dots \dots (V) \end{aligned}$$

On tirera de même de l'équation (R)

$$\begin{aligned} &\beta^I \sqrt{-1} = -B^I, \text{ \&} \\ &\mu^{III} \left( \frac{\mu^I}{\mu^{III}} v^I - \mathcal{C}^{III} \right) (B^I - \beta^I \sqrt{-1}) - f^I \chi^{III} (\Psi^{\circ}I(a^I, a^{III}) \\ &\quad - \mu^{III} \Pi^{\circ}I(a^I, a^{III})) \\ &-\frac{1}{2}f^{II}\chi^{III}(\Psi^{\circ}I(a^{II}, a^{III}) - \mu^{III} \Pi^{\circ}I(a^{II}, a^{III})) (A^I - \alpha^I \sqrt{-1}) \\ &-\frac{1}{2}f^{IV}\chi^{III}(\Psi^{\circ}I(a^{IV}, a^{III}) - \mu^{III} \Pi^{\circ}I(a^{IV}, a^{III})) (C^I - \gamma^I \sqrt{-1}) \\ &= 0 \dots \dots \dots (U) \end{aligned}$$

Et de l'équation (S)

$$\gamma^I \sqrt{-1} = -C^I, \text{ \&}$$

$$\begin{aligned} & \mu^{IV_2} \left( \frac{\mu^I}{\mu^{IV}} v^I - \mathcal{C}^{IV} \right) (C^I - \gamma^I \sqrt{-1}) - f^I \chi^{IV} (\Psi^{\circ I} (a^I, a^{IV})) \\ & \quad - \mu^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{IV}) \\ & - \frac{1}{2} f^{II} \chi^{IV} (\Psi^{\circ I} (a^{II}, a^{IV}) - \mu^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^{IV})) (A^I - \alpha^I \sqrt{-1}) \\ & - \frac{1}{2} f^{III} \chi^{IV} (\Psi^{\circ I} (a^{III}, a^{IV}) - \mu^{IV} \overset{\circ}{\Pi} I (a^{III}, a^{IV})) (B^I - \beta^I \sqrt{-1}) \\ & \equiv 0 \dots \dots \dots (W) \end{aligned}$$

X C V I I.

Soit fait pour plus de simplicité,

$$\begin{aligned} (1, 2) & \equiv (\Psi^{\circ I} (a^I, a^{II}) - \mu^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{II})) \\ (1, 3) & \equiv \Psi^{\circ I} (a^I, a^{III}) - \mu^{III} \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{III}) \\ (2, 1) & \equiv \Psi^{\circ I} (a^{II}, a^I) - \mu^I \overset{\circ}{\Pi} I (a^{II}, a^I), \text{ \& ainsi des autres} \end{aligned}$$

Soit de plus . . . . .  $\rho = \mu^I v^I$

On aura, en faisant ces substitutions dans les équations (V), (U), (W), & mettant à la place de  $\alpha^I \sqrt{-1}$ ,  $\beta^I \sqrt{-1}$ ,  $\gamma^I \sqrt{-1}$ , leurs valeurs  $-A^I$ ,  $-B^I$ ,  $-C^I$ , les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} 2\mu^{II_2} \left( \frac{\rho}{\mu^{III}} - \mathcal{C}^{II} \right) A^I - f^I \chi^{II} (1, 2) - f^{III} \chi^{II} (3, 2) B^I - f^{IV} \chi^{II} (4, 2) C^I &= 0 \\ 2\mu^{III_2} \left( \frac{\rho}{\mu^{III}} - \mathcal{C}^{III} \right) B^I - f^I \chi^{III} (1, 3) - f^{II} \chi^{III} (2, 3) A^I - f^{IV} \chi^{III} (4, 3) C^I &= 0 \\ 2\mu^{IV_2} \left( \frac{\rho}{\mu^{IV}} - \mathcal{C}^{IV} \right) C^I - f^I \chi^{IV} (1, 4) - f^{II} \chi^{IV} (2, 4) A^I - f^{III} \chi^{IV} (3, 4) B^I &= 0 \end{aligned} \right\} (X)$$

D'où l'on tirera facilement les valeurs de  $A^I$ ,  $B^I$ ,  $C^I$ .

Or, en négligeant les termes affectés de  $n$ , on a  $V^I = \mu^I \sqrt{-1}$  (art. préc.) ; donc puisque  $\alpha^I = -\frac{A^I}{\sqrt{-1}}$  on aura  $\alpha^I V^I = -\mu^I A^I$  ; & de même  $\beta^I V^I = -\mu^I B^I$ ,  $\gamma^I V^I = -\mu^I C^I$ . Donc l'équation (T) de l'article XCVI deviendra, après toutes les substitutions,

$2\mu^{12} \left( \frac{\rho}{\mu^1} - \mathcal{C}^1 \right) - f^{II} \chi^I(2, 1) A^I - f^{III} \chi^I(3, 1) B^I$   
 $- f^{IV} \chi^I(4, 1) C^I = 0 \dots \dots \dots (Y);$   
 c'est l'équation qui donnera la valeur de  $\rho$ .

X C I X.

Soit, pour abrégér,  $K^I = 2 \frac{e^{12} - \mathcal{C}^2}{\chi^I}$ ,  $K^{II} = 2 \frac{e^{13} - \mathcal{C}^3}{\chi^{II}}$

& ainsi des autres; les équations (X) donneront, après avoir mis au lieu de  $f^I, f^{II}, \&c.$  leurs valeurs approchées  $\mu^{12}, \mu^{13}, \&c.$  (art. XLV).

$$A^I = ((1, 2) K^{III} K^{IV} - (1, 2)(3, 4)(4, 3) + (1, 3)(3, 2) K^{IV} \\ + (1, 3)(3, 4)(4, 2) + (1, 4)(3, 2)(4, 3) \\ + (1, 4)(4, 2) K^{III}) \frac{\mu^{12}}{\mu^{III2}}$$

$$B^I = ((1, 3) K^{II} K^{IV} + (1, 4)(4, 3) K^{II} + (1, 2)(2, 3) K^{IV} \\ + (1, 4)(2, 3)(4, 2) + (1, 2)(2, 4)(4, 3) \\ - (1, 3)(2, 4)(4, 2)) \frac{\mu^{12}}{\mu^{III2}}$$

$$C^I = ((1, 4) K^{II} K^{III} + (1, 3)(3, 4) K^{II} - (1, 4)(2, 3)(3, 2) \\ + (1, 2)(2, 3)(3, 4) + (1, 3)(2, 4)(3, 2) \\ + (1, 2)(2, 4) K^{III}) \frac{\mu^{12}}{\mu^{IV2}}$$

Chacune de ces quantités étant divisée par

$$K^{II} K^{III} K^{IV} - (3, 4)(4, 3) K^{II} - (2, 3)(3, 2) K^{IV} \\ - (2, 3)(3, 4)(4, 2) - (2, 4)(3, 2)(4, 3) \\ - (2, 4)(4, 2) K^{III}$$

Ces valeurs étant ensuite substituées dans l'équation (Y), on aura, après les réductions:

$$K^I K^{II} K^{III} K^{IV} - (3, 4)(4, 3) K^I K^{II} - (2, 4)(4, 2) K^I K^{III} \\ - (2, 3)(3, 2) K^I K^{IV}$$

124 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS

$$\begin{aligned}
 & - (4, 1) (1, 4) K^{\text{II}} K^{\text{III}} - (3, 1) (1, 3) K^{\text{II}} K^{\text{IV}} \\
 & - (2, 1) (1, 2) K^{\text{III}} K^{\text{IV}} \\
 & - ((2, 3) (3, 4) (4, 2) + (2, 4) (3, 2) (4, 3)) K^{\text{I}} \\
 & - ((3, 1) (1, 4) (4, 3) + (4, 1) (1, 3) (3, 4)) K^{\text{II}} \\
 & - ((2, 1) (1, 4) (4, 2) + (4, 1) (1, 2) (2, 4)) K^{\text{III}} \\
 & - ((2, 1) (1, 3) (3, 2) + (3, 1) (1, 2) (2, 3)) K^{\text{IV}} \\
 & + (2, 1) (1, 2) (3, 4) (4, 3) - (2, 1) (1, 3) (3, 4) (4, 2) \\
 & - (2, 1) (1, 4) (3, 2) (4, 3) - (3, 1) (1, 4) (2, 3) (4, 2) \\
 & - (3, 1) (1, 2) (2, 4) (4, 3) + (3, 1) (1, 3) (2, 4) (4, 2) \\
 & + (4, 1) (1, 4) (2, 3) (3, 2) - (4, 1) (1, 2) (2, 3) (3, 4) \\
 & - (4, 1) (1, 3) (2, 4) (3, 2) = 0 \dots \dots \dots (Z)
 \end{aligned}$$

Équation qui, en remettant au lieu de  $K^{\text{I}}$ ,  $K^{\text{II}}$ , leurs valeurs, & ordonnant les termes par rapport à  $\rho$ , montera au quatrième degré, & donnera par conséquent quatre valeurs de  $\rho$ , que nous dénoterons par  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ .

C.

Les calculs que nous venons de faire dans ce paragraphe n'appartiennent proprement qu'au premier satellite; mais il est aisé de les appliquer à chacun des trois autres, suivant les remarques faites ailleurs. En effet pour les appliquer, par exemple au second satellite, il n'y aura qu'à marquer de deux traits toutes les lettres qui ne sont marquées que d'un seul, & réciproquement ôter un trait à celles qui en ont deux, & ainsi de suite: ainsi dans l'équation (Z), il ne faudra qu'échanger entr'elles les lettres  $K^{\text{I}}$ ,  $K^{\text{II}}$ , & les nombres 1, 2. Or on verra aisément que cette permutation ne produira aucun changement dans l'équation; d'où il s'enfuit que les valeurs de  $\rho$  seront les mêmes pour le second satellite que pour le premier. On en dira autat par rapport au troisième & au quatrième, de sorte que l'équation (Z) servira pour tous



les quatre satellites, & c'est ce qui fait que cette équation monte au quatrième degré.

## C I.

Reprenons maintenant l'équation (P) de l'article XCV, & substituons-y, au lieu de  $\alpha^I, \beta^I, \gamma^I$ , leurs valeurs  $A^I\sqrt{-1}, B^I\sqrt{-1}, C^I\sqrt{-1}$ , (art. XCVII), & au lieu de  $V^I$  sa valeur  $\mu^I(1 - \frac{1}{2}nv^I)\sqrt{-1}$ , (art. XCVII), c'est-à-dire, à cause de  $\mu^I v^I = \rho$  (art. XCVIII),  $(\mu^I - \frac{\rho}{2})\sqrt{-1}$ , on aura, en négligeant pour tout les termes affectés de  $n$ , excepté dans  $e^{\frac{V^I t}{V^I}}$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dx^I}{dt} + A^I \left( \frac{dP}{dt} + \frac{dp}{dt} \sqrt{-1} \right) + B^I \left( \frac{dQ}{dt} + \frac{dq}{dt} \sqrt{-1} \right) \right. \\ & + C^I \left( \frac{dR}{dt} + \frac{dr}{dt} \sqrt{-1} \right) - \mu^I x^I \sqrt{-1} \\ & + A^I (2\mu^{II} - \mu^I) (p - P\sqrt{-1}) + B^I (2\mu^{III} - \mu^I) (q - Q\sqrt{-1}) \\ & \left. + C^I (2\mu^{IV} - \mu^I) (r - R\sqrt{-1}) \right) e^{(\mu^I - \frac{1}{2}n\rho)t\sqrt{-1}} = \text{constante.} \end{aligned}$$

C'est-à-dire, en mettant au lieu de  $e^{(\mu^I - \frac{1}{2}n\rho)t\sqrt{-1}}$  sa valeur  $\cos(\mu^I - \frac{1}{2}n\rho)t + \sin(\mu^I - \frac{1}{2}n\rho)t\sqrt{-1}$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dx^I}{dt} + A^I \left( \frac{dP}{dt} + (2\mu^{II} - \mu^I)p \right) + B^I \left( \frac{dQ}{dt} + (2\mu^{III} - \mu^I)q \right) \right. \\ & \left. + C^I \left( \frac{dR}{dt} + (2\mu^{IV} - \mu^I)r \right) \right) \cos(\mu^I - \frac{n}{2}\rho^I)t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \mu^I x^I - A^I \left( \frac{dP}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^I)P \right) - B^I \left( \frac{dQ}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^I)Q \right) \right. \\ & \left. - C^I \left( \frac{dR}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^I)R \right) \right) \sin(\mu^I - \frac{n}{2}\rho^I)t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dx^I}{dt} + A^I \left( \frac{dP}{dt} + (2\mu^{II} - \mu^I)p \right) + B^I \left( \frac{dQ}{dt} + (2\mu^{III} - \mu^I)q \right) \right. \\ & \left. + C^I \left( \frac{dR}{dt} + (2\mu^{IV} - \mu^I)r \right) \right) \sin(\mu^I - \frac{n}{2}\rho)t\sqrt{-1} - \end{aligned}$$

$$\left( \mu^I x^I - A^I \left( \frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^I)P \right) - B^I \left( \frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^I)Q \right) - C^I \left( \frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^I)R \right) \right) \cos. \left( \mu^I - \frac{n}{2}\rho \right) t \sqrt{-1}$$

$\equiv$  constante.

équation qui, à cause du radical  $\sqrt{-1}$ , lequel peut avoir indifféremment les signes + ou -, se decompose en ces deux-ci.

$$\left( \frac{dx^I}{dt} + A^I \left( \frac{dP}{dt} + (2\mu^{II} - \mu^I)p \right) + B^I \left( \frac{dQ}{dt} + (2\mu^{III} - \mu^I)q \right) + C^I \left( \frac{dR}{dt} + (2\mu^{IV} - \mu^I)r \right) \right) \cos. \left( \mu^I - \frac{n}{2}\rho \right) t +$$

$$\left( \mu^I x^I - A^I \left( \frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^I)P \right) - B^I \left( \frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^I)Q \right) - C^I \left( \frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^I)R \right) \right) \sin. \left( \mu^I - \frac{n}{2}\rho \right) t = D^I \dots (\alpha)$$

&

$$\left( \frac{dx^I}{dt} + A^I \left( \frac{dP}{dt} + (2\mu^{II} - \mu^I)p \right) + B^I \left( \frac{dQ}{dt} + (\mu^{III} - \mu^I)q \right) + C^I \left( \frac{dR}{dt} + (2\mu^{IV} - \mu^I)r \right) \right) \sin. \left( \mu^I - \frac{n}{2}\rho \right) t -$$

$$\left( \mu^I x^I - A^I \left( \frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^I)P \right) - B^I \left( \frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^I)Q \right) - C^I \left( \frac{dr}{dt} - (\mu^{IV} - \mu^I)R \right) \right) \cos. \left( \mu^I - \frac{n}{2}\rho \right) t = E^I \dots (\beta)$$

$D^I$  &  $E^I$  étant deux constantes arbitraires que nous déterminerons dans un moment.

On aura donc par là

$$\begin{aligned} \mu^I x^I - A^I \left( \frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^I)P \right) - B^I \left( \frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^I)Q \right) \\ - C^I \left( \frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^I)R \right) = D^I \sin. \left( \mu^I - \frac{n}{2}\rho \right) t \\ - E^I \cos. \left( \mu^I - \frac{n}{2}\rho \right) t \dots \dots \dots (\gamma) \end{aligned}$$

Équation qui suffira pour trouver la valeur de  $x^I$ , comme on le verra ci-après.

## C I I.

Soit, lorsque  $t=0$ ,

$$x^I = X^I, x^{II} = X^{II}, x^{III} = X^{III}, x^{IV} = X^{IV}, \&$$

$$\frac{dx^I}{dt} = Y^I, \frac{dx^{II}}{dt} = Y^{II}, \frac{dx^{III}}{dt} = Y^{III}, \frac{dx^{IV}}{dt} = Y^{IV};$$

$$\text{On aura (art. XCII), } P = X^{II}, Q = X^{III}, R = X^{IV}, \\ p = 0, q = 0, r = 0.$$

$$\text{Ensuite } \frac{dP}{dt} = Y^{II}, \frac{dQ}{dt} = Y^{III}, \frac{dR}{dt} = Y^{IV},$$

$$\frac{dp}{dt} = (\mu^{II} - \mu^I) X^{II}, \quad \frac{dq}{dt} = (\mu^{III} - \mu^I) X^{III},$$

$$\frac{dr}{dt} = (\mu^{IV} - \mu^I) X^{IV}.$$

Donc substituant ces valeurs dans les équations ( $\alpha$ ) & ( $\beta$ ), & faisant  $t=0$ , on aura :

$$D^I = Y^I + A^I Y^{II} + B^I Y^{III} + C^I Y^{IV}, \&$$

$$E^I = -(\mu^I X^I + A^I \mu^{II} X^{II} + B^I \mu^{III} X^{III} + C^I \mu^{IV} X^{IV})$$

## C I I I.

Soit maintenant, pour abrégé,

$$\frac{dp}{dt} - (2\mu^{II} - \mu^I) P = (P), \quad \frac{dq}{dt} - (2\mu^{III} - \mu^I) Q = (Q)$$

$$\& \frac{dr}{dt} - (2\mu^{IV} - \mu^I) R = (R),$$

L'équation ( $\gamma$ ) deviendra:

$$\mu^I x^I - A^I (P) - B^I (Q) - C^I (R) = D^I \sin.(\mu^I - \frac{\pi}{2} \rho) t \\ - E^I \cos.(\mu^I - \frac{\pi}{2} \rho) t$$

Substituons successivement, dans cette équation, au lieu de  $\rho$ , les quatre valeurs  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  (art. XCIX), on aura :

$$\mu^1 x^1 - A^1_1(P) - B^1_1(Q) - C^1_1(R) = D^1_1 \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_1) \epsilon$$

$$- E^1_1 \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_1) \epsilon$$

$$\mu^1 x^1 - A^1_2(P) - B^1_2(Q) - C^1_2(R) = D^1_2 \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_2) \epsilon$$

$$- E^1_2 \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_2) \epsilon$$

$$\mu^1 x^1 - A^1_3(P) - B^1_3(Q) - C^1_3(R) = D^1_3 \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_3) \epsilon$$

$$- E^1_3 \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_3) \epsilon$$

$$\mu^1 x^1 - A^1_4(P) - B^1_4(Q) - C^1_4(R) = D^1_4 \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_4) \epsilon$$

$$- E^1_4 \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_4) \epsilon$$

( $A^1_1, B^1_1, C^1_1, D^1_1, E^1_1, A^1_2, B^1_2, C^1_2, D^1_2, E^1_2, \&c.$  étant ce que deviennent les quantités  $A^1, B^1, C^1, D^1, E^1$ , lorsque  $\rho$  devient  $\rho_1, \rho_2, \&c.$ )

Donc éliminant de ces quatre équations les trois inconnues ( $P$ ), ( $Q$ ), ( $R$ ) on aura la valeurs de  $x^1$ ,

C I V.

Pour cet effet, je multiplie la seconde équation par  $\alpha^1$ , la troisième par  $\beta^1$ , la quatrième par  $\gamma^1$  ( $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1$  étant de nouvelles indéterminées); après quoi je les ajoute toutes quatre ensemble, & je fais évanouir séparément chacun des coefficients de ( $P$ ), ( $Q$ ), ( $R$ ) j'ai

$$\left. \begin{aligned} A^1_1 + \alpha^1 A^1_2 + \beta^1 A^1_3 + \gamma^1 A^1_4 &= 0 \\ B^1_1 + \alpha^1 B^1_2 + \beta^1 B^1_3 + \gamma^1 B^1_4 &= 0 \\ C^1_1 + \alpha^1 C^1_2 + \beta^1 C^1_3 + \gamma^1 C^1_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\delta)$$

&

$$x^1 = \frac{D^1}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_1) \epsilon$$

$$- \frac{E^1_1}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_1) \epsilon$$

$$+ \frac{\alpha^1 D^1_2}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_2) \epsilon$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1 \alpha^1 E^1_2}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 2) t \\
 & + \frac{\beta^1 D^1_3}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \sin. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 3) t \\
 & - \frac{\beta^1 E^1_3}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 2) t \\
 & + \frac{\gamma^1 D^1_4}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \sin. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 4) t \\
 & - \frac{\beta^1 E^1_4}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \sin. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 4) t
 \end{aligned}$$

## C V.

On peut simplifier cette expression de  $x^1$ , en supposant en général  $D^1 = -\delta^1 \sin. \omega^1$ ,  $E^1 = -\delta^1 \cos. \omega^1$ ; ce qui donne  $\delta^1 = \sqrt{D^{12} + E^{12}}$ , &  $\text{tang. } \omega^1 = \frac{D^1}{E^1}$ , savoir :

$$\begin{aligned}
 \delta^1 &= \sqrt{Y^1 + A^1 Y^{II} + E^1 Y^{III} + C^1 Y^{IV} + (\alpha^1 X^1 + A^1 \mu^{II} X^{II} + B^1 \mu^{III} X^{III} + C^1 \mu^{IV} X^{IV})^2} \\
 \& \text{ tang. } \omega^1 &= - \frac{Y^1 + A^1 Y^{II} + E^1 Y^{III} + C^1 Y^{IV}}{\mu^1 X^1 + A^1 \mu^{II} X^{II} + B^1 \mu^{III} X^{III} + C^1 \mu^{IV} X^{IV}}
 \end{aligned}$$

Par ce moyen, on aura :

$$D^1 \sin. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 1) t - E^1 \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 1) t = \delta^1 \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 1) t + \omega^1,$$

& de là :

$$\begin{aligned}
 D^1_1 \sin. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 1) t - E^1_1 \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 1) t \\
 = \delta^1_1 \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 1) t + \omega^1_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^1_2 \sin. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 1) t - E^1_1 \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 2) t \\
 = \delta^1_2 \cos. (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho 2) t + \omega^1_2, \& \text{ ainsi de suite,}
 \end{aligned}$$

Donc si on fait, pour plus de simplicité,

$$\begin{aligned}
 \epsilon^1_1 &= \frac{\delta^1_1}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)}, & \epsilon^1_2 &= \frac{\alpha^1 \delta^1_2}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)} \\
 \epsilon^1_3 &= \frac{\beta^1 \delta^1_1}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)}, & \epsilon^1_4 &= \frac{\gamma^1 \delta^1_4}{\mu^1(1 + \alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1)}
 \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} x^1 = & \varepsilon^1_1 \cos. \left( (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_1) t + \omega^1_1 \right) + \varepsilon^1_2 \cos. \left( (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_2) t \right. \\ & \left. + \omega^1_2 \right) + \varepsilon^1_3 \cos. \left( (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega^1_3 \right) \\ & + \varepsilon^1_4 \cos. \left( (\mu^1 - \frac{n}{2} \rho_4) t + \omega^1_4 \right). \end{aligned}$$

## C V I.

SCHOLIE. A l'égard des valeurs de  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$ ,  $\gamma^1$ , on les trouvera aisément par résolution des équations ( $\delta$ ); mais on pourroit encore se servir d'une autre méthode assez simple, que j'exposerai ici en peu de mots.

Qu'on multiplie la seconde de ces équations par  $b$ , & la troisième par  $c$  ( $b$  &  $c$  étant deux indéterminées) & qu'on les ajoute toutes ensemble, on aura

$$\begin{aligned} A^1_1 + b B^1_1 + c C^1_1 + (A^1_2 + b B^1_2 + c C^1_2) \alpha^1 + (A^1_3 \\ + b B^1_3 + c C^1_3) \beta^1 + (A^1_4 + b B^1_4 + c C^1_4) \gamma^1 = 0. \end{aligned}$$

Or, pour avoir la valeur de  $\alpha^1$ , on fera,

$$A^1_3 + b B^1_3 + c C^1_3 = 0 \quad \& \quad A^1_4 + b B^1_4 + c C^1_4 = 0;$$

& l'on aura

$$\alpha^1 = - \frac{A^1_1 + b B^1_1 + c C^1_1}{A^1_2 + b B^1_2 + c C^1_2}.$$

Les quantités  $b$  &  $c$  doivent donc être telles que l'on ait  $A^1 + b B^1 + c C^1 = 0$ , en mettant successivement au lieu de  $\rho$ ,  $\rho_3$  &  $\rho_4$ ;

Or l'équation  $A^1 + b B^1 + c C^1 = 0$ . si l'on y substitue les valeurs de  $A^1$ ,  $B^1$ ,  $C^1$  (art. XCIX) & qu'on l'ordonne par rapport à  $\rho$ , fera de cette forme  $\rho^2 - M\rho + N = 0$ , dont les racines devront être  $\rho_3$  &  $\rho_4$ ; c'est pourquoi l'on aura  $M = \rho_3 + \rho_4$ , &  $N = \rho_3 \rho_4$ , d'où l'on tirera  $b$  &  $c$ ; on trouvera de la même manière les valeurs de  $\beta^1$  & de  $\gamma^1$ .

## C V I I.

Ayant trouvé la valeur de  $x^I$ , on trouvera celle de  $y^I$  par l'équation (H) de l'article LXXXVI;

On aura donc, en négligeant les termes affectés de  $x$ .

$$y = -2\varepsilon^I_1 \sin.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho_1)t + \omega^I_1) - 2\varepsilon^I_2 \sin.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho_2)t + \omega^I_2) - 2\varepsilon^I_3 \sin.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho_3)t + \omega^I_3) - 2\varepsilon^I_4 \times \sin.((\mu^I - \frac{n}{2}\rho_4)t + \omega^I_4).$$

## C V I I I.

On aura des expressions semblables pour les valeurs de  $x^{II}$ ,  $y^{II}$ , &c. Voyez la remarque de l'article C.

## C I X.

Pour peu qu'on examine ces valeurs de  $x$  & de  $y$  on verra aisément qu'elles renferment, pour ainsi dire, quatre équations du centre prises dans des ellipses mobiles, dont les excentricités seroient  $n\varepsilon_1$ ,  $n\varepsilon_2$ ,  $n\varepsilon_3$ ,  $n\varepsilon_4$ , & les anomalies moyennes  $(\mu - \frac{n}{2}\rho_1)t + \omega^I$ ,  $(\mu - \frac{n}{2}\rho_2)t + \omega_2$ ,  $(\mu - \frac{n}{2}\rho_3)t + \omega_3$ ,  $(\mu - \frac{n}{2}\rho_4)t + \omega_4$ ; d'où l'on voit que les mouvemens de ces anomalies feront au mouvement moyen du satellite comme  $1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\mu}$ ,  $1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_2}{\mu}$ ,  $1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_3}{\mu}$ , &  $1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_4}{\mu}$  à 1; par conséquent les apsidés avanceront de  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\mu} 360^\circ$ ,  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_2}{\mu} 360^\circ$ ,  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_3}{\mu} 360^\circ$ ,  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\rho_4}{\mu} 360^\circ$  à chaque révolution du satellite.

On pourroit, par la méthode de l'article III, réduire ces quatre équations à une seule, dans laquelle l'excentricité seroit variable, & le mouvement des apsidés non

132 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS  
uniforme ; mais je crois qu'il est plus commode de les  
laisser sous leur forme naturelle.

C X.

On suivra une méthode analogue pour trouver la va-  
leur de  $z^I$ , au moyen des équations (N<sub>1</sub>), (N<sub>2</sub>), &c. de  
l'article XCI. Mais sans entrer dans de nouveaux calculs  
à cet égard, il suffira de remarquer que les équations  
dont nous parlons peuvent se déduire des équations (M<sub>1</sub>),  
(M<sub>2</sub>) &c en changeant  $x$  en  $z$ , M en N,  $\Psi$  en  $\Gamma$ , &  
supposant nulles toutes les quantités marquées par la let-  
tre  $\Pi^0$ ; d'où il s'ensuit.

1.<sup>o</sup> Que si l'on fait (art. XCVIII)

$$(1, 2) = \overset{\sigma}{\Gamma^I} (a^I, a^{II})$$

$$(1, 3) = \overset{0}{\Gamma^I} (a^I, a^{III})$$

$$(2, 1) = \overset{0}{\Gamma^I} (a^{II}, a^I) \text{ \&c.}$$

Ensuite

$$K^I = -2 \frac{\overset{\sigma}{\mu^I} - \pi^I}{\chi^I}, K^{II} = -2 \frac{\overset{\sigma}{\mu^I} - \pi^{II}}{\chi^{II}} \text{ \&c.}$$

On aura pour  $A^I, B^I, C^I$  les mêmes expressions que dans  
l'article XCIX, & la valeur de  $\sigma$  devra se déterminer au  
moyen de l'équation (Z).

2.<sup>o</sup> Que si on suppose, lorsque  $t = 0$ ,

$$z^I = Z^I, z^{II} = Z^{II}, z^{III} = Z^{III}, z^{IV} = Z^{IV}$$

$$\frac{dz^I}{dt} = V^I, \frac{dz^{II}}{dt} = V^{II}, \frac{dz^{III}}{dt} = V^{III}, \frac{dz^{IV}}{dt} = V^{IV}$$

& qu'on fasse

$$x^I = \sqrt{(V^I + A^I V^{II} + B^I V^{III} + C^I V^{IV})^2 \mu^I Z^I + A^I \mu^{II} Z^{II} + B^I \mu^{III} Z^{III} + C^I \mu^{IV} Z^{IV}}$$

$$\cotang. n^I = \frac{V^I + A^I V^{II} + B^I V^{III} + C^I V^{IV}}{\mu^I Z^I + A^I \mu^{II} Z^{II} + B^I \mu^{III} Z^{III} + C^I \mu^{IV} Z^{IV}}$$

Ensuite



$$\lambda^I_1 = \frac{\alpha^I}{\mu^I(1 + \alpha^I + \beta^I + \gamma^I)}, \quad \lambda^I_2 = \frac{\alpha^I \chi^I_2}{\mu^I(1 + \alpha^I + \beta^I + \gamma^I)}$$

$$\lambda^I_3 = \frac{\beta^I \chi^I_3}{\mu^I(1 + \alpha^I + \beta^I + \gamma^I)}, \quad \lambda^I_4 = \frac{\gamma^I \chi^I_4}{\mu^I(1 + \alpha^I + \beta^I + \gamma^I)}$$

Les quantités,  $\alpha^I, \beta^I, \gamma^I$  étant déterminées par les équations ( $\mathcal{D}$ ) de l'article CIV, on aura :

$$z^I = \lambda^I_1 \sin.((\mu^I + \frac{n}{2}\sigma_1)t + n^I_1) + \lambda^I_2 \sin.((\mu^I + \frac{n}{2}\sigma_2)t + n^I_2) \\ + \lambda^I_3 \sin.((\mu^I + \frac{n}{2}\sigma_3)t + n^I_3) + \lambda^I_4 \sin.((\mu^I + \frac{n}{2}\sigma_4)t + n^I_4) \\ \& \text{ ainsi des autres quantités } z^{II}, z^{III}, z^{IV}, \&c.$$

## C X I.

Cette expression de  $z^I$  est composée, comme l'on voit, de quatre termes, chacun analogue à l'expression de  $z^I$ , trouvée dans l'article XL, laquelle donne un plan mobile dont l'inclinaison est constante; donc pour trouver la position de l'orbite d'un Satellite quelconque, il n'y aura qu'à imaginer quatre plans passant par le centre de Jupiter, dont le premier se meuve sur celui de l'orbite de cette Planète, en gardant toujours avec lui la même inclinaison; le second se meuve de la même manière sur le premier; le troisième sur le second, & enfin le quatrième qui sera celui de l'orbite du Satellite, se meuve pareillement sur le troisième. Ainsi les quantités  $n\lambda_1, n\lambda_2, n\lambda_3, n\lambda_4$ , seront les tangentes des inclinaisons du premier plan sur celui de Jupiter, du second sur le premier, du troisième sur le second, & du quatrième sur le troisième, & les angles  $(\mu + \frac{n}{2}\sigma_1)t + n_1, (\mu + \frac{n}{2}\sigma_2)t + n_2, (\mu + \frac{n}{2}\sigma_3)t + n_3, (\mu + \frac{n}{2}\sigma_4)t + n_4$ ; seront les distances du satellite aux nœuds du premier plan avec celui de  $\mathcal{T}$ , du second avec le premier, du troisième avec le second, & du quatrième avec le troisième; d'où l'on voit que les nœuds de ces quatre plans rétrograderont pendant une révolution du

satellite de  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\sigma^1}{\mu} 360^\circ$ ,  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{\mu} 360^\circ$ ,  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\sigma^3}{\mu} 360^\circ$ ,  $\frac{n}{2} \cdot \frac{\sigma^4}{\mu} 360^\circ$ .

Si on vouloit connoître directement la position du plan de l'orbite du Satellite, par rapport à celui de l'orbite de Jupiter, on y parviendroit par la méthode de l'article III; car nommant  $n\tau$  la tangente de l'inclinaison, &  $\psi$  la distance du Satellite au nœud ascendant, on auroit

$$n\tau = \sqrt{n^2 z^2 + \frac{n^2 d\tau^2}{d\varphi^2}}, \quad \& \quad \text{tang. } \psi = \frac{n\tau d\varphi}{nd\tau}, \quad \text{avoir, à}$$

$$\text{cause de } \varphi = \mu t + n\gamma, \quad \tau = \sqrt{z^2 + \frac{d\tau^2}{\mu^2 dt^2}} \quad \& \quad \text{tang. } \psi = \frac{m\tau dt}{dz}$$

d'où l'on tire, par les logarithmes,

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left( l \left( \frac{d\tau}{\mu dt} + z\sqrt{-1} \right) - l \left( \frac{d\tau}{\mu dt} + z\sqrt{-1} \right) \right)$$

expression dans laquelle les imaginaires se détruiront mutuellement, mais qu'il sera difficile, peut-être impossible de réduire à une forme finie. Ainsi je crois qu'il vaudra mieux s'en tenir à la formule de l'article CIX.

## C X I I.

Telles sont les premières valeurs des variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dans lesquelles on a négligé les quantités de l'ordre de  $n$ . Si on veut y avoir égard, il n'y a qu'à substituer ces mêmes valeurs dans les équations de l'article LXXVI, & les intégrer ensuite par la méthode ordinaire (art. XXXIV).

Nous n'entrons point dans ce détail qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul, & qui d'ailleurs ne paroît guères nécessaire dans la théorie des Satellites.

Il y a cependant encore quelques termes des équations (G), & (K), (art. LXXVI) auxquels il ne seroit peut être pas inutile d'avoir égard; ce sont ceux qui viennent de l'action du Soleil, & qui renferment les quantités  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $z^1$ , multipliés par  $\cos. 2(m - \mu^1)t$ , ou par  $\sin. 2(m - \mu^1)t$ ;

car en substituant au lieu de ces quantités, leurs valeurs trouvées ci-dessus, on aura, à cause de  $m$  très-petit (article XLVIII), des termes qui augmenteront beaucoup par l'intégration, & qui appartiendront aussi en quelque manière à la première approximation; je dis *en quelque manière*, parce que ces termes, quoique fort augmentés par l'intégration, se trouveront encore assez petits par rapport à ceux que nous avons trouvés jusqu'ici.

En effet les termes dont il s'agit étant tous multipliés par  $n K = \frac{m^2}{\mu^2}$  (Art. XLIX) & devant être divisés par des quantités de l'ordre de  $m$  & de  $n$ , seront encore après l'intégration de l'ordre de  $m$  & par conséquent très-petits. C'est-là la raison pour laquelle nous n'avons point eu d'égard à ces sortes de termes dans les calculs précédens; d'autant plus que notre objet principal est de déterminer les inégalités des Satellites causées par leur action mutuelle, conformément au Programme de l'Académie. Je pourrai peut-être dans une autre occasion reprendre plus au long ces recherches.

## C X I I.

REMARQUE I. Nous avons vu que les quantités  $\rho$  &  $\sigma$  dépendent de deux équations du quatrième degré (art. XCIX). Or, il peut arriver deux cas, qu'il est bon d'examiner. Le premier est celui où ces équations auroient des racines égales; le second, celui où elles auroient des racines imaginaires.

Voyons donc ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Supposons que deux quelconques des valeurs de  $\rho$  soient égales entr'elles, par exemple  $\rho_4 = \rho_3$ . On fera  $\rho_4 = \rho_3 + i$ ,  $i$  étant une quantité évanouissante, & l'on aura (article XCIX).

$A'4 = A'3 + Fi$ ,  $B'4 = B'3 + Gi$ ,  $C'4 = C'3 + Hi$   
 $G, G, H$  étant les coefficients de  $d\rho_3$  dans les différentielles  
 de  $A'3, B'3, C'3$ .

Donc les équations (d) de l'article CIV deviendront, en  
 faisant  $\beta' + \gamma' = b$ , &  $\gamma'i = c$ ,

$$A'1 + a'A'2 + bA'3 + cF = 0$$

$$B'1 + a'B'2 + bB'3 + cG = 0$$

$$C1 + a'C'2 + bC'3 + cH = 0$$

d'où l'on tirera  $a', b',$  &  $c$ .

On aura de même (article CIV)

$$\delta'4 = \delta'3 + \Delta i, \text{ \& } \omega'4 = \omega'3 + \Omega i$$

$\Delta$ , &  $\Omega$  étant pareillement les coefficients de  $d\rho_3$  dans la  
 différentiation de  $\delta'3$ , &  $\omega'3$ .

$$\text{Donc } \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_4) t + \omega'4 \right) = \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega'3 \right) \\ + i \left( \frac{n}{2} t - \Omega \right) \sin. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega'3 \right).$$

Donc les termes  $\epsilon^1_3 \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega'3 \right) + \epsilon^1_4 \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_4) t + \omega'4 \right)$  de la valeur de  $x^1$   
 (art. CIV) se changeront en  $(\epsilon^1_3 + \epsilon^1_4) \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega'3 \right) + \epsilon^1_4 i \left( \frac{n}{2} t - \Omega \right) \sin. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega'3 \right)$ .

$$\text{Or } \epsilon^1_3 + \epsilon^1_4 = \frac{(\beta' + \gamma') \delta^1_3 + \Delta \gamma' i}{\mu' (1 + a' + \beta' + \gamma')} = \frac{b \delta^1_3 + c \Delta}{\mu' (1 + a' + b)}$$

$$\text{\& } \epsilon^1_4 i = \frac{\delta^1_4 \gamma' i}{\mu' (1 + a' + \beta' + \gamma')} = \frac{c \delta^1_3}{\mu' (1 + a' + b)}$$

Donc la valeur de  $x^1$  deviendra

$$x^1 = \epsilon^1_1 \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_1) t + \omega^1_1 \right) + \epsilon^1_2 \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_2) t + \omega^1_2 \right) + \frac{b \delta^1_3 + c \Delta}{\mu' (1 + a' + b)} \cos. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega^1_3 \right) \\ + \frac{c \delta^1_3}{\mu' (1 + a' + b)} \left( \frac{n}{2} t - \Omega \right) \sin. \left( (\mu' - \frac{n}{2} \rho_3) t + \omega^1_3 \right).$$

Par

Par conséquent celle de  $y^1$  sera (art. XC) en négligeant les termes de l'ordre de  $ny^1 = -2\epsilon^1 1 \sin. ((\mu^1 - \frac{1}{2}\rho 1)t + \omega^1 1) - 2\epsilon^1 2 \sin. ((\mu^1 - \frac{1}{2}\rho 2)t + \omega^1 2) - 2 \frac{b\delta^1_3 + C\Delta}{\mu^1(1+a^1+b)} \sin. ((\mu^1 - \frac{1}{2}\rho 3)t + \omega^1 3) - 2 \frac{C\delta^1_3}{\mu^1(1+a^1+b)} (\frac{1}{2}t + \delta) \cos. ((\mu^1 - \frac{1}{2}\rho 3)t + \omega^1 3).$

De-là on voit que les valeurs de  $x^1$ , & de  $y^1$  contiendront dans ce cas un terme multiplié par l'angle  $t$ , lequel donnera par conséquent une équation, dont la valeur ira toujours en augmentant.

On résoudra de la même manière le cas de trois racines égales, & l'on trouvera pour lors dans les valeurs de  $x^1$ , & de  $y^1$  des termes qui contiendront l'angle  $t$  avec son carré  $t^2$ . Et ainsi de suite, s'il y avoit quatre racines égales.

2°. Soient maintenant  $\rho 3$ , &  $\rho 4$  imaginaires, on les mettra d'abord (ce qui est toujours possible comme l'on fait) sous cette forme  $\rho 3 = p + q\sqrt{-1}$ , &  $\rho 4 = p - q\sqrt{-1}$ ,  $p$ , &  $q$  étant des quantités réelles; moyennant quoi les quantités  $A^1_3$ ,  $B^1_3$ ,  $C^1_3$ ,  $A^1_4$ ,  $B^1_4$ ,  $C^1_4$  se ramèneront à la forme suivante,

$$A^1_3 = P + Q\sqrt{-1}, A^1_4 = P - Q\sqrt{-1}$$

$$B^1_3 = R + S\sqrt{-1}, B^1_4 = R - S\sqrt{-1}$$

$$C^1_3 = T + V\sqrt{-1}, C^1_4 = T - V\sqrt{-1}$$

Faisant ces substitutions dans les équations ( $\delta$ ) & supposant  $\beta^1 + \gamma^1 = 2b$ ,  $\beta^1 = 2c\sqrt{-1}$ , les imaginaires disparaîtront, de sorte qu'on aura pour  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des valeurs réelles; donc les quantités  $\beta^1$ ,  $\gamma^1$  seront encore de cette forme  $\beta^1 = b + c\sqrt{-1}$ ,  $\gamma^1 = b - c\sqrt{-1}$ .

De plus, on verra par l'art. CII, que les quantités  $D^1_3$ ;  $E^1_3$ ,  $D^1_4$ ,  $E^1_4$  seront aussi de la forme :

$$D^1_3 = F + G\sqrt{-1}, D^1_4 = F - G\sqrt{-1},$$

$$E^1_3 = F + G\sqrt{-1}, E^1_4 = F - G\sqrt{-1},$$

Donc on aura aussi

$$\begin{aligned} \frac{\beta^1 D^1_3}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} &= H + L\sqrt{-1}, \quad \frac{\gamma^1 D^1_4}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} \\ &= H - L\sqrt{-1} \quad \frac{\beta^1 E^1_3}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} = H + L\sqrt{-1}; \\ \frac{\gamma^1 E^1_4}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} &= h - l\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Or  $\sin(\mu^1 - \frac{n}{2}(p \pm q\sqrt{-1}))t = \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)(t\chi \cos. \frac{n}{2}(qt\sqrt{-1}) \pm \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)t\chi \sin. \frac{n}{2}(qt\sqrt{-1}))$ , & de même  $\cos.(\mu^1 - \frac{n}{2}(p \pm q\sqrt{-1}))t = \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)t\chi \cos. \frac{n}{2}(qt\sqrt{-1}) \pm \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)t\chi \sin. \frac{n}{2}(qt\sqrt{-1})$ .

Donc les termes

$$\begin{aligned} &\frac{\beta^1 D^1_3}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2}p3)t - \frac{\beta^1 E^1_3}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} \\ &\cos.(\mu^1 - \frac{n}{2}p3)t \quad \frac{\gamma^1 D^1_4}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2}p4)t \\ &- \frac{\gamma^1 E^1_4}{\mu^1(1+d+\beta^1+\gamma^1)} \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2}p4)t \end{aligned}$$

la valeur de  $x^1$  (art. CIII) se changeront en

$$\begin{aligned} &2(H \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)t - h \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)t) \cos. \frac{n}{2}(qt\sqrt{-1}) \\ &2(L \cos.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)t + l \sin.(\mu^1 - \frac{n}{2}p)t) \sin. \frac{n}{2}(qt\sqrt{-1}) \chi \sqrt{-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en mettant au lieu de  $\cos. \frac{n}{2}(qt\sqrt{-1})$

$$\text{leurs valeurs exponentielles } \frac{e^{-\frac{n}{2}qt} + e^{\frac{n}{2}qt}}{2}, \quad \frac{e^{-\frac{n}{2}qt} - e^{\frac{n}{2}qt}}{2\sqrt{-1}};$$

$$e^{\frac{1}{2}qt} ((H-l) \sin. (\mu^1 - \frac{1}{2}p)t + (L+h) \cos. (\mu^1 - \frac{1}{2}p)t) +$$

$$e^{-\frac{1}{2}qt} ((H+l) \sin. (\mu^1 - \frac{1}{2}p)t - (L-h) \cos. (\mu^1 - \frac{1}{2}p)t)$$

expressions qui peuvent encore se changer en celles-ci :

$$\check{e} e^{\frac{n}{2}qt} \cos. (\mu^1 - \frac{1}{2}p)t + \check{\omega}, + \check{e} e^{-\frac{n}{2}qt} \cos. (\mu^1 - \frac{1}{2}p)t + \check{\omega}$$

$$\text{en faisant } H-l = -\check{e} \sin. \check{\omega}, L+h = \check{e} \cos. \check{\omega}, H+l = \\ -\check{e} \sin. \check{\omega}, h-L = \check{e} \cos. \check{\omega}.$$

On mettra donc ces termes au lieu des termes

$$e^1 3 \cos. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p 3)t + \omega^1 3) + e^1 4 \cos. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p 4)t + \omega^1 4)$$

de la valeur de  $x^1$  de l'article C I V, & l'on aura

$$x^1 = e^1 1 \cos. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p 1)t + \omega^1 1) + e^1 2 \cos. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p 2)t$$

$$+ \omega^1 2) + \check{e} e^{\frac{n}{2}qt} \cos. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p)t + \check{\omega}) + \check{e} e^{-\frac{n}{2}qt} \cos. ((\mu^1$$

$$- \frac{1}{2}p)t + \check{\omega}), \text{ d'où l'on tire ( article X C )}$$

$$y^1 = -2 e^1 1 \sin. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p 1)t + \omega^1 1) - 2 e^1 2 \sin. ((\mu^1$$

$$- \frac{1}{2}p 2)t + \omega^1 2) - 2 \check{e} e^{\frac{n}{2}qt} \sin. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p)t + \check{\omega})$$

$$- 2 \check{e} e^{-\frac{n}{2}qt} \sin. ((\mu^1 - \frac{1}{2}p)t + \check{\omega})$$

Ainsi, dans ce cas, les valeurs de  $x$ , & de  $y$  contiendront deux termes; l'un multiplié par  $e^{\frac{1}{2}qt}$ ,

& l'autre par  $e^{-\frac{1}{2}qt}$ , lesquels donneront dans le mouvement des Satellites deux équations, dont l'une ira toujours en augmentant, & l'autre ira en diminuant.

Si les valeurs de  $p$  étoient toutes quatre imaginaires, on feroit sur les deux premiers termes de l'expression de  $x^1$  (article C III) les mêmes raisonnemens & les mêmes ré-

140 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS  
ductions que nous nous venons de faire sur les deux autres.

On en dira autant des valeurs de  $z$  lesquelles sont entièrement analogues à celles de  $x$  (article CIX) ; de sorte que, si l'équation en  $\sigma$  avoit des racines égales ou imaginaires, les latitudes des Satellites se trouveroient sujettes à des variations qui augmenteroient de plus en plus.

#### C X I V.

REMARQUE II. A l'égard des quantités  $\varepsilon^I_1, \varepsilon^I_2$  &c.  $\omega^I_1, \omega^I_2$  &c.  $\varepsilon^{II}_1, \varepsilon^{II}_2$  &c. &c. il faudra les déterminer par le moyen des observations; mais il y a là-dessus une remarque importante à faire; c'est que, comme il n'y a proprement que les huit quantités  $X^I, Y^I, X^{II}, Y^{II}, X^{III}, Y^{III}, X^{IV}, Y^{IV}$  qui soient absolument arbitraires (article CII) & que les quantités, dont nous parlons, soient au nombre de 32, on aura 24 conditions à vérifier.

Il en est de même des quantités  $\lambda^I_1, \lambda^I_2, \&c. \eta^I_1, \eta^I_2$  &c.  $\lambda^{II}_1, \lambda^{II}_2, \&c. \eta^{II}_1, \eta^{II}_2$  &c. &c. (art. CX).

#### C X V.

SCHOLIE. Nous avons déjà donné les valeurs de  $\zeta^I, \zeta^{II}, \zeta^{III}, \zeta^{IV}$ , (art. LXXXII) aussi bien que celles de  $\pi^I, \pi^{II}, \pi^{III}, \pi^{IV}$ , (art. LXXXVI).

Ainsi pour avoir les valeurs de  $\rho$ , & de  $\sigma$  il ne s'agira plus que de trouver les valeurs numériques des coefficients de l'équation (Z) (article XCIX) dans les deux cas (article XCVIII, CIX).



P R E M I E R C A S.

Suivant les formules de l'art. XCVIII, on a

$$(1, 2) = \Psi^{\circ} I (a^I, a^{II}) - \mu^{II} \overset{\circ}{\Pi} I (a^I, a^{II})$$

donc, faisant les substitutions de l'art. XCI, & mettant par tout  $\mu^{II}$  au lieu de  $M^{II}$ , on aura

$$(1, 2) = \check{\Psi} I (a^I, a^{II}) + 2 \check{\Gamma} I (a^I, a^{II}) - 4 \frac{\mu^I}{\mu^{II}} \hat{\Gamma} I (a^I, a^{II}) \\ - (2 \hat{\Psi} I (a^I, a^{II}) + 4 \frac{\mu^{II} - \mu^I}{\mu^{II}} \hat{\Gamma} I (a^I, a^{II})) \frac{\mu^I (2 \mu^{II} - \mu^I)}{\mu^{II} - (\mu^{II} - \mu^I)^2}$$

ce qui se réduit à :

$$(1, 2) = \check{\Psi} I (a^I, a^{II}) + 2 \check{\Gamma} I (a^I, a^{II}) - 2 \hat{\Psi} I (a^I, a^{II}) \\ - 4 \hat{\Gamma} I (a^I, a^{II}).$$

On trouvera de même :

$$(1, 3) = \check{\Psi} I (a^I, a^{III}) + 2 \hat{\Gamma} I (a^I, a^{III}) - 2 \hat{\Psi} I (a^I, a^{III}) \\ - 4 \hat{\Gamma} I (a^I, a^{III});$$

$$(2, 1) = \check{\Psi} I (a^{II}, a^I) + 2 \hat{\Gamma} I (a^{II}, a^I) - 2 \check{\Psi} I (a^{II}, a^I) \\ - 4 \hat{\Gamma} I (a^{II}, a^I) \text{ \& ainsi des autres.}$$

Or, nous avons déjà donné les valeurs des quantités  $\check{\Gamma} I$ , &  $\hat{\Gamma} I$  (art. XLVII); il ne reste plus qu'à chercher celles de  $\check{\Psi} I$ , & de  $\hat{\Psi} I$ .

Pour cela, il faut auparavant chercher les valeurs des quantités  $\Psi$ ,  $\Psi_1$ , &  $\Psi_2$ . Or, en faisant  $q = \frac{a^I}{a^{II}}$  on trouve

$$\text{(art. XXII), à cause de } \Lambda (a^I, a^{II}) = a^{n-5} (A), \Lambda I (a^I, a^{II}) \\ = a^{n-5} (B) \text{ \&c. (art. LXXX),}$$

$$\Psi (a^I, a^{II}) = \frac{q(B) - 2(A)}{2 a^{II \ 3}}$$

$$\Psi I (a^I, a^{II}) = \frac{q(C) - 2(B) + 2q(A)}{2 a^{II \ 3}}$$

$$\Psi_2 (a^I, a^{II}) = \frac{q(D) - 2(C) + q(B)}{2 a^{II \ 3}}$$

142 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS  
 &t de même, à cause de  $\Lambda(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \Lambda(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})$  &c.,

$$\Psi(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{q(B) - 2q^2(A)}{2a^{\text{II}}}$$

$$\Psi_1(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{q(C) - 2q^2(B) + 2q(A)}{2a^{\text{II}}}$$

$$\Psi_2(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \frac{q(D) - 2q^2(C) + q(B)}{2a^{\text{II}}}$$

Donc (art. LXXX)

$$\Psi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) = \Pi(a^{\text{II}}, a^{\text{I}})$$

$$\Psi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) = \Pi_1(a^{\text{II}}, a^{\text{I}})$$

&c :

$$\Psi(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \Pi(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})$$

$$\Psi_1(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = \Pi_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}})$$

&c :

c'est à-dire que les quantités  $\Psi$  sont les réciproques des quantités  $\Pi$ .

On aura doc (art. XXIV)

$$\check{\Psi}_1(a^{\text{I}}, a^{\text{II}}) = 3 \frac{q^2 Q_2 - 2q^3 Q_1 + 2q^2 Q}{2} + \frac{q^2 C + 2q^2 A}{2} + 2q^2$$

expression qui servira aussi pour les quantités analogues:  
 $\check{\Psi}_1(a^{\text{I}}, a^{\text{III}})$ ,  $\check{\Psi}_1(a^{\text{II}}, a^{\text{III}})$  &c, en faisant successivement

$$q = \frac{a^{\text{I}}}{a^{\text{III}}}, q = \frac{a^{\text{II}}}{a^{\text{III}}} \text{ \&c.}$$

Ensuite on aura, pour les quantités réciproques,

$$\check{\Psi}_1(a^{\text{II}}, a^{\text{I}}) = 3 \frac{q P_2 - 2 P_1 + 2q P}{2} + \frac{q C + 2q A}{2} + \frac{2}{q^2}$$

& ainsi des autres.

Pareillement on trouvera (art. XXV).

$$\hat{\Psi}^I(a^I, a^{II}) = 3 \frac{q^2 Q^2 - 2q^2 Q}{2} + \hat{\Gamma}^I(a^I, a^{II}) - 3q^2$$

&

$$\hat{\Psi}^I(a^{II}, a^I) = 3 \frac{q^2 Q^2 - 2q^2 Q}{2} + \hat{\Gamma}^I(a^{II}, a^I) - \frac{3}{q^2}$$

& ainsi des autres.

De là on tire, en employant les valeurs de la table de l'art. LXXXI,

	$(a^I, a^{II})$	$(a^I, a^{III})$	$(a^I, a^{IV})$	$(a^{II}, a^{III})$	$(a^{II}, a^{IV})$	$(a^{III}, a^{IV})$
$\check{\Psi}^I$	-1,708	-0,181	-0,008	-1,733	-0,132	-0,887
$\hat{\Psi}^I$	0,366	0,068	0,003	0,153	0,036	0,214
	$(a^{II}, a^I)$	$(a^{III}, a^I)$	$(a^{IV}, a^I)$	$(a^{III}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{II})$	$(a^{IV}, a^{III})$
$\check{\Psi}^I$	1,203	11,699	29,330	1,580	14,871	3,489
$\hat{\Psi}^I$	-6,181	-13,371	-40,052	-6,500	-16,188	-7,089

ensuite.

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
	-1,578	-0,213	-0,004	-1,155	-0,162	-0,765
	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(4,2)	(4,3)
	-2,365	-0,363	-10,040	-1,414	-0,289	-1,331

Donc l'équation (Z) de l'art. XCIX, deviendra  
 $K^I K^{II} K^{III} K^{IV} - 2, 532 K^I K^{II} - 0, 468 K^I K^{III}$   
 $- 1, 633 K^I K^{IV} - 0, 040 K^{II} K^{III} - 0, 077 K^{II} K^{IV}$   
 $- 3, 732 K^{III} K^{IV} + 1, 013 K^I + 1, 641 K^{II}$   
 $+ 2, 593 K^{III} + 1, 373 K^{IV} - 5, 599 = 0 \dots (e)$   
 où il n'y aura plus qu'à substituer au lieu de  $K^I, K^{II}, K^{III}, K^{IV}$ ,  
 leurs valeurs

$$2 \frac{\frac{\xi}{\mu^I} - \epsilon^I}{\chi^I}, 2 \frac{\frac{\xi}{\mu^{II}} - \epsilon^{II}}{\chi^{II}}, 2 \frac{\frac{\xi}{\mu^{III}} - \epsilon^{III}}{\chi^{III}}, 2 \frac{\frac{\xi}{\mu^{IV}} - \epsilon^{IV}}{\chi^{IV}}$$

## S E C O N D C A S,

On aura ici (art. CIX)

$$(1, 2) = \Gamma^0 1 (a^I, a^{II}), (1, 3) = \Gamma^0 1 (a^I, a^{III}) \&c :$$

$$(2, 1) = \Gamma^0 1 (a^{II}, a^I) \&c,$$

$$\text{Donc faisant successivement } q = \frac{a^I}{a^{II}}, = \frac{a^I}{a^{III}} \&c,$$

on aura (art. XXXII, & XLIII)

$$(1, 2) = q^2 B, (1, 3) = q^2 B \&c,$$

enfaite

$$(2, 1) = q B, (3, 1) = q B \&c.$$

Donc, en employant les valeurs de  $B$  données dans  
 l'art. XLVII, on trouvera,

(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
-1,963	-0,252	-0,037	-1,884	-0,174	-1,151
(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(3, 2)	(4, 2)	(4, 3)
-3,116	-0,640	-0,166	-3,011	-0,489	-2,025

Et

Et l'équation (Z) se changera en celle-ci :

$$K^I K^{II} K^{III} K^{IV} - 2, 331 K^I K^{II} - 0, 085 K^I K^{III} \\ - 5, 675 K^I K^{IV} - 0, 006 K^{II} K^{III} - 0, 161 K^{II} K^{IV} \\ - 6, 120 K^{III} K^{IV} + 2, 124 K^I + 0, 096 K^{II} \\ + 0, 114 K^{III} + 4, 738 K^{IV} + 11, 972 = 0 \dots (\zeta)$$

dans laquelle

$$K^I = 2 \frac{\rho^I - 2^I}{\chi^I}, K^{II} = 2 \frac{\rho^{II} - 2^{II}}{\chi^{II}}, K^{III} = 2 \frac{\rho^{III} - 2^{III}}{\chi^{III}}, K^{IV} = 2 \frac{\rho^{IV} - 2^{IV}}{\chi^{IV}}$$

Il resteroit maintenant à tirer de ces équations les valeurs de  $\rho$ , &  $\sigma$  d'où dépendent les principales inégalités de l'équation du centre, & de la latitude des satellites de Jupiter ; mais comme nous touchons au terme fixé par l'Académie pour l'admission des Pièces, nous nous contenterons ici d'avoir donné la méthode & les principes nécessaires pour déterminer ces sortes d'inégalités, & nous remettons ce travail à un autre tems, où nous nous proposons de suivre, & de discuter avec attention ces points importans de la théorie des satellites.

### §. 4.

*Sur les inégalités des satellites de Jupiter qui dépendent de la période de 12 ans.*

### C X V I.

Les tables du premier & du second satellite ne renferment que les équations qui dépendent de l'anomalie de Jupiter avec celles qui dépendent de la période de 4371 dont nous avons parlé au long dans le §5 du Chapi-

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

T

tre précédent ; cependant , il est facile de se convaincre ; & M. Wargentín l'avoue lui-même dans les dissertations qu'il a mises à la tête des observations de ces deux satellites , ( Mém. de la Soc. d'Upsal , années 1742 & 1743 ) que les équations attribuées à l'inégalité du mouvement de Jupiter ne s'accordent pas entièrement avec l'équation du centre de cette Planette ; d'où il s'ensuit qu'il doit y avoir dans le mouvement de ces deux satellites des inégalités particulières qui ayant des périodes à très-peu-près égales à la révolution de Jupiter se trouvent pour ainsi dire fondues dans la grande inégalité qui vient de l'excentricité de cette Planette , c'est ce que la théorie confirme d'ailleurs ; car on a vu que les équations du centre des satellites doivent renfermer quatre termes tels que  $2n\epsilon \sin \left( (\mu - \frac{n}{2}\rho)t + \omega \right)$  ( art. CVII ) ; or , dans le tems des éclipses on a  $u - v = 180^\circ$  à très-peu près ( art. LV ) ; donc  $u = \mu t = 180^\circ + v$  donc  $\sin. \left( (\mu - \frac{1}{2}n\rho)t + \omega \right) = \sin. \left( \left( 1 - \frac{n\rho}{2\mu} \right) ( 180^\circ + v ) + \omega \right) = - \sin. \left( \left( 1 - \frac{n\rho}{2\mu} \right) v + \omega - \frac{n\rho}{2\mu} 180^\circ \right)$  ; d'où l'on voit que les équations provenant de ces termes auront des périodes égales à la révolution de Jupiter , plus à  $\frac{n\rho}{2\mu}$  de cette révolution.

Au reste , on ne doit pas se flatter de pouvoir jamais déterminer ces sortes d'inégalités par la simple théorie ; car les valeurs de  $\rho$  ( art. CXV ) dépendent des quantités  $\chi$  , c'est-à-dire des masses des satellites , dont la plupart sont encore inconnues : Ainsi , ce n'est que par des observations multipliées & réitérées qu'on peut espérer de perfectionner à cet égard la théorie des deux premiers satellites.

## C X V I I.

On a apperçu de pareilles inégalités dans le mouvement du troisième & du quatrième satellite ; ce sont celles qui dans les tables de M. Wargentin répondent aux argumens  $E$ , &  $G$ .

En consultant ces tables, ( voyez les tables des satellites imprimées parmi celles des planettes de M. Halle) on trouve 1<sup>o</sup> que le nombre  $E$  acheve huit périodes exactes dans l'intervalle de cent années juliennes ; d'où il s'en suit que chaque période est de douze ans & demi. 2<sup>o</sup> Que dans le même espace de tems le nombre  $G$  acheve  $8 \frac{244}{1000}$  périodes ; ce qui donne 12, 130 ans pour la durée de chaque période ; mais ce dernier élément a été réformé dans les nouvelles tables du quatrième satellite imprimées à la fin de la connoissance des mouvemens célestes pour l'année prochaine : suivant ces tables, le nombre  $C$  qui fait ici le même effet que le nombre  $G$  dans les premières, acheve  $8 \frac{254}{1000}$  périodes en cent années juliennes ; d'où l'on tire pour la durée de chaque période 12, 115 ans environ.

Or, si on imagine que chacune de ces deux équations soit représentée par un seul terme tel que  $\sin. \left( (1 - \frac{n\rho}{2\mu} \nu$

$+ \omega - \frac{n\rho}{2\mu} 108^\circ )$ , (c'est le cas où l'orbite seroit une ellipse mobile) ; on trouvera aisément que la quantité  $\frac{n\rho}{2\mu}$  sera pour le troisième satellite,  $= \frac{377}{4332} = 0,0870$ ,

& pour le quatrième  $= \frac{103}{4332} = 0,237$ . On pourroit

trouver de même les valeurs des quantités  $\omega$  qui dépendent des époques des argumens  $E$  &  $C$ , aussi bien que les coefficients  $n\epsilon$  qui expriment les plus grandes équations; mais, pour que toutes ces déterminations fussent exactes, il faudroit que les autres termes qui doivent entrer dans les équations du centre fussent nuls, à la fois, ce qui paroît assez difficile; d'ailleurs, les incertitudes & les variétés qu'on trouve lorsqu'on compare les observations de ces deux satellites, & qu'on veut fixer les quantités & les périodes des équations dont nous parlons, donnent tout lieu de croire que ces équations sont plutôt des résultats de différentes équations particulières qui ayant à-peu-près les mêmes périodes se confondent ensemble, comme nous l'avons déjà observé par rapport aux deux premiers satellites.

## C X V I I.

Je finirai ces remarques par donner un léger essai de calcul sur les valeurs des quantités  $\rho$ , & pour plus de simplicité, je supposerai que les masses du premier & du quatrième satellite soient considérablement plus petites que celles du second & du troisième; hypothèse qui n'a d'ailleurs rien de choquant.

Donc puisque  $\chi^I$  &  $\chi^{IV}$  sont des quantités fort petites,  $K^I$  &  $K^{IV}$  seront fort grandes, par conséquent l'équation ( $\epsilon$ ) de l'article se réduira à très-peu-près à celle-ci  $K^I K^{II} K^{III} K^{IV} - 1, 633 K^I K^{IV} = 0$ , d'où l'on tire  $K^I = 0$ , ou bien  $K^{IV} = 0$ , ou bien  $K^{II} K^{III} 1, 633 = 0$ .

On aura de plus par les formules de l'art. LXXXVI

$n\chi^I, n\chi^{II}$  &c. au lieu de  $\frac{C^I}{H}$ ,  $\frac{C^{II}}{H}$  &c. & ne conservant



que les termes qui renferment  $\chi^{II}$  &  $\chi^{III}$ , on aura, dis je :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^I &= 0, 982 \chi^{II} + 0, 124 \chi^{III}, \mathcal{C}^{II} = 0, 940 \chi^{III}, \mathcal{C}^{III} \\ &= 1, 467 \chi^{II}, \mathcal{C}^{IV} = 0, 260 \chi^{II} + 1, 139 \chi^{III}. \end{aligned}$$

Donc puisque  $K^I = 2 \frac{\rho - \mathcal{C}^I}{\chi^I}$ ,  $K^{II} = 2 \frac{\rho - \mathcal{C}^{II}}{\chi^{II}}$  &c.

on a, pour les quatre valeurs de  $\rho$ , les équations suivantes

$$\frac{\rho}{\mu^I} - 0, 982 \chi^{II} - 0, 124 \chi^{III} = 0$$

$$\frac{\rho}{\mu^{IV}} - 0, 260 \chi^{II} - 1, 139 \chi^{III} = 0$$

$$\frac{\frac{\rho}{\mu^{II}} - 0, 940 \chi^{III}}{\chi^{II}} \times \frac{\frac{\rho}{\mu^{III}} - 1, 467 \chi^{II}}{\chi^{III}} - 0, 408 = 0.$$

d'où l'on tire à-peu-près :

$$\rho = 0, 731 \mu^{III} \chi^{II} + 0, 470 \mu^{II} \chi^{III} \pm \sqrt{(0, 731 \mu^{III} \chi^{II} - 0, 470 \mu^{II} \chi^{III})^2 + 0, 408 \mu^{II} \mu^{III} \chi^{II} \chi^{III}}.$$

Ainsi l'on aura les quatre valeurs de  $\rho$ , qui donneront pour chaque satellite quatre équations, dont les périodes seront de  $1 + \frac{\rho}{2\mu}$  rev. de Jupiter.

### §. 5.

*Des durées des éclipses des satellites de Jupiter.*

### C X I X.

La durée d'une éclipse dépend de quatre élémens ; de la largeur de l'ombre de Jupiter, de la vitesse du satellite,

de sa latitude, & de l'inclinaison de sa route, laquelle peut être prise pour rectiligne pendant tout le temps de l'éclipse.

Soit donc  $\alpha$  l'angle que le demi diamètre de la section de l'ombre sous-tend au centre de Jupiter; cet angle est donné par les observations pour chacun des quatre satelites.

Supposons de plus que  $\varphi$  dénote la longitude du satelite, &  $p$  la tangente de sa latitude, au moment de la conjonction.

Enfin soit  $\varphi - \Psi$  la longitude du satelite au moment de son entrée dans l'ombre; desorte que  $\Psi$  exprime l'angle qu'il parcourt sur le plan de Jupiter depuis l'immersion jusqu'à la conjonction.

On aura, pour la valeur de  $p$  qui y répond,  $p - \frac{dp}{d\varphi} \Psi$  à peu près.

Cela posé: supposons, pour plus d'exactitude, que la section de l'ombre soit une ellipse semblable à celle des méridiens de Jupiter, il est visible qu'on aura: demi-grand

axe de l'ellipse . . . . .  $\nu \alpha$

demi-petit axe . . . . .  $\nu \alpha (1 - E)$

( $E$  étant l'éllipticité comme dans l'art. XVI);

abscisse prise depuis le centre . . .  $\gamma \Psi$

appliquée correspondante . . . . .  $\nu (p - \frac{dp}{d\varphi} \Psi)$

Donc, par la nature de l'ellipse,

$$\alpha^2 - \Psi^2; (p - \frac{dp}{d\varphi} \Psi)^2 = 1 : (1 - E)^2,$$

équation d'où l'on tirera  $\downarrow$ .

On aura donc  $\alpha^2 (1 - E)^2 - \downarrow^2 (1 - E)^2 = p^2$

$\rightsquigarrow 2 \frac{p dp}{d\varphi} \downarrow + \frac{dp^2}{d\varphi^2} \downarrow^2$ ; d'où l'on tire après les réductions

$$\downarrow = \frac{\frac{p dp}{d\varphi} \pm (1-E) \sqrt{\alpha^2 \left( \frac{d\rho^2}{d\varphi^2} + \frac{d\rho^2}{d\varphi^2} \right) - p^2}}{(1-E)^2 + \frac{d^2}{d\varphi^2}}$$

Le signe + donne la valeur  $\downarrow$  pour l'immersion, comme nous l'avons supposé, & le signe - donne au contraire la valeur de  $\downarrow$  pour l'émerfion.

C X X.

Substituons maintenant  $\mu t + n y$  au lieu de  $\varphi$ ,  $n z$  au lieu de  $p$ , & de même  $n \delta$  au lieu de  $\alpha$  (car il est évident que la quantité  $\alpha$  doit être du même ordre que la quantité  $p$ ); on aura en ne négligeant que les termes affectés de  $n^3$ :

$$\downarrow = \pm \frac{n}{1-E} \sqrt{\delta^2 (1-E)^2 - \zeta^2} \pm \frac{n^2}{(1-E)^2} \cdot \frac{\int \zeta d\zeta}{\mu dt}$$

C X X I.

Pour convertir cette expression en tems, on la divisera par la vitesse angulaire qui est  $\frac{d\varphi}{dt} = \mu + n \frac{dy}{dt}$ ; ce qui donnera en négligeant toujours les  $n^3$  x

$$\pm \frac{n}{\mu (1-E)} \sqrt{\delta^2 (1-E)^2 - \zeta^2} \pm \frac{n^2}{\mu (1-E)^2} \times \left( \frac{\zeta d\zeta}{\mu dt} \pm (1-E) \frac{dy}{\mu dt} \sqrt{\delta^2 (1-E)^2 - \zeta^2} \right).$$

Donc l'intervalle entre l'immersion & la conjonction

$$\text{fera: } \frac{n}{\mu (1-E)} \sqrt{\delta^2 (1-E)^2 - \zeta^2} \pm \frac{n^2}{\mu (1-E)^2} \cdot \left( \frac{\zeta d\zeta}{\mu dt} \pm (1-E) \frac{dy}{\mu dt} \sqrt{\delta^2 (1-E)^2 - \zeta^2} \right)$$

152 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS  
& l'intervalle entre la conjonction & l'emmerſion ſera :

$$\frac{n}{\mu(1-E)} \sqrt{a^2(1-E)^2 - \zeta^2} + \frac{n^2}{\mu(1-E)^2} \times \left( \frac{\zeta d\zeta}{\mu dt} + (1-E) \frac{dy}{\mu dt} \sqrt{a^2(1-E)^2 - \zeta^2} \right)$$

Par conféquent la demi-durée ſera

$$\frac{n}{\mu(1-E)} \sqrt{a^2(1-E)^2 - \zeta^2} - \frac{n^2}{\mu(1-E)} \cdot \frac{dy}{\mu dt} \sqrt{a^2(1-E)^2 - \zeta^2}$$

### CXXII.

Il paroît que les Aſtronomes ont toujours ſuppoſé juſqu'à préſent, que les durées des éclipſes des ſatellites étoient les mêmes avant, & après la conjonction ; ce qui n'eſt pas vrai à la rigueur, la différence étant de

$$\frac{n^2}{\mu(1-E)^2} \cdot \frac{\zeta d\zeta}{\mu dt} \cdot \text{c'eſt-à-dire de } \frac{p dp}{\mu^2(1-E)^2 dt} ; \text{ d'où l'on voit}$$

que ces durées ne peuvent être égales que dans deux cas ; 1<sup>o</sup> lorſquo  $p = 0$ , c'eſt-à-dire que la latitude du ſatellite eſt nulle, & que par conféquent l'éclipſe eſt centrale ; 2<sup>o</sup> lorſque  $dp = 0$ , ſavoir lorſque la latitude eſt la plus grande, ou bien que le ſatellite eſt dans les limites,

### CXXIII.

Suppoſons maintenant que l'on ait obſervé la demi-durée d'une éclipſe de ſatellite, laquelle ſoit de  $\Delta$  ſecondes ; on aura en remettant pour  $n \delta$ , &  $n z$ ,  $\alpha$  &  $p$ ,

$$\Delta = \frac{1-n}{\mu(1-E)} \frac{dy}{\mu dt} \sqrt{a^2(1-E)^2 - p^2}$$

où

où il faudra prendre pour  $\mu$ ,  $360^\circ$  divisés par le temps périodique réduit en secondes ; ou bien on convertira immédiatement la durée  $\Delta$  en degrés, & l'on aura simplement

$$\Delta = \frac{1 - n \frac{dy}{\mu dt}}{1 - E} \sqrt{a^2(1 - E)^2 - p^2}$$

d'où l'on tire

$$p = (1 - E) \sqrt{a^2 - \Delta^2 \left(1 + 2n \frac{dy}{\mu dt}\right)}$$

c'est la tangente de la latitude du satellite au moment de la conjonction,

#### C X X I V.

Ayant ainsi la latitude, & connoissant d'ailleurs le lieu du nœud par les observations des plus grandes durées on trouvera aisément l'inclinaison de l'orbite, il n'y aura pour cela qu'à diviser la tangente de la latitude trouvée par le sinus de l'élongation de Jupiter, vu du Soleil, au nœud du satellite ; le quotient sera la tangente de l'inclinaison de l'orbite.

C'est ainsi que tous les Astronomes en ont usé jusqu'ici pour déterminer la position des plans des orbites des satellites.

Mais si on pouvoit connoître avec assez de précision par la théorie le moment de la conjonction, on pourroit trouver immédiatement l'inclinaison de la route du satellite dans l'ombre par les observations des immersions & des émerfions ; car nous avons vu que la différence entre les durées de l'éclipse avant & après la conjonction doit

être  $= \frac{p dp}{\mu^2 (1 - E)^2 dt}$  ; donc, divisant cette différence par

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

V

$\frac{p}{\mu(1-E)^2}$  on aura  $\frac{dn}{\mu dt} = \frac{dp}{\mu^2}$  tangente de l'inclinaison de la route du satellite.

Mais outre que cette méthode exigeroit dans les tables des satellites un degré de précision dont elles sont encore bien éloignées ; elle seroit encore le plus souvent impraticable , à cause qu'on ne peut pas toujours observer à la fois les immersions & les émerfions.

Je finirai ces recherches par dire un mot des variations qu'on a apperçues jusqu'ici dans les positions des orbites des satellites.

### §. 6

#### *Des inclinaisons , & des nœuds des Satellites.*

#### CXXV.

Le premier Satellite est le seul dont l'orbite paroisse à peu près fixe ; son inclinaison est selon les tables de  $3^{\circ}$ ,  $18'$ , & le lieu du nœud à  $10^{\circ}$ ,  $14'$ ,  $30''$  ; du moins les demi-durées observées quadrent assez bien avec ces élémens.

Le nœud du second paroît aussi fixe , mais son inclinaison est sujette à un changement considérable , dont la période est de 31 ans ; la plus grande inclinaison est de  $3^{\circ}$ ,  $47'$ ,  $27''$ , & la plus petite de  $2^{\circ}$ ,  $29'$ ,  $2''$  de sorte que la variation est de  $1^{\circ}$ ,  $18'$ ,  $25''$  ou bien de  $39'$ ,  $12''$  tantôt en plus, tantôt en moins, ce qui fait environ  $\frac{1}{2}$  de l'inclinaison moyenne.

#### CXXVI.

Un changement si considérable ne sauroit s'expliquer que par les formules de l'art. CIX. En effet , supposons

que la valeur de  $z''$  ne renferme que deux termes, ou au moins que les deux autres soient assez petits pour pouvoir être négligés, de sorte que l'on ait simplement :

$$z'' = \lambda''_1 \sin. \left( (\mu'' + \frac{n}{2} \sigma_1) t + n''_1 \right) + \lambda''_2 \sin. \left( (\mu'' + \frac{n}{2} \sigma_2) t + n''_2 \right).$$

On aura, en nommant  $n''$  la tangente de l'inclinaison de l'orbite, &  $\psi''$  la distance du satellite au nœud ascendant,

$$\tau'' = \sqrt{z''^2 + \frac{d^2 n''}{\mu'' dt}} \quad \& \quad \text{tang. } \psi'' = \frac{d \mu'' dt}{d z''} \quad (\text{art. CXL})$$

savoir, en négligeant les termes de l'ordre de  $n$ ,

$$\tau'' = \sqrt{\lambda''_1^2 + \lambda''_2^2 + 2 \lambda''_1 \lambda''_2 \cos. (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t + n''_1 - n''_2)}$$

$$\& \text{ tang. } \psi'' = \frac{\lambda''_1 \sin. (\mu'' + \frac{n}{2} \sigma_1 t + n''_1) + \lambda''_2 \sin. (\mu'' + \frac{n}{2} \sigma_2 t + n''_2)}{\lambda''_1 \cos. (\mu'' + \frac{n}{2} \sigma_1 t + n''_1) + \lambda''_2 \cos. (\mu'' + \frac{n}{2} \sigma_2 t + n''_2)}$$

Donc la plus grande valeur  $\tau''$  fera  $= \lambda''_1 + \lambda''_2$ , & la plus petite  $= \lambda''_1 - \lambda''_2$ ; donc  $n'' (\lambda''_1 + \lambda''_2) = \text{tang. } 3^\circ 47' 27''$ , &  $n'' (\lambda''_1 - \lambda''_2) = \text{tang. } 2^\circ 29' 2''$

par conséquent  $\frac{\lambda''_1 + \lambda''_2}{\lambda''_1 - \lambda''_2} = \frac{\text{tang. } 3^\circ 47' 27''}{\text{tang. } 2^\circ 29' 2''} = 1,527$   
 d'où l'on tire  $\frac{\lambda''_2}{\lambda''_1} = \frac{0,527}{2,527} = 0,208 = \text{environ } \frac{1}{5}$

Maintenant il est clair que la valeur de  $\tau''$  redeviendra la même lorsque l'angle  $\frac{n}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) t$  se trouvera augmenté ou diminué de  $360^\circ$  pris une ou plusieurs fois; donc puisque la longitude moyenne du second satellite est exprimée par  $\mu'' t$ , la période de la variation de  $\tau''$  fera

de  $\frac{n}{2 \mu''} (\sigma_1 - \sigma_2)$  révolutions de ce même satellite,

Or cette période est, selon les observations, de 31 ans;

156 RECHERCHES SUR LES INÉGALITÉS  
 ce qui répond à peu près à 3189 rev. du second satellite;  
 donc il faudra que  $\frac{1}{2}$

$$\frac{n}{2\mu^{II}} (\sigma 1 - \sigma 2) = \frac{1}{3189} = 0,0003136.$$

CXXVII.

Ayant trouvé  $\lambda^{II} 2 = \frac{1}{3} \lambda^{II} 1$ , on pourra simplifier les  
 expressions de  $\tau^{II}$ , & de tangente  $\psi^{II}$  & l'on aura à très-  
 peu près :

$$\begin{aligned} \tau^{II} &= \lambda^{II} 1 \left( 1 + \frac{1}{3} \text{cof.} \left( \frac{n}{2} (\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II} 1 - \eta^{II} 2 \right) \right) \\ &\& \text{ tang } \psi^{II} = \text{tang.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right) + \frac{1}{3} \times \\ &\quad \frac{\text{fin} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 2)t + \eta^{II} 2 \right)}{\text{cof} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right)} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\text{cof.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 2)t + \eta^{II} 2 \right) \times \text{fin.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right)}{\text{cof.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right)^2} \end{aligned}$$

Soit fait  $\psi^{II} = (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 + q$ ,  $q$  étant une  
 quantité fort petite, on aura, tang.  $\psi$

$$= \text{tang.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right) + \frac{q}{\text{cof.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right)^2}$$

à peu près; donc  $q = \frac{1}{3} \text{fin.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 2)t + \eta^{II} 2 \right) \times$   
 $\text{cof.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right) - \frac{1}{3} \text{cof.} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 2)t + \eta^{II} 2 \right) \times$   
 $\text{fin} \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 \right) = -\frac{1}{3} \text{fin} \left( \frac{n}{2} (\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II} 1 - \eta^{II} 2 \right);$

$$\text{donc } \psi^{II} = \left( (\mu^{II} + \frac{n}{2} \sigma 1)t + \eta^{II} 1 - \frac{1}{3} \text{fin.} \left( \frac{n}{2} (\sigma 1 - \sigma 2)t + \eta^{II} 1 - \eta^{II} 2 \right) \right).$$

D'où l'on voit 1° que le mouvement du nœud fera de

$\frac{n \sigma 1}{2 \mu^{II}}$  par révolution; 2° que ce mouvement fera sujet à  
 une équation analogue à celle de l'inclinaison, laquelle

$$\text{montera à } \frac{57^{\circ} 17'}{5} = 11^{\circ} 27'.$$



Ces derniers résultats ne s'accordent pas à la vérité avec les observations des demi-durées, par lesquelles il paroît que les nœuds sont à très-peu près fixes; mais j'observe 1<sup>o</sup>, que la quantité  $\sigma$  I peut être nulle, auquel cas le nœud n'aura plus qu'un mouvement d'oscillation. 2<sup>o</sup> Qu'il est impossible que l'attraction produise un changement dans l'inclinaison sans produire en même-tems un changement analogue dans le lieu du nœud. Voyez plus bas, art. CXXX.

## CXXVIII.

Voyons maintenant comment on pourroit satisfaire à ces deux conditions, savoir  $\pm \frac{n}{2\mu^{II}} (\sigma I - \sigma 2) = 0$ , 0003136, &  $\sigma I = 0$ .

Pour cela, nous conserverons ici les hypothèses de l'art. CXXVIII, moyennant quoi l'équation ( $\zeta$ ) de l'art. CXV se réduira à celle-ci:  $K^I K^{II} K^{III} K^{IV} - 5, 675 K^I K^{IV} = 0$ , laquelle donne  $K^I = 0$ , ou bien  $K^{IV} = 0$ , ou bien  $K^{III} K^{IV} - 5, 675 = 0$ ; cette dernière équation se réduit à celle-ci:

$$\left(\frac{\sigma}{\mu^{II}} - \pi^{II}\right) \left(\frac{\sigma}{\mu^{III}} - \pi^{III}\right) - \frac{5, 675}{4} \chi^{II} \chi^{III} = 0,$$

ou bien  $\sigma^2 - (\mu^{II} \pi^{II} + \mu^{III} \pi^{III}) \sigma + \mu^{II} \mu^{III} \pi^{II} \pi^{III} - 1, 419 \mu^{II} \mu^{III} \chi^{II} \chi^{III} = 0$ .

Or, suivant les mêmes hypothèses, on a  $\pi^{II} = 0$ , 942  $\chi^{III}$ , &  $\pi^{III} = 1$ , 506  $\chi^{II}$  à peu près (art. LXXXVI) donc  $\pi^{II} \pi^{III} = 0$ , 942  $\times$  1, 506  $\chi^{II} \chi^{III} = 1$ , 419  $\chi^{II} \chi^{III}$ ; donc faisant pour plus de simplicité  $\chi^{III} = m \chi^{II}$ , & mettant 0, 496  $\mu^{II}$  au lieu de  $\mu^{III}$ , on aura l'équation:

$$\sigma^2 - (0, 942 m + 0, 747) \mu^{II} \chi^{II} \sigma = 0;$$

d'où l'on tire

$$\sigma = 0, \text{ \& } \sigma = (0,942 m + 0,747) \mu'' \chi''.$$

Donc on satisfera à nos conditions en prenant pour  $\sigma$  la première de ces deux racines, & pour  $\sigma$  2 la seconde, & supposant

$$\frac{1}{2}(0,942 m + 0,747) \chi'' = 0,0003136, \text{ ce qui}$$

donne à cause de  $n \chi'' = \frac{C''}{P} = 0,00002417$  (art. LXIII)

$m = 27$  à très peu près,

Il est vrai que cette détermination ne s'accorde point avec ce que nous avons trouvé dans l'art. LXVIII ; mais cela n'est point surprenant vu le grand nombre des quantités que nous avons négligés dans ce calcul, aussi ne l'ai-je donné ici que comme un essai, me réservant de les reprendre dans quelque autre occasion.

### C X X I X.

La position de l'orbite du troisième satellite est aussi sujette à des variations fort remarquables ; son inclinaison paroît avoir été la plus petite en 1697, où elle n'étoit que d'environ  $3^{\circ}$ , & depuis-lors elle a toujours été en augmentant, de sorte qu'en 1763 on l'a trouvée de  $3^{\circ} 27'$ , ce qui fait  $27'$  en 66 ans ; & par conséquent environ  $26''$  par an.

Quoiqu'on ne connoisse pas encore le terme de cette augmentation, il y a cependant tout lieu de croire qu'elle est périodique comme celle du second satellite ; car suivant la comparaison que M. Maraldi a faite d'un très-grand nombre d'observations des demi-durées depuis 1671, jusqu'en 1763 l'inclinaison se trouve à très-peu près la même à intervalles égaux avant & après 1697.

A l'égard du nœud, les tables de M. Wargentín le supposent fixe à  $10^{\circ} 16' 3''$ , mais M. Maraldi trouve qu'il doit avoir un mouvement direct d'environ  $3'$  par an; selon ce savant Astronome il étoit à  $10^{\circ} 1^{\circ} 52'$  en 1697, & à  $10^{\circ} 17^{\circ} 9'$  en 1763.

Ces variations peuvent s'expliquer de la même manière que celles du second satellite, pourvu qu'on suppose que la période de l'inclinaison soit beaucoup plus longue; faisons-la de  $r$  révolutions du troisième satellite; il faudra

que l'on ait  $\pm \frac{n}{2\mu^{III}} (\sigma 1 - \sigma 2) = \frac{r}{r}$ ; prenons pour  $\sigma 1$  la

même racine que ci-dessus, & pour  $\sigma 2$  une des deux autres racines, par exemple celle qui résulte de l'équation  $K^I = 0$ , savoir  $\sigma 2 = \mu^I \pi^I = \mu^I (0,981 \chi^{II} + 0,126 \chi^{III})$ .

(art. LXXXVI); mettons au lieu de  $\mu^I$ ,  $4,044 \mu^{II}$ , au lieu de  $\chi^{III}$ ,  $m \chi^{II}$ , & au lieu de  $n \chi^{II} = \frac{C^{II}}{T^I}$  sa valeur

$0,00002417$ , on aura  $\frac{n\sigma 2}{2\mu^{III}} = 0,00004796$

$+ 0,00000615$ ;  $m = \frac{1}{r}$ ; si  $m = 10$ , on auroit envi-

ron  $r = 10000$ , ce qui donneroit à peu près 195 ans pour la durée de la période.

Maintenant, si on denote par  $n \tau^{III}$  la tangente de l'inclinaison, & par  $\psi^{III}$  la distance au nœud, & qu'on suppose  $\lambda^{III} 2 = v \lambda^{III} 1$ ,  $v$  étant une fraction assez petite, on aura comme dans l'art. CXXVI,

$$\tau^{III} = \lambda^{III} 1 (1 + v \cos \psi^{III}) \left( \frac{n}{2} (\sigma 1 - \sigma 2) t + \eta^{III} 1 - \eta^{III} 2 \right),$$

$$\text{et } \psi^{III} = \left( \mu^{III} 1 + \frac{n}{2} \sigma 1 \right) t + \eta^{III} 1 - v \sin \psi^{III} 1$$

$$\left( \frac{n}{2} (\sigma 1 - \sigma 2) t + \eta^{III} 1 - \eta^{III} 2 \right),$$

ou bien (à cause de  $\sigma I = 0$ , & de  $u^{III} t =$  à la longitude moyenne du fatellite que nous dénoterons par  $u^{III}$ )

$$\tau^{III} = \lambda^{III} I (1 + \nu \cos. \left( \frac{n \sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III} - \eta^{III} I + \eta^{III} 2 \right))$$

&

$$u^{III} - \psi^{III} = -\eta^{III} I - \nu \sin. \frac{n \sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III} - \eta^{III} I + \eta^{III} 2$$

où  $u^{III} - \psi^{III}$  est la longitude du nœud.

Supposons, ce qui est permis, que la longitude moyenne  $u^{III}$  soit comptée depuis le point, où se trouvoit le fatellite au moment de la plus petite inclinaison de son orbite, on aura  $\cos. (-\eta^{III} I + \eta^{III} 2) = -1$ , donc  $-\eta^{III} I + \eta^{III} 2 = 180^\circ$ ; par conséquent les formules précédentes deviendront :

$$\tau^{III} = \lambda^{III} I (1 - \nu \cos. \frac{n \sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III})$$

$$u^{III} - \psi^{III} = -\eta^{III} I + \nu \sin. \frac{n \sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III}.$$

Donc la vitesse du nœud sera à la vitesse moyenne du fatellite comme  $\nu \frac{n \sigma 2}{2\mu^{III}} \cos. \frac{n \sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III}$  à 1; d'où l'on voit que le mouvement du nœud sera direct tant que  $\cos. \frac{n \sigma 2}{2\mu^{III}} u^{III}$  sera positif, c'est-à-dire tant que l'inclinaison sera au dessous de la moyenne.

Au reste, si je donne ici ces formules, ce n'est pas que je les regarde comme fort exactes & conformes au mouvement du troisième fatellite; mon objet est simplement de donner une idée de la manière, dont on pourroit

pourroit rendre raison de l'augmentation d'inclinaison, & du mouvement direct des nœuds de ce satellite ; phénomènes qui paroissent assez difficiles à expliquer.

## C X X X.

Le quatrième satellite est aussi dans le même cas que le troisième à l'égard du mouvement des nœuds. M. Maraldi l'a trouvé d'environ  $5' 33''$  par an suivant l'ordre des signes ; mais M. Wargentín ne le fait que d'environ  $4' 24''$  dans ses nouvelles tables.

Quant à l'inclinaison, ils la supposent constante & de  $2^{\circ} 36'$  ; mais il y a tout lieu de croire que cette détermination n'est pas tout à fait exacte ; car il paroît difficile que les nœuds aient un mouvement direct, tandis que l'inclinaison demeure la même. D'ailleurs, M. Wargentín remarque que les nœuds ont du être stationnaires vers la fin du siècle dernier, ce qui prouve, ce me semble, qu'ils étoient auparavant rétrogrades, & que leur mouvement n'est qu'une espèce d'oscillation, comme nous l'avons déjà supposé, à l'égard du troisième satellite ; or, je dis qu'un tel mouvement ne sçauroit avoir lieu dans le nœud, sans qu'il ait, dans l'inclinaison, une variation analogue ; c'est de quoi il est facile de se convaincre en jettant les yeux sur la formule  $d \lambda \sin. (\varphi - \varepsilon) = \lambda \cos. (\varphi - \varepsilon) d \varepsilon$  de l'art. III, laquelle exprime la relation qu'il doit avoir en général entre le mouvement du nœud, & la variation de l'inclinaison.

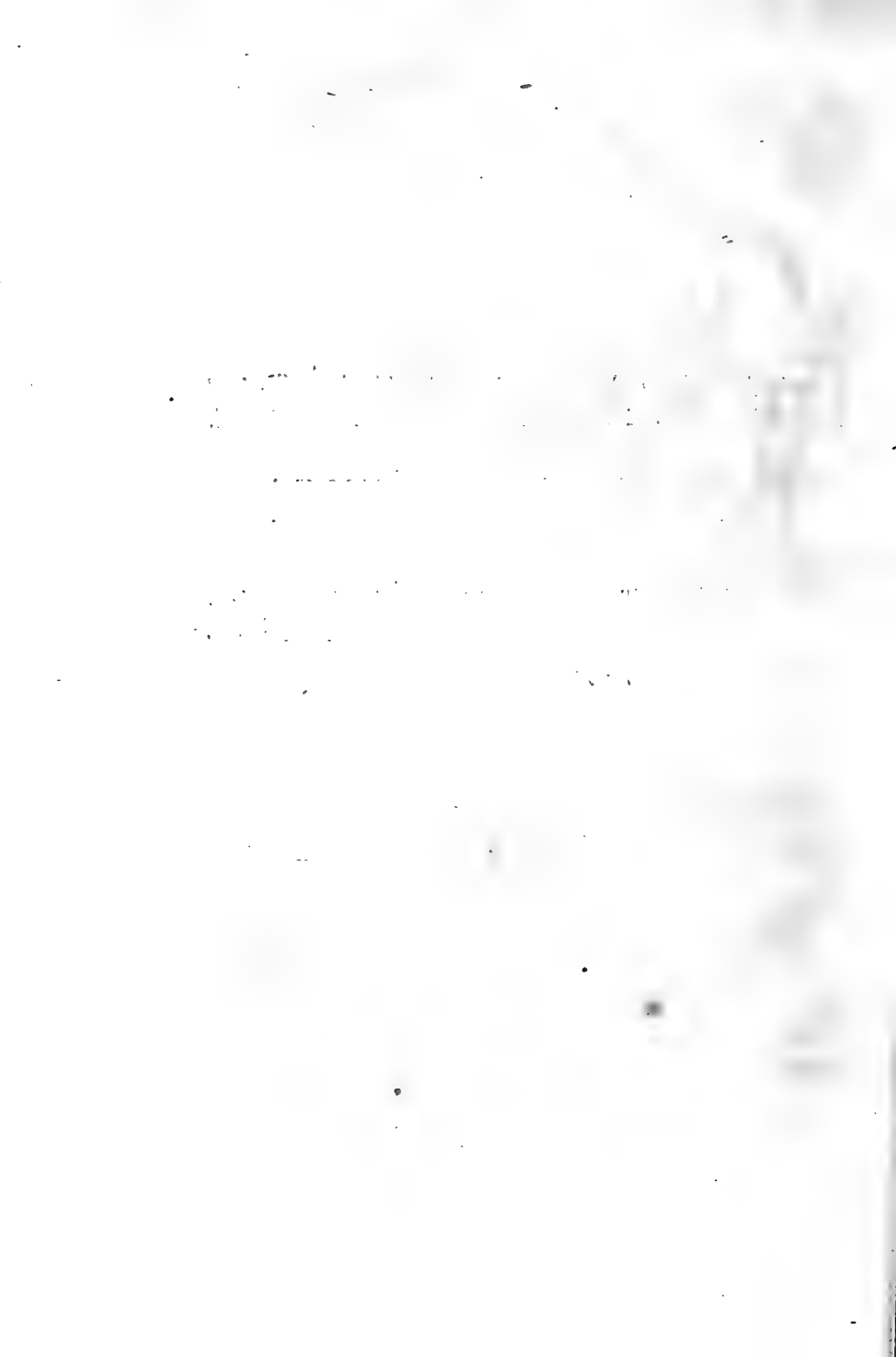
Je fais cette remarque, moins pour faire naître des doutes sur les résultats de ces deux savans Astronomes, que pour les engager à se rendre de plus en plus attentifs à la détermination d'éléments si délicats & si difficiles.

Au reste , quand on sera bien assuré de l'exactitude de ces élémens , on pourra alors se servir de nos formules pour donner à la théorie du quatrième satellite de nouveaux degrés de perfection.

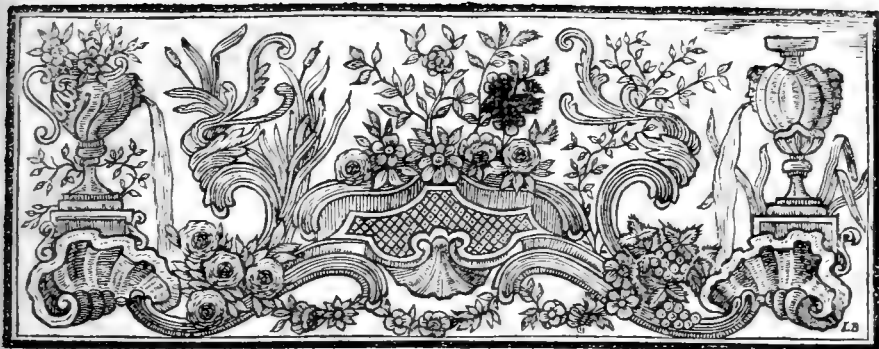
*F I N.*

DE L'ARRIMAGE  
*DES VAISSEAUX.*

MÉMOIRE pour concourir au prix proposé par  
l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris  
pour l'année 1765.







# MÉMOIRE

## SUR L'ARRIMAGE

### DES VAISSEAUX.

---

---

*Amoris patriæ pignus.*

---

---

**L** n'est, pour l'arrimage, aucune règle connue. On arrime encore aujourd'hui, comme on faisoit au milieu du siècle dernier. On donne aux vaisseaux neufs la quantité de lest assignée aux vaisseaux du même rang. On le place également dans tous de la même façon ; & si, lorsque l'arrimage est fini, le tirant d'eau n'est pas tel qu'on l'avoit projeté, on corrige cette différence avec du lest qui est en réserve, & que l'on transporte à une des extrémités, pour rappeler le vaisseau

au tirant d'eau que l'on desire. On tâtonne un peu moins à la seconde campagne ; & après plusieurs voyages, on se fait une espèce de règle pour la quantité de lest à mettre, & pour le tirant du vaisseau, en mettant ce lest.

Les Constructeurs un peu instruits, ne se trompent pas sur la quantité du lest à mettre dans les vaisseaux neufs, du moins pour ce qui regarde la hauteur de la batterie, qu'ils se sont proposés de donner. Il leur suffit pour cela de dresser un état exact de tous les poids qui entrent dans la construction & l'armement des vaisseaux ; & cet état ne demande pas de grandes discussions : mais le plus grand nombre d'entr'eux ne m'a pas paru pousser plus loin ses recherches. Il est rare qu'ils déterminent, avec précision, la différence du tirant d'eau, ( le vaisseau étant, comme on dit, sur son lest, ) & je les ai vu se tromper. Cependant, quoique cette connoissance influe sur le placement des autres matières, autres que le lest, elle est moins importante que l'examen de l'arrimage, par rapport à la stabilité. Cet examen n'est pas plus minutieux que celui des pesanteurs ; & on ne peut procéder à celui-ci, sans rassembler les matériaux nécessaires pour l'autre. Il est vrai que ce n'est pas tant la stabilité que l'on doit chercher que la quantité de cette stabilité, & son influence sur l'allure, le tangage, & le roulis ; mais c'est toujours beaucoup que d'avoir reconnu que le vaisseau portera la voile. Il eut été à désirer qu'on s'en fût occupé dans la construction de tous les vaisseaux, au lieu de comparer simplement à l'œil les vaisseaux à faire aux vaisseaux construits & connus.

Voilà, en gros, quelle est la méthode usitée pour l'arrimage des vaisseaux de guerre. Celle pour les vaisseaux marchands est, à plus forte raison, livrée au tâtonnement.

La destination des Bâtimens de commerce varie à toutes les campagnes, & quelquefois même dans le courant d'un voyage. Ces navires, dont l'objet est de transporter

beaucoup, sont en général construits pour naviguer avec une petite quantité de lest, & c'est selon la légèreté ou la pesanteur des marchandises qu'ils embarquent, qu'ils mettent, ou ne mettent pas du lest. Dans le premier cas, ils font un petit retranchement, une espèce de fosse, à l'entour du grand mât; & là, ils entassent le lest qu'ils jugent nécessaire: dans l'autre, ils matelassent la calle avec des matières légères, telles que les fagots pour élever le centre de gravité de la charge, & rendre les mouvemens du roulis moins rudes.

Dans les navires de commerce, comme dans les vaisseaux de guerre, on n'examine qu'à la mer, & pendant le cours de la navigation, l'influence de l'arrimage sur l'assiette du Bâtiment, sur son allure, sa sensibilité au gouvernail, & à tous les mouvemens de conversion.

Un vaisseau porte-t-il mal la voile? on met dans la calle les canons les plus élevés.

Sa marche est-elle ralentie? on lâche les coins des mâts, les haubans, les étais. On fait pancher les mâts en avant ou en arrière. On transporte successivement, dans ces deux parties, des poids pour les faire plonger davantage; ainsi, tel vaisseau étoit trop sur l'avant qui marche mieux, cette partie étant moins submergé & *vice versa* de l'arrière.

Le gouvernail ne se fait-il pas assez sentir, comme s'expriment les Marins? on fait encore caller l'arrière.

Mais ce n'est pas là ce que demande l'Académie. La description de ces méthodes n'apprend pas grand chose, & un plus long détail seroit inutile. C'est la façon la meilleure d'arrimer tous les vaisseaux possibles, & l'examen particulier de l'arrimage en entier sur toutes les qualités que l'on exige des vaisseaux, qui fait sans doute l'objet de la question.

Par le mot d'arrimage, on entend non-seulement la distribution du lest & des autres matières pesantes, qui

entrent dans la calle des vaisseaux ; mais encore le placement des mâts & les proportions des voiles. Ces deux considérations menent naturellement à l'examen de la figure des vaisseaux, parce que ce n'est que relativement à cette figure que la mâture est déterminée & l'arrimage distribué. Il faudroit donc, afin de donner plus de jour à la solution du problème proposé, entrer dans un examen particulier de la figure des vaisseaux ; de-là, & par une suite naturelle, il faudroit parler de la mâture, & ensuite de l'arrimage. Ce seroit, je pense, la marche la plus naturelle, pour rendre ce Mémoire utile ; mais, que pourroit-on dire sur la figure des vaisseaux & sur la mâture, qui n'ait déjà été écrit par M. Dahamel, M. Camus, M. Bouguer, M. Euler, M. Bernouilly, M. Hugens, M. Pitot, &c. Tous ces Auteurs ne nous ont rien laissé à desirer, & il est difficile de ne pas les répéter,

### C O N S T R U C T I O N .

L'Architecture navale a fait des progrès ; mais il s'en faut bien qu'elle soit parvenue à ce point de perfection, dont elle est susceptible. Quelques Constructeurs plus instruits que leurs devanciers, ont un peu éclairé, par leurs études, cette partie de la Marine, long-temps livrée à la pure routine ; mais trop timides dans leurs essais, & ne consultant pas assez la théorie, qui les rebutoit peut-être par sa sécheresse, ou les effrayoit par les changemens qu'elle indiquoit à faire à ce que la pratique avoit consacré, leur travail n'a pas toujours porté le sceau de la certitude. Ceux qui ont eu le plus de réputation se sont long-temps contentés de calculer le déplacement, & de le comparer, comme on a dit plus haut, à l'état de pesanteur. Quelques-uns ont dressé ces états avec beaucoup de précision, & entr'autres choses y ont distingué les poids de la partie submergée, d'avec ceux qui sont hors de l'eau. Voici

quelle étoit la raison de cette distinction. Ils croyoient par cette comparaison juger de la stabilité, & cette voie d'aproximation a eu quelque-temps du crédit. Les bons livres que nous avons sur cette partie, fait tomber cet espèce de systême, dont on ne parle ici, que pour montrer combien on étoit loin il y a vingt ans de sçavoir calculer la stabilité. La marche en est aujourd'hui connue de quelques-uns. Ils calculent le centre de gravité de la partie submergée, qu'ils regardent comme homogène; ils déterminent la position du métacentre, & comparent ces deux termes à ceux des autres vaisseaux. Enfin, pour dernier calcul, ils examinent la poussée de l'eau sur la proue dans la route directe.

Voilà l'état actuel de l'Architecture. Quelques Constructeurs étendent davantage ces calculs; mais le plus grand nombre se tient au simple déplacement, pour ne pas se tromper au moins sur la hauteur de la batterie. Tout le reste, ils l'arrangent par la voie de la comparaison toujours tâtonneuse & peu sûre; aussi courent-ils risque de se tromper, quand ils ont à construire des vaisseaux peu connus, comme le sont ceux à trois ponts.

D'ailleurs, comment examiner & calculer l'arrimage dans tous les sens, si on ne pousse pas plus loin les calculs sur la figure de la coque & sur la voilure.

Ainsi, après avoir trouvé la hauteur de la batterie, il est de la plus grande conséquence de chercher la stabilité, & par conséquent le centre de gravité du vaisseau armé; & alors même, il faut de toute nécessité supposer un arrimage quelconque. Cela fait, on passe au calcul de la poussée de l'eau sur la proue dans les routes directes & obliques; & par ce calcul, on détermine la position & les dimensions de la mâture, que l'on n'avoit fait encore que supposer. Ce même calcul, & celui de l'arrimage rectifient les opérations que l'on a commencées sur cette voilure par rapport à la stabilité; & l'on voit (si le point véli-

que doit être placé plus haut ou plus bas) ce que l'on gaignoit ou perdoit de stabilité. On examine après le choc de l'eau sur le gouvernail, & l'on juge si le vaisseau y sera sensible, & s'il aura besoin d'aider ou d'être aidé par les voiles. Ces opérations finies, il me semble que l'on peut passer à l'examen du roulis par rapport à la distribution de l'arrimage, parce que les mâts & les voiles sont déterminés d'une façon invariable, & qu'on n'a plus à s'occuper que d'un objet très-simple, ne s'agissant plus que d'un nouvel arrangement de lest.

### M A T U R E.

Je viens de dire sur la mâture tout ce qu'il faut, puisqu'on a demandé que sa position, ses dimensions, & par conséquent le point vélique fussent déterminés. Je n'examinerai pas ici la défecuosité des règles que l'on a suivi & que l'on suit encore dans quelques Ports. Il paroît toujours inconsequent de régler la voilure & les agrêts sur la simple largeur, comme si deux vaisseaux, également larges, devoient porter également la voile, & comme si la largeur influoit seule sur la stabilité. De-là, tant de changemens dans ces mâtures, après la première ou deuxième campagne des vaisseaux. Il est plusieurs de nos frégates de 26 canons de 12, dont les changemens sur la mâture, ont été poussés si loin, qu'elles n'ont plus différé (pour cette partie) des frégates de 50 canons. Les calculs l'avoient dit avant de les mettre en mer pour la première fois; mais on ne pouvoit concevoir qu'une frégate qui étoit moins large que l'autre, pût porter une aussi grande mâture; on ne faisoit pas attention que cette frégate de 26 n'avoit qu'une seule batterie, & que la deuxième batterie de celle de 50 faisoit perdre, par l'exhaussement du centre de gravité total, ce que l'autre gaignoit par le rabaissement

rabaissement de ce centre. Une pratique un peu plus réfléchie auroit du l'apprendre, avant que la théorie décidât sans réplique.

L'essai que j'ai fait sur un vaisseau a fait un peu revenir les Esprits praticiens; mais le préjugé général contre la figure, la voilure & l'arrimage de ce Bâtiment fut poussé à l'excès, l'expérience calma les esprits.

## A R R I M A G E.

Tout paroît dit sur l'arrimage, puisqu'on ne peut déterminer la figure du vaisseau, sa mâture & sa voilure, sans entrer dans le détail de ce qui constitue l'arrimage. On peut cependant pousser plus loin la discussion, mais il est bien difficile de ne pas se répéter. Néanmoins pour dire des choses utiles, il n'y a qu'à chercher des exemples & analyser les cas qui se rencontrent le plus souvent dans les Ports.

Soit un vaisseau pris sur les ennemis, dont on n'a pas eu le temps de reconnoître les qualités, ou dans lequel on en a reconnu de très-mauvaises. Ou bien soit un de nos vaisseaux qui manque des qualités les plus nécessaires, comme de la hauteur de la batterie, de la stabilité, & de la sensibilité au gouvernail, & d'être sujet à manquer dans ses mouvemens de conversion,

## S T A B I L I T É.

Le plus grand défaut que puisse avoir un vaisseau, c'est, sans contredit, celui de ne pas porter la voile. Les conséquences en sont terribles. Un pareil Bâtiment ne marche pas. S'il est affalé sur une côte, il ne peut s'en élever, parce que c'est le cas de faire de la voile, & il ne peut la porter. S'il se bat, c'est toujours avec désavantage, même contre un ennemi inférieur, parce que celui-ci le

10 MÉMOIRE SUR L'ARRIMAGE  
force de se battre au vent, & l'empêche de se servir de sa  
premiere batterie.

Les moyens les plus généraux pour corriger ce défaut, sont de raser l'œuvre morte, de substituer des canons de moindre calibre, de diminuer en tout sens la voilure, & même de les souffler; mais ces moyens, en effaçant une partie des défauts, en font naître d'autres.

1°. Si on rase l'œuvre morte, un vaisseau ennemi de ce rang le domine avec sa mousqueterie. 2°. Si on lui substitue des canons de moindre calibre, il oppose des forces inégales à un vaisseau de son rang qui le combat. 3°. Si on diminue la voilure, on ne gagne du côté de la stabilité, qu'en perdant du côté de la vitesse, parce que ce Bâtiment peut fort bien avoir une proue de grande résistance, à laquelle la mâture qu'il avoit ci-devant ne suffisoit peut-être pas.

Je crois avoir trouvé un moyen plus simple, moins couteux, & qui ne diminueroit en aucune façon la force du vaisseau ni sa vitesse. Ce moyen le voici. C'est de lui mettre une contrequille de fer, tenue par des étriers. Cette contrequille seroit plus ou moins pesante, selon qu'on auroit, ou vu, ou calculé, le besoin qu'en a le vaisseau chargé par le vent pour être rappelé à sa premiere assiette.

Le calcul fait sur un vaisseau de soixante canons que je ne nommerai pas, parce que l'Académie ne veut pas qu'il soit rien dit qui puisse désigner le nom de l'Auteur, & celui fait sur un vaisseau à trois ponts qui ne peut pas porter toute son artillerie, m'ont clairement démontré, que dans le premier vaisseau une contrequille de cinq pouces un quart d'épaisseur, eût suffi, & dans l'autre une de neuf & demi: Ces calculs ne sont pas même minutieux, parce que je ne touchai ni à la coque du vaisseau, ni à sa voilure, ni à son artillerie. Je ne fis autre chose pour ces deux vaisseaux, après avoir cherché le centre de gra-



vité du système, non compris celui d'une partie des canons de la seconde batterie & des gaillards, que de chercher à balancer par la quille de fer que je ne supposai d'abord que de deux pouces pour le premier vaisseau, & de quatre pour le second, la quantité de canons que l'on avoit reconnu excédente & que je pouvois remplacer à mesure que je gagnois de la stabilité. Ce moyen applicable dans tous les cas, m'a paru devoir être le premier employé, parce qu'il est plus prompt, moins coûteux, & qu'il conserve toute son artillerie. Je l'ai tu, jusqu'à présent, mais j'ai dit que j'avois une proposition à faire au premier armement du vaisseau à trois ponts, dont j'ai parlé ci-dessus, & que cette proposition tendoit à conserver à ce vaisseau toute son artillerie & toute sa voilure, je n'y ai pas ajouté les agrêts, parce que j'ai vu sensiblement qu'ils pouvoient être réduits, & cette réduction est entrée pour quelque chose dans l'épaisseur de la contrequille projetée, qui sans cela devoit être plus forte. Je n'ajouterai pas que cette contrequille doit être aiguë en avant à cause de la résistance du fluide, & carrée ou obtuse à l'arrière, selon que les vaisseaux ont besoin d'un gouvernail plus ou moins plongeant. Tous ces petits détails vont de suite & sont sous entendus.

Ce même moyen, je l'appliquerois sur les vaisseaux marchands. Ils ne mettroient plus de lest quand ils transportent des marchandises légères, & cette contrequille ne leur nuiroit pas quand ils seroient chargés de munitions pesantes, parce que jamais ces marchandises n'emcombrent la cale & il n'y auroit alors qu'à mettre un fardeau un peu plus exhausté. Dans les deux cas ils iroient mieux au plus près, qualité qui leur manque à tous.

Ce moyen je l'appliquerois également sur les vaisseaux de guerre, qui font de longues missions & qui embarquent pour sept à huit mois de vivres. Cette contrequille

leur tiendrait lieu d'une grande partie de lest , & par-là ils porteroient une plus grande quantité de barriques de farine , de salaison , &c.

Tout cela exige sans doute des calculs particuliers, qui varient selon la force & la figure des vaisseaux ; mais ces calculs ne sont pas difficiles, ils ne sont que longs , & avec le secours des formules on peut les réduire à de simples opérations d'Arithmétique.

Voilà pour la stabilité , voyons pour la marche.

### M A R C H E.

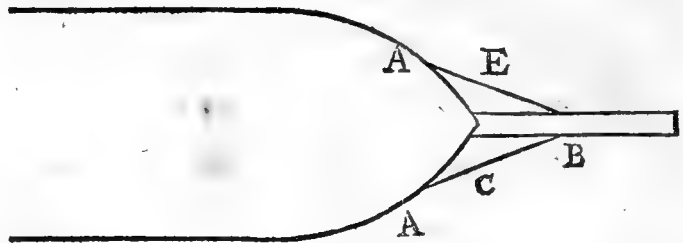
C'est des vaisseaux construits que nous devons parler , & non des vaisseaux à construire , parce que nous avons dit de ces derniers , que c'est dans la composition d'un plan que l'on concilie toutes les qualités , & que celle de l'allure va de pair avec les autres. Nous dirons en passant que si dans les frégates , c'est la qualité première, cette même qualité ne doit aller dans les vaisseaux qu'ensuite de la stabilité & de la hauteur de la batterie.

Lorsqu'un vaisseau quelconque a une marche pesante & que l'on cherche les moyens de lui faire acquérir de la vitesse , il ne faut pas s'arrêter à toutes ces pratiques que le temps & l'ignorance ont consacrées. Il faut l'attaquer avec les calculs & reconnoître d'abord sa stabilité. Si elle est supérieure à l'effort du vent sur les voiles , il ne faut pas pour cela augmenter sa voilure ; ce moyen est bon à quelques égards , mais il est dispendieux , & nécessite d'avoir un équipage plus nombreux en raison de l'augmentation de la voilure. Il est mieux de laisser les voiles telles qu'elles sont , mais de faire moins caller le vaisseau , afin de diminuer & son inertie & la poussée de l'eau sur la proue & sur la carène en général. D'assigner de quelle quantité il faut le faire sortir de l'eau , c'est ce que les cal-

culs pourront peut-être déterminer par approximation ; mais ce qui est très-nécessaire, c'est de mettre en même-tems une contrequille en bois de même épaisseur, que la quantité dont on fera sortir la carène de l'eau, pour ne rien perdre de l'avantage du plus près.

Si le vaisseau ne marche pas, & que d'ailleurs il ne porte pas bien la voile, il faudra avoir d'abord recours à la contrequille de fer, parce qu'indépendamment qu'elle tient lieu par sa position d'une plus grande quantité de lest, & que le vaisseau doit par conséquent caller moins, elle tient également lieu de la contrequille en bois, que l'on seroit obligé de mettre pour se soutenir au plus près. Si malgré cette ressource il ne marchoit pas & ne portoit pas la voile, comme on le desire, il faudroit alors en venir à la mâture. La figure du vaisseau peut préparer les opérations à faire. En général un vaisseau aigu de l'avant, n'a pas besoin d'une mâture si élevée. Les frégates en sont un exemple bien sensible. Les voiles les plus élevées tendent plutôt à faire plonger l'avant, qu'à le faire siller ; & avec du vent frais, on les voit mieux marcher avec les quatre corps de voiles, qu'avec leurs huniers & les quatre corps de voiles. Les calculs diront mieux & avec précision de quelle quantité on doit peut-être rabaisser le point vélique, & si l'on peut, en le rabaisant, conserver toujours la même surface de voiles, en donnant en envergure, ce qu'on ôte en chûte. Si enfin le vaisseau ne marchoit pas, malgré ces changemens, & qu'on s'apperçut que son peu de vitesse procédât de la trop forte impulsion de l'eau sur la proue, on pourroit bien faire caller un peu plus l'arrière, pour élever l'avant de tout autant ; mais un moyen nouveau, seroit de diminuer considérablement la poussée de l'eau sur la proue, par le moyen d'une fourrure de simple bordage, dont un bout s'appuyeroit contre les bordages du vaisseau, &

l'autre contre le taillemer, comme la figure qui suit l'indique.



*Sensibilité au Gouvernail.*

On sçait, & plusieurs livres l'ont dit avant nous, quelle est la figure qu'il faut donner à la carène, pour qu'un vaisseau soit sensible à son gouvernail, indépendamment des voiles, & la figure particulière de ce même vaisseau, pour le rendre vif dans ses mouvemens, par le secours immédiat des voiles; mais je le répète encore, c'est d'un vaisseau à construire, dont on a parlé, & il n'y a plus rien à dire à ce sujet. On ne s'occupe dans ce Mémoire que des moyens à donner pour les vaisseaux à qui on trouve des défauts; ceux qui cherchent les remèdes à ces défauts, les éviteront, sans doute, quand ils travailleront à la composition d'un plan.

Un vaisseau, qui n'est pas sensible à son gouvernail, manque d'abord de vitesse; ensuite on doit soupçonner que son endroit le plus large est trop rapproché de l'arrière, & que cet arrière est trop nourri.

On a dit plus haut, comment on pouvoit donner de la vitesse aux vaisseaux; mais on ne peut retrécir un vaisseau trop large, ni aiguïser les lignes d'eau trop renflées

de l'arrière, il faut en venir nécessairement à faire plonger le vaisseau de l'avant & à augmenter cependant l'impulsion des filets d'eau sur le gouvernail. On le pourra en augmentant un peu sa largeur, sans cependant porter cette augmentation trop loin, de peur de fatiguer les ferrures; mais on pourra enfoncer ce gouvernail dans l'eau, & le prolonger de l'épaisseur d'une contrequille en bois, qui auroit la forme d'un coin, dont la tête seroit du côté du gouvernail, & l'angle se termineroit au milieu du vaisseau. Par ce moyen l'eau qui courroit le long de cette espèce de contrequille pyramidale, agiroit avec d'autant plus d'efficacité sur le gouvernail, qu'elle ne seroit pas détournée dans sa course, comme le sont les lignes d'eau plus élevées, qui ne peuvent se rendre au gouvernail, qu'après avoir passé par le milieu, qui les écarte toujours trop de l'axe.

### R O U L I S.

On se plaint moins de la vivacité des roulis, que de leurs fréquences & de leurs longueurs. J'ai vu des vaisseaux, qui courant vent arrière & même vent large, se submergeoient périodiquement des deux bords jusqu'à la seconde batterie; mais ces vaisseaux que j'avois auparavant calculés, avoient leur métacentre bien peu au dessus du centre de gravité, & leur flottaison trop peu soutenue ne donnoit pas assez de prise à la poussée verticale.

Du lest de fer placé sur la carlingue, ou près de la carlingue, auroit sans doute diminué le roulis, une contrequille de fer, moins pesante encore que ce lest auroit produit le même effet.

Tout au contraire, quand on se plaint de la vivacité des roulis, malgré la légèreté de l'arrimage, je n'y vois

pas d'autre moyen que de placer des poids à la tête des mâts majeurs. Ils feroient l'effet contraire de cette contrequille, parce que dans les deux cas, sans toucher au méta-centre, on élève ou on abaisse le centre de gravité. Je m'en remets toujours aux calculs, pour la quantité du poids à mettre.

### T A N G A G E.

Un vaisseau tangue, dont l'avant est trop aigu, ou trop plein, ou trop chargé de l'avant. Dans ces trois hypothèses, il faut soulager cette partie, parce que si c'est pour être trop aigu qu'il tangue, il s'enfoncera d'autant moins qu'il sera plus léger; si c'est pour être trop plein, il ne s'enfonce pas tant dans son tangage; mais le mouvement en est d'autant plus rude, & il met en danger la mâture: si c'est pour être trop chargé, il faut retirer autant qu'il est possible les poids vers le milieu.

#### *Si un Vaisseau est trop ardent.*

Quand un vaisseau s'élançe trop dans la ligne du vent; & que le gouvernail ne le ramene qu'avec peine dans la route indiquée, ou c'est un vice dans la forme du vaisseau, ou c'en est un dans la position des mâts. S'il est dans la forme du vaisseau, qu'il ait, par exemple, l'avant extrêmement taillé, une étrave droite & peu de différence de tirant d'eau; il n'y a pas à balancer, il faut faire plonger l'arrière, & par-là écarter du gouvernail le point de rotation, c'est-à-dire, prolonger le bras du levier auquel le gouvernail est appliqué.

Si ce défaut vient de la voilure, l'expérience y peut quelque chose, mais il vaut encore mieux s'en assurer sur un plan. On verra alors que le grand mât, ou le point vélique

vélique de ce mât, n'est pas placé en raison de celui du mât de mizaine, & que celui-ci est trop en arrière, & l'autre aussi. On peut corriger ce défaut par le déplacement d'un seul mât, dès qu'on connoît la distance du point de conversion à un de ces mâts quelconques. Tout le monde sçait qu'il n'y a plus qu'à diviser la somme de la surface des voiles, multipliée par la distance à ce point de conversion, par la somme de la surface des voiles de l'autre mât ; le quotient déterminera la place de ce dernier mât.

*Si le Vaisseau arrive trop promptement.*

Ce défaut est rare, mais il peut se trouver. Alors quant à la forme du vaisseau, on supprime par l'application d'un taille-mer la plus grande partie de l'élanement. On fait plonger un peu plus l'avant par la transposition du lest & des autres parties pesantes de l'arrimage ; & si on s'apperçoit que ce défaut provient plutôt de la position des mâts, on fait les changemens contraires à ceux que nous venons d'indiquer pour un vaisseau trop ardent.

Toutes ces observations sont communes à celles qu'on peut faire sur l'allure du plus près, sur le vent large & le vent arrière.

J'aurois pu entrer dans un plus grand détail, & je l'aurois même désiré, si le temps me l'eût permis ; j'aurois voulu surtout avoir celui de finir entièrement quelques projets de vaisseaux marchands, & démontrer la possibilité de partager avec les Hollandois le commerce d'exportation, en donnant à nos vaisseaux marchands la forme nécessaire pour porter beaucoup, & naviguer avec un équipage peu nombreux. Tout consiste à les allonger plus qu'ils ne sont,

18 MÉMOIRE SUR L'ARRIMAGE &c.  
& à les retenir considérablement pour diminuer mâtura  
re, voilure, agrêts, arcres, & par conséquent l'équi-  
page.

*F I N.*



# R É P O N S E

A LA Question proposée par  
l'ACADÉMIE ROYALE DES  
SCIENCES de Paris, pour  
l'année 1772.

*De perfectionner les methodes sur lesquelles est fondée  
la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles  
des équations de ce Satellite, qui sont encore  
incertaines, & d'examiner en particulier si l'on  
peut rendre raison, par cette théorie de l'équation  
séculaire du mouvement moyen de la Lune.*

---

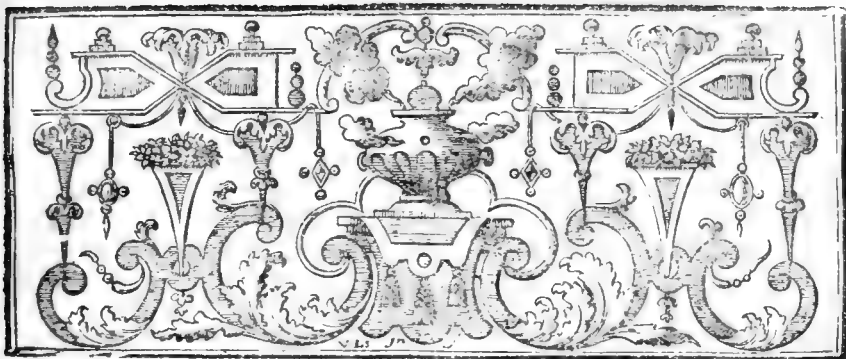
P A R M. E U L E R.

---

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DEPARTMENT OF CHEMISTRY  
5800 S. UNIVERSITY AVENUE  
CHICAGO, ILLINOIS 60637  
TEL: 773-936-3700

RESEARCH ASSISTANT  
SARAH J. BROWN  
1998-1999

A



NOUVELLES  
RECHERCHES  
SUR LE VRAI MOUVEMENT  
DE LA LUNE.

*Où l'on détermine toutes les inégalités auxquelles  
il est assujetti.*

---

Hic labor extremus, longarum hæc meta viarum,  
hinc jam digressi, vestris appellimus oris.

---



A théorie de la Lune étant un objet qui demande les plus longs & pénibles calculs, qui pourroient remplir un Volume tout entier, il me sera permis de n'en rapporter ici que les points essentiels avec les résultats que j'en ai déduits: je supprimerai donc tous les détails que je regarde toujours comme superflus, lorsqu'on a à comparoître devant des Juges aussi éclairés

#### 4 NOUVELLES RECHERCHES

que sont ceux qui composent l'Académie Royale des Sciences de Paris. Je prendrai pour base le Mémoire qui a été couronné en 1770 sur cette même question, & je commencerai par y faire quelques réflexions.

##### I I.

D'abord il est indubitable que la manière dont cette recherche a été développée dans le susdit Mémoire, par le moyen des trois coordonnées, mérite à bien des égards la préférence sur toutes les autres méthodes, que les Géomètres ont employés jusqu'ici pour déterminer les inégalités dans le mouvement de la Lune. Cependant je ne me servirai ici que l'idée générale, qui y constitue le fonds de de la solution, ayant trouvé à propos d'y faire plusieurs changemens, tant à l'égard de la situation des trois coordonnées, que dans la résolution même des équations qui en déterminent les valeurs.

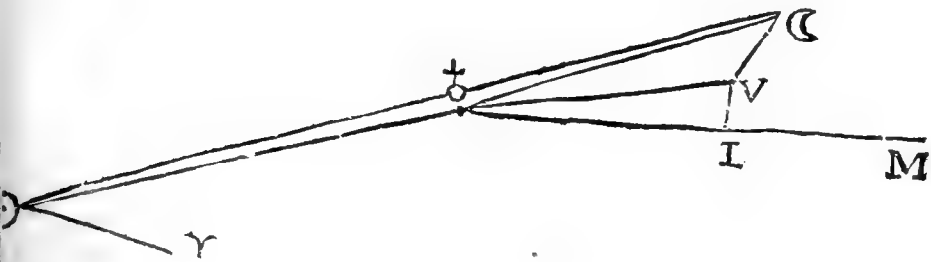
##### I I I.

D'ailleurs il s'en faut beaucoup que le développement du calcul, qui est rapporté dans ledit Mémoire, soit exécuté avec toute la justesse requise, & il paroît que l'Auteur n'a pas eu assez de tems, ou peut être de patience pour achever un travail aussi fatiguant que l'est surtout le calcul numérique, calcul auquel on ne sauroit même se fier, à moins qu'on ne l'ait réfait à diverses reprises, & avec tout le soin imaginable.

##### I V.

Que le plan de la figure représente le plan de l'écliptique, où je suppose le centre du Soleil immobile en  $\odot$ ,

& pour un tems proposé quelconque le centre de la Terre en  $\delta$ , la droite  $\odot \gamma$  marquant le lieu de l'équinoxe du printems. Soit ensuite hors de ce plan,  $\mathcal{C}$  le centre de la Lune, d'où j'abaisse sur ce plan de l'écliptique la perpendiculaire  $\mathcal{C}V$ , de sorte que la droite  $\delta V$  marque la longitude vraie de la Lune, & l'angle  $\mathcal{C} \delta V$  sa latitude, que je suppose boréale. Je tire ensuite dans le plan de l'écliptique la droite  $\delta M$  qui doit indiquer la longitude moyenne de la Lune, sur laquelle j'abaisse enfin de  $V$  la perpendiculaire  $V L$ , pour avoir les trois coordonnées orthogonales  $\delta L$ ,  $L V$ , &  $V \mathcal{C}$ , dont il s'agit de déterminer les valeurs. On voit d'abord que cette disposition est un peu différente de celle qui a été employée dans le Mémoire susmentionné ; mais aussi verra t-on bientôt que j'en retire l'avantage, que mes formules deviennent par-là plus simples & leurs applications au calcul moins embarrassantes. Cependant la conduite du calcul reste à peu près la même, de sorte qu'il seroit superflu de les déduire de nouveau des premiers principes de la mécanique.



## V.

Suivant le Mémoire couronné, les trois coordonnées ont été nommées :  $\delta L = a(1 + x)$ ,  $LV = ay$  &  $V\zeta = az$ , où la lettre  $a$  marque une certaine distance moyenne de la Lune à la Terre, l'unité exprimant la distance moyenne de la Terre au Soleil. Mais pour rendre le calcul plus aisé, je nommerai ici la

1<sup>re</sup>.  $\delta L = 1 + x$ ; 2<sup>e</sup>.  $LV = y$ ; 3<sup>me</sup>.  $V\zeta = z$ ,  
& maintenant la distance moyenne de la Terre au Soleil sera exprimée par  $\frac{1}{a}$ , où il est bon de remarquer que la dernière détermination de la parallaxe du Soleil donne à connoître, que la valeur de cette lettre  $a$  est fort à peu près  $\frac{1}{390}$  & par conséquent  $\frac{1}{a} = 390$ .

## VI.

Il s'agit donc de trouver les équations différentielles différentielles, qui déterminent les valeurs de ces trois coordonnées  $1 + x, y, z$ , où je suppose qu'on emploie la même méthode qui est détaillée dans le Mémoire déjà cité, où il convient de remarquer, que les tems  $y$  sont exprimés par le mouvement de l'anomalie moyenne du Soleil, qui y est nommé  $t$ , de sorte que sa différentielle  $dt$  soit constante. Ensuite il entrera dans ces équations l'angle  $p$ , qui marque l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, & qu'on tire aisément des Tables des moyens mouvemens, en soustrayant la longitude moyenne du Soleil de celle de la Lune. Or, pour le rapport entre ces deux angles  $p$  &  $t$ , je pose, comme dans ledit Mémoire

$\frac{dp}{dt} = m$ , de sorte que  $m = 12,368903$ , au moins pour le siècle présent, en cas que la résistance de l'éther soit capable d'y causer, avec le tems, quelque changement. Outre cela, il se trouvera dans ces équations encore un autre nombre constant  $\lambda$ , dont la valeur doit être supposée conformément aux raisons alléguées dans ledit Mémoire  $\lambda = (m + 1)^2 + \frac{1}{2}$ , ou bien  $\lambda = 179,228928$ . Enfin, l'excentricité de l'orbite du Soleil, que je nommerai ici  $x$ , s'introduit aussi dans nos équations, dont la valeur est  $x = 0,01678$ .

## VII.

Après ces explications, ayant réduit le calcul à ces trois nouvelles coordonnées, & développé les formules irrationnelles, de la même manière, qu'on l'avoit déjà fait dans le Mémoire susdit, on trouvera enfin les trois équations différentio-différentielles, telles que je les ai représentées sur les feuilles détachées ci-jointes, Table première, seconde & troisième, où la différentielle du tems  $dt$  est supposé constante.

## VIII.

On verra par là que j'ai poussé ici beaucoup plus loin l'évolution des formules irrationnelles, & même jusqu'à la sixième dimension des trois inconnues  $x, y$  &  $z$ , puisque j'ai trouvé dans la suite que quelques inégalités de la Lune demandent absolument la cinquième dimension, sans quoi leur détermination deviendroit tout à fait fautive. Aussi les petits termes affectés par les lettres  $a$  &  $x$  sont ici plus soigneusement développés, & dans les derniers on remarquera d'abord une grande différence par rapport à

ceux du Mémoire allégué, dont la raison est, que les coordonnées ont rapportées ici à un autre axe que là. Mais à l'égard des autres membres on découvrira une belle harmonie.

## I X.

En considérant la grande prolixité de ces équations ; on conviendra aisément qu'il faut entièrement renoncer à toute espérance de les intégrer, & tous nos soins ne doivent aboutir qu'à chercher par des convenables approximations les justes valeurs de nos trois inconnues  $x, y$  &  $z$ , & qui renferment même les constantes arbitraires que les intégrations actuelles y introduiroient.

## X.

Parmi ces constantes, il se présente d'abord l'excentricité de l'orbite lunaire, que je désignerai ici par la lettre  $k$ , à laquelle se rapporte un nouvel angle  $q$ , qui est l'anomalie moyenne de la Lune, & dont le rapport à l'angle  $t$  est supposé  $\frac{dq}{dt} = n = 13, 25604$ , & je ne répète pas ici tout ce qui est rapporté à cette occasion sur le mouvement de l'apogée de la Lune. Ensuite une autre constante renfermera l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, que je marquerai dans la suite par la lettre  $i$ , à laquelle se rapporte aussi un certain angle  $r$ , nommé l'argument de latitude, qu'on trouve en ôtant la longitude moyenne du nœud ascendant de celle de la Lune ; tout comme l'angle précédent  $q$  se trouve en ôtant la longitude moyenne de l'apogée lunaire de celle de la Lune, de sorte que ces deux angles sont aussi proportionels au tems : or pour ce dernier je pose  $\frac{dr}{dt} = l$ , dont la valeur se tire des tables  
qui



qui donnent  $l = 13,42263$ . Outre ces deux constantes  $k$  &  $i$ , les angles  $q$  &  $r$  même renferment encore deux constantes: car puisque nous n'avons posé que leurs différentielles  $dq = n dt$ , &  $dr = l dt$ , leurs intégrales, où les angles  $q$  &  $r$  même renfermeront sans doute chacun une constante. Il en est de même de l'angle  $p$ , parce que l'intégration de la formule  $dp = m dt$  reçoit aussi une constante. Enfin la sixième constante se trouve déjà dans la lettre  $a$ , entant qu'elle se rapporte à la quantité de l'orbite lunaire. Voilà donc toutes les six constantes, que les doubles intégrations de nos trois équations introduiroient dans le calcul, & dont les valeurs doivent être tirées de l'état actuel où se trouve le mouvement de la Lune.

## X I.

En réfléchissant bien sur la forme des valeurs qui ont été trouvées pour nos trois inconnues  $x$ ,  $y$  &  $z$ , on verra d'abord que les deux premières  $x$  &  $y$  contiennent quelques termes indépendans des constantes  $k$ ,  $i$ ,  $a$  &  $z$ , qu'on comprend communément sous le nom de VARIATION. Ensuite on y trouve des termes affectés simplement par la lettre  $k$ , & il est bon d'en distinguer ceux qui sont affectés par le carré  $k^2$ , ou même le cube  $k^3$ . Or, ces derniers deviennent déjà si extrêmement petits, qu'on peut hardiment négliger ceux qui seroient affectés par des plus hautes puissances de  $k$ . Il y aura aussi des termes affectés simplement par la lettre  $a$ , & ensuite aussi par  $ak$  &  $ax$ ; enfin des termes multipliés par  $x$  &  $xk$ , en négligeant tous les autres termes  $akk$ , &c, qui à cause de leur petitesse ne seroient également d'aucune conséquence. Pour ce qui regarde la troisième inconnue  $z$ , elle renfermera principalement des termes affectés par la constante  $i$  simplement, & ensuite aussi par  $ik$ ,  $ia$  &  $iz$ ,

enfin des termes multipliés par  $ik^2$  &  $i^3$  en négligeant d'autres combinaisons qui meneroient à des inégalités trop petites, pour mériter quelque attention.

## XII.

Mais puisque les deux premières équations renferment aussi le carré de la troisième inconnue,  $z$ , il s'ensuit que les quantités  $x$  &  $y$  doivent aussi renfermer des parties affectées premièrement par  $ii$ , & ensuite aussi par  $ik$  &  $ix$ , en négligeant des combinaisons plus compliquées. Or, ayant bien réfléchi sur tous les différens ordres des termes, dont nos trois inconnues  $x$ ,  $y$  &  $z$  seront composées; j'ai trouvé que les termes de chaque ordre se peuvent déterminer à part, ce qui m'a fourni un très-grand secours pour déterminer exactement les valeurs cherchées, & pour m'assurer de leur justesse. Pour cet effet je distribue les valeurs de  $x$ ,  $y$  &  $z$  conformément à ces classes que je viens d'établir: en supposant

$$x = O' + k.P' + k^2.Q' + k^3.R' + a.S' + ak.T' \\ + x.U' + xk.V' + ax.W' + i^2.X' + i^2k.Y' \\ + i^2x.Z'$$

$$y = O + k.P + k^2.Q + k^3.R + a.S + ak.T \\ + x.U + xk.V + ax.W + i^2.X + i^2k.Y \\ + i^2x.Z.$$

$$z = i.p + ik.q + ik^2.r + ix.u + i^3.t + ia.r.$$

## XIII.

Concevons à présent qu'on substitue réellement ces valeurs au lieu de  $x$ ,  $y$  &  $z$ , dans nos trois équations générales, & qu'on distingue pour chacune les membres

de chacun des ordres que je viens d'établir , en rejetant ceux qui monteroient à des ordres plus compliqués , comme ne méritant aucune attention , & on pourra séparément éгалer à zero les membres de chaque ordre , ce qui nous fournira une multitude d'équations particulières , dont je ne rapporterai ici que celles des cinq premiers ordres (\*), vu que les autres ont toutes des formes semblables , & que leur résolution demande la même méthode qui est enseignée dans le Mémoire cité , en y employant certains artifices qui ont rendu la solution plus aisée & en même tems plus certaine ; de sorte qu'il ne reste plus aucun doute sur les coefficients de tous les termes qui en ont été trouvés.

TABLE IV.  
a, b, c, d.

#### XIV.

Je passe maintenant aux résultats même de ces recherches pénibles , que je me contenterai d'avoir mis ici sous les yeux de l'Académie , tels que je les ai trouvés avec l'assistance de trois habiles Calculateurs , dont chacun s'est donné la peine de les calculer selon les différentes méthodes que je leur ai fournies , & répéter ces calculs plusieurs fois de suite ; de sorte que je puis répondre parfaitement de l'exactitude & de la justesse des valeurs trouvées pour les coefficients  $O$  ,  $P$  ,  $Q$  , &c.  $p$  ,  $q$  ,  $r$  , &c. & qui sont représentés dans les Tables V<sup>me</sup>. VI<sup>me</sup>. VII<sup>me</sup>. Les recherches même & les artifices analytiques , qu'il m'a fallu employer pour y parvenir , remplissent un assez grand volume , que je ne manquerai cependant pas de mettre en son tems sous les yeux du Public.

---

(\*) J'y ai ajouté encore les équations particulières du septième & onzième ordre , comme les moins compliqués , ne renfermant que les inégalités qui dépendent de l'excentricité de la Terre  $x$  & du carré de l'inclinaison  $i^2$ .

## XV.

En substituant toutes ces valeurs, pour avoir celles de nos trois inconnues  $x$ ,  $y$  &  $z$ , je comparai d'abord ces formules avec celles que Messieurs Mayer & Clairaut ont employées pour construire leurs Tables lunaires: je m'affurai par ce moyen des justes valeurs qu'il faut donner aux deux constantes  $k$  &  $i$ , & je les trouvai

$$k = 0,05449; i = 0,08944.$$

Mais ayant ensuite comparé mes formules trouvées avec plusieurs observations actuelles, sur lesquelles j'avois fait le calcul, j'ai remarqué que l'erreur, dans quelques-unes, montoit à presque une minute; de sorte que pour obtenir un plus juste accord entre les formules trouvées & les observations, il m'a fallu apporter encore quelques légères corrections aux valeurs de  $k$  &  $i$ , que j'ai enfin trouvé

$$k = 0,05450; i = 0,08964.$$

## XVI.

Substituons donc en effet ces valeurs pour  $k$  &  $i$ , & supposons  $a = \frac{i}{390}$  &  $x = 0,01678$ , pour obtenir les valeurs entièrement développées en nombres de nos trois coordonnées  $\delta L = 1 + x$ ,  $LV = y$  &  $V\mathbb{C} = z$ , que je mettrai ici devant les yeux dans les VIII<sup>me</sup>. IX<sup>me</sup>. & X<sup>me</sup>. Table, où au lieu des fractions décimales, j'ai exprimé tous les coefficients en dix millionnièmes parties de l'unité. Ces parties sont si petites que 100 ne sauroient produire que 2 secondes dans le lieu de la Lune.

## XVII.

Pour se servir de ces formules, d'où l'on pourroit aisément construire des Tables ordinaires, on n'a qu'à tirer des bonnes Tables des moyens mouvemens, pour un tems proposé quelconque, les cinq élémens suivans

1°. Longitude moyenne de la Lune =  $L$ .

2°. Longitude de son apogée . . . =  $P$ .

3°. Longitude du nœud ascendant . =  $N$ .

4°. Longitude moyenne du Soleil . . =  $\Delta$ .

5°. Longitude de son apogée . . . =  $\Pi$ .

Et de former de là les quatre argumens suivans :

I°.  $p = L - \Delta$ ;

II°.  $q = L - P$ ;

III°.  $r = L - N$ ;

IV°.  $t = \Delta - \Pi$ .

D'où l'on trouvera aisément les justes valeurs de nos trois coordonnées

$$\delta L = 1 + x; LV = \gamma; VC = z.$$

## XVIII.

Ayant trouvé ces trois valeurs, qu'on cherche les deux angles suivans

$$L \delta V = \phi \text{ \& } V \delta C = \psi.$$

Par le moyen de ces simples formules :

$$\text{tang. } \varphi = \frac{y}{1+x}; \text{ tang. } \psi = \frac{z \cdot \text{cos. } \varphi}{1+x}$$

Et alors l'angle  $\varphi$  ou ajouté, ou retranché de la longitude moyenne de la Lune =  $L$ , selon que  $y$  provient positif ou négatif, donnera d'abord la vraie longitude de la Lune, pendant que l'autre angle  $\psi$ , montre sur le champ la vraie latitude ou *boréale*, ou *méridionale*, selon que  $z$  est positif ou négatif. Ce calcul paroît d'autant plus aisé, qu'il ne s'agit ici que des angles, connus par les seules Tables des moyens mouvemens, sans s'embarasser ni d'aucune correction dans le lieu des nœuds, ou dans l'inclinaison de l'orbite lunaire, ni même de la réduction à l'écliptique. Car tous ces articles, d'ailleurs assez embarrassans, se trouvent déjà renfermés dans nos formules.

### X I X.

Enfin, il est fort aisé de tirer de-là la vraie distance de la Lune à la Terre, en calculant cette formule

$$(1+x) \sec \varphi \sec \psi.$$

Ou bien pour connoître la vraie parallaxe équatorienne de la Lune, elle sera exprimée par cette formule

$$\frac{10,000,000}{1+x} \times 56' 35'' \times \text{cos. } \varphi \times \text{cos. } \psi,$$

où je remarque que j'ai conclu cette parallaxe moyenne de  $56' 35''$ , qui répond à la distance moyenne 1, ou plu-

tôt 10,000,000 de l'éclipse du Soleil de l'année 1769 ; de sorte qu'on en peut être assuré à quelques secondes près. On reconnoitra aisément que cette détermination de la parallaxe doit être infiniment plus exacte que celle qu'on tire des Tables ordinaires, vu qu'elle dépend ici ouvertement de toutes les inégalités de la Lune, pendant que les Tables, dont on se sert, n'y employent que quelques inégalités qui y influent principalement.

## X X.

Par là, j'espère avoir pleinement satisfait aux vues de l'illustre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, ayant entièrement développé & fixé toutes les inégalités, auxquelles le mouvement de ce satellite est assujetti, sans en excepter aucune, qui pourroit influencer sur le lieu de la Lune pour plus de dix secondes, & ayant enfin fait voir que, comme aucune de ces inégalités ne sauroit produire une équation séculaire, dans le moyen mouvement de la Lune, on n'en pourra non plus rendre raison par la seule attraction du Soleil & de tout autre Corps céleste ; de sorte qu'il ne reste plus aucun doute que cette équation séculaire, qu'on observe, ne soit l'effet de la résistance du milieu, dans lequel les planètes se meuvent.

Au reste, je ne doute pas, qu'en corrigeant tant soit peu les lieux moyens de l'apogée & du nœud dans les Tables ordinaires, on ne puisse, par ce moyen, par-

venir à déterminer le lieu de la Lune à 30 secondes près. Or, pour un plus haut degré de précision, on ne fauroit jamais l'espérer à cause de l'action des autres planètes à laquelle la Lune est assujettie.

*F I N.*



# T A B L E

## P R E M I È R E.

§ 7.

*Première Équation générale.*

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2(m+1)dy}{dt} - 3\lambda x$$

$$- \frac{3}{2} \text{cos. } 2p$$

$$- \frac{3}{2} x \text{cos. } 2p + \frac{3}{2} y \text{sin. } 2p$$

$$+ 3\lambda x^2 - \frac{3}{2} \lambda (y^2 + z^2)$$

$$- 4\lambda x^3 + 6\lambda x(y^2 + z^2)$$

$$+ 5\lambda x^4 - 15\lambda x^2(y^2 + z^2) + \frac{15}{8} \lambda (y^2 + z^2)^2$$

$$- 6\lambda x^5 + 30\lambda x^3(y^2 + z^2) - \frac{45}{4} \lambda x(y^2 + z^2)^2$$

$$+ 7\lambda x^6 - \frac{105}{2} \lambda x^4(y^2 + z^2) + \frac{315}{8} \lambda x^2(y^2 + z^2)^2$$

$$- \frac{35}{16} (y^2 + z^2)^3$$

$$- \frac{3}{8} a(3 \text{cos. } p + 5 \text{cos. } 3p)$$

$$- \frac{3}{4} a x(3 \text{cos. } p + 5 \text{cos. } 3p) + \frac{3}{4} a y(\text{sin. } p + 5 \text{sin. } 3p)$$

$$- \frac{3}{8} a x^2(3 \text{cos. } p + 5 \text{cos. } 3p) + \frac{3}{4} a x y(\text{sin. } p + 5 \text{sin. } 3p)$$

$$- \frac{3}{8} a y^2(\text{cos. } p - 5 \text{cos. } 3p) + \frac{3}{2} a z^2 \text{cos. } p$$

$$+ \frac{3}{4} x(2 \text{cos. } t + 7 \text{cos. } (2p - t) - \text{cos. } (2p + t))$$

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

C

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{4} k x (2 \operatorname{cof}. t + 7 \operatorname{cof}. (2p - t) - \operatorname{cof}. 2p + t) \\
& \quad - \frac{3}{4} k y (7 \operatorname{sin}. (2p - t) - \operatorname{sin}. (2p + t)) \\
& + \frac{3}{8} a k (9 \operatorname{cof}. (p - t) + 3 \operatorname{cof}. (p + t) + 25 \operatorname{cof}. (3p - t) \\
& \quad - 5 \operatorname{cof}. (3p + t)) \\
& + \frac{3}{4} a k x (9 \operatorname{cof}. (p - t) + 3 \operatorname{cof}. (p + t) + 25 \operatorname{cof}. (3p - t) \\
& \quad - 5 \operatorname{cof}. (3p + t)) - \frac{3}{4} a k y (3 \operatorname{sin}. (p - t) + \operatorname{sin}. (p + t) \\
& \quad + 25 \operatorname{sin}. (3p - t) - 5 \operatorname{sin}. (3p + t)) \\
& + \frac{3}{8} a k x^2 (9 \operatorname{cof}. (p - t) + 3 \operatorname{cof}. (p + t) + 25 \operatorname{cof}. (3p - t) \\
& \quad - 5 \operatorname{cof}. (3p + t)) - \frac{3}{4} a k x y (3 \operatorname{sin}. (p - t) + \operatorname{sin}. (p + t) \\
& \quad + 25 \operatorname{sin}. (3p - t) - 5 \operatorname{sin}. (3p + t)) \\
& + \frac{3}{8} a k y^2 (3 \operatorname{cof}. (p - t) + \operatorname{cof}. (p + t) - 25 \operatorname{cof}. (3p - t) \\
& \quad + 5 \operatorname{cof}. (3p + t)) - \frac{3}{2} a k z^2 (3 \operatorname{cof}. (p - t) + \operatorname{cof}. (p + t)) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

## T A B L E I I.

## § 7.

*Seconde Equation générale.*

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2(m+1)dx}{dt} \\
& + \frac{3}{2} \operatorname{sin}. 2p \\
& + \frac{3}{2} x \operatorname{sin}. 2p + \frac{3}{2} y \operatorname{cof}. 2p \\
& - 3 \lambda x y \\
& + 6 \lambda x^2 y - \frac{3}{2} \lambda y (y^2 + z^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 10 \lambda x^3 y + \frac{15}{2} \lambda x y (y^2 + z^2) \\
 & + 15 \lambda x^4 y - \frac{45}{2} \lambda x^2 y (y^2 + z^2) + \frac{15}{8} \lambda y (y^2 + z^2)^2 \\
 & - 21 \lambda x^5 y + \frac{105}{2} \lambda x^3 y (y^2 + z^2) + \frac{105}{8} \lambda x y (y^2 + z^2)^2 \\
 & + \frac{3}{8} a (\sin. p + 5 \sin. 3p) \\
 & + \frac{3}{4} a x (\sin. p + 5 \sin. 3p) - \frac{3}{4} a y (\cos. p - 5 \cos. 3p) \\
 & + \frac{3}{8} a x^2 (\sin. p + 5 \sin. 3p) - \frac{3}{4} a x y (\cos. p - 5 \cos. 3p) \\
 & + \frac{3}{8} a y^2 (3 \sin. p - 5 \sin. 3p) - \frac{3}{2} a z^2 \sin. p \\
 & - \frac{3}{4} k (7 \sin. (2p - t) - \sin. (2p + t)) \\
 & - \frac{3}{4} k x (7 \sin. (2p - t) - \sin. (2p + t)) + \frac{3}{4} k y (2 \cos. t \\
 & - 7 \cos. (2p - t) + \cos. (2p + t)) \\
 & - \frac{3}{8} a k (3 \sin. (p - t) + \sin. (p + t) + 25 \sin. (3p - t) \\
 & - 5 \sin. (3p + t)) \\
 & - \frac{3}{4} a x x (3 \sin. (p - t) + \sin. (p + t) + 25 \sin. (3p - t) \\
 & - 5 \sin. (3p + t)) + \frac{3}{4} a k y (3 \cos. (p - t) + \cos. (p + t) \\
 & - 25 \cos. (3p - t) + 5 \cos. (3p + t)) \\
 & - \frac{3}{8} a k x x (3 \sin. (p - t) + \sin. (p + t) + 25 \sin. (3p - t) \\
 & - 5 \sin. (3p + t)) + \frac{3}{4} a k x y (3 \cos. (p - t) + \cos. (p + t) \\
 & - 25 \cos. (3p - t) + 5 \cos. (3p + t)) \\
 & - \frac{3}{8} a k y y (9 \sin. (p - t) + 3 \sin. (p + t) - 25 \sin. (3p - t) \\
 & + 5 \sin. (3p + t)) + \frac{3}{2} a k z z (3 \sin. (p - t) + \sin. (p + t)) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

## T A B L E III.

## § 7.

*Troisième Equation générale.*

$$\begin{aligned}
& \frac{ddx}{dt^2} + (\lambda + 1)z \\
& - 3 \lambda x z \\
& + 6 \lambda x^2 z - \frac{3}{2} \lambda z (y^2 + z^2) \\
& - 10 \lambda x^3 z + \frac{15}{2} \lambda x z (y^2 + z^2) \\
& + 15 \lambda x^4 z - \frac{45}{2} \lambda x^2 z (y^2 + \frac{15}{8} \lambda z (y^2 + z^2) + z^2)^2 \\
& - 21 \lambda x^5 z + \frac{105}{2} \lambda x^3 z (y^2 + z^2) - \frac{105}{8} \lambda x z (y^2 + z^2)^2 \\
& + 3 a z \text{ cof. } p \\
& + 3 a x z \text{ cof. } p - 3 a y z \text{ sin. } p \\
& - 3^k z \text{ cof. } z \\
& - 3 a^k z (3 \text{ cof. } (p - t) + \text{ cof. } (p + t)) \\
& - 3 a^k x z (3 \text{ cof. } (p - t) + \text{ cof. } (p + t)) + 3 a k y z \\
& \quad (3 \text{ sin. } (p - t) + \text{ sin. } (p + t)) = 0.
\end{aligned}$$

T A B L E I V. a.

§ 13.

*Equations particulières du premier ordre , pour déterminer les valeurs de O' & O*

$$1. \frac{ddO'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dO}{dt} - 3\lambda O' - \frac{1}{2} \cos. 2p - \frac{1}{2} O' \cos. 2p + \frac{1}{2} O \sin. 2p + 3\lambda O'^2 - \frac{1}{2} \lambda O^2 = 0.$$

$$2. \frac{ddO}{dt^2} + \frac{2(m+1)dO'}{dt} + \frac{1}{2} \sin. 2p + \frac{1}{2} O' \sin. 2p + \frac{1}{2} O \cos. 2p - 3\lambda O' O = 0.$$

*Equations particulières du second ordre , pour déterminer les valeurs de P' & P.*

$$1. \frac{ddP'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dP}{dt} - 3\lambda P' + P'.(-\frac{1}{2} \cos. 2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2) + P. (+\frac{1}{2} \sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O) = 0.$$

$$2. \frac{ddP}{dt^2} + \frac{2(m+1)dP'}{dt} + P'.(+\frac{1}{2} \sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O) + P. (+\frac{1}{2} \cos. 2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2} \lambda O^2) = 0.$$

*Equations particulières du troisième ordre, pour déterminer les valeurs de Q' & Q.*

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{ddQ'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dQ}{dt} - 3\lambda Q' \\
 + Q'. \left( -\frac{3}{2} \cos. 2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2 \right) \\
 + Q. \left( +\frac{3}{2} \sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda. O' O \right) \\
 + P'^2. \left( 3\lambda - 12\lambda O' + 30\lambda O'^2 - 15\lambda O^2 \right) \\
 + P'. P. \left( 12\lambda O - 60\lambda O' O \right) \\
 + P^2. \left( -\frac{3}{2}\lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \frac{45}{4}\lambda O^2 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{ddQ}{dt^2} + \frac{2(m+1)dQ'}{dt} \\
 + Q'. \left( \frac{3}{2} \sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O \right) \\
 + Q. \left( \frac{3}{2} \cos. 2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2 \right) \\
 + P'^2. \left( 6\lambda O - 30\lambda O' O \right) \\
 + P'. P. \left( -3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \frac{45}{2}\lambda O^2 \right) \\
 + P^2. \left( -\frac{9}{2}\lambda O + \frac{45}{2}\lambda O' O \right) = 0.
 \end{aligned}$$

T A B L E I V. b. § 13.

*Equations particulières du quatrième ordre, pour déterminer les valeurs de R' & R.*

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{ddR'}{dt^2} &= \frac{2(m+1)dR}{dt} - 3\lambda R' \\
 &+ R'(-\frac{3}{2}\cos. 2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2) \\
 &+ R(\frac{3}{2}\sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O) \\
 &+ 2P'Q(3\lambda - 12\lambda O' + 30\lambda O'^2 - 15\lambda O^2) \\
 &+ (P'Q + PQ')(12\lambda O - 60\lambda O' O) \\
 &+ 2PQ(-\frac{3}{2}\lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \frac{45}{4}\lambda O^2) \\
 &+ P^3(-4\lambda + 20\lambda O' - 60\lambda O'^2 + 30\lambda O^2) \\
 &+ 3P'^2P(-10\lambda O + 60\lambda O' O) \\
 &+ 3P'P^2(3\lambda - 10\lambda O' + 30\lambda O'^2 - \frac{45}{2}\lambda O^2) \\
 &+ P^3(\frac{15}{2}\lambda O - 45\lambda O' O) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{ddR}{dt^2} &+ \frac{2(m+1)dR'}{dt} \\
 &+ R'(\frac{3}{2}\sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O) \\
 &+ R(\frac{3}{2}\cos. 2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2}\lambda O^2) \\
 &+ 2P'Q'(6\lambda O - 30\lambda O' O) \\
 &+ (P'Q + PQ')(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \frac{45}{2}\lambda O^2) \\
 &+ 2PQ(-\frac{3}{2}\lambda O + \frac{45}{2}\lambda O' O) \\
 &+ P^3(-10\lambda O + 60\lambda O' O) \\
 &+ 3P'^2P(2\lambda - 10\lambda O' + 30\lambda O'^2 - \frac{45}{2}\lambda O^2) \\
 &+ 3P'P^2(\frac{15}{2}\lambda O - 45\lambda O' O) \\
 &+ P^3(-\frac{3}{2}\lambda + \frac{15}{2}\lambda O' - \frac{45}{2}\lambda O'^2 + \frac{75}{4}\lambda O^2) = 0.
 \end{aligned}$$

## T A B L E I V. c. § 13.

*Equations particulières du cinquième ordre, pour déterminer les valeurs de S' & S.*

$$1. \frac{ddS'}{dt^2} = \frac{2(m+1)dS}{dt} - 3\lambda S'$$

$$+ S'(-\frac{3}{2}\cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2)$$

$$+ S(\frac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O)$$

$$- \frac{3}{8}(3\cos.p + 5\cos.3p)(1 + 2O' + O'^2)$$

$$+ \frac{3}{4}(\sin.p + 5\sin.3p)(O + O' O)$$

$$- \frac{3}{8}(\cos.p - 5\cos.3p)O^2 = 0.$$

$$2. \frac{ddS}{dt^2} + \frac{2(m+1)dS'}{dt}$$

$$+ S'(\frac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O)$$

$$+ S(\frac{3}{2}\cos.2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2)$$

$$+ \frac{3}{8}(\sin.p + 5\sin.3p)(1 + 2O' + O'^2)$$

$$- \frac{3}{4}(\cos.p - 5\cos.3p)(O + O' O)$$

$$+ \frac{3}{8}(3\sin.p - \sin.3p)O^2 = 0.$$

*Equations particulières du septième ordre, pour déterminer les valeurs de U' & U.*

$$1. \frac{ddU'}{dt^2} = \frac{2(m+1)dU'}{dt} - 3\lambda U'$$

$$+ U'(-\frac{3}{2}\cos.2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2)$$

$$+ U(\frac{3}{2}\sin.2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O)$$

$$+ \frac{3}{4}(2\cos.t + 7\cos.(2p-t) - \cos.(2p+t))(1 + O')$$

$$- \frac{3}{4}(7\sin.(2p-t) - \sin.(2p+t))O = 0.$$



$$\begin{aligned}
 2. \frac{ddU}{dt^2} + \frac{2(m+1)dU'}{dt} \\
 + U' \left( \frac{3}{2} \sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O \right) \\
 + U \left( \frac{3}{2} \cos. 2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2} \lambda O^2 \right) \\
 - \frac{3}{4} (7 \sin. (2p-t) - \sin. (2p+t)) (1+O') \\
 + \frac{3}{4} (2 \cos. t - 7 \cos. (2p-t) + \cos. (2p+t)) O \\
 = 0.
 \end{aligned}$$

*Equations particulières du onzième ordre, pour déterminer les valeurs de X' & X.*

$$\begin{aligned}
 1. \frac{dX'}{dt^2} - \frac{2(m+1)dX'}{dt} - 3\lambda X' \\
 + X' \left( -\frac{3}{2} \cos. 2p + 6\lambda O' - 12\lambda O'^2 + 6\lambda O^2 \right) \\
 + X \left( \frac{3}{2} \sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O \right) \\
 + z z' \left( -\frac{3}{2} \lambda + 6\lambda O' - 15\lambda O'^2 + \frac{15}{4} \lambda O^2 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \frac{dX}{dt^2} + \frac{2(m+1)dX'}{dt} \\
 + X' \left( \frac{3}{2} \sin. 2p - 3\lambda O + 12\lambda O' O \right) \\
 + X \left( \frac{3}{2} \cos. 2p - 3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{9}{2} \lambda O^2 \right) \\
 + z z' \left( -\frac{3}{2} \lambda O + \frac{15}{2} \lambda O' O \right) = 0.
 \end{aligned}$$

## TABLE IV. d. § 13.

Pour la troisième Coordonnée  $z$ .

Equation particulière du premier ordre, pour déterminer la valeur de  $p'$ .

$$\frac{ddp'}{dt^2} + (\lambda + 1)p' + p'(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{3}{2}\lambda O'^2) = 0.$$

Equation particulière du second ordre, pour déterminer la valeur de  $q'$ .

$$\begin{aligned} \frac{ddq}{dt^2} + (\lambda + 1)q + q(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{3}{2}\lambda O'^2) \\ + P'.p'(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \frac{15}{2}\lambda O'^2) \\ + P.p'(-3\lambda O + 15\lambda O'O) = 0. \end{aligned}$$

Equation particulière du troisième ordre, pour déterminer la valeur de  $r'$

$$\begin{aligned} \frac{ddr'}{dt^2} + (\lambda + 1)r' + r'(-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{3}{2}\lambda O'^2) \\ + (P'q' + Q'p')(-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \frac{15}{2}\lambda O'^2) \\ + (Pq' + Q'p')(-3\lambda O + 14\lambda O'O) \\ + P'^2.p'(6\lambda - 30\lambda O' + 90\lambda O'^2 - \frac{45}{2}\lambda O'^2) \\ + P'.P.p'(15\lambda O - 90\lambda O'O) \\ + P^2.p(-\frac{3}{2}\lambda + \frac{15}{2}\lambda O' - \frac{45}{2}\lambda O'^2 + \frac{45}{4}\lambda O'^2) \\ = 0. \end{aligned}$$

*Equation particulière du quatrième ordre, pour déterminer  
la valeur de s'.*

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s'}{dt^2} + (\lambda + 1)s' + s'. (-3\lambda O' + 6\lambda O'^2 - \frac{3}{2}\lambda O^2) \\ + U' p' (-3\lambda + 12\lambda O' - 30\lambda O'^2 + \frac{15}{2}\lambda O^2) \\ + U p' (-3\lambda O + 15\lambda O' O \\ - 3 p'. \cos. t = 0. \end{aligned}$$

## T A B L E V.

§ 14.

Pour la première Coordonnée.

$$x = O' + k. P' + k^2. Q' + k^3. R' + a. S' + ak. T' + x. U' \\ + xk. V' + ax. W' + i^2. X' + i^2k. Y' + i^2x. Z'$$

On trouve

$$O' = + 0,0000240 - 0,0071801 . \text{cos. } 2p \\ + 0,0000060 . \text{cos. } 4p.$$

$$P' = + \text{cos. } q + 0,187695 . \text{cos. } (2p - q) \\ - 0,000514 . \text{cos. } (4p - q) - 0,002703 . \text{cos. } (2p + q) \\ - 0,000021 . \text{cos. } (4p + q)$$

$$Q' = - 0,53896 - 0,21903 . \text{cos. } 2p \\ + 0,00195 . \text{cos. } 4p + 0,50967 . \text{cos. } q \\ - 0,20179 . \text{cos. } (2p - 2q) + 0,02278 . \text{cos. } (4p - 2q) \\ + 0,00482 . \text{cos. } (2p + 2q) + 0,00004 . \text{cos. } (4p + 2q)$$

$$R' = 0 . \text{cos. } q - 0,1908 . \text{cos. } (2p - q) \\ - 0,0482 . \text{cos. } (4p - q) - 0,3807 . \text{cos. } 3q \\ - 0,2300 . \text{cos. } (2p + q) - 0,0058 . \text{cos. } (4p + q) \\ + 0,2623 . \text{cos. } (2p - 3q) - 0,0239 . \text{cos. } (4p - 3q) \\ - 0,0068 . \text{cos. } (2p + 3q) + 0,0000 . \text{cos. } (4p + 3q)$$

$$S' = + 0,11419 . \text{cos. } p - 0,00289 . \text{cos. } 3p$$

$$T' = - 0,0813 . \text{cos. } (p - q) + 0,1205 . \text{cos. } (p + q) \\ - 0,0088 . \text{cos. } (3p - q) + 0,0015 . \text{cos. } (3p + q)$$

$$\begin{aligned}
 U' &= -0,006829 . \text{cos. } t + 0,029397 . \text{cos. } (2p-t) \\
 &+ 0,000046 . \text{cos. } (4p-t) - 0,003452 . \text{cos. } (2p+t) \\
 &- 0,000004 . \text{cos. } (4p+t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V' &= -0,17091 . \text{cos. } (q-t) + 0,02943 . \text{cos. } (2p-q+t) \\
 &- 0,43632 . \text{cos. } (2p-q-t) + 0,10743 . \text{cos. } (q+t) \\
 &+ 0,01372 . \text{cos. } (2p+q-t) - 0,00037 . \text{cos. } (2p+q+t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W' &= +0,1164 . \text{cos. } (p-t) + 0,6135 . \text{cos. } (p+t) \\
 &+ 0,0162 . \text{cos. } (3p-t) - 0,0048 . \text{cos. } (3p+t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X' &= -0,25019 + 0,01928 . \text{cos. } 2p + 0,24728 . \text{cos. } 2r \\
 &- 0,01255 . \text{cos. } (2p-2r) + 0,00025 . \text{cos. } (4p-2r) \\
 &+ 0,00002 . \text{cos. } 4p + 0,00038 . \text{cos. } (2p+2r) \\
 &+ 0,00000 . \text{cos. } (4p+2r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y' &= +0 . \text{cos. } q - 0,0709 . \text{cos. } (2p-q) - 0,0755 . \text{cos. } (q-2r) \\
 &- 0,0268 . \text{cos. } (2p-q+2r) - 0,0847 . \text{cos. } (2p+q-2r) \\
 &- 0,0046 . \text{cos. } (2p+q) - 0,1261 . \text{cos. } (q+2r) \\
 &+ 0,0252 . \text{cos. } (2p-q-2r) - 0,0010 . \text{cos. } (2p+q+2r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z' &= +0,0098 . \text{cos. } t - 0,0584 . \text{cos. } (2p-t) \\
 &+ 0,0189 . \text{cos. } (t-2r) + 0,0220 . \text{cos. } (2p+t) \\
 &- 0,0108 . \text{cos. } (t+2r) - 0,0017 . \text{cos. } (2p-t+2r) \\
 &- 0,0096 . \text{cos. } (2p+t-2r) + 0,0288 . \text{cos. } (2p-t-2r) \\
 &+ 0,0001 . \text{cos. } (2p+t+2r)
 \end{aligned}$$

## T A B L E VI.

## § 14.

Pour la seconde Coordonnée.

$$y = O + k.P + k^2.Q + k^3.R + a.S + ak.T + x.U \\ + xk.V + ax.W + i^2.X + i^2k.Y + i^2x.Z.$$

On trouve

$$O = +0,0102117. \sin. 2p + 0,0000057. \sin. 4p.$$

$$P = -2,012639. \sin. q - 0,411247. \sin. (2p - q) \\ - 0,000724. \sin. (4p - q) - 0,003212. \sin. (2p + q) \\ - 0,000019. \sin. (4p + q)$$

$$Q = +0,09800. \sin. 2p + 0,00175. \sin. 4p \\ + 0,25209. \sin. 2q + 0,31159. \sin. (2p - 2q) \\ + 0,01183. \sin. (4p - 2q) + 0,00428. \sin. (2p + 2q) \\ + 0,00005. \sin. (4p + 2q)$$

$$R = +1,3662. \sin. q + 0,4255. \sin. (2p - q) \\ - 0,0377. \sin. (4p - q) - 0,2955. \sin. 3q \\ - 0,0353. \sin. (2p + q) + 0,0010. \sin. (4p + q) \\ - 0,2211. \sin. (2p - 3q) - 0,0071. \sin. (4p - 3q) \\ - 0,0061. \sin. (2p + 3q) - 0,0001. \sin. (4p + 3q)$$

$$S = -0,24035. \sin. p + 0,00285. \sin. 3p$$

$$T = +1,8056. \sin. (p - q) + 0,0603. \sin. (p + q) \\ + 0,0720. \sin. (3p - q) - 0,0008. \sin. (3p + q)$$

$$\begin{aligned}
 U &= +0,190587. \sin. t - 0,043312. \sin. (2p-t) \\
 &\quad - 0,000143. \sin. (4p-t) + 0,005525. \sin. (2p+t) \\
 &\quad + 0,000005. \sin. (4p+t) \\
 V &= +0,66190. \sin. (q-t) - 0,12631. \sin. (2p-q+t) \\
 &\quad + 1,08068. \sin. (2p-q-t) - 0,41712. \sin. (q+t) \\
 &\quad + 0,01372. \sin. (2p+q-t) - 0,00441. \sin. (2p+q+t) \\
 W &= - 0,1093. \sin. (p-t) - 1,2630. \sin. (p+t) \\
 &\quad - 0,0167. \sin. (3p-t) + 0,0015. \sin. (3p+t) \\
 X &= - 0,02145. \sin. 2p - 0,24645. \sin. 2r + 0,03407. \\
 &\quad \sin. (2p-2r) - 0,00014. \sin. (4p-2r) - 0,00003. \\
 &\quad \sin. 4p - 0,00037. \sin. (2p+2r) + 0,00000. \\
 &\quad \sin. (4p+2r) \\
 Y &= +0,0014. \sin. q + 0,1917. \sin. (2p-q) - 0,4966. \\
 &\quad \sin. (q-2r) + 0,0289. \sin. (2p-q+2r) + 0,1802. \\
 &\quad \sin. (2p+q-2r) + 0,0095. \sin. (2p+q) + 0,1249. \\
 &\quad \sin. (q+2r) - 0,0590. \sin. (2p-q-2r) + 0,0009. \\
 &\quad \sin. (2p+q+2r) \\
 Z &= - 0,2496. \sin. t + 0,0697. \sin. (2p-t) \\
 &\quad + 0,0204. \sin. (t-2r) - 0,0247. \sin. (2p+t) \\
 &\quad + 0,0099. \sin. (t+2r) + 0,0017. \sin. (2p-t+2r) \\
 &\quad + 0,1016. \sin. (2p+t-2r) - 0,0755. \\
 &\quad \sin. (2p-t-2r) - 0,0004. \sin. (2p+t+2r).
 \end{aligned}$$

## T A B L E VII.

## § 14.

Pour la troisième Coordonnée.

$$Z = i . p' + ik . q' + ik' . r' + ix . s' + i' . t' + ia . u'$$

On trouve

$$p' = \sin . r + 0,036982 . \sin . (2p - r) + 0,001513 . \sin . (2p + r) + 0,000047 . \sin . (4p - r) + 0,000006 . \sin . (4p + r)$$

$$q' = -1,48323 . \sin . (q - r) - 0,11149 . \sin . (2p - q + r) - 0,01634 . \sin . (2p + q - r) - 0,50496 . \sin . (q + r) - 0,24129 . \sin . (2p - q - r) - 0,00296 . \sin . (2p + q + r) - 0,00063 . \sin . (4p - q + r) - 0,00364 . \sin . (4p - q - r) - 0,00008 . \sin . (4p + q - r) - 0,00002 . \sin . (4p + q + r)$$

$$r' = 0 . \sin . r + 0,0363 . \sin . (2p - r) + 0,3425 . \sin . (2q - r) + 0,1701 . \sin . (2p - 2q - r) + 0,0126 . \sin . (2p + 2q - r) + 0,1589 . \sin . (2p + r) + 0,3799 . \sin . (2q + r) + 0,0498 . \sin . (2p - 2q + r) + 0,0046 . \sin . (2p + 2q + r)$$

$$s' = -0,02384 . \sin . (r - t) + 0,03864 . \sin . (2p - r + t) - 0,00681 . \sin . (2p + r - t) + 0,02022 . \sin . (r + t) - 0,10985 . \sin . (2p - r - t) + 0,00089 . \sin . (2p + r + t)$$

$$t' = 0.$$



$$\begin{aligned}
 z' &= 0. \sin. r + 0,0035. \sin. (2p - r) + 0,0001. \\
 &\quad \sin. (4p - r) - 0,0006. \sin. (2p + r) + 0,0000. \\
 &\quad \sin. (4p + r) + 0,0004. \sin. 3r + 0,0172. \\
 &\quad \sin. (2p - 3r) + 0,0009. \sin. (4p - 3r) + 0,0001. \\
 &\quad \sin. (2p + 3r) + 0,0000. \sin. (4p + 3r) \\
 u' &= -0,1583. \sin. (p - r) - 0,0616. \sin. (p + r) \\
 &\quad - 0,0036. \sin. (3p - r) - 0,0000. \sin. (3p + r).
 \end{aligned}$$

## T A B L E VIII.

## § 16.

Valeur de la première Coordonnée  $\delta$   $Z = 1 + x$ .

+ 9964129.	+	424. <i>cos</i> 2 <i>p</i> - 3 <i>q</i>
+ 2928. <i>cos</i> <i>p</i>	-	38. <i>cos</i> 4 <i>p</i> - 3 <i>q</i>
- 63746. <i>cos</i> 2 <i>p</i>	-	1133. <i>cos</i> <i>t</i>
- 74. <i>cos</i> 3 <i>p</i>	+	264. <i>cos</i> <i>p</i> + <i>t</i>
+ 120. <i>cos</i> 4 <i>p</i>	+	50. <i>cos</i> <i>p</i> - <i>t</i>
+ 545000. <i>cos</i> <i>q</i>	-	549. <i>cos</i> 2 <i>p</i> + <i>t</i>
+ 15139. <i>cos</i> 2 <i>q</i>	+	4854. <i>cos</i> 2 <i>p</i> - <i>t</i>
- 616. <i>cos</i> 3 <i>q</i>	-	2. <i>cos</i> 3 <i>p</i> + <i>t</i>
+ 168. <i>cos</i> <i>p</i> + <i>q</i>	+	7. <i>cos</i> 3 <i>p</i> - <i>t</i>
+ 143. <i>cos</i> 2 <i>p</i> + 2 <i>q</i>	-	1. <i>cos</i> 4 <i>p</i> + <i>t</i>
- 114. <i>cos</i> <i>p</i> - <i>q</i>	+	7. <i>cos</i> 4 <i>p</i> - <i>t</i>
- 5994. <i>cos</i> 2 <i>p</i> - 2 <i>q</i>	+	771. <i>cos</i> <i>q</i> + <i>t</i>
- 1875. <i>cos</i> 2 <i>p</i> + <i>q</i>	-	1663. <i>cos</i> <i>q</i> - <i>t</i>
+ 101675. <i>cos</i> 2 <i>p</i> - <i>q</i>	-	8. <i>cos</i> 2 <i>p</i> + <i>q</i> + <i>t</i>
+ 677. <i>cos</i> 4 <i>p</i> - 2 <i>q</i>	-	3727. <i>cos</i> 2 <i>p</i> - <i>q</i> - <i>t</i>
- 20. <i>cos</i> 4 <i>p</i> + <i>q</i>	+	126. <i>cos</i> 2 <i>p</i> + <i>q</i> - <i>t</i>
- 358. <i>cos</i> 4 <i>p</i> - <i>q</i>	+	282. <i>cos</i> 2 <i>p</i> - <i>q</i> + <i>t</i>
- 11. <i>cos</i> 2 <i>p</i> + 3 <i>q</i>	+	19870. <i>cos</i> 2 <i>r</i>

T A B L E.

35

+	30. <i>cof.</i> $2p+2r$	—	118. <i>cof.</i> $2p-q+2r$
—	1008. <i>cof.</i> $2p-2r$	—	14. <i>cof.</i> $t+2r$
+	4. <i>cof.</i> $4p-2r$	+	25. <i>cof.</i> $t-2r$
—	553. <i>cof.</i> $q+2r$	+	1. <i>cof.</i> $2p+t+2r$
—	267. <i>cof.</i> $q-2r$	+	38. <i>cof.</i> $2p-t-2r$
—	4. <i>cof.</i> $2p+p+2r$	—	13. <i>cof.</i> $2p+t-2r$
+	113. <i>cof.</i> $2p-q-2r$	—	2. <i>cof.</i> $2p-t+2r$
—	457. <i>cof.</i> $2p+q-2r$		

## TABLE IX.

## § 16.

Valeur de la seconde Coordonnée  $LV=y$ .

—	6162. <i>sin.p</i>	—	471. <i>sin.4p—q</i>
+	103304. <i>sin.2p</i>	—	9. <i>sin.2p+3q</i>
+	73. <i>sin.3p</i>	—	358. <i>sin.2p—3q</i>
+	107. <i>sin.4p</i>	—	1. <i>sin.4p+3q</i>
—	1094678. <i>sin.q</i>	—	11. <i>sin.4p—3q</i>
+	7488. <i>sin.2q</i>	+	31643. <i>sin.t</i>
—	478. <i>sin.3q</i>	—	543. <i>sin.p+t</i>
+	84. <i>sin.p+q</i>	—	47. <i>sin.p—t</i>
+	127. <i>sin.2p+2q</i>	+	894. <i>sin.2p+t</i>
+	2523. <i>sin.p—q</i>	—	7174. <i>sin.2p—t</i>
+	9255. <i>sin.2p—2q</i>	+	1. <i>sin.3p+t</i>
—	1766. <i>sin.2p+q</i>	—	7. <i>sin.3p—t</i>
+	1. <i>sin.4p+2q</i>	+	1. <i>sin.4p+t</i>
—	222601. <i>sin.2p—q</i>	—	23. <i>sin.4p—t</i>
+	351. <i>sin.4p—2q</i>	—	4455. <i>sin.q+t</i>
—	1. <i>sin.3p+q</i>	+	6053. <i>sin.q—t</i>
+	101. <i>sin.3p—q</i>	—	40. <i>sin.2p+q+t</i>
—	8. <i>sin.4p+q</i>	+	9883. <i>sin.2p—q—t</i>

P

T A B L E

$\ddagger$ 125. $\sin. 2p+q-t$	—	$261. \sin. 2p-q-2r$
$-$ 1152. $\sin. 2p-q+t$	+	$790. \sin. 2p+q-2r$
$-$ 19803. $\sin. 2r$	+	$126. \sin. 2p-q+2r$
$-$ 30. $\sin. 2p+2r$	+	$13. \sin. t+2r$
$+$ 2738. $\sin. 2p-2r$	$\ddagger$	$28. \sin. t-2r$
$-$ 11. $\sin. 4p-2r$	—	$1. \sin. 2p+t+2r$
$\ddagger$ 548. $\sin. q+2r$	—	$102. \sin. 2p-t-2r$
$-$ 2174. $\sin. q-2r$	+	$137. \sin. 2p+t-2r$
$\ddagger$ 3. $\sin. 2p+q+2r$	$\ddagger$	$2. \sin. 2p-t+2r$

## T A B L E X.

§ 16.

Valeur de la troisieme Coordonnée  $V\mathcal{C} = z$ .

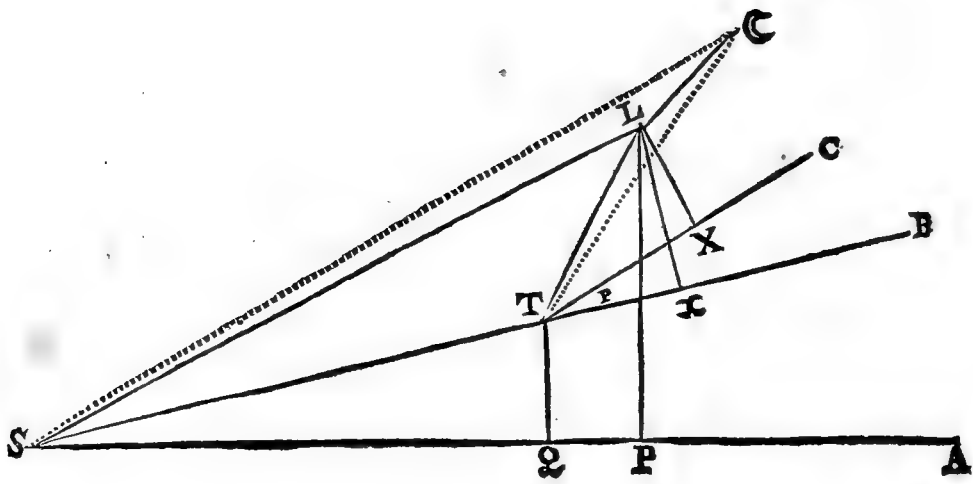
+	896400. <i>sin. r</i>	—	145. <i>sin. 2p+q+r</i>
+	3. <i>sin. 3r</i>	—	11787. <i>sin. 2p—q—r</i>
—	139. <i>sin. p+r</i>	—	798. <i>sin. 2p+q—r</i>
—	363. <i>sin. p—r</i>	—	5447. <i>sin. 2p—q+r</i>
+	1774. <i>sin. 2p+r</i>	+	12. <i>sin. 2p+2q+r</i>
+	33265. <i>sin. 2p—r</i>	+	453. <i>sin. 2p—2q—r</i>
—	1. <i>sin. 3p—r</i>	+	33. <i>sin. 2p+2q—r</i>
+	5. <i>sin. 4p+r</i>	+	132. <i>sin. 2p—2q+r</i>
+	42. <i>sin. 4p—r</i>	+	252. <i>sin. r+t</i>
+	127. <i>sin. 2p—3r</i>	—	302. <i>sin. r—t</i>
—	24669. <i>sin. q+r</i>	+	13. <i>sin. 2p+r+t</i>
—	72460. <i>sin. q—r</i>	—	1649. <i>sin. 2p—r—t</i>
+	1012. <i>sin. 2q+r</i>	—	103. <i>sin. 2p+r—t</i>
+	912. <i>sin. 2q—r</i>	+	601. <i>sin. 2p—r+t</i>

F I N.

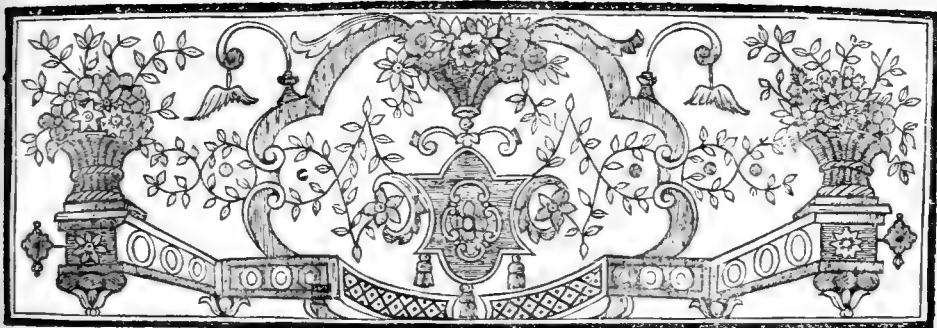
# R É P O N S E

A LA Question proposée par  
l'ACADÉMIE ROYALE DES  
SCIENCES de Paris, pour  
l'année 1770.

*Perfectionner les methodes sur lesquelles est fondée la  
théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles  
des équations de ce Satellite, qui sont encore  
incertaines, & d'examiner en particulier si l'on  
peut rendre raison, par cette théorie de l'équation  
séculaire du mouvement de la Lune.*







# THÉORIE DE LA LUNE.

Errantemque canit Lunam. *Virg.*

## PREMIÈRE SECTION

*Des formules différentielles qui déterminent le  
mouvement de la Lune.*

### ARTICLE PREMIER.

*Des formules tirées immédiatement de l'action du Soleil  
& de la Terre.*

§. I.

**Q**UE le plan de l'écliptique soit représenté par celui de la planche: soit  $S$  le centre du Soleil considéré en repos, &  $SA$  une ligne fixe tirée vers l'équinoxe du printems. Qu'à un temps proposé, la Terre se trouve en  $T$  & la Lune hors du plan de l'écliptique en  $\mathcal{C}$ ; d'où l'on baisse sur ce plan la perpendiculaire  $\mathcal{C}L$ . Enfin ayant mené

les droites  $LS$ ,  $ST$ ,  $TL$ ,  $S\mathbb{C}$  &  $T\mathbb{C}$ , qu'on tire fut  $SA$  les perpendiculaires  $TQ$  &  $LP$ .

## I I.

Cela posé, qu'on nomme  $ST = u$ : l'angle  $AST = \varphi$ ; la distance  $SL = v$ ; &  $TL = \omega$ ; ensuite les trois coordonnées pour le lieu de la Lune:  $SP = X$ ,  $PL = Y$ ,  $L\mathbb{C} = Z$ ; & on aura  $SQ = u \cos. \varphi$ ;  $QT = u \sin. \varphi$ ; & les distances  $S\mathbb{C} = \sqrt{vv + ZZ}$ ;  $T\mathbb{C} = \sqrt{\omega\omega + ZZ}$ . D'où exprimant les masses du Soleil & de la Terre par  $S$  &  $T$ , les forces dont la Lune est sollicitée, seront

$$\text{Selon } \mathbb{C}S = \frac{S}{vv + ZZ} \text{ \& selon } \mathbb{C}T = \frac{T}{\omega\omega + ZZ}$$

qu'on décomposera aisément suivant les directions de nos trois coordonnées.

## I I I.

Que  $t$  marque un angle proportionnel au temps pour lequel nous prendrons dans la suite l'anomalie moyenne du Soleil, & prenant le différentiel  $dt$  pour constant, les principes de Mécanique nous fournissent ces trois équations.

$$\begin{aligned} 1. \frac{ddX}{dt^2} &= - \frac{S.X}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.(X - u \cos. \varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}; \\ 2. \frac{ddY}{dt^2} &= - \frac{S.Y}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.(Y - u \sin. \varphi)}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}; \\ 3. \frac{ddZ}{dt^2} &= - \frac{S.Z}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}} - \frac{T.Z}{(\omega\omega + ZZ)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

## I V.

Nous poserons dans la suite la distance moyenne de la Terre au Soleil = 1, & puisque  $t$  marque l'anomalie

moyenne du Soleil, on fait, par la théorie du mouvement des Planètes que la lettre  $S$  sera aussi exprimée par l'unité, ou  $S = 1$ . De-là on fait aussi que posant l'excentricité de l'orbite de la Terre  $= v$ , dont la valeur est  $v = 0,01676$ .

On aura  $u = 1 + v \cos. t$  &  $\frac{d\varphi}{dt} = 1 - 2v \cos. t$ . Ces valeurs seront suffisantes pour notre dessein, & on pourra hardiment négliger les termes où la lettre  $v$  auroit deux & plusieurs dimensions.

## V.

Puisque la distance  $v$  est extrêmement grande, par rapport à l'ordonnée  $Z$ , & à plus forte raison  $vv$  à l'égard de  $ZZ$ , il sera permis de négliger dans la formule  $vv + ZZ$  le terme  $ZZ$ . Cela remarqué, nos trois équations prendront les formes suivantes.

$$1. \quad -\frac{ddX}{dt^2} - \frac{X}{v^3} = \frac{T. (X - u \cos. \varphi)}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}};$$

$$2. \quad -\frac{ddY}{dt^2} - \frac{Y}{v^3} = \frac{T. (Y - u \sin. \varphi)}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}};$$

$$3. \quad -\frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = \frac{T. Z}{(vv + ZZ)^{\frac{3}{2}}}$$

## ARTICLE II.

*Réduction de ces formules à d'autres coordonnées qui se rapportent au lieu de la Terre.*

## VI.

AYANT prolongé la ligne  $ST$  en  $B$ , de sorte que  $B$  marque l'opposition du Soleil vu de la Terre, qu'on y tire la perpendiculaire  $Lx$ , & qu'on pose les trois coordonnées  $Tx = x$ ;  $xL = y$  &  $LC = Z = z$ , & nous aurons  $vv = (u + x)^2 + yy$ ;  $\omega\omega = xx + yy$ . De-là puisque  $x$  &  $y$

sont très-petites par rapport à  $u$ , à cause de  $vv = uu + 2ux + xx + yy$ , nous aurons, en négligeant les termes où  $x$  &  $y$  auroient plus de deux dimensions  $\frac{1}{v^3} = \frac{1}{u^3} - \frac{3x}{u^4} + \frac{6xx}{u^5} - \frac{3yy}{2u^5}$ . Ou l'on pourra même rejeter les termes  $xx$  &  $yy$ , à moins qu'il ne s'agisse de déterminer les inégalités de la Lune qui dépendent de la parallaxe du Soleil.

## V I I.

Maintenant pour réduire les coordonnées précédentes à celle-ci, il est évident qu'on aura  $X = (u+x)\cos.\phi - y\sin.\phi$ , &  $Y = y\cos.\phi + (u+x)\sin.\phi$ ; d'où l'on pourroit calculer les valeurs de  $dX$ ,  $dY$ ,  $ddX$  &  $ddY$ ; mais comme cela nous mèneroit à des calculs trop embarrassés, nous commencerons à substituer à la place des deux premières équations, les deux suivantes:

$I \times \cos.\phi + II \times \sin.\phi$  &  $II \cos.\phi - I \times \sin.\phi$  qui seront

$$1. \frac{ddX \cos.\phi - ddY \sin.\phi}{dt^2} - \frac{X \cos.\phi - Y \sin.\phi}{v^3} = \frac{T.(X \cos.\phi + Y \sin.\phi - u)}{(uu + ZZ)^{\frac{1}{2}}}$$

$$2. \frac{ddY \cos.\phi + ddX \sin.\phi}{dt^2} - \frac{Y \cos.\phi + X \sin.\phi}{v^3} = \frac{T.(Y \cos.\phi - X \sin.\phi)}{(uu + ZZ)^{\frac{1}{2}}}$$

Auxquelles on doit toujours joindre la troisième,

$$3. \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = \frac{T.Z}{(uu + ZZ)^{\frac{1}{2}}}$$

## V I I I.

Pour faire le plus succinctement les substitutions nécessaires, tirons d'abord des valeurs de  $X$  &  $Y$  les rapports suivans:  $X \cos.\phi + Y \sin.\phi = u + x$ ,  $Y \cos.\phi - X \sin.\phi = y$ ; différencions ces formules, & nous obtiendrons

$$dX \cos.\phi + dY \sin.\phi + d\phi(Y \cos.\phi - X \sin.\phi) = du + dx$$

par conséquent

$$dX. \cos. \varphi + dY. \sin. \varphi = du + dx - y d\varphi$$

& de la même manière

$$dY. \cos. \varphi - dX. \sin. \varphi = dy + (u + x) d\varphi$$

Ces formules étant encore une fois différenciées, fourniront

$$ddX. \cos. \varphi + ddY. \sin. \varphi = ddu + ddx - y dd. \varphi - 2xy d\varphi - (u + x) d\varphi^2 \text{ \& }$$

$$ddY. \cos. \varphi - ddX. \sin. \varphi = ddy + (u + x) dd\varphi + 2du d\varphi + 2dx d\varphi - y d\varphi^2.$$

I X.

On voit que par cette réduction, les *sin. φ* & *cos. φ* s'en vont par tout du calcul, & maintenant nos trois équations fondamentales seront :

$$1. - \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2dyd\varphi}{dt^2} + \frac{ydd\varphi}{dt^2} + \frac{xd\varphi^2}{dt^2} - \frac{ddu}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2}{dt^2} - \frac{u-x}{v^3} = Tx. (\omega\omega + ZZ) - \frac{1}{2}$$

$$2. - \frac{ddy}{dt^2} + \frac{2dx d\varphi}{dt^2} - \frac{xdd\varphi}{dt^2} + \frac{yd\varphi^2}{dt^2} - \frac{udd\varphi}{dt^2} - \frac{2dud\varphi}{dt^2} - \frac{y}{v^3} = Ty. (\omega\omega + ZZ) - \frac{1}{2}$$

$$3. - \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{v^3} = TZ. (\omega\omega + ZZ) - \frac{1}{2}$$

Ce sont donc nos équations rapportées aux trois coordonnées *x*, *y* & *Z*.

X.

Avant que de passer plus loin, substituons ici au lieu de  $\frac{1}{v^3}$  la valeur donnée ci-dessus (§. VI), & rejettons toujours les termes où *x* & *y* auroient plus de deux dimensions : alors nos trois équations prendront les formes qui suivent.

$$1. \quad \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2dyd\varphi}{dt^2} + \frac{ydd\varphi}{dt^2} + \frac{xd\varphi^2}{dt^2} - \frac{ddu}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2}{dt^2} - \frac{1}{uu} + \frac{2x}{u^3} \\ - \frac{3xx}{u^4} + \frac{3yy}{2u^4} = Tx. (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}};$$

$$2. \quad \frac{ddv}{dt^2} - \frac{2dx d\varphi}{dt^2} + \frac{y d\varphi^2}{dt^2} - \frac{x dd\varphi}{dt^2} - \frac{udd\varphi}{dt^2} - \frac{2dud\varphi}{dt^2} - \frac{y}{u^3} \\ + \frac{3xy}{u^4} = Ty. (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}};$$

$$3. \quad \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} + \frac{3xZ}{u^4} = TZ. (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}},$$

## A R T I C L E I I I.

*Réduction ultérieure de ces formules à des coordonnées, qui se rapportent à la distance moyenne de la Lune au Soleil.*

## X I.

COMME l'angle *BTZ* marque la véritable élongation de la Lune à l'opposition du Soleil *B* sur l'écliptique, soit *p* l'élongation moyenne de la Lune au même terme *B*, & tirons la droite *TC*, en sorte que l'angle *BTC* soit = *p*. Qu'on abaisse sur cette *TC* de *L* la perpendiculaire *LX*, & qu'on nomme les trois coordonnées *TX* = *X*; *XL* = *Y*; *LC* = *z* = *Z*, auxquelles il s'agit de réduire nos trois équations différentio-différentielles. Pour cet effet, remarquons que le rapport de *dp* à *dt* est donné par les Tables Astronomiques, d'où prenant un intervalle de 30 jours, on trouve  $\frac{dp}{dt} = \frac{12^{\text{f}} 5^{\circ} 43' 21'' \cdot 1}{6^{\text{f}} 29^{\circ} 34' 4'' \cdot 5}$ , ou  $\frac{dp}{dt} = \frac{1316601 \cdot 1}{106444 \cdot 5} = 12,3688974$ . Je poserai, pour abrégér, *dp* = *mdt*, de sorte que *m* = 12,3688974.

## XII.

XII.

Ces nouvelles coordonnées tiennent aux précédentes les rapporrs suivans :

$$x = X \cos. p - Y \sin. p ; y = Y \cos. p + X \sin. p$$

& réciproquement ,

$$x \cos. p + y \sin. p = X ; y \cos. p - x \sin. p = Y.$$

Il sera bon d'avertir ici, qu'il ne faut pas confondre ces lettres majuscules X & Y avec celles dont je me suis servi au premier article, & que je regarde comme entièrement oubliées.

XIII.

Pour éviter les calculs trop prolixes, je transformerai encore les deux premières équations du §. X en d'autres, par ces combinaisons ,

$$I. \cos. p + II. \sin. p \text{ \& } II. \cos. p - I. \sin. p ;$$

dont la première donnera :

$$\begin{aligned} & \frac{ddx \cos. p - ddy \sin. p}{dt^2} + \frac{2d\phi(dy \cos. p - dx \sin. p)}{dt^2} + \frac{dd\phi(y \cos. p - x \sin. p)}{dt^2} \\ & + \frac{d\phi^2(x \cos. p + y \sin. p)}{dt^2} - \frac{ddu \cos. p}{dt^2} - \frac{u dd\phi \sin. p}{dt^2} + \frac{ud\phi^2 \cos. p}{dt^2} \\ & - \frac{2du d\phi \sin. p}{dt^2} - \frac{\cos. p}{uu} + \frac{2x \cos. p}{u^3} - \frac{y \sin. p}{u^3} + \frac{3yy \cos. p}{2u^4} \\ & + \frac{3xy \sin. p}{u^4} + \frac{3xx \cos. p}{u^4} = \frac{T(x \cos. p + y \sin. p)}{(uw + ZZ)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

& la seconde donnera

$$\begin{aligned} & \frac{ddy \cos. p + ddx \sin. p}{dt^2} - \frac{2d\phi(dx \cos. p + dy \sin. p)}{dt^2} - \frac{dd\phi(x \cos. p + y \sin. p)}{dt^2} \\ & + \frac{d\phi^2(y \cos. p - x \sin. p)}{dt^2} - \frac{udd\phi \cos. p}{dt^2} + \frac{ddu \sin. p}{dt^2} - \frac{2du d\phi \cos. p}{dt^2} \\ & - \frac{ud\phi^2 \sin. p}{dt^2} + \frac{\sin. p}{uu} - \frac{y \cos. p}{u^3} - \frac{2x \sin. p}{u^3} - \frac{3yy \sin. p}{2u^4} + \frac{3xy \cos. p}{u^4} \\ & + \frac{3xx \sin. p}{u^4} = \frac{T(y \cos. p - x \sin. p)}{u^4} \end{aligned}$$

## X I V.

A présent il ne sera plus difficile de faire les substitutions; car comme  $x \cos.p + y \sin.p = X$ ;  $y \cos.p - x \sin.p = Y$ ; nous en tirerons, en différenciant,

$$dx \cos.p + dy \sin.p = dX - Ydp;$$

$$dy \cos.p - dx \sin.p = dY + Xdp: \text{ ensuite}$$

$$ddx \cos.p + ddy \sin.p = ddX + 2dYdp - Xdp^2;$$

$$ddy \cos.p - ddx \sin.p = ddY + 2dXdP - Ydp^2.$$

## X V.

A l'aide de ces réductions, & à cause de  $dp = mdt$ , notre première équation deviendra, après avoir arrangé tous les termes selon les  $X$  &  $Y$ :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt} \left( m + \frac{d\varphi}{dt} \right) + X \left( mm + \frac{2m d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right. \\ & \left. + \frac{2\cos.p^2 - \sin.p^2}{u^3} \right) + Y \left( \frac{dd\varphi}{dt^2} - \frac{3\sin.p \cos.p}{u^3} \right) + \frac{3XX \cos.p}{u^4} \\ & \left( \frac{3}{2} \sin.p^2 - \cos.p^2 \right) + \frac{3XY \sin.p}{u^4} (4\cos.p^2 - \sin.p^2) + \frac{3YY \cos.p}{u^4} \\ & \left( \frac{1}{2} \cos.p^2 - 2\sin.p^2 \right) - \frac{\cos.p}{uu} - \frac{ddu \cos.p}{dt^2} + \frac{ud\varphi^2 \cos.p}{dt^2} - \frac{udd\varphi \sin.p}{dt^2} \\ & - \frac{2du d\varphi \sin.p}{dt^2} = T. X (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

De la même manière, nous trouverons la seconde équation.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt} \left( m + \frac{d\varphi}{dt} \right) + Y \left( mm + \frac{2m d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right. \\ & \left. + \frac{2\sin.p^2 - \cos.p^2}{u^3} \right) - X \left( \frac{dd\varphi}{dt^2} + \frac{3\sin.p \cos.p}{u^3} \right) + \frac{3YY \sin.p}{u^4} \\ & (\sin.p^2 - \frac{3}{2} \cos.p^2) + \frac{3XY \cos.p}{u^4} (\cos.p^2 - 4\sin.p^2) + \frac{3XX \sin.p}{u^4} \end{aligned}$$



$$(2 \cos^2 p^2 - \frac{1}{2} \sin^2 p^2) + \frac{\sin p}{uu} - \frac{u dd\varphi \cos p}{dt^2} - \frac{2 du d\varphi \cos p}{dt^2} + \frac{ddu \sin p}{dt^2} - \frac{u d\varphi^2 \sin p}{dt^2} = T.Y(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{1}{2}}$$

Et la troisième équation sera

$$3. - \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3XZ \cos p}{u^4} + \frac{3YZ \sin p}{u^4} = T.Z(\omega\omega + ZZ)^{-\frac{1}{2}}$$


---

ARTICLE IV.

Troisième réduction de ces formules, en les appliquant à la question proposée.

XVI.

Nos équations différentio-différentielles deviendront beaucoup plus simples, si l'on a égard à la théorie du Soleil, par laquelle on fait que I.  $\frac{u dd\varphi + 2 du d\varphi}{dt^2} = 0$  ;

II.  $\frac{ddu - u d\varphi^2}{dt^2} = -\frac{1}{uu}$ , & de là  $u dd\varphi = dt$  ou  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{u}$

&  $\frac{dd\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{1}{u}$ . Car en substituant ces relations dans les

formules trouvées, tous les termes où il n'y a ni X ni Y se détruiront.

XVII.

Nous obtiendrons de là les équations suivantes:

$$1. - \frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt} \left( m + \frac{1}{uu} \right) + X \left( mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^2} + \frac{2 \cos^2 p^2 - \sin^2 p^2}{u^3} \right) + Y \left( \frac{d}{dt} \frac{1}{uu} - \frac{3 \sin p \cos p}{u^3} \right) + \frac{3XX \cos p}{u^4}$$

$$\left(\frac{1}{2} \sin. p^2 - \cos. p^2\right) + \frac{3XY \sin. p}{u^2} (4 \cos. p^2 - \sin. p^2) + \frac{3YY \cos. p}{u^2} \\ \left(\frac{1}{2} \cos. p^2 - 2 \sin. p^2\right) = TX (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{1}{2}}$$

$$2. - \frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt} \left(m + \frac{1}{uu}\right) + Y \left(mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4}\right) \\ + \frac{2 \sin. p^2 - \cos. p^2}{u^3} - X \left(\frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3 \sin. p \cos. p}{u^3}\right) + \frac{3YY \sin. p}{u^4} \\ (\sin. p^2 - \frac{3}{2} \cos. p^2) + \frac{3XY \cos. p}{u^4} (\cos. p^2 - 4 \sin. p^2) + \frac{3XX \sin. p}{u^4} \\ (2 \cos. p^2 - \frac{1}{2} \sin. p^2) = T. Z (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{1}{2}}$$

$$3. - \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^3} - \frac{3Z(X \cos. p - Y \sin. p)}{u^4} = T. Z (\omega\omega + ZZ)^{-\frac{1}{2}}$$

## X V I I I.

En substituant les sinus & cosinus des angles multiples à la place des produits des sinus & cosinus de l'angle simple  $p$ , ces trois équations différentio-différentielles prendront ces formes.

$$1. - \frac{ddX}{dt^2} + \frac{2dY}{dt} \left(m + \frac{1}{uu}\right) + X \left(mm + \frac{2m}{uu}\right) \\ + \frac{1}{u^4} + \frac{1 + 3 \cos. 2p}{2u^3} + Y \left(\frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} - \frac{3 \sin. 2p}{2u^3}\right) \\ - \frac{XX(9 \cos. p + 15 \cos. 3p)}{8u^4} + \frac{XY(3 \sin. p + 15 \sin. 3p)}{4u^4} \\ - \frac{YY(3 \cos. p - 15 \cos. 3p)}{8u^4} - T.X(XX + YY + ZZ)^{-\frac{1}{2}} \Bigg\} = 0.$$

$$2. - \frac{ddY}{dt^2} - \frac{2dX}{dt} \left(m + \frac{1}{uu}\right) + Y \left(mm + \frac{2m}{uu}\right) \\ + \frac{1}{u^4} + \frac{1 - 3 \cos. 2p}{2u^3} - X \left(\frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3 \sin. 2p}{2u^3}\right) \\ + \frac{YY(9 \sin. p - 15 \sin. 3p)}{8u^4} - \frac{XY(3 \cos. p - 15 \cos. 3p)}{4u^4} \\ + \frac{XX(3 \sin. p + 15 \sin. 3p)}{8u^4} - T.Y(XX + YY + ZZ)^{-\frac{1}{2}} \Bigg\} = 0.$$

$$3. \left. \begin{aligned} & - \frac{ddZ}{dt^2} - \frac{Z}{u^2} - \frac{3ZX \cos p}{u^4} + \frac{3ZY \sin p}{u^4} \} \dots = 0 \\ & - T.Z (XX + YY + ZZ)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}$$

A cause de  $\omega\omega = XX + YY$ .

---

ARTICLE V.

*Dernière réduction de ces formules différentio-différentielles.*

XIX.

COMME les deux coordonnées  $Y$  &  $Z$  sont toujours très-petites à l'égard de la troisième  $X$ , dont la moyenne valeur est  $a$ , il sera bon d'introduire au lieu de ces coordonnées trois autres inconnues qui conservent entr'elles une plus grande égalité : je poserai pour cet effet,  $X = a(1 + x)$ ;  $Y = ay$  &  $Z = az$ , en avertissant encore qu'il ne faudra pas confondre ces  $x, y$  &  $z$  avec les coordonnées employées au second article. Cette substitution nous procurera aussi l'avantage de pouvoir développer en général les formules irrationnelles qui entrent dans nos équations différentio-différentielles, & qui sans cela embarrasseroient beaucoup lorsque nous voudrions en faire l'application aux inégalités des mouvemens de la Lune.

XX.

Ayant  $XX + YY + ZZ = aa(1 + 2x + xx + yy + zz)$ , nous aurons d'abord  $(XX + YY + ZZ)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2} (1 - 3x + 6xx - \frac{3}{2}yy - \frac{3}{2}zz - 10x^3 + \frac{15}{2}xyy + \frac{15}{2}xzz)$ , en négligeant les quatrièmes & les plus hautes puissances de  $x, y$ , &  $z$ . Soit maintenant  $\frac{T}{a^2} = \lambda$ , dont la valeur, quelle

qu'elle soit, fera toujours constante, & nous obtiendrons, pour les derniers membres de nos trois équations, ces valeurs :

$$T. X (XX + YY + ZZ)^{-\frac{1}{2}} = \lambda a (1 - 2x + 3xx - \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}zz - 4x^3 + 6yyx + 6xzz)$$

$$T. Y (XX + YY + ZZ)^{-\frac{1}{2}} = \lambda a (y - 3yx + 6yxx - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}yzz)$$

$$T. Z (XX + YY + ZZ)^{-\frac{1}{2}} = \lambda a (z - 3zx + 6zxx - \frac{1}{2}zyy - \frac{1}{2}z^3).$$

X X I.

D'où nos trois équations deviendront, après les avoir divisées par  $a$  :

$$1. \left. \begin{aligned} & - \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2dy}{dt} \left( m + \frac{1}{uu} \right) + mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4} \\ & + \frac{1}{2u^3} - \lambda + \frac{3\cos. 2p}{2u^3} + x \left( mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4} \right) \\ & + \frac{1}{2u^3} + 2\lambda \Big) + y. \frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} + \frac{3x \cos. 2p}{2u^3} - \frac{3y \sin. 2p}{2u^3} \\ & - 3\lambda xx + \frac{3}{2} \lambda yy + \frac{1}{2} \lambda zz + 4\lambda x^3 - 6\lambda xy \\ & - 6\lambda xzz - \frac{a}{u^4} \left( \frac{2}{8} \cos. p + \frac{15}{4} \cos. 3p \right) - \frac{ax}{u^4} \\ & \left( \frac{2}{4} \cos. p + \frac{15}{4} \cos. 3p \right) + \frac{ay}{u^3} \left( \frac{1}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p \right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

$$2. \left. \begin{aligned} & - \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2dx}{dt} \left( m + \frac{1}{uu} \right) - \frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} - \frac{3\sin. 2p}{2u^3} \\ & + y \left( mm + \frac{2m}{uu} + \frac{1}{u^4} + \frac{1}{2u^3} - \lambda \right) - x \frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} \\ & - \frac{3y \cos. 2p}{2u^3} - \frac{3x \sin. 2p}{2u^3} + 3\lambda xy - 6\lambda yxx + \frac{1}{2} \lambda y^3 \\ & + \frac{1}{2} \lambda yzz + \frac{a}{u^4} \left( \frac{3}{8} \sin. p + \frac{15}{8} \sin. 3p \right) \\ & - \frac{ay}{u^4} \left( \frac{3}{4} \cos. p - \frac{15}{4} \cos. 3p \right) + \frac{ax}{u^3} \left( \frac{3}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p \right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

$$3. - \left. \begin{aligned} \frac{dd\zeta}{dt^2} - \frac{\zeta}{u^3} - \lambda z + 3\lambda z x - 6\lambda z x x \\ + \frac{1}{2}\lambda z y y + \frac{1}{2}\lambda z^3 - \frac{3a\zeta \cos.p}{u^4} \end{aligned} \right\} = \dots 0.$$

En omettant les termes affectés par  $axx$ ,  $ayy$ ,  $axy$ ,  $axz$  &  $ayz$ , puisque les inégalités qui en dépendent ne pourront pas monter à une seconde.

XXII.

Enfin, comme la théorie de la Terre fournit, pour la distance  $u$ , cette valeur  $u = 1 + v \cos.t$ , nous aurons, en négligeant les puissances de  $v$ :  $\frac{1}{uu} = 1 - 2v \cos.t$ ;

$$\frac{1}{u^3} = 1 - 3v \cos.t; \quad \frac{1}{u^4} = 1 - 4v \cos.t; \quad \text{donc } \frac{d. \frac{1}{uu}}{dt} = 2v \sin.t$$

$$\frac{3 \sin. 2p}{2u^3} = \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{4} v \sin. (2p - t) - \frac{3}{4} v \sin. (2p + t):$$

$$\frac{3 \cos. 2p}{2u^3} = \frac{3}{2} \cos. 2p - \frac{3}{4} v \cos. (2p - t) - \frac{3}{4} v \cos. (2p + t): \text{ \&c.}$$

XXIII.

D'où en substituant ces valeurs dans nos trois équations différentio-différentielles, & en arrangeant leurs termes selon leur importance, nous parviendrons enfin aux équations, & qui seront celles dont je me servirai dans les recherches présentes.

*Équations qui renferment toutes les inégalités du mouvement de la Lune.*

$$1. - \left. \begin{aligned} \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2'm + 1}{dt} dy + x (mm + 2m + \frac{1}{2} + 2\lambda) \\ + mm + 2m + \frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2} \cos. 2p + \frac{1}{2} x \cos. 2p \\ - \frac{1}{2} y \sin. 2p - 3\lambda x x + \frac{1}{2} \lambda y y + \frac{1}{2} \lambda z z + 4\lambda x^3 \\ - 6\lambda x y y - 6\lambda x z z - a \left( \frac{2}{8} \cos. p + \frac{15}{8} \cos. 3p \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -ax\left(\frac{3}{4}\cos.p + \frac{15}{4}\cos.3p\right) + ay\left(\frac{3}{4}\sin.p + \frac{15}{4}\sin.3p\right) \\
 & -v\left(4m + \frac{11}{2}\right)\cos.t + \frac{9}{4}\cos.(2p-t) + \frac{9}{4}\cos.(2p+t) \\
 & -4v\cos.t \frac{dy}{dt} - vx\left(4m + \frac{11}{2}\right)\cos.t + \frac{9}{4}\cos.(2p-t) \\
 & + \frac{9}{4}\cos.(2p+t) + vy\left(2\sin.t + \frac{9}{4}\sin.(2p-t) + \frac{9}{4}\sin.(2p+t)\right) \Bigg\} = 0. \\
 \\
 2. & -\frac{ddv}{dt} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + y(mm + 2m + \frac{1}{2} - \lambda) \\
 & -\frac{3}{2}\sin.2p - \frac{3}{2}y\cos.2p - \frac{3}{2}x\sin.2p + 3\lambda xy + \frac{3}{2}\lambda y^2 \\
 & -6\lambda xy + \frac{3}{2}\lambda zy + a\left(\frac{3}{8}\sin.p + \frac{15}{8}\sin.3p\right) \\
 & -ay\left(\frac{3}{4}\cos.p - \frac{15}{4}\cos.3p\right) + ax\left(\frac{3}{4}\sin.p + \frac{15}{4}\sin.3p\right) \\
 & -v\left(2\sin.t - \frac{9}{4}\sin.(2p-t) - \frac{9}{4}\sin.(2p+t)\right) \\
 & + 4v\cos.t \frac{dx}{dt} - vy\left(4m + \frac{11}{2}\right)\cos.t - \frac{9}{4}\cos.(2p-t) \\
 & - \frac{9}{4}\cos.(2p+t) - vx\left(2\sin.t - \frac{9}{4}\sin.(2p-t) - \frac{9}{4}\sin.(2p+t)\right) \Bigg\} = 0. \\
 \\
 3. & -\frac{ddz}{dt^2} - (1 + \lambda)z + 3\lambda xz + \frac{3}{2}\lambda z^2 - 6\lambda xz \\
 & + \frac{3}{2}\lambda yz - 3az\cos.p + 3vz\cos.t \Bigg\} = 0.
 \end{aligned}$$

Tous les autres termes que j'ai négligés ici, sont trop petits pour qu'il en puisse résulter une erreur de deux à trois secondes dans le lieu de la Lune.

## X X I V.

Au reste il fera bon de répéter ici que  $m = 12,3688974$  & par conséquent  $2(m+1) = 26,7377948$ ;  $mm + 2m + \frac{1}{2} = 179,2274177$ ;  $4m + \frac{11}{2} = 54,9755896$ . Ensuite l'unité exprimant ici la distance moyenne de la Terre au Soleil, nous aurons à-peu-près  $v = 0,01676$  &  $a = 0,0025$ : je dis à-peu-près, car les vraies valeurs de ces rapports se doivent déterminer, lorsqu'on comparera les

les inégalités trouvées par nos équations à celles que les observations fournissent.

XXV.

Or ayant trouvé les valeur de  $x, y, z$ , nous obtiendrons pour les coordonnées  $TX = X = a(1+x)$ ;  $LX = Y = ay$ ;  $ZC = Z = az$ : & delà  $TL = \sqrt{XX + YY}$ ;  $TC = \sqrt{XX + YY + ZZ}$ ; la tangente de l'angle  $LTX = \frac{Y}{X}$ ; & la tangente de l'angle  $CTL = \frac{Z}{\sqrt{XX + YY}}$ .

ARTICLE VI.

*Réflexions sur les formules qu'on vient de trouver.*

XXVI.

PUISQUE la droite  $TC$  est tirée, enforte que l'angle  $BTC$  est égal à l'élongation moyenne de la Lune à l'opposition du Soleil, & qu'on trouve en additionnant six signes à la différence des longitudes moyennes du Soleil & de la Lune, on voit qu'en ajoutant à cet angle le petit angle  $CTL$ , dont la tangette est  $\frac{Y}{X}$ , on aura la véritable élongation de la Lune à l'opposition du Soleil; donc, quand on y ajoute encore l'angle  $BSA$ , qui exprime l'excès de la longitude vraie du Soleil sur six signes, on aura la vraie longitude de la Lune dans l'écliptique. Or, la vraie longitude du Soleil étant égale à la moyenne plus son équation du centre, il s'enfuit que pour trouver la vraie longitude de la Lune, on n'a qu'à ajouter à sa longitude moyenne premièrement l'angle  $CTL$  & outre cela encore l'équation du centre du Soleil: c'est-à-dire

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

C

Long. vraie de la  $\odot =$  long. moyenne de la  $\odot +$  angle dont la tangente est  $\frac{Y}{X} +$  l'équation du centre du  $\odot$ .

## X X V I I.

Comme je tâcherai dans la suite de déterminer l'angle  $TL$  aussi exactement qu'on puisse le souhaiter, on comprend que cet angle n'est pas égal à la somme de toutes les équations que les Tables ordinaires contiennent pour la Lune; mais qu'il ne donne que l'excès de cette somme entière sur l'équation du Soleil; ou bien, si nous ajoutons l'équation du Soleil à notre angle  $CTL$ , cette somme doit être égale au résultat de toutes les équations dont on se sert ordinairement pour trouver le lieu de la Lune. Je ne parle ici que de la longitude réduite à l'écliptique: la latitude se déterminera aisément par notre troisième coordonnée  $L\odot = Z$ , attendu que  $\frac{Z}{\sqrt{(XX+YY)}}$  donne d'abord la tangente de la latitude de la Lune. Enfin, comme la distance  $T\odot = \sqrt{(XX+YY+ZZ)}$ , on en connoîtra aisément la parallaxe horizontale de la Lune avec son diamètre apparent.

## X X V I I I.

Voilà donc en quoi consiste principalement la différence entre cette nouvelle méthode & celle dont on s'est servi jusqu'ici, où l'on s'est donné toutes les peines imaginables pour trouver les inégalités dans le mouvement de la Lune, chacune séparément des autres. Mon but étant ici de chercher les trois coordonnées  $TX = X$ ,  $XL = Y$  &  $L\odot = Z$ , il est bien vrai qu'elles dépendront de toutes les inégalités; mais ce n'est qu'après les avoir déterminées toutes, & en avoir conclu les vraies valeurs de ces lignes, qu'on pourra assigner l'angle  $CTL$ : outre cela je ne trouve pas cet angle immédiatement, mais fa



tangente, dont il faut encore chercher l'angle dans les Tables. Or j'ose bien assurer que l'expression de cette tangente devient beaucoup moins compliquée que si l'on en vouloit déduire toutes les équations partielles indépendamment l'une de l'autre. Tout ceci deviendra plus clair, quand j'aurai réussi à trouver les justes valeurs des trois coordonnées  $X$ ,  $Y$  &  $Z$ .

## XXIX.

Mais le plus grand avantage de cette nouvelle méthode consiste en ce que j'y ai d'abord introduit l'élongation moyenne de la Lune au Soleil, ce qui me mettra en état de déterminer toutes les inégalités, par des angles proportionnels aux tems, & qu'on pourra aisément trouver dans les Tables des moyens mouvemens. Aulieu que, selon la méthode ordinaire, la vraie élongation de la Lune au Soleil entre par-tout dans les calculs, & qu'il est presque impossible de les en délivrer. Cet inconvénient demande non-seulement les plus pénibles calculs, mais il nous laisse encore incertains sur la véritable quantité de plusieurs équations, outre que le nombre de ces équations devient presque effroyable,

## ARTICLE VII.

*Plan des opérations à faire pour la détermination du lieu de la Lune.*

## XXX.

QUELQUE grand que soit le nombre des inégalités qui se trouvent dans le mouvement de la Lune, on peut les rapporter toutes à de certaines classes, que je me propose de développer l'une après l'autre. On n'a qu'à bien considérer

les diverses sources d'où naissent toutes ces inégalités, pour établir les caractères qui distinguent ces classes entr'elles. Ces sources sont :

- 1.° La différente action du Soleil par rapport à ses différentes phases ou aspects.
- 2.° L'excentricité de l'orbite de la Lune.
- 3.° L'inclinaison de cet orbite à l'écliptique.
- 4.° La parallaxe du Soleil, ou le vrai rapport entre les distances de la Lune & du Soleil à la Terre.
- 5.° Enfin les inégalités du mouvement du Soleil ou de la Terre.

### X X X I.

La première source considérée en elle-même produit l'inégalité connue sous le nom de la *variation*, ou de *réflexion*, comme Képler l'a nommée. Elle dépend uniquement de l'angle  $p$ , c'est-à-dire de l'angle  $BTC$  qui marque l'élongation moyenne de la Lune à l'opposition du Soleil. Ce sera donc le sujet de mes premières recherches, où je ferai abstraction de toutes les autres sources, par lesquelles le mouvement de la Lune est troublé.

### X X X I I.

En second lieu, j'aurai égard à l'excentricité de l'orbite de la Lune, par laquelle un nouvel angle sera introduit dans le calcul. Cet angle sera l'anomalie moyenne de la Lune, & je le marquerai par la lettre  $q$ : l'angle  $q$  sera donc aussi proportionnel au tems, & son rapport à l'anomalie du Soleil que j'ai nommée  $t$ , nous conduira à l'importante recherche du mouvement de l'apogée de la Lune. Je serai obligé de partager la recherche des inégalités de cette classe en trois parties.

La première contiendra celles qui dépendent simplement de l'excentricité, & qui renferment le simple angle  $q$ .

La seconde partie roulera sur les inégalités qui dépendent de l'excentricité ou qui renferment le double angle  $2q$ , & dans

La troisième partie, seront déterminées les inégalités qui résultent du cube de l'excentricité; celles-ci dépendront du triple angle  $3q$ , & seront déjà si petites, qu'on pourra bien se passer des suivantes; aussi nos formules ne s'étendent pas au delà des troisièmes dimensions.

## XXXIII.

En troisième lieu, je chercherai les inégalités qui résultent de l'inclinaison de l'orbite de la Lune. Cette circonstance introduira un troisième angle  $r$  dans le calcul, qui est celui qu'on nomme l'argument de latitude, & qui est aussi proportionnel au temps. La recherche de son rapport à l'angle  $z$  renfermera le mouvement de la ligne des nœuds. Il suffira ici de déterminer les inégalités qui dépendront du simple & du double de cet angle, sans s'embarasser de celles qui dépendroient du triple ou bien du cube de l'inclinaison, qui seroit trop petit pour qu'on fût obligé d'en tenir compte.

## XXXIV.

En quatrième lieu, ayant regardé jusqu'ici la distance du Soleil comme étant infiniment plus grande que celle de la Lune, & ayant négligé pour cet effet les termes qui sont affectés du rapport  $a$ ; je ferai à-présent aussi entrer ces termes dans les équations générales, pour rechercher les inégalités qui en résultent, & qu'on peut nommer *inégalités parallactiques*, puisqu'elles dépendent de la parallaxe du Soleil.

Enfin la cinquième classe contiendra les inégalités qui résultent de l'excentricité de l'orbite de la Terre ; ces inégalités sont contenues dans les termes affectés par  $v$ , & c'est par celles-ci que l'anomalie moyenne du Soleil, marquée par  $z$  est aussi introduite dans le calcul. Dans cette recherche, il suffira de considérer cette simple excentricité : aussi ai-je négligé tous les termes qui renfermeroient le quarré & les plus hautes dimensions de cette excentricité.

Ce sera donc le plan que je me propose de développer dans les recherches suivantes,



## DEUXIÈME SECTION.

*Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la première Classe , comprises communément sous le nom de la Variation.*

## ARTICLE PREMIER.

*Application des formules générales à cette recherche.*

## §. I.

PUISQU'IL ne s'agit ici que de déterminer les inégalités qui dépendent, uniquement de l'angle  $p$ , où l'on ne regarde que le mouvement de la Lune sur l'écliptique, nous ferons abstraction de l'inclinaison de son orbite, en posant  $Z = az = 0$ , & par-là toute la troisième équation s'en va du calcul. En second lieu, je ferai abstraction de l'excentricité de l'orbite de la Terre, ou bien je mettrai  $v = 0$ ; & en troisième lieu, puisqu'il n'est pas encore question des inégalités parallaxiques, je négligerai dans les formules trouvées tous les termes affectés par  $a$ .

## Le Lemme

De cette manière nos équations différentielles deviendront beaucoup plus simples, & par conséquent plus propres à en déduire les inégalités, qui sont

l'objet de cette première recherche. Voilà donc les formules qu'il faut prendre en considération.

$$1. \left. \begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + x(mm + 2m + \frac{3}{2} + 2\lambda) \\ & + mm + 2m + \frac{3}{2} - \lambda + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} x \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2} \lambda yy + 4\lambda x^3 \\ & - 6\lambda xy. \end{aligned} \right\} = 0$$

$$2. \left. \begin{aligned} & \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + y(mm + 2m + \frac{3}{2} - \lambda) \\ & - \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} y \cos. 2p - \frac{3}{2} x \sin. 2p \\ & + 3\lambda xy + \frac{3}{2} \lambda y^3 - 6\lambda xy. \end{aligned} \right\} = 0$$

### III.

D'abord je remarque que la Lune ne sauroit avoir un mouvement uniforme autour de la Terre, comme il arrive dans le mouvement des planettes principales. Car pour que l'angle  $CTL$  devienne  $= 0$ , il faudroit qu'il fût  $Y = 0$ , ou bien  $y = 0$ , ce qui est contraire à la seconde formule. Ensuite on voit que  $x$  ne sauroit être constante, mais qu'elle renferme nécessairement l'angle  $p$ ; & comme cette  $x$  est toujours une quantité très-petite, nous voyons d'abord qu'il faudra mettre  $\lambda = mm + 2m + \frac{3}{2}$ , ou bien  $\lambda = 179, 2274177$ . ( Sect. 1. § 24 ).

### IV.

D'où nos deux équations seront;

$$1. \left. \begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3yx + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2} \lambda yy + 4\lambda x^3 - 6\lambda xy = 0. \end{aligned} \right\}$$

$$2. \quad \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \frac{1}{2} \sin. 2p - \frac{1}{2} y \cos. 2p \\ - \frac{1}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy + \frac{1}{2} \lambda y^2 - 6\lambda xy = 0.$$


---

ARTICLE III.

*Détermination des inégalités de la Lune de cette première Classe.*

V.

**P**REMIÈRE APPROXIMATION. Ne considérons d'abord que les premiers termes de nos deux équations, pour avoir :

$$1. \quad \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{1}{2} \cos. 2p = 0 ;$$

$$\& 2. \quad \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \frac{1}{2} \sin. 2p = 0.$$

& il est clair que pour remplir ces deux conditions, il faudra mettre  $x = b \cos. 2p$  &  $y = c \sin. 2p$ . Je substitue donc ces valeurs dans nos deux équations & comme à

cause de  $\frac{dp}{dt} = m$ ;  $\frac{dx}{dt} = -2m b \sin. 2p$ ;  $\frac{ddx}{dt^2} = -4mm b \cos. 2p$ ;  $\frac{dy}{dt} = +2m c \cos. 2p$ ;  $\frac{ddy}{dt^2} = 4mm c \sin. 2p$ ; nous obtiendrons ces deux déterminations :

$$4mm b \cos. 2p + 4m(m+1) c \cos. 2p + 3\lambda b \cos. 2p \\ + \frac{1}{2} \cos. 2p = 0 ; \& 4mm c \sin. 2p + 4m(m+1) \\ b \sin. 2p - \frac{1}{2} \sin. 2p = 0 ,$$

ou bien en divisant par  $\cos. 2p$  :

*Prix del'Acad. Tom. IX.*

**D**

$$(4mm + 3\lambda)b + 4m(m + 1)C + \frac{3}{2} = 0;$$

$$\& 4m(m + 1)b + 4mmC - \frac{3}{2} = 0,$$

ou enfin à cause de  $m = 12$ ,  $3688974$  &  $\lambda = 179$ ;

$2274177$ , nous aurons  $1149 \cdot 61074 b + 661, 43408$ .

$C = -1, 5$  &  $661, 43408 \cdot b + 611, 95849 \cdot C =$

$+ 1, 5$

d'où l'on trouvera  $b = -0, 0071800$  &  $C = +0,$

$0102118$ .

## V I.

SECONDE APPROXIMATION. Soit maintenant  $x = b \cos. 2p + x^1$  &  $y = C \sin. 2p + y^1$ ; ou bien écrivons dans nos deux équations du §. 4,  $x + x^1$  &  $y + y^1$  au lieu de  $x$  &  $y$ ; & & comme nous avons fait évanouir

$$- \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{3}{2} \cos. 2p$$

$$\& - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \frac{3}{2} \sin. 2p, \text{ il nous restera}$$

encore ces deux conditions à remplir.

$$\begin{aligned} 1. & - \frac{d^2x^1}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^1}{dt} + 3\lambda x^1 + \frac{3}{2} x \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2} \lambda yy + \frac{3}{2} x^1 \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} y^1 \sin. 2p - 6\lambda xx^1 + 3\lambda yy^1 + 4\lambda xy \\ & - 6\lambda xyy \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 1. & - \frac{d^2x^1}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^1}{dt} + 3\lambda x^1 + \frac{3}{2} x \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2} \lambda yy + \frac{3}{2} x^1 \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} y^1 \sin. 2p - 6\lambda xx^1 + 3\lambda yy^1 + 4\lambda xy \\ & - 6\lambda xyy \end{aligned}} \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} 2. & - \frac{d^2y^1}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^1}{dt} - \frac{3}{2} y \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy - \frac{3}{2} y^1 \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} x^1 \sin. 2p + 3\lambda xy^1 + 3\lambda x^1 y + \frac{3}{2} \lambda y^1 \\ & - 6\lambda xxy \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 2. & - \frac{d^2y^1}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^1}{dt} - \frac{3}{2} y \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy - \frac{3}{2} y^1 \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} x^1 \sin. 2p + 3\lambda xy^1 + 3\lambda x^1 y + \frac{3}{2} \lambda y^1 \\ & - 6\lambda xxy \end{aligned}} \right\} = 0$$



## VII.

J'ai négligé ici les termes qui contiendroient  $x^1xx$ ,  $x^1x^1$ , &c. car comme  $x^1$  &  $y^1$  sont déjà équivalens à  $xx$ ,  $xy$ , &  $yy$ , ces termes négligés seroient équivalens aux quatriemes dimensions de  $x$  &  $y$ , que nous avons toujours omis, comme donnant des inégalités qui ne sont d'aucune importance.

## VIII.

Commençons par satisfaire à ces deux équations :

$$1. - \frac{ddx^2}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^2}{dt} + 3\lambda x^1 + \frac{1}{2}x \cos. 2p - \frac{1}{2}y \sin. 2p. - 3\lambda xx + \frac{1}{2}\lambda yy = 0.$$

$$2. - \frac{ddy^2}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^2}{dt} - \frac{1}{2}y \cos. 2p - \frac{1}{2}x \sin. 2p. + 3\lambda xy = 0.$$

Comme  $x = b \cos. 2p$  &  $y = C \sin. 2p$ , nous aurons  $x \cos. 2p = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \cos. 4p$ ;  $y \sin. 2p = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C \cos. 4p$ ;  $x \sin. 2p = \frac{1}{2}b \sin. 4p$ ;  $y \cos. 2p = \frac{1}{2}C \sin. 4p$ ;  $xx = \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}bb \cos. 4p$ ;  $xy = \frac{1}{2}bC \sin. 4p$  &  $yy = \frac{1}{2}CC - \frac{1}{2}CC \cos. 4p$ ;

d'où nos deux équations deviendront

$$1. - \frac{ddx^2}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^2}{dt} + 3\lambda x^1 + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}C - \frac{1}{2}\lambda bb + \left(\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}C - \frac{1}{2}\lambda bb - \frac{1}{4}\lambda CC\right) \cos. 4p = 0.$$

$$2. - \frac{ddy^2}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^2}{dt} - \left(\frac{1}{4}C + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}\lambda bC\right) \sin. 4p = 0.$$

## I X.

Il est donc évident qu'il faudra supposer  $x^I = a^I$   
 $+ b^I \cos 4p$  &  $y^I = C^I \sin 4p$ ,  
 d'où nous aurons ces deux équations:

$$1. \left. \begin{aligned} & 3 \lambda a^I + \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} C - \frac{3}{2} \lambda b b + \frac{3}{4} \lambda C C \\ & + ((16 mm + 3 \lambda) b^I + 8 m (m+1) C^I + \frac{3}{4} b + \frac{3}{4} C) \\ & - \frac{3}{2} \lambda b b - \frac{3}{4} \lambda C C) \cos 4p. \end{aligned} \right\} = 0.$$

$$2. \left. \begin{aligned} & (16 mm C^I + 8 m (m+1) b^I - \frac{3}{4} C - \frac{3}{4} b) \\ & + \frac{3}{2} \lambda b C) \sin 4p. \end{aligned} \right\} = 0$$

& par conséquent les trois déterminations suivantes

$$3 \lambda a^I + \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} C - \frac{3}{2} \lambda b b + \frac{3}{4} \lambda C C = 0.$$

$$(16 mm + 3 \lambda) b^I + 8 m (m+1) C^I + \frac{3}{4} b + \frac{3}{4} C \\ - \frac{3}{2} \lambda b b - \frac{3}{4} \lambda C C = 0.$$

$$8 m (m+1) b^I + 16 m m C^I - \frac{3}{4} b - \frac{3}{4} C \\ + \frac{3}{2} \lambda b C = 0$$

ou bien en nombres, à cause de  $b = -0,0071800$   
 &  $C = +0,0102118; 537,68225 . a^I = 0,0129146 = 0;$   
 $2985,51622 . b^I + 1322,86816 . C^I = 0,0257316 = 0;$   
 &  $1322,86816 . b^I + 2447,83396 . C^I = 0,0220264 = 0,$   
 par conséquent

$a^I = +0,0000240; b^I = +0,0000061; \& C^I =$   
 $+0,0000057.$

## X.

DERNIERE APPROXIMATION. Il me reste à  
 déterminer les additions de la troisième classe, ou bien

les inégalités qui dépendent des termes affectés par  $x^3$ ,  $xyy$ ,  $xyx$ ,  $y^3$ ,  $xx^I$ ,  $yy^I$ ,  $x^I \cos. 2p$ , &c. Je poserai pour cet effet  $x^I = a^I + b^I \cos. 4p + x^I$  &  $y^I = C^I \sin. 4p + y^I$ ; ou bien j'écrirai dans les deux équations du § 6  $x^I + x^{II}$  &  $y^I + y^{II}$  au lieu de  $x^I$  &  $y^I$ ; & comme nous avons déjà satisfait aux termes  $\frac{1}{2} x \cos. 2p - \frac{1}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{1}{2} \lambda y y$  &  $-\frac{1}{2} y \cos. 2p - \frac{1}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy$ , en négligeant tous les termes, où  $x$  &  $y$  auroient ensemble plus de trois dimensions, en comptant toujours  $x^I$  &  $y^I$  pour deux &  $x^{II}$  &  $y^{II}$  pour trois dimensions, il nous restera encore ces deux conditions à remplir.

$$1. - \frac{ddx^{II}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{II}}{dt} + 3\lambda x^{II} + \frac{1}{2} x^I \cos. 2p - \frac{1}{2} y^I \sin. 2p - 6\lambda xx^I + 3\lambda yy^I + 4\lambda x^3 - 6\lambda xy y = 0.$$

$$2. - \frac{ddy^{II}}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^{II}}{dt} - \frac{1}{2} y^I \cos. 2p - \frac{1}{2} x^I \sin. 2p + 3\lambda xy^I + 3\lambda x^I y + \frac{1}{2} \lambda y^3 - 6\lambda xx y = 0$$

en omettant les termes, où  $x^{II}$  &  $y^{II}$  sont multipliés par  $\sin. 2p$  &  $\cos. 2p$ .

XI.

Ayant  $x = b \cos. 2p$ ;  $y = C \sin. 2p$ ;  $x^I = a^I + b^I \cos. 4p$ ;  $y^I = C^I \sin. 4p$ , ces deux équations deviendront

$$1. - \left. \begin{aligned} &\frac{ddx^{II}}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^{II}}{dt} + 3\lambda x^{II} + \left(\frac{3}{2} a^I + \frac{3}{4} b^I\right) \\ &- \frac{3}{4} C^I - 6\lambda b a^I - 3\lambda b b^I + \frac{1}{2} \lambda C C^I + 3\lambda b^3 \\ &- \frac{1}{2} \lambda b C C^I \cos. 2p + \left(\frac{1}{4} b^I + \frac{1}{4} C^I - 3\lambda b b^I\right) \\ &- \frac{1}{2} \lambda C C^I + \lambda b^3 + \frac{1}{2} \lambda b C C^I \cos. 6p. \end{aligned} \right\} = 0$$

$$2. \left. \begin{aligned} & \frac{ddy''}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx''}{dt} + \left( -\frac{3}{4}C^I + \frac{3}{4}b^I - \frac{3}{2}a^I \right) \\ & + \frac{3}{2}\lambda b C^I - \frac{3}{2}\lambda C b^I + 3\lambda C a^I + \frac{9}{8}\lambda C^2 - \lambda b b C \\ & \sin. 2p + \left( -\frac{3}{4}C^I - \frac{3}{4}b^I + \frac{3}{2}\lambda b C^I + \frac{3}{2}\lambda C b^I \right) \\ & - \frac{3}{8}\lambda C^2 - \frac{3}{2}\lambda b b C \sin. 6p. \end{aligned} \right\} = 0$$

## X I I.

Delà il est évident qu'il faudroit donner à  $x''$  &  $y''$  ces formes  $x'' = b'' \cos. 2p + \cos. 6p$ ;  $y'' = C'' \sin. 2p + \sin. 6p$ ; mais comme il est aisé de prévoir que les coefficients de  $\sin. 6p$  &  $\cos. 6p$  deviendroient plus petits que 0, 0000001, nous les négligerons en nous contentant de supposer simplement  $x'' = b'' \cos. 2p$  &  $y'' = C'' \sin. 2p$ ; d'où nous obtiendrons en divisant nos deux équations, la première par  $\cos. 2p$  & la seconde par  $\sin. 2p$ , ces deux déterminations :

$$(4mm + 3\lambda)b'' + 4m(m+1)C'' + \frac{3}{2}a^I + \frac{3}{4}b^I - \frac{3}{4}C \\ - 6\lambda b a^I - 3\lambda b b^I + \frac{3}{2}\lambda C C^I + 3\lambda b^I - \frac{3}{2}\lambda b b C = 0.$$

$$4m(m+1)b'' + 4mm C'' - \frac{3}{4}C^I + \frac{3}{4}b^I - \frac{3}{2}a^I + \frac{3}{2}\lambda b C^I \\ - \frac{3}{2}\lambda C b^I + 3\lambda C a^I + \frac{9}{8}\lambda C^2 - \frac{3}{2}\lambda b b C = 0.$$

Or  $b = -0,0071800$ ,  $C = +0,0102118$ ,  $b^I = +0,0000061$ ;  $C^I = +0,0000057$  &  $a^I = 0,0000240$ ; donc en substituant ces valeurs numériques, nous aurons :

$$1149,64074.b'' + 661,43408.C'' = -0,0002631;$$

$$661,43408.b'' + 611,95849.C'' = -0,0001417;$$

& par conséquent

$$b'' = -0,0000002, 5 \text{ \& } C'' = +0,000000, 4;$$

d'où l'on voit que cette dernière approximation nous

mène déjà à des inégalités si petites, qu'on pourroit hardiment les négliger.

## XIII.

CONCLUSION. Toutes les inégalités de cette classe se réduisent donc à ces deux expressions:

$$x^I = a^I + (b + b^{II}) \cos. 2p + b^I \cos. 4p$$

&

$$y = (c + c^{II}) \sin. 2p + c^I \sin. 4p;$$

ou bien en nombres:

$$x = 0,0000240 - 0,0071802. \cos. 2p \\ + 0,0000061. \cos. 4p$$

&

$$y = * + 0,0102118. \sin. 2p + 0,0000057. \sin. 4p.$$

d'où nos deux coordonnées  $X$  &  $Y$  feront

$$X = a(1,0000240 - 0,0071802. \cos. 2p + 0,0000061. \cos. 4p)$$

$$Y = a(0,0102118. \sin. 2p + 0,0000057. \sin. 4p.)$$

## XIV.

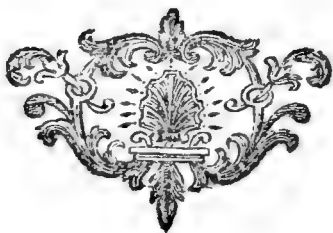
Ces valeurs nous feront déjà connoître assez près la variation; & puisque la plus grande répond aux octans, posons l'élongation moyenne de la Lune à l'opposition du Soleil  $p = 45^\circ$ , de sorte que  $2p = 90^\circ$ , & nous aurons la tangente de la variation

$$\frac{Y}{X} = \frac{0,0102118}{1,0000240 - 0,0000061} = 0,0102115$$

à laquelle répond un angle de  $35' 6''$ , qui à la vérité est de  $1' 4''$  plus petite que ne la donnent les tables; mais il faut remarquer que la variation que nous venons de

trouver, recevra encore quelque augmentation par les inégalités qui dépendent de l'excentricité de la Lune & sur tout par les inégalités parallaxiques, comme on le verra dans la suite.

Voilà donc un échantillon de ma nouvelle méthode pour déterminer les inégalités des mouvemens de la Lune : Je conviens que dans cette première recherche, j'ai été un peu trop prolix ; mais je croyois qu'un tel détail dans le commencement ne sauroit être désagréable. Dans la suite, je tâcherai d'être d'autant plus brief.



---

 TROISIÈME SECTION.

*Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la seconde Classe, qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Lune.*

---

## ARTICLE PREMIER.

*Réflexions générales sur la nature de ces inégalités.*

## I.

LES valeurs de  $x$  &  $y$ , que nous venons de trouver, entant qu'elles satisfont à nos deux équations différentio-différentielles, ne sauroient être regardées, que comme une intégrale particulière, vu qu'il n'y entre que deux constantes arbitraires, l'une étant marquée par la lettre  $a$ , & l'autre comprise dans l'angle  $p$ ; car puisque  $dp = md'$ , on en a  $p = mt + C$ , & cette constante  $C$  se rapporte au point fixe, d'où l'on compte cet angle. Or, ayant deux équations différentio - différentielles, leurs intégrales complètes, doivent nécessairement renfermer quatre constantes arbitraires, d'où l'on comprend que pour trouver ces intégrales, il faut encore introduire dans nos formules un autre angle proportionnel au tems, avec un coefficient indéterminé, qui joint à la constante contenue dans l'angle même, en se rapportant à son commencement, fournira les quatre constantes arbitraires, qui constituent le caractère de l'intégrale complète.

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

E

## I I.

Cependant, puisque nos valeurs trouvées, expriment déjà une intégrale de nos équations différentio-différentielles, elles auroient pû avoir lieu dans le mouvement de la Lune, si ce corps avoit reçu au commencement un certain mouvement conforme à ces intégrales; ce qui arriveroit effectivement si l'excentricité de l'orbite de la Lune étoit nulle, & dans ce cas, nous serions déjà en état d'expliquer tous les phénomènes de son mouvement, bien entendu, en faisant abstraction des inégalités du mouvement de la Terre & du mouvement de la Lune en latitude. Dans ce cas donc, les inégalités de la Lune se réduiroient uniquement à la variation que nous venons de déterminer & qui ne dépend que de l'angle  $p$ , lequel exprime son élongation moyenne à l'opposition du Soleil.

## I I I.

Mais pour arriver à une intégrale complète de nos deux équations différentio différentielles, il s'agit d'introduire dans nos formules un nouvel angle  $q$ , qui ait aussi un certain rapport au tems  $t$ ; de sorte que  $dq = n dt$ , où  $n$  marquera un nombre, dont la valeur doit être déterminée par la théorie, & qui comme nous allons voir, renfermera le mouvement de l'appogée de la Lune. Puisque le commencement de cet angle peut être regardé comme arbitraire, il doit y entrer un co-efficient arbitraire, qui réponde à ce qu'on nomme excentricité de l'orbite lunaire, & qui dépend uniquement des observations, ou bien du mouvement, qui a été imprimé à la Lune au premier commencement.



## I V.

On verra bientôt que ce nouvel angle  $q$  est le même que celui qu'on nomme anomalie moyenne de la Lune. Par conséquent, en posant  $dq = ndt$ , le nombre  $n$  sera à l'unité, comme le mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune à celui de l'anomalie moyenne du Soleil. Donc pour le tems de trente jours, le mouvement de l'anomalie moyenne de la Lune étant :  $13^s 1^o 56' 59'' = 1411019''$  & le mouvement de l'anomalie moyenne du Soleil  $29^o 34' 4'', 5 = 106444'', 5$ , nous en concluons :  $n = \frac{1411019}{106444,5} = 13, 2559127$ . Mais quoique cette valeur soit tirée des observations, il faudroit que la théorie nous fournisse la même, si le mouvement de l'apogée étoit uniquement produit par les forces du Soleil & de la Terre. Or, on verra que cè nombre est en effet très-conforme à la Théorie,

## ARTICLE II.

*Préparation aux articles suivans.*

## V.

COMME dans les recherches présentes il ne s'agit ni de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, ni de l'excentricité de l'orbite de la Terre, ni enfin des inégalités parallacti-

ques, les inégalités de cette classe seront encore enfermées dans les deux équations données au quatrième §. de la seconde Section, qui sont

$$1. \left. \begin{aligned} &-\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} x \cos. 2p \\ &-\frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda x x + \frac{3}{2} \lambda y y + 4\lambda x^3 \\ &- 6\lambda x y y. \end{aligned} \right\} = 0$$

$$2. \left. \begin{aligned} &-\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} y \cos. 2p \\ &-\frac{3}{2} x \sin. 2p + 3\lambda x y + \frac{3}{2} \lambda y^3 - 6\lambda x x y. \end{aligned} \right\} = 0$$

## V I.

Pour accommoder ces équations aux recherches présentes, soient  $u$  &  $v$  les valeurs de  $x$  &  $y$ , que nous avons trouvées en cherchant les inégalités de la première classe; de sorte qu'en omettant les termes affectés par  $\cos. 4p$  &  $\sin. 4p$  comme très-petits à l'égard des autres, nous ayons  $u = a^1 + b \cos. 2p$ ; &  $v = c \sin. 2p$ ; ou

$$a = +0,0000240; b = -0,0071802 \text{ \& } c = +0,0102118.$$

Il seroit même suffisant de prendre  $u = b \cos. 2p$  &  $v = c \sin. 2p$ , puisque  $a^1$  est déjà une quantité de la seconde classe. Ecrivons dans nos deux équations  $u + x$  &  $v + y$  au lieu de  $x$  &  $y$ , & ayant déjà rempli ces deux conditions:

$$\begin{aligned} &-\frac{ddu}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + 3\lambda u + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} u \cos. 2p \\ &-\frac{3}{2} v \sin. 2p - 3\lambda u u \text{ \& } c. = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{ddv}{dt^2} - \frac{2(m+1)du}{dt} - \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} v \cos. 2p - \frac{3}{2} u \sin. 2p \\ &\text{\& } c = 0. \end{aligned}$$

il nous restera encore de satisfaire à ces deux équations;

$$1. \left. \begin{aligned} &-\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + x\left(\frac{1}{2}\cos. 2p - 6\lambda u\right) \\ &+ 12\lambda uv - 6\lambda uv + y\left(-\frac{1}{2}\sin. 2p + 3\lambda v - 12\lambda uv\right) \\ &- 3\lambda xx(1-4u) - 12\lambda xy.v + \frac{1}{2}\lambda yy(1-4u) \\ &+ 4\lambda x^3 - 6\lambda xy. \end{aligned} \right\} = 0$$

$$2. \left. \begin{aligned} &-\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + y\left(-\frac{1}{2}\cos. 2p + 3\lambda u\right) \\ &+ \frac{9}{2}\lambda uv - 6\lambda uv + x\left(-\frac{1}{2}\sin. 2p + 3\lambda v - 12\lambda uv\right) \\ &+ \frac{9}{2}\lambda yy.v + 3\lambda xy(1-4u) - 6\lambda xx.v \\ &+ \frac{1}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xy. \end{aligned} \right\} = 0$$

VII.

Substituons pour  $u$  &  $v$  leurs valeurs & nous obtenons ces deux équations, qui renferment toutes les inégalités de cette seconde classe :

$$1. \left. \begin{aligned} &-\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx\cos. 2p \\ &+ Cy\sin. 2p - xx(D + E\cos. 2p) - Fxy\sin. 2p \\ &+ yy\left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}E\cos. 2p\right) + 4\lambda x^3 - 6\lambda xy \end{aligned} \right\} = 0$$

$$2. \left. \begin{aligned} &-\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A'y + B'y\cos. 2p + Cx\sin. 2p \\ &+ \frac{3}{8}Fyy\sin. 2p + xy(D + E\cos. 2p) \\ &- \frac{1}{2}Fxx\sin. 2p + \frac{1}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xy. \end{aligned} \right\} = 0$$

où j'ai posé pour abrégé :

$$A = -6\lambda a^1 + 6\lambda bb - 3\lambda cc + 12\lambda a^1 a^1 = -0, 0264574;$$

$$A' = +3\lambda a^1 - 3\lambda bb + \frac{9}{4}\lambda cc - 6\lambda a^1 a^1 = +0, 0272462;$$

$$B = +\frac{3}{2} - 6\lambda b + 24\lambda a^1 b = +9, 220588;$$

$$B^1 = -\frac{3}{2} + 3\lambda b - 12\lambda a^1 b = -5, 360294;$$

$$C = -\frac{3}{2} + 3\lambda c - 12\lambda a^1 c = +3, 990175;$$

$$D = +3\lambda - 12\lambda a^1 = +537, 63059;$$

$$E = -12\lambda b = +15, 44266;$$

$$F = +12\lambda c = +21, 96282.$$

## ARTICLE III.

*Détermination des inégalités qui dépendent de la simple excentricité de l'orbite de la Lune.*

## VIII.

**E**QUATIONS qui renferment ces inégalités. Comme il ne s'agit ici que de la simple excentricité de l'orbite lunaire, il ne sera question que des termes affectés par  $x$  &  $y$ ; en omettant donc tous ceux où  $x$  &  $y$  ont plus d'une dimension, les équations qui renferment toutes les inégalités que je me propose de déterminer dans cet article, seront

$$1. - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx \cos. 2p \\ + Cy \sin. 2p = 0.$$

$$2. - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^1y + B^1y \cos. 2p + Cx \\ \sin. 2p = 0.$$

## IX.

*Première Approximation.* Ne considérons d'abord que les trois premiers termes de ces équations, & négligeons les deux suivans, pour avoir

$$-\frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x = 0$$

&

$$-\frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^1 y = 0.$$

Soit pour satisfaire à ces deux conditions  $x = c. \text{cos. } q$  &  $y = \gamma. \text{sin. } q$ , & à cause de  $dq = ndt$ , nous obtiendrons en substituant ces valeurs dans nos deux équations, les déterminations suivantes

$$((nn + 3\lambda + A)c + 2(m+1)n\gamma) \text{cos. } q = 0$$

&

$$((nn + A^1)\gamma + 2(m+1)n c) \text{sin. } q = 0.$$

D'où nous trouverons

$$\text{de la première } \frac{\gamma}{c} = \frac{-nn - 3\lambda + A}{2(m+1).n}$$

$$\text{\& de la seconde } \frac{\gamma}{c} = \frac{-2(m+1).n}{nn + A^1};$$

par conséquent

$$n^4 + (3\lambda + A + A^1)nn + (3\lambda + A)A^1 = 4(m+1)^2nn$$

ou bien

$$n^4 - 177, 2266289 . nn + 14, 6469900 = 0.$$

A cette équation satisfait  $n = 13,3095$ , qui est trop grande de  $0,0536$ . Or, si nous supposons avec les Tables

Astronomiques  $n = 13, 2559127$ , nous obtiendrons pour  $\frac{2}{c}$  ces deux valeurs : de la première  $\frac{2}{c} = -2, 0127$  & de la seconde  $\frac{2}{c} = -2, 0167$ , cette différence provenant de ce que nous avons négligé ici les deux derniers termes de nos équations.

## X.

*Seconde Approximation.* Reprenons nos équations complètes

$$1. - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx \cos. 2p + Cy \sin. 2p = 0;$$

$$2. - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^1y + B^1y \cos. 2p + Cx \sin. 2p = 0;$$

& il est clair que pour satisfaire pleinement à ces équations, il faudra donner à  $x$  &  $y$  les formes qui suivent

$$x = c \cos. q + d \cos. (2p - q) + e \cos. (2p + q);$$

$$y = \gamma \sin. q + \delta \sin. (2p - q) + \epsilon \sin. (2p + q).$$

Substituons donc ces formes dans nos équations, & nous obtiendrons les six déterminations suivantes

$$1. (nn + 3\lambda + A)c + 2(m+1)n\gamma + \frac{1}{2}B(d + e) + \frac{1}{2}C(\delta + \epsilon) = 0;$$

$$2. (nn + A^1)\gamma + 2(m+1)n\epsilon - \frac{1}{2}B^1(\delta - \epsilon) + \frac{1}{2}C(d - e) = 0;$$

$$3. ((2m - n)^2 + 3\lambda + A)d + 2(m+1)(2m - n)\delta + \frac{1}{2}Bc + \frac{1}{2}C\gamma = 0;$$

$$4. ((2m - n)^2 + A^1) d + 2(m + 1)(2m - n)d - \frac{1}{2} B^1 \gamma + \frac{1}{2} Cc = 0;$$

$$5. ((2m + n)^2 + 3\lambda + A)e + 2(m + 1)(2m + n)e + \frac{1}{2} Bc - \frac{1}{2} C\gamma = 0;$$

$$6. ((2m + n)^2 + A^1)\epsilon + 2(m + 1)(2m + n)\epsilon + \frac{1}{2} B^1 \gamma + \frac{1}{2} Cc = 0.$$

XI.

Pofons felon les Tables Astronomiques  $n = 13$ , 2559127 & les quatre dernières déterminations donneront

$$d = -0,0007597.c - 0,0937565.\gamma;$$

$$\delta = -0,0133585.c + 0,1979618.\gamma;$$

$$e = -0,0025319.c + 0,0000859.\gamma;$$

$$\epsilon = +0,0004000.c + 0,0017960.\gamma.$$

Substituons ces valeurs dans les deux premières équations, & nous aurons

$$(nn + 537,6147782)c + (26,7377948.n - 0,0333415)\gamma = 0;$$

$$(nn + 0,3657138)\gamma + (26,7377948.n + 0,0333360)\epsilon = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{de-là } \frac{\gamma}{c} &= \frac{-nn - 537,6147782}{26,7377948.n - 0,0333415} \\ &= \frac{-26,7377948.n - 0,0333360}{nn + 0,3657138} \end{aligned}$$

ce qui donneroit  $n = 13, 28473$ . Par conséquent  $m - n = -0,91584$  & de-là le mouvement de l'apogée pour 30 jours =  $2^\circ 29' 23''$  qui est trop petite de  $51' 9''$ . On comprend donc que, quoique cette méthode donne encore pour le mouvement de l'apogée de la Lune une

différence bien grande entre la théorie & les observations, elle n'est cependant pas aussi énorme que celle que donne la méthode ordinaire. Au reste, il est très-certain que l'action des autres planètes a une influence sur le mouvement de l'apogée de la Lune, sachant que sans cette action l'apogée du Soleil devoit être immobile. Enfin, les petites quantités que nous avons négligées ici, & les augmentations que les coefficients de  $\sin. 2p$  &  $\cos. 2p$  prendront dans la suite, lorsque nous déterminerons les inégalités qui résultent du carré de l'excentricité de la Lune & de l'inclinaison de son orbite augmenteront encore considérablement le mouvement de l'apogée de la Lune que nous venons de déterminer ici.

## X I I.

Toutefois cette différence quelle qu'elle soit ne nous empêche pas d'aller plus loin; car posant dans les deux valeurs trouvées pour  $\frac{\gamma}{c}$  selon les Tables Astronomiques  $n=13,2559127$ ; nous aurons de la première

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{-713,3339997}{354,4005321} = -2,012791$$

& de la seconde

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{-354,4005376}{176,0849753} = -2,012667.$$

Comme donc cette différence est très-petite, & qu'elle n'influe presque rien sur les valeurs des coefficients  $d$ ,  $\delta$ ,  $e$  &  $\epsilon$ , il me sera permis de prendre pour  $\frac{\gamma}{c}$  un nombre moyen. Soit donc  $\gamma = -2,012729.c$ , & nous aurons pour les inégalités de cette classe



$$d = + 0, 187947.c; \delta = - 0, 411802.c;$$

$$e = - 0, 002705.c; \epsilon = - 0, 003215.c.$$

Or, nous avons supposé

$$x = c. \cos. q + d. \cos. (2p - q) + e. \cos. (2p + q)$$

$$\& y = \gamma. \sin. q + \delta. \sin. (2p - q) + \epsilon. \sin. (2p + q)$$

de sorte que maintenant

$$x = c. \cos. q + 0, 187947. c. \cos. (2p - q)$$

$$- 0, 002705. c. \cos. (2p + q)$$

$$\& y = - 2, 112729. c. \sin. q - 0, 411802. c. \sin. (2p - q)$$

$$- 0, 003215. c. \sin. (2p + q).$$

XIII.

On pourra aisément pousser cette approximation plus loin, en cherchant aussi les coefficients des *cosinus* & *sinus* des angles  $4p \pm q$ , & alors on trouvera qu'il faudra encore ajouter aux expressions que je viens d'écrire, les termes suivans

$$x = . . . . . - 0, 000512. c. \cos. (4p - q)$$

$$- 0, 000012. c. \cos. (4p + q)$$

$$y = . . . . . - 0, 000728. c. \sin. (4p - q)$$

$$- 0, 000025. c. \sin. (4p + q) \text{ qui en effet sont}$$

très-petites.



## ARTICLE IV.

*Détermination des inégalités qui dépendent du quarré de l'excentricité de l'orbite de la Lune.*

## XIV.

**PRÉPARATION.** Ces inégalités dépendront donc de la double anomalie moyenne de la Lune, ou bien de l'angle  $2q$ . Les observations nous apprennent qu'elles sont très petites, il me sera donc permis de ne combiner ce double angle  $2q$  qu'avec  $2p$ . Or, voici les équations qu'il s'agit de considérer ici. § 7.

$$1. - \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x + Bx \cos. 2p \\ + Cy \sin. 2p - xx(D + \epsilon \cos. 2p) - Fxy \sin. 2p \\ + yy(\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\epsilon \cos. 2p) + 4\lambda x^3 - 6\lambda xy^2 = 0.$$

$$2. - \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^1y + B^1y \cos. 2p + Cx \sin. 2p \\ + \frac{3}{8}Fyy \sin. 2p + xy(D + \epsilon \cos. 2p) - \frac{1}{2}Fxx \sin. 2p \\ + \frac{3}{2}\lambda y^3 - 6\lambda xxy = 0.$$

## XV.

Soient encore  $u$  &  $v$  les valeurs trouvées pour  $x$  &  $y$  dans l'article précédent, de sorte que

$$u = c \cos. q + d \cos. (2p - q) + e \cos. (2p + q) \\ \& v = \gamma \sin. q + \delta \sin. (2p - q) + \epsilon \sin. (2p + q).$$

Ecrivons dans nos deux équations  $u + x$  &  $v + y$  au

lieu de  $x$  &  $y$ , & ayant déjà fait évanouir ces expressions

$$-\frac{ddu}{dt^2} + \frac{2(m+2)dv}{dt} + (3\lambda + A)u + Bu \cos. 2p \\ + Cv \sin. 2p$$

&

$$-\frac{ddv}{dt^2} - \frac{2(m+1)du}{dt} + A^1v + B^1v \cos. 2p + Cv \sin. 2p$$

Il nous restera encore à résoudre ces deux équations.

$$1. \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + (3\lambda + A)x - D(uu - \frac{1}{2}vv) \\ - \epsilon(uu - \frac{1}{2}vv) \cos. 2p - Fuv \sin. 2p + Bx \cos. 2p \\ + Cy \sin. 2p + x(-2Du - 2\epsilon u \cos. 2p - Fv \sin. 2p) \\ + y(Dv + \epsilon v \cos. 2p - Fu \sin. 2p) + 4\lambda u^3 - 6\lambda uvv = 0.$$

$$2. \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^1y + Duv - F(\frac{1}{2}uu - \frac{1}{8}vv) \\ \sin. 2p + \epsilon uv \cos. 2p + B^1y \cos. 2p + Cx \sin. 2p \\ + y(Du + \epsilon u \cos. 2p + \frac{3}{4}Fv \sin. 2p) + x(Dv + \epsilon v \cos. 2p - Fu \sin. 2p) + \frac{3}{2}\lambda v^3 - 6\lambda uvv$$

en omettant tous les termes qui renfermeroient le bi-quarré de l'excentricité.

### XVI.

*Equations qui renferment les inégalités qui dépendent du quarré de l'excentricité.*

On n'a qu'à omettre les quatre derniers termes des équations précédentes pour avoir celles dont il est question ici, & qui seront

$$1. \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dv}{dt} + (3\lambda + A)x - D(uu - \frac{1}{2}vv) \\ - \varepsilon(uu - \frac{1}{2}vv) \cos. 2p - Fuv \sin. 2p + Bx \cos. 2p \\ + Cy \sin. 2p = 0.$$

$$2. \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + A^1y + Duv - F(\frac{1}{2}uu - \frac{3}{8}vv) \\ \sin. 2p + \varepsilon uv \cos. 2p + B^1y \cos. 2p + Cx \sin. 2p = 0.$$

Substituons pour  $u$  &  $v$  leurs valeurs trouvées dans l'article précédent & nous aurons pour les inégalités que nous cherchons ces deux équations,

$$1. \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 537,6558.x + Bx \cos. 2p \\ + Cy \sin. 2p + 288,7579.cc - 312,3584.cc \cos. 2p \\ - 810,7657.cc \cos. 2q + 121,1496.cc \cos. (2p - 2q) \\ - 23,0175.cc \cos. (2p + 2q) = 0.$$

$$2. \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + 0,0272.y + B^1y \cos. 2p + Cx \\ \sin. 2p - 203,0193.cc \sin. 2p - 538,9855.cc \\ \sin. 2q - 12,3107.cc \sin. (2p - 2q) - 18,2562.cc \\ \sin. (2p + 2q) = 0.$$

## X V I I.

*Détermination de ces inégalités.* On voit bien que  $x$  &  $y$  doivent avoir ces formes

$$x = a^{II} + b^{II} \cos. 2p + c^I \cos. 2q + d^I \cos. (2p - 2q) \\ + e^I \cos. (2p + 2q). \\ y = G^{II} \sin. 2p + \gamma^I \sin. 2q + \delta^I \sin. (2p - 2q) \\ + \varepsilon^I \sin. (2p + 2q);$$

d'où nous obtiendrons les neuf déterminations suivantes.

$$1. 537,6558. a^{II} = -288,7579. cc - \frac{1}{2} B b^{II} - \frac{1}{2} C c^{II}.$$

$$2. (4m^2 + 537,6558) b^{II} + 4m(m+1) c^{II} = 312,3584. cc - B a^{II}.$$

$$3. 4m(m+1) b^{II} + (4mm + 0,0272) c^{II} = 203,0193. cc - C a^{II}.$$

$$4. (4nn + 537,6558) e^I + 4(m+1)n. g^I = +810,7657. cc - \frac{1}{2} B (d^I + e^I) - \frac{1}{2} C (d^I + e^I)$$

$$5. 4n(m+1) e^I + (4nn + 0,0272) g^I = +538,9855. cc + \frac{1}{2} B^I (d^I - e^I) - \frac{1}{2} C (a^I - e^I).$$

$$6. (4(m-n)^2 + 537,6558) d^I + 4(m+1)(m-n) \delta^I = -121,1496. cc - \frac{1}{2} B c^I - \frac{1}{2} C g^I.$$

$$7. 4(m+1)(m-n) d^I + (4(m-n)^2 + 0,0272) \delta^I = +12,3107. cc + \frac{1}{2} B^I g^I - \frac{1}{2} C c^I.$$

$$8. (4(m+n)^2 + 537,7558) e^I + 4(m+1)(m+n) e^I = +23,0175. cc - \frac{1}{2} B c^I + \frac{1}{2} C g^I.$$

$$9. 4(m+1)(m+n) e^I + (4(m+n)^2 + 0,0272) e^I = +18,2562. cc - \frac{1}{2} B^I g^I - \frac{1}{2} C c^I.$$

Les trois premières équations donnent l'élimination :

$$a^{II} = -0,53931. cc; b^{II} = +0,21986. cc; c^{II} = +0,09763. cc$$

& les six autres fournissent

$$e^I = +0,50962. cc; d^I = -0,20629. cc;$$

$$e^I = +0,00468. cc;$$

$$g^I = +0,25237. cc; \delta^I = +0,26228. cc;$$

$$e^I = +0,00464. cc.$$

par conséquent

$$x = -0,53931. cc + 0,21986. cc. \cos. 2p + 0,50962. cc. \\ \cos. 2q - 0,20629. cc. \cos. (2p - 2q) + 0,00468. cc. \\ \cos. (2p + 2q).$$

$$y = \quad * \quad + 0,09763. cc. \sin. 2p + 0,25237. cc. \\ \sin. 2q + 0,26228. cc. \sin. (2p - 2q) + 0,00464. cc. \\ \sin. (2p + 2q).$$

## A R T I C L E V.

*Détermination des inégalités qui dépendent du cube de l'excentricité de l'orbite de la Lune.*

### X V I I I.

**P**RÉPARATION. En écrivant  $x + x^1$  &  $y + y^1$  à la place de  $x$  &  $y$ , il nous restera encore ces deux équations à résoudre. (§. 15.)

$$1. - \frac{ddx^1}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^1}{dt} + (3\lambda + A)x^1 + Bx^1 \cos. 2p \\ + Cy^1 \sin. 2p + x(-2Du - 2\epsilon u \cos. 2p - Fv \sin. 2p) \\ + y(Dv + \epsilon v \cos. 2p - Fu \sin. 2p) + 4\lambda u^3 - 6\lambda uvv.$$

$$2. - \frac{ddy^1}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^1}{dt} + A^1 y^1 + B^1 y^1 \cos. 2p + Cx^1 \sin. 2p \\ + y(Du + \epsilon u \cos. 2p + \frac{3}{4} Fv \sin. 2p) \times \\ + x(Dv + \epsilon v \cos. 2p - Fu \sin. 2p) + \frac{3}{2} \lambda v^3 - 6\lambda uvv.$$

Substituons ici pour  $u, v, x$  &  $y$  leurs valeurs trouvées aux §§. 12 & 17, & nous obtiendrons.

XIX.

Equations qui renferment les inégalités qui dépendent du cube de l'excentricité de la Lune.

$$1. - \frac{ddx^I}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^I}{dt} + (3\lambda + A)x^I + B^I x \cos. 2p + C y^I \sin. 2p - 484,398 . c^3 \cos. q - 56,493 . c^3 \times \cos.(2p-q) + 680,467 . c^3 \cos.(2p+q) + 1130,384 . c^3 \times \cos. 3q - 248,289 . c^3 \cos.(2p-3q) - 5,190 . c^3 \times \cos.(2p+3q) = 0.$$

$$2. - \frac{ddy^I}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^I}{dt} + A^I y^I + B^I y^I \cos. 2p + C x^I \sin. 2p - 239,210 . c^3 \sin. q - 13,466 . c^3 \sin.(2p-q) + 529,371 . c^3 \sin.(2p+q) + 881,177 . c^3 \sin. 3q + 135,471 . c^3 \sin.(2p-3q) - 5,043 . c^3 \sin.(2p+3q) = 0.$$

XX.

Détermination de ces inégalités. Soit

$$x^I = c^{II} \cos. q + d^{II} \cos.(2p-q) + e^{II} \cos.(2p+q) + c^{III} \cos. 2q + d^{III} \cos.(2p-3q) + e^{III} \cos.(2p+3q).$$

$$y^I = \gamma^{II} \sin. q + \delta^{II} \sin.(2p-q) + \epsilon^{II} \sin.(2p+q) + \gamma^{III} \sin. 3q + \delta^{III} \sin.(2p-3q) + \epsilon^{III} \sin.(2p+3q).$$

Et la substitution nous fournira les douzes équations suivantes.

$$1. (nn + 3\lambda + A)c^{II} + 2(m+1)n . \gamma^{II} = + 484,398 . c^3 - \frac{1}{2} B(d^{II} + e^{II}) - \frac{1}{2} C(\delta^{II} + \epsilon^{II}).$$

Prix de l'Académie, Tome IX.

G

$$\text{II. } 2(m+1)n \cdot c^{\text{II}} + (nn + A^{\text{I}}) \cdot \gamma^{\text{II}} = \\ + 239,210 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} C(d^{\text{II}} - e^{\text{II}}) + \frac{1}{2} B^{\text{I}}(\delta^{\text{II}} - \epsilon^{\text{II}}).$$

$$\text{III. } ((2m-n)^2 + 3\lambda + A)d^{\text{II}} + 2(m+1)(2m-n)\delta^{\text{II}} = \\ + 56,493 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Bc^{\text{II}} - \frac{1}{2} C\gamma^{\text{II}}.$$

$$\text{IV. } 2(m+1)(2m-n)d^{\text{II}} + ((2m-n)^2 + A^{\text{I}})\delta^{\text{II}} = \\ + 13,466 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Cc^{\text{II}} + \frac{1}{2} B^{\text{I}}\gamma^{\text{II}}.$$

$$\text{V. } ((2m+n)^2 + 3\lambda + A)c^{\text{II}} + 2(m+1)(2m+n)\epsilon^{\text{II}} = \\ - 680,467 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Bc^{\text{II}} + \frac{1}{2} C\gamma^{\text{II}}.$$

$$\text{VI. } 2(m+1)(2m-n)c^{\text{II}} + ((2m-n)^2 + A^{\text{I}})\epsilon^{\text{II}} = \\ - 529,371 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Cc^{\text{II}} - \frac{1}{2} B^{\text{I}}\gamma^{\text{II}}.$$

$$\text{VII. } (9nn + 3\lambda + A)c^{\text{III}} + 6(m+1)n \cdot \gamma^{\text{III}} = \\ - 1130,384 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} B(d^{\text{III}} + c^{\text{III}}) - \frac{1}{2} C(\delta^{\text{III}} + \epsilon^{\text{III}}).$$

$$\text{VIII. } 6(m+1)n \cdot c^{\text{III}} + (9nn + A^{\text{I}}) \cdot \gamma^{\text{III}} = \\ - 881,177 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} C(d^{\text{III}} - c^{\text{III}}) + \frac{1}{2} B^{\text{I}}(\delta^{\text{III}} - \epsilon^{\text{III}}).$$

$$\text{IX. } ((2m-3n)^2 + 3\lambda + A)d^{\text{III}} + 2(m+1)(2m-3n)\delta^{\text{III}} = \\ + 248,289 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Bc^{\text{III}} - \frac{1}{2} C\gamma^{\text{III}}.$$

$$\text{X. } 2(m+1)(2m-3n)d^{\text{III}} + ((2m-3n)^2 + A^{\text{I}})\delta^{\text{III}} = \\ - 135,471 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Cc^{\text{III}} + \frac{1}{2} B^{\text{I}}\gamma^{\text{III}}.$$

$$\text{XI. } ((2m+3n)^2 + 3\lambda + A)c^{\text{III}} + 2(m+1)(2m+3n)\epsilon^{\text{III}} = \\ + 5,190 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Bc^{\text{III}} + \frac{1}{2} C\gamma^{\text{III}}.$$

$$\text{XII. } 2(m+1)(2m+3n)c^{\text{III}} + ((2m+3n)^2 + A^{\text{I}})\epsilon^{\text{III}} = \\ + 5,043 \cdot c^{\text{I}} - \frac{1}{2} Cc^{\text{III}} - \frac{1}{2} B^{\text{I}}\gamma^{\text{III}}.$$

D'où l'on trouvera par élimination les valeurs qui suivent

$$c^{\text{II}} = + 0,8899 \cdot c^{\text{I}}; \quad d^{\text{II}} = - 0,5166 \cdot c^{\text{I}};$$

$$c^{\text{III}} = - 0,2445 \cdot c^{\text{I}}; \quad \epsilon^{\text{III}} = - 0,2445 \cdot c^{\text{I}};$$



$$\gamma^{\text{II}} = -0,4207 . c^3 ; \delta^{\text{II}} = + 1,3000 . c^3 ;$$

$$\epsilon^{\text{II}} = -0,1960 . c^3 ;$$

$$c^{\text{III}} = -0,3832 . c^3 ; d^{\text{III}} = + 0,1782 . c^3 ;$$

$$e^{\text{III}} = + 0,0011 . c^3 ;$$

$$\gamma^{\text{III}} = -0,2996 . c^3 ; \delta^{\text{III}} = -0,2850 . c^3 ;$$

$$\epsilon^{\text{III}} = + 0,0007 . c^3 .$$

Par conséquent

$$x^{\text{I}} = \left\{ \begin{array}{l} +0,8899 . c^3 . \cos . q - 0,5166 . c^3 . \cos . (2p - q) \\ - 0,2455 . c^3 . \cos . (2p + q) \\ -0,3832 . c^3 . \cos . 3q + 0,1782 . c^3 . \cos . (2p - 3q) \\ + 0,0011 . c^3 . \cos . (2p + 3q) . \end{array} \right.$$

$$y^{\text{I}} = \left\{ \begin{array}{l} -0,4207 . c^3 . \sin . q + 1,3000 . c^3 . \sin . (2p - q) \\ -0,1960 . c^3 . \sin . (2p + q) \\ -0,2996 . c^3 . \sin . 3q - 0,2850 . c^3 . \sin . (2p - 3q) \\ \pm 0,0007 . c^3 . \sin . (2p \pm 3q) . \end{array} \right.$$



---



---

 QUATRIÈME SECTION.

*Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la troisième Classe, qui dépendent de l'inclinaison de l'orbite de la Lune à l'écliptique.*

---

## ARTICLE PREMIER.

*Recherches préliminaires sur la nature de ces inégalités:*

## I.

J'AI supposé jusqu'ici que la Lune se meut sur le plan de l'écliptique, dont les inégalités ont été tirées des deux premières de nos trois équations générales; à présent je n'ai qu'à y ajouter la troisième. Or, comme l'inclinaison de la Lune est fort petite, il me sera permis de faire abstraction de l'excentricité de l'orbite de la Terre, & encore à plus forte raison des inégalités qui dépendent de la parallaxe du Soleil. J'omettrai donc encore les termes affectés par  $v$  &  $a$ , & les trois équations que nous aurons à considérer ici seront (Sect. 1. § 23).

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left. \begin{aligned} & \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} x \cos. 2p \\ & - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda x x + \frac{3}{2} \lambda y y + 4\lambda x^3 \\ & - 6\lambda x y y + \frac{3}{2} \lambda (1-4x) x z. \end{aligned} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

$$2. \left. \begin{aligned} & - \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} - \frac{1}{2} \sin. 2p - \frac{1}{2} y \cos. 2p \\ & - \frac{1}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy + \frac{1}{2} \lambda y^3 - 6\lambda xx y \\ & + \frac{1}{2} \lambda y. zz. \end{aligned} \right\} = 0$$

$$3. - \frac{ddz}{dt^2} - (\lambda+1)z + \frac{1}{2} \lambda z^3 + \frac{1}{2} \lambda (2x - 4xx + yy)z = 0.$$

## I I.

Les deux équations font donc les mêmes que celles que nous avons développées jusqu'ici, aux derniers termes près qui renferment  $zz$ , auxquels il nous faudra encore satisfaire, & d'où résulteront quelques nouvelles inégalités dans  $x$  &  $y$ ; mais qui pourront être négligées dans la recherche de la valeur de  $z$ , laquelle étant fort petite, il suffira d'y prendre seulement les principales parties qui constituent les valeurs de  $x$  &  $y$ . Ensuite en déterminant  $z$ , je négligerai le terme  $\frac{1}{2} \lambda z^3$ , puisqu'il donneroit des inégalités qui dépendent du cube de l'inclinaison, & qu'on pourra hardiment rejeter.

## I I I.

Pour commencer les recherches présentes, ne considérons d'abord que la troisième équation, & supposons premièrement  $x = 0$  &  $y = 0$ , de sorte que  $-\frac{ddz}{dt^2} - (1 + \lambda)z = 0$ ; d'où il est clair que  $z$  exprimera le *sinus* ou *cosinus* d'un certain angle proportionnel au tems multiplié par un coefficient arbitraire. Soit donc  $r$  cet angle & posons  $dr = l dt$ , de sorte que mettant  $z = \omega \sin. r$ , nous ayons  $\frac{dz}{dt} = l \omega \cos. r$  &  $\frac{ddz}{dt^2} = -ll \omega \sin. r$ ,

ces valeurs étant substituées donneront  $ll \omega \sin. r - (1 + \lambda) \omega \sin. r = 0$ ; donc  $l = \sqrt{1 + \lambda}$ . Or ayant trouvé ci-dessus  $\lambda = mm + 2m + \frac{1}{2} = 179,2274177$ . (Sect. 2 §. 3), nous aurons  $l = 13,42488$ .

## I V.

Examinons maintenant plus soigneusement la nature de cet angle  $r$ , que nous venons de trouver, & puisque la tangente de la latitude de la Lune est  $Z : \sqrt{XX + YY} = z(1 - x + 2xx - \frac{1}{2}yy)$ , nous voyons que quand  $r = 0$  ou  $r = 180^\circ$ , la Lune se trouvera dans l'écliptique & que sa latitude sera la plus grande lorsque  $r = 90^\circ$  ou  $r = 270^\circ$ ; d'où il est évident que cet angle  $r$  exprime ce qu'on nomme en Astronomie: *Argument de Latitude*; & par conséquent cet angle  $r$  doit résulter quand on soustrait la longitude du nœud de la longitude moyenne de la Lune.

## V.

Voyons donc si ce mouvement est conforme aux observations. Les Tables Astronomiques donnent pour le tems de 30 jours le mouvement du nœud de la Lune rétrograde  $1^\circ 35' 19'' = 5719''$ ; le mouvement moyen de la Lune  $13^\circ 5' 17' 31'' = 1423051''$ : donc le mouvement moyen de la Lune moins le mouvement de son nœud  $1428770''$ . Mais le mouvement moyen de l'anomalie du Soleil pour ce même tems de 30 jours est  $29^\circ 34' 4''$ ,  $5 = 106444''$ ,  $5$ ; d'où les observations donneront

$$l = \frac{dr}{dt} = \frac{1428770}{106444,5} = 13,4226756; \text{ \& dont il faudra}$$

se servir dans la suite, la petite différence provenant tant de ce que nous avons négligé au § 3. les inégalités de la

Lune, que principalement de l'action des autres planètes sur la Lune.

VI.

Ensuite pour le coefficient  $\omega$ , il est clair qu'il exprimera la valeur de  $z$  lorsque la latitude moyenne de la Lune devient la plus grande; car prenant  $r = 90^\circ$ , il devient  $z = \omega$ ; or  $z$  est alors la tangente de la latitude. La valeur d' $\omega$  doit donc être déterminée par les observations de la même manière que l'excentricité  $c$ , & cette valeur sera à peu près  $\omega = \frac{2}{10}$ ; celle de l'excentricité étant, peu s'en faut,  $c = \frac{1}{10}$ .

ARTICLE II.

*Détermination des inégalités auxquelles est assujettie la latitude de la Lune.*

VII.

AYANT trouvé la partie principale de la valeur de  $z$ ; qui est  $z = \omega \sin. r$ , il faut chercher les inégalités, auxquelles ce  $z$  est assujetti à cause des inégalités mêmes de la Lune, dont il suffira de prendre les principales, & qui sont contenues dans les valeurs déjà trouvées pour  $x$  &  $y$ . Soit donc

$$x = a^1 + b \cos. 2p + c' \cos. q + d \cos. (2p - q) \\ + f \cos. 2q + g \cos. (2p - 2q)$$

&

$$y = \epsilon \sin. 2p + \gamma \sin. q + \delta \sin. (2p - q) \\ + \xi \sin. 2q + \theta \sin. (2p - 2q);$$

& nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
 2x - 4xx + yy &= 2a^1 - 4a^1 a^1 - 2bb + \frac{1}{2} \mathcal{C}\mathcal{C} - 2c^1 c^1 \\
 &+ \frac{1}{2} \gamma\gamma - 2dd + \frac{1}{2} \mathcal{D}\mathcal{D} + (2b - 8a^1 b - 4c^1 d - \gamma\delta) \text{ cos. } q \\
 &\text{cos. } 2p + (2c^1 - 8a^1 c^1 - 4bd + \mathcal{C}\mathcal{D}) \text{ cos. } q \\
 &+ (2d - 8a^1 d - 4bc^1 + \mathcal{C}\gamma) \text{ cos. } (2p - q) \\
 &+ (2f - 8a^1 f - 4bg + \mathcal{C}\theta - 2c^1 c^1 - \frac{1}{2} \gamma\gamma) \\
 &\text{cos. } 2q + (2g - 8a^1 g - 4bf + \mathcal{C}\xi - 4c^1 d + \gamma\delta) \\
 &\text{cos. } (2p - 2q).
 \end{aligned}$$

D'où en substituant pour  $\lambda$ ,  $a^1$ ,  $b$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $c^1$ ,  $\gamma$  &c. leurs valeurs trouvées, nous trouverons cette équation.

### V I I I.

*Equation qui renferme toutes les inégalités du mouvement de la Lune en latitude,*

$$\begin{aligned}
 -\frac{ddx}{dt^2} + z(A + B \text{ cos. } 2p + C \text{ cos. } q + D \text{ cos. } (2p - q) \\
 + E \text{ cos. } 2q + F \text{ cos. } (2p - 2q)) = 0,
 \end{aligned}$$

où j'ai posé pour abrégé

$$- 180, 2354 - 280, 0737. cc = A;$$

$$- 3, 8603 - 311, 8370. cc = B;$$

$$+ 541, 9150. c = C;$$

$$+ 102, 3782. c = D;$$

$$- 810, 4568. cc = E$$

&

$$- 87, 1502. cc = F,$$

## IX.

*Détermination de ces inégaliés.*

Donnons donc à  $z$  la forme suivante :

$$\begin{aligned} z = & \omega \sin. r + A' \omega \sin. (2p - r) + a' \omega \sin. (2p + r) \\ & + B' \omega \sin. (q - r) + b' \omega \sin. (q + r) + C' \omega \sin. (2p - q - r) \\ & + c' \omega \sin. (2p - q + r) + D' \omega \sin. (2q - r) \\ & + d' \omega \sin. (2q + r) + F' \omega \sin. (2p - 2q - r) \\ & + a' \omega \sin. (2p - 2q + r). \end{aligned}$$

Et substituons cette forme dans l'équation différentielle au lieu de  $z$ , & nous aurons en négligeant les termes qui dépendroient du cube & du biquarré de l'excentricité  $c$  ces déterminations :

$$\begin{aligned} \text{Pour le coefficient de } \sin. r ; & ll + A - \frac{1}{2} B (A' - a') \\ & - \frac{1}{2} C (B' - b') - \frac{1}{2} D (C' - c') = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le coefficient de } \sin. (2p - r) ; & ((2m - l)^2 + A) A' \\ & - \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C C' + \frac{1}{2} D B' = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le coefficient de } \sin. (2p + r) ; & ((2m + l)^2 + A) a' \\ & + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C c' + \frac{1}{2} D b' = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le coefficient de } \sin. (q - r) ; & ((n - l)^2 + A) B' \\ & - \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} B c' + \frac{1}{2} D A' = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le coefficient de } \sin. (q + r) ; & ((n + l)^2 + A) b' \\ & + \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} B C' + \frac{1}{2} D a' = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le coefficient de } \sin. (2p - q - r) ; & ((2m - n - l)^2 \\ & + A) C' - \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} B b' + \frac{1}{2} C A' = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour le coefficient de } \sin. (2p - q + r) ; & ((2m - n + l)^2 + A) c' \\ & + \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} B B' + \frac{1}{2} C a' = 0. \end{aligned}$$

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

H

Pour le coefficient de  $\sin. (2q-r); ((2n-l)^2 + A)D'$   
 $-\frac{1}{2}Bf - \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}CB' + \frac{1}{2}FA' = 0.$

Pour le coefficient de  $\sin. (2q+r); ((2n+l)^2 + A)d'$   
 $-\frac{1}{2}Bf' + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}Cb' + \frac{1}{2}Fa' = 0.$

Pour le coefficient de  $\sin. (2p-2q-r); ((2m-2n-l)^2 + A)f'$   
 $-\frac{1}{2}Ba' - \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}CC' - \frac{1}{2}Db' + \frac{1}{2}EA' = 0.$

Pour le coefficient de  $\sin. (2p-2q+r); ((2m-2n+l)^2 + A)f'$   
 $-\frac{1}{2}BD' + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}Cc' - \frac{1}{2}DE' + \frac{1}{2}Ea' = 0.$

D'où l'on voit que les coefficients  $A'$  &  $a'$  auront chacun deux parties, dont l'une ne dépend point du tout de l'excentricité & dont l'autre renferme le carré de l'excentricité  $cc$ . Ensuite les coefficients  $B', b', C', c'$  dépendront uniquement de la simple excentricité  $c$ , & les coefficients  $D', d', E', e'$  renfermeront le seul carré de l'excentricité  $cc$ .

La première de ces onze équations déterminera plus exactement la valeur de  $l$ , déjà connue par les Tables Astronomiques & les dix autres équations donneront les valeurs des coefficients  $A', a', B', b', C', c', D', d', E', e, F', f'$  où il sera permis de mettre dans la valeur de  $A$ , pour

$$cc = \frac{1}{400}; \text{ de sorte que } A = -180,2354$$

$$-\frac{280,0737}{400} = -180,9355.$$

## X.

Après avoir fait les calculs j'ai trouvé pour  $z$  cette valeur:



VALEUR de  $z$  ou de  $\frac{Z}{a}$

$$\begin{aligned} z = & \omega \sin. r + (0,036484 + 0,3498 . cc) \omega \sin. (2p - r) \\ & + (0,001877 + 0,2102 . cc) \omega \sin. (2p + r) \\ & - 1,48582 . cc \sin. (q - r) - 0,51163 . cc \sin. (q + r) \\ & - 0,22643 . c \omega \sin. (2p - q - r) - 0,12553 . cc \\ & \sin. (2p - q + r) \\ & + 0,1195 . cc \omega \sin. (2q - r) + 0,3850 . cc \omega \sin. (2q + r) \\ & + 0,1523 . cc \omega \sin. (2p - 2q - r) - 0,0614 . cc \omega \\ & \sin. (2p - 2q + r). \end{aligned}$$

X I.

DÉTERMINATION PLUS EXACTE DU RAPPORT  $l$ . Si nous substituons les valeurs trouvées pour  $A'$ ,  $a'$ ,  $B'$ ,  $b'$ ,  $C'$  &  $c'$  dans la première équation, qui est

$U + A + \frac{1}{2}B(A' - a') - \frac{1}{2}C(B' - b') - \frac{1}{2}D(C' - c') = 0$   
nous obtiendrons

$$U + A = -0,080286 - 269,4531 . cc$$

& de-là

$$U = +180,1551 + 10,6240 . cc;$$

par conséquent

$$l = 13,42219 + 0,3956 . cc$$

& en posant

$$cc = \frac{1}{400}, \text{ il fera } l = 13,42318.$$

Or, nous avons trouvé par les Tables Astronomiques  $l = 13,42267$ ; d'où l'on voit le parfait accord entre la théorie & les observations, cette petite différence de  $0,00051$  provenant tant de l'action des autres planètes

sur la Lune, que de ce que nous n'avons pas encore pu mettre pour l'excentricité  $\epsilon$  sa juste valeur, qui probablement fera plus petite que  $\frac{1}{20}$ .

### A R T I C L E III.

*Détermination des inégalités de la Lune qui résultent de l'inclinaison de son orbite.*

#### X I I.

CES inégalités sont connues sous le nom de *Réduction à l'Ecliptique* & elles résultent des derniers termes de nos deux premières équations différentio-différentielles, qui sont

$$1. \quad \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} x \cos 2p \\ - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2} \lambda yy + 4\lambda x' - 6\lambda xy \\ + \frac{3}{2} \lambda (1 - 4x)zz = 0.$$

$$2. \quad \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx}{dt} + \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} y \cos. 2p - \frac{3}{2} x \\ \sin. 2p + 3\lambda xy + \frac{3}{2} \lambda y^2 - 6\lambda xy + \frac{3}{2} \lambda y. zz = 0.$$

#### X I I I.

*Préparation.*

Soient  $u$  &  $v$  les valeurs déjà trouvées pour  $x$  &  $y$  & écrivons  $u + x^1$  &  $v + y^1$  au lieu de  $x$  &  $y$ , pour avoir ces deux équations

$$1. \frac{-ddx^1}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^1}{dt} + 3\lambda x^1 + x^1 \left( \frac{1}{2} \cos. 2p - 6\lambda u \right. \\ \left. + 12\lambda uv - 6\lambda v^2 \right) + y^1 \left( -\frac{1}{2} \sin. 2p + 3\lambda v - 12\lambda uv \right) \\ + \frac{1}{2} \lambda (1 - 4u) z z = 0.$$

$$2. \frac{-ddv^1}{dt^2} - \frac{2(m+1)d\lambda^1}{dt} + y^1 \left( -\frac{1}{2} \cos. 2p + 3\lambda u + \frac{1}{2} \lambda v^2 \right. \\ \left. - 6\lambda uv \right) + x^1 \left( -\frac{1}{2} \sin. 2p + 3\lambda v - 12\lambda uv \right) \\ + \frac{1}{2} \lambda v z z = 0.$$

qui renfermeront donc les corrections comprises sous le nom de Réduction à l'écliptique.

## XIV.

*Détermination de ces corrections.*

Soit  $u = 0,0000240 - 0,0071802 \cdot \cos. 2p$  &  $v = +0,0102118 \cdot \sin. 2p$ , en omettant toutes les inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Lune ou de la quantité  $\epsilon$ ; qu'on fasse maintenant les substitutions & nos deux équations deviendront: (Voyez Sect. 3. § 7.)

$$1. -\frac{ddx^1}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^1}{dt} + 537,6558 \cdot x^1 + 9,220588 \cdot x^1 \cdot \cos. 2p \\ + 3,990175 \cdot y^1 \cdot \sin. 2p + 268,8154 \cdot z z \\ + 7,721336 \cdot z z \cdot \cos. 2p = 0.$$

$$2. \frac{-ddy^1}{dt^2} - \frac{2(m+1)d\lambda^1}{dt} + 0,0272 \cdot y^1 - 5,360294 \cdot y^1 \cdot \cos. 2p \\ + 3,990175 \cdot x^1 \cdot \sin. 2p + 2,745353 \cdot z z \cdot \sin. 2p = 0.$$

Or comme  $z = \omega \sin. r + 0,036484 \omega \sin. (2p - r) + 0,001877 \omega \sin. (2p + r)$

nous aurons

$$\begin{aligned}
 z z = 0, & 500667. \omega \omega - 0, 034607. \omega \omega. \text{cosf. } 2p \\
 & - 0, 499933. \omega \omega. \text{cosf. } 2r + 0, 036484. \omega \omega. \\
 & \text{cosf. } (2p - 2r) + 0, 001877. \omega \omega. \text{cosf. } (2p + 2r);
 \end{aligned}$$

de-là nos deux équations.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -\frac{ddx^1}{dt^2} + \frac{z(m+1)dy^1}{dt} + 537,6558. x^1 + 9,220588. x^1 \\
 & \text{cosf. } 2p + 3, 990175. y^1 \text{sin. } 2p + 134, 4534. \omega \omega \\
 & - 5, 4371. \omega \omega. \text{cosf. } 2p - 134, 2561. \omega \omega. \text{cosf. } 2r \\
 & + 7, 8774. \omega \omega. \text{cosf. } (2p - 2r) - 2, 4346. \omega \omega. \\
 & \text{cosf. } (2p + 2r) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & -\frac{ddy^1}{dt^2} - \frac{z(m+1)dx^1}{dt} + 0, 0272462. y^1 \\
 & - 5, 360294. y^1 \text{cosf. } 2p + 3, 990175. x^1. \text{sin. } 2p \\
 & + 1, 3745. \omega \omega. \text{sin. } 2p + 0, 0526. \omega \omega. \text{sin. } 2r \\
 & - 0, 6862. \omega \omega. \text{sin. } (2p - 2r) - 0, 6862. \omega \omega. \\
 & \text{sin. } (2p + 2r) = 0.
 \end{aligned}$$

## X V.

Supposons

$$\begin{aligned}
 x^1 = a^{11} \omega \omega + b^{11} \omega \omega \text{cosf. } 2p + f \omega \omega \text{cosf. } 2r + g \omega \omega \\
 \text{cosf. } (2p - 2r) + h \omega \omega \text{cosf. } (2p + 2r)
 \end{aligned}$$

&c

$$\begin{aligned}
 y^1 = c^{11} \omega \omega \text{sin. } 2p + \zeta \omega \omega \text{sin. } 2r + \eta \omega \omega \text{sin. } (2p - 2r) \\
 + \theta \omega \omega \text{sin. } (2p + 2r),
 \end{aligned}$$

d'où nous obtiendrons les déterminations suivantes ;

$$\begin{aligned}
 537, 6558. a^{11} + 4, 610294. b^{11} + 1, 995087. c^{11} \\
 + 134, 4534 = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4mm + 537, 6558) b^{11} + 4m(m+1) c^{11} + 9, 220588. a^{11} \\
 - 5, 43707 = 0.
 \end{aligned}$$

$$4m(m+1)b'' + (4mm + 0,0272)c'' + 3,990175.a'' + 1,37451 = 0.$$

$$(4ll + 537,6558)f + 4l(m+1)\zeta + 4,610294(g+h) + 1,995087(n+\theta) - 134,2561 = 0.$$

$$4l(m+1)f + (4ll + 0,0272)\zeta + 1,995087(g-h) + 2,680147(n-\theta) + 0,05265 = 0.$$

$$(4(m-l)^2 + 537,6568)g + 4(m-l)(m+1)n + 4,610294.f + 1,995087.\zeta + 7,87739 = 0.$$

$$4(m-l)(m+1)g + ((m-l)^2 + 0,0272)n + 1,995087.f + 2,680147.\zeta - 0,68624 = 0.$$

$$(4(m+l)^2 + 537,6558)h + 4(m+l)(m+1)\theta + 4,610294.f + 1,995087.\zeta - 2,43463 = 0.$$

$$4(m+l)(m+1)h + (4(m+l)^2 + 0,0272)\theta + 1,995087.f - 2,680147.\zeta - 0,68624 = 0.$$

X V. I.

De-là on aura :  $a'' = - 0,25012 :$

$$b'' = + 0,01310; f = + 0,24723;$$

$$g = - 0,01530; h = + 0,00042;$$

$$c'' = - 0,01804; \zeta = - 0,24635;$$

$$n = + 0,02334; \theta = - 0,00039;$$

par conséquent

$$x^1 = - 0,25012.\omega\omega + 0,01310.\omega\omega \cosf. 2p + 0,24723.\omega\omega \cosf. 2r - 0,01330.\omega\omega \cosf. (2p-2r) + 0,00042.\omega\omega \cosf. (2p+2r)$$

$$y^1 = -0,01804 \cdot \omega \omega \sin. 2p - 0,24635 \cdot \omega \omega \sin. 2r \\ + 0,02334 \cdot \omega \omega \sin. (2p - 2r) - 0,00039 \cdot \omega \omega \\ \sin. (2p + 2r).$$

Au reste la réduction à l'écliptique ou cette petite correction qui résulte de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, dépendroit aussi de son excentricité; mais comme les inégalités qui en naîtroient pour les coordonnées *X* & *Y* feroient toutes multipliées par *c. ω ω*, j'ai cru pouvoir me dispenser d'en rechercher la valeur. Cependant si l'on vouloit les déterminer par la méthode dont je me suis servi jusqu'ici, on ne rencontreroit pas, à ce que je pense, la moindre difficulté.



---

## CINQUIÈME SECTION.

*Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la quatrième Classe, qui dépendent de la parallaxe du Soleil.*

---

### ARTICLE PREMIER.

*Introduction à la Recherche de ces inégalités.*

#### I.

J'AI supposé jusqu'ici la distance du Soleil à la Terre infiniment plus grande que celle de la Lune, & j'avois pour cet effet négligé les termes qui sont affectés par le rapport  $a$ . Maintenant je ferai entrer ces termes dans les équations générales (Sect. 1. § 23) pour rechercher les inégalités qui en résulteront. Je remarque d'abord que comme les inégalités de cette classe sont très-petites il suffira de prendre les termes où  $x$ ,  $y$  &  $z$  n'ont tout au plus que deux dimensions; je négligerai donc tous ceux où la troisième dimension entre. Ensuite il est aussi clair que le terme  $\frac{1}{2} \lambda z z$  dans la première équation ne vient point en considération, & comme il n'est pas encore question des inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Terre, j'omettrai dans les recherches présentes tous les termes affectés par  $v$ . En mettant donc pour  $\lambda$  sa valeur  $\lambda = mm + 2m + \frac{1}{2}$ , les inégalités que

*Prix de l'Académie, Tome IX.* I

je me propose de déterminer ici devront être déduites de ces équations :

$$1. \quad \frac{-ddx}{dt^2} + \frac{z(m+1)dy}{dt} + 3\lambda x + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} x \cos. 2p \\ - \frac{3}{2} y \sin. 2p - 3\lambda xx + \frac{3}{2} \lambda yy - a \left( \frac{3}{8} \cos. p + \frac{15}{8} \cos. 3p \right) \\ - ax \left( \frac{3}{4} \cos. p + \frac{15}{4} \cos. 3p \right) + ay \times \\ \left( \frac{3}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p \right) = 0.$$

$$2. \quad \frac{-ddy}{dt^2} - \frac{z(m+1)dx}{dt} - \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} y \cos. 2p \\ - \frac{3}{2} x \sin. 2p + 3\lambda xy + a \left( \frac{3}{8} \sin. p + \frac{15}{8} \sin. 3p \right) \\ - ay \left( \frac{3}{4} \cos. p + \frac{15}{4} \cos. 3p \right) + ax \left( \frac{3}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p \right) \\ = 0.$$

$$3. \quad \frac{-ddz}{dt^2} - (1+\lambda)z + 3\lambda xz - 3az \cos. p = 0.$$

## I I.

Séparons d'abord de ces équations tous les termes auxquels nous avons déjà satisfait. Soient  $u$ ,  $v$  &  $w$  les valeurs de  $x$ ,  $y$  &  $z$  qui font évanouir ces trois expressions :

$$1. \quad \frac{ddu}{dt^2} + \frac{z(m+1)dv}{dt} + 3\lambda u + \frac{3}{2} \cos. 2p + \frac{3}{2} u \cos. 2p \\ - \frac{3}{2} v \sin. 2p - 3\lambda uu + \frac{3}{2} \lambda vv.$$

$$2. \quad \frac{-ddv}{dt^2} - \frac{z(m+1)du}{dt} - \frac{3}{2} \sin. 2p - \frac{3}{2} v \cos. 2p - \frac{3}{2} u \\ \sin. 2p + 3\lambda uv.$$

$$3. \quad \frac{-ddw}{dt^2} - (1+\lambda)w + 3\lambda uw$$

Pofons  $x = u + x^1$ ;  $y = v + y^1$  &  $z = w + z^1$ , de forte que  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $z^1$  contiennent les inégalités qui réfultent



du rapport  $a$ , & nous obtiendrons les équations suivantes qu'il s'agit de résoudre ici.

## III.

*Equations qui renferment les inégalités parallactiques.*

$$1. - \frac{ddx^2}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^2}{dt} + 3\lambda x^2 + \left(\frac{1}{2} \cos. 2p - 6\lambda u\right)x^2 \\ - \left(\frac{1}{2} \sin. 2p - 3\lambda v\right)y^2 - a\left(\frac{2}{8} \cos. p + \frac{15}{8} \cos. 3p\right) \\ - au\left(\frac{2}{4} \cos. p + \frac{15}{4} \cos. 3p\right) + av\left(\frac{3}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p\right) \\ = 0.$$

$$2. - \frac{ddy^2}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^2}{dt} - \left(\frac{1}{2} \cos. 2p - 3\lambda u\right)y^2 \\ - \left(\frac{1}{2} \sin. 2p - 3\lambda v\right)x^2 + a\left(\frac{3}{8} \sin. p + \frac{15}{8} \sin. 3p\right) \\ - av\left(\frac{3}{4} \cos. p - \frac{15}{4} \cos. 3p\right) + au\left(\frac{3}{4} \sin. p + \frac{15}{4} \sin. 3p\right) \\ = 0.$$

$$3. - \frac{ddz^2}{dt^2} - (1+\lambda)z^2 + 3\lambda uz^2 + 3\lambda x^2 w - 3aw \cos. p = 0.$$

## ARTICLE III.

*Détermination des inégalités parallactiques, qui affectent le mouvement de la Lune dans l'écliptique.*

## IV.

CONSIDÉRONS donc d'abord les deux premières équations, & commençons par le cas le plus simple, en posant  $u = 0$  &  $v = 0$ , de sorte que nos deux équations soient:

$$1. - \frac{ddx^2}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^2}{dt} + 3\lambda x^1 + \frac{3}{2}x^1 \cos. 2p - \frac{3}{2}y^1$$

$$\sin. 2p - \frac{9}{8}a \cos. p - \frac{15}{8}a \cos. 3p = 0.$$

$$2. - \frac{ddy^2}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^2}{dt} - \frac{3}{2}y^1 \cos. 2p - \frac{3}{2}x^1 \sin. 2p$$

$$+ \frac{3}{8}a \sin. p + \frac{15}{8}a \sin. 3p = 0.$$

D'où l'on voit qu'il faut mettre

$$x^1 = b^I a \cos. p + b^{II} a \cos. 3p$$

&

$$y^1 = c^I a \sin. p + c^{II} a \sin. 3p.$$

Substituons ces valeurs dans nos deux équations, & nous obtiendrons ces quatre conditions à remplir.

$$(mm + 3\lambda)b^I + 2m(m+1)c^I + \frac{3}{4}b^I - \frac{3}{4}c^I + \frac{3}{4}b^{II} - \frac{3}{4}c^{II} - \frac{9}{8} = 0.$$

$$mm c^I + 2m(m+1)b^I + \frac{3}{4}c^I - \frac{3}{4}b^I - \frac{3}{4}c^{II} + \frac{3}{4}b^{II} + \frac{3}{8} = 0.$$

$$(9mm + 3\lambda)b^{II} + 6m(m+1)c^{II} + \frac{3}{4}(b^I + c^I) - \frac{15}{8} = 0.$$

$$9mm c^{II} + 6m(m+1)b^{II} - \frac{3}{4}(b^I + c^I) + \frac{15}{8} = 0.$$

D'où l'on trouvera

$$b^I = -0,11535; c^I = +0,24511;$$

$$b^{II} = +0,00255 \text{ \& } c^{II} = -0,00313;$$

par conséquent

$$x^1 = -0,11535 \cdot a \cdot \cos. p + 0,00255 \cdot a \cdot \cos. 3p$$

&

$$y^1 = +0,24511 \cdot a \cdot \sin. p - 0,00313 \cdot a \cdot \sin. 3p.$$

## V.

*Approximation ultérieure.*

Donnons à  $u$  &  $v$  leurs valeurs principales qui sont

$$u = b \cos. 2p + c \cos. q + d \cos. (2p - q) + e \cos. (2p + q);$$

$$v = \zeta \sin. 2p + \gamma \sin. q + \delta \sin. (2p - q) + \epsilon \sin. (2p + q);$$

ou

$$b = -0,0071800; \zeta = +0,0102118. \text{ (Sect. 2. § 5.)}$$

&

$$\gamma = -2,012729.c; d = +0,187947.c;$$

$$\delta = -0,411802.c; e = -0,002705.c;$$

$$\epsilon = -0,003215.c \text{ (Sect. 3. §. 12.)}$$

Calculons d'abord

$$-au\left(\frac{3}{4}\cos.p + \frac{15}{4}\cos.3p\right) + av\left(\frac{3}{4}\sin.p + \frac{15}{4}\sin.3p\right)$$

(dont la valeur sera

$$+0,0445166.a \cos.p + 0,0042481.a \cos.3p$$

$$-2,246594.ac \cos.(p - q) - 1,492918.ac \cos.(p + q)$$

$$-5,705881.ac \cos.(3p - q) + 1,903115.ac \cos.(3p + q).$$

De même nous trouverons

$$-av\left(\frac{3}{4}\cos.p - \frac{15}{4}\cos.3p\right) + au\left(\frac{3}{4}\sin.p + \frac{15}{4}\sin.3p\right) =$$

$$-0,0337465.a \sin.p - 0,0065219.a \sin.3p$$

$$-0,294871.ac \sin.(p - q) + 2,256521.ac$$

$$\sin.(p + q) + 5,873773.ac \sin.(3p - q)$$

$$-1,898676.ac \sin.(3p + q).$$

Ensuite

$$3\lambda u = -3,8605.\cos.2p + 537,6822.c(\cos.q$$

$$+ 101,0558.c(\cos.(2p - q) - 1,4544.c(\cos.(2p + q)$$

&

$3\lambda v = + 5,4907 . \sin . 2p - 1082,2087 . c(\sin . q$   
 $- 221,4187 . c(\sin . (2p - q)) - 1,7286 . c(\sin . (2p + q))$   
 d'où nos équations deviendront

$$\begin{aligned}
 1. - \frac{ddx^1}{dt^2} + \frac{z(m+1)dy^1}{dt} + 537,6822 . x^1 + (9,2211 . \\
 \cos . 2p - 1075,3644 . c . \cos . q - 202,1116 . c . \\
 \cos . (2p - q) + 2,9088 . c . \cos . (2p + q)x^1 \\
 + (3,9907 . \sin . 2p - 1082,2087 . c . \sin . q \\
 - 221,4187 . c . \sin . (2p - q) - 1,7286 . c . \\
 \sin . (2p + q)y^1 - 1,0804834 . a \cos . p - 1,8707519 . a \\
 \cos . 3p - 2,246594 . ac . \cos . (p - q) - 1,492918 . ac . \\
 \cos . (p + q) - 5,705881 . ac . \cos . (3p - q) \\
 + 1,903115 . ac . \cos . (3p + q) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. - \frac{ddy^1}{dt^2} - \frac{z(m+1)dx^1}{dt} + (-5,3605 . \cos . 2p \\
 + 537,6822 . c . \cos . q + 101,0558 . c . \cos . (2p - q) \\
 - 1,4544 . c . \cos . (2p + q)y^1 + (+3,9907 . \sin . 2p \\
 - 1082,2087 . c . \sin . q - 221,4187 . c . \sin . (2p - q) \\
 - 1,7286 . c . \sin . (2p + q)x^1 + 0,3412535 . a \sin . p \\
 + 1,8684781 . a \sin . 3p - 0,294871 . ac \sin . (p - q) \\
 + 2,256521 . ac \sin . (p + q) + 5,873773 . ac \\
 \sin . (3p - q) - 1,898676 . ac . \sin . (3p + q).
 \end{aligned}$$

V I.

Pofons donc

$$\begin{aligned}
 x^1 + b^1 . a . \cos . p + b^{11} . a . \cos . 3p + c^1 . ac \cos . (p - q) \\
 + c^{11} . ac \cos . (p + q) + d^1 . ac \cos . (3p - q) + d^{11} ac \\
 \cos . (3p + q).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^1 = e^1 . a \sin . p + e^{11} . a \sin . 3p + \gamma^1 . ac \sin . (p - q) \\
 + \gamma^{11} . ac . \sin . (p + q) + \delta^1 . ac \sin . (3p - q) + \delta^{11} ac \\
 \sin . (3p + q),
 \end{aligned}$$

& nous obtiendrons d'abord pour les coefficients  $b^I, b^{II}, c^I$  &  $c^{II}$  ces quatre équations

$$1. (mm + 542,2927)b^I + (2m(m+1) + 1,9953)c^I + 4,6105 \cdot b^{II} + 1,9953 \cdot c^{II} - 1,0804834 = 0.$$

$$2. (2m(m+1) + 1,9953)b^I + (mm + 2,6802)c^I - 1,9953 \cdot b^{II} - 2,6802 \cdot c^{II} + 0,53412535 = 0.$$

$$3. (9mm + 537,6822)b^{II} + 6m(m+1)c^{II} + 4,6105 \cdot b^I - 1,9953 \cdot c^I - 1,8707519 = 0.$$

$$4. 6m(m+1)b^{II} + 9mmc^{II} + 1,9953 \cdot b^I - 2,6802 \cdot c^I + 1,8684781 = 0.$$

D'où l'on trouvera

$$b^I = -0,11411; b^{II} = +0,00300;$$

$$c^I = +0,24168; c^{II} = -0,00287.$$

Par conséquent

$$x^I = -0,11411 \cdot a \cdot \cos. p + 0,00300 \cdot a \cdot \cos. 3p$$

&

$$y^I = +0,24168 \cdot a \cdot \sin. p - 0,00287 \cdot a \cdot \sin. 3p.$$

## VII.

Passons aux inégalités qui dépendent du produit  $ac$ ; celles-ci seront renfermées dans les huit équations suivantes :

$$1. ((m-n)^2 + 537,6822)c^I + 2(m+1)(m-n)\gamma^I + 4,6105(c^{II} + d^I) + 1,9953(\gamma^{II} + d^I) - 638,7380 \cdot b^I - 651,8136 \cdot c^I + 1,4544 \cdot b^{II} - 0,8643 \cdot c^{II} - 2,246594.$$

$$\text{II. } 2(m+1)(m-n)c^I + (m-n)^2 \gamma^I + 2, 6802 \\ (\gamma^{II} - d^I) + 1, 9953 (c^{II} - d^I) + 218, 3132. \mathcal{C}^I \\ + 430, 3950. b^I - 0, 7272. \mathcal{C}^{II} + 0, 8643. b^{II} \\ - 0, 294871 = 0.$$

$$\text{III. } ((m+n)^2 + 537, 6822)c^{II} + 2(m+1)(m+n)\gamma^{II} \\ + 4, 6105 (c^I + d^{II}) + 1, 9953 (\gamma^I + d^{II}) \\ - 536, 2278. b^I + 540, 2400. \mathcal{C}^I - 101, 0558. b^{II} \\ - 110, 7093. \mathcal{C}^{II} - 1. 492918 = 0.$$

$$\text{IV. } 2(m+1)(m+n)c^{II} + (m+n)^2 \gamma^{II} + 2, 6802 \\ (\gamma^I - d^{II}) + 1, 9953 (c^I - d^{II} + 269, 5683. \mathcal{C}^I \\ - 541, 9686. b^I + 50, 5279. \mathcal{C}^{II} + 110, 7093. b^{II} \\ + 2, 256521 = 0.$$

$$\text{V. } ((3m-n)^2 + 537, 6822)d^I + 2(m+1)(3m-n)d^I \\ + 4, 6105. c^I - 1, 9953. \gamma^I - 101, 0558. b^I \\ + 110, 7093. \mathcal{C}^I - 537, 6822. b^{II} - 541, 1043. \mathcal{C}^{II} \\ - 5, 705881 = 0.$$

$$\text{VI. } 2(m+1)(3m-n)d^I + (3m-n)^2 d^I - 2, 6802. \gamma^I \\ + 1, 9953. c^I + 50, 5279. \mathcal{C}^I - 110, 7093. b^I \\ + 268, 8411. \mathcal{C}^{II} + 541, 1043. b^{II} \\ + 5, 873773 = 0.$$

$$\text{VII. } ((3m+n)^2 + 537, 6822)d^{II} + 2(m+1) \\ (3m+n)d^{II} + 4, 6105. c^{II} - 1, 9953. \gamma^{II} \\ + 1, 4544. b^I + 0, 8643. \mathcal{C}^I - 537, 6822. b^{II} \\ + 541, 1043. \mathcal{C}^{II} + 1, 903115 = 0.$$

VIII.

$$\begin{aligned} \text{VIII. } & 2(m+1)(3m+n)d^{\text{II}} + (3m+n)^2 \delta^{\text{II}} \\ & - 2,6802 \cdot \gamma^{\text{II}} + 1,9953 \cdot c^{\text{II}} - 0,7272 \cdot \zeta^{\text{I}} \\ & - 0,8643 \cdot b^{\text{I}} + 268,8411 \cdot \zeta^{\text{II}} - 541,1043 \cdot b^{\text{II}} \\ & - 1,898676. \end{aligned}$$

D'où l'on trouvera ces déterminations :

$$c^{\text{I}} = + 0,0467; c^{\text{II}} = - 0,1213;$$

$$d^{\text{I}} = + 0,0168; d^{\text{II}} = - 0,0001;$$

$$\gamma^{\text{I}} = - 2,6343; \gamma^{\text{II}} = - 0,0554;$$

$$\delta^{\text{I}} = - 0,0917; \delta^{\text{II}} = + 0,0014.$$

V I I I.

Les inégalités de cette classe se réduiront donc aux formules suivantes.

$$\begin{aligned} x^{\text{I}} = & - 0,11411 \cdot a \cdot \text{cos. } p + 0,00300 \cdot a \cdot \text{cos. } 3p \\ & + 0,0467 \cdot ac \cdot \text{cos. } (p - q) - 0,1213 \cdot ac \cdot \\ & \text{cos. } (p + q) + 0,0168 \cdot ac \cdot \text{cos. } (3p - q) - 0,0001 \cdot ac \cdot \\ & \text{cos. } (3p + q). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{\text{I}} = & + 0,24168 \cdot a \cdot \text{sin. } p - 0,00287 \cdot a \cdot \text{sin. } 3p \\ & - 2,6343 \cdot ac \cdot \text{sin. } (p - q) - 0,0554 \cdot ac \cdot \\ & \text{sin. } (p + q) - 0,0917 \cdot ac \cdot \text{sin. } (3p - q) + 0,0014 \cdot ac \cdot \\ & \text{sin. } (3p + q). \end{aligned}$$

## ARTICLE III.

*Détermination des inégalités parallactiques qui affectent la latitude de la Lune.*

## IX.

Ces inégalités sont très-petites, étant multipliées par le produit  $a\omega$  dont la valeur est à peu près 0,00025. Pour les déterminer, reprenons notre troisième équation, qui est (§. 3.)

$$-\frac{dd\zeta^2}{dt^2} + (1+\lambda)z^2 + 3\lambda uz^2 + 3\lambda x^2 w - 3aw \cos.p = 0.$$

Posons  $u = b \cos. 2p$ ;  $w = \omega \sin. r$  &  $x^2 = b^2. a \cos. p$ ; & notre équation deviendra

$$-\frac{dd\zeta^2}{dt^2} - (1+\lambda)z^2 + 3\lambda bz^2 \cos. 2p - \frac{1}{2}(\lambda b^2 - 1)a\omega \sin. (p-r) + \frac{1}{2}(\lambda b^2 - 1)a\omega \sin. (p+r) = 0.$$

Soit donc  $z^2 = A' a \omega \sin (p-r) + a' \omega \sin. (p+r)$ ; & nous obtiendrons

$$\begin{aligned} ((m-l)^2 - \lambda - 1) A' - \frac{1}{2} \lambda b. a' - \frac{1}{2} (\lambda b^2 - 1) &= 0. \\ ((m+l)^2 - \lambda - 1) a' - \frac{1}{2} \lambda b. A' + \frac{1}{2} (\lambda b^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

## X.

Mettons pour  $m, l, \lambda, b$  &  $b^2$  leurs valeurs numériques, savoir:

$$m = 12,3688974; \quad l = 13,4226756;$$



$$\lambda = 179, 2274; b = -0, 00718$$

&

$$b^i = -0, 11411, \text{ \& nous trouverons}$$

$$-179, 1169. A' + 1, 9303. a' + 32, 17736 = 0.$$

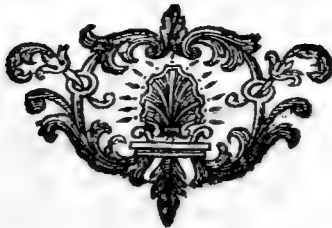
$$+ 484, 9778. a' + 1, 9303. A' - 32, 17736 = 0.$$

D'où les coefficients  $A'$  &  $a'$  seront déterminés de cette façon

$$A = +0, 1803; a' = +0, 0656;$$

par conséquent

$$z^i = +0, 1803. a \sin. (p-r) + 0, 0656. a \sin. (p+r).$$



---



---

## SIXIÈME SECTION.

*Recherches des inégalités du mouvement de la Lune de la cinquième Classe, qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de la Terre.*

---

### ARTICLE PREMIER.

*Introduction à la Recherche de ces inégalités.*

#### I.

LES inégalités de cette classe sont renfermées dans les termes affectés par  $v$ , & ce  $v$  marque l'excentricité de la Terre. Soit pour abrégé  $mm + \frac{11}{2} = \mu$ ; de sorte que  $\mu = 54,975,896$ . Reprenons les trois équations différentio-différentielles, comme je les avois données au § 23 de la première section, & posons- $y mm + 2m + \frac{1}{2} = \lambda$ ; effaçons d'abord les termes multipliés par  $a$  auxquels nous venons de satisfaire dans la section précédente & négligeons tous ceux où  $x$ ,  $y$  &  $z$  ont ensemble plus de deux dimensions. Ecrivons enfin  $u + x^1$  au lieu de  $x$ ,  $v + y^1$  au lieu d' $y$  &  $w + z^1$  au lieu de  $z$ , où  $u$ ,  $v$  &  $w$  signifient les valeurs de  $x$ ,  $y$  &  $z$  trouvées dans les sections précédentes, de sorte que nous ayons déjà fait évanouir ces trois expressions

$$-\frac{ddu}{dt^2} + \frac{2(m+1)du}{dt} + 3\lambda u + \frac{1}{2} \cos. 2p + \frac{1}{2} u \cos. 2p$$

$$- \frac{1}{2} v \sin. 2p - 3\lambda uu + \frac{1}{2} \lambda uv;$$

$$-\frac{ddv}{dt^2} - \frac{2(m+1)du}{dt} - \frac{1}{2} \sin. 2p - \frac{1}{2} v \cos. 2p - \frac{1}{2} u$$

$$\sin. 2p + 3\lambda uv,$$

&c

$$-\frac{ddw}{dt^2} - (1+\lambda)w + 3\lambda uw.$$

Et nous obtiendrons les équations suivantes, auxquelles il nous reste à satisfaire.

I I.

Equations qui renferment les inégalités de cette dernière Classe.

$$I. -\frac{ddx^2}{dt^2} + \frac{2(m+1)dy^2}{dt} + (3\lambda x^2 + (\frac{1}{2} \cos. 2p - 6\lambda u)x^2$$

$$- (\frac{1}{2} \sin. 2p - 3\lambda v)y^2 - v(\mu \cos. t + \frac{2}{4} \cos. (2p - t))$$

$$(2p - t) + \frac{2}{4} \cos. - 4v \cos. t. \frac{dv}{dt} - vu(\mu \cos. t + \frac{2}{4}$$

$$\cos. (2p - t) + \frac{2}{4} \cos. (2p + t)) + vv(2 \sin. t + \frac{2}{4}$$

$$\sin. (2p - t) + \frac{2}{4} \sin. (2p + t)).$$

$$II. -\frac{ddy^2}{dt^2} - \frac{2(m+1)dx^2}{dt} - (\frac{1}{2} \cos. 2p - 3\lambda u)y^2$$

$$- (\frac{1}{2} \sin. 2p - 3\lambda v)x^2 - v(2 \sin. t - \frac{2}{4} \sin. (2p - t)$$

$$- \frac{2}{4} \sin. (2p + t)) + 4v \cos. t. \frac{du}{dt} - v(\mu \cos. t$$

$$- \frac{2}{4} \cos. (2p - t) - \frac{2}{4} \cos. (2p + t)) - vu(2 \sin. t$$

$$- \frac{2}{4} \sin. (2p - t) - \frac{2}{4} \sin. (2p + t)).$$

$$3. \frac{ddz^2}{dt^2} - (1 + \lambda)z^2 + 3\lambda uz^2 + 3\lambda x^2 w + 3vw$$

$$\text{cos. } t = 0,$$

où il est à remarquer que

$$m = 12, 3688974; 2(m + 1) = 26, 7377948.$$

$$\lambda = 179, 2274177 \text{ \& } \mu = 54, 9755896:$$

Or il est à peu près  $v = 0, 0676$ .

## ARTICLE II.

*Détermination des inégalités de cette Classe qui affectent le mouvement de la Lune dans l'écliptique.*

### III.

**J**E ne considérerai donc d'abord que les deux premières équations, mais je ne m'arrêterai pas à la première approximation en posant  $u = 0$  &  $v = 0$  : je commencerai tout d'un coup par mettre pour  $u$  &  $v$  leurs valeurs principales qui sont

$$u = b \text{ cos. } 2p + c \text{ cos. } q + d \text{ cos. } (2p - q) + e \text{ cos. } (2p + q)$$

$$v = \zeta \text{ sin. } 2p + \gamma \text{ sin. } q + \delta \text{ sin. } (2p - q) + \epsilon \text{ sin. } (2p + q),$$

de sorte que

$$b = -0,00718; \zeta = +0,0102118; \gamma = -2,0127296;$$

$$d = +0,187947e; \delta = -0,411802.e;$$

$$e = -0,002705.c; \epsilon = -0,003215.c,$$

& où  $c$  marque l'excentricité de l'orbite lunaire,

## IV.

De-là je tire d'abord pour les quatre derniers termes de la première équation.

$$\text{Le coefficient de } \cos. t v \left( -\mu - \frac{2}{4} (b - \zeta) \right) = \\ - 54,93646 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (2p-t) v \left( -\frac{2}{4} - (4m-1)\zeta - \frac{1}{2}\mu b \right) \\ = - 2,54826 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (2p+t) v \left( -\frac{2}{4} - (4m+1)\zeta - \frac{1}{2}\mu b \right) \\ = - 2,56809 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (q-t) v \left( -(2n-1)\gamma - \frac{1}{2}\mu c \right. \\ \left. - \frac{2}{8} (d + e - \delta - \epsilon) \right) = + 23,18529 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (q+t) v \left( -(2n+1)\gamma - \frac{1}{2}\mu c \right. \\ \left. - \frac{2}{8} (d + e - \delta - \epsilon) \right) = + 27,21076 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (2p-q-t) v \left( -(2(m-n)-1)\delta \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mu d + \frac{2}{8} (\gamma - c) \right) = + 0,48915 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (2p-q+t) v \left( -(2(2m-n)+1)\delta \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mu d + \frac{2}{8} (\gamma - c) \right) = + 1,31275 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (2p+q-t) v \left( -(2(2m+n)-1)\epsilon \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mu c - \frac{2}{8} (c + \gamma) \right) = + 1,45475 . v.$$

$$\text{Le coefficient de } \cos. (2p+q+t) v \left( -(2(2m+n)+1)\epsilon \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\mu c - \frac{2}{8} (c + \gamma) \right) = + 1,46119 . v.$$

## V.

Ensuite les quatre derniers termes de la seconde équation donneront

Le coefficient de  $\sin. t v(-2) = -2v.$

Le coefficient de  $\sin. (2p-t) v(+\frac{2}{4}-(4m-1)(b-\frac{1}{2}\mu c))$   
 $= + 2,31735.v.$

Le coefficient de  $\sin. (2p+t) v(+\frac{2}{4}-(4m+1)b-\frac{1}{2}\mu c)$   
 $= + 2,33171.v.$

Le coefficient de  $\sin. (q-t) v(-(2n-1)c-\frac{1}{2}\mu\gamma$   
 $-\frac{2}{8}(\delta-\epsilon-d+c)) = + 30,48777.vc.$

Le coefficient de  $\sin. (q+t) v(-(2n+1)c-\frac{1}{2}\mu\gamma$   
 $-\frac{2}{8}(\delta-\epsilon-d+c)) = + 28,48777.vc.$

Le coefficient de  $\sin. (2p-q-t) v(-(2(2m-n)-1)d$   
 $-\frac{1}{2}\mu\delta-\frac{2}{8}(\gamma-c)) = + 10,58083.vc.$

Le coefficient de  $\sin. (2p-q+t) v(-(2(2m-n)+1)d$   
 $-\frac{1}{2}\mu\delta-\frac{2}{8}(\gamma-c)) = + 10,20493.vc.$

Le coefficient de  $\sin. (2p+q-t) v(-(2(2m+n)-1)c$   
 $-\frac{1}{2}\mu\epsilon+\frac{2}{8}(\gamma+c)) = -0,84811.vc.$

Le coefficient de  $\sin. (2p+q+t) v(-(2(2m+n)+1)c$   
 $-\frac{1}{2}\mu\epsilon+\frac{2}{8}(\gamma+c)) = -0,84270.vc.$

## V I.

On voit donc par-là qu'il faut donner à  $x^I$  &  $y^I$  les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} x^I &= a^I v \cos. t + b^I v \cos. (2p-t) + c^I v c \cos. (q-t) \\ &+ d^I v c \cos. (2p-q-t) + e^I v c \cos. (2p+q-t) \\ &+ b^{II} v \cos. (2p+t) + c^{II} v c \cos. (q+t) + d^{II} v c \\ &\cos. (2p-q+t) + e^{II} v c \cos. (2p+q+t). \end{aligned}$$

$y^I =$

$$y^I = \alpha^I v \sin. t + \zeta^I v \sin. (2p - t) + \gamma^I v c \sin. (q - t) \\ + \delta^I v c \sin. (2p - q - t) + \epsilon^I v c \sin. (2p + q - t) \\ + \beta^{II} v \sin. (2p + t) + \gamma^{II} v c \sin. (q + t) \delta^{II} v c \\ \sin. (2p - q + t) + \epsilon^{II} v c \sin. (2p + q + t).$$

V I I.

En substituant ces valeurs dans les équations différen-  
tio-différentielles pour  $x^I$  &  $y^I$ , on obtiendra pour les cinq  
premier termes de la première équation.

Coefficient de *cosf.*  $t (1 + 3\lambda) \alpha^I v + 2(m + 1) \alpha^I v \\ - \frac{1}{2} (\sigma \lambda b - \frac{1}{2}) (b^I + b^{II}) v + \frac{1}{2} (3\lambda \zeta - \frac{1}{2}) (\zeta^I + \zeta^{II}) v.$

Coefficient de *cosf.*  $(2p - t) ((2m - 1)^2 + 3\lambda) b^I v \\ + 2(m + 1) (2m - 1) \zeta^I v - \frac{1}{2} (\sigma \lambda b - \frac{1}{2}) \alpha^I v \\ + \frac{1}{2} (3\lambda \zeta - \frac{1}{2}) \alpha^I v.$

Coefficient de *cosf.*  $(2p + t) ((2m + 1)^2 + 3\lambda) b^{II} v \\ + 2(m + 1) (2m + 1) \zeta^{II} v - \frac{1}{2} (\sigma \lambda b - \frac{1}{2}) \alpha^I v \\ - \frac{1}{2} (3\lambda \zeta - \frac{1}{2}) \alpha^I v.$

Coefficient de *cosf.*  $(q - t) ((n - 1)^2 + 3\lambda) c^I v c \\ + 2(m + 1) (n - 1) \gamma^I v c - \frac{1}{2} (\sigma \lambda b - \frac{1}{2}) (d^{II} + e^I) v c \\ + \frac{1}{2} (3\lambda \zeta - \frac{1}{2}) (\delta^I + \epsilon^I) v c - 3\lambda c. \alpha^I v \\ + \frac{1}{2} \lambda \gamma. \alpha^I v - 3\lambda d. b^I v + \frac{1}{2} \lambda \delta. \zeta^I v - 3\lambda e. b^{II} v \\ + \frac{1}{2} \lambda \epsilon. \zeta^{II} v.$

Coefficient de *cosf.*  $(q + t) ((n + 1)^2 + 3\lambda) c^{II} v c \\ + 2(m + 1) (n + 1) \gamma^{II} v c - \frac{1}{2} (\sigma \lambda b - \frac{1}{2}) (d^I + e^{II}) v c \\ + \frac{1}{2} (3\lambda \zeta - \frac{1}{2}) (\delta^I + \epsilon^{II}) v c - 3\lambda c. \alpha^I v - \frac{1}{2} \lambda \gamma. \alpha^I v \\ - 3\lambda d. b^{II} v + \frac{1}{2} \lambda \delta. \zeta^{II} v - 3\lambda e. b^I v + \frac{1}{2} \lambda \epsilon. \zeta v.$

Le coefficient de *cos.*  $(2p - q - t) ((2m - n - 1)^2 + 3\lambda) a^I . v c + 2(m + 1) (2m - n - 1) \delta^I . v c - \frac{1}{2} (6\lambda b - \frac{3}{2}) c^{II} . v c + \frac{1}{2} (3\lambda \mathcal{C} - \frac{3}{2}) \gamma^{II} . v c - 3\lambda d . a^I v + \frac{3}{2} \lambda \delta . a^I v - 3\lambda c . b^I v + \frac{1}{2} \lambda \gamma . \mathcal{C}^I v$

Coefficient de *cos.*  $(2p - q + t) ((2m - n + 1)^2 + 3\lambda) a^{II} . v c + 2(m + 1) (2m - n + 1) \delta^{II} v c - \frac{1}{2} (6\lambda b - \frac{3}{2}) c^I . v c + \frac{1}{2} (3\lambda \mathcal{C} - \frac{3}{2}) \gamma^I . v c - 3\lambda d . a^I v - \frac{3}{2} \lambda \delta . a^I v - 3\lambda c . b^{II} v + \frac{3}{2} \lambda \gamma . \mathcal{C}^{II} v .$

Coefficient de *cos.*  $(2p + q - t) ((2m + n - 1)^2 + 3\lambda) e^I . v c + 2(m + 1) (2m + n - 1) e^I . v c - \frac{1}{2} (6\lambda b - \frac{3}{2}) c^I . v c - \frac{1}{2} (3\lambda \mathcal{C} - \frac{3}{2}) \gamma^I . v c - 3\lambda e . a^I v + \frac{3}{2} \lambda e a^I v - 3\lambda c . b^I v - \frac{3}{2} \lambda \gamma . \mathcal{C}^I v$

Coefficient de *cos.*  $(2p + q + t) ((2m + n + 1)^2 + 3\lambda) e^{II} . v c + 2(m + 1) (2m + n + 1) e^{II} . v c - \frac{1}{2} (6\lambda b - \frac{3}{2}) c^{II} . v c - \frac{1}{2} (3\lambda \mathcal{C} - \frac{3}{2}) \gamma^{II} . v c - 3\lambda e . a^I v - \frac{3}{2} \lambda e . a^I v - 3\lambda c . b^{II} v - \frac{3}{2} \lambda \gamma . \mathcal{C}^{II} v .$

## V I I I.

Ensuite pour les quatre premiers termes de la seconde équation on trouvera

Coefficient de *sin.*  $t a^I . v + 2(m + 1) a^I . v - \frac{1}{2} (3\lambda b - \frac{3}{2}) (\mathcal{C}^I - \mathcal{C}^{II}) + \frac{1}{2} (3\lambda \mathcal{C} - \frac{3}{2}) (b^I - b^{II}) .$

Coefficient de *sin.*  $(2p - t) (2m - 1) . \mathcal{C}^I . v + 2(m + 1) (2m - 1) b^I . v - \frac{1}{2} (3\lambda b - \frac{3}{2}) a^I . v + \frac{1}{2} (3\lambda \mathcal{C} - \frac{3}{2}) a^I . v .$

Coefficient de *sin.*  $(2p + t) (2m + 1)^2 \mathcal{C}^{II} . v + 2(m + 1) (2m + 1) b^{II} . v + \frac{1}{2} (3\lambda b - \frac{3}{2}) a^I . v + \frac{1}{2} (3\lambda \mathcal{C} - \frac{3}{2}) a^I . v$



Coefficient de  $\sin. (q - \epsilon) (n - 1)^2 \gamma^I. v c + 2(m + 1)$   
 $(n - 1) c^I. v c - \frac{1}{2} (3 \lambda b - \frac{1}{2}) (d^{II} - \epsilon^I). v c$   
 $+ \frac{1}{2} (3 \lambda \mathcal{C} - \frac{1}{2}) (a^{II} - e^I). v c - \frac{1}{2} \lambda c. a^I v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda \gamma. a^I v + \frac{1}{2} \lambda d. \mathcal{C}^I v - \frac{1}{2} \lambda \delta. b^I v - \frac{1}{2} \lambda e. \mathcal{C}^{II} v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda \epsilon. b^{II} v.$

Coefficient de  $\sin. (q + \epsilon) (n + 1)^2 \gamma^{II}. v c + 2(m + 1)$   
 $(n + 1) c^{II}. v c - \frac{1}{2} (3 \lambda b - \frac{1}{2}) (d^I - \epsilon^{II}). v c$   
 $+ \frac{1}{2} (3 \lambda \mathcal{C} - \frac{1}{2}) (d^I - e^{II}). v c + \frac{1}{2} \lambda c. a^I v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda \gamma. a^I v + \frac{1}{2} \lambda d. \mathcal{C}^{II} v - \frac{1}{2} \lambda \delta. b^{II} v - \frac{1}{2} \lambda e \mathcal{C}^I v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda \epsilon. b^I v.$

Coefficient de  $\sin. (2p - q - \epsilon) (2m - n - 1)^2 \delta^I. v c$   
 $+ 2(m + 1) (2m - n - 1) d^I. v c - \frac{1}{2} (3 \lambda b - \frac{1}{2}) \gamma^{II}. v c$   
 $+ \frac{1}{2} (3 \lambda \mathcal{C} - \frac{1}{2}) c^{II}. v c - \frac{1}{2} \lambda d. a^I v + \frac{1}{2} \lambda \delta. a^I v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda c. \mathcal{C}^I v - \frac{1}{2} \lambda \gamma. b^I v.$

Coefficient de  $\sin. (2p - q + \epsilon) (2m - n + 1)^2 \delta^{II}. v c$   
 $+ 2(m + 1) (2m - n + 1) d^{II}. v c - \frac{1}{2} (3 \lambda b - \frac{1}{2}) \gamma^I. v c$   
 $+ \frac{1}{2} (3 \lambda \mathcal{C} - \frac{1}{2}) c^I. v c + \frac{1}{2} \lambda d. a^I v + \frac{1}{2} \lambda \delta. a^I v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda c. \mathcal{C}^{II} v - \frac{1}{2} \lambda \gamma. b^{II} v.$

Coefficient de  $\sin. (2p + q - \epsilon) (2m + n - 1)^2 \epsilon^I. v c$   
 $+ 2(m + 1) (2m + n - 1) e^I. v c + \frac{1}{2} (3 \lambda b - \frac{1}{2}) \gamma^I v c$   
 $+ \frac{1}{2} (3 \lambda \mathcal{C} - \frac{1}{2}) c^I. v c - \frac{1}{2} \lambda e. a^I v + \frac{1}{2} \lambda \epsilon. a^I v + \frac{1}{2} \lambda c. \mathcal{C}^I v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda \gamma. b^I v.$

Coefficient de  $\sin. (2p + q + \epsilon) (2m + n + 1)^2 \epsilon^{II}. v c$   
 $+ 2(m + 1) (2m + n + 1) e^{II}. v c + \frac{1}{2} (3 \lambda b - \frac{1}{2}) \gamma^{II}. v c$   
 $+ \frac{1}{2} (3 \lambda \mathcal{C} - \frac{1}{2}) c^{II}. v c + \frac{1}{2} \lambda e. a^I v + \frac{1}{2} \lambda \epsilon. a^I v$   
 $+ \frac{1}{2} \lambda c. \mathcal{C}^{II} v + \frac{1}{2} \lambda \gamma. b^{II} v.$

Où il convient de remarquer que

$$\frac{1}{2}(6\lambda b - \frac{1}{2}) = -4,6105; \frac{1}{2}(3\lambda b - \frac{1}{2}) = -2,6802;$$

$$\frac{1}{2}(3\lambda c - \frac{1}{2}) = +1,9953.$$

$$3\lambda b = -3,8605; 3\lambda c = +537,6882.c;$$

$$3\lambda d = +101,0558.c; 3\lambda e = -4544.c;$$

$$3\lambda f = +5,4907; 3\lambda g = -1082,2087.c;$$

$$3\lambda h = -221,4187.c; 3\lambda i = -1,7286.c.$$

## I X.

*Détermination des inégalités qui ne dépendent que de la simple excentricité de la Terre. v.*

Ces inégalités dépendront des angles  $t$ ,  $2p - t$ , &  $2p + t$ , & seront déterminées par les six équations suivantes :

$$\text{I. } 538,6822 . a^I + 26,7378 . a^I - 54,93646$$

$$+ 4,6105 (b^I + b^{II}) + 1,9953 (c^I + c^{II}) = 0.$$

$$\text{II. } 26,7378 . a^I + 1,0000 . a^I - 2,00000$$

$$+ 1,9953 (b^I - b^{II}) + 2,6805 (c^I - c^{II}) = 0.$$

$$\text{III. } 1101,1651 . b^I + 634,6963 . c^I - 2,54826$$

$$+ 4,6105 . a^I + 1,9953 . a^I = 0.$$

$$\text{IV. } 634,6963 . b^I + 563,4829 . c^I + 2,31735$$

$$+ 1,9953 . a^I + 2,6805 . a^I = 0.$$

$$\text{V. } 1200,1163 . b^{II} + 688,1718 . c^{II} - 2,56809$$

$$+ 4,6105 . a^I - 1,9953 . a^I = 0.$$

$$\text{VI. } 688,1718 . b^{II} + 662,4341 . c^{II} + 2,33171$$

$$+ 1,9953 . a^I - 2,6805 . a^I = 0.$$

D'où l'on trouvera :

$$a^I = +0,00148; b^I = +0,01868;$$

$$b^{II} = +0,00699.$$

$$a^I = +2,02314; c^I = -0,03476;$$

$$c^{II} = -0,00264.$$

Qu'on ne soit point surpris de ce que le coefficient  $a^I$ , qui est celui de  $\sin. t$ , soit ici trouvé si grand; par ce que j'ai remarqué au § 26 de la première section, il est évident que l'inégalité qui dépend de l'angle  $t$ , ou bien de l'anomalie du Soleil, doit nécessairement contenir aussi l'équation du centre du Soleil, qui est, comme on le peut voir par les Tables du Soleil, de  $1^\circ 55' 15''$  lorsqu'elle est la plus grande.

### X.

*Détermination des inégalités qui dépendent du produit des deux excentricités de l'orbite de la Terre & de la Lune v c.*

Ces inégalités dépendront des angles

$q-t, q+t, 2p-q-t, 2p-q+t, 2p+q-t$  &  $2p+q+t$ , & seront déterminées par les douze équations suivantes, où j'ai déjà pour  $a^I, \alpha^I, b^I, c^I, b^{II},$  &  $c^{II}$  substitué leurs valeurs :

$$\text{I. } 687,8896 \cdot c^I + 327,6961 \cdot \gamma^I + 4,6105 (d^{II} + e^I) \\ + 1,9953 (d^{II} + e^I) - 1070,3727 = 0.$$

$$\text{II. } 327,6961 \cdot c^I + 150,2074 \cdot \gamma^I + 1,9953 (d^{II} - e^{II}) \\ + 2,6802 (d^{II} - e^I) - 513,9141 = 0.$$

$$\text{III. } 740,9133 \cdot c^{\text{II}} + 381,1716 \cdot \gamma^{\text{II}} + 4,6105(d^{\text{I}} + e^{\text{II}}) \\ + 1,9953(d^{\text{I}} + e^{\text{II}}) + 1120,7892 = 0.$$

$$\text{IV. } 381,1716 \cdot c^{\text{II}} + 203,2310 \cdot \gamma^{\text{II}} + 1,9953(d^{\text{I}} - e^{\text{II}}) \\ + 2,6802(d^{\text{I}} - e^{\text{II}}) + 572,4573 = 0.$$

$$\text{V. } 647,5521 \cdot d^{\text{I}} + 280,2624 \cdot \delta^{\text{I}} + 4,6105 \cdot c^{\text{II}} \\ + 1,9953 \cdot \gamma^{\text{II}} - 214,8829 = 0.$$

$$\text{VI. } 280,2624 \cdot d^{\text{I}} + 109,8698 \cdot \delta^{\text{I}} + 1,9953 \cdot c^{\text{II}} \\ + 2,6802 \cdot \gamma^{\text{II}} - 91,0404 = 0.$$

$$\text{VII. } 693,4796 \cdot d^{\text{II}} + 333,7380 \cdot \delta^{\text{II}} + 4,6105 \cdot c^{\text{I}} \\ + 1,9953 \cdot \gamma^{\text{I}} + 222,8099 = 0.$$

$$\text{VIII. } 333,7380 \cdot d^{\text{II}} + 155,7974 \cdot \delta^{\text{II}} + 1,9953 \cdot c^{\text{I}} \\ + 2,6802 \cdot \gamma^{\text{I}} + 115,3429 = 0.$$

$$\text{IX. } 1906,2157 \cdot e^{\text{I}} + 989,1299 \cdot \varepsilon^{\text{I}} + 4,6105 \cdot c^{\text{I}} \\ - 1,9953 \cdot \gamma^{\text{I}} - 29,1470 = 0.$$

$$\text{X. } 989,1299 \cdot e^{\text{I}} + 1368,5335 \cdot \varepsilon^{\text{I}} + 1,9953 \cdot c^{\text{I}} \\ - 2,6802 \cdot \gamma^{\text{I}} - 36,8205 = 0.$$

$$\text{XI. } 2058,1906 \cdot e^{\text{II}} + 1042,6055 \cdot \varepsilon^{\text{II}} + 4,6105 \cdot c^{\text{II}} \\ - 1,9953 \cdot \gamma^{\text{II}} - 1,9787 = 0.$$

$$\text{XII. } 1042,6055 \cdot e^{\text{II}} + 1520,5084 \cdot \varepsilon^{\text{II}} + 1,9953 \cdot c^{\text{II}} \\ - 2,6802 \cdot \gamma^{\text{II}} - 12,7796 = 0.$$

D'où l'on détermine

$$c^{\text{I}} = +1,6566; c^{\text{II}} = -1,7983; d^{\text{I}} = +0,2302; \\ d^{\text{II}} = -1,0772; e^{\text{I}} = -0,0067; e^{\text{II}} = +0,0045. \\ \gamma^{\text{I}} = -0,2056; \gamma^{\text{II}} = +0,5509; \delta^{\text{I}} = +0,2604; \\ \delta^{\text{II}} = +1,5491; \varepsilon^{\text{I}} = +0,0345; \varepsilon^{\text{II}} = +0,0019,$$

## X I.

Les inégalités de cette classe se réduiront donc aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} x^1 = & +0,00148 . v . \cos . t + 0,01868 . v . \cos . (2p-t) \\ & + 0,00699 . v . \cos . (2p+t) + 1,6566 . v c . \cos . (q-t) \\ & - 1,7983 . v c . \cos . (q+t) + 0,2302 . v c . \cos . (2p-q-t) \\ & - 1,0772 . v c . \cos . (2p-q+t) - 0,0067 . v c . \\ & \cos . (2p+q-t) + 0,0045 . v c . \cos . (2p+q+t) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^1 = & + 2,02314 . v . \sin . t - 0,03476 . \sin . (2p-t) \\ & - 0,00264 . v . \sin . (2p+t) - 0,2056 . v c . \sin . (q-t) \\ & + 0,5509 . v c . \sin . (q+t) + 0,2604 . v c . \sin . (2p-q-t) \\ & + 1,5491 . v c . \sin . (2p-q+t) + 0,0345 . v c . \\ & \sin . (2p+q-t) + 0,0019 . v c . \sin . (2p+q+t) . \end{aligned}$$

## ARTICLE III.

*Détermination des inégalités de cette classe , qui affectent la latitude de la Lune.*

## X I I.

CES inégalités sont contenues dans notre troisième équation :

$$-\frac{dd\xi^2}{dt^2} - (1+\lambda)z^1 + 3\lambda uz^1 + 3\lambda x^1 w + 3v\omega \cos . t = 0 ;$$

Je me contenterai ici de mettre

$$u = b . \cos . 2p ; w = \omega \sin . r$$

&

$$x^I = a^I v \cos. t + b^I v \cos. (2p - t) + b^{II} v \cos. (2p + t)$$

de sorte que

$$b = -0,00718; b^I = +0,01868;$$

$$b^{II} = +0,00699; a^I = +0,00148.$$

De-là les deux derniers termes de notre équation donneront :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1 + \lambda a^I) v \omega \cdot \sin. (r - t) + \frac{1}{2} (1 + \lambda a^I) v \omega \cdot \sin. (r + t) \\ & - \frac{1}{2} \lambda b^I v \omega \cdot \sin. (2p - r - t) + \frac{1}{2} \lambda b^I v \omega \cdot \sin. (2p + r - t) \\ & - \frac{1}{2} \lambda b^{II} v \omega \cdot \sin. (2p - r + t) \\ & + \frac{1}{2} \lambda b^{II} v \omega \cdot \sin. (2p + r + t). \end{aligned}$$

### X I I I.

Soit donc :

$$\begin{aligned} z^I = & A' v \omega \sin. (r - t) + B' v \omega \sin. (r + t) \\ & + C' v \omega \sin. (2p - r - t) + D' v \omega \sin. (2p + r - t) \\ & + E' v \omega \sin. (2p - r + t) + F' v \omega \sin. (2p + r + t). \end{aligned}$$

Et nous obtiendrons les six déterminations suivantes :

$$\text{I. } ((l-1)^2 - \lambda - 1) A' + \frac{1}{2} \lambda b (D' - E') + \frac{1}{2} (1 + \lambda a^I) = 0.$$

$$\text{II. } ((l+1)^2 - \lambda - 1) B' - \frac{1}{2} \lambda b (C' - F') + \frac{1}{2} (1 + \lambda a^I) = 0.$$

$$\text{III. } ((2m-l-1)^2 - \lambda - 1) C' - \frac{1}{2} \lambda b, B' - \frac{1}{2} \lambda b^I = 0.$$

$$\text{IV. } ((2m+l-1)^2 - \lambda - 1) D' + \frac{1}{2} \lambda b A' + \frac{1}{2} \lambda b^I = 0.$$

$$\text{V. } ((2m-l+1)^2 - \lambda - 1) E' - \frac{1}{2} \lambda b A' - \frac{1}{2} \lambda b^{II} = 0.$$

$$\text{VI. } ((2m+l+1)^2 - \lambda - 1) F' + \frac{1}{2} \lambda b B' + \frac{1}{2} \lambda b^{II} = 0.$$

D'où l'on trouvera :

$$A' = +0,07747; B' = -0,06327; C' = -0,06967;$$

$$D' = +0,00406; E' = +0,06055; F' = -0,00148.$$

Par

Par conséquent

$$\begin{aligned} z^1 = & +0,07747 \cdot v \omega \cdot \sin. (r - t) - 0,06327 \cdot v \omega \cdot \\ & \sin. (r + t) - 0,06967 \cdot v \omega \cdot \sin. (2p - r - t) \\ & + 0,00406 \cdot v \omega \cdot \sin. (2p + r - t) + 0,06055 \cdot v \omega \cdot \\ & \sin. (2p - r + t) - 0,00148 \cdot v \omega \cdot \sin. (2p + r + t). \end{aligned}$$

## C O N C L U S I O N.

*Trouver le lieu de la Lune pour un tems quelconque.*

Qu'on cherche pour ce tems proposé, par les Tables des moyens mouvemens du Soleil & de la Lune.

1. L'Anomalie moyenne du Soleil . . . . .  $t$ .
2. L'Élongation moyenne de la Lune à l'op-  
position du Soleil . . . . .  $p$ .
3. L'Anomalie moyenne de la Lune . . . . .  $q$ .
4. L'Argument de latitude de la Lune . . . . .  $r$ .

Qu'on en forme les angles suivans :

$$\begin{aligned} & 2p; 3p; 4p; 2p-t; 2p+t; 2q; 3q; q-t; q+t; p-q; \\ & p+q; 2p-q; 2p+q; 3p-q; 3p+q; 4p-q; 4p+q; \\ & 2p-2q; 2p+2q; 2p-q-t; 2p-q+t; 2p+q-t; \\ & 2p+q+t; 2; r-t; r+t; 2p-r; 2p+r; p-r; \\ & 2p-2r; p+r; 2p+2r; 2p-r-t; 2p-r+t; \\ & 2p+r-t; 2p+r+t; q-r; q+r; 2q-r; 2q+r; \\ & 2p-q-r; 2p-q+r; 2p-2q-r; 2p-2q+r; \\ & 2p-3q; 2p+3q; \end{aligned}$$

Et nous obtiendrons pour nos trois coordonnées X, Y, Z les valeurs suivantes :

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

M

$$\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= 1,0000240 - 0,53931 . cc - 0,25012 . \omega\omega \\
&- 0,11411 . a . \text{cos. } p \\
&- (0,0071802 + 0,21986 . cc - 0,01310 . \omega\omega) \text{cos. } 2p \\
&+ 0,00300 . a . \text{cos. } 3p \\
&+ 0,0000061 . \text{cos. } 4p. \\
&\mp 0,00148 . v . \text{cos. } t \\
&+ 0,01868 . v . \text{cos. } (2p - t) \\
&\mp 0,00699 . v . \text{cos. } (2p + t) \\
&+ (1 + 0,8899 . cc) c . \text{cos. } q \\
&+ 0,50962 . cc . \text{cos. } 2q \\
&- 0,3832 . c^3 . \text{cos. } 3q \\
&+ 1,6566 . vc . \text{cos. } (q - t) \\
&- 1,7983 . vc . \text{cos. } (q + t) \\
&\mp 0,0467 . ac . \text{cos. } (p - q) \\
&- 0,20629 . cc . \text{cos. } (2p - 2q) \\
&- 0,1213 . ac . \text{cos. } (p + q) \\
&+ 0,00468 . cc . \text{cos. } (2p + 2q) \\
&+ (0,187947 - 0,5166 . cc) c . \text{cos. } (2p - q) \\
&- (0,002705 + 0,2455 . cc) c . \text{cos. } (2p + q) \\
&+ 0,1782 . c^3 . \text{cos. } (2p - 3q) \\
&+ 0,0011 . c^3 . \text{cos. } (2p + 3q) \\
&+ 0,0168 . ac . \text{cos. } (3p - q) \\
&- 0,0001 . ac . \text{cos. } (3p + q) \\
&- 0,000512 . c . \text{cos. } (4p - q)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - 0,000012 . c . \cos . (4p + q) \\
 & + 0,2302 . vc . \cos . (2p - q - t) \\
 & - 1,0772 . ac . \cos . (2p - q + t) \\
 & - 0,0067 . vc . \cos . (2p + q - t) \\
 & + 0,0045 . vc . \cos . (2p + q + t) \\
 & + 0,24723 . \omega \omega . \cos . 2r \\
 & - 0,01330 . \omega \omega . \cos . (2p - 2r) \\
 & + 0,00042 . \omega \omega . \cos . (2p + 2r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{Y}{e} = & + 0,24168 . a . \sin . p \\
 & + (0,0102118 + 0,09768 . cc - 0,01804 . \omega \omega) \sin . 2p \\
 & - 0,00287 . a \sin . 3p \\
 & + 0,0000057 . \sin . 4p \\
 & + 2,02314 . v . \sin . t \\
 & - 0,03476 . v . \sin . (2p - t) \\
 & - 0,00264 . v . \sin . (2p + t) \\
 & - (2,012729 + 0,4207 . cc) c . \sin . q \\
 & + 0,25237 . cc . \sin . 2q \\
 & - 0,2996 . c^3 . \sin . 3q \\
 & - 0,2056 . vc . \sin . (q - t) \\
 & + 0,5509 . vc . \sin . (q + t) \\
 & - 2,6343 . ac . \sin . (p - q) \\
 & + 0,26228 . cc . \sin . (2p - 2q) \\
 & - 0,0554 . ac \sin . (p + q)
 \end{aligned}$$

M ij

$$\begin{aligned}
& \mp 0,00464 . cc . \sin . (2p + 2q) \\
& - (0,411802 - 1,3000 . cc . \sin . (2p - q) \\
& - (0,003215 + 0,1960 . cc) c . \sin . (2p + q) \\
& - 0,2850 . c^3 . \sin . (2p - 3q) \\
& + 0,0007 . c^3 . \sin . (2p + 3q) \\
& - 0,0917 . ac . \sin . (3p - q) \\
& \mp 0,0014 . ac . \sin . (3p + q) \\
& - 0,000728 . c . \sin . (4p - q) \\
& - 0,000025 . c . \sin . (4p + q) \\
& + 0,2604 . vc . \sin . (2p - q - t) \\
& \mp 1,5491 . vc . \sin . (2p - q + t) \\
& + 0,0345 . vc . \sin . (2p + q - t) \\
& + 0,0019 . vc . \sin . (2p + q + t) \\
& - 0,24635 . \omega \omega . \sin . 2r \\
& \mp 0,02334 . \omega \omega . \sin . (2p - 2r) \\
& - 0,00039 . \omega \omega . \sin . (2p + 2r)
\end{aligned}$$

$$\frac{Z}{a} = \omega \sin . r$$

$$\begin{aligned}
& + 0,1803 . a\omega . \sin . (p - r) \\
& + 0,0656 . a\omega . \sin . (p + r) \\
& \mp (0,036484 + 0,3498 . cc) \omega \sin . (2p - r) \\
& + (0,001877 + 0,2102 . cc) \omega \sin . (2p + r) \\
& - 1,48582 . c\omega . \sin . (q - r) \\
& - 0,51163 . c\omega . \sin . (q + r) \\
& - 0,22643 . c\omega . \sin . (2p - q - r)
\end{aligned}$$

$$- 0,12553 . c \omega . \sin . (2p - q + r)$$

$$+ 0,1195 . cc \omega . \sin . (2q - r)$$

$$+ 0,3850 . cc \omega . \sin . (2q + r)$$

$$+ 0,1522 . cc \omega . \sin . (2p - 2q - r)$$

$$- 0,0614 . cc \omega . \sin . (2p - 2q + r)$$

$$+ 0,07747 . v \omega . \sin . (r - t)$$

$$- 0,06327 . v \omega . \sin . (r + t)$$

$$- 0,06967 . v \omega . \sin . (2p - r - t)$$

$$+ 0,06055 . v \omega . \sin . (2p - r + t)$$

$$+ 0,00406 . v \omega . \sin . (2p + r - t)$$

$$- 0,00148 . v \omega . \sin . (2p + r + t)$$

où  $a$  marque la moyenne distance de la Lune au centre de la Terre dans l'écliptique ;

$c$ . L'excentricité de l'orbite de la Lune.

$v$ . L'excentricité de l'orbite du Soleil ou de la Terre.

&

$\omega$ . La tangente de la plus grande latitude moyenne de la Lune.

De ces quatre Lettres  $a$ ,  $c$ ,  $\omega$  &  $v$ , on ne connoît ici que la seule  $v$ , les autres trois doivent être déterminées par la comparaison de ces formules avec les observations ; outre cela, cette comparaison fera aussi connoître ce qu'il faudra ajouter aux angles  $p$ ,  $q$  &  $r$  ; de sorte qu'il y aura en tout six constantes arbitraires à déterminer, ce qui constitue le caractère d'une intégrale complete des trois équations différentielles du second degré.

Or ayant trouvé les valeurs des trois coordonnées, on

en connoîtra par ce que j'ai dit au § 26 & suivans de la première Section, tout ce qu'il faut pour déterminer le lieu de la Lune.

Il me semble avoir pleinement satisfait à la Question proposée par L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES. La nouvelle Théorie de la Lune, que j'ai l'honneur de lui présenter ici, fixe absolument toutes les équations de ce Satellite; il n'y en a aucune qui soit restée incertaine, & maintenant il paroît bien constaté, que l'équation séculaire du mouvement de la Lune ne sauroit être produite par les forces de l'attraction.

*Errantemque canit Lunam. VIRG;*

---

Cette Pièce est de M. E U L E R.

---

*F I N,*

*E S S A I*

D'UNE NOUVELLE MÉTHODE  
*POUR RÉSOUDRE LE PROBLÈME*  
DES TROIS CORPS,

*Qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences  
en 1772.*

---

Par M. DE LA GRANGE.

---

*Prix de l'Académie, Tome IX. 1772:*

**A**

1

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

530 SOUTH EAST ASIAN AVENUE

CHICAGO, ILLINOIS 60607

---

U.S. DEPARTMENT OF ENERGY



## A V E R T I S S E M E N T.

**C**ES recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps, d'autres élémens que les distances entre les trois Corps c'est-à-dire le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le tems; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps, par rapport à un plan fixe quelconque. On verra dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second sur-tout demande une Analyse délicate & assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je rassemble les principales formules que j'ai trouvées, & qui renferment la solution du Problème des trois Corps pris dans toute sa généralité.

LE Chapitre second a pour objet d'examiner comment , & dans quels cas les trois Corps pourroient se mouvoir ; enforte que leurs distances fussent toujours constantes , ou gardassent au moins entre elles des rapports constants : je trouve que ces conditions ne peuvent avoir lieu que dans deux cas ; l'un , lorsque les trois Corps sont rangés dans une même ligne droite , & l'autre , lorsqu'ils forment un triangle équilatéral ; alors , chacun des trois Corps décrit autour des deux autres , des cercles ou des sections coniques , comme s'il n'y avoit que deux Corps. Cette recherche n'est à la vérité que de pure curiosité ; mais j'ai cru qu'elle ne seroit pas déplacée dans un Ouvrage qui roule principalement sur le Problème des trois Corps , envisagé dans toute son étendue.

DANS le troisième Chapitre , je suppose que la distance de l'un des trois Corps aux deux autres soit fort grande , & j'applique la solution générale du Chapitre premier à cette hypothèse , qui est , comme l'on sçait , celle de la Terre , de la Lune & du Soleil.

ENFIN , dans le quatrième Chapitre , je



AVERTISSEMENT. v

*traite en particulier de la Théorie de la Lune ; j'y donne les formules qui renferment cette Théorie , & je fais voir par un léger essai de calcul , comment on doit se servir de ces formules pour en déduire les inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre.*

*LE défaut de tems , & d'autres occupations indispensables , ne m'ont pas permis d'entrer là-dessus dans tout le détail nécessaire pour répondre d'une manière convenable aux principaux Points de la Question proposée par l'Académie : aussi ai-je d'abord hésité si je lui présenterois ces Recherches pour le Concours ; & je ne m'y suis déterminé que par l'espérance que cette illustre Compagnie trouvera peut-être ma Méthode , pour résoudre le Problème des trois Corps , digne de quelque attention , tant par sa nouveauté & sa singularité , que par les difficultés considérables de calcul qu'elle renferme.*

*SI l'Académie daigne honorer mon travail de son suffrage , ce sera un puissant motif pour m'engager à le perfectionner , & je ne déses-*

*père pas de pouvoir tirer de ma Méthode une  
Théorie de la Lune aussi complète qu'on puisse  
le demander, dans l'état d'imperfection où est  
encore l'Analyse.*



# ESSAI

S U R

## LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

---

*Juvat integros accedere Fontes.*

LUCR.

---

### CHAPITRE PREMIER.

*Formules générales pour la solution du Problème  
des trois Corps.*

I.

**S**

SOIENT  $A, B, C$  les masses des trois corps qui s'attirent mutuellement en raison directe des masses, & en raison inverse du carré des distances; soient nommées de plus  $x, y, z$  les coordonnées rectangles de l'orbite du corps  $B$

autour du corps  $A$ ,  $x^I, y^I, z^I$  les coordonnées rectangles de l'orbite du corps  $C$  autour du même corps  $A$ , coordonnées qu'on suppose toujours parallèles à trois lignes fixes & perpendiculaires entre elles; enfin soient  $r, r^I, r^{II}$  les distances entre les corps  $A$  &  $B$ ,  $A$  &  $C$ ,  $B$  &  $C$ , enfort que l'on ait

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r^I = \sqrt{x^{I2} + y^{I2} + z^{I2}}$$

$$r^{II} = \sqrt{(x^I - x)^2 + (y^I - y)^2 + (z^I - z)^2}$$

On aura, comme l'on fait, en prenant l'élément du tems  $dt$  constant, les six équations suivantes.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II3}} \right) x + C \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}} \right) x^I &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \left( \frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II3}} \right) y + C \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}} \right) y^I &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \left( \frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{II3}} \right) z + C \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}} \right) z^I &= 0 \end{aligned} \right\} (A)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x^I}{dt^2} + \left( \frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{II3}} \right) x^I + B \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}} \right) x &= 0 \\ \frac{d^2y^I}{dt^2} + \left( \frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{II3}} \right) y^I + B \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}} \right) y &= 0 \\ \frac{d^2z^I}{dt^2} + \left( \frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{II3}} \right) z^I + B \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II3}} \right) z &= 0 \end{aligned} \right\} (B)$$

à l'aide desquelles on pourra déterminer les orbites relatives des corps  $B$  &  $C$  autour du corps  $A$ .

Si on fait encore

$$x^I - x = x^{II}, y^I - y = y^{II}, z^I - z = z^{II},$$

enforte

enforte que  $x^{\text{II}}$ ,  $y^{\text{II}}$ ,  $z^{\text{II}}$  soient les coordonnées rectanglées de l'orbite du corps  $C$  autour de  $B$ , on aura

$$r^{\text{II}} = \sqrt{x^{\text{II}2} + y^{\text{II}2} + z^{\text{II}2}}$$

& retranchant respectivement les trois premières équations des trois dernières, on aura ces trois ci :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^{\text{II}}}{dt^2} + \left( \frac{B+C}{r^{\text{II}3} } + \frac{A}{r^3} \right) x^{\text{II}} + A \left( \frac{1}{r^{\text{II}3} } - \frac{1}{r^3} \right) x^{\text{I}} &= 0 \\ \frac{d^2 y^{\text{II}}}{dt^2} + \left( \frac{B+C}{r^{\text{II}3} } + \frac{A}{r^3} \right) y^{\text{II}} + A \left( \frac{1}{r^{\text{II}3} } - \frac{1}{r^3} \right) y^{\text{I}} &= 0 \\ \frac{d^2 z^{\text{II}}}{dt^2} + \left( \frac{B+C}{r^{\text{II}3} } + \frac{A}{r^3} \right) z^{\text{II}} + A \left( \frac{1}{r^{\text{II}3} } - \frac{1}{r^3} \right) z^{\text{I}} &= 0 \end{aligned} \right\} (C)$$

qui exprimeront le mouvement relatif du corps  $C$  autour du corps  $B$ .

Il est bon de remarquer l'analogie qu'il y a entre ces neuf équations (A), (B), (C); c'est que les équations (A) se changent en les équations (B) en y changeant seulement  $B$  en  $C$ ,  $x$  en  $x^{\text{I}}$ ,  $y$  en  $y^{\text{I}}$ ,  $z$  en  $z^{\text{I}}$ ,  $r$  en  $r^{\text{I}}$  & réciproquement; & que de même ces équations se changent en les équations (C) en y changeant  $A$  en  $C$ ,  $x$  en  $x^{\text{II}}$ ,  $y$  en  $y^{\text{II}}$ ,  $z$  en  $z^{\text{II}}$ ,  $r$  en  $r^{\text{II}}$  & *vice versa*; & la même analogie aura lieu dans toutes les formules que nous trouverons par la suite.

## II.

Qu'on multiplie la première des équations (A) par  $y$  & la seconde par  $x$ , & qu'ensuite on les retranche l'une de l'autre, on aura

$$\frac{y d^2 x - x d^2 y}{dt^2} + C \left( \frac{1}{r^{\text{I}3} } - \frac{1}{r^{\text{II}3} } \right) (y x^{\text{I}} - x y^{\text{I}}) = 0.$$

Prix de l'Académie, Tome IX. 1772.

B

Combinant de même les deux premières des équations (B) & les deux premières des équations (C) on aura ces deux ci :

$$\frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{dt} + B \left( \frac{x}{r^3} - \frac{y}{r^3} \right) (xy' - yx) = 0.$$

$$\frac{y''d^2x'' - x''d^2y''}{dt^2} + A \left( \frac{x}{r^3} - \frac{y}{r^3} \right) x'y'' - y'x'' = 0.$$

Mais

$x'' = x' - x$ ,  $y'' = y' - y$ ; donc  $x'y'' - y'x'' = xy' - yx'$ ; donc en ajoutant ensemble les trois équations précédentes, après avoir divisé la première par C, la seconde par B & la troisième par A, on aura celle-ci :

$$\frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{Cdt^2} + \frac{y'd^2x' - x'd^2y'}{Bdt^2} + \frac{y''d^2x'' - x''d^2y''}{Adt^2} = 0.$$

On trouvera de la même manière ces deux autres équations :

$$\frac{z'd^2x - x'd^2z}{Cdt^2} + \frac{z'd^2x' - x'd^2z'}{Bdt^2} + \frac{z''d^2x'' - x''d^2z''}{Adt^2} = 0.$$

$$\frac{z'd^2y - y'd^2z}{Cdt^2} + \frac{z'd^2y' - y'd^2z'}{Bdt^2} + \frac{z''d^2y'' - y''d^2z''}{Adt^2} = 0.$$

De sorte qu'on aura en intégrant

$$\left. \begin{aligned} \frac{ydx - xdy}{Cdt} + \frac{y'dx' - x'dy'}{Bdt} + \frac{y''dx'' - x''dy''}{Adt} &= a \\ \frac{zdx - xdz}{Cdt} + \frac{z'dx' - x'dz'}{Bdt} + \frac{z''dx'' - x''dz''}{Adt} &= b \\ \frac{zdy - ydz}{Cdt} + \frac{z'dy' - y'dz'}{Bdt} + \frac{z''dy'' - y''dz''}{Adt} &= c \end{aligned} \right\} (D)$$

$a, b, c$  étant des constantes arbitraires.

De plus, si on multiplie la première des équations (A) par  $\frac{dx}{C}$ , la première des équations (B) par  $\frac{dx^I}{C}$ , & la première des équations (C) par  $\frac{dx^{II}}{A}$ , & qu'en suite on les ajoute ensemble, on aura, à cause de  $x^{II} = x^I - x$ ,

$$\frac{dx d^2 x}{C dt^2} + \frac{dx^I d^2 x^I}{B dt^2} + \frac{dx^{II} d^2 x^{II}}{A dt^2} + (A+B+C) \left( \frac{x dx}{Cr^3} + \frac{x^I dx^I}{Br^3} + \frac{x^{II} dx^{II}}{Ar^3} \right) = 0.$$

On trouvera de même

$$\frac{dy d^2 y}{C dt^2} + \frac{dy^I d^2 y^I}{B dt^2} + \frac{dy^{II} d^2 y^{II}}{A dt^2} + (A+B+C) \left( \frac{y dy}{Cr^3} + \frac{y^I dy^I}{Br^3} + \frac{y^{II} dy^{II}}{Ar^3} \right) = 0,$$

$$\frac{dz d^2 z}{C dt^2} + \frac{dz^I d^2 z^I}{A dt^2} + \frac{dz^{II} d^2 z^{II}}{A dt^2} + (A+B+C) \left( \frac{z dz}{Cr^3} + \frac{z^I dz^I}{Br^3} + \frac{z^{II} dz^{II}}{Ar^3} \right) = 0.$$

Donc, ajoutant ensemble ces trois équations & mettant  $r dr$  à la place de  $x dx + y dy + z dz$ ,  $r^I dr^I$  à la place de  $x^I dx^I + y^I dy^I + z^I dz^I$ , &  $r^{II} dr^{II}$  à la place de  $x^{II} dx^{II} + y^{II} dy^{II} + z^{II} dz^{II}$ , on aura une équation intégrable dont l'intégrale fera

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{C dt^2} + \frac{dx^{I2} + dy^{I2} + dz^{I2}}{B dt^2} + \frac{dx^{II2} + dy^{II2} + dz^{II2}}{A dt^2} - 2(A+B+C) \left( \frac{r}{Cr^3} + \frac{r^I}{Br^3} + \frac{r^{II}}{Ar^3} \right) = f \dots (E)$$

$f$  étant une constante arbitraire.

Ce sont-là les seules intégrales exactes qu'on ait pu trouver jusqu'à présent ; or, comme il y a en tout six variables  $x, y, z, x^1, y^1, z^1$ , il est clair que si on pouvoit trouver encore deux autres intégrales, le problème seroit réduit aux premières différences ; mais on ne fauroit guères se flatter d'y parvenir dans l'état d'imperfection où est encore l'analyse.

## I I I.

Supposons pour abrégé

$$u^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

$$u'^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2}$$

$$u''^2 = \frac{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}{dt^2}$$

entente que  $u, u^1$  &  $u''$  expriment les vitesses relatives des corps  $B$  autour de  $A, C$  autour de  $B$  ; il est clair qu'on aura :

$$\frac{d^2r^2}{2dt^2} = \frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} + u^2$$

$$\frac{d^2r'^2}{2dt^2} = \frac{x^1d^2x^1 + y^1d^2y^1 + z^1d^2z^1}{dt^2} + u'^2$$

$$\frac{d^2r''^2}{2dt^2} = \frac{x''d^2x'' + y''d^2y'' + z''d^2z''}{dt^2} + u''^2$$

Donc mettant dans ces équations au lieu de

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}, \frac{d^2x^1}{dt^2}, \text{ \&c.}$$

leurs valeurs tirées des équations (A), (B), (C), & faisant attention que



$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2, \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = r''^2,$$

$$xx^I + yy^I + zz^I = \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2}$$

&

$$\begin{aligned} x^I x^{II} + y^I y^{II} + z^I z^{II} &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - x^I x - y^I y - z^I z \\ &= \frac{r'^2 + r''^2 - r^2}{2} \end{aligned}$$

on aura, après avoir fait passer tous les termes du même côté.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r^2}{2 dt^2} + \left( \frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r'^3} \right) r'^2 + \frac{C}{2} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \\ (r^2 + r'^2 - r''^2) - u^2 &= 0 \\ \frac{d^2 r'^2}{2 dt^2} + \left( \frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r''^3} \right) r''^2 + \frac{B}{2} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3} \right) \\ (r^2 + r'^2 - r''^2) & \\ \frac{d^2 r''^2}{2 dt^2} + \left( \frac{B+C}{r''^3} + \frac{A}{r^3} \right) r^2 + \frac{A}{2} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3} \right) \\ (r'^2 + r''^2 - r^2) - u''^2 &= 0. \end{aligned} \right\} (F)$$

Donc, si on peut avoir les valeurs de  $u^2$ ,  $u'^2$  &  $u''^2$  exprimées en  $r$ ,  $r'$  &  $r''$  seulement, on aura trois équations entre ces trois dernières variables & le tems  $t$ , à l'aide desquelles on pourra à chaque instant déterminer la position relative des corps.

#### IV.

Or, on a, en différenciant les valeurs de  $u^2$ ,  $u'^2$ , &  $u''^2$ ,

$$u \, d u = \frac{dx \, d^2 x + dy \, d^2 y + dz \, d^2 z}{dt^2}$$

$$u^I \, d u^I = \frac{dx^I \, d^2 x^I + dy^I \, d^2 y^I + dz^I \, d^2 z^I}{dt^2}$$

$$u^{II} \, d u^{II} = \frac{dx^{II} \, d^2 x^{II} + dy^{II} \, d^2 y^{II} + dz^{II} \, d^2 z^{II}}{dt^2}$$

donc, si on fait ici les mêmes substitutions que ci-dessus, & qu'on suppose pour un moment

$$d \gamma = x^I dx + y^I dy + z^I dz$$

$$d \gamma^I = z dx^I + y dy^I + z dz^I$$

$$d \gamma^{II} = x^I dx^{II} + y^I dy^{II} + z^I dz^{II},$$

on aura, (à cause de

$$x dx + y dy + z dz = r dr, \quad x^I dx^I + y^I dy^I + z^I dz^I = r^I dr^I,$$

&

$$x^{II} dx^{II} + y^{II} dy^{II} + z^{II} dz^{II} = r^{II} dr^{II})$$

$$u \, d u = - \left( \frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^3} \right) r \, d r - C \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II,3}} \right) d \gamma$$

$$u^I \, d u^I = - \left( \frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^3} \right) r^I \, d r^I - B \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{I,3}} \right) d \gamma^I$$

$$u^{II} \, d u^{II} = - \left( \frac{B+C}{r^3} + \frac{A}{r^3} \right) r^{II} \, d r^{II} - A \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) d \gamma^{II}.$$

Soit pour abréger

$$d R = \frac{2 r dr}{r^3} + 2 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{II,3}} \right) d \gamma$$

$$d R^I = \frac{2 r^I dr^I}{r^3} + 2 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{I,3}} \right) d \gamma^I$$

$$d R^{II} = \frac{2 r^{II} dr^{II}}{r^3} + 2 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) d \gamma^{II}$$

& l'on aura

$$u^2 = \frac{2(A+B)}{r} - CR$$

$$u'^2 = \frac{2(A+C)}{r^2} - BR^1$$

$$u''^2 = \frac{2(B+C)}{r^{11}} - AR^{11}$$

de sorte que les équations (F) deviendront

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 r^2}{2dt^2} - \frac{A+B}{r} + C \left( \frac{r^2}{r'^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r'^2} - \frac{1}{r''^2} \right) \right) \\ \quad (r^2 + r'^2 - r''^2) + R = 0 \\ \frac{d^2 r'^2}{2dt^2} - \frac{A+C}{r^2} + B \left( \frac{r'^2}{r''^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r'^2} - \frac{1}{r''^2} \right) \right) \\ \quad (r^2 + r'^2 - r''^2) + R^1 = 0 \\ \frac{d^2 r''^2}{2dt^2} - \frac{B+C}{r^{11}} + A \left( \frac{r''^2}{r^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r'^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right) \\ \quad (r'^2 + r''^2 - r^2) + r^{11} = 0 \end{array} \right.$$

& il ne restera plus qu'à trouver les valeurs de  
 $d\gamma$ ,  $d\gamma^1$  &  $d\gamma^{11}$ .

Pour cela je fais

$$dp = x^1 dx + y^1 dy + z^1 dz - x dx^1 - y dy^1 - z dz^1$$

& comme l'on a

$$xx^1 + yy^1 + zz^1 = -\frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2},$$

on aura en différentiant

$$\begin{aligned} x dx^1 + y dy^1 + z dz^1 + x^1 dx + y^1 dy + z^1 dz \\ = r dr + r^1 dr^1 - r^{11} dr^{11}, \end{aligned}$$

donc

$$d\gamma = \frac{rdr + r^1 d^1 r^1 - r^{11} d^1 r^{11} + d\rho}{2}$$

$$d\gamma^1 = \frac{rdr + r^1 d^1 r^1 - r^{11} d^1 r^{11} - d\rho}{2}$$

& ensuite

$$d\gamma^{11} = r^1 d r^1 - d\gamma,$$

favoir

$$d\gamma^{11} = \frac{r^1 d r^1 + r^{11} d r^{11} - rdr - d\rho}{2}.$$

Tout se réduit donc maintenant à avoir la valeur de  $d\rho$ ; pour y parvenir, je différentie, & j'ai

$$d^2 \rho = x^1 d^2 x^1 + y^1 d^2 y^1 + z^1 d^2 z^1 - x d^2 x^1 - y d^2 y^1 - z d^2 z^1;$$

je substitue à la place de  $d^2 x$ ,  $d^2 y$ ,  $d^2 z$ , &c. les valeurs tirées des équations (A) & (B), & faisant les autres substitutions convenables, je trouve

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^3} - \frac{A+C}{r^3} - \frac{B}{r^3} \right) (r^2 + r^{1/2} - r^{11/2}) \\ & - C \left( \frac{r}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) r^{1/2} + B \left( \frac{r}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) r^2; \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{2d^2 \rho}{dt^2} + A \left( \frac{r}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) (r^2 + r^{1/2} - r^{11/2}) + B \left( \frac{r}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) \\ (r^{1/2} - r^2 - r^{11/2}) + C \left( \frac{r}{r^3} - \frac{1}{r^3} \right) (r^2 - r^{1/2} - r^{11/2}) = 0. \end{aligned}$$

## V.

Supposons, pour mettre nos formules sous une forme plus simple,

$$\frac{r^3 + r^{112} - r^2}{2} = p \quad \frac{1}{r^{11}} - \frac{1}{r^{111}} = q \quad \frac{u^{12} + u^{112} - u^2}{2} = v$$

$$\frac{r^2 + r^{112} - r^{12}}{2} = p^I \quad \frac{1}{r^1} - \frac{1}{r^{11}} = q^I \quad \frac{u^2 + u^{112} - u^{12}}{2} = v^I$$

$$\frac{r^3 + r^{12} - r^{112}}{2} = p^{II} \quad \frac{1}{r^{12}} - \frac{1}{r^1} = q^{II} = q - q^I$$

$$\frac{u^2 + u^{12} - u^{112}}{2} = v^{II}$$

& l'on aura d'abord, pour la détermination de  $d\rho$  cette équation

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + C\rho q - B\rho^I q^I - A\rho^{II} q^{II} = 0 \dots (A)$$

On aura ensuite

$$dV = \frac{dp^{II} + d\rho}{2}, \quad dV^I = \frac{dp^{II} - d\rho}{2}, \quad dV^{II} = \frac{d\rho - d\rho^I}{2}$$

d'où

$$dR = \frac{2rdr}{r^{11}} + q(dp^{II} + d\rho)$$

$$dR^I = \frac{2r^1 dr^1}{r^{11}} + q^I(dp^{II} + d\rho)$$

$$dR^{II} = \frac{2r^{11} dr^{11}}{r^1} + q^{II}(d\rho - d\rho^I)$$

Mais

$$\frac{1}{r^{11}} = \frac{1}{r^1} - q^I \text{ \& } 2rdr = dp^I + dp^{II};$$

Prix de l'Académie, Tome IX. 1772.

C

donc

$$\frac{2rdr}{r^{113}} = \frac{2dr}{r^2} - q^I(dp^I + dp^{II});$$

on trouvera de même

$$\frac{2r^I dr^I}{r^{113}} = \frac{2dr^I}{r^{12}} - q(dp + dp^{II})$$

&

$$\frac{2r^{II} dr^{II}}{r^I} = \frac{2dr}{r^{112}} - q^I(dp^I + dp);$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs, & faisant pour plus de simplicité

$$\left. \begin{aligned} dQ &= q^I dp^I - q^{II} dp^{II} - q dp \\ dQ^I &= q dp + q^{II} dp^{II} + q^I dp \\ dQ^{II} &= q dp + q^{II} dp^{II} + q^I dp \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

on aura

$$R = -\frac{z}{r} - Q, \quad R^I = -\frac{z}{r^I} - Q^I,$$

$$R^{II} = -\frac{z}{r^{II}} - Q^{II},$$

& de-là

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{2(A+B+C)}{z} + C Q \\ u^{I2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^2} + B Q^I \\ u^{II2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^{II2}} + A Q^{II} \end{aligned} \right\} \dots (J)$$

Maintenant on aura

$$\frac{r^2}{r^{112}} = \frac{z}{r} - q^I(p^I + p^{II})$$

&amp;

$$\frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{r^{I_1}} - \frac{1}{r^{II_1}} \right) (r^2 + r^{I_2} - r^{II_2}) = q p^{II};$$

donc ajoutant ces deux équations, & mettant  $q^{II}$  à la place de  $q - q^I$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{r^{II_1}} + \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{r^{I_1}} - \frac{1}{r^{II_1}} \right) (r^2 + r^{I_2} - r^{II_2}) \\ = \frac{r^2}{r} - p^I q^I + p^{II} q^{II}; \end{aligned}$$

on trouvera de même

$$\begin{aligned} \frac{r^{I_2}}{r^{II_1}} + \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{r^I} - \frac{1}{r^{II_1}} \right) (r^2 + r^{I_2} - r^{II_2}) \\ = \frac{r^2}{r^I} - p q - p^{II} q^{II}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r^{II_2}}{r^I} + \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{r^{I_1}} - \frac{1}{r^I} \right) (r^{I_2} + r^{II_2} - r^2) \\ = \frac{r^2}{r^{II_1}} + p^I q^I + p^{II} q^{II}; \end{aligned}$$

donc faisant toutes ces substitutions dans les équations (G) ou (F) des articles précédents, elles deviendront celles-ci,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r^2}{2 dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - C(p^I q^I - p^{II} q^{II} + Q) &= 0 \\ \frac{d^2 r^{I_2}}{2 dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - B(p q + p^{II} q^{II} + Q^I) &= 0 \\ \frac{d^2 r^{II_2}}{2 dt^2} - \frac{A+B+C}{r^{II_1}} - A(-p q - p^I q^I + Q^{II}) &= 0 \end{aligned} \right\} (K)$$

Ainsi, on pourra, à l'aide de ces trois équations, déterminer les trois rayons  $r$ ,  $r^I$  &  $r^{II}$  en  $t$ , ce qui donnera pour chaque instant la position relative des Corps entre eux,

C 2

Il est bon de remarquer que si on divise la première de ces équations par  $C$  ; la seconde par  $B$  , & la troisième par  $A$  ; & qu'ensuite on les ajoute ensemble , on aura (à cause de  $dQ + dQ^I + dQ^{II} = 0$  , & par conséquent  $Q + Q^I + Q^{II} = \text{à une constante}$ ) celle-ci ,

$$\frac{d^2 . r^2}{2Cdt^2} + \frac{d^2 . r^{I2}}{2Bdt^2} + \frac{d^2 . r^{II2}}{2Adt^2} - (A+B+C) \left( \frac{1}{Cr} + \frac{1}{Br^I} + \frac{1}{Ar^{II}} \right) \\ = \text{à une constante} \dots (L)$$

laquelle pourra tenir lieu d'une quelconque des trois équations (K).

### V- I.

On peut encore mettre les mêmes équations (K) sous une autre forme que voici.

Je multiplie la première de ces équation par  $d . r^2$  & je l'intègre ensuite pour avoir

$$\frac{(d . r^2)^2}{4dt^2} - 2(A+B+C)r - C \int (p^I q^I - p^{II} q^{II}) d . r^2 \\ - C \int Q d . r^2 + L = 0 ,$$

$L$  étant une constante arbitraire.

Or ,  $\int Q d . r^2 = Q r^2 - \int r^2 d Q$  ; mais  $d Q = q^I d p^I - q^{II} d p^{II} - q d p$  ; de plus , à cause de  $r^2 = p^I + p^{II}$  , on aura  $(p^I q^I - p^{II} q^{II}) d . r^2 - r^2 (q^I d p^I - q^{II} d p^{II}) = (p^I q - p^{II} q^{II}) (d p^I + d p^{II}) + (p^I + p^{II}) (q^I d p^I - q^{II} d p^{II}) = q (p^{II} d p^I - p^I d p^{II})$  ; de sorte que , si on fait pour abrégier  $d P = q (p^{II} d p^I - p^I d p^{II} - r^2 d p)$  , on aura , en négligeant la constante  $L$  qui peut être sentée contenue dans  $P$  , & divisant toute l'équation par  $r^2$  ,

$$\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r} + C \left( \frac{P}{r^2} - Q \right) = 0 .$$



Faisant de même

$$dP = q^I(p^{II}dp - pdp^{II} + r^{I2}d\rho)$$

&

$$dP^{II} = q^{II}(pdp^I - p^I dp + r^{II2}d\rho),$$

on trouvera par des opérations semblables aux précédentes

$$\frac{dr^{I2}}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r^I} + B\left(\frac{P^I}{r^{I2}} - Q^I\right) = 0$$

$$\frac{dr^{II2}}{dt^2} - \frac{2(A+B+C)}{r^{II}} + A\left(\frac{P^{II}}{r^{II2}} - Q^{II}\right) = 0.$$

Et si on retranche ces équations respectivement des équations (K) trouvées ci-dessus, qu'ensuite on divise les équations restantes par  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$ , on aura ces trois-ci.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^2} - C\left(\frac{P^I q^I - P^{II} q^{II}}{r} + \frac{P}{r^I}\right) &= 0 \\ \frac{d^2r^I}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{I2}} - B\left(\frac{Pq + P^{II} q^{II}}{r^I} + \frac{P^{II}}{r^{I2}}\right) &= 0 \\ \frac{d^2r^{II}}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{II2}} - A\left(\frac{-Pq - P^I q^I}{r^{II}} + \frac{P^{II}}{r^{II2}}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} (M)$$

## VII.

Nous avons donc réduit les six équations primitives (A), (B) qui renferment la solution du Problème des trois Corps pris dans toute la généralité à trois autres équations entre les trois distances  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  & le temps  $t$ . Il est vrai que ces réduites renferment chacune deux signes d'intégration (ce qui est évident en substituant les valeurs de  $Q$ ,  $Q^I$ ,  $Q^{II}$ , ou de  $P$ ,  $P^I$ ,  $P^{II}$  & de  $d\rho$ ) & qu'à cet égard elles sont moins simples que les équations primitives ;

mais d'un autre côté elles ont l'avantage de ne renfermer aucun radical, ce qui me paroît d'une grande importance dans ces sortes de problèmes.

Supposons donc qu'on ait déterminé par les équations (K) ou (M) les trois variables  $r, r^I, r^{II}$  en  $t$ ; on ne connoitra encore par-là que la position relative des corps, c'est-à-dire le triangle que les trois Corps forment à chaque instant; ainsi il reste à voir comment on pourra déterminer ensuite l'orbite même de chaque corps, c'est-à-dire les six variables  $x, y, z, x^I, y^I, & z^I$ .

## VIII.

Pour cet effet, nous remarquerons d'abord qu'en connoissant  $r, r^I$  &  $r^{II}$  on connoitra aussi  $u, u^I, u^{II}$  &  $dV, dV^I, dV^{II}$  par les formules de l'art 5. De sorte qu'on aura (en mettant  $p^{II}$  à la place de  $\frac{r^2 + r^{I2} - r^{II2}}{2}$  &  $v^{II}$  à la place de  $\frac{u^2 + u^{I2} - u^{II2}}{2}$ ) les dix équations suivantes.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ x^{I2} + y^{I2} + z^{I2} &= r^{I2} \\ xx^I + yy^I + zz^I &= p^{II} \\ xdx + ydy + zdz &= r dr \\ x^I dx^I + y^I dy^I + z^I dz^I &= r^I dr^I \\ x^I dx + y^I dy + z^I dz &= dV \\ xdx^I + ydy^I + zdz^I &= dV^I \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &= u^2 dt^2 \\ dx^{I2} + dy^{I2} + dz^{I2} &= u^{I2} dt^2 \\ dx dx^I + dy dy^I + dz dz^I &= v^{II} dt^2. \end{aligned}$$

Or, en regardant les quantités  $x, y, z, x^1, y^1, z^1, dx, dy, dz, dx^1, dy^1, dz^1$ , comme autant d'inconnues, il est clair que les équations précédentes ne suffisent pas pour les déterminer, puisqu'on auroit douze inconnues, & seulement dix équations; mais si on joint à ces équations les trois équations (D) de l'art. 2. On aura alors une équation de plus qu'il n'y a d'inconnues; & la difficulté ne consistera qu'à résoudre ces équations.

## I X:

J'observe, à l'égard des équations de l'article précédent, qu'elles ne peuvent tenir lieu que de neuf équations, parce qu'en éliminant quelques-unes des inconnues il arrive que les autres s'en vont d'elles-mêmes, de sorte qu'on tombe par ce moyen dans une équation où il n'entre plus que les quantités connues  $r^2, r^{12}, p^{11}$ , &c. Pour le prouver de la manière la plus simple qu'il est possible, je prends d'abord les trois équations

$$x dx + y dy + z dz = r dr$$

$$x^1 dx + y^1 dy + z^1 dz = dV$$

$$dx^1 dx + dy^1 dy + dz^1 dz = v^{11} dt^2;$$

& j'en tire par les règles ordinaires de l'élimination, les valeurs de  $dx, dy, dz$ ; j'aurai en faisant pour abrégé

$$a = y^1 dz^1 - z^1 dy^1, a^1 = z dy^1 - y dz^1, a^{11} = yz^1 - y^1 z,$$

$$\beta = z^1 dx^1 - x^1 dz^1, \beta^1 = x dz^1 - z dx^1, \beta^{11} = zx^1 - z^1 x,$$

$$\gamma = x^1 dy^1 - y^1 dx^1, \gamma^1 = y dx^1 - x dy^1, \gamma^{11} = xy^1 - yx^1,$$

$$\delta = x(y^1 dz^1 - z^1 dy^1) - y(x^1 dz^1 - z^1 dx^1) + z(x^1 dy^1 - y dx^1),$$

j'aurai, dis-je

$$dx = \frac{\alpha r dr + \alpha^2 dy + \alpha^{II} v^{II} dt^2}{\delta}$$

$$dy = \frac{\beta r dr + \beta^2 dy + \beta^{II} v^{II} dt^2}{\alpha}$$

$$dz = \frac{\gamma r dr + \gamma^2 dy + \gamma^{II} v^{II} dt^2}{\lambda}$$

Or, je remarque que l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (x^{I^2} + y^{I^2} + z^{I^2}) (dx^{I^2} + dy^{I^2} + dz^{I^2}) \\ - (x^I dx^I + y^I dy^I + z^I dz^I)^2 = r^{I^2} u^{I^2} dt^2 - (r^I dr^I)^2,$$

$$\alpha^{II} + \beta^{II} + \gamma^{II} = (x^2 + y^2 + z^2) (dx^{I^2} + dy^{I^2} + dz^{I^2}) \\ - (x dx^I + y dy^I + z dz^I)^2 = r^2 u^{I^2} dt^2 - dV^{I^2},$$

$$\alpha^{II^2} + \beta^{II^2} + \gamma^{II^2} = (x^2 + y^2 + z^2) (x^{I^2} + y^{I^2} + z^{I^2}) \\ - (xx^I + yy^I + zz^I)^2 = r^2 r^{I^2} - p^{II^2},$$

$$\alpha \alpha^I + \beta \beta^I + \gamma \gamma^I = (x^I dx^I + y^I dy^I + z^I dz^I) \\ (x dx^I + y dy^I + z dz^I) - (xx^I + yy^I + zz^I) \\ (dx^{I^2} + dy^{I^2} + dz^{I^2}) = r^I dr^I dV^I - p^{II} u^{I^2} dt^2,$$

$$d\alpha^{II} + \beta \beta^{II} + \gamma \gamma^{II} = (x^I dx^I + y^I dy^I + z^I dz^I) \\ (xx^I + yy^I + zz^I) - (x dx^I + y dy^I + z dz^I) \\ (x^{I^2} + y^{I^2} + z^{I^2}) = p^{II} r^I dr^I - r^{I^2} dV^I,$$

$$\alpha^I \alpha^{II} + \beta^I \beta^{II} + \gamma^I \gamma^{II} = (x dx^I + y dy^I + z dz^I) \\ (xx^I + yy^I + zz^I) - (x^I dx^I + y^I dy^I + z dz^I) \\ (x^2 + y^2 + z^2) = p^{II} dV^I - r^2 r^I dr^I;$$

de sorte que si on carre les trois équations précédentes, & qu'on les ajoute ensuite ensemble, on aura, après avoir multiplié par  $\delta^2$ , & fait les substitutions convenables,

$$\begin{aligned} \delta^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) &= (rdr)^2(r^{12}u^1dt^2 - r^{12}dr^{12}) \\ &+ dV^2(r^2u^{12}dt^2 - dV^{12}) + (v^{11}dt^1)(r^1r^{12} - p^{112}) \\ &+ 2rdrdV(r^1dr^1dV^1 - p^{11}u^{12}dt^2) \\ &+ 2rdrv^{11}dt^1(p^{11}r^1dr^1 - r^{12}dV^1) \\ &+ 2dVv^{11}dt^2(p^{11}dV^1 - r^2r^1dr^1). \end{aligned}$$

De même si on prend les trois équations

$$xx + yy + zz = r^2$$

$$x^1x + y^1y + z^1z = p^{11}$$

$$xdx^1 + ydy^1 + zdz^1 = dV^1,$$

& qu'on en tire les valeurs de  $x$ ,  $y$  &  $z$ , il est facile de voir qu'on aura pour  $x$ ,  $y$  &  $z$  les mêmes expressions que l'on a trouvées plus haut pour  $dx$ ,  $dy$  &  $dz$ , en y changeant seulement  $rdr$  en  $r^2$ ,  $dV$  en  $p^{11}$  &  $v^{11}dt^2$  en  $dV^1$ ; donc faisant les mêmes opérations & les mêmes substitutions que ci-dessus, on aura cette autre équation

$$\begin{aligned} \delta^2(x^2 + y^2 + z^2) &= r^2(r^{12}u^{12}dt^2 - (r^1dr^1)^2) \\ &+ p^{112}(r^2u^{12}dt^2 - dV^{12}) + dV^{12}(r^2r^{12} - p^{112}) \\ &+ 2r^2p^{11}(r^1dr^1dV^1 - p^{11}u^{12}dt^2) \\ &+ 2r^2dV^1(p^{11}r^1dr^1 - r^{12}dV^1) \\ &+ 2p^{11}dV^1(p^{11}dV^1 - r^2r^1dr^1). \end{aligned}$$

$$\text{Or on a } dx^2 + dy^2 + dz^2 = u^2dt^2,$$

&  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ; donc on aura les deux équations suivantes,

$$\begin{aligned} \delta^2u^2dt^2 &= (rdr)^2(r^{12}u^{12}dt^2 - r^{12}dr^{12}) \\ &+ dV^2(r^2u^{12}dt^2 - dV^{12}) \\ &+ (v^{11}dt^1)(r^2r^{12} - p^{112}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2rdrdV(r^I dr^I dV^I - p^{II} u^{I^2} dt^2) \\
& + 2rdv^II dt^2 (p^{II} r^I dr^I - r^{I^2} dV^I) \\
& + 2dV^II dt^2 (p^{II} dV^I - r^I r^I dr^I), \\
\delta^2 r^2 = & r^4 (r^{I^2} u^{I^2} dt^2 - r^{I^2} dr^{I^2}) \\
& + p^{II^2} (r^2 u^{I^2} dt^2 - dV^{I^2}) \\
& + dV^I (r^2 r^{I^2} - p^{II^2}) \\
& + 2r^2 p^{II} (r^I dr^I dV^I - p^{II} u^{I^2} dt^2) \\
& + 2r^2 dV^I (p^{II} r^I dr^I - r^{I^2} dV^I) \\
& + 2p^{II} dV^I (p^{II} dV^I - r^I r^I dr^I).
\end{aligned}$$

D'où, chassant  $\delta^2$ , on aura une équation entre les seules quantités connues  $r^2$ ,  $r^{I^2}$ , &c.

## X.

Si on tire de la dernière équation la valeur de  $\delta^2$ , on aura, en réduisant & effaçant ce qui se détruit

$$\begin{aligned}
\delta^2 = & r^{I^2} (r^2 u^{I^2} dt^2 - r^2 dr^{I^2} - dV^{I^2}) \\
& + 2p^{II} r^I dr^I dV^I - p^{II^2} u^{I^2} dt^2.
\end{aligned}$$

Et cette valeur de  $\delta^2$  étant substituée dans l'autre équation, on aura :

$$\begin{aligned}
& r^{II} (r^2 u^{I^2} dt^2 - r^2 dr^{I^2} - dV^{I^2}) u^2 dt^2 \\
& + (2p^{II} r^I dr^I dV^I - p^{II^2} u^{I^2} dt^2) u^2 dt^2 \\
= & (rdI)^2 (r^{I^2} u^{I^2} dt^2 - r^{I^2} dr^{I^2}) \\
& + dV^2 (r^2 u^{I^2} dt^2 - dV^{I^2}) \\
& + (u^{II} dt^2)^2 (r^2 r^{I^2} - p^{II^2}) \\
& + 2rdrdV (r^I dr^I dV^I - p^{II} u^{I^2} dt^2) \\
& + 2rdv^II dt^2 (p^{II} r^I dr^I - r^{I^2} dV^I) \\
& + 2dV^II dt^2 (p^{II} dV^I - r^I r^I dr^I);
\end{aligned}$$

ou bien, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned} & (r^2 r^{12} - p^{112}) (u^2 u^{12} - v^{112}) dt^4 \\ & + (r dr \cdot r^1 d^1 - dV dV^1)^2 \\ & - (r^1 (r^1 dr^1)^2 - 2p^{11} r^1 dr^1 dV^1 + r^1 dV^1)^2 u^2 dt^2 \\ & - 2(p^{11} (r dr \cdot r^1 dr^1 + dV dV^1) - r^2 r^1 dV - r^{12} r dr dV^1) v^{112} \\ & dt^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Or } dV = \frac{dp^{11} + d\rho}{2}, \text{ \& } dV^1 = \frac{dp^{11} - d\rho}{2} \text{ ( art. 5 ),}$$

de plus on a , par les formules du même article,

$$r^2 = p^1 + p^1 + p^{11}, r^{12} = p + p^{11}, r^{11} = p + p^1,$$

& de même

$$u^2 = v^1 + v^{11}, u^{12} = v + v^{11}, u^{112} = v + v^1;$$

donc si on fait ces substitutions , & qu'on suppose pour plus de simplicité

$$\begin{aligned} M &= p \left( \frac{2r dr}{dt} \right)^2 + p^1 \left( \frac{dr^{11}}{dt} \right)^2 + p^{11} \left( \frac{dr^1}{dt} \right)^2 \\ & - 2 \left( p^{11} \frac{dp^1}{dt} - p^1 \frac{dp^{11}}{dt} \right) \frac{d\rho}{dt} + r^2 \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^1 &= p^1 \left( \frac{2r^1 dr^1}{dt} \right)^2 + p \left( \frac{dr^{11}}{dt} \right)^2 + p^{11} \left( \frac{dr^1}{dt} \right)^2 \\ & + 2 \left( p^{11} \frac{dp^1}{dt} - p \frac{dp^{11}}{dt} \right) \frac{d\rho}{dt} + r^{12} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{11} &= p^{11} \left( \frac{2r^{11} dr^{11}}{dt} \right)^2 + p^1 \left( \frac{dr^1}{dt} \right)^2 + p \left( \frac{dr^{11}}{dt} \right)^2 \\ & + 2 \left( p \frac{dp^1}{dt} - p^1 \frac{dp^{11}}{dt} \right) \frac{d\rho}{dt} + r^{112} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

l'équation suivante deviendra, après avoir été multipliée

D ij

par  $\frac{z^6}{dt^4}$ ,

$$\begin{aligned} & 16(pp^I + pp^{II} + p^I p^{II}) (vv^I + vv^{II} + v^I v^{II}) \\ & - 4(\sum \dot{v} + \sum^I v^I + \sum^{II} v^{II}) \\ & + \left( \frac{dp^I p^I + dp^I p^{II} + dp^I p^{II} + d\dot{v}^2}{dt^2} \right)^2 = 0 \dots (N). \end{aligned}$$

Il faut donc que cette équation ait lieu en même-tems que les trois équations (K) de l'art. 5 ; de sorte que , comme elle ne contient d'ailleurs que les mêmes variables que les équations (K), & qu'elle est d'un ordre moins élevé d'une unité que celle-ci , on pourra la regarder comme une intégrale de ces mêmes équations (K), mais intégrale particulière à cause qu'elle ne renferme aucune nouvelle constante ; ainsi, si on intègre les équations (K) en y ajoutant les constantes nécessaires , ces constantes devront être telles qu'elles satisfassent à l'équation (N). De sorte que, si on ne veut pas se servir de cette dernière équation à la place de l'une des équations (K), il faudra néanmoins y avoir égard dans la détermination des constantes ; mais pour cela il suffira d'y supposer partout  $z = 0$ .

Au reste , nous ferons toujours usage de cette équation pour déterminer la constante qui doit entrer dans la valeur de  $\frac{d\dot{v}}{dt}$  résultante de l'intégration de l'équation (H) de l'art. 5.



## X I.

Reprenons maintenant les équations (D) de l'art. 1, & faifant pour abregger

$$\lambda = y dx - x dy, \lambda^I = y^I dx^I - x^I dy^I, \\ \lambda^{II} = y^{II} dx^{II} - x^{II} dy^{II}.$$

$$\mu = z dx - x dz, \mu^I = z^I dx^I - x^I dz^I, \\ \mu^{II} = z^{II} dx^{II} - x^{II} dz^{II}.$$

$$\nu = z dy - y dz, \nu^I = z^I dy^I - y^I dz^I, \\ \nu^{II} = z^{II} dy^{II} - y^{II} dz^{II},$$

on aura, après avoir multiplié par  $dt$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda^I}{B} + \frac{\lambda^{II}}{A} &= a dt \\ \frac{\mu}{c} + \frac{\mu^I}{B} + \frac{\mu^{II}}{A} &= b dt \\ \frac{\nu}{c} + \frac{\nu^I}{B} + \frac{\nu^{II}}{A} &= c dt \end{aligned} \right\} \dots (O)$$

Or je trouve, comme plus haut,

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ - (xdx + ydy + zdz)^2 = r^2 u^2 dt^2 - (rdr)^2,$$

& par analogie

$$\lambda^{I2} + \mu^{I2} + \nu^{I2} = r^{I2} u^{I2} dt^2 - (r^I dr^I)^2, \\ \lambda^{II2} + \mu^{II2} + \nu^{II2} = r^{II2} u^{II2} dt^2 - (r^{II} dr^{II})^2.$$

je trouve de même

$$\begin{aligned} \lambda\lambda^I + \mu\mu^I + \nu\nu^I &= (xx^I + yy^I + zz^I)(dx dx^I + dy dy^I + dz dz^I) \\ &\quad - (x^I dx + y^I dy + z^I dz)(x dx^I + y dy^I + z dz^I) \\ &= p^{II} v^{II} dt^2 - dV dV^I = p^{II} v^{II} dt^2 - \left(\frac{dp^I}{2}\right)^2 + \left(\frac{dp}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

& par analogie

$$\lambda\lambda^{II} + \mu\mu^{II} + \nu\nu^{II} = p^I v^I dt^2 - \left(\frac{dp^I}{2}\right)^2 + \left(\frac{dp}{2}\right)^2,$$

$$\lambda^I \lambda^{II} + \mu^I \mu^{II} + \nu^I \nu^{II} = p v dt^2 - \left(\frac{dp}{2}\right)^2 + \left(\frac{dp}{2}\right)^2.$$

Donc si on fait pour plus de simplicité

$$\Pi = r^2 u^2 - \left(\frac{rdt}{dt}\right)^2$$

$$\Pi^I = r^{I2} u^{I2} - \left(\frac{r^I dt^I}{dt}\right)^2$$

$$\Pi^{II} = r^{II2} u^{II2} - \left(\frac{r^{II} dt^{II}}{dt}\right)^2$$

&c

$$\Psi = p v - \left(\frac{dp}{2 dt}\right)^2 + \left(\frac{dp}{2 dt}\right)^2$$

$$\Psi^I = p^I v^I - \left(\frac{dp^I}{2 dt}\right)^2 + \left(\frac{dp}{2 dt}\right)^2$$

$$\Psi^{II} = p^{II} v^{II} - \left(\frac{dp^{II}}{2 dt}\right)^2 + \left(\frac{dp}{2 dt}\right)^2,$$

enforte que l'on ait

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \Pi dt^2, \quad \lambda^{I2} + \mu^{I2} + \nu^{I2} = \Pi^I dt^2$$

$$\lambda^{II2} + \mu^{II2} + \nu^{II2} = \Pi^{II} dt^2, \quad \lambda^I \lambda^{II} + \mu^I \mu^{II} + \nu^I \nu^{II} = \Psi dt^2$$

$$\lambda\lambda^{II} + \mu\mu^{II} + \nu\nu^{II} = \Psi^I dt^2, \quad \lambda\lambda^I + \mu\mu^I + \nu\nu^I = \Psi^{II} dt^2,$$

on aura, en carrant les trois équations (O) & les ajoutant ensemble,

$$\frac{\Pi}{C^2} + \frac{\Pi^I}{B^2} + \frac{\Pi^{II}}{A^2} + \frac{2\Psi}{AB} + \frac{2\Psi^I}{AC} + \frac{2\Psi^{II}}{BC} \\ = a^2 + b^2 + c^2 \dots (P).$$

Equation qui est aussi comme l'on voit d'un ordre moins élevé d'une unité que les équations (K); & comme elle renferme la constante arbitraire  $a^2 + b^2 + c^2$  qui ne se trouve point dans les équations (K), on peut la regarder comme une intégrale complète de ces mêmes équations.

## X I I.

On pourroit croire que l'équation (E) que nous avons trouvée dans l'art. 2 pourroit ainsi, en y substituant les valeurs de  $u$ ,  $u^I$  &  $u^{II}$ , donner une nouvelle intégrale; mais il est facile de voir qu'il n'en résulteroit qu'une équation identique, car l'équation dont il s'agit, se réduit d'abord à

$$\frac{u^2}{C} + \frac{u^{I2}}{B} + \frac{u^{II2}}{A} - 2(A+B+C) \left( \frac{1}{Cr} + \frac{1}{Br^I} + \frac{1}{Ar^{II}} \right) = f;$$

& mettant pour  $u$ ,  $u^I$  &  $u^{II}$  leurs valeurs tirées des formules (J), on aura, en rejettant ce qui se détruit

$$Q + Q^I + Q^{II} = -f$$

ce qui ne renferme aucune nouvelle condition, car les quantités  $Q$ ,  $Q^I$ ,  $Q^{II}$  sont déjà d'elles-mêmes telles que  $dQ + dQ^I + dQ^{II} = 0$  (art. 5)..

Au reste, si on combine l'équation  $Q + Q^I + Q^{II} = -f$  avec les équations (N) & (P) après y avoir substitué les

valeurs de  $u$ ,  $u^I$  &  $u^{II}$ , on pourra par le moyen de ces trois équations, déterminer les trois quantités  $Q$ ,  $Q^I$  &  $Q^{II}$ , lesquelles ne renfermeront par conséquent que les variables finies  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  & leurs différentielles première  $dr$ ,  $dr^I$ ,  $dr^{II}$  avec la quantité  $\frac{dp}{dt}$ ; ainsi substituant ces valeurs dans les équations (K), on aura trois équations du second ordre entre les variables  $r$ ,  $r^I$  &  $r^{II}$ , dans lesquelles il n'y aura plus qu'à substituer la valeur de  $\frac{dp}{dt}$ . Donc, si à l'aide d'une de ces équations on élimine la quantité  $\frac{dp}{dt}$  des deux autres, on aura d'abord deux équations purement du second ordre entre les variables  $r$ ,  $r$  &  $r^{II}$ ,  $t$ ; ensuite si on différencie la valeur de  $\frac{dp}{dt}$ , & qu'on mette la valeur de  $\frac{dp^2}{dt^2}$  dans l'équation (H), on aura une troisième équation entre les mêmes variables, qui ne fera que du troisième ordre. De sorte que l'on aura, par ce moyen, pour la détermination des variables  $r$ ,  $r^I$ , &  $r^{II}$  deux équations différentielles du second ordre & une troisième; & ces équations suffiront, comme on le verra dans un moment pour la solution complète du Problème des trois Corps.

Nous croyons cependant qu'il est encore plus simple & plus commode pour le calcul, de substituer dans les équations (K) les valeurs de  $Q$ ,  $Q^I$  &  $Q^{II}$  tirées des équations (J); car quoique les équations résultantes puissent monter

à des ordres plus élevés que le second, elles auront toujours ce grand avantage que les variables s'y trouveront peu mêlées entr'elles, & que l'analogie qui y regne facilitera beaucoup leur résolution.

## X I I I.

Des dix équations de l'art. 8 il n'en reste donc plus que neuf, & des trois équations (*D*) ou (*O*) de l'art. 11 il n'en reste plus que deux; de sorte qu'on n'aura en tout que onze équations pour la détermination des six variables  $x, y, z, x^1, y^1, z^1$  & de leurs différentielles  $dx, dy, &c.$  d'où l'on voit qu'il est impossible de déterminer ces variables directement & par les seules opérations de l'algèbre; mais on pourra en venir à bout au moyen d'une intégration, comme on va le voir.

Je suppose que l'on veuille connoître les valeurs de  $x, y, z$  on aura d'abord l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \dots (Q).$$

Ensuite, multipliant les trois équations (*O*) de l'art. 11 respectivement par  $\lambda, \mu, \nu$ , & les ajoutant ensemble, on aura

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{C} + \frac{\lambda\lambda^1 + \mu\mu^1 + \nu\nu^1}{B} + \frac{\lambda\lambda^{11} + \mu\mu^{11} + \nu\nu^{11}}{A}$$

$$= (a\lambda + b\mu + c\nu)dt;$$

ou bien en faisant les substitutions du même article

$$\left( \frac{\pi}{C} + \frac{\Psi^1}{A} + \frac{\Psi^{11}}{B} \right) dt = a(ydx - xdy)$$

$$+ b(zdx - xdz) + c(zdy - ydz) \dots (R).$$

Prix de l'Académie, Tome IX. 1772. E

Enfin, multipliant les mêmes équations (O) respectivement par  $z$ ,  $-y$ ,  $-x$ , & les ajoutant ensemble, on aura

$$\frac{\lambda^I z - \mu^I y + \nu^I x}{C} + \frac{\lambda^I z - \mu^I y + \nu^I x}{B} + \frac{\lambda^{II} z - \mu^{II} y + \nu^{II} x}{A} \\ = (az - by + cx)dt.$$

Or il est aisé de voir que l'on a  $\lambda^I z - \mu^I y + \nu^I x = 0$ , & que  $-\lambda^I z + \mu^I y - \nu^I x$  est la même quantité que nous avons désignée plus haut par  $\Delta$  (art. 9), donc puisqu'on a déjà trouvé (art. 10)

$$\delta^2 = (r^2 r^{I^2} - p^{II^2})u^{I^2} dt^2 - r^2 r^{I^2} d\tau^{I^2} \\ + 2p^{II} r^I dr^I dV^I - r^{I^2} dV^{I^2},$$

on aura, en faisant les substitutions du même art. 10,

$$(\lambda^I z - \mu^I y + \nu^I x)^2 = ((pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^{I^2} - \frac{\Sigma^I}{4})dt^2$$

& par analogie

$$(\lambda^{II} z - \mu^{II} y + \nu^{II} x)^2 = ((pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^{II^2} - \frac{\Sigma^{II}}{4})dt^2$$

De sorte que l'équation ci-dessus deviendra

$$\frac{\frac{1}{2}V(4pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^{I^2} - \Sigma^I}{B} + \frac{\frac{1}{2}V(4pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^{II^2} - \Sigma^{II}}{A} \\ = az - by + cx \dots (S)$$

Ainsi on aura trois équations (Q), (R) & (S) à l'aide desquelles on pourra déterminer facilement les valeurs de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dès qu'on connoîtra celles de  $r$ ,  $r^I$ , &  $r^{II}$ .

On peut trouver de semblables formules pour la détermination de  $x^I$ ,  $y^I$ ,  $z^I$ ; & même sans faire un nouveau

calcul, il suffira de changer dans les précédentes  $B$  en  $C$ , &  $C$  en  $B$ , d'accentuer les lettres qui n'ont point d'accent, & d'effacer l'accent de celles qui en ont un, sans toucher à celles qui ont deux accents. Il faut seulement observer que la quantité  $d\rho$  ne change point de valeur, mais seulement de signe lorsqu'on change entr'elles les masses  $A$ ,  $B$ ,  $C$  & les lettres accentuées, ce qui se voit clairement par l'équation ( $H$ ) de l'art. 5.

## XIV.

Supposons pour abrégé

$$T = \frac{\pi}{C} + \frac{\varphi^i}{A} + \frac{\varphi^{ii}}{B},$$

$$Z = \frac{\mathcal{V}(A(pp^i + pp^{ii} + p^i p^{ii}) u^{i^2} - \Sigma^i)}{2B} \\ + \frac{\mathcal{V}(A(rp^i + pp^{ii} + p^i p^{ii}) u^{ii^2} - \Sigma^{ii})}{2A}$$

& l'on aura ces trois équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$az - by + cx = Z$$

$$a(ydx - xdy) + b(zdx - xdz) + c(zdy - ydz) = Tdt.$$

Comme les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont arbitraires (art. 2), & ne dépendent que de la position du plan de projection des orbites des corps  $B$  &  $C$  autour du corps  $A$ , il est facile de voir qu'on peut prendre ce plan de manière que l'on ait  $b = 0$  &  $c = 0$ ; car pour cela il suffira qu'on ait  $b = 0$  &  $c = 0$  au commencement du mouvement, c'est-à-dire lorsque  $t = 0$ .

Supposant donc  $b = 0$  &  $c = 0$ , on aura  $a\zeta = Z$ ;  
&  $a(ydx - xdy) = Tdt$ ; donc  $\zeta = \frac{Z}{a}$ , & à cause de

$$x^2 + z^2 + \zeta^2 = r^2, \text{ on aura } x^2 + y^2 = r^2 - \frac{Z^2}{a^2};$$

$$\text{donc } \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{aTdt}{a^2r^2 - Z^2};$$

$$\text{de sorte qu'en faisant } d\varphi = \frac{aTdt}{a^2r^2 - Z^2},$$

$$\text{on aura } \frac{y}{\zeta} = \text{tang. } \varphi, \text{ \& de-là}$$

$$z = \frac{Z}{a}$$

$$y = \sqrt{\left(r^2 - \frac{Z^2}{a^2}\right)} \sin. \varphi.$$

$$x = \sqrt{\left(r^2 - \frac{Z^2}{a^2}\right)} \cos. \varphi.$$

## XV.

Mais si on ne veut pas s'astreindre à la supposition de  $b$  &  $c = 0$ , ce qui oblige de prendre le plan de projection d'une manière déterminée : voici comment on pourra déterminer les quantités  $a$ ,  $y$  &  $z$  avec toute la généralité possible.

Soit

$$l\zeta - my + nx = X$$

$$\lambda\zeta - \mu y + \nu x = Y$$

$l, m, n, \lambda, \mu, \nu$  étant des coefficients indéterminés;  
&  $X, Y$  deux nouvelles variables ; on aura



$$YdX - XdY = (m\nu - n\mu)(ydx - xdy) \\ + (n\lambda - l\nu)(zdx - xdz) + (l\mu - m\lambda)(zdy - ydz),$$

donc faisant

$$m\nu - n\mu = ka$$

$$n\lambda - l\nu = kb$$

$$l\mu - m\lambda = kc,$$

on aura l'équation (art. 14.)

$$YdX - XdY = kTdt.$$

Supposons maintenant que l'on ait  $f(X^2 + Y^2) + gZ^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , substituant les valeurs de  $X, Y$  &  $Z$  en  $x, y$  &  $z$ , & comparant ensuite les termes qui contiennent les mêmes puissances de  $x, y$  &  $z$ , on aura ces six équations.

$$f(l^2 + \lambda^2) + ga^2 = 1$$

$$f(m^2 + \mu^2) + gb^2 = 1$$

$$f(n^2 + \nu^2) + gc^2 = 1$$

$$f(lm + \lambda\mu) + gab = 0$$

$$f(ln + \lambda\nu) + gac = 0$$

$$f(mn + \mu\nu) + gbc = 0;$$

lesquelles étant combinées avec les trois précédentes serviront à déterminer les neuf inconnues  $l, m, n, \lambda, \mu, \nu, f, g, k$ .

## XVI.

Cela fait on aura donc , à cause de  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  
l'équation

$$f(X^2 + Y^2) + gZ^2 = r^2$$

d'où

$$f(X^2 + Y^2) = r^2 - gZ^2 ;$$

donc

$$\frac{YdX - XdY}{X^2 + Y^2} = \frac{fkTdt}{r^2 - gZ^2}$$

Donc si on fait

$$d\varphi = \frac{fkTdt}{r^2 - gZ^2}$$

on aura

$$Y = \sqrt{\left(\frac{r^2 - gZ^2}{f}\right)} \sin. \varphi$$

$$X = \sqrt{\left(\frac{r^2 - gZ^2}{f}\right)} \cos. \varphi.$$

Ainsi on connoîtra les trois quantités  $X, Y$  &  $Z$ , &  
l'aide desquelles on pourra déterminer  $x, y$  &  $z$ .

Pour cela on prendra les trois équations

$$l z - m y + n x = X$$

$$\lambda z - \mu y + \nu x = Y$$

$$a z - b y + c x = Z$$

& on les ajoutera ensemble après les avoir multipliées  
respectivement 1<sup>o</sup>. par  $fl, f\lambda, ga$ , 2<sup>o</sup>. par  $fm, f\mu, gb$ .

3°. par  $fn, f\nu, gc$ ; on aura sur le champ, en vertu des équations de l'art. précédent,

$$z = f(lX + \lambda Y) + gaZ$$

$$y = -f(mX + \mu Y) - gbZ$$

$$x = f(nX + \nu Y) + gcZ.$$

## XVII.

Maintenant, comme on a supposé  $x^2 + y^2 + z^2 = f(X^2 + Y^2) + gZ^2$ , on aura, en substituant les valeurs de  $x, y, z$  qu'on vient de trouver, & comparant les termes homogènes,

$$f(l^2 + m^2 + n^2) = 1$$

$$f(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1$$

$$g(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

$$la + mb + nc = 0$$

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0,$$

& ces équations devront être identiques avec les six qu'on a trouvées ci-dessus (art. 15), & pourront par conséquent être employées à la place de celles-là pour la détermination des inconnues  $l, m$ , &c.

Or, comme il faut satisfaire en même-tems à ces trois autres équations  $m\nu - n\mu = ka, \nu l - l\nu = kb, l\mu - m\lambda = kc$  (art. 15) je remarque que si on ajoute ensemble ces dernières équations après les avoir multi-

pliées respectivement 1°. par  $l, m, n$ , 2°. par  $\lambda, \mu, \nu$  ; on aura ces deux ci :

$$k(la + mb + nc) = 0$$

$$k(\lambda a + \mu b + \nu c) = 0,$$

lesquelles s'accordent avec la cinquième & la sixième des précédentes ; ainsi on peut déjà réduire à une seule les trois équations dont il s'agit , & on y satisfera par la détermination de l'inconnue  $k$ . Or , si on ajoute ensemble les carrés de ces équations , on aura

$$\begin{aligned} k^2(a^2 + b^2 + c^2) &= (m\nu - n\mu)^2 + (n\lambda - l\nu)^2 + (l\mu - m\lambda)^2 \\ &= (l^2 + m^2 + n^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (l\lambda + m\mu + n\nu)^2 \end{aligned}$$

= (en vertu des six équations ci-dessus)  $\frac{1}{f^2}$  ;  
de sorte qu'on aura

$$k = \frac{1}{f\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Donc il n'y aura plus qu'à satisfaire aux six équations trouvées plus haut, c'est ce qu'on pourra exécuter de plusieurs manières à cause qu'il y a plus d'indéterminées que d'équations.

On aura d'abord

$$g = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2},$$

ensuite, si on chasse  $\lambda$  des deux équations  $l\lambda + m\mu + n\nu = 0$ , &  $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$ , on aura  $(am - bl)\mu + (an - cb)\nu = 0$ , & chassant  $\mu$ , on aura de même  $(bl - am)\lambda + (bn - cm)\nu = 0$ , d'où je conclus qu'on aura

$$\lambda =$$

$$\lambda = (cm - bn)\delta$$

$$\mu = (an - cl)\delta$$

$$\nu = (bl - am)\delta$$

$\delta$  étant une inconnue qu'on déterminera par l'équation  $f(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1$ , laquelle donnera

$$f\delta((cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2) = 1;$$

$$\text{mais on a } (cm - bn)^2 + (an - cl)^2 + (bl - am)^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2) - (al + bm + cn)^2$$

$$= \frac{1}{fg}, \text{ à cause de } a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{g}, l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{f},$$

&  $al + bm + cn = 0$  par les équations ci-dessus; donc

$$\text{on aura } \frac{a^2}{g} = 1, \text{ \& } \delta = \sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}; \text{ \& il ne res-$$

tera qu'à satisfaire à ces deux équations

$$f(l^2 + m^2 + n^2) = 1$$

$$la + mb + nc = 0.$$

Supposons pour plus de simplicité

$$a = h \cos. \alpha$$

$$b = h \sin. \alpha \cos. \epsilon$$

$$c = h \sin. \alpha \sin. \epsilon$$

l'on aura  $\delta = \sqrt{g} = \frac{1}{h}$ , de sorte que  $h = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ ;

& la seconde des deux équations précédentes deviendra

$$l \cos. \alpha + \sin. \alpha (m \cos. \epsilon + n \sin. \epsilon) = 0; \text{ soit donc } l = \sin. \alpha \sin. n,$$

& l'on aura, en faisant pour plus de simplicité  $f = 1$ ,

*Prix de l'Académie, Tome IX. 1772. F*

$$\sin. \alpha^2 . \sin. n^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$\cos. \alpha . \sin. n + m \cos. \epsilon + n \sin. \epsilon = 0.$$

Donc  $m \cos. \epsilon + n \sin. \epsilon = -\cos. \alpha \sin. n$  ; donc  $m^2 + n^2 - (m \cos. \epsilon + n \sin. \epsilon)^2 = (m \sin. \epsilon - n \cos. \epsilon)^2 = 1 - \sin. \alpha^2 . \sin. n^2 - \cos. \alpha^2 . \sin. n^2 = 1 - \sin. n^2 = \cos. n^2$  ; & tirant la racine carrée,  $m \sin. \epsilon - n \cos. \epsilon = \cos. n$  ; de forte qu'on aura  $m = \sin. \epsilon \cos. n - \cos. \alpha . \cos. \epsilon \sin. n$ ,  
 $n = -\cos. \epsilon . \cos. n - \cos. \alpha . \sin. \epsilon . \sin. n$  ;  
 & de-là on trouvera les valeurs de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  par les formules précédentes.

On aura de cette manière

$$l = \sin. \alpha \sin. n$$

$$m = \sin. \epsilon \cos. n - \cos. \alpha \cos. \epsilon \sin. n$$

$$n = -\cos. \epsilon \cos. n - \cos. \alpha \sin. \epsilon \sin. n$$

$$\lambda = \sin. \alpha \cos. n$$

$$\mu = -\sin. \epsilon \sin. n - \cos. \alpha \cos. \epsilon \cos. n$$

$$\nu = \cos. \epsilon \sin. n - \cos. \alpha \sin. \epsilon \cos. n.$$

Si on substitue ces valeurs dans les expressions de  $x$ ,  $y$  &  $z$  de l'art. 16, il est facile de voir que les quantités  $X$ ,  $Y$  &  $\frac{Z}{h}$  ne font autre chose que les coordonnées rectangles de la même courbe qui est représentée par les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , mais rapportée à un autre plan de projection, dont la position dépend des angles  $\alpha$ ,  $\epsilon$  &  $n$ . En effet, si on considère les deux plans des coordonnées  $x$ ,  $y$ , & des coordonnées  $X$ ,  $Y$ , l'angle  $\alpha$  fera celui de l'in-

clinaison de ces deux plans, l'angle  $\eta$  sera celui que la ligne d'intersection de ces plans fait avec l'axe des abscisses  $x$ , & l'angle  $\epsilon$  sera celui que l'axe des abscisses  $X$  comprend avec la même ligne d'intersection. Or, comme

l'expression des coordonnées  $X, Y$  &  $\frac{Z}{h}$  est plus simple

que celle des coordonnées  $x, y, z$ , il est clair que le plan de projection auquel appartiennent les coordonnées

$X, Y$  &  $\frac{Z}{h}$  est plus propre que tout autre plan pour y

rapporter les mouvemens des trois Corps, ou plutôt le mouvement relatif de deux de ces Corps autour du troisième.

On voit donc que la position du plan de projection n'est point du tout indifférente, & que parmi tous les plans possibles qu'on peut faire passer par le corps  $A$ , il y en a un qui doit être choisi de préférence, parce que les mouvemens des corps  $B$  &  $C$  autour de  $A$  sont par rapport à ce plan les plus simples qu'il est possible.

Cette remarque, qui me paroît de quelque importance dans le Problème des trois Corps, n'avoit point encore été faite, parce que personne, que je sache, n'avoit jusqu'à présent envisagé ce Problème d'une manière aussi générale que nous venons de le faire.

### XVIII.

Nous prendrons donc, à la place des coordonnées  $x, y, z$ , celles-ci  $X, Y, \frac{Z}{h}$ , pour représenter le mouvement du corps  $B$  autour de  $A$ ; & comme l'on a, à

cause de  $h = \frac{1}{\sqrt{g}}$ ,  $X^2 + Y^2 + \left(\frac{Z}{h}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ;

&  $Y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2} \sin. \varphi$ ,  $X = \sqrt{r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2} \cos. \varphi$

(art. 15), il est clair que  $\varphi$  sera l'angle décrit par le corps  $B$  autour de  $A$  dans le plan de projection, c'est-à-dire la

longitude du corps  $B$  dans ce même plan; & que  $\frac{Z}{hr}$

fera le *sinus* de la latitude. Ainsi on aura (art. 16) à cause

$$\text{de } f = 1, k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{h},$$

Pour le corps  $B$

Rayon recteur de l'orbite . . . . .  $r$

Longitude . . . . .  $\int \frac{T dt}{h \left( r^2 - \left( \frac{Z}{h} \right)^2 \right)}$

*Sinus* de la latitude : : :  $\frac{Z}{hr}$

Pour le corps  $C$

Rayon recteur de l'orbite . . . . .  $r^2$

Longitude . . . . .  $\int \frac{T^2 dt}{h \left( r^2 - \left( \frac{Z}{h} \right)^2 \right)}$

*Sinus* de la latitude : : :  $\frac{Z^2}{hr^2}$

Les valeurs de  $T$  & de  $Z$  sont données par les formules de l'art. 14, & pour avoir celles de  $T^2$  &  $Z^2$ , il n'y aura qu'à changer dans celles là l'accent  $o$  en  $^1$  &  $^1$  en  $o$ , & ensuite  $B$  en  $C$  &  $C$  en  $B$ .



Quant à la quantité  $b$ , c'est une constante arbitraire qui dépend du mouvement initial des corps; mais il faudra la prendre telle qu'elle s'accorde avec l'équation ( $P$ ) de l'art. 11 dans laquelle le second membre est

$$= a^2 + b^2 + c^2 = b^2;$$

de sorte qu'il n'y aura qu'à prendre pour  $b$  la racine carrée de la valeur du premier membre de cette équation lorsqu'on y fait  $t = 0$ .

## X I X.

Les formules, que nous venons de trouver, servent à déterminer les orbites des  $B$  &  $C$  autour du corps  $A$  par rapport à un plan fixe passant par ce même corps; mais il faut voir encore comment on peut déterminer par leur moyen, la position mutuelle de ces orbites. Pour cela, nous commencerons par remarquer que si on considère le triangle formé à chaque instant par les trois corps  $A, B, C$ , & dont les trois côtés sont  $r, r^I$  &  $r^{II}$ , & qu'on nomme  $\zeta, \zeta^I, \zeta^{II}$ , les trois angles opposés à ces côtés, on aura, comme on le sçait, par la Géométrie élémentaire,

$$\cos. \zeta = \frac{r^{I2} + r^{II2} - r^2}{2r^I r^{II}} = \frac{p}{r^I r^{II}}$$

$$\cos. \zeta^I = \frac{r^2 + r^{II2} - r^{I2}}{2r r^{II}} = \frac{p^I}{r r^{II}}$$

$$\cos. \zeta^{II} = \frac{r^2 + r^{I2} - r^{II2}}{2r r^I} = \frac{p}{r r^I}.$$

Or on a (art. 8)  $p^{II} = x x^I + y y^I + z z^I$

donc  $\cos. \zeta^{II} = \frac{xx^I + yy^I + zz^I}{r r^I}$ ,  $\zeta^{II}$  étant l'angle formé au

centre du corps  $A$  par les rayons recteurs  $r$ , &  $r^I$  des deux autres corps  $B$  &  $C$ .

Qu'on imagine maintenant deux plans passants, l'un par le corps  $A$ , & par les deux points infiniment proches, dans lesquels s'est trouvé le corps  $B$  au commencement & à la fin du temps infiniment petit  $dt$ , & l'autre par le même corps  $A$ , & par les deux points infiniment proches, où le corps  $C$  étoit au commencement & à la fin du même temps  $dt$ ; ces deux plans seront ceux des orbites des corps  $B$  &  $C$  autour de  $A$ , & ils se couperont nécessairement dans une ligne droite passant par le corps  $A$ , laquelle sera donc la ligne des nœuds des deux orbites.

Soit  $\omega$  l'inclinaison de ces deux plans l'un à l'autre,  $\xi$  la distance du corps  $B$  à l'interfection des deux plans ou à la ligne des nœuds, c'est-à-dire l'angle compris entre le rayon  $r$  & la ligne des nœuds, &  $\xi^1$  la distance du corps  $C$  à la même ligne des nœuds, c'est-à-dire l'angle formé par le rayon  $r^1$  & la ligne des nœuds; si on imagine une sphère décrite autour de  $A$  comme centre, & que par les points, où les deux rayons  $r$ ,  $r^1$  & la ligne des nœuds, traversent la surface de cette sphère, dont nous supposons le rayon égal à 1, où même des arcs de grands cercles, on aura un triangle sphérique, dont les trois côtés seront  $\xi$ ,  $\xi^1$  &  $\zeta^1$ , & dont l'angle opposé au côté  $\zeta^1$  sera  $\omega$ ; de sorte qu'on aura par les formules connues

$$\cos. \zeta^1 = \cos. \xi \cos. \xi^1 + \sin. \xi \sin. \xi^1 \cos. \omega,$$

$$\text{donc } \cos. \xi \cos. \xi^1 + \sin. \xi \sin. \xi^1 \cos. \omega = \frac{xx^1 + yy^1 + zz^1}{rr^1}$$

Supposons maintenant que pendant le temps  $dt$  le corps  $B$  décrive autour de  $A$  l'angle infiniment petit  $d\theta$ , & que le corps  $C$  décrive l'angle  $d\theta^1$ , il est clair que, tandis que les lignes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $r$ , croissent de leurs différentiels  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,  $dr$ , l'angle  $\xi$  croîtra de  $d\theta$ , & l'angle  $\omega$  demeurera le même, parce qu'on suppose que la position des plans des orbites des corps  $B$  &  $C$  est la

même au commencement & à la fin de l'instant  $dt$ ; de même en faisant croître les lignes  $x^1, y^1, z^1, r^1$  de leurs différentiels  $dx^1, dy^1, dz^1, dr^1$ , il n'y aura que l'angle  $\xi^1$  qui variera en croissant de  $d\theta^1$ . Or, comme l'équation précédente doit être identique & indépendante de la loi des mouvemens des corps  $B$  &  $C$ , il est clair qu'on pourra y faire varier les quantités  $x, y, z, r$  &  $\xi$  qui appartiennent au corps  $B$  indépendamment des quantités  $x^1, y^1, z^1, r^1$  &  $Z^1$  qui appartiennent au corps  $C$ , & *vice-versa* celles-ci indépendamment de celles-là; d'où il suit qu'en faisant varier d'abord  $x, y, z, r$  &  $\xi$ , ensuite  $x^1, y^1, z^1, r^1$  &  $\xi^1$ ; enfin les unes & les autres en même temps, on tirera de l'équation dont il s'agit, les trois suivantes

$$\begin{aligned} & (-\sin. \xi \cos. \xi^1 + \cos. \xi \sin. \xi \cos. \omega) d\theta = \\ & - \frac{(xx^1 + yy^1 + zz^1) dr}{r^2 r^1} + \frac{x^1 dx + y^1 dy + z^1 dz}{r^1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-\cos. \xi \sin. \xi^1 + \sin. \xi \cos. \xi^1 \cos. \omega) d\theta^1 = \\ & - \frac{(xx^1 + yy^1 + zz^1) dr^1}{r^1 r^2} + \frac{x dx^1 + y dy^1 + z dz^1}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\sin. \xi \sin. \xi^1 + \cos. \xi \cos. \xi^1 \cos. \omega) d\theta d\theta^1 = \\ & \frac{(xx^1 + yy^1 + zz^1) dr dr^1}{r^2 r^1 r^2} - \frac{(x^1 dx + y^1 dy + z^1 dz) dr^1}{r^1 r^2}, \\ & - \frac{(x dx^1 + y dy^1 + z dz^1) dr}{r^2 r^1} + \frac{dx dx^1 + dy dy^1 + dz dz^1}{r^1 r^2}. \end{aligned}$$

Donc si on fait dans toutes ces équations les substitutions de l'art. 8, on aura ces quatre-ci :

$$\cos. \xi \cos. \xi^I + \sin. \xi \sin. \xi^I \cos. \omega = \frac{P^{II}}{r^I}$$

$$-\sin. \xi \cos. \xi^I + \cos. \xi \sin. \xi^I \cos. \omega = -\frac{P^{II} dr + r dV}{r^2 r^I d\theta}$$

$$-\cos. \xi \sin. \xi^I + \sin. \xi \cos. \xi^I \cos. \omega = -\frac{P^{II} dr + r^I d^{r^I}}{r^2 r^I d\theta}$$

$$\begin{aligned} & \sin. \xi \sin. \xi^I + \cos. \xi \cos. \xi^I \cos. \omega \\ &= \frac{P^{II} dr d^I - dV r d^I - dV^{r^I} d^I + r r^I d^I}{r^2 r^I d\theta d\theta^I} \end{aligned}$$

Or, il est facile de concevoir que le carré du petit espace que parcourt le corps  $B$  dans le temps  $dt$  est exprimé par également par  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  & par  $r^2 d\theta^2 + dr^2$ ; de sorte qu'on aura  $r d\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2)}$ ,

$$\text{\& par conséquent (art. 8 \& 11) } d\theta = \frac{V(u^2 dt^2 - dr^2)}{r} = \frac{dt V \Pi}{r^2}$$

$$\text{\& de même } d\theta^I = \frac{V(u^{I2} dt^2 - d^I r^2)}{r^I} = \frac{dt V \Pi^I}{r^{I2}}$$

Ainsi, les seconds membres des quatre équations précédentes seront tous donnés, dès qu'on connoîtra  $r$ ,  $r^I$  &  $r^{II}$  en  $t$  ( article cité ) ; de sorte qu'on aura quatre équations entre les trois inconnues  $\xi$ ,  $\xi^I$  &  $\omega$  par lesquelles on pourra non-seulement déterminer ces trois inconnues, mais encore avoir une équation entre les quantités  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$ ,  $u$ ,  $u^I$ , &c. & cette équation fera la même que celle qu'on a déjà trouvée plus haut ( art. 10 ) par une voie bien différente.

## X X.

Supposons, pour abrégér, que les équations précédentes soient représentées ainsi :

$$\text{cos. } \xi \text{ cos. } \xi^1 + \text{sin. } \xi \text{ sin. } \xi^1 \text{ cos. } \omega = \lambda$$

$$\text{sin. } \xi \text{ cos. } \xi^1 - \text{cos. } \xi \text{ sin. } \xi^1 \text{ cos. } \omega = \mu$$

$$\text{cos. } \xi \text{ sin. } \xi^1 - \text{sin. } \xi \text{ cos. } \xi^1 \text{ cos. } \omega = \nu$$

$$\text{sin. } \xi \text{ sin. } \xi^1 + \text{cos. } \xi \text{ cos. } \xi^1 \text{ cos. } \omega = -\pi$$

en faisant

$$\lambda = \frac{p^{11}}{r^1}, \quad \mu = \frac{p^{11}dr + r dV}{r^2 r^1 d\theta}, \quad \frac{p^{11}dr + r^1 dV^1}{r^{12} d\delta^1},$$

$$\pi = \frac{-p^{11}drdr^1 + dVrdr^1 + dV^1 r^1 dr - r^1 v^{11} dt^2}{r^2 r^1 d\theta d\delta^1}.$$

& il est facile de réduire ces quatre équations à ces deux-ci :

$$\text{cos. } (\xi \mp \xi^1) \times (1 \pm \text{cos. } \omega) = \lambda \pm \pi,$$

$$\text{sin. } (\xi \mp \xi^1) \times (1 \pm \text{cos. } \omega) = \lambda \pm \nu,$$

lesquelles, à cause de l'ambiguïté des signes, équivalent réellement à quatre équations. Elevant ces deux équations au carré, & ensuite les ajoutant ensemble, on a

$$(1 \mp \text{cos. } \omega)^2 = (\lambda \pm \pi)^2 + (\mu \pm \nu)^2$$

d'où, à cause de l'ambiguïté des signes, on tire

$$- \text{cos. } \omega = \lambda \pi + \mu \nu$$

$$1 + \text{cos. } \omega^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2;$$

*Prix de l'Académie, Tome IX. 1772.*

G

de sorte qu'éliminant  $\text{cof. } \omega$  on aura

$$1 + (\lambda \pi + \mu \nu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2.$$

Si on substitue dans cette équation les valeurs de  $\lambda, \mu, \nu, \pi$ , comme aussi celles de  $d\theta$  & de  $db^1$ , on aura une équation qui sera la même que l'équation (N) de l'art 10; ce qui peut servir à confirmer la bonté de nos calculs.

L'équation —  $\text{cof. } \omega = \lambda \pi + \mu \nu$  donnera

$$\text{cof. } \omega = \frac{p'' \nu'' dt^2 - dV dV^1}{r^2 r'^2 d\theta db^1} = \frac{\nu''}{V(\pi \pi^1)}$$

ce qui fera connoître l'inclinaison  $\omega$  des deux orbites.

Connoissant  $\omega$ , on connoîtra aisément  $\xi$  &  $\xi^1$ ; car en multipliant les deux équations

$$\text{cof.}(\xi + \xi^1)(1 - \text{cof. } \omega) = \lambda + \pi,$$

$$\text{cof.}(\xi - \xi^1)(1 + \text{cof. } \omega) = \lambda - \pi,$$

l'une par l'autre, on aura celle-ci :

$$\frac{1}{2}(\text{cof. } 2\xi + \text{cof. } 2\xi^1)\text{sin. } \omega^2 = \lambda^2 - \pi^2;$$

& de même les deux autres équations

$$\text{sin.}(\xi + \xi^1)(1 - \text{cof. } \omega) = \mu + \nu, \quad \text{sin.}(\xi - \xi^1)(1 + \text{cof. } \omega) = \mu - \nu,$$

étant multipliées ensemble donneront

$$- \frac{1}{2}(\text{cof. } 2\xi - \text{cof. } 2\xi^1)\text{sin. } \omega^2 = \mu^2 - \nu^2$$

d'où l'on tire

$$\text{cof. } 2\xi = \frac{\lambda^2 - \pi^2 - \mu^2 + \nu^2}{\text{sin. } \omega^2}$$

$$\text{cof. } 2\xi^1 = \frac{\lambda^2 - \pi^2 + \mu^2 - \nu^2}{\text{sin. } \omega^2},$$

ou bien en mettant à la place de  $\pi$  sa valeur  $1 + \cos. \omega^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2$  tirée de l'équation trouvée ci-dessus, on aura, à cause de  $\cos. \omega^2 = 1 - \sin. \omega^2$ ,

$$\cos. 2 \xi = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \nu^2 - 1)}{\sin. \omega^2}$$

$$\cos. 2 \xi^1 = 1 + \frac{2(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{\sin. \omega^2}$$

d'où l'on tire

$$\sin. \xi = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - \nu^2)}}{\sin. \omega}$$

$$\sin. \xi^1 = \frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 - \mu^2)}}{\sin. \omega},$$

c'est-à-dire, en substituant les valeurs de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , & faisant attention que  $r^2 d\theta^2 = u^2 dt^2 - dr^2$ , &  $r^{12} d\theta^{12} = u^{12} dt^2 - dr^{12}$ ,

$$\sin. \xi = \frac{\sqrt{(r^2 r^{12} - p^{12})u^{12} dt^2 - r^2 (r^1 dr^1)^2 + 2p^{11} (r^1 dr^1) dV^1 - r^2 dV^{12}}}{r^{12} \sin. \omega dt^2}$$

$$\sin. \xi^1 = \frac{\sqrt{(r^2 r^{12} - p^{12})u^2 dt^2 - r^2 (r dr)^2 + 2p^{11} (r dr) dV - r^2 dV^2}}{r^2 \sin. \omega dt^2}$$

ou bien art. 13

$$\sin. \xi = \frac{\sqrt{(4(pp^1 + pp^{11} + p^1 p^{11})u^{12} - \Sigma^1)}}{2r\sqrt{\Pi^1} \cdot \sin. \omega}$$

$$\sin. \xi^1 = \frac{\sqrt{(4(pp^1 + pp^{11} + p^1 p^{11})u^2 - \Sigma)}}{2r^1 \sqrt{\Pi} \cdot \sin. \omega}$$

## X X I.

Si on veut que les trois Corps se meuvent dans un

même plan, on aura alors  $\omega = 0$ , & par conséquent  
 $\cos. \omega = 1$ , &  $\sin. \omega = 0$ ; donc

$$M = 4(pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^2,$$

$$M^I = 4(pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^{I2};$$

& par analogie

$$M^{II} = 4(pp^I + pp^{II} + p^I p^{II})u^{II2}.$$

De sorte que les quantités  $Z$  &  $Z^I$  (art. 14) seront nulles, & par conséquent les mouvemens des trois Corps s'exécuteront dans le même plan que nous avons pris pour le plan de projection (art. 18). Or, si on substitue les valeurs de  $u^2$ ,  $u^{I2}$ ,  $u^{II2}$  tirées des équations précédentes dans l'équation (P) de l'art. 11, on aura une équation en

$r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  &  $\frac{dr}{dt}$ ,  $\frac{dr^I}{dt}$ ,  $\frac{dr^{II}}{dt}$  par laquelle on pourra déterminer

cette dernière quantité  $\frac{dp}{dt}$ ; substituant ensuite la valeur

de  $\frac{dp}{dt}$  dans celles de  $M$ ,  $M^I$  &  $M^{II}$ , on aura les valeurs de

$u^2$ ,  $u^{I2}$ , &  $u^{II2}$  exprimées en  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  &  $\frac{dr}{dt}$ ,  $\frac{dr^I}{dt}$ ,  $\frac{dr^{II}}{dt}$

seulement; ainsi mettant ces valeurs de  $u^2$ ,  $u^{I2}$ ,  $u^{II2}$  dans les équations (F) de l'art. 3, on aura enfin trois équations en  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  &  $t$ , lesquelles seront simplement différentielles du second ordre, au lieu que les équations générales (K) de l'art. 5 montent au quatrième ordre, lorsqu'on les délivre des signes d'intégration.

Au reste, je crois que dans le cas même dont il s'agit, ces dernières équations seront toujours préférables, parce qu'elles ont l'avantage singulier de ne renfermer aucun



radical, ce qui n'auroit point lieu dans les équations où l'on employeroit les valeurs de  $u$ ,  $u^I$ ,  $u^{II}$  déterminées par les équations ci-dessus, valeurs qui renfermeroient nécessairement des radicaux carrés.

## R É C A P I T U L A T I O N.

## XXII.

*Pour résumer ce qui vient d'être démontré dans ce Chapitre soient nommées.*

$\left. \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \right\}$  les masses des trois Corps.

$\left. \begin{array}{l} r \\ r^I \\ r^{II} \end{array} \right\}$  les distances entre les Corps  $\left\{ \begin{array}{l} A \ \& \ B \\ A \ \& \ C \\ B \ \& \ C \end{array} \right.$

& supposant pour abrégé

$$p = \frac{r^{I2} + r^{II2} - r^2}{2}, \quad q = \frac{1}{r^I} - \frac{1}{r^{II}}$$

$$p^I = \frac{r^2 + r^{II2} - r^{I2}}{2}, \quad q^I = \frac{1}{r^I} - \frac{1}{r^{II}}$$

$$p^{II} = \frac{r^2 + r^{I2} - r^{II2}}{2}, \quad q^{II} = \frac{1}{r^I} - \frac{1}{r^{II}} = q - q^I$$

on aura, en prenant l'élément du tems  $dt$  pour constant,

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + Cpq - Bp^I q^I - Ap^{II} q^{II} = 0 \dots (H)$$

$$\left. \begin{aligned} dQ &= q^I dp^I - q^{II} dp^{II} - q dp \\ dQ^I &= q dp + q^{II} dp^{II} + q^I dp \\ dQ^{II} &= -q dp - q^I dp^I + q^{II} dp \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r^2}{2 dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - C(p^I q^I - p^{II} q^{II} + Q) &= 0 \\ \frac{d^2 r^{I2}}{2 dt^2} - \frac{A+B+C}{r^I} - B(pq + p^{II} q^{II} + Q^I) &= 0 \\ \frac{d^2 r^{II2}}{2 dt^2} - \frac{A+B+C}{r^{II}} - A(-pq - p^I q^I + Q^{II}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (M)$$

Ces équations serviront à déterminer les valeurs des distances  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  en  $t$ ; après quoi on pourra trouver directement & sans aucune intégration les valeurs de tous les autres élémens, d'où dépend la détermination des orbites des corps  $B$  &  $C$  autour du corps  $A$ .

En effet si l'on nomme

$$\left. \begin{aligned} u \\ u^I \\ u^{II} \end{aligned} \right\} \text{ la vitesse du corps } \left\{ \begin{aligned} B \\ C \\ C \end{aligned} \right. \text{ autour de } \left\{ \begin{aligned} A \\ A \\ C \end{aligned} \right.$$

on aura d'abord

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{2(A+B+C)}{r} + C Q \\ u^{I2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^I} + B Q^I \\ u^{II2} &= \frac{2(A+B+C)}{r^{II}} + A Q^{II} \end{aligned} \right\} \dots (I)$$

Si l'on nomme ensuite

$\phi$  l'angle parcouru par le corps  $B$  autour de  $A$  dans un plan supposé fixe & passant par  $A$ ; c'est-à-dire, la longitude de  $B$ .

$\Psi$  l'angle de la latitude de  $B$  par rapport à ce même plan.

$\phi^I$  la longitude de  $C$ .

$\Psi^I$  sa latitude;

& qu'on fasse pour abrégé

$$P = p\rho + p\rho^{II} + p^I p^{II} = r^2 r^{I2} - p^{II2} = 2r^2 r^{I2} + 2r^2 r^{II2} \\ + 2r^{I2} r^{II2} - r^4 - r^{I4} - r^{II4} = (r + r^I + r^{II})(r + r^I - r^{II}) \\ (r - r^I + r^{II})(r - r^I - r^{II}),$$

$$M = p \left( \frac{d.r^2}{dt} \right)^2 + p^I \left( \frac{d.r^{II}}{dt} \right)^2 + p^{II} \left( \frac{d.p^I}{dt} \right)^2 \\ - 2 \left( p^{II} \frac{d.p^I}{dt} - p^I \frac{d.p^{II}}{dt} \right) \frac{d.p}{dt} + r^2 \left( \frac{d.p}{dt} \right)^2,$$

$$M^I = p^I \left( \frac{d.r^{I2}}{dt} \right)^2 + p \left( \frac{d.p^{II}}{dt} \right)^2 + p^{II} \left( \frac{d.p}{dt} \right)^2 \\ + 2 \left( p^{II} \frac{d.p}{dt} - p \frac{d.p^{II}}{dt} \right) \frac{d.p^I}{dt} + r^{I2} \left( \frac{d.p}{dt} \right)^2,$$

$$M^{II} = p^{II} \left( \frac{d.r^{II2}}{dt} \right)^2 + p^I \left( \frac{d.p}{dt} \right)^2 + p \left( \frac{d.p^I}{dt} \right)^2 \\ + 2 \left( p \frac{d.p^I}{dt} - p^I \frac{d.p}{dt} \right) \frac{d.p^{II}}{dt} + r^{II2} \left( \frac{d.p}{dt} \right)^2,$$

$$N = r^2 r^{I2} - \left( \frac{d.r^2}{2dt} \right)^2,$$

$$\Pi^I = r^{I2} u^{I2} - \left( \frac{d.r^{I2}}{2 dt} \right)^2$$

$$\Pi^{II} = r^{II2} u^{II2} - \left( \frac{d.r^{II2}}{2 dt} \right)^2$$

$$\Psi = p v - \left( \frac{dp}{2 dt} \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{2 dt} \right)^2$$

$$\Psi^I = p^I v^I - \left( \frac{dp^I}{2 dt} \right)^2 + \left( \frac{d\rho^I}{2 dt} \right)^2$$

$$\Psi^{II} = p^{II} v^{II} - \left( \frac{dp^{II}}{2 dt} \right)^2 + \left( \frac{d\rho^{II}}{2 dt} \right)^2,$$

en supposant

$$v = \frac{u^{I2} + u^{II2} - u^2}{2},$$

$$v^I = \frac{u^2 + u^{II2} - u^{I2}}{2},$$

$$v^{II} = \frac{u^2 + u^{I2} - u^{II2}}{2},$$

on aura sur le champ

$$\text{fin. } \Psi = \frac{\frac{1}{2} B V (4 P u^{I2} - \Sigma^I) + \frac{1}{2} A V (4 P u^{II2} - \Sigma^{II})}{2 h r},$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi^I}{A} + \frac{\Psi^{II}}{B}}{h r^2 \text{ cof. } \Psi^2},$$

&

$$\text{fin. } \Psi^I = \frac{\frac{1}{2} C V (4 P u^2 - \Sigma) + \frac{1}{2} A V (4 P u^{II2} - \Sigma^{II})}{2 h r^I},$$

$$\frac{d\rho^I}{dt} = \frac{\frac{\Pi^I}{B} + \frac{\Psi}{A} + \frac{\Psi^{II}}{C}}{h r^{I2} \text{ cof. } \Psi^{I2}},$$

Il faut remarquer que ces formules renferment deux constantes qui ne sont pas arbitraires, mais qui doivent être déterminées par des équations particulières; ce sont, l'une la constante  $b$ , & l'autre la constante qui peut être

ajoutée à la valeur de  $\frac{ds}{dt}$  déduite de l'équation (H) par la voie de l'intégration.

Voici donc les équations qui serviront à déterminer ces constantes

$$(N) \dots 16 P\mu - 4(\sum v + \sum^I v^I + \sum^{II} v^{II}) + \left( \frac{dp^I + dp^II + dp^I dp^{II} + dp^II}{dt^2} \right)^2 = 0,$$

en supposant

$$\begin{aligned} \zeta^I &= v v^I + v v^{II} + v^I v^I = u^I u^I - v^{II^2} = 2u^I u^{II} + 2u^I u^{II^2} \\ &+ 2u^I u^{II^2} - u^I - u^I - u^I - u^{II^4}; \end{aligned}$$

&

$$(P) \dots \frac{\Pi}{C^2} + \frac{\Pi^I}{B^2} + \frac{\Pi^{II}}{A^2} + 2 \left( \frac{\Psi}{AB} + \frac{\Psi^I}{AC} + \frac{\Psi^{II}}{BC} \right) = b^3.$$

On pourroit, si on vouloit, employer ces équations à la place de deux quelconques des équations (K); mais comme elles sont assez compliquées, il vaudra mieux ne s'en servir que dans la détermination des constantes dont il s'agit; & pour cela, il est clair qu'on y pourra supposer partout  $t = 0$ .

Or, si, pour plus de simplicité, on suppose que, lorsque  $t = 0$ , on ait  $\frac{dr}{dt} = 0$ ,  $\frac{di^I}{dt} = 0$ , & que de plus les rayons  $r, r^I$  concident, enforte que l'angle  $\zeta^{II}$  compris

entre ces rayons (art. 19) soit nul, ce qui est toujours permis lorsque cet angle est variable, on aura à cause de  $r^{II} = r^I + r^I - 2rr^I \cos \zeta^{II}$  (article cité),  $r^{II} = (r^I - r)^2$ , &  $\frac{dr^{II}}{dt} = 0$ ; donc  $\frac{dp}{dt} = 0$ ,  $\frac{dp^I}{dt} = 0$ ,  $\frac{dp^{II}}{dt} = 0$ ;

de sorte que l'équation (N) deviendra

$$16PU - 4(r^2u + r^Iv^I + r^{II}v^{II})\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dt}\right)^4 = 0;$$

mais à cause de  $r^{II} = (r^I - r)^2$  on aura  $P = 0$ ; donc aussi  $\frac{dp}{dt} = 0$ . Ainsi, il faudra prendre la valeur de  $\frac{dp}{dt}$ , en sorte qu'elle devienne nulle lorsque  $t = 0$ .

L'équation (P) se simplifiera aussi beaucoup par les mêmes suppositions, & elle deviendra

$$b^2 = \frac{r^2u^2}{C^2} + \frac{r^Iu^I}{B^2} + \frac{r^{II}u^{II}}{A^2} + 2\left(\frac{pv}{AB} + \frac{p^Iv^I}{AC} + \frac{p^{II}v^{II}}{BC}\right) \cdot (P^I)$$

où il faudra prendre pour  $r, r^I, r^{II}, u, u^I, u^{II}$  les valeurs qui répondent à  $t = 0$ .

Quant aux constantes qui pourront entrer dans les valeurs de  $Q, Q^I$  &  $Q^{II}$ , elles seront entièrement arbitraires, & ne dépendront que des valeurs initiales de  $u, u^I, u^{II}$ , qui sont à volonté.

Enfin, si l'on nomme encore

$d\theta$  l'angle élémentaire décrit par le corps  $B$  autour du corps  $A$  dans l'instant  $dt$ ,

$d\theta^I$  l'angle correspondant décrit par le corps  $C$  autour de  $A$ ,

$\omega$  l'inclinaison mutuelle des orbites des corps  $B$  &  $C$  autour de  $A$ ,

$\xi$  la distance du corps  $B$  au nœud de ces deux orbites,

$\xi'$  la distance du corps  $C$  au même nœud,

on aura

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\nu\Pi}{r^2}, \quad \frac{d\theta'}{dt} = \frac{\nu\Pi'}{r'^2},$$

$$\cos. \omega = \frac{\Psi''}{\nu(\Pi\Pi')},$$

$$\sin. \xi = \frac{\nu(4Pu'^2 - \Sigma')}{2r \sin. \omega \nu\Pi'},$$

$$\sin. \xi' = \frac{\nu(4Pu^2 - \Sigma)}{2r' \sin. \omega \nu\Pi}.$$



## CHAPITRE II.

*Solution du Problème des trois Corps dans  
différens cas.*

## XXIII.

NOUS allons examiner dans ce Chapitre quelques cas particuliers, où le Problème des trois Corps se simplifie beaucoup & admet une solution exacte ou presqu'exacte; quoique ces cas n'aient pas lieu dans le système du monde, nous croyons cependant qu'ils méritent l'attention des Géomètres, parce qu'il en peut résulter des lumières par la solution générale du Problème des trois Corps.

## XXIV.

Le premier cas qui se présente est celui où les trois distances  $r, r^I, r^{II}$  seroient constantes, enforte que le triangle formé par ces corps demeurât toujours le même, & ne fit que changer de position.

On aura dans ce cas  $dr=0, dr^I=0, dr^{II}=0$ , & par conséquent aussi,  $dp=0, dp^I=0, dp^{II}=0$ ; donc les trois équations (K) deviendront

$$\left. \begin{aligned} \frac{A+B+C}{r} + C(p^I q^I - pq + Q) &= 0 \\ \frac{A+B+C}{r^I} + B(pq + p^{II} q^{II} + Q) &= 0 \\ \frac{A+B+C}{r^{II}} + A(-pq - p^I q^I + Q^{II}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (a)$$



d'où l'on voit que les quantités  $Q$ ,  $Q^I$ ,  $Q^{II}$  seront pareillement constantes, en sorte qu'on aura  $dQ = 0$ ,  $dQ^I = 0$ ,  $dQ^{II} = 0$ , moyennant quoi les équations (I) se réduiront à celles-ci:  $qdp = 0$ ,  $q^I dp = 0$ ,  $q^{II} dp = 0$ , lesquelles donneront ou  $q = 0$ ,  $q^I = 0$ ,  $q^{II} = 0$ , ou  $dp = 0$ ; examinons séparément ces deux cas.

## XXV.

Soit d'abord  $q = 0$ ,  $q^I = 0$ ,  $q^{II} = 0$ , donc  $r = r^I = r^{II}$ ; de sorte que le triangle formé par les trois Corps sera équilatère: les équations (a) donneront donc

$$CQ = BQ^I = AQ^{II} = - \frac{A+B+C}{r}$$

& ces valeurs étant substituées dans les formules (I) on aura

$$u^2 = u^{I^2} = u^{II^2} = \frac{A+B+C}{r}$$

Maintenant on aura

$$p = p^I = p^{II} = \frac{r^2}{2}, \quad v = v^I = v^{II} = \frac{u^2}{2},$$

donc  $P = \frac{3r^4}{4}$ , &  $U = \frac{3u^4}{4}$ ; de plus l'équation (H) donnera  $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$ , par conséquent  $\frac{dp}{dt} = \alpha$

$\alpha$  étant une constante arbitraire qui doit satisfaire à l'équation (N).

Or, on trouve  $M = M^I = M^{II} = r^2 \alpha$ ; de sorte que l'équation dont nous parlons, deviendra

$9r^4u^4 - 6r^2u^2a^2 + a^4 = 0$ , c'est-à-dire  $(3r^2u^2 - a^2)^2 = 0$ ;  
d'où  $a^2 = 3r^2u^2 = 3(A+B+C)r$ .

Ainsi, on aura satisfait à toutes les équations du Problème; de sorte que la valeur de  $r$  demeurera indéterminée; d'où il s'enfuit que le système des trois Corps peut se mouvoir de manière que les trois Corps forment toujours un triangle quelconque équilatéral.

Ayant trouvé

$$P = \frac{3r^3}{4}, \quad \overset{\text{I}}{M} = \overset{\text{I}}{M} = \overset{\text{II}}{M} = r^2 a^2 = 3r^{\text{II}}u^2,$$

on aura

$4Pu^2 - \overset{\text{I}}{M} = 0$ ,  $4Pu^{\text{I}} - \overset{\text{I}}{M} = 0$ ,  $4Pu^{\text{II}} - \overset{\text{II}}{M} = 0$ ;  
donc  $\sin. \Psi = 0$ , &  $\sin. \Psi^{\text{I}} = 0$ ; d'où l'on voit que les trois Corps seront toujours nécessairement dans un même plan.

On trouve ensuite  $\Pi = \Pi^{\text{I}} = \Pi^{\text{II}} = r^2 u^2$ ,

$$\Psi = \Psi^{\text{I}} = \Psi^{\text{II}} = pv + \frac{a^2}{4} = \frac{r^2 u^2}{4} + \frac{3r^2 u^2}{4} = r^2 u^2;$$

donc à cause de  $\Psi = 0$ , &  $\Psi^{\text{I}} = 0$ , on aura

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi^{\text{I}}}{dt} = \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \frac{u^2}{h},$$

mais l'équation ( $P^{\text{I}}$ ) donnera

$$h^2 = \left( \frac{1}{C^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{A^2} + \frac{2}{AB} + \frac{2}{AC} + \frac{2}{BC} \right) r^2 u^2$$

ou bien

$$h^2 = \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A} \right)^2 r^2 u^2,$$

par conséquent

$$h = \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) r u ;$$

donc

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^1}{dt} = \frac{u}{r} = \sqrt{\left( \frac{A+B+C}{r^3} \right)}.$$

Ainsi les corps  $B$  &  $C$  ne feront que tourner autour du corps  $A$  avec une vitesse angulaire constante

$$\& \omega = \sqrt{\left( \frac{A+B+C}{r^3} \right)}.$$

### XXVI.

Examinons maintenant l'autre cas, où  $\frac{dp}{dt} = 0$  sans

que  $q$ ,  $q^1$  &  $q^{II}$  soient nuls ; & substituons d'abord dans les équations (I) les valeurs de  $CQ$ ,  $BQ^1$ , &  $AQ^{II}$  tirées des équations (a) ci-dessus, on aura

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{A+B+C}{r} - C(p^1 q^1 - p^{II} q^{II}) \\ u^{12} &= \frac{A+B+C}{r^2} - B(pq + p^{II} q^{II}) \\ u^{III} &= \frac{A+B+C}{r^3} - A(-pq - p^1 q^1) \end{aligned} \right\} \dots (b)$$

d'où l'on voit que les vitesses relatives des corps seront aussi constantes, mais non pas égales entr'elles comme dans le cas précédent.

Or, puisqu'il faut que  $\frac{dp}{dt} = 0$ , on aura donc aussi  $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$ , & l'équation (H) deviendra

$$Cp^2 - Bp^1q^1 - Ap^1q^1 = 0 \dots (C)$$

Ensuite l'équation (N) deviendra (à cause de  $dr = 0$ ,  $dr^1 = 0$ ,  $dr^2 = 0$ , &  $dp = 0$ ,  $dp^1 = 0$ ,  $dp^2 = 0$ ,  $d\mu = 0$ )  $16PU = 0$ , savoir  $P = 0$ , ou  $U = 0$ ; ainsi, en combinant l'une ou l'autre de ces équations avec l'équation précédente (C), on pourra, par leur moyen, déterminer deux quelconques des trois indéterminées  $r$ ,  $r^1$ ,  $r^2$  & le Problème sera résolu,

Supposons d'abord  $P = 0$ , l'on aura

$$(r+r^1+r^2)(r+r^1-r^2)(r-r^1+r^2)(r-r^1-r^2) = 0,$$

donc puisque  $r$ ,  $r^1$  &  $r^2$  sont supposées positives, on aura ces équations

$$r+r^1-r^2 = 0, \text{ ou } r-r^1+r^2 = 0, \text{ ou } r-r^1-r^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$r^2 = r+r^1, \text{ ou } r^1 = r+r^2, \text{ ou } r = r^1+r^2;$$

c'est-à-dire que l'une des trois distances doit être égale aux deux autres, ce qui montre que les trois corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite,

Imaginons que les trois corps  $A$ ,  $B$ ,  $C$  soient rangés de suite dans la même direction, en sorte que l'on ait  $r^2 = r^1 - r$ , & faisant pour plus de simplicité  $r^1 = mr$ , il n'y aura qu'à substituer dans l'équation (c),  $mr$  à la place

place de  $r^I$ , &  $(m-1)r$  à la place de  $r^{II}$ ; l'inconnue  $r$  s'en ira, & l'on aura une équation qui servira à déterminer  $m$ . On trouvera donc

$$p = \frac{m^2 + (m-1)^2 - 1}{2} r^2 = (m^2 - m)r^2$$

$$p^I = \frac{1 + (m-1)^2 - m^2}{2} r^2 = (1 - m)r^2$$

$$p^{II} = \frac{1 + m^2 - (m-1)}{2} r^2 = mr^2$$

$$q = \left( \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(m-1)^3} \right) \frac{1}{r^3} = -\frac{3m^2 - 3m + 1}{m(m-1)^3} \times \frac{1}{r^3}$$

$$q^I = \left( 1 - \frac{1}{(m-1)^3} \right) \frac{1}{r^3} = \frac{m^3 - 3m^2 + 3m}{(m-1)^3} \times \frac{1}{r^3}$$

$$q^{II} = \left( \frac{1}{m^3} - 1 \right) \frac{1}{r^3} = \frac{1 - m^3}{m^3} \times \frac{1}{r^3};$$

& ces substitutions étant faites dans l'équation (c) elle deviendra après avoir été multipliée par  $m^2(m-1)^2r$ ,

$$C(-3m^2 + 3m - 1) + Bm^2(m^2 - 3m + 3) - Am - 1^2(1 - m^3) = 0 \dots (d),$$

laquelle étant ordonnée par rapport à  $m$ , montera au cinquième degré, & aura par conséquent toujours une racine réelle.

Il est bon de remarquer ici que, quoique nous ayons supposé  $r^{II} = r^I - r$ , la solution n'en renfermera pas moins tous les cas possibles, à cause que les distances  $r, r^I$  &  $r^{II}$  étant prises sur une même ligne droite, peuvent être positives ou négatives, suivant la différente position des corps.

*Prix de l'Académie, Tome IX. 1772. I*

Maintenant, à cause de  $dr = 0$ ,  $dr^I = 0$ ,  $dr^{II} = 0$ , &  $d\rho = 0$ , on aura  $\Xi = 0$ ,  $\Xi^I = 0$ ,  $\Xi^{II} = 0$ ; de sorte que, comme on a déjà  $P = 0$ , on aura  $\text{fin. } \psi = 0$  &  $\text{fin. } \psi^I = 0$  ce qui montre que les trois Corps doivent se mouvoir dans un plan fixe.

## XXVII.

Supposons maintenant l'autre facteur  $U$  égal à zero, on aura

$$U = vv^I + vv^{II} + v^I v^{II} = u^2 u^{I^2} - v^{II^2} = 0:$$

Or, les équations (b) donnent

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{r^2} - \frac{u^{I^2}}{r^{I^2}} &= - (A+B+C) q^{II} - \frac{C}{r^2} (p^I q^I - p^{II} q^{II}) \\ &+ \frac{B}{r^2} (pq + p^{II} q^{II}), \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par  $r^2 r^{I^2}$ , & mettant à la place de  $r^2$  &  $r^{I^2}$  leurs valeurs  $p^I + p^{II}$ , &  $p + p^{II}$ , on aura (à cause de  $q^{II} = q - q^I$ )  $r^{I^2} u^2 - r^2 u^{I^2} = (-Cq + Bq^I - Aq^{II})P + (Cpq - Bp^I q^I - Ap^{II} q^{II})p^{II}$ ; mais  $Cpq - Bp^I q^I - Ap^{II} q^{II} = 0$  par l'équation (c), donc on aura simplement

$$r^{I^2} u^2 - r^2 u^{I^2} = (-Cq + Bq^I - Aq^{II})P,$$

& l'on trouvera de même par analogie

$$r^{II^2} u^2 - r^2 u^{II^2} = (Cq + Bq^I - Aq^{II})P,$$

$$r^{II^2} u^{I^2} - r^{I^2} u^{II^2} = (Cq + Bq^I + Aq^{II})P;$$

d'où il est facile de tirer

$$p^{II}u^2 - r^2v^{II} = -CqP,$$

$$p^{II}u^{12} - r^{12}v^{II} = -Bq^1P,$$

& par conséquent

$$v^{II} = \frac{p^{II}u^2 + CqP}{r^2} = \frac{p^{II}u^{12} + Bq^1P}{r^{12}};$$

donc

$$v^{II2} = \frac{p^{II2}u^2u^{12} + p^{II}P(Bq^1u^2 + Cqu^{12}) + BCq^1P^2}{r^2r^{12}},$$

& de-là, à cause de  $P = r^2r^{12} - p^{II2}$ ,

$$\begin{aligned} U = u^2u^{12} - v^{II2} &= \frac{P}{r^2r^{12}} (u^2u^{12} - p^{II}(Bq^1u^2 + Cqu^{12}) \\ &\quad - BCq^1P) = \frac{P}{r^2r^{12}} ((u^2 - Cqp^{II})(u^{12} - Bq^1p^{II}) \\ &\quad - BCr^2r^{12}qq^1). \end{aligned}$$

Mais les mêmes équations (b) donnent

$$u^2 - Cqp^{II} = -\left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{12}}\right)r^2,$$

&

$$u^{12} - Bq^1p^{II} = -\left(\frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{12}}\right)r^{12};$$

donc, substituant ces valeurs aussi bien que celles de  $q$  &  $q^1$ , on aura

$$\begin{aligned} U &= P \left( \left( \frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r^{12}} \right) \left( \frac{A+C}{r^3} + \frac{B}{r^{12}} \right) \right. \\ &\quad \left. - BC \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{12}} \right) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^{12}} \right) \right), \end{aligned}$$

ou bien

$$U = P \left( \frac{A^2}{r^2 r^3} + \frac{B}{r^2 r^3} + \frac{C^2}{r^3 r^3} + \frac{AB}{r^3} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \right) \right. \\ \left. + \frac{AC}{r^3} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \right) + \frac{BC}{r^3} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \right) \right).$$

D'où l'on voit que l'équation  $U=0$  ne peut donner que celle-ci  $P=0$ , l'autre facteur de  $U$  ne pouvant jamais devenir nul, à cause que les rayons  $r, r^I, r^{II}$  & les masses  $A, B, C$  sont des quantités positives.

### XXVIII.

L'équation  $P=0$  étant donc la seule qui puisse satisfaire au cas que nous examinons, ce cas n'aura lieu, comme nous l'avons vu plus haut, que lorsque les trois Corps seront rangés dans une même ligne droite, & que leurs distances seront dans le rapport exprimé par l'équation (d).

Or, nous avons déjà trouvé que les trois Corps doivent se mouvoir dans un plan fixe; de sorte que, connoissant la vitesse  $u$  du corps  $B$  autour de  $A$ , il n'y aura qu'à la diviser par  $r$  pour avoir la vitesse angulaire des corps  $B$  &  $C$ ; mais si l'on veut faire usage des formules générales de l'art. 22, on remarquera qu'à cause de  $P=0$ , on a (art. 27)  $\frac{u^2}{r^2} = \frac{u^{I2}}{r^{I2}} = \frac{u^{II2}}{r^{II2}}$ ; mais les équations (b) donnent

$$\frac{u^2}{C} + \frac{u^{I2}}{B} + \frac{u^{II2}}{A} = (A+B+C) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^I} + \frac{1}{r^{II}} \right);$$



donc substituant les valeurs précédentes de  $u^I$ , &  $u^{II}$ ,  
& faisant pour abrégé,

$$= K \frac{(A+B+C) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^I} + \frac{1}{r^{II}} \right)}{\frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A}}$$

on aura

$$u^2 = kr^2, \text{ \& de même } u^{I2} = kr^{I2}, u^{II2} = kr^{II2};$$

donc aussi

$$v = kp, v^I = kp^I, v^{II} = kp^{II}.$$

Ainsi, on aura (art. 22)

$$\Pi = kr^4, \Pi^I = kr^{I4}, \Pi^{II} = kr^{II4};$$

$$\Psi = kp^2, \Psi^I = kp^{I2}, \Psi^{II} = kp^{II2};$$

mais à cause de  $P=0$ , on a

$$p^2 = r^{I2}r^{II2}, p^{I2} = r^2r^{II2}, p^{II2} = r^2r^{I2};$$

donc

$$\Psi = kr^{I2}r^{II2}, \Psi^I = kr^2r^{II2}, \Psi^{II} = kr^2r^{I2};$$

donc l'équation ( $P$ ) deviendra

$$h^2 = k \left( \frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A} \right)^2;$$

d'où

$$h = \left( \frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A} \right) \sqrt{k};$$

ensuite, à cause de  $\psi = 0$  &  $\psi^I = 0$ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^I}{dt} = \frac{k}{h} \left( \frac{r^2}{C} + \frac{r^{I2}}{B} + \frac{r^{II2}}{A} \right) = \sqrt{k};$$

## XXIX.

Nous avons supposé ci dessus que les rayons  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  étoient constans, & nous avons vu que cela ne peut avoir lieu que dans deux cas; savoir, lorsque ces trois rayons sont égaux entr'eux, & lorsque l'un d'eux est égal à la somme des deux autres. Supposons maintenant que ces trois rayons soient seulement dans un rapport constant entr'eux, & voyons dans quel cas cette condition pourra avoir lieu. Soit donc  $r^I = mr$ , &  $r^{II} = nr$ ,  $m$  &  $n$  étant des quantités constantes, & l'on aura d'abord (art. 22),

$$p = \mu r^2, p^I = \mu^I r^2, p^{II} = \mu^{II} r^2$$

$$q = \frac{\pi}{r^3}, q^I = \frac{\pi^I}{r^3}, q^{II} = \frac{\pi^{II}}{r^3}$$

en faisant pour abrégé

$$\mu = \frac{m^2 + n^2 - 1}{2} \quad \pi = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3}$$

$$\mu^I = \frac{1 + n^2 - m^2}{2} \quad \pi^I = 1 - \frac{1}{n^3}$$

$$\mu^{II} = \frac{1 + m^2 - n^2}{2} \quad \pi^{II} = \frac{1}{m^3} - 1 = \pi - \pi^I$$

Donc l'équation (H) deviendra

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (C\mu\pi - B\mu^I\pi^I - A\mu^{II}\pi^{II})$$

ou bien, en faisant pour abrégé,

$$\lambda = C\mu\pi - B\mu^I\pi^I - A\mu^{II}\pi^{II},$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{\lambda}{r} = 0, \text{ \& int\&egrantant } \frac{d\alpha}{dt} = \alpha - \lambda \int \frac{dt}{r};$$

$\alpha$  \&eacute;tant une constante arbitraire \&eacute;gale \&agrave; la valeur de  $\frac{d p}{dt}$  lorsque  $t = 0$ .

Ensuite on aura

$$dQ = 2(\mu^I \pi^I - \mu^{II} \pi^{II}) \frac{dr}{r^2} - \pi(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3}$$

$$dQ^I = 2(\mu \pi + \mu^{II} \pi^{II}) \frac{dr}{r^2} + \pi^I(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3}$$

$$dQ^{II} = 2(-\mu \pi - \mu^I \pi^I) \frac{dr}{r^2} + \pi^{II}(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3}$$

donc, en int\&egrantant,

$$Q = \frac{2(\mu^I \pi^I - \mu^{II} \pi^{II})}{r} - f(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3} + k$$

$$Q^I = \frac{2(\mu \pi + \mu^{II} \pi^{II})}{r} + \pi^I f(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3} + k^I$$

$$Q^{II} = \frac{2(-\mu \pi - \mu^I \pi^I)}{r} + \pi^{II} f(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3} + k^{II}$$

$k, k^I$  &  $k^{II}$  \&eacute;tant des constantes arbitraires.

Faisant toutes ces substitutions dans les \&eacute;quations ( $K$ ) & divisant ensuite la seconde par  $m^2$  & la troisi\&eacute;me par  $n^2$ , elles deviendront celles-ci :

$$\frac{d^2 r^2}{2 dt^2} - \frac{A+B+C(1-\mu^I \pi^I + \mu^{II} \pi^{II})}{r} + C \pi f(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3} - Ck = 0,$$

$$\frac{d^2 r^2}{2 dt^2} - \frac{A+B+C(1-(\mu \pi - \mu^{II} \pi^{II})m)}{m^3 r} - \frac{B \pi^I}{m^2} f(\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^3} - \frac{Bk}{m^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 r^2}{2 u t^2} = \frac{A+B+C(1+\mu\pi+\mu^2\pi^2)n}{n^3 r} = \frac{A\pi^{II}}{n^2} \int (\alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}) \frac{dt}{r^2}$$

$$= \frac{Ak}{n^2} = 0,$$

lesquelles devront être identiques ; de sorte qu'on aura ces conditions à remplir :

$$1^{\circ}. A+B+C(1-\mu^I\pi^I+\mu^{II}\pi^{II})$$

$$= \frac{A+B+C(1-(\mu\pi-\mu^{II}\pi^{II})\pi)}{m^2}$$

$$= \frac{A+B+C(2+(\mu\pi+\mu^2\pi^2)n)}{n^2} ;$$

$$2^{\circ}. C\pi = -\frac{B\pi^2}{m^2} = -\frac{A\pi^{II}}{n^2},$$

ou bien

$$\alpha = 0 \text{ \& \ } \lambda = 0 ;$$

$$3^{\circ}. Ck = \frac{Bk}{m^2} = \frac{A\pi^{II}}{n^2}.$$

Ces deux dernières conditions peuvent toujours se remplir par le moyen des constantes indéterminées  $k, k^I$  &  $k^{II}$  ; ainsi la difficulté ne consiste qu'à satisfaire à celles des n<sup>os</sup>. 1 & 2,

Or, si on fait pour abrégé

$$\delta = \mu\mu + \mu\mu^{II} + \mu^I\mu^{II} = (1+m+n)(1+m-n)$$

$$(1-m+n)(1-m-n) ;$$

on pourra réduire les deux équations du n<sup>o</sup>. 1 à celle-ci par des transformations analogues à celles de l'article 27,

..(c)!

$$\left. \begin{aligned} (-C\pi + B\pi^I - A\pi^{II})\delta + \mu^{II}\lambda &= 0 \\ (C\pi + B\pi^I - A\pi^{II})\delta - \mu^I\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (e).$$

Ainsi, il n'y aura qu'à combiner ces deux équations avec celles du n°. 2, savoir  $C\pi = -\frac{B\pi^I}{m^2} = -\frac{A\pi^{II}}{n^2}$ ,

ou bien  $\alpha = 0$  &  $\lambda = 0$ ; ce qui fait deux cas que nous allons examiner séparément.

## X X X.

$$\text{Soit d'abord } C\pi = -\frac{B\pi^I}{m^2} = -\frac{A\pi^{II}}{n^2},$$

$$\text{donc } \pi^I = -\frac{m^2 C\pi}{B}, \text{ \& } \pi^{II} = -\frac{n^2 C\pi}{A};$$

mais on a  $\pi - \pi^I - \pi^{II} = 0$  (art. 29):

$$\text{donc } \pi \left( 1 + \frac{m^2 C}{B} + \frac{n^2 C}{A} \right) = 0,$$

$$\text{avoir } \pi \left( \frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A} \right) = 0.$$

Or, il est visible que la quantité  $\frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A}$  ne fauroit jamais devenir nulle, à cause que les masses  $A, B, C$ , sont des quantités positives; ainsi, il faudra que l'on ait  $\pi = 0$ , & par conséquent aussi  $\pi^I = 0$ ,  $\pi^{II} = 0$ ; or, dans ce cas, on aura  $\lambda = 0$ , & les deux équations (e) ci-dessus auront lieu d'elles-mêmes; de sorte que toutes les conditions se trouveront remplies, & le Problème des trois Corps sera résolvable exactement dans l'hypothèse de

$\pi = 0$ ,  $\pi^I = 0$ ,  $\pi^{II} = 0$ , ce qui donnera  $n = m = 1$ , & par conséquent  $r = r^I = r^{II}$ , c'est-à-dire, les distances entre les corps égales entr'elles, comme dans le cas de l'art. 14; mais avec cette différence, que dans le cas présent, elles peuvent être variables.

Pour connoître le mouvement des Corps dans ce cas, on reprendra les équations différentielles de l'art. 29, lesquelles, en faisant  $f = Ck = Bk^I = Ak^{II}$ , se réduisent à cette équation unique

$$\frac{d^2 r^2}{2 dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - f = 0;$$

multipliant par  $d \cdot r^2$ , & intégrant ensuite, on aura

$$\left( \frac{d \cdot r^2}{2 dt^2} \right)^2 - 2(A+B+C)r - fr^2 = H, H \text{ étant une}$$

constante arbitraire; & de-là

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{H + 2(A+B+C)r + fr^2}}$$

moyennant quoi on connoîtra  $t$  en  $r$ , & *vice-versa*;  $r$  en  $t$ .

Maintenant, puisque  $\pi = 0$ ,  $\pi^I = 0$ ,  $\pi^{II} = 0$ , on aura  $Q = k$ ,  $Q^I = k^I$ ,  $Q^{II} = k^{II}$ ; donc (art. 22)

$$n^2 = n^{I^2} = n^{II^2} = \frac{2(A+B+C)}{r} + f.$$

De plus, ayant  $\lambda = 0$ , on aura  $\frac{d\rho}{dt} = \alpha$  & cette constante  $\alpha$  devra être déterminée, en sorte qu'elle satisfasse à l'équation (N): on peut donner pour cela à  $t$  telle valeur qu'on voudra; mais en ne faisant aucune supposition par-

ticulière, l'équation (N) devra être identique avec celle que nous avons trouvée ci-dessus, pour la détermination de  $r$ ; & leur comparaison donnera la valeur de  $\alpha$ .

En effet, à cause de  $r = r^I = r^{II}$ , on aura  $p = p^I = p^{II} = \frac{r^2}{2}$

donc  $P = \frac{3r^4}{4}$ ; & de même, à cause de  $u = u^I = u^{II}$ , on

aura  $v = v^I = v^{II} = \frac{u^2}{2}$  donc  $U = \frac{3u^4}{4}$ ;

ensuite  $M = M^I = M^{II} = \frac{r^2}{2} \left( \frac{2rdr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2$

$+ r^2 \alpha^2 = 3r^2 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2 + r^2 \alpha^2$ ;

& l'équation (N) deviendra

$$gr^4 u^4 - b u^2 \left( 3r^2 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2 + r^2 \alpha^2 \right) + 3 \left( \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2 + \alpha^2 \right)^2 = 0;$$

ou bien

$$\left( 3r^2 u^2 - 3 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2 - \alpha^2 \right)^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$3r^2 u^2 - 3 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2 - \alpha^2 = 0.$$

Or, on a déjà trouvé  $u^2 = \frac{2(A+B+C)}{r} + f$ ,

donc substituant cette valeur, & résolvant l'équation, il viendra

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{\left( -\frac{\alpha^2}{3} + 2(A+B+C)r + fr^2 \right)}}$$

Comparant donc cette équation avec la précédente, on aura  $H = -\frac{\alpha^2}{3}$ , & par conséquent  $\alpha = \sqrt{(-3H)}$ ; d'où l'on voit que  $H$  doit être nécessairement une quantité négative.

On aura ensuite

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi^I = \Pi^{II} = r^2 u^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{3}, \\ &\& \\ \Psi &= \Psi^I = \Psi^{II} = \frac{r^2 u^2}{4} - \left(\frac{rdr}{2dt}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{4 \cdot 3} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{3}; \end{aligned}$$

donc l'équation ( $P$ ) deviendra

$$\frac{\alpha}{3} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A} \right)^2 = b^2,$$

d'où l'on tire

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{B} + \frac{1}{A} \right).$$

Or, puisqu'on a déjà trouvé  $M = M^I = M^{II}$

$$= 3r^2 \left(\frac{rd.}{dt}\right)^2 + r^2 \alpha^2, \text{ \& que } 3r^2 u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - \alpha^2 = 0,$$

$$\text{on aura } M = M^I = M^{II} = 3r^4 u^2;$$

$$\text{d'ailleurs on a } 4P = 3r^4, \text{ \& } u = u^I = u^{II};$$

donc on aura

$$4Pu^2 - M = 0, 4Pu^{I2} - M^I = 0, 4Pu^{II2} - M^{II} = 0;$$

$$\text{\& par conséquent } \text{fin. } \psi = 0, \text{ \& } \text{fin. } \psi^I = 0;$$

c'est-à-dire,  $\psi = 0$  &  $\psi^I = 0$ ; ce qui montre que les



$B$  &  $C$  doivent se mouvoir dans un même plan fixe passant par le corps  $A$ .

Maintenant, si on substitue dans les expressions de  $\frac{d\varphi}{dt}$ , &  $\frac{d\psi^2}{dt}$  les valeurs de  $\Pi$ ,  $\Pi^I$ ,  $\Psi$ ,  $\Psi^I$ ,  $\Psi^{II}$ , & de  $h$

trouvées ci-dessus, on aura  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi^2}{dt} = \frac{a}{r^2\sqrt{v}}$ ;

& par conséquent en substituant la valeur ci-dessus de  $dt$

$$d\varphi = \frac{dr}{r\sqrt{(-1 + \frac{6(A+B+C)}{a^2}r + \frac{3f}{a^2}r^2)}}$$

qui est l'équation polaire d'une section conique, rapportée au foyer, & dans laquelle  $\frac{2(A+B+C)}{-f}$  est le grand axe, &  $\frac{2a^2}{3(A+B+C)}$  le paramètre.

Ainsi, les corps  $B$  &  $C$  décriront dans ce cas autour du corps  $A$  deux sections coniques semblables & égales, dont l'espece & la forme dépendront des quantités arbitraires  $f$ , &  $a$ , lesquelles pourront se déterminer par les

équations  $a^2 = 3r^2u^2 - 3\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$ , &  $f = u^2 - \frac{3(A+B+C)}{r}$

en donnant à  $u$ ,  $r$  &  $\frac{dr}{dt}$  les valeurs qui conviennent au premier instant.

## XXXI.

Reste à examiner le cas où  $\alpha = 0$ , &  $\lambda = 0$ ; or, la supposition de  $\lambda = 0$  réduit d'abord les équations (e) à celles-ci,

$$(-C\pi + B\pi^I - A\pi^{II})\delta = 0$$

$$(C\pi^I + B\pi^I - A\pi^{II})\delta = 0,$$

lesquelles donnent ou  $\delta = 0$ , ou bien

$$C\pi + B\pi^I - A\pi^{II} = 0, \text{ \& } C\pi^I + B\pi^I - A\pi^{II} = 0;$$

c'est-à-dire,  $C\pi = 0$  &  $B\pi^I - A\pi^{II} = 0$ .

Or, j'observe d'abord que ces deux dernières équations sont inutiles; car on auroit d'abord  $\pi = 0$ , ensuite, à cause de  $\pi^{II} = \pi = \pi^I$ , on auroit  $\pi^{II} = -\pi^I$ ; de sorte que l'équation  $B\pi^I - A\pi^{II} = 0$  deviendrait  $(B + A)\pi^I = 0$ , ce qui donneroit  $\pi^I = 0$ ; on auroit donc  $\pi = \pi^I = \pi^{II} = 0$ ; ce qui rentre dans le cas que nous avons examiné ci-dessus.

Il faut donc faire  $\delta = 0$ , de sorte que la solution du Problème sera renfermée dans ces trois équations

$$\delta = 0, \lambda = 0, \text{ \& } \alpha = 0.$$

La première donnera (art. 29)

$$(1 + m + n) (1 + m - n) (1 - m + n) (1 - m - n) = 0$$

donc  $1 + m + n = 0$ ,

& par conséquent  $r + r^I + r^{II} = 0$ ,

c'est-à-dire, que l'une des trois distances  $r, r^I, r^{II}$  doit être égale aux deux autres, & conséquemment que les trois Corps doivent être toujours rangés dans une même ligne droite.

Ce cas est donc analogue à celui de l'art. 26, mais il est plus général en ce que les distances entre les corps peuvent être variables, pourvu que leurs rapports soient constans.

On déterminera ces rapports par l'équation  $\lambda = 0$ , & pour cela on pourra supposer, comme dans l'article cité, que les trois corps  $A, B, C$ , soient disposés de suite dans une même ligne droite, en sorte que  $r^{\text{II}} = r^{\text{I}} - r$ , ce qui donnera  $n = m - 1$ ; on substituera donc cette valeur de  $n$  dans l'expression de  $\lambda$  de l'art. 29, & l'on aura une équation en  $m$  qui sera la même que l'équation (d) de l'art. 26. Mais il faut voir encore si la condition de  $\alpha = 0$  peut avoir lieu; & comme la constante  $\alpha$  doit être déterminée par l'équation (N), tout se réduit à savoir si cette équation peut subsister en y faisant  $\alpha = 0$ , c'est-

à-dire  $\frac{dp}{dt} = 0$  à cause de  $\frac{dp}{dt} = \alpha - \lambda \int \frac{dt}{r}$  (art. 29)

& de  $\lambda = 0$ .

Or, en supposant  $\frac{dp}{dt}$  & substituant pour  $r^{\text{I}}, r^{\text{II}}$  &  $p, p^{\text{I}}, p^{\text{II}}$ ,

leurs valeurs (article cité) on aura

$$P = (\mu\mu^{\text{I}} + \mu\mu^{\text{II}} + \mu^{\text{I}}\mu^{\text{II}})r^4,$$

$$M = (\mu + \mu^{\text{I}}\mu^{\text{II}} + \mu^{\text{II}}\mu^{\text{I}})r^2 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2,$$

$$M^{\text{I}} = (\mu^{\text{I}}m^4 + \mu\mu^{\text{II}2} + \mu^{\text{II}}\mu^{\text{I}2})r^2 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2,$$

$$M^{\text{II}} = (\mu^{\text{II}}n^4 + \mu^{\text{I}}\mu^{\text{I}2} + \mu\mu^{\text{I}2})r^2 \left( \frac{rdr}{dt} \right)^2,$$

$$\frac{d\rho dr^I + d\rho r^{II} + d\rho r^{III} - d\rho}{dt^2} = (\mu\mu^I + \mu\mu^{II} + \mu^I\mu^{II})$$

$$\left(\frac{2r dr}{dt}\right)^2;$$

mais par la nature des quantités  $\mu$ ,  $\mu^I$ ,  $\mu^{II}$ ,  
on a  $\mu^I + \mu^{II} = 1$ ,  $\mu + \mu^{II} = m$ ,  $\mu + \mu^I = n$  ;  
de plus, on a, en vertu de l'équation  $\delta = 0$ ,

$$\mu\mu^I + \mu\mu^{II} + \mu^I\mu^{II} = 0;$$

donc on aura aussi

$$\mu + \mu^I\mu^{II} + \mu^{II}\mu^I = 0, \quad \mu^I m^2 + \mu\mu^{II} + \mu^{II}\mu^2 = 0,$$

$$\mu^{II} n^2 + \mu^I\mu^2 + \mu\mu^I = 0;$$

de sorte que toutes les quantités précédentes  $P$ ,  $\Sigma$ , &c.  
feront nulles, & conséquemment l'équation (N) se trou-  
vera vérifiée d'elle-même.

### X X X I I.

Maintenant, il est clair qu'à cause de  $a=0$ , &  $\lambda=0$ ,  
les trois équations différentielles de l'art. 29 se réduiront  
à celle-ci.

$$\frac{d \cdot r^2}{2 dt^2} - \frac{F}{r} - f = 0$$

en faisant pour abrégé

$$F = A + B + C(1 - \mu^I\pi^I + \mu^{II}\pi^{II}),$$

$$\& f = Ck \frac{B\lambda^I}{m^2} = \frac{A\lambda^{II}}{n^2}.$$

Cette

Cette équation étant donc multipliée par  $d.r^2$ , & ensuite intégrée, donnera

$$\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 - 2Fr - fr^2 = H,$$

$H$  étant une constante arbitraire ;  
d'où l'on tire

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{H+2Fr+fr^2}},$$

moynnant quoi on déterminera  $t$  en  $r$ , & par conséquent  $r$  &  $t$ .

De plus, si, dans les équations (J) de l'art. 22, on substitue les valeurs de  $Q$ ,  $Q^I$ ,  $Q^{II}$  de l'art. 29, on aura en vertu des équations du numero 1 du même article

$$u^2 = \frac{2F}{r} + f, u^{I^2} = \frac{2m^2F}{r} + m^2f, u^{II^2} = \frac{2n^2F}{r} + n^2f,$$

donc

$$v = \frac{2\mu F}{r} + \mu f, v^I = \frac{2\mu^I F}{r} + \mu^I f, = \frac{2\mu^{II} F}{r} + \mu^{II} f.$$

De-là on trouvera

$$\Pi = 2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = -H,$$

$$\Pi^I = m'(2Fr + fr^2 - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2) = -Hm^4;$$

$$\Pi^{II} = Hn^4,$$

$$\Psi = \mu^2 \left( 2Fr + fr^2 - \left( \frac{rdt}{dt} \right)^2 \right) = -H\mu^2 = -Hm^2 n^2,$$

$$\Psi^I = -H\mu^I = -Hn^2,$$

$$\Psi^{II} = -H\mu^{II} = -Hm^2,$$

à cause de  $\mu\mu^I + \mu\mu^{II} + \mu^I\mu^{II} = 0$ ,

& par conséquent  $\mu^2 = m^2 n^2$ ,  $\mu^I = n^2$ ,  $\mu^{II} = m^2$ .

Donc, si on substitue ces valeurs dans l'équation (P), elle deviendra

$$-H \left( \frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A} \right)^2,$$

d'où

$$h = \left( \frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A} \right) \sqrt{-H},$$

d'où l'on voit que  $H$  doit être une quantité négative.

Or, à cause de  $P=0$ , & de  $\Sigma=0$ ,  $\Sigma^I=0$ ,  $\Sigma^{II}=0$ , on aura  $\sin. \psi = 0$  &  $\sin. \psi^I = 0$ , ce qui montre que les deux corps  $B$  &  $C$  doivent se mouvoir dans un même plan fixe passant par le corps  $A$ , & l'on trouvera ensuite pour les angles de rotation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi^I}{dt} = \frac{-H}{hr^2} \left( \frac{1}{C} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{A} \right) = \frac{\sqrt{-H}}{r^2}.$$

Et si l'on substitue la valeur de  $dt$ , trouvée ci-dessus, on aura

$$d\varphi = \frac{dr}{r \sqrt{\left( -1 + \frac{2F}{-H} r + \frac{f}{-H} r^2 \right)}}$$

équation polaire d'une section conique, rapportée au foyer, dans laquelle  $\frac{2F}{f}$  fera le grand axe,

& —  $\frac{2H}{F}$  le paramètre.

## XXXIII.

Nous venons donc de voir que le Problème des trois Corps est résoluble exactement, soit que les distances entre les trois corps soient constantes, ou qu'elles gardent seulement entr'elles des rapports constants, & cela dans deux cas : savoir lorsque les trois distances sont égales entr'elles, en sorte que les trois corps forment toujours un triangle équilatère, & lorsque l'une des distances est égale à la somme ou à la différence des deux autres, en sorte que les trois corps se trouvent toujours rangés en ligne droite.

Or, si on suppose que les distances  $r$ ,  $r^I$ ,  $r^{II}$  soient variables, mais de manière que leurs valeurs ne s'écartent que très-peu de celles qu'elles devroient avoir, pour que l'un des cas précédens eût lieu, il est clair que le Problème sera résoluble à très-peu-près, & par les méthodes connues d'approximation; mais nous n'entrons pas ici dans ce détail, qui nous écarteroit trop de notre objet principal.

J'avoue au reste qu'on pourroit résoudre les Problèmes précédens d'une manière plus simple par les formules ordinaires du Problème des trois Corps entre les rayons rec-

teurs & les angles décrits par ces rayons , si on vouloit se borner d'abord à l'hypothèse que les corps se meuvent dans un même plan fixe ; mais il ne seroit pas aisé, ce me semble , d'en venir à bout par les mêmes formules, si on supposoit , comme nous l'avons fait , que les corps pussent se mouvoir dans des plans différens.





## CHAPITRE III.

*Modification des formules du Chapitre premier, pour le cas où l'on suppose que l'un des trois Corps soit éloigné des deux autres.*

## XXXIV.

LE cas que nous allons examiner a lieu dans le Système du Monde, par rapport à ces trois Planètes, le Soleil, la Terre, & la Lune, dont les deux dernières sont beaucoup plus éloignées de la première qu'elles ne le sont l'une de l'autre; mais nous ne considérons ici le cas dont il s'agit, que d'une manière générale, & seulement pour voir quelles modifications, cette supposition doit apporter aux formules générales de l'article 22.

Supposons donc que le corps  $C$  soit beaucoup plus éloigné des corps  $A$  &  $B$  que ceux-ci ne le sont entr'eux, enforte que les quantités  $r^I$  &  $r^{II}$  soient fort grandes par rapport à la quantité  $r$ ; pour cela nous prendrons une quantité  $i$  que nous supposerons constante & très-petite, & nous ferons  $r^I = \frac{R}{i}$ ,  $r^{II} = \frac{K^I}{i}$ , enforte que  $R$  &  $R^I$  soient des quantités finies & comparables à  $r$ . Or si on nomme, comme dans l'article 19,  $\zeta^{II}$  l'angie formé au centre du corps  $A$  par les rayons recteur  $r$  &  $r^I$  des corps

$$B \text{ \& } C, \text{ on aura } \cos. \zeta^{II} = \frac{r^2 - \frac{r^2}{i^2} - r^2}{2 \cdot r}$$

$$\text{d'où } r^{II_2} = r^{I_2} - 2r^2 \cos. \zeta^{II} + r^2,$$

$$\text{ou bien } R^{I_2} = R^2 - 2iRr \cos. \zeta^{II} + i^2 r^2.$$

$$\text{Donc, si on fait } z = r \cos. \zeta^{II},$$

$$\text{on aura } R^{I_2} = Q^2 - 2iRz + i^2 r^2;$$

$$\text{donc } r^{I_2} = \frac{R^2}{i^2}, r^{II_2} = \frac{R^2}{i^2} - \frac{2Rr}{i} + r^2,$$

De-là on aura

$$\begin{aligned} \frac{r}{i^2} &= \frac{i}{R}, r^{II} = \frac{i}{R} + \frac{i^2(2Rr - ir^2)}{2R^2} \\ &+ \frac{3i^3(2Rr - ir^2)^2}{8R^3} + \frac{5i^4(2Rr - ir^2)^3}{16R^4} + \&c. \\ &= \frac{i}{R} + \frac{i^2 r}{R^2} + \frac{i^3(3r^2 - r^2)}{2R^3} + \frac{i^4(5r^3 - 3r^2)}{2R^4} + \&c \\ \frac{r^2}{i^3} &= \frac{i^3}{R^3}, r^{III} = \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4(2Rr - ir^2)}{2R^4} \\ &+ \frac{15i^5(2Rr - ir^2)^2}{8R^5} + \frac{35i^6(2Rr - ir^2)^3}{16R^6} + \&c. \\ &= \frac{i^3}{R^3} + \frac{3i^4 r}{R^4} + \frac{i^5(15r^2 - 3r^2)}{2R^5} + \frac{i^6(35r^3 - 15r^2)}{2R^6} + \&c, \end{aligned}$$

Donc (art. 22),

$$p = \frac{R^2}{i^2} - \frac{Rr}{i}, p^2 = -\frac{Rr}{i} + r^2, p^{II} = \frac{Rr}{i},$$

$$q = -\frac{3i^2 r}{R^3} - \frac{i^3(15r^2 - 3r^2)}{2R^5} - \frac{i^6(35r^3 - 15r^2)}{2R^6} - \&c$$

$$q^I = \frac{1}{r^3} - \frac{i_1}{R^3} - \frac{3i^2\zeta}{R^4} - \frac{i^3(15\zeta^2 - 3r^2)}{2R^5} \\ - \frac{i^4(35\zeta^3 - 15\zeta r^2)}{2R^6} - \&c.$$

$$q^{II} = -\frac{1}{r^3} + \frac{i^3}{R^3};$$

& de-là

$$pq = -\frac{3i^2\zeta}{R^2} - \frac{i^3(9\zeta^2 - 3r^2)}{2R^3} - \frac{i^4(10\zeta^3 - 12\zeta r^2)}{2R^4} - \&c.$$

$$p^I q^I = -\frac{R\zeta}{i^3} + \frac{1}{r} + \frac{i^2}{R^2} + \frac{i^3(3\zeta^2 - r^2)}{R^3} \\ + \frac{i^4(15\zeta^3 - 9r^2\zeta)}{2R^4} + \frac{i^5(35\zeta^4 - 30\zeta^2 r^2 + 3r^4)}{2R^5} + \&c.$$

$$p^{II} q^{II} = -\frac{R\zeta}{i^3} + \frac{i^2}{R^2}.$$

O, comme  $pq$  est une quantité très-petite de l'ordre de  $i^2$ , & que  $p^I q^I, p^{II} q^{II}$  sont des quantités fort grandes de l'ordre de  $\frac{1}{i}$ , il est clair qu'en substituant les valeurs de ces quantités dans l'équation (H), les termes  $Cpq$ ,  $Bp^I q^I$ ,  $Ap^{II} q^{II}$  ne pourront être homogènes, à moins que la masse  $C$  ne soit infiniment grande de l'ordre  $\frac{1}{i^3}$  vis-à-vis des deux autres.

Supposons donc  $C = \frac{D}{i^3}$ , & l'équation (H) de l'art. 22 deviendra après les substitutions

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{1}{t} \left( \frac{(A+B)R}{r^3} - \frac{3D}{R^2} \right) \sigma - \frac{B}{r} - \frac{D(5r^2 - 3r^2)}{2R^3} \\ - \frac{iD(10r^3 - 12r^2)}{2R^4} - \&c. = 0;$$

d'où l'on voit que la quantité  $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{t^2}$ ,  
de sorte que la quantité  $\frac{d\sigma}{dt}$  sera aussi du même ordre.

Donc, si on fait, pour abrégér,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left( \frac{(A+B)R}{r^3} - \frac{3D}{R^2} \right) \sigma \\ - i \left( \frac{B}{r} + \frac{3D(3r^2 - r^2)}{2R^3} \right) \\ - i^2 \left( \frac{D(5r^3 - 6r^2)}{R^4} \right) \\ - \&c. \dots \dots \dots (f)$$

on aura  $\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{t}$  & il faudra prendre la valeur de  $\sigma$  telle qu'elle soit nulle lorsque  $t = 0$ .

### XXXV.

$$q dp = -\frac{6i^2 r dR}{R^3} - \frac{i^3(15r^2 - 3r^2)dR - 3r d \cdot Rr}{R^4} - \&c. \\ q^2 dp^2 = -\frac{d \cdot Rr}{ir} \frac{2dr}{r^2} + \frac{i^2 d \cdot Rr}{R^3} + \frac{i(3rd \cdot Rr - Rd \cdot r^2)}{R^4} \\ + \frac{i^3(15r^2 - 3r^2)d \cdot Rr - 6Rr d \cdot r^2}{2R^5}$$

$$+ \frac{i^3((35\zeta^2 - 15\zeta r^2)d \cdot R\zeta - (15\zeta^2 - 3r^2)Rd \cdot r^2)}{2R^6} + \&c.$$

$$q'' dp'' = - \frac{d \cdot R\zeta}{ir^3} + \frac{i^2 d \cdot R\zeta}{R}$$

De sorte que les valeurs de  $dQ$ ,  $dQ^I$  &  $dQ^{II}$  deviendront

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{2dr}{r^2} + i^3 \left( - \frac{d \cdot r^2}{R^3} + \frac{3\zeta(d \cdot R\zeta - \sigma dt)}{R^4} \right) \\ &+ i^4 \left( - \frac{3\zeta d \cdot r^2}{R^4} + \frac{(15\zeta^2 - 3r^2)(d \cdot R\zeta - \sigma dt)}{2R^5} \right) \\ &+ i^5 \left( - \frac{(15\zeta^2 - 3r^2)d \cdot r^2}{2R^5} + \frac{(35\zeta^2 - 15\zeta r^2)(d \cdot R\zeta - \sigma dt)}{2R^6} \right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dQ^I &= - \frac{i}{i} \left( \frac{d \cdot R\zeta + \sigma dt}{r^3} \right) + i^2 \left( \frac{-b\zeta dR + d \cdot R\zeta + \sigma dt}{R^3} \right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dQ^{II} &= \frac{i}{i} \left( \frac{d \cdot R\zeta + \sigma dt}{r^3} \right) - \frac{2dr}{r^2} - i^2 \left( \frac{-6\zeta dR + d \cdot R\zeta + \sigma dt}{R^3} \right) \\ &- \&c. \end{aligned}$$

Donc, faisant toutes ces substitutions dans les équations ( $K$ ), elles deviendront

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r^2}{2dt^2} - \frac{A+B}{r} - D \left( \frac{3\zeta^2 - r^2}{R^3} + \int \left( - \frac{d r^2}{R^3} + \frac{3\zeta(d \cdot R\zeta - \sigma dt)}{R^4} \right) \right) \\ - iD \left( \frac{15\zeta^2 - 9r^2\zeta}{2R^4} + \int - \frac{3\zeta d \cdot r^2}{R^4} + \frac{(15\zeta^2 - 3r^2)(d \cdot R\zeta - \sigma dt)}{2R^5} \right) \end{aligned}$$

*Prix de l'Académie; Tome IX, 1772. M*

$$-i^2 D \left( \frac{35\zeta^4 - 30\zeta^2 r^2 + 3r^4}{2R^2} + \int \left( -\frac{(15\zeta^2 - 3r^2)d.r^2}{2R^2} + \frac{(35\zeta^3 - 15\zeta r^2)(d.R\zeta - o dt)}{2R^2} \right) \right)$$

— &c. = à une constante . . . . . (g)

$$\frac{d^2.R^2}{2i^2 dt^2} - \frac{D}{i^2 R} + \frac{B}{i} \left( \frac{R\zeta}{r^3} + \int \frac{d.R\zeta + o dt}{r^3} \right)$$

$$- \frac{i(A+B)}{R} - \&c. = \text{à une constante.}$$

$$\frac{d^2.R^2}{2i^2 dt^2} - \frac{d^2.R\zeta}{idt^2} + \frac{d^2.r^2}{idt^2} - \frac{D}{i^2 R}$$

$$- \frac{i}{i} \left( \frac{D\zeta}{R^2} + A \left( \frac{R\zeta}{r^3} + \int \left( \frac{d.R\zeta + o dt}{r^3} \right) \right) \right)$$

$$- \frac{D(3\zeta^2 - r^2)}{3R^3} - \frac{A}{r} - i \left( \frac{D(15\zeta^3 - 3\zeta r^2)}{2R^4} + \frac{A+B}{R} \right)$$

— &c. = à une constante ;

dont les deux dernières se réduisent à celles-ci :

$$\frac{d^2.R^2}{2dt^2} - \frac{D}{R} + iB \left( \frac{R\zeta}{r^3} + \int \left( \frac{d.R\zeta + o dt}{r^3} \right) \right) + \frac{i^3(A+B)}{R}$$

+ &c. = à une constante . . . . . (h).

$$\frac{d^2.R\zeta}{dt^2} + \frac{D\zeta}{B^2} + (A+B) \left( \frac{R\zeta}{r^3} + \int \left( \frac{d.R\zeta + o dt}{r^3} \right) \right)$$

$$- i \left( \frac{B}{r} + \frac{D(3\zeta^2 - r^2)}{2R^3} + D \int \left( -\frac{d.r^2}{R^3} + \frac{3\zeta(d.R\zeta - o dt)}{R^4} \right) \right)$$

$$- i^2 D \left( \frac{15\zeta^3 - 3\zeta r^2}{R^4} + \int \left( -\frac{3\zeta d.r^2}{R^4} + \frac{(15\zeta^2 - 3r^2)(d.R\zeta - o dt)}{2R^5} \right) \right)$$

— &c. = à une constante . . . . . (i).

Ainsi, on aura à la place des équations (*k*) de l'art. 22 les trois équations (*g*), (*h*) & (*i*) dans lesquelles on n'a négligé que les quantités très-petites de l'ordre de *i* & des ordres suivans; & ces équations serviront à trouver les valeurs de *r*, *R* & *z* en *t*; moyennant quoi le Problème sera résolu dans toute sa généralité, puisqu'il ne s'agira plus ensuite que de substituer ces valeurs dans les formules qui donnent les latitudes & les longitudes des corps *B* & *C* (art. 22). Or, comme la supposition de *i* très-petit simplifie aussi beaucoup les substitutions dont il s'agit, nous allons donner encore les valeurs de  $\sin. \psi$ ,  $\sin. \psi^I$  & de  $\frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\frac{d\varphi^I}{dt}$ , exprimé en *r*, *R* & *z*; mais nous ne pousserons pas la précision au-delà des quantités de l'ordre de *i*.

## XXXVI.

Pour cela nous commencerons par chercher les valeurs des vitesses *u*, *u<sup>I</sup>*, *u<sup>II</sup>*; or, si dans les équations (*J*) on substitue à la place des quantités *CQ*, *BQ<sup>I</sup>*, *AQ<sup>II</sup>* leurs valeurs tirées des équations (*k*) on a en général

$$u^2 = \frac{d^2.r^2}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r} - C(p^I q^I - p^{II} q^{II})$$

$$u^{I2} = \frac{d^2.r^{I2}}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r} - B(pq + p^{II} q^{II})$$

$$u^{II2} = \frac{d^2.r^{II2}}{2dt^2} + \frac{A+B+C}{r^{II2}} - A(-pq - p^I q^I).$$

Donc faisant ici les mêmes substitutions que ci-dessus ;  
& supposant pour abréger

$$(K) \begin{cases} L = \frac{d^2 \cdot r^2}{2di^2} + \frac{A+B}{r} - \frac{D(3\chi^2 - r^2)}{R^3} \\ M = \frac{d^2 \cdot R^2}{2di^2} + \frac{D}{R} \\ N = \frac{d^2 \cdot R\chi}{di^2} + \frac{(A+B)R\chi}{r^3} - \frac{D\chi}{R^2} \end{cases}$$

on aura

$$u^2 = L - \frac{iD(15\chi^2 - 9r^2\chi)}{2R^3} - \&c.$$

$$u^{I_2} = \frac{M}{i^2} + \frac{BR\chi}{i^3} + \&c.$$

$$u^{II_2} = \frac{N}{i^2} + \frac{1}{i} \left( \frac{BR\chi}{r^3} - N \right) + L - \frac{B}{r} \\ + \frac{3D(3\chi^2 - r^2)}{2R^3} + \&c.$$

Or on a

$$P = p p^I + p p^{II} + p^I p^{II} = p r^2 + p^I p^{II} = \frac{R^2(r^2 - \chi^2)}{i^2};$$

donc

$$4P u^2 = \frac{LR^2(r^2 - \chi^2)}{i^2} - \frac{D(r^2 - \chi^2)(15\chi^2 - 9r^2\chi)}{2iR^3} - \&c.$$

$$4P u^I = \frac{MR^2(r^2 - \chi^2)}{i^3} + \frac{BR^3\chi(r^2 - \chi^2)}{i^3 r^3} + \&c.$$

$$4P u^{II_2} = \frac{NR^2(r^2 - \chi^2)}{i^4} + \frac{BR^3\chi(r^2 - \chi^2)}{i^3 r^3} - \frac{NR^2(r^2 - \chi^2)}{i^3} - \&c$$



De plus, en faisant pour abrégé

$$\Gamma = \frac{R^2(d \cdot r^2)^2 + r^2(d \cdot R\zeta)^2 - 2R\zeta d \cdot R\zeta d \cdot r^2}{dt^2}$$

$$+ \frac{2\sigma(R\zeta d \cdot r^2 - r^2 d \cdot R\zeta)}{dt} + r^2 \sigma^2$$

$$\Delta = \frac{R^2(d \cdot R\zeta)^2 + r^2(d \cdot R^2)^2 - 2R\zeta d \cdot R\zeta d \cdot R^2}{dt}$$

$$+ \frac{2\sigma(R^2 d \cdot R\zeta - R\zeta d \cdot R^2)}{dt} + R^2 \sigma^2$$

$$\Lambda = \frac{R\zeta(d \cdot R^2 d \cdot r^2 - (d \cdot R\zeta)^2 - d \cdot (R^2 r^2))}{dt^2}$$

$$- \frac{\sigma(R^2 d \cdot r^2 - r^2 d \cdot R^2)}{dt} - R\zeta \sigma^2$$

on aura

$$M = \frac{\Gamma}{i^2}, \quad M^I = \frac{\Delta}{i^2}, \quad M^{II} = \frac{\Delta}{i^2} + \frac{2\Lambda}{i^2} + \frac{\Gamma}{i^2},$$

donc substituant ces valeurs dans les expressions de  $\sin \psi$ ,  
&  $\sin \psi^I$ , & faisant encore

$$k = \frac{k}{i^2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$$

$$\lambda = B^2(r^2 - z^2) \left( M + \frac{iRR}{r^3} - \frac{\Delta}{4} \right)$$

$$\mu = R^2(r^2 - z^2) N + \frac{\Lambda}{2}$$

on aura aux quantités de l'ordre  $i^2$  près.

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= \frac{AV\lambda + BV\lambda - i\mu}{k(A+B)r^2} \\ \sin \psi^I &= \frac{iRV(\lambda - i\mu)}{k(A+B)R} \end{aligned} \right\} \cdot (l)$$

ou bien

$$\left. \begin{aligned} \sin. \psi &= \frac{V\lambda}{kr} - \frac{iB\mu}{2k(A+B)rV\lambda} \\ \sin. \psi^1 &= \frac{iBV\lambda}{k(A+B)R} \end{aligned} \right\} \dots (l^3)$$

la quantité  $k$  étant une constante qu'on déterminera par l'équation ( $P^1$ ) comme on le verra ci-dessous.

Ainsi, on connoîtra par ces formules les latitudes  $\psi$  &  $\psi^1$  des corps  $B$  &  $C$  par rapport à un plan fixe passant par  $A$ .

On voit par-là qu'on aura à très-peu-près

$$\frac{\sin. \psi^1}{\sin. \psi} = \frac{iBr}{(A+B)R} = \frac{Br}{(A+B)r^1}$$

ce qui donne un rapport bien simple & très-remarquable entre les latitudes des corps  $B$  &  $C$ .

### XXXVII.

On trouvera ensuite

$$\Pi = Lr^2 = \left( \frac{d.r^2}{2dt} \right)^2 - \frac{iD(15\zeta^1 - 9r^2\zeta)r^2}{2R^4} - \&c.$$

$$\Pi^1 = \frac{1}{i^4} \left( MR^2 - \left( \frac{d.R^2}{2dt} \right)^2 \right) + \&c.$$

$$\begin{aligned} \Pi^{11} &= \frac{1}{i^4} \left( MR^2 - \left( \frac{d.R^2}{2dt} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{i^3} \left( \frac{BR^3\zeta}{r^4} - NR^2 - 2MR\zeta - \frac{d.R^2.d.R\zeta}{di^2} \right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

&, à cause de

$$v = \frac{M}{i^2} + \frac{1}{i} \left( \frac{BR\zeta}{r^3} - \frac{N}{2} \right) + \&c.$$

$$v^I = -\frac{N}{2i} + L - \frac{B}{2r} + \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^3} + \&c.$$

$$v^{II} = \frac{N}{2i} + \frac{B}{2r} - \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^3} + \&c.$$

on aura de même

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{i^4} \left( MQ^2 - \left( \frac{dR\zeta}{2dt} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{i^3} \left( \frac{BR^3\zeta}{r^3} - \frac{NR^2}{2} - MR\zeta + \frac{d \cdot R^2 \cdot d \cdot R\zeta}{2dt^2} \right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^I &= \frac{1}{i^2} \left( NRz - \left( \frac{dR\zeta}{2dt} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{4} \right) \\ &+ \frac{1}{i} \left( - \left( L - \frac{B}{2r} + \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^3} \right) Rz - \frac{Nr^2}{2} + \frac{dR\zeta \cdot r^2}{2dt^2} \right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{II} &= \frac{1}{i^2} \left( NRz - \left( \frac{dR\zeta}{2dt} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{4} \right) \\ &+ \frac{1}{i} \left( \frac{B}{2r} - \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)}{4R^3} \right) Rz \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Donc, si on substitue ces valeurs dans les expressions de

$\frac{d\varphi}{dt}$ , &  $\frac{d\varphi^I}{dt}$ , & qu'on fasse pour abrégé

$$\begin{aligned} \pi &= NRz - \left( \frac{d.R\zeta}{2dt} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{4} \\ \varepsilon &= \frac{BR\zeta}{2r} - \frac{3D(3\zeta^2 - r^2)\zeta}{4R^2} \\ \eta &= -LRz - \frac{Nr^2}{2} + \frac{d.R\zeta d.r^2}{2dt^2} \\ \rho &= MR^2 - \left( \frac{d.R^2}{2dt} \right)^2 \\ \nu &= -MRz - \frac{NR^2}{2} - \frac{d.R^2 d.R\zeta}{2dt^2} \end{aligned}$$

on aura

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\pi + i\left(\varepsilon + \frac{B}{A+B}\eta\right)}{kr^2 \cos^2 \psi^2} \\ \frac{d\varphi^2}{dt} &= \frac{\rho + iB\left(\frac{R\zeta}{r^2} + \frac{\nu}{A+B}\right)}{kR^2 \cos^2 \psi^2} \end{aligned} \right\} \dots (m).$$

XXXVIII.

Voyons maintenant comment on doit déterminer la constante  $k$  & les autres constantes du Problème. Pour cela, on supposera, comme dans l'art. 22 que, lorsque  $z = r$ , on ait  $\frac{dr}{dt} = 0$ ,  $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ , &  $\zeta'' = 0$ ; par consé-

quent  $\frac{dr}{dt} = 0$ ,  $\frac{dR}{dt} = 0$ ,  $z = r$ , &  $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ ,

à cause

à cause de  $z = r \operatorname{cof} \zeta^{\text{II}}$ ; & l'équation ( $P^{\text{I}}$ ) de l'article cité, donnera

$$k^2 = M R^2 + iB \left( \frac{R^3}{r^2} - \frac{2MRr + NR^2}{A+B} \right) \dots (n),$$

d'où l'on tirera aisément la valeur de  $k$  en ayant soin de rapporter les valeurs de  $R$ ,  $r$ , & de  $M$ ,  $N$  au point où  $t = 0$ .

De plus, on se souviendra que la valeur de  $\sigma$  doit être prise, en sorte qu'elle soit nulle lorsque  $t = 0$ .

## XXXIX.

Au reste, il est bon de remarquer que dès que l'on aura trouvé les latitudes  $\psi$  &  $\psi^{\text{I}}$ , on pourra avoir aisément les valeurs des vitesses en longitude  $\frac{d\psi}{dt}$  &  $\frac{d\psi^{\text{I}}}{dt}$

par le moyen des vitesses réelles  $u$  &  $u^{\text{I}}$ .

En effet, nommant  $d\theta$  l'angle décrit par le rayon  $r$  dans le tems  $dt$  on aura, comme nous l'avons vu dans l'art 19  $u^2 dt^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$ ; or il est facile de voir que  $d\theta^2 = \operatorname{cof} \psi^2 d\psi^2 + d\psi^2$ , donc  $u^2 dt^2 = r \operatorname{cof} \psi^2 d\psi^2 + r^2 d\psi^2 + dr^2$ ; donc

$$(m) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{dt} = \frac{\sqrt{\left(\frac{u^2}{r^2} - \left(\frac{d\psi^{\text{I}}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr}{r dt}\right)^2\right)}}{\operatorname{cof} \psi} \\ \text{\& de même} \\ \frac{d\psi^{\text{I}}}{dt} = \frac{\sqrt{\left(\frac{u^{\text{I}2}}{r^{\text{I}2}} - \left(\frac{d\psi^{\text{I}^{\text{I}}}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr^{\text{I}}}{r^{\text{I}} dt}\right)^2\right)}}{\operatorname{cof} \psi^{\text{I}}} \end{array} \right.$$

donc en substituant les valeurs de  $u^2$  &  $u^{12}$ , on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{\left(\frac{L}{r^2} - \frac{d\psi^2}{dt^2} - \left(\frac{dr}{rdt}\right)^2 - \frac{iD(15\zeta^1 - q^2\zeta)}{2R^2r^2}\right)}}{\cos.\psi}$$

$$\frac{d\zeta^2}{dt} = \frac{\sqrt{\left(\frac{M}{R^2} - \frac{d\psi^{12}}{dt^2} - \left(\frac{dR}{Rdt}\right)^2 + \frac{iB\zeta}{Rr^3}\right)}}{\cos.\psi^1}$$

Ces formules peuvent quelquefois être plus commodes que les précédentes, sur-tout lorsque les quantités  $r$ ,  $R$  varient très-peu, & que les latitudes  $\psi$ ,  $\psi^1$  sont fort petites.



---

## CHAPITRE IV.

### *De la théorie de la Lune.*

#### § I.

*Application des formules du Chapitre précédent à cette théorie.*

#### X L.

POUR faire cette application , il n'y a qu'à imaginer que le corps *A* que nous avons regardé comme immobile & auquel nous avons rapporté les mouvemens des deux autres , soit la Terre , que le corps *B* soit la Lune , & que le corps *C* que nous avons supposé beaucoup plus éloigné du corps *A* que ne l'est le corps *B* soit le soleil, dont la distance à la Terre est en effet très- grande par rapport à la distance entre la Terre & la Lune. Ainsi  $r$  sera le rayon recteur de l'orbite de la Lune autour de la Terre,  $r^I$  le rayon recteur de l'orbite apparente du Soleil , &  $r^{II}$  sera la distance rectiligne entre le Soleil & la Lune.

De plus  $\psi$  représentera la latitude de la Lune par rapport à un plan fixe que nous prendrons pour l'écliptique, &  $\psi^I$  représentera la latitude du Soleil ,  $\varphi$  sera la longitude de la Lune , &  $\varphi^I$  celle du Soleil comptées à l'ordinaire dans l'écliptique

Pour savoir quel est ce plan que nous prenons ici pour l'écliptique, & que nous avons vu dans le Chapitre premier être celui par rapport auquel les mouvemens des corps  $B$  &  $C$  sont les plus simples qu'il est possible, nous remarquerons que après les suppositions de l'article 38, on trouve, ( lorsque  $t = 0$  )  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ , &  $\nu = 0$ ; de sorte qu'on aura ( aussi article 36 form. 1 )  $\psi = 0$ , &  $\psi^1 = 0$ ; donc puisque on a en même tems

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{dr^1}{dt} = 0 \quad \& \quad \zeta^{II} = 0 \quad (\text{art. 38}),$$

il s'ensuit que le plan dont il s'agit est celui dans lequel le Soleil & la Lune se trouvent en même-tems, lorsqu'ils sont à la fois en conjonction, & dans leurs apsides.

$$\text{Maintenant, puisque nous avons fait (art. 34) } r = \frac{R}{i}$$

on aura  $\frac{r}{r^1} = i \frac{r}{R}$ ; de sorte que si on suppose ( ce qui est permis ) que les valeurs moyennes de  $r$ , & de  $R$  soient égales à l'unité, on aura  $i$  égal à la valeur moyenne de  $\frac{r}{r^1}$ , c'est-à-dire  $i = \frac{\text{parall. } \odot}{\text{parall. moy. } \ominus}$ ; or, en prenant  $57' 30''$  pour la parallaxe horizontale moyenne de la Lune, &  $9''$  pour celle du Soleil, on auroit  $i = \frac{9}{3450} = \frac{1}{383}$  à très-peu près; d'où l'on voit que la quantité  $i$  fera en effet très-petite.



Or, comme les observations nous apprennent que les orbites de la Lune & du Soleil sont presque circulaires, il est clair que les variations des quantités  $r$  &  $R$  devront être fort petites; de sorte que si on fait  $r^2 = 1 + x$ ,  $R^2 = 1 + X$ ,  $x$  &  $X$  devront être des quantités assez petites par rapport à l'unité; & de plus, elles ne devront contenir aucun terme constant, autrement les valeurs moyennes de  $r$  &  $R$  ne seroient plus  $= 1$  contre l'hypothèse.

Donc le carré de la vitesse angulaire de la Lune  $\frac{u^2}{r^2}$  fera à-peu-près  $= L = A + B - D(3z^2 - 1)$  & le carré de la vitesse angulaire du Soleil autour de la Terre  $\frac{u'^2}{r'^2}$  fera à-peu-près  $= M = D$ ; (art. 36); mais on fait que la vitesse angulaire de la Lune est à celle du Soleil environ comme 13 à 1; de sorte que leurs carrés sont à-peu près entr'eux comme 169 à 1: d'où l'on voit que la quantité  $D$  doit être beaucoup plus petite que la quantité  $A + B$ , & cela dans une raison peu différente de 1 à 169. Donc, si on suppose, ce qui est permis,  $A + B = 1$ , & qu'on fasse  $D = \alpha^2$ , on aura  $\alpha = \frac{1}{13}$  environ, &  $\alpha^2$  fera presque  $= 2i$ ; ensorte que l'on pourra regarder les quantités  $i$  &  $\alpha^2$  comme du même ordre.

De plus, on a, comme l'on fait  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{O}} = i\mathcal{C}$ , le nombre  $\mathcal{C}$  étant par la théorie de la précession des équinoxes

de M. d'Alembert = environ  $\frac{7}{3}$ , & par celles des marées de M. Daniel Bernouilli =  $\frac{5}{2}$ ; donc puisque

$\mathcal{C} = B$ , &  $\odot = C \frac{D}{i^3}$  (art. 34) on aura  $B = \mathcal{C} D = \mathcal{C} \alpha^2$ ; ainsi, les quantités  $B$  &  $D$  feront à-peu-près du même ordre  $i$ .

Au reste, pour ce qui regarde la vraie valeur de  $\alpha$ , il faudra la déterminer par le rapport connu entre le mouvement moyen du Soleil & celui de la Lune, rapport qui est, suivant les nouvelles Tables de M. Meyer de  $11^{\circ} 29' 45'' 40''$ , 7 à  $160^{\circ} 9' 23' 5'' \frac{1}{2}$ , quant au coefficient  $\mathcal{C}$  qui est encore assez incertain; comme il se trouve partout multiplié par les coefficients très-petits  $\alpha^2$  &  $i$ , il suffira de le connoître à-peu-près, puisque l'erreur, qui en pourroit résulter, ne seroit que de l'ordre de  $i^2$ .

## X L I.

On fera donc toutes ces substitutions dans les formules du Chapitre précédent; & mettant pour plus de simplicité  $y$  à la place de  $Rz$ , on aura

$$\begin{aligned}
 (p) \dots \frac{dy}{dt} &= y(1+x)^{-\frac{1}{2}} - 3\alpha^2 y(1+X)^{-\frac{1}{2}} \\
 &- i\alpha^2 \left( \mathcal{C}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}y^2(1+X)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1+x)(1+X)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &- i^2\alpha^2 \left( 5y^3(1+X)^{-\frac{7}{2}} - 6y(1+x)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &- \&c.
 \end{aligned}$$

$$(q) \dots \frac{d^2 x}{2 dt^2} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-a^2(3y^2(1+x)^{-\frac{5}{2}} - (1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-f(1+X)^{-\frac{1}{2}} dx + 3fy(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy - \sigma dt))$$

$$-ia^2(\frac{1}{2}y^4(1+X)^{-\frac{7}{2}} - \frac{2}{2}y(1+x)(1+X)(1+X)^{\frac{5}{2}}$$

$$-3fy(1+X)^{-\frac{5}{2}} dx + \frac{1}{2}fy^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy - \sigma dt))$$

$$-\frac{1}{2}f(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy - \sigma dt))$$

$$-i^2 a^2(\frac{1}{2}y^4(1+X)^{-\frac{9}{2}} - 15y^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\frac{3}{2}(1+x)^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}fy^2(1+X)^{-\frac{5}{2}}(1+x)dx$$

$$+\frac{1}{2}fy^3(1+X)^{-\frac{9}{2}}(dy - \sigma dt))$$

$$-\frac{1}{2}fy(1+x)(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy - \sigma dt))$$

$$- \&c. = \text{à une constante.}$$

$$(r) \dots \frac{d^2 X}{2 dt^2} = a^2(1+X)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ia^2(y(1+x)^{-\frac{3}{2}} + f(1+x)^{-\frac{3}{2}}(dy + \sigma dt))$$

$$+ \&c. \text{ à une constante.}$$

$$\begin{aligned}
 (f) \dots \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \alpha^2 y(1+X)^{-2} + f(1+x)^{-\frac{1}{2}} \\
 (dy + \sigma dt) - i\alpha^2 (G(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2} \\
 (1+X)^{-\frac{3}{2}} - f(1+X)^{-\frac{3}{2}} dx + 3fy(1+X)^{-\frac{5}{2}} \\
 (dy - \sigma dt) - i^2\alpha^2 (fy^3(1+X)^{-\frac{7}{2}} - 3y(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}} \\
 - 3fy(1+X)^{-\frac{5}{2}} dx + \frac{15}{2}fy^2(1+X)^{-\frac{7}{2}}(dy - \sigma dt) \\
 - \frac{3}{2}f(1+x)(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy - \sigma dt) \\
 - \&c. = \text{à une constante.}
 \end{aligned}$$

Or, comme les quantités  $x$  &  $X$  sont assez petites, on aura assez exactement

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \&c.$$

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{15x^2}{8} - \frac{35x^3}{16} + \&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3X^2}{8} - \frac{5X^3}{16} + \frac{35X^4}{128} - \&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3X}{2} + \frac{15X^2}{8} - \frac{35X^3}{16} + \&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5X}{2} + \frac{35X^2}{8} - \frac{105X^3}{16} + \&c.$$

(1+X)

$$(1+X)^{-\frac{7}{2}} = 1 - \frac{7X}{2} + \frac{63X^2}{8} - \&c.$$

$$(1+X)^{-\frac{9}{2}} = 1 - \frac{9X}{2} + \frac{99X^2}{8} - \&c.$$

De forte qu'en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, & mettant de plus dans les trois dernières la valeur de  $\sigma$  tirée de la première par l'intégration, on aura trois équations en  $x$ ,  $X$ ,  $y$ , &  $t$  qui seront intégrables du moins par approximation par les méthodes connues, puisque les variables  $y$  seront toutes sous une forme rationnelle & entière.

## X L I I.

Ensuite on aura (art. 36)

$$L = \frac{d^2x}{2dt^2} + (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \alpha^2 (3y^2(1+X)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}}),$$

$$M = \frac{d^2X}{2dt^2} + \alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}},$$

$$N = \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - \alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}},$$

& de là

$$\lambda = M(1+x) (1+X) - y^2 - \frac{1}{4}(1+X) \left( \frac{dy}{dt} + \sigma \right)^2$$

$$+ \frac{ydx}{2dt} \left( \frac{dy}{dt} + \sigma \right) + \frac{1}{4}(1+x) \frac{dX^2}{dt^2}$$

*Prix de l'Acad. Tom. IX.*

O

$$+i\epsilon\alpha^2((1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}} - y^2(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}})$$

$$\begin{aligned} \mu = & N((1+x)(1+X) - y^2) - \frac{y}{2} \left( \sigma^2 + \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dx dX}{dt^2} \right) \\ & - \frac{dx}{2dt} \left( \frac{dy}{dt} + (1+X)\sigma \right) - \frac{dX}{2dt} \left( \frac{dy}{dt} - (1+x)\sigma \right), \end{aligned}$$

moeyonnant quoi on aura

$$(t) \left\{ \begin{aligned} \sin.\psi &= \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{k} \left( \sqrt{\lambda} - \frac{i\epsilon\alpha^2}{2} \times \frac{\mu}{\gamma\lambda} \right) \\ \sin.\psi^1 &= \frac{i\epsilon\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}}\gamma\lambda}{k} \end{aligned} \right.$$

enfin, les formules de l'art. 39 donneront

$$(u) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{\cos.\psi} \sqrt{L(1+x)^{-1} - (1+x)^{-2} \frac{dx^2}{4dt^2} - \frac{d\psi^2}{dt^2}} \\ &\quad - i\alpha^2 \left( \frac{15}{2} \gamma^2 (1+x)^{-1} (1+X)^{-\frac{7}{2}} - \frac{7}{2} \gamma (1+X)^{-\frac{5}{2}} \right) \\ \frac{d\varphi^1}{dt} &= \frac{1}{\cos.\psi^1} \sqrt{M(1+X)^{-1} - (1+X)^{-2} \frac{dX^2}{4dt^2}} \\ &\quad - \frac{d\psi^1}{dt^2} + i\epsilon\alpha^2 \gamma (1+X)^{-1} (1+x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \right.$$

& quant à la constante  $k$  on la déterminera par l'équation

$$\begin{aligned} (x) \dots k^2 = & M(1+X - 2i\epsilon\alpha^2(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}}) \\ & + i\epsilon\alpha^2((1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+X)^{\frac{1}{2}} - N(1+X)) \end{aligned}$$

en y faisant  $t = 0$ .

On se souviendra au reste que les valeurs de  $x$ ,  $X$  &  $y$  doivent être prises, enforte que  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dX}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  soient nulles, lorsque  $t=0$ , & que  $y$  devienne alors

$$= Rr = (1+x)^{\frac{1}{2}} (1+X)^{\frac{1}{2}};$$

de plus, il faudra aussi que la valeur de  $\sigma$  tirée par l'intégration de l'équation ( $p$ ) soit telle qu'elle s'évanouisse lorsque  $t = 0$ .

## § 2.

*De l'intégration des équations qui donnent les mouvemens de la Lune & du Soleil.*

### XLIII.

**L**E Problème des mouvemens de la Lune & du Soleil se réduit à la recherche des quantités  $x$ ,  $X$ , &  $y$ , lesquelles dépendent de l'intégration des équations ( $q$ ), ( $r$ ), ( $s$ ), de l'art : 41. à quoi il faut joindre l'équation ( $p$ ) comme subsidiaire. Si les variables  $x$ ,  $X$ ,  $y$  ne se trouvoient dans les équations que sous la forme linaire, l'intégration seroit facile par les méthodes connues; or il est aisé de voir que les termes où ces variables se trouvent multipliées entr'elles sont tous fort petits à cause que les coefficients  $a^2$  &  $i$  sont très-petits & que les variables  $x$  &  $X$  sont aussi supposées

fort petites ; ainsi on pourra d'abord négliger les termes dont nous venons de parler , pour pouvoir trouver les premières valeurs approchées des variables, & ces valeurs serviront ensuite à en trouver d'autres plus exactes & ainsi de suite.

Pour donner un essai du calcul qu'il faudra faire pour cet objet , nous rejetterons d'abord dans les équations du § précédent tous les termes multipliés par  $i$  , & qui dépendent de la parallaxe du Soleil ; l'erreur sera d'autant plus petite que ces termes sont en même-tems multipliés par la quantité très-petite  $\alpha^2$ .

De cette manière , les équations (p) , (q) , (r) , (s) , deviendront

$$(\alpha) \dots \frac{d\sigma}{dt} = y(1+x)^{-\frac{3}{2}} - 3\alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(\beta) \dots \frac{d^2x}{dt^2} - 2(1+x)^{-\frac{5}{2}} - 2\alpha^2(3y^2(1+X)^{-\frac{5}{2}} \\ - (1+x)(1+X)^{-\frac{3}{2}} - f(1+X)^{-\frac{3}{2}}) dx \\ + 3fy(1+X)^{-\frac{5}{2}}(dy - \sigma dt) = \text{à une constante.}$$

$$(\gamma) \dots \frac{d^2X}{dt^2} - 2\alpha^2(1+X)^{-\frac{1}{2}} = \text{à une constante}$$

$$(\delta) \dots \frac{d^2y}{dt^2} + y(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \alpha^2 y(1+X)^{-\frac{3}{2}} \\ + f(1+x)^{-\frac{1}{2}}(dy + \sigma dt) = \text{à une const.}$$

où il n'y aura plus qu'à réduire en série les puissances de  $1+x$  &  $1+X$ .



## X L I V.

Négligeons encore les produits de deux ou de plusieurs dimensions de  $x$  &  $X$ , on aura, à la place des équations précédentes, celles ci :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \gamma \left( 2 - 3\alpha^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9\alpha^2 X}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{4} - 2\alpha^2 \left( 3\gamma^2 \left( 1 - \frac{5X}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{3X}{2} + 3\int \left( -\frac{5X}{2} \right) \gamma (dy - \sigma dt) \right) = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \left( 1 + \alpha^2 - \frac{3x}{2} - \frac{3\alpha^2 X}{2} \right) + \left( \int \left( 1 - \frac{3x}{2} \right) \right) (dy + \sigma dt) \\ = \text{const.} \end{aligned}$$

lesquelles en substituant la valeur de  $\sigma$  se réduisent à ces trois-ci :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = \text{const.} \dots (e);$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \frac{3x^2}{2} \\ - 3\alpha^2 \left( 3\gamma^2 - (1 - 3\alpha^2) \right) (\int y dt)^2 + 3\int y dt \int y x dt \\ + 3\alpha^2 \left( (3\gamma^2 - 1)X + 5\int X y dy + 9\alpha^2 \int y dt \int y X dt \right) \\ = \text{const.} \dots (\zeta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dt^2} + (2 + \alpha^2)y + (1 - 3\alpha^2) \int dt \int y dt \\ & - \frac{3}{2} (xy + \int x dy + \int dt \int y x dt + (1 - 3\alpha^2) \int x dt \int y dt) \\ & - \frac{3\alpha^2}{2} (Xy - 3 \int d t \int y X d t) \\ & = \text{const.} \dots (n). \end{aligned}$$

L V.

Comme les variables  $x$  &  $X$  sont supposées fort petites vis-à-vis de la variable  $y$  qui est finie, on peut d'abord négliger dans l'équation (n) les termes qui renferment  $x$  &  $X$ ; on aura ainsi cette première équation approchée

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (2 + \alpha^2)y + (1 - 3\alpha^2) \int dt \int y dt = \text{const.}$$

laquelle étant différenciée deux fois devient

$$\frac{d^4y}{dt^2} + (2 + \alpha^2) \frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 3\alpha^2)y = 0$$

qui est intégrable par les méthodes connues.

Pour en trouver l'intégrable, il n'y a qu'à supposer  $y = f \cos.(pt + a)$ , ou bien, puisqu'on veut que  $\frac{dy}{dt} = 0$ , lorsque  $t = 0$ , on fera simplement  $y = f \cos. pt$ , & l'on aura, après les substitutions, cette équation en  $p$

$$p^4 - (2 + \alpha^2)p^2 + 1 - 3\alpha^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$p^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{2} \pm 2\alpha \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{16}}$$

d'où l'on tire

$$p^2 = 1 + \frac{a^2}{2} \pm 2a\sqrt{1 + \frac{a^2}{16}}$$

ou bien en négligeant les puissances de  $a$  plus hautes que la seconde

$$p^2 = 1 \pm 2a + \frac{a^2}{2}$$

&

$$p = 1 \pm a - \frac{a^2}{2}.$$

Donc dénotant par  $p$  l'une de ces valeurs, & par  $q$  l'autre, on aura

$$y = f \cos. p t + q \cos. q t$$

$f$  &  $g$  étant des constantes indéterminées qui doivent être telles que lorsque  $t = 0$  on ait  $y = R r = 1$ ; ce qui donne  $f + g = 1$ .

Cherchons maintenant d'après cette première valeur approchée de  $y$ , celle de  $\sin. \psi$  par les formules (t) de l'article 42; on aura, en négligeant les quantités  $x$  &  $X$ ,  $M = a^2$ ; donc aussi  $k^2 = a^2$ , &  $k = a$  (équation (x)); donc

$$\lambda = a^2(1 - y^2) - \left(\frac{1}{4} \frac{dy}{dt} + \sigma\right)^2,$$

&

$$\sin. \psi = \frac{\nu \lambda}{a}.$$

$$\text{Or } \frac{dy}{dt} = -pf \sin. pt - qg \sin. qt,$$

$$\sigma = \int y dt = \frac{f \sin. pt}{p} + \frac{g \sin. qt}{q},$$

Donc

$$\frac{dy}{dt} + \sigma = \frac{f(1-p^2)}{p} \sin. pt + \frac{g(1-q^2)}{q} \sin. qt.$$

$$= \mp 2\alpha (f \sin. pt - g \sin. qt)$$

en négligeant les puissances supérieures de  $\alpha$ ; donc

$$\lambda = \alpha^2 (1 - (f \cos. pt + g \cos. qt)^2$$

$$- (f \sin. pt - g \sin. qt)^2) = ,$$

$$\alpha^2 (1 - f^2 - g^2 - 2fg(\cos. pt \cdot \cos. qt - \sin. pt \cdot \sin. qt))$$

$$= \alpha^2 (1 - f^2 - g^2 - 2fg \cos. (p+q)t);$$

mais  $f + g = 1$ ; donc  $1 = f^2 + g^2 + 2fg$ ; donc

$$\lambda = 2\alpha^2 fg (1 - \cos. (p+q)t) = 4\alpha^2 fg \times (\sin. \frac{p+q}{2} t)^2;$$

donc enfin

$$\sin. \psi = 2\sqrt{fg} \times \sin. \frac{p+q}{2} t.$$

Or, comme on doit avoir  $f+g=1$ , on peut supposer

$$f = (\cos. \frac{l}{2})^2 \quad \& \quad g = (\sin. \frac{l}{2})^2;$$

& l'on aura

$$\sin. \psi = \sin. l \times \sin. \frac{p+q}{2} t,$$

l'angle

l'angle  $l$  étant arbitraire & dépendant de l'inclinaison primitive de l'orbite de la Lune : en effet, il est clair que la plus grande valeur de  $\sin. \psi$  sera  $= \sin. l$  de sorte que  $l$  exprimera la plus grande latitude, c'est à dire l'inclinaison de l'orbite ; donc puisqu'on fait par les observations que l'inclinaison de l'orbite lunaire est assez petite, & d'environ  $5^{\circ} 8'$ , la constante  $g$  fera toujours très-petite & la constante  $f$  presque égale à l'unité ; car on aura à peu près

$$g = (\sin. 2^{\circ}, 34')^2 = \text{environ } \frac{1}{500} ;$$

de sorte que la quantité  $g$  est encore plus petite que la quantité  $i$  qui exprime le rapport des parallaxes de la Lune & du Soleil ; d'où il s'ensuit qu'on pourra négliger sans scrupule les termes qui se trouveront multipliés par le carré & les puissances plus hautes de  $g$ .

## XLVI.

Il est facile de voir, par l'expression de  $\sin. \psi$  qu'on vient de trouver que l'angle  $\frac{p+q}{2}$  n'est autre chose que la distance de la Lune au nœud, c'est-à-dire l'argument de latitude ; d'où il s'ensuit que si on retranche cet angle de la longitude de la Lune dans son orbite, on aura la longitude du nœud. Donc, si  $h$  &  $i$  denotent la longitude moyenne de la Lune, on aura  $(h - \frac{p+q}{2}) i$  pour la longitude moyenne du nœud ; or, les longitudes

*Prix de l'Académie, Tome IX. 1772. P*

moyennes étant à peu-près les mêmes dans les orbites des planètes & dant l'écliptique,  $ht$  fera la valeur moyenne de  $\varphi$ , &  $h$  fera par conséquent égale à ce qu'il doit y avoir de constant dans la valeur de  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Or, les formules de l'article 42 donnent, en rejetant  $x$  &  $\psi$ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{L} = \sqrt{(1 - \alpha^2(3y^2 - 1))},$$

& à cause de  $y = f \cos. pt$ , on aura

$$h = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{f^2}{2} - 1\right) \alpha^2\right)} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$$

à-peu-près.

Mais on a aussi  $\frac{p+q}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{4}$ , d'où l'on voit que la position du nœud est fixe du moins par cette première approximation; -e qui ne doit pas paroître surprenant vu que les valeurs de  $p$  &  $q$  ne peuvent tout au plus être censées exactes qu'aux quantités de l'ordre de  $\alpha^2$  près.

Pour savoir maintenant laquelle des deux valeurs

$$1 \pm \alpha - \frac{\alpha^2}{4} \text{ doit être prise pour } p; \text{ on remarquera}$$

qu'en supposant l'inclinaison de l'orbite nulle, on a

$$y = f \cos. pt = \cos. pt; \text{ mais on a } y = Rr \text{ (article 41)} \\ = Rr \cos. \zeta^{II} = \cos. \zeta^{II} \text{ (article 34), donc}$$

$$\cos. pt = \cos. \zeta^{II} \text{ \& } pt = \zeta^{II} = \varphi - \varphi^1$$

puisque  $\zeta^{II}$  n'est autre chose que l'angle compris entre les deux rayons  $r$  &  $r^1$ ; donc  $p = h - h^1$ , en nommant  $ht$ ,

&  $b^1$ , les valeurs moyennes de  $\varphi$ , & de  $\varphi^1$ ; or on a déjà trouvé  $b = 1 - \frac{a^2}{4}$ ; & pour avoir  $b^1$ , on prendra la partie constante de  $\frac{d\varphi^1}{dt}$  qui est  $= \sqrt{M} = a$ ; de sorte que

$$b^1 = a, \text{ \& par conséquent } p = 1 - a - \frac{a^2}{4};$$

$$\text{donc } q = 1 + a - \frac{a^2}{4}.$$

Ainsi, il faudra toujours avoir soin dans la suite de prendre pour  $p$  une valeur telle que ses deux premiers termes soient  $1 -$ , & pour  $q$  une valeur dont les deux premiers termes soient  $1 + a$ ; cette remarque est d'autant plus importante que les quantités  $p$  &  $q$  seront données dorenavant par des équations particulières dont chacune montera cependant au quatrième degré, comme on le verra ci-après.

## XLVII.

Ayant trouvé la première valeur approchée de  $y$ , on la substituera dans l'équation ( $\zeta$ ) qui donne la valeur de  $x$ , en y négligeant d'abord les termes, où  $x$  &  $y$  sont mêlés; ce qui la réduit à celle-ci:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 4a^2)x - a^2(2y^2 - 3(fydt)^2) = \text{const.}$$

or, puisque

$$y = f \cos. pt + g \cos. qt,$$

on aura , en négligeant les  $g^2$ ,

$$\begin{aligned} y^2 &= f^2 \operatorname{cosf}. pt^2 + 3fg \operatorname{cosf}. pt \cdot \operatorname{cosf}. qt \\ &= \frac{1}{2} f^2 (1 + \operatorname{cosf}. 2pt) + fg (\operatorname{cosf}. (p+q)t + \operatorname{cosf}. (p-q)t) \end{aligned}$$

&

$$\int y dt = \frac{f \operatorname{sin}. pt}{p} + \frac{g \operatorname{sin}. qt}{q},$$

$$\begin{aligned} (\int y dt)^2 &= \frac{f^2}{p^2} \operatorname{sin}. pt^2 + \frac{2fg}{pq} \operatorname{sin}. pt \cdot \operatorname{sin}. qt \\ &= \frac{f^2}{2p^2} (1 - \operatorname{cosf}. 2pt) - \frac{fg}{pq} (\operatorname{cosf}. (p+q)t - \operatorname{cosf}. (p-q)t); \end{aligned}$$

donc substituant ces valeurs rejettant tous les termes constants, à cause qu'il ne doit y en avoir aucun dans la valeur de  $x$  par l'hypothèse, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \frac{3\alpha^2 f^2 (3p^2 + 1)}{2p^2} \operatorname{cosf}. 2pt \\ - \frac{3\alpha^2 fg}{pq} \left( (3pq + 1) \operatorname{cosf}. (p+q)t + (3pq - 1) \operatorname{cosf}. (p-q)t \right) \\ = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la valeur de  $x$  fera de cette forme

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{cosf}. mt + \alpha^2 f^2 A \operatorname{cosf}. 2pt \\ &+ \alpha^2 fg (B \operatorname{cosf}. (p+q)t + B^1 \operatorname{cosf}. (p-q)t); \end{aligned}$$

& la substitution faite, on aura

$$\begin{aligned} a \operatorname{cosf}. mt (-m^2 + 1 + 4\alpha^2) \\ + \alpha^2 f^2 \operatorname{cosf}. 2pt \left( A (-4p^2 + 1 + 4\alpha^2) - \frac{3(3p^2 + 1)}{2p^2} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +a^2fg \cos.(p+q)t \left( B(-p+q)^2 + 1 + 4a^2 \right) - \frac{3(3pq+1)}{p^2} \Big) \\
 & +a^2fg \cos.(p-q)t \left( A^1(-p-q)^2 + 1 + 4a^2 \right) - \frac{3(3pq-1)}{pq} \Big) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Donc égalant à zero les coefficients de chaque *cosinus*, on aura les équations suivantes :

$$-m^2 + 1 + 4a^2 = 0$$

$$A(-4p^2 + 1 + 4a^2) - \frac{3(3p^2+1)}{2p^2} = 0,$$

$$B(-p+q)^2 + 1 + 4a^2 - \frac{3(3pq+1)}{pq} = 0,$$

$$B^1(-p-q)^2 + 1 + 4a^2 - \frac{3(3pq-1)}{pq} = 0;$$

d'où l'on tire

$$m = \sqrt{1 + 4a^2}$$

$$A = \frac{3(3p^2+1)}{2p^2(-4p^2+1+4a^2)} = -2 \text{ à-peu-près.}$$

$$B = \frac{3(3pq+1)}{pq(-p+q)^2+1+4a^2} = -4,$$

$$B^1 = \frac{3(3pq-1)}{pq(-p-q)^2+1+4a^2} = 6.$$

La constante  $a$  qui est demeurée indéterminée dépend de l'excentricité de l'orbite lunaire, & doit par conséquent être fixée par les observations.

Ainsi l'angle  $mt$  représentera l'anomalie moyenne de la Lune, c'est-à-dire sa distance à l'apogée ; de sorte que

$(b - m)t$  fera la longitude moyenne de l'apogée,  $ht$  étant comme plus haut celle du lieu de la Lune; mais comme nous avons négligé dans l'équation (ζ) des termes où  $x$  se trouve multiplié par  $\alpha^2$  on doit s'attendre que la valeur de  $m$  ne fera exacte qu'aux quantités de l'ordre de  $\alpha^2$  près; c'est pourquoi on aura dans cette première approximation  $m=1$ , &  $m-b=0$ , en rejetant les  $\alpha^2$ ; ce qui donneroit les apsides fixes.

Venons maintenant à l'équation (ε) qui donne la valeur de  $X$ ; & comme cette quantité ne doit contenir aucun terme tout constant, il est clair qu'on aura simplement

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \alpha^2 X = 0; \text{ \& que la valeur de } X \text{ fera de cette}$$

forme

$$X = b \cos. nt$$

d'où l'on trouvera par la substitution

$$-n^2 + \alpha = 0, \text{ \& } n = \alpha.$$

Le coefficient indéterminé  $b$  dépend de l'excentricité de l'orbite du Soleil, &  $nt$  est par conséquent l'angle de l'anomalie moyenne; de sorte que  $(n - b^1)t$  fera la longitude de l'apogée du Soleil, qui est ici nulle à cause que

$$b^1 = \alpha, \text{ \& } n = \alpha.$$

#### XLVIII.

Puisqu'on connoît déjà la forme des premiers terme des valeurs  $y$ ,  $x$  &  $X$ , on pourra aisément trouver les suivans

& rectifier en même-temps les coefficients de ceux qu'on a déjà trouvés; pour cela, il n'y aura qu'à substituer dans les termes négligés des équations proposées, les valeurs qu'on vient de trouver, & l'on aura la forme des termes qu'il faudra introduire dans les nouvelles valeurs de  $y$ ,  $x$  &  $X$ ; on donnera à tous les termes des coefficients indéterminés, & la substitution faite, on fera égaux à zero les termes analogues, c'est-à-dire ceux qui renferment les mêmes *cosinus*; on aura par-là autant d'équations qu'il en faudra pour la détermination de tous les coefficients.

Ainsi reprenant l'équation ( $n$ ) & substituant dans les termes qui renferment  $x$  &  $X$  les valeurs de  $x$ ,  $X$  &  $y$  trouvées ci-dessus, il viendra des termes de la forme

$$af \cos. (p \pm m)t, ag \cos. (q \pm m)t,$$

$$a^2 f^3 \cos. (2p \pm p)t, a^2 f^2 g \cos. (2p \pm q)t,$$

$$a^2 f^2 g \cos. (p \pm q \pm p)t,$$

$$a^2 f^2 g \cos. (p \pm q \pm q)t, bf \cos. (p \pm n)t,$$

$$\& bg \cos. (q \pm n)t;$$

on supposera donc

$$y = f \cos. + g \cos. qt + afP \cos. (p+m)t$$

$$+ afP^1 \cos. (p-m)t + agQ \cos. (q+m)t$$

$$+ agQ^1 \cos. (q-m)t, \&c.$$

& prenant pour  $x$  &  $X$  les expressions de l'art. 47, on aura l'équation suivante, dans laquelle j'ai négligé les quantités affectées de  $a^2$  de  $a\alpha^2$  & de  $\alpha^4$ , à cause que l'on a né-

gligé dans l'équation (n) les termes où  $x$  se trouvoit à la seconde dimension,

$$\begin{aligned}
 & \text{cos. } p t \left( f \left( -p^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{p^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3\alpha^2 f^3 A}{4} \left( 1 - 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1-3\alpha^2}{p^2} \right) \right) \\
 & + \text{cos. } q t \left( g \left( -q^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{q^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3\alpha^2 f^2 g B}{4} \left( 1 - \frac{p}{q} - \frac{1}{q^2} + \frac{1-3\alpha^2}{pq} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3\alpha^2 f^2 g B^2}{4} \left( 1 - \frac{p}{q} - \frac{1}{q^2} - \frac{1-3\alpha^2}{pq} \right) \right) \\
 & + \text{cos. } (p+m) t \left( a f P \left( -(p+m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{(p+m)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3af}{4} \left( 1 + \frac{p}{p+m} - \frac{p}{(p+m)^2} - \frac{1-3\alpha^2}{p \cdot p+m} \right) \right) \\
 & + \text{cos. } (p-m) t \left( a f P^1 \left( -(p-m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{(p-m)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3af}{4} \left( 1 + \frac{p}{p-m} - \frac{1}{(p-m)^2} - \frac{1-3\alpha^2}{p \cdot p-m} \right) \right) \\
 & + \text{cos. } (q+m) t \left( a g Q \left( -(q+m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{(q+m)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3ga}{4} \left( 1 + \frac{q}{q+m} - \frac{1}{(q+m)^2} - \frac{1-3\alpha^2}{q(q+m)} \right) \right) \\
 & + \text{cos. } (q-m) t \left( a g Q^1 \left( -(q-m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3ga}{4} \left( 1 + \frac{q}{q-m} - \frac{1}{(q-m)^2} - \frac{1-3\alpha^2}{(q-m)^2} \right) \right) \\
 & + \&c. = 0.
 \end{aligned}$$

On

On égalera donc à zero les coefficients de ces différens *cofinus*, & l'on aura

$$1^{\circ}. -p^2 + 2 + a^2 - \frac{1-3a^2}{p^2} = 0;$$

équation d'où l'on tirera la même valeur de  $p$  que ci-dessus (art. 45), de sorte qu'on aura

$$p = 1 - a - \frac{a^2}{4},$$

& l'on sera maintenant assuré que cette valeur est exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de  $a^3$  inclusivement.

$$2^{\circ}. -q^2 + 2 + a^2 - \frac{1-3a^2}{q^2} - \frac{3a^2f^2(B+B^1)}{4} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \\ + \frac{3a^2f^2(B-B^1)}{4} \times \frac{p^2-1+3a^2}{pq} = 0;$$

or, comme nous négligeons les quantités de l'ordre de  $a^4$  on aura (en mettant pour  $p$  &  $q$  leurs valeurs approchées)

$$\frac{p^2-1+3a^2}{pq} = -2a;$$

de sorte qu'à cause de  $B = -3$ , &  $B^1 = 6$  (art. 48) l'équation précédente se réduira à

$$-q^2 + 2 + a^2 - \frac{1-3a^2}{q^2} - \frac{3a^2f^2}{2} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \\ + 15f^2a^3 = 0,$$

ou bien

$$q^4 - \left(2 + a^2 - \frac{3a^2f^2}{2} + 15f^2a^3\right)q^2 \\ + 1 - 3a^2 - \frac{3a^2f^2}{2} = 0;$$

*Prix de l'Académie, Tome IX. 1772.*

Q

d'où l'on tire d'abord, aux quantités de l'ordre  $\alpha^3$  près, en ayant égard à la remarque de l'art 46,

$$\begin{aligned} q^2 &= 1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4} + 2\alpha \sqrt{1 + \frac{15f^2 \alpha}{4}} \\ &= 1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4} + \frac{15f^2 \alpha^2}{4} \\ &= 1 + 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} + 3f^2 \alpha^2; \end{aligned}$$

& de-là

$$q = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3f^2 \alpha^2}{2} - \frac{4\alpha^2}{8} = 1 + \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3f^2 \alpha^2}{2}.$$

On aura donc ici

$$\frac{p+q}{2} = 1 + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3f^2 \alpha^2}{4},$$

par conséquent le mouvement moyen du nœud qui est

représenté par  $(h - \frac{p+q}{2}) t$  (art. 46) sera  $= -\frac{3f^2 \alpha^2}{4} t$

ce qui s'accorde avec les observations

$$\begin{aligned} 3^\circ. P(- (p+m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{(p+m)^2}) \\ - \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{p}{p+m} - \frac{1}{(p+m)^2} - \frac{1-3\alpha^2}{p(p+m)} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ. P^1(- (p-m)^2 + 2 + \alpha^2 - \frac{1-3\alpha^2}{(p-m)^2}) \\ - \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{p}{p-m} - \frac{1}{(p-m)^2} - \frac{1-3\alpha^2}{p(p-m)} \right) = 0. \end{aligned}$$

5°. &c.

d'où l'on tire à-peu-près

$$P = -\frac{1}{4}, P^1 = \frac{3}{4}, Q = -\frac{1}{4}, Q^1 = \frac{3}{4} \text{ \&c.}$$

## XLIX.

On repassera présentement à l'équation ( $\zeta$ ) pour trouver une valeur de  $x$  plus exacte que celle de l'art. 47.

Pour cet effet, on commencera par substituer dans les termes de cette dernière équation qui suivent les deux premiers, à la place de  $x$ ,  $X$  &  $y$  leurs valeurs trouvées dans les articles précédens, & négligeant les quantités de l'ordre de  $g^2$ , aussi bien que celles qui seroient affectées de  $a^2$  multipliée par  $a^2$ ,  $aa^2$ ,  $b^2$ ,  $ba^2$  &  $a^4$ , à cause que nous avons rejetté dans la même équation les termes de l'ordre  $a^2$  dans lesquels  $x$  &  $X$  pouvoient former ensemble des produits de deux dimensions, on aura par ces substitutions des termes de la forme,

$$\begin{aligned} & a^2 f^2 \cos. 2pt, \quad a^2 fg \cos. (p+q)t, \quad a^2 af^2 \cos. (p+m+p)t, \\ & a^2 agf \cos. (p+m+q)t, \quad a^2 f^4 \cos. 4pt, \quad a^4 f^3 g \cos. (3p+q)t, \\ & a^2 bf^2 \cos. (2p+n)t, \quad a^2 b \cos. nt, \quad \& \quad a^2 bgf \cos. (p+q+n)t: \end{aligned}$$

c'est pourquoi on supposera

$$\begin{aligned} x = & a \cos. mt + a^2 f^2 A \cos. 2pt \\ & + a^2 fg B \cos. (p+q)t + a^2 fg B^1 \cos. (p-q)t \\ & + a^2 af^2 C \cos. (2p+m)t + a^2 af^2 C^1 \cos. (2p-m)t \\ & + a^2 agf D \cos. (p+q+m)t + a^2 agf \cos. (p+q-m)t \\ & + \&c. \end{aligned}$$

& substituant cette valeur de  $x$  aussi bien que celles de

y & X des articles précédens, on aura, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$\begin{aligned}
 & a \operatorname{cosf}.mi \left( -m^2 + 1 + 4\alpha^2 - \frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2 - m^2)} - 9\alpha^2 f^2 (P + P^1); \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3\alpha^2 f^2}{p} \left( \frac{P}{p+m} + \frac{P^1}{p-m} \right) + \&c. \right) \\
 & + \alpha^2 \operatorname{cosf}.2pi \left( f^2 A \left( -4p^2 + 1 + 4\alpha^2 - \frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2 - 4p^2)} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{9f^2}{2} - \frac{3(1 - 3\alpha^2)f^2}{2p^2} + \&c. \right) \\
 & + \alpha^2 \operatorname{cosf}.(p+q)t \left( fgB \left( -(p+q)^2 + 1 + 4\alpha^2 - \frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2 - (p+q)^2)} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3\alpha^2 f^3 g AB^1}{4} - 9fg - \frac{3fg(1 - 3\alpha^2)}{pq} + \&c. \right) \\
 & + \alpha^2 \operatorname{cosf}.(p-q)t \left( fgB^1 \left( -(p-q)^2 + 1 + 4\alpha^2 - \frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2 - p-q)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3\alpha^2 f^3 g AB}{4} - 9fg + \frac{3fg(1 - 3\alpha^2)}{pq} + \&c. \right) \\
 & + \alpha^2 a \operatorname{cosf}.(2p+m)t \left( f^2 C \left( -(2p+m)^2 + 1 + 4\alpha^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3f^2 A}{4} - 9fP^2 - \frac{3f^2 P^1}{p(p+m)} + \frac{9f^2}{4(p+m)(2p+m)} + \&c. \right) \\
 & \alpha^2 a \operatorname{cosf}.(2p-m)t \left( f^2 C^1 \left( -(2p-m)^2 + 1 + 4\alpha^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3f^2 A}{4} - 9f^2 P^1 - \frac{3f^2 P^1}{p(p-m)} + \frac{9f^2}{4(p-m)(2p-m)} + \&c. \right) \\
 & + \&c. = 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, il n'y aura plus qu'à évaluer à zero les coefficients de ces différens *cosinus*, pour déterminer les inconnues

$m, A, B, B^1, C, C^1, \&c.$



Le coefficient de *cos. mt* donnera la valeur de *m* exacte jusqu'aux quantités de l'ordre de  $\alpha^2$  inclusivement, & l'on aura, à cause de  $P = -\frac{1}{4}$ , &  $P^1 = \frac{3}{4}$  (art. préc.) l'équation

$$-m^2 + 1 + 4\alpha^2 - \frac{9\alpha^2 f^2}{2(p^2 - m^2)} - \frac{3\alpha^2 f^2}{4P(p+m)} + \frac{9\alpha^2 f^2}{4P(p-m)} - \frac{9\alpha^2 f^2}{2} = 0;$$

ou bien

$$-m + 1 + 4\alpha^2 - \frac{3\alpha^2 f^2}{P(p+m)} - \frac{9\alpha^2 f^2}{2} = 0,$$

d'où, en mettant pour *f*, *p*, & *m* leurs valeurs approchées 1, on tire  $m^2 = 1 - 2\alpha^2$ , &  $m = 1 - \alpha^2$ . De sorte que le mouvement de l'apogée  $(h - m)t$ , deviendra

$$\frac{3\alpha^2}{4} t, \text{ à cause de } h = 1 - \frac{\omega^2}{4}.$$

Comme notre dessein n'est point de donner ici une théorie complète de la Lune, nous nous contenterons de ce léger essai, qui peut suffire pour donner une idée de la méthode qu'il faudra suivre dans l'intégration des équations différentielles de l'article 41 auxquelles nous avons réduits le Problème des mouvemens de la Lune & du Soleil autour de la Terre.

Quand on aura trouvé les valeurs de *x*, *X* & *y* en *t*, c'est-à-dire de *r*, *r*<sup>I</sup> & *r*<sup>II</sup>, on aura d'abord les latitudes  $\psi$  &  $\psi^I$  par les formules (*t*) de l'art. 42 & ensuite on aura les longitudes  $\phi$  &  $\phi^I$  par les formules (*u*) du même article; ou bien, comme  $y = Rr \cos. \zeta^{II}$  en connoissant *y*, *r* & *R*, on connoîtra  $\cos. \zeta^2 = \frac{y}{\sqrt{(1+x)(1+X)}}$ ;

or  $\zeta''$  est l'angle qui exprime la distance de la Lune au Soleil, de sorte que comme la latitude du Soleil est très-petite & peut par conséquent être négligée, on aura par la propriété connue des triangles sphériques rectangles

$$\cos. \zeta'' = \cos. \psi \times \cos. (\varphi - \varphi')$$

& par conséquent

$$\cos. (\varphi - \varphi') = \frac{\gamma}{\cos. \psi (1 + x + X + xX)}$$

Ainsi on aura par ce moyen la distance  $\varphi - \varphi'$  de la Lune au Soleil comptée sur l'Ecliptique; mais la longitude  $\varphi'$  du Soleil est assez connue par la loi de Kepler que cet Astre suit assez exactement puisque les dérangemens que la Lune pourroit y produire ne seroit que de l'ordre de  $iB$ , ou de  $i\alpha^2\sigma$ , comme on le voit par l'équation ( $r$ ) de l'article 41; donc en ajoutant cette longitude à la distance  $\varphi - \varphi'$  des deux astres, on aura la longitude  $\varphi$  de la Lune comptée à l'ordinaire dans l'écliptique.

F I N.



# TRAITÉ DE L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX.

Pondere tuta suo est navis jactata per undas.

---

## CHAPITRE I.

*Définitions, Notions préliminaires, conditions  
générales de l'Arrimage.*

### §. I.



L'ARRIMAGE est, comme on fait, l'arrangement qu'on donne, dans le vaisseau, aux différentes matières qui en composent la charge. Cette distribution de la charge est une partie importante de la science du Navigateur. En étudiant avec soin les divers mouvemens du vaisseau, & les causes qui

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

A

peuvent les produire, on s'est apperçu que la transposition de quelques poids suffisoit souvent pour augmenter la rapidité du fillage, pour rendre le navire doux à la mer & sensible à l'action de son gouvernail. Mais l'utilité la plus évidente & la plus réelle d'un bon arrimage, c'est qu'il procure au navire la qualité de bien porter la voile, qualité qui doit être regardée comme la première de toutes : car non-seulement elle assure la navigation ; mais en faisant conoître la quantité de mâture dont un vaisseau a besoin, à proportion du volume d'eau qu'il déplace, elle permet encore, en certaines occasions, de forcer de voiles pour doubler un cap, pour s'éloigner d'une côte, pour joindre, ou pour éviter l'ennemi, pour reprendre son poste en corps d'armée, &c. Ces considérations montrent suffisamment combien le sujet proposé mérite d'être approfondi. J'entreprends de le traiter dans toute son étendue, en le reprenant par les fondemens. On juge bien que je serai obligé de répéter des remarques & des détails qu'on peut trouver ailleurs. L'enchaînement des matières & l'envie de me rendre clair, m'en imposent la nécessité. La plupart des Géomètres, jaloux seulement de produire des choses nouvelles, ne se mettent guères en peine d'en montrer la liaison avec celles qu'on connoissoit déjà dans le même genre, & de réduire ainsi en corps la science dont ils traitent ; mais cette méthode, souvent nuisible au progrès des sciences, parce qu'un habile homme dédaigne d'achever l'ouvrage d'un autre, & qu'un homme médiocre n'en est pas capable : cette méthode, dis-je, seroit ici entièrement vicieuse, & contraire au but que l'Académie s'est proposé de procurer à la Marine un ouvrage utile & facilement applicable à la pratique.

## I I.

Lorsqu'un Constructeur veut entreprendre un vaisseau,

il commence par en faire des desseins exacts & détaillés qui servent à le diriger dans son travail, & qui le mettent en état de reconnoître d'avance si le vaisseau projeté aura une belle batterie, de belles lignes d'eau, les capacités de l'avant & de l'arrière bien balancées, &c. Toutes ces dicussions essentielles doivent nécessairement précéder l'exécution de l'ouvrage, afin de donner infailliblement au vaisseau la forme la plus avantageuse. Elles ne sont pas aussi pénibles, ni aussi difficiles que bien des gens pourroient le penser. Depuis qu'on a appliqué la Géométrie, sur-tout les nouvelles méthodes des calculs différentiel & intégral, à l'Architecture navale, cette partie de l'Art nautique a fait des progrès immenses; & la pratique est parvenue à exécuter avec assez de précision les règles prescrites par la théorie. Mon objet n'est pas de me livrer à de nouvelles recherches en ce genre. Je considère le vaisseau tout construit, flottant à la mer, & je me propose de le charger de manière qu'avec une stabilité suffisante, il prenne & conserve dans l'eau les lignes déterminées par le Constructeur, ou même de lui donner, au moyen de l'arrimage, d'autres lignes d'eau, supposé que celles qui ont été déterminées par le Constructeur, fussent défectueuses.

## I I I.

C'est un principe d'Hydrostatique que lorsqu'un corps solide flotte librement sur un fluide, 1.<sup>o</sup> le poids de ce corps est égal au poids du fluide qu'il déplace. 2.<sup>o</sup> Le centre de gravité de tout le corps & le centre de gravité de la partie submergée, considérée comme homogène, sont toujours placés sur une même ligne verticale. Ainsi le poids du vaisseau tout armé & prêt à faire voile, doit être égal au poids de l'eau déplacée par la carène. De plus le centre de gravité de tout le système qui compose

la charge du navire doit être placée sur la verticale élevée par le centre de gravité de la carène. Je fais abstraction en ce moment de tout mouvement progressif ou oscillatoire; car si le navire n'est pas dans un parfait repos, son poids sera égal en général à la résultante de toutes les forces perdues verticalement dans le sens opposé.

Sur ce principe, il est essentiel de toiser la carène, & de déterminer la position de son centre de gravité; car on reconnoîtra par ce moyen le port du vaisseau & la manière générale dont la charge doit être arrangée, afin que le vaisseau arrive à la situation d'équilibre qu'on demande. Le pied cube d'eau de mer pèse, comme on sait, environ 72 livres: ainsi lorsqu'on aura calculé le nombre de pieds cubes que la carène déplace, on le multipliera par 72 livres pour avoir le poids total de la charge. On ne doit pas mettre moins de soin dans la distribution particulière de la charge. En effet, il est évident que cette distribution peut se faire d'une infinité de manières, telles que le vaisseau vienne toujours à la flottaison projetée. La question est de choisir, parmi tous ces arrangements, celui qui procure, ou qui favorise le plus les qualirés dont le vaisseau a besoin. Ceci sera pleinement éclairci dans la suite.

#### I V.

Tous les Auteurs qui ont écrit sur l'Architecture navale; ont cherché des méthodes pour déterminer la carène & la position de son centre de gravité. On a tenté d'abord de résoudre le Problème, en rapportant la figure du vaisseau à celle de quelque corps géométrique connu, par exemple, à celle d'une portion d'ellipsoïde. Mais cette supposition & les autres de ce genre étoient trop éloignées de la vérité; & dans ces derniers tems, on a eu recours à des moyens de pratique qui sont plus ou moins exacts, selon qu'on pousse plus ou moins loin l'approximation,

Ces moyens consistent à partager la carène en plusieurs parties qu'on regarde comme des Prismes, par des plans horizontaux également distans les uns des autres & par des plans verticaux aussi également distans les uns des autres. Cela est expliqué fort au long dans les Ouvrages de MM. Bouguer & Duhamel qui sont entre les mains de tout le monde. Ainsi je ne m'y arrêterai pas davantage : je me contenterai d'ajouter que si on veut résoudre ce problème d'une manière plus exacte & même plus commode à certains égards, on pourra employer les formules pour les quadratures des courbes, données par M. Cotes dans son livre intitulé *de Harmonia mensurarum*. Comme ces formules ne sont pas aussi connues, ni aussi en usage qu'elles devroient l'être, dans les problèmes d'approximation, je crois devoir les rapporter ici en faveur de quelques Lecteurs, mais sans en ajouter les démonstrations qui me méneroient trop loin, & qu'on déduira d'ailleurs facilement de l'ouvrage même de M. Cotes, ou de la méthode différentielle de Newton.

## V.

Pour comprendre la table suivante, il faut savoir que  $R$  représente l'abscisse totale correspondante à l'aire entière qu'on veut quarrer, & que cette abscisse est partagée en plusieurs parties égales, auxquelles répondent des ordonnées dont le nombre est désigné par le chiffre romain correspondant qui se trouve dans la première colonne à gauche.  $A$  est la somme de la première & de la dernière ordonnée,  $B$  la somme de la seconde & de la pénultième ordonnée,  $C$  la somme de la troisième & de l'antépénultième ordonnée, &c. Le reste s'entend de soi-même.

Nombre des ordonnées.	<i>Superficies.</i>
III.	$\left(\frac{A+4B}{6}\right)R$
IV.	$\left(\frac{A+3B}{8}\right)R$
V.	$\left(\frac{7A+32B+12C}{90}\right)R$
VI.	$\left(\frac{19A+75B+50C}{288}\right)R$
VII.	$\left(\frac{41A+216B+27C+272D}{840}\right)R$
VIII.	$\left(\frac{751A+3577B+1323C+2989D}{17280}\right)R$
IX.	$\left(\frac{989A+5888B-928C+10496D-4540E}{28350}\right)R$
X.	$\left(\frac{2857A+15741B+1080C+19344D+5778E}{89600}\right)R$

Cette Table, qu'il est facile de continuer, est assez étendue pour notre sujet.

### V I.

Les mêmes formules peuvent servir à déterminer le centre de gravité d'une courbe quelconque; car supposons que FGKIL soit la courbe proposée, AR son axe partagé en plusieurs parties égales AP, PQ, QO, OR;

Fig. I.



& que AF, PG, QK, &c, représentent les ordonnées qui répondent aux points A, P, Q, &c. Soit construite sur le même axe AR la courbe HVMXZ dont les ordonnées AH, PM, QV, &c, soient proportionnelles chacune à chacune des quantités  $AF \times \frac{AF}{2}$ ,  $PG \times \frac{PG}{2}$ ,  $QK \times \frac{QK}{2}$ , &c.

Il est clair que l'aire AHMVXZR représentera le moment de l'aire AFGKILR, par rapport à l'axe AR. Ainsi divisant l'aire AHMVXZR par l'aire AFGKILR, le quotient donnera la distance du centre de gravité cherché à l'axe AR. Qu'on construise encore une troisième courbe ANTDY dont les ordonnées PN, QT, &c, soient proportionnelles chacune à chacune des quantités  $PG \times AP$ ,  $QK \times AQ$ , &c. En divisant l'aire ANTDYR par l'aire AFGKILR, le quotient donnera la distance du centre de gravité cherché à l'axe AE.

Connoissant ainsi la distance du centre de gravité cherché aux deux axes AR, AE, il est clair qu'on connoîtra sa véritable position.

## V I I.

Rien n'est plus facile que d'appliquer tout ce qu'on vient de dire à notre sujet. Pour cela, on partagera la carène en plusieurs tranches, qu'on regardera comme ses élémens, & dont on déterminera les surfaces & les centres de gravité. Cela fait, on regardera ces tranches comme les ordonnées d'une courbe à quarrer, & l'aire de cette courbe représentera le volume de la carène. Enfin le centre de gravité se trouvera par le § précédent. Il est évident que pour plus de simplicité les tranches élémentaires de la carène doivent être parallèles ou perpendiculaires au plan de flottaison. Je crois que la seconde hypothèse a quelque avantage sur la première, & qu'il convient de procéder dans ce calcul de la manière suivante.

Soient AKBM (fig. 2), le plan de flottaison du vaisseau ; Fig. 2, 3, 4.

ACDB (fig. 3), la coupe verticale faite suivant la direction de la quille, coupe qui divise le vaisseau en deux parties parfaitement égales & semblables; MFK (fig. 4), le maître couple dont le profil est représenté par la verticale EF (fig. 3), & la plus grande largeur par l'horizontale KM (fig. 2). Qu'à compter du maître couple EF, on partage chacune des deux parties EA, EB\* de l'axe AB, en un certain nombre de parties égales, par exemple, chacune en cinq parties égales; & que par les points de division 1, 2, 3, 4, on mène des tranches parallèles au maître couple. Les profils de ces tranches sont marqués par les verticales 1*f*, 2*g*, 3*h*, 4*k* (fig. 3). Toutes ces tranches, en y comprenant le maître couple, sont les élémens de la carène, & lorsqu'on en connoîtra les surfaces particulières, on connoîtra aussi le solide qu'elles forment par leur assemblage. Or pour déterminer, par exemple, la surface du Maître couple MFK, on partagera la hauteur EF en un certain nombre de parties égales; par exemple, en 5, aux points *m*, *n*, *o*, *x*, & on mènera les ordonnées *mp*, *nq*, *or*, *xz*, qu'on connoîtra d'après les dimensions connues du vaisseau; d'où il résulte qu'on connoîtra la surface MFK. Les surfaces des autres tranches se déterminent de même. Ainsi on aura tout ce qu'il faut pour connoître séparément la partie d'avant & la partie d'arrière de la carène, à compter du maître couple. Il est à propos de faire ainsi ces deux toisés à part, pour s'assurer si les capacités de l'avant & de l'arrière du vaisseau sont bien balancées. La partie d'avant doit être un peu plus grande que celle d'arrière, parce que l'arrière est fort pincé, afin de favoriser l'impulsion de l'eau sur le gouvernail.

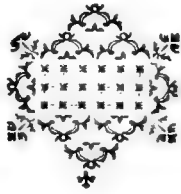
Il ne fera pas moins facile de déterminer les centres

---

\* On doit remarquer que les deux parties EA, EB de l'axe ne sont pas égales entr'elles. Le maître couple est placé en avant du milieu de AB d'une certaine quantité qui n'est pas la même dans tous les vaisseaux,

de gravité des deux parties de la carène, & celui de leur système ; car multipliant l'aire de chaque couple par la distance de son centre de gravité à l'axe AB, regardant les produits comme les ordonnées d'une courbe à quarrer, & divisant l'aire de cette courbe par l'aire de la courbe à laquelle le solide résultant de l'assemblage des couples, est proportionnel, le quotient exprimera la distance du centre de gravité de ce solide à l'axe AB. Pareillement multipliant la surface de chaque couple par la distance de son centre de gravité à un plan perpendiculaire à la longueur AB, & passant par le point A ou B, regardant les produits comme les élémens d'une courbe à quarrer, divisant l'aire de cette courbe par le solide correspondant, on aura la distance du centre de gravité cherché au plan dont on a parlé. Donc enfin on connoîtra la vraie position de ce point.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que la quille, l'étrave & l'étambot doivent être déterminés séparément. Comme ces solides sont des prismes, ou peuvent être considérés comme des prismes, leur toisé n'a aucune difficulté. Les applications de toutes ces méthodes à des exemples particuliers sont si aisées, que je croirois abuser de la patience du Lecteur d'en surcharger cet Ouvrage.



---



---

## CHAPITRE II.

*Énumération des matières qui composent la charge d'un vaisseau, emplacements qu'elles occupent, &c.*

### §. VIII.

COMME un vaisseau en mer, est, pour ainsi dire, un monde isolé, privé de tout secours étranger, il doit être pourvu de toutes les choses dont il peut avoir besoin relativement à l'objet, la durée, & la sûreté de la navigation. Tels sont les trois points qui déterminent la nature, la quantité & l'arrangement de la charge. On comprend qu'il seroit aussi inutile qu'ennuyeux de nommer & compter ici en détail les différentes matières qui composent la charge d'un vaisseau. Mais en voici une notion générale & suffisante pour faire connoître les méthodes d'arrimage qu'on pratique dans les ports. Je commence par les vaisseaux de guerre.

### I X.

D'abord on voit que la coque même du vaisseau & la mâture forment une partie considérable de la charge. On peut en déterminer le poids, en évaluant la quantité de bois & de ferrure qui y entrent. Mais cette méthode est longue, pénible & sujette à plusieurs erreurs. La manière la plus simple & la plus exacte de parvenir à la détermination dont il s'agit, est de calculer le poids de l'eau que le navire déplace en cet état. Il est évident que par ce même moyen, on peut connoître les poids de toutes les

matières qu'on embarque ; car la différence entre le poids de l'eau que le navire déplace, lorsqu'il a reçu quelques corps étrangers , & le poids de l'eau qu'il déplaçoit par le propre poids de sa coque & de sa mâture , est toujours égale au poids de ces corps étrangers. Entrons dans l'énumération succincte des parties de la charge , en commençant par le lest , qui est la première chose que l'on embarque.

## X.

On appelle proprement *lest* une certaine quantité de matières pesantes , qu'on met au fond de la calle , & dont le seul objet est de faire enfoncer le vaisseau jusqu'à une profondeur convenable , & de le maintenir ferme dans son assiette , malgré les efforts contraires du vent ou des lames. Le lest le plus ordinaire est un gravier menu que la mer dépose sur les côtes. Les cailloux de pierres dures sont fort bons pour le même objet. Les éclats de pierres dures ont le défaut d'endommager les futailles contiguës. Les sables & les terres , qu'on employe dans quelques endroits , ne sont pas un bon lest , parce que l'eau entraîne ces matières dans l'archipompe , & qu'elles peuvent engorger les pompes , ce qui est extrêmement dangereux.

Pour éviter l'encombrement considérable qu'un lest tout en pierre occasionneroit dans la calle , & pour abaisser d'ailleurs le centre de gravité de la charge , on compose la partie inférieure du lest avec des vieux canons , des boulets de rebut , des éclats de bombe , des saumons de fer fondus exprès pour cet usage , &c. Ensuite on met des pierres , entremêlant quelquefois des saumons & des boulets avec ces pierres ; car cela est susceptible de plusieurs variétés. Le lest en fer doit être bien engravé , afin que l'assemblage n'ait pas de mouvement pendant le roulis. Il est visible que plus un lest est pesant à volume égal , plus il procure de stabilité au vaisseau. Ainsi , à cet égard , le

lest en fer est très avantageux ; mais il y a des occasions où une trop grande quantité de lest en fer feroit descendre trop bas le centre de gravité de la charge, & par-là produiroit des secousses trop rudes au vaisseau, comme nous le verrons dans la suite.

Comme les canons qu'on veut embarquer pour lest ; sont fort difficiles à arranger dans toute leur longueur, principalement aux extrémités de la calle ; on est en usage dans les ports, de scier tous les canons de fer de rebut par ruelles qui pesent 100 à 150 livres, suivant le calibre des canons. Ces morceaux s'arrangent sans peine entre les porques. Si l'on veut augmenter le poids du lest en canons, rien n'empêche de remplir l'intérieur de l'ame de ces canons, avec des pierres, ou avec de la fêraille.

La quantité totale de lest est ordinairement environ le tiers du port du vaisseau. Mais on sent bien que cette règle n'est pas invariable. Dans plusieurs cas, les effets & les pacotilles dont le vaisseau est chargé, servent de lest en partie. Plus une campagne doit durer, plus il faut de vivres, de tonneaux de vin & d'eau, &c ; d'où il suit qu'il faut alors moins de lest. Mais à mesure qu'on consomme les provisions de bouche, on ne manque pas de faire du lest dans quelque rade ou port, lorsqu'il s'en présente, afin que le vaisseau demeure toujours également callé. La quantité de lest dépend aussi de l'âge du vaisseau. Plus un vaisseau est vieux, moins il peut porter de lest.

Il est facile de connoître la quantité de lest qu'on embarque. Pour cela, on a, dans le port de Toulon, des bateaux jaugés qui servent à mesurer la quantité de lest en gravier ou en cailloux. Ces bateaux sont partie de 10 tonneaux, partie de 15 tonneaux, c'est à dire, d'une barquée & d'une barquée & demie. A l'égard des morceaux de canons, on en connoît le poids par le calibre, comme nous l'avons déjà dit: le poids des saumons est gravé sur leur tête.

Il est d'usage de réserver 10 à 15 tonneaux de lest de fer en boulets ou en saumons, qu'on met à la grande écouteille, ou dans quelque autre endroit où l'on puisse le prendre commodément. C'est ce qu'on appelle le *lest volant*. Il sert à faire en mer quelques changemens à l'arrimage, comme nous le verrons dans la suite.

## X I.

Les vaisseaux portent ordinairement sept ancres, cinq grosses & deux petites. L'une des cinq grosses & la plus grosse de toutes, qu'on appelle *la maîtresse ancre*, l'ancre d'*espérance* ou de *miséricorde*, se met dans la calle à la grande écouteille, afin de pouvoir être enlevée le plus aisément qu'il est possible, si posé qu'on en eût malheureusement besoin. On voit qu'elle sert de lest en partie. Les quatre autres, qui ne diffèrent guères par leur poids, & que l'on nomme ancres de *poste*, ainsi que les deux petites, que l'on nomme ancres à *jafl*, se mettent dans l'avant du vaisseau, & en dehors depuis le commencement du gaillard d'avant jusqu'aux bossoirs.

## X I I.

Vers le milieu & dans la plus grande capacité de la calle sont placées les futailles, au-dessus du lest, les tonneaux d'eau du côté de l'avant, & les tonneaux de vin du côté de l'arrière. Voyez les plans de l'*Altier*. On comprend assez que la quantité d'eau & de vin se règle sur le nombre d'hommes de l'équipage, & sur le tems que doit durer la campagne. Le Capitaine du vaisseau a sa cave à part. L'emplacement de cette cave n'est pas le même dans tous les vaisseaux: il se prend dans l'endroit le plus commode, & le plus compatible avec les autres parties de l'arrimage.

Fig. 5, 6,  
7, 8, 9.

## X I I I.

Les barriques de lard, bœuf salé, morue, fromage, &c. sont répandues dans la calle sur le dernier rang des futailles, dans les endroits où l'on trouve à les loger. Seulement on observe que leur arrangement soit subordonné à la différence du tirant d'eau. Les barrils de farine se mettent dans des soutes particulières du côté de l'arrière. Il en est de même du biscuit, avec cette différence néanmoins que les soutes au biscuit sont calfatées, brayées, & souvent nattées & fermées parfaitement. Les légumes sont aussi dans des soutes, quelquefois en grenier, quelquefois elles restent en sacs.

## X I V.

Dans les entredeux que laissent les barriques à vin & à eau, on distribue le bois, qu'on appelle *bois d'arrimage*. Le bois à brûler se place sur les ailes du vaisseau, dans les endroits où on ne peut placer une barrique, ce qui arrive souvent dans l'emplacement des porques; & lorsque tous les plans d'arrimage sont faits, soit qu'il y en ait deux ou trois, on couvre le dernier avec le restant du bois que l'on a soin de mettre bien horizontalement.

## X V.

A l'extrémité de la calle, vers la proue, est la *fosse aux lions*. Cette fosse dans laquelle se trouve le pied du mât de Mizaine, sert à loger tout le rechange du Maître-d'équipage, en cordages, en poulies soit en roues de fonte ou de gayac, le suif en barriques, goudron, brai & autres choses de ce genre. Vient ensuite la *fosse aux cables* qui contient les cables, grêlins, brins & autres cordages rela-



tifs au mouillage. Sous le plancher de la fosse aux cables, qui est ordinairement à environ cinq pieds au-dessus de la carlingue, on met du lest, soit en saumons ou en pierres. Si pourtant le vaisseau, par sa configuration, n'a pas beaucoup de différence de tirant d'eau, on y en met peu, & quelquefois point du tout; car alors les effets contenus dans la fosse aux lions, par leur situation & par leur poids, rappellent suffisamment le vaisseau sur l'avant.

Plusieurs Capitaines ne font pas faire de fosse aux cables. Alors on prolonge le plan d'arrimage jusques à la cloison de la fosse aux lions, & l'on met les cables sur un plancher porté par les faux baux, plus ou moins en avant, selon que la différence du tirant d'eau l'exige.

## XVI.

Il ya encore dans la partie d'avant de la calle plusieurs autres soutes, telles que celles du maître Charpentier, du maître Voilier, du Chirurgien, du Pilote, de MM. les Gardes de la Marine, &c.

Le Maître Charpentier a des bordages convenables à l'échantillon du vaisseau. Il a aussi un rechange de la mâture, à l'exception, comme on peut bien penser, des mâts majeurs & des deux basses vergues, qui sont la grande & celle de mizaine.

La soute du maître Voilier contient un rechange de chaque voile, qui est en garniture, des pièces de toile neuve, pour le radoub des voiles, le calfat, goudron, brai gras & sec, étoupe goudronnée, cloux de toutes sortes, & autres matières relatives à son métier, pour remédier aux accidens qui peuvent arriver pendant la navigation. Il est aussi muni de placards de plomb & de bois garnis d'étoupes pour boucher dans l'instant les trous faits par le canon dans un combat. Outre cette soute, on conserve souvent un emplacement à pouvoir loger dans la calle les

grosses voiles qui sont mises dans des étuis de toile en pré-larts ; & le Maître Voilier ne met dans sa soute que les petites voiles & les pièces de rechange en toile pour radoub, ainsi que la vieille toile qu'il a pour servir de fourrure aux cables.

Dans la soute du Chirurgien, sont les draps de lit & la terraille pour le service des malades. Les coffres à médicamens se mettent ordinairement sur le faux pont, avec les malles & autres effets des Officiers.

Le Pilote est pourvu de tous les instrumens nécessaires pour diriger la route du vaisseau, &c.

## X V I I.

Le grand mât est environné d'une cloison quarrée dans laquelle sont renfermées quatre pompes qui servent à épuiser l'eau qui entre dans la calle. Cette cloison s'appelle *archepompe*, ou plus communément *archipompe*. Il y a aussi une archipompe autour du mât de mizaine. Tout joignant l'avant de l'archipompe du grand mât, est un parquet où se tiennent les boulets, & dans lequel sont différens compartimens, suivant le calibre des pièces. On fait encore sur le pont, tout auprès du grand mât, des parquets qui contiennent des boulets du calibre des canons qui y sont ; & l'on met à côté de chaque pièce une petite quantité de boulets pour le plus prompt service de l'artillerie.

## X V I I I.

La soute aux barrils de poudre & aux artifices est tout-à-fait à l'arrière de la calle. Ordinairement on a aussi à l'avant de la calle des caissons où l'on met des gargouffes pleines, pour le plus prompt service des canons de l'avant, lors d'un combat. Les ustensiles nécessaires pour le service des canons, comme pinces, anspects, refouloirs, cuillers, tirebourres, gargouffes vuides, porte-gargouffes,

gaargouffes, bouttefeu, méches, &c, se mettent à l'arrière du vaisseau dans une séparation qui est faite dans l'entrepont depuis le mât d'artimon jusqu'à l'arrière. Cette séparation, qu'on appelle la *sainte-barbe*, sert encore à loger le maitre Canonier, l'Écrivain de la Marine, l'Aumônier, le premier Chirurgien & quelques-uns de Messieurs les Gardes de la Marine, lorsqu'ils ne sont pas tous logés sous le gaillard.

## X I X.

Les ponts, gaillards, & dunettes, portent l'artillerie, les ancres, à l'exception de l'ancre d'espérance, l'équipage, la chaloupe, les cuisines, les bœufs, vaches, moutons, chèvres, poules, &c.

On fait que les vaisseaux de guerre se distribuent en différens rangs, & que c'est par le nombre des canons que les rangs des vaisseaux sont distingués. Les vaisseaux du premier rang portent depuis cent vingt jusqu'à quatre-vingt-dix canons exclusivement; les vaisseaux du second rang portent depuis quatre-vingt-dix jusqu'à soixante canons exclusivement; les vaisseaux du troisième rang portent depuis soixante jusqu'à quarante-six canons exclusivement. Viennent ensuite les *frégates* qui portent depuis quarante-six jusqu'à vingt canons exclusivement. Les vaisseaux qui ne portent pas plus de vingt canons s'appellent *corvettes*.

Nous avons déjà indiqué les places des ancres sur les gaillards. Le premier pont, qu'on appelle ordinairement l'entrepont, contient, outre les canons de la première batterie & leurs ustensiles, la plus grande partie de l'équipage, les différens postes qui sont ceux des Chirurgiens, des Malades, des Sergens, Caporaux, Charpentiers, Voiliers, apprentifs Canoniers, &c. Ces postes sont marqués par les entredeux des canons. Le parc aux moutons est aussi sur ce même pont, au milieu de la partie d'avant. Sur

le second pont, où est la seconde batterie, sont les canots & chaloupe, les cuisines du Capitaine & de l'équipage, le four. Sous le gaillard d'arrière qui est à ce même pont, est l'office du Capitaine. Lorsque l'on a embarqué des vaches & des bœufs, on les tient aussi sur ce même pont. Seulement pendant un combat on les fait descendre dans la calle quand il y a de la place; car quand il n'y a pas de place, on les jette dans la mer, ainsi que les autres choses qui embarrassent. Les cages à poulets se mettent pareillement dans les entredeux des canons: elles suivent le sort bœufs ou vaches, dans le cas d'un combat.

## X X.

Fig. 5, 6,  
7, 8, 9, 10,  
11, 12, 13.

Je passe rapidement sur tous ces détails qui ne contiennent rien de nouveau; mais pour éclaircir brièvement la plupart des choses qu'on vient de voir, j'ajoute les plans d'arrimage de deux vaisseaux de soixante-quatre canons, avec les explications marginales qui ont été jugées nécessaires. Je ne me suis pas assujéti à dessiner ces figures suivant les proportions rigoureuses des parties, parce qu'il ne s'agit pas ici de la construction des vaisseaux, & qu'on n'a par conséquent pas besoin de connoître les véritables dimensions des figures. On trouvera plusieurs différences dans l'arrimage des deux vaisseaux dont il s'agit, soit par rapport à la qualité, la quantité & l'arrangement du lest, soit même par rapport à la distribution des futailles. Le reste de l'arrimage est toujours à-peu près le même dans tous les cas: car les autres emplacements sont déterminés, ou par la nécessité, ou par la commodité. Je renvoie à la fin de cet Ouvrage plusieurs devis des deux mêmes vaisseaux.

## X X I.

On juge bien qu'il est comme impossible de connoître

en détail les poids de toutes les choses qu'on embarque; mais on connoît du moins les poids des principales. Supposons, par exemple, un vaisseau de 64 canons armé & approvisionné pour 6 mois, à 505 hommes d'équipage.

Le poids des vivres, non compris le poids des futailles au vin & à l'eau, mais en y comprenant le poids du bois d'arrimage & généralement tous les emballages qui servent à renfermer les vivres qui ne se mettent pas dans des soutes, peut monter à 971234 livres.

Le poids du bois d'arrimage monte à 204496 livres. Comme on ne peut pas prendre ce bois pour l'usage journalier des cuisines, puisque toutes les futailles sont par-dessus, & qu'il est mis pour les contenir, on prend encore environ 2000 quintaux de bois pour le service de cuisines.

Le poids du vin, non compris le poids des futailles qui le contiennent, monte à 1715 quintaux.

Il y a dans un tel vaisseau

26 canons de 24<sup>liv.</sup> de bale, & chacun pèse 5500<sup>liv.</sup>

28 canons de 12<sup>liv.</sup> & chacun pèse . . . . . 3200.

10 canons de 6<sup>liv.</sup> & chacun pèse . . . . . 1700.

Ce vaisseau porte 60 coups à tirer de chaque pièce, tant en poudre qu'en boulets, sans compter la mitraille.

La garniture en cordage pèse 43614<sup>liv.</sup>

Les cables pèsent . . . . . 56047.

Les greffins . . . . . 6896.

Le rechange en cordage . . . . . 10939.

Les cinq grosses ancres . . . . . 22500.

Les deux petites . . . . . 3000.

Quant à la totalité de la charge, elle se détermine par le déplacement d'eau, comme nous l'avons dit §. IX: elle est ici d'environ 2180 tonneaux.

## X X I I.

Nous finirons par quelques remarques sur l'arrimage des vaisseaux Marchands.

On ne peut guères donner une notion exacte, ni même approchée jusqu'à un certain point de la cargaison de ces sortes de vaisseaux; car ils sont chargées des marchandises convenables aux pays où ils vont. Lorsque le Négociant qui doit faire le chargement, en a donné l'état au Capitaine, celui-ci a l'attention de se faire livrer d'abord toutes les marchandises les plus pesantes pour les mettre dans le fond; & quand il n'y a pas de marchandises qui, par leur pesanteur, puissent servir de lest, il fait prendre du lest en pierre. Les navires qui vont porter leur cargaison aux Isles de l'Amérique, embarquent pour lest des briques, parce qu'on trouve à bien vendre ces briques dans les pays dont il s'agit.

Les marchandises qui ne sont pas susceptibles d'humidité sont mises dans la calle; celles qui peuvent prendre de l'humidité se mettent dans l'entrepont. Les Bâtimens marchands ne sont pas d'arrimage avec des barriques dans la calle; la place leur est trop précieuse pour cela. Ils font dans l'entrepont de l'avant une séparation dans laquelle le Capitaine fait enfermer les vivres embarquées pour son équipage. On met aussi une partie des vivres dans la soute aux poudres. Plusieurs barriques d'eau sont encore mises dans l'entrepont. Lorsqu'il reste de la place dans la calle, on la réserve à la grande écoutille, pour y loger des futailles d'eau ou de vin. Au retour des Isles, on fait le chargement en denrées du pays, & l'on place, par exemple, les barriques de sucre dans l'endroit le plus bas, parce que leur poids sert de lest, &c.



---



---

## CHAPITRE III.

*Influence de l'arrimage sur les qualités du vaisseau.*

### §. XXIII.

DANS le Chapitre précédent, nous avons exposé les méthodes d'arrimage qu'on pratique dans les ports. Il nous reste maintenant à discuter ces méthodes, & à leur donner toute la perfection dont elles sont susceptibles. Les qualités sur lesquelles l'arrimage a de l'influence sont la force que le vaisseau doit avoir pour conserver sa figure & ne pas s'arquer; la rapidité de la marche; les mouvemens de roulis & de tangage; les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles. Cette matière est, comme on voit, extrêmement abondante. Pour la considérer plus distinctement, nous la diviserons en plusieurs sections.

---

### SECTION I.

*Influence de l'arrimage sur le changement de forme du vaisseau.*

### XXIV.

SOIT *ACDB* le profil de la carène d'un vaisseau flottant à la mer. Imaginons que cette carène est partagée en une infinité de tranches verticales représentées par les droites *EF*, *1f*, *2g*, &c. On fait que la poussée perpendiculaire de l'eau sur chacun des points *F*, *f*, *g*, &c, est exprimée par

Fig. 3:

chacune des lignes correspondantes *EF*, *1f*, *2g*, &c. Ainsi pour que l'assemblage des pièces qui forment la charpente du vaisseau, ne fut pas fatigué par la charge, cette charge devoit être distribuée proportionnellement aux capacités de la carène. Là où la poussée de l'eau est la plus grande, devoient être les plus grands poids : là où la poussée de l'eau est la moindre, devoient être les plus petits poids, &c. Souvent cette règle est violée au point que la quille vient à *s'arquer*, en formant une courbe convexe par en haut ; parce que la charge des extrémités est trop considérable en comparaison de celle du milieu.

## X X V.

On conçoit que la quille, par la résistance dont elle est capable en elle-même, s'oppose aux puissances étrangères qui tendent à la faire plier, & qu'elle ne plie effectivement, que lorsque sa propre résistance en quelqu'un de ses points est moindre que l'effort qu'elle souffre en ce même point. Examinons donc la résistance de la quille dans un point donné de sa longueur ; & nous jugerons, par la comparaison de cette résistance avec l'effort contraire, s'il n'y a pas de danger que la première force ne cède à la seconde. Cette recherche est intéressante, & peut avoir plusieurs autres applications.

## X X V I.

Fig. 14. Soit le rectangle *ABDC* le profil d'une pièce de bois équarrie en parallépipède rectangle. Qu'à cette pièce, considérée comme non pesante, & d'ailleurs parfaitement libre soient appliquées trois puissances parallèles *S*, *Q*, *R*, qui se feroient mutuellement équilibre si la pièce de bois étoit une verge absolument inflexible. Supposons que cette pièce vienne à se rompre dans la section verticale donnée



*NT*: on demande quelles doivent être pour cela les quantités des trois puissances  $S, Q, R$  ?

Imaginons suivant l'hypothèse ordinaire, la pièce composée d'une infinité de fibres ou filets parallèles à  $AB$  & à  $CD$ . Dans l'instant où elle est prête à se rompre, les fibres s'allongent d'une certaine quantité dans la section verticale donnée  $NT$ ; & ces petits allongemens forment un espace triangulaire  $FNI$  dont le sommet est en  $N$ , & la base, très-petite  $HI$ , sur  $AB$ . De plus les élémens  $HK, PM, FI$ , &c, du triangle  $FNI$  sont proportionnels aux forces avec lesquelles les fibres sont tendues en ces endroits, puisqu'ils expriment les quantités dont les fibres sont tirées de leur état naturel pour résister à l'effort contraire qui provient de l'action des trois puissances  $S, Q, R$ .

Cela posé, en considérant  $CNF$  comme un levier angulaire dont l'appui est en  $N$ , & dont le bras  $CN$  est tiré perpendiculairement par la puissance  $S$ , & le bras  $NF$  par toutes les tensions  $HK, PM, FI$ , &c, du triangle  $FNI$ , il y aura équilibre dans ce levier, si le moment de la force  $S$  par rapport au point  $N$ , est égal à la somme des moments des forces  $HK, PM, FI$ , &c, par rapport au même point.

Donc

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} AB \text{ ou } CD \dots\dots\dots = a \\ AT \text{ ou } AF \text{ ou } CN \dots\dots\dots = b \\ AV \dots\dots\dots = c \\ \text{la hauteur ou épaisseur } NT \text{ de la pièce} = h \\ \text{sa largeur} \dots\dots\dots = k \\ NP \dots\dots\dots = x \\ \text{la force de tension du filet } FI \dots\dots = f \end{array} \right. \end{array}$$

on aura d'abord l'équation  $S \times b = \int \frac{fkx dx}{h}$ , dans laquelle on doit supposer  $x = h$ , après l'intégration; ce qui donne

$$S = \frac{fkh}{3b}.$$

De plus, puisque les trois puissances  $S$ ,  $Q$ ,  $R$ , se feroient mutuellement équilibre, si la pièce étoit une verge inflexible, on a

$$S \times c = Q(a - c),$$

$$S + Q = R;$$

donc

$$Q = \frac{fkhc}{3b(a - c)},$$

$$R = \frac{fkh}{3b} + \frac{fkhc}{3b(a - c)} = \frac{fkhha}{3b(a - c)}.$$

On remarquera que  $DNI$  peut être de même regardé comme un levier angulaire auquel sont appliquées les forces  $Q$ ,  $R$ , & les tensions des fibres du triangle  $FNI$ ; ce qui donneroit l'équation

$$\frac{fkh}{3} = Q(a - b) - R(c - b).$$

Mais cette équation est renfermée dans les précédentes.

Si l'on suppose  $b = c$ , ou que la pièce se rompe au point  $V$ , & qu'on fasse  $c = na$  ( $n$  étant un nombre fractionnaire), on aura

$$S = \frac{fkh}{3na},$$

$$Q = \frac{fkh}{3a(1 - n)},$$

$$R = \frac{fkh}{3a(n - n^2)}.$$

Il est évident qu'on trouveroit, par la même méthode, les valeurs des puissances capables de rompre la pièce en un point donné, quel que fût le nombre, & quelle que fût

La loi de ces puissances, en supposant toujours qu'elles se fissent mutuellement équilibre, si la pièce étoit absolument inflexible.

## XXVII.

Ces formules sont fort simples, & deviendront d'un usage très commode dans la pratique, lorsqu'on connoîtra la quantité  $f$ . Or pour déterminer  $f$ , nous nous servirons des expériences que M. de Buffon a faites sur la résistance des bois (Mém. de l'Acad. an. 1740 & 1741). Il est vrai que ce célèbre Auteur n'a pas examiné le cas dont il est ici question; car il considère seulement une pièce de bois soutenue par ses extrémités sur deux appuis fixes, & chargée dans son milieu d'un poids qui la fait plier ou rompre. Mais on pourra, avec quelque préparation, déduire des résultats qu'il trouve, la quantité que nous cherchons. En effet, en regardant les deux puissances  $P$  &  $Q$  comme deux appuis, & supposant que la pièce se rompe dans son milieu, en vertu d'un poids connu  $F$  posé sur ce même milieu, on trouvera par notre méthode (en nommant toujours  $a$  la longueur de la pièce,  $b$  son épaisseur,  $k$  sa largeur,  $f$  la tension absolue du dernier filet),

$$F = \frac{afkh}{3a};$$

$$\text{donc } f = \frac{3a}{4kh} F.$$

Substituant cette valeur de  $f$  dans les trois formules du § précédent, on aura

$$F = \frac{F}{4n}, \quad Q = \frac{F}{4(1-n)}, \quad R = \frac{F}{4(n-n^2)}.$$

Maintenant, suivant la septième table de M. de Buffon; (Mém. de l'Acad. 1741, page 334), une pièce de bois de chêne de 5 pouces d'équarrissage, sur 7 pieds de longueur,

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

D

se rompt sous la charge de 11525 livres; donc on aura en général  $F = \frac{h h k}{a} \times \frac{7 \text{ pieds}}{5 \times 5 \times 5 \text{ pou. cub.}} \times 11525 \text{ livres.}$  Donc enfin

$$S = \frac{h h k}{4 n a} \times \frac{7 \text{ ieds}}{5 \times 5 \times 5 \text{ pou. cub.}} \times 11525 \text{ liv; } Q = \frac{h h k}{4 \cdot (1-n) a} \times \frac{7 \text{ pieds}}{5 \times 5 \times 5 \text{ pou. cub.}} \times 11525 \text{ livres; } R = \frac{h h k}{4 \cdot (n-n^2) a} \times \frac{7 \text{ pieds}}{5 \times 5 \times 5 \text{ pou. cub.}} \times 11525 \text{ livres.}$$

## X X V I I I.

Fig. 15. Tout cela posé, soit  $ABDC$  le profil de la quille flottante à la mer, dans une situation horisontale, & dans une immobilité absolue. Supposons que la poussée verticale de l'eau est réunie au centre de gravité de la carène, & que cette force est exprimée par la verticale  $RO$ . Qu'on représente par  $MP$  la résultante de tous les poids dont l'avant du vaisseau est chargé, en y comprenant le poids de la partie  $ACOV$  de la quille; qu'on représente de même par  $NQ$  la résultante de tous les poids dont l'arrière du vaisseau est chargé, en y comprenant le poids de la partie  $BDOV$  de la quille. Alors la quille est pressée par les trois puissances  $RO$ ,  $MP$ ,  $NQ$  qui se feroient mutuellement équilibre, si elle étoit une verge absolument inflexible. Il ne s'agit plus que de chercher par le §. précédent les puissances qu'il faudroit appliquer en  $V$ ,  $P$ ,  $Q$ , afin que la quille se rompît, par exemple en  $V$ ; & par la relation de ces trois nouvelles puissances aux forces  $RO$ ,  $MP$ ,  $NQ$ , on reconnoîtra si cet accident est à craindre.

On voit en général, par la formule  $R = \frac{h h k}{4 (n-n^2) a} \times \frac{7 \text{ pieds}}{5 \times 5 \times 5 \text{ pou. cub.}} \times 11525 \text{ liv.}$  qu'à mesure que  $a$  ou  $PQ$  diminue, toutes choses d'ailleurs égales, la force qu'il faut appliquer en  $V$  pour rompre la quille augmente. Ainsi en rapprochant le plus qu'il est possible du milieu de la carène les

poids qui composent la charge, le vaisseau sera d'autant moins exposé à s'arquer.

## X X I X.

Appliquons cette théorie au vaisseau de soixante-dix canons, dont M. Duhamel a donné la construction, dans son Architecture navale.

Le poids total de ce vaisseau, ou la poussée verticale de l'eau, est de 2334<sup>ton.</sup> 1409<sup>liv.</sup> ou de 4669403<sup>liv.</sup> la longueur de la quille est de 139<sup>pieds</sup> 4<sup>pou.</sup> 1<sup>lig.</sup>; l'épaisseur ou hauteur de cette même quille est de 1<sup>pi.</sup> 7<sup>po.</sup> 3<sup>lig.</sup>, & sa largeur horifontale de 1<sup>pi.</sup> 5<sup>po.</sup> 1<sup>li.</sup>

Supposons, pour la plus grande simplicité, que la force *RO* réponde au milieu de la quille, que la force *MP* réponde au milieu de la partie *AV*, & la force *NQ* au milieu de la partie *BV*. Ces suppositions auxquelles notre méthode n'est pas d'ailleurs assujettie, approchent ici suffisamment de la vérité, pour ne produire aucune erreur sensible.

Nous aurons donc force  $RO = 4669409$ <sup>liv.</sup>, force  $MP = 2334704 \frac{1}{2}$ <sup>liv.</sup>, force  $NQ = 2334704 \frac{1}{2}$ <sup>liv.</sup>;  $a = 69$ <sup>pi.</sup> 8<sup>po.</sup> 5<sup>lig.</sup>. Or les trois forces *R*, *S*, *Q*, qui répondent chacune à chacune des trois forces *RO*, *MP*, *NQ*, deviennent à très-peu-près,  $R = 58392$ <sup>liv.</sup>,  $S = 29196$ <sup>liv.</sup>,  $Q = 29196$ <sup>liv.</sup>; d'où l'on voit que les forces capables de rompre la quille sont considérablement moindres que celles dont elle est effectivement pressée, & que par conséquent elle ne manqueroit pas de se rompre, si elle n'étoit pas fortifiée par les assemblages des pièces dont elle est composée, & par la ferrure; & si d'ailleurs les ponts & les couples ne la soulageoient pas d'une grande partie de la charge. Il est peut-être impossible de soumettre à un calcul satisfaisant ces secours étrangers dont la quille tire sa principale force. Quoi qu'il en soit, il est certain que pour

empêcher un vaisseau de s'arquer, on doit rapprocher le plus qu'il est possible la charge du milieu de la carène.

Comme l'avant du vaisseau est né essaiement chargé par le mât de mizaine, le petit hunier & le petit perroquet, tous les agrêts qui appartiennent à ces mâts, par les cuisines, par le beaupré, par la poulaïne, par les cables, &c; & que d'ailleurs cette partie doit être un peu pincée pour diviser facilement le fluide, la charge n'y peut guères être proportionnelle aux capacités. J'en dis autant de l'arrière qui est chargé du gouvernail, des gaillards & dunettes, de l'artimon, de la sainte barbe, &c. Mais on pourroit mettre plus de lest qu'on ne fait ordinairement au milieu de la calle, & en débarrasser les extrémités du vaisseau. Cet arrangement que je propose, a encore l'avantage de favoriser les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail, cù des voiles, comme on le verra dans la suite; mais alors il convient d'employer un lest fort pesant, afin qu'étant distribué sur plus de hauteur dans la calle, le centre de gravité de la charge ne soit pas néanmoins trop élevé; ce qui pourroit enlever au navire la qualité de bien porter la voile, ou au moins occasionner des mouvemens nuisibles à la mâture.

---

## SECTION II.

*Influence de l'arrimage sur le mouvement progressif uniforme du vaisseau.*

X X X.

**J**E suppose un vaisseau qui cingle en pleine mer, avec une vitesse parfaitement uniforme, & qui porte parfaitement la voile, c'est à dire, sans s'incliner en aucun sens. Ce cas n'a jamais lieu en rigueur; mais il mérite d'être examiné

par sa simplicité, & parce qu'il va nous montrer clairement comment la distribution de la charge peut contribuer à augmenter la rapidité du fillage.

Soit donc  $AKBM$  le plan de flottaison d'un navire cinglant suivant la route oblique  $GH$ , laquelle forme, avec la direction  $AB$  de la quille, l'angle donné  $ACH$  de la dérive. Soient  $IC$  la direction réelle du vent, que je suppose horizontale,  $KM$  la voile qui est censée parfaitement tendue, & qui forme, avec la direction du vent, l'angle donné  $ICM$ . Il est clair que la partie de l'effort du vent qui résulte perpendiculairement contre la voile, doit être en équilibre, à chaque instant, avec la force horizontale qui provient de toutes les impulsions perpendiculaires du fluide contre toutes les parties du navire que le fluide frappe en effet. Par conséquent, si par le point  $C$  où  $KM$  coupe l'axe  $AB$ , on mène  $NL$  perpendiculaire à  $KM$ , & que  $LVN$  (fig. 17) soit la coupe verticale du navire faite suivant  $NL$ , les directions des deux forces dont il s'agit seront situées dans le plan  $LVN$ . Supposons que  $ZS$  soit la direction de la force résultante de tous les efforts perpendiculaires du vent contre les voiles, que  $XS$  soit la direction de la force résultante des impulsions perpendiculaires de l'eau contre le navire: les deux droites  $ZS$ ,  $XS$  se couperont nécessairement au point  $S$  centre d'impression des voiles.

Fig. 16.

De plus, si l'on représente l'impulsion du vent par  $ST$ , l'impulsion de l'eau par  $SO$ , & qu'on décompose cette dernière force en deux autres  $SR$ ,  $SP$ , l'une horizontale l'autre verticale, on aura  $SL = ST$ . A l'égard de la force verticale  $SP$ , elle ne pourra être détruite que par un poids particulier qu'on lui opposera.

Fig. 17.

Cela posé, en nommant  $A^2$  l'étendue des voiles,  $B^2$  la surface plane qui exposée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit une résistance égale à la force  $SR$ ,  $m$  l'angle  $ICM$ ,  $n$  l'angle  $GCN$ ,  $V$  la vitesse absolue du vent suivant  $IC$ ,  $v$  la vitesse absolue du navire suivant  $CH$ ,  $\rho$  la densité

du vent,  $p$  celle de l'eau: on aura, par le principe ordinaire de l'impulsion des fluides contre les corps exposés à leur courant, l'équation

$$u = \frac{AV \sin m}{A \sin n + B V p}$$

## X X X I.

Il est visible, par cette formule, que si l'angle de la dérive, la vitesse & la direction du vent demeurent les mêmes, on ne pourra augmenter la rapidité du sillage, qu'en augmentant  $A$ , c'est-à-dire, qu'en forçant de voiles. Or si l'on force en effet de voiles, on doit avoir soin de disposer les nouvelles voiles de manière que le centre d'impression de tout le système demeure toujours au même endroit. Dans le cas où ce point changeroit de place, il est clair que la quantité  $B$  subiroit quelque variation. Alors il faudroit faire quelque transposition de poids, de manière que la résultante des efforts perpendiculaires de l'eau passât par le nouveau centre d'impression des voiles. Si l'angle de la dérive change, il pourra arriver que la vitesse du vaisseau augmente ou diminue, suivant la relation qui se trouve entre le numérateur & le dénominateur de la fraction proposée. Connoissant la figure de la carène, on pourroit déterminer dans chaque cas la vitesse du vaisseau par la théorie; mais en mer on ne fait pas ces sortes de calculs. On transpose différens poids en tâtonnant, jusqu'à ce que le vaisseau ait toute la vitesse qu'on en peut attendre. Cependant la formule précédente n'en est pas moins utile; car elle indique les moyens certains de réussir, à l'exclusion de tous les autres.

## X X X I I.

C'est donc ainsi qu'on parviendra à augmenter la rapidité de la marche par l'arrimage. Si les lignes d'eau déterminées par le Constructeur sont jugées bonnes dans une



première campagne, & qu'on veuille cependant gagner encore quelque chose sur la rapidité du fillage, on aura soin de procurer une plus grande stabilité au vaisseau, en abaissant davantage le centre de gravité de la charge totale. Ensuite on déploiera une plus grande quantité de voiles, de manière que le centre d'impression de tout le système demeure le même qu'il étoit auparavant. Si un vaisseau s'est mal comporté à la mer pendant une première campagne, & qu'on impute ses défauts, du moins en partie, à l'arrimage, on fera, pour une autre campagne, un arrimage tout différent du premier. La manière de distribuer les canons, les saumons, &c, dans la calle, étant absolument arbitraire, on est le maître de corriger, par un arrangement bien combiné & bien réfléchi du lest, les défauts du navire, qui proviennent de l'arrimage. Nous discuterons dans la suite les moyens qu'on doit mettre en œuvre pour s'opposer, autant qu'il est possible, aux mouvemens de roulis & de tangage. Si l'on veut faire en mer des changemens à l'arrimage, on transportera quelques poids de l'avant à l'arrière, ou de l'arrière à l'avant. Le lest volant est destiné à faire ces sortes de changemens. Lorsqu'il n'est pas suffisant, il y a dans la fosse aux lions beaucoup de poulies, cordages & autres effets que l'on peut transporter sur l'arrière, si l'on est trop sur l'avant. Pareillement dans le cas où l'on est trop sur l'arrière, il y a dans cette partie des barils de farine, des légumes en sacs, &c, qu'on peut porter sur l'avant.

On peut aussi prendre dans l'archipompe une certaine quantité de boulets de service que l'on transportera sur l'avant ou sur l'arrière, selon le besoin, dans des forins vuides exprès pour cet usage. En tems de paix, on peut démonter quelques canons des batteries, qu'on pose à l'avant ou à l'arrière, & qu'on remet en place, lorsqu'on approche des rades. Comme l'on consomme journellement de l'eau & du vin, & que pour conserver le vaisseau dans

son équilibre, & toujours également callé, on a attention ; pour peu qu'il y ait de futailles vuides, de les remplir avec de l'eau de la mer ; si l'on est trop sur l'arrière, on ne remplit pas les futailles de vin qui ont été consommées. Si on est trop sur l'avant, & qu'on n'ait pas de futailles vuides dans cette partie, on consume celles qui y sont de préférence ; & si elles sont pleines d'eau salée, on les fait vuides. On voit qu'on peut toujours tirer quelque parti des futailles pour les changemens de l'arrimage. Il n'en est pas de même des matières comestibles, parce qu'on ne peut pas remplacer en mer ces sortes de matières. Mais lorsqu'on est à portée de quelque port ou de quelque rade, on ne manque pas d'y descendre pour faire du lait, & maintenir par là le vaisseau dans l'assiette convenable.

Toutes les opérations que je viens d'exposer sont fort simples, & le bon sens suffit seul pour en faire connoître l'avantage, ou même la nécessité. Cependant on a été très-longtems à sentir l'influence marquée de l'arrimage sur les mouvemens du vaisseau. On a vu souvent des vaisseaux condamnés à une première campagne, comme mauvais voiliers, se faire, avec la même voile, une réputation toute opposée, dans les campagnes suivantes : différence qui ne peut être attribuée qu'au changement d'arrimage. Les Marins éclairés regardent aujourd'hui cette distribution de la charge comme un objet important qui mérite toute leur attention. Quelquefois même il résulte des effets surprénans de la simple transposition de quelques poids de l'avant à l'arrière, ou de l'arrière à l'avant. Il seroit donc bien essentiel, pour la perfection de la pratique de l'arrimage, qu'on étudiât exactement en mer tous les mouvemens du vaisseau, qu'on tint un journal détaillé de tous les changemens qu'on fait en mer à l'arrimage, & des effets qui en proviennent, & qu'on ne se contentât pas d'attester en gros, à la fin d'une campagne, comme on fait ordinairement, que le vaisseau s'est comporté de telle ou telle façon à la mer,

SECTION

## SECTION III.

*Influence de l'arrimage sur les mouvemens d'oscillation du vaisseau.*

## XXXIII.

IL n'est pas possible qu'un vaisseau à la mer conserve toujours la même situation, comme nous l'avons supposé (§. XXX) ; car il est continuellement soumis à l'action de différentes forces qui ne se font jamais parfaitement équilibre. Ces forces sont sa propre pesanteur, la poussée verticale de l'eau, l'impulsion du vent sur les voiles, la résistance que le navire éprouve en divisant le fluide : à quoi on peut ajouter l'agitation des lames, qui tantôt viennent frapper avec force les flancs du vaisseau, tantôt se dérobent tout-d'un-coup sous quelqu'une de ses parties, pendant que les autres sont soutenues. Les mouvemens d'oscillation que ces puissances impriment au vaisseau, en toutes sortes de sens, peuvent tourmenter extrêmement la mâture & l'équipage. Il est donc important d'en bien connoître les loix, & d'en empêcher le plus qu'il est possible les mauvais effets, au moyen de l'arrimage. C'est le but que je me propose ici.

## XXXIV.

Comme j'aurai besoin de quelques théorèmes de mécanique, dont l'énoncé joint à l'application que j'en ferai, couperoit trop le fil du discours, je vais les rappeler ici d'avance.

Qu'un corps de figure quelconque soit animé par des forces quelconques, & qu'on imagine par le centre de

Fig. 18.

*Prix de l'Académie, Tome IX.*

E

gravité  $A$  de ce corps trois axes  $AC$ ,  $AB$ ,  $AP$  perpendiculaires entr'eux qui conservent toujours leur parallélisme dans l'espace absolu, pendant tout le mouvement du centre de gravité. Si l'on réduit à chaque instant, comme cela est possible en effet, toutes les forces qui poussent le corps à trois forces seulement, qui soient dirigées suivant les lignes  $Ff$ ,  $Dd$ ,  $Ee$ , parallèles chacune à chacun des trois axes  $P$ ,  $AB$ ,  $AC$ ; qu'ensuite ayant mené dans le plan  $BAC$  les droites  $FQ$ ,  $FO$  parallèles chacune à chacun des deux axes  $AB$ ,  $AC$ ; dans le plan  $BAP$  les deux droites  $ER$ ,  $ES$  parallèles chacune à chacun des deux axes  $AB$ ,  $AC$ ; dans le plan  $CAP$  les droites  $DK$ ,  $DH$  parallèles chacune à chacun des deux axes  $AB$ ,  $AC$ ; d'un point quelconque  $N$  du corps proposé les trois coordonnées  $AP$ ,  $PM$ ,  $MN$ , aux trois axes proposés: on nomme  $F$  la force dirigée suivant  $Ff$ ,  $D$  la force dirigée suivant  $Dd$ ,  $E$  la force dirigée suivant  $Ee$ ,  $dt$  l'élément du tems,  $P$  la masse entière du corps,  $d\Pi$  l'espace parcouru par le centre de gravité  $A$ , durant l'instant  $dt$ , parallèlement à  $AP$ ,  $d\varpi$  l'espace parcouru par le centre de gravité  $A$  parallèlement à  $AC$ ,  $du$  l'espace par le centre de gravité parallèlement à  $AB$ ,  $q$  l'abscisse  $AP$ ,  $r$  l'ordonnée  $PM$ ,  $s$  la seconde ordonnée  $MN$ , on aura ces six équations.

$$F = \frac{P d d \Pi}{dt^2},$$

$$E = \frac{P d d \varpi}{dt^2},$$

$$D = \frac{P d d u}{dt^2},$$

$$F \times FQ - D \times DH = \int \frac{dP d(sdq - qds)}{dt^2},$$

$$F \times FO - E \times ES = \int \frac{dP d(rdq - qdr)}{dt^2},$$

$$E \times ER - D \times DK = \int \frac{dPd(rdr-rds)}{dt^2}.$$

Ces théorèmes sont fondés sur les premiers principes de la Statique, qui nous apprennent qu'afin qu'un corps, par l'inertie de ses molécules, fasse équilibre aux différentes forces qui le sollicitent au mouvement: 1.° La somme de ces forces étrangères, réduite à trois forces seulement, parallèles chacune à chacun de trois axes qui se croisent perpendiculairement entr'eux, & qui passent par le centre de gravité, doit être égale à la somme des résistances des molécules du corps, réduites aux mêmes sens. 2.° Les momens des premières forces, par rapport aux trois axes proposés, doivent être égaux aux momens des dernières, par rapport aux mêmes axes. Toutes ces choses sont démontrées en détail dans quelques Ouvrages auxquels on me permettra de renvoyer le Lecteur.

## X X X V.

Cela posé, voici la manière d'appliquer ces formules aux mouvemens dont il s'agit §. 33, lorsqu'on connoîtra la figure du vaisseau & la loi de toutes les forces qui l'agitent.

Soient *ADBE* (fig. 20), le plan de flottaison du vaisseau au premier instant du mouvement, *AB* & *DE* les sections de ce plan avec deux plans verticaux, perpendiculaires entr'eux, & passant l'un & l'autre par le centre de gravité du vaisseau. Ces deux derniers plans sont représentés par *ARZB* (fig. 19), & par *DeE* (fig. 21), respectivement. Soit le point *G* (fig. 19 & 21), le centre de gravité du vaisseau au même instant: qu'on mène par ce point l'axe vertical *GC*, & les deux axes horisontaux *GQ*, *GT*, le premier dans le plan *ARZB*, le second dans le plan *DeE*. Il est clair que les trois axes *GC*, *GQ*, *GT* sont ici les mêmes que les trois axes *AB*, *AP*, *AC* de la figure 18.

Supposons, comme dans le §. précédent, que chacun de ces trois axes, emporté avec le centre de gravité, demeure toujours parallèle à lui-même, pendant toute la durée du mouvement.

Quelques puissent être les mouvemens du vaisseau, il est évident qu'ils peuvent être regardés comme composés de trois mouvemens progressifs du centre de gravité  $G$ , le premier suivant  $GQ$ , le second suivant  $GT$ , le troisième suivant  $GC$ , & de trois mouvemens de rotation de toute la masse autour des trois axes,  $GQ$ ,  $GT$ ,  $GC$ . C'est donc sur cette hypothèse qu'on va indiquer la méthode de calculer les forces  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , & les momens des mêmes forces par rapport aux trois axes de rotation, ainsi que les résistances des molécules du vaisseau, & les momens des mêmes résistances par rapport aux axes proposés.

### X X X V I.

Les forces particulières qui composent ici les forces  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , sont, comme nous l'avons déjà dit, la pesanteur du vaisseau, la poussée verticale de l'eau, la résistance de l'eau, l'impulsion du vent & l'agitation des lames. De ces différentes forces, la pesanteur seule du vaisseau, est constante; les autres sont variables & dépendent ou de la figure du vaisseau & de la partie qui est plongée à chaque instant dans l'eau, ou de la figure des voiles. Supposons que le profil longitudinal  $AKZB$ , partant de la situation représentée dans la figure 22, où  $MN$  est la ligne d'eau au premier instant, parvienne au bout du tems proposé dans la situation  $arzb$ , où  $mn$  est la ligne d'eau; en sorte qu'il s'incline de la poupe à la proue d'une certaine quantité, & qu'en même tems le centre de gravité s'élève verticalement de la quantité  $VO$ . La figure du vaisseau étant donnée, il est clair qu'on connoîtra par la seule Géométrie, l'espace  $hrzf$ . Il n'est pas moins évident qu'après que le vaisseau aura subi les deux autres

mouvements de rotation, on connoîtra encore l'espace qu'il occupe dans l'eau. Par conséquent la poussée verticale de l'eau & ses momens par rapport aux trois axes dont on a parlé, seront exprimés en fonctions de quantités constantes, du mouvement d'ascension verticale, & des mouvements de rotation. Les forces qui naissent de l'impulsion de l'eau & des lames contre les flancs de la carène, & de l'impulsion du vent contre les voiles se détermineront suivant les méthodes ordinaires, ou suivant les nouvelles hypothèses qu'on croira les plus vraisemblables. Je n'entre pas là-dessus dans de plus grands détails, parce qu'on verra bientôt l'inutilité d'envisager le problème sous un point de vue si général. Il suffit, quant à-présent, qu'on apperçoive les moyens de traduire, relativement à notre question, les six premiers membres des équations du §. 34.

### X X X V I I.

Soient dans la figure 23 les trois axes  $GQ$ ,  $GC$ ,  $GT$ , qui se croisent perpendiculairement au centre de gravité  $G$ , axes qui sont les mêmes respectivement que ceux qui sont désignés par les mêmes lettres dans les figures 19 & 21. D'un point déterminé  $H$  du navire au premier instant du mouvement, soit abaissée  $HF$  perpendiculaire au plan horizontal  $IGQ$ , & du point  $F$  soit tirée  $FE$  perpendiculaire à  $GQ$ , de manière que  $GE$ ,  $EF$ ,  $FH$  soient les coordonnées du point  $H$  par rapport aux trois axes proposés. Supposons qu'en vertu de la rotation du corps autour de l'axe vertical  $GC$ , la droite  $FH$ , en tournant parallèlement à elle-même, prenne la position  $SV$ ; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe  $GQ$ , le point  $V$  parvienne en  $R$ ; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe  $GT$ , le point  $R$  parvienne en  $N$ . Il est clair que si de ce point  $N$  on abaisse  $NM$  perpendiculaire au plan horizontal  $IGQ$ , & qu'on tire  $MP$  perpendiculaire à  $GQ$ ; les trois coordonnées  $GP$ ,

Fig. 23.

*PM*, *MN* font celles que nous avons nommées *q*, *r*, *s*, respectivement dans le §. 34, & dont il s'agit maintenant de trouver les expressions en fonctions des trois angles de rotation.

Soient tirées les droites *GF*, *GS*, *DV*. Du point *R* soit abaissée *RO* perpendiculaire sur le plan horizontal *TGQ*, & par le point *O* soit menée perpendiculairement à *GT* la droite *XO* qui passe nécessairement par le point *M*. Soient tirées les droites *XR*, *XN*. Enfin des points *D* & *X* soient élevées perpendiculairement au plan *TGC*, ou parallèlement à l'axe *GC*, les droites *DZ*, *XY*.

Supposons  $\left\{ \begin{array}{l} GE \dots\dots\dots = \psi \\ EF \dots\dots\dots = \lambda \\ FH \dots\dots\dots = \mu \\ \text{l'angle de rotation autour de l'axe } GC \dots = x \\ \text{l'angle de rotation autour de l'axe } GQ \dots = y \\ \text{l'angle de rotation autour de l'axe } GT \dots = z \end{array} \right.$

Cela posé, 1.<sup>o</sup> l'angle *DGS* étant la somme de l'angle *EGF*, & de l'angle *FGS* (*x*), on aura

$$\sin. DGS = \frac{\lambda \cos. x + \psi \sin. x}{GF},$$

$$\cos. DGS = \frac{\psi \cos. x - \lambda \sin. x}{GF};$$

donc

$$DS = \lambda \cos. x + \psi \sin. x,$$

$$GD = \psi \cos. x - \lambda \sin. x.$$

2.<sup>o</sup> l'angle *RDZ* étant la somme de l'angle *VDZ* & de l'angle *VDR* (*y*), on aura

$$\sin. RDZ = \frac{DS \times \cos. y + SV \times \sin. y}{DV} = \frac{\lambda \cos. x \cos. y + \psi \sin. x \cos. y + \mu \sin. y}{DV},$$

$$\cos. RDZ = \frac{SV \times \cos. y - DS \times \sin. y}{DV} = \frac{\mu \cos. y - \lambda \cos. x \sin. y - \psi \sin. x \sin. y}{DV}.$$



donc

$$DO = \lambda \cos. x \cos. y + \psi \sin. x \cos. y + \mu \sin. y,$$

$$RO = \mu \cos. y - \lambda \cos. x \sin. y - \psi \sin. x \sin. y.$$

Donc, à cause de  $PM = DO$ ,

$$r = \lambda \cos. x \cos. y + \psi \sin. x \cos. y + \mu \sin. y.$$

3.<sup>e</sup> L'angle  $NXY$  étant la somme de l'angle  $RXY$  & de  $RXN(z)$ , on aura, (à cause de

$$\sin. NXY = \frac{XO \times \cos. z + RO \times \sin. z}{RX},$$

$$\cos. NXY = \frac{RO \times \cos. z - XO \times \sin. z}{RX}$$

& de  $XO = GD$ ,  $XM = GP = q$ ,  $MN = s$ ),

$$q = \psi \cos. x \cos. z - \lambda \sin. x \cos. z + \mu \cos. y \sin. z - \lambda \cos. x \sin. y \sin. z - \psi \sin. x \sin. y \sin. z,$$

$$s = \mu \cos. y \cos. z - \lambda \cos. x \sin. y \cos. z - \psi \sin. x \sin. y \cos. z - \psi \cos. x \sin. z + \lambda \sin. x \sin. z.$$

Ces valeurs de  $r$ ,  $q$ ,  $s$  sont générales & applicables à toutes sortes de corps.

Nous aurons donc ici les valeurs des trois quantités

$$\int dP d(sdq - qds), \int dP d(rdq - qdr), \int dP d(sdr - rds).$$

Dans les deux différenciations qu'il faut faire d'abord pour trouver  $d(sdq - qds)$ ,  $d(rdq - qdr)$ ,  $d(sdr - rds)$ , les angles  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont variables, & les quantités  $\psi$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  sont constantes. Mais dans l'intégration qui suit, il n'y a que les quatre quantités  $dP$ ,  $\psi$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  qui doivent être regardées comme variables, les autres doivent être écrites au devant des signes d'intégration, parce qu'alors les intégrales renferment les mouvemens en tant qu'ils sont appliqués à tous les points de la masse du corps.

### X X X V I I I.

Il suit des deux §. précédens, qu'on pourra traduire entièrement les équations générales du §. XXXIV, de

manière qu'elles représentent en général tous les mouvemens d'un vaisseau flottant à la mer. Mais il faut avouer que l'exécution de cette méthode demanderoit des calculs immenses & vraisemblablement impraticables. Heureusement plusieurs raisons dispensent d'entreprendre ce travail dans toute sa complication.

1.<sup>o</sup> La figure du vaisseau est extrêmement irrégulière, & ne peut se rapporter à celle d'aucun corps géométrique. Elle est fort différente dans les différens vaisseaux: par conséquent les calculs qu'on feroit à cet égard seroient purement hypothétiques, & n'iroient point au but dans la pratique.

2.<sup>o</sup> L'impulsion du vent sur les voiles, & la résistance que le navire éprouve en divisant l'eau, sont deux forces qui se font sans cesse équilibre, du moins à-très-peu-près. Si cet équilibre vient à être dérangé, il se rétablit très-prompement & peut être considéré comme permanent. De plus ces deux mêmes forces sont ordinairement fort petites en comparaison de la pesanteur du vaisseau & de la poussée verticale de l'eau. Ainsi les inégalités qu'elles produisent dans les mouvemens du vaisseau peuvent le plus souvent être négligés, sans craindre aucune erreur sensible.

3.<sup>o</sup> L'action des lames est une force qu'il est absolument impossible de soumettre à un calcul réel & non hypothétique. Dans certains momens, cette force se fait sentir avec violence: dans d'autres elle est comme nulle. Je crois qu'il convient de la rapporter plutôt au genre des forces de *percussion*, qui agissent par coups *finis* & *interrompus*, qu'au genre des forces de *pression*. Par-là elle doit être exclue du calcul. La fonction qu'elle aura alors sera de troubler de tems en tems l'état actuel du vaisseau, ce qui ne peut qu'introduire certaines quantités constantes dans les intégrations.

4.<sup>o</sup> Il est inutile de déterminer en général les oscillations d'un vaisseau, parce que ces oscillations ne doivent jamais passer

passer certaines bornes, afin qu'il y ait sûreté dans la navigation. Ainsi la solution de ce problème aura assez de généralité, si l'on détermine seulement les oscillations très-petites du vaisseau, & qu'on assigne de plus les conditions qui doivent avoir lieu, afin que ces mêmes oscillations demeurent très-petites.

De ces quatre assertions, la première, la troisième & la quatrième sont évidentes par elles-mêmes. La seconde est la seule qui ait besoin d'une explication un peu plus développée.

### X X X I X.

Le vent est la force motrice qui met le navire en mouvement, & qui le pousse vers le but désiré. Dans les premiers instans, cette force l'emporte beaucoup sur la résistance que le navire éprouve en divisant l'eau. Ainsi le sillage s'accélère avec rapidité. Mais cette accélération ne dure guères que trois ou quatre minutes. Au bout de ce tems le vaisseau a acquis toute sa vitesse, qu'il conserve dans la suite, en vertu de son inertie; & par conséquent l'impulsion du vent & la résistance de l'eau se font équilibre. Cela est constant par l'expérience.

La même chose peut encore se démontrer par le raisonnement. Quoique cette discussion n'appartienne pas proprement à mon sujet, je crois devoir y entrer, parce qu'un Auteur célèbre qui a traité au long ce problème, n'a pas fait une remarque dont l'omission semble mettre le calcul en contradiction avec l'expérience.

Supposons, avec l'Auteur dont il s'agit, un navire qui se meut suivant la route directe, & qui étant en repos au premier instant du mouvement, est exposé tout-d'un-coup à l'action du vent. Il est question de déterminer le tems que ce navire emploiera à acquérir toute sa vitesse. On voit assez que si on trouve ce tems fort petit, on sera en droit d'affirmer, à plus forte raison, que l'accélération ou la

rétardation auxquelles un navire en mer peut être sujet; s'opèrent en un tems très-court, & de regarder par conséquent sa vitesse comme sensiblement uniforme.

Nommons  $g$  la gravité,  $N$  la masse du navire,  $\rho$  la densité du vent,  $p$  celle de l'eau,  $A^2$  la surface plane qui exposée au choc perpendiculaire du vent, éprouveroit la même choc qu'éprouvent les voiles parallèlement à la quille,  $B^2$  la surface qui exposée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit la même impulsion qu'éprouve le navire dans le sens de sa quille,  $V$  la vitesse du vent (qu'on peut regarder comme constante, au moins pendant un certain tems),  $u$  la vitesse variable du navire,  $t$  le tems écoulé depuis le commencement du mouvement. Supposons de plus que sous une vitesse donnée  $m$ , l'impulsion directe de l'eau contre un plan donné  $n^2$ , soit égale à un poids dont la masse est  $P$ .

Cela posé, on aura, suivant l'hypothèse ordinaire, que l'impulsion directe d'un fluide contre un plan est proportionnelle au produit de ce plan par la densité du fluide, & par le carré de la vitesse avec laquelle se fait le choc,

$$\frac{gP}{pm^2n^2} [A^2(V-u)^2 - pB^2u^2] dt = Ndu;$$

d'où l'on tire aisément

$$t = \frac{pm^2n^2}{gP} \times \frac{N}{2ABVP} L \left( \frac{AV - Au + BuVp}{AV - A - BuVp} \right),$$

en complétant l'intégrale, de manière que  $t=0$  donne  $u=0$ .

Maintenant il est évident que l'accélération devient nulle lorsqu'on a  $A^2(V-u)^2 - pB^2u^2 = 0$ , ou bien

$$u = \frac{AV}{A + BVp}.$$

Il semble donc que pour déterminer le tems que le navire emploie à acquérir sa plus grande vitesse, il n'y auroit qu'à substituer cette valeur de  $u$  dans l'expression générale de  $t$ . Mais si l'on fait cette substitution, on

trouvera que le dénominateur de la quantité logarithmique devient égal à zéro; d'où il s'ensuit que le tems cherché, au lieu d'être très-petit, seroit au contraire infini. Comment concilier le calcul avec l'expérience? voici le dénouement de cette petite difficulté.

Il est certain d'abord que suivant l'hypothèse de l'impulsion des fluides, dont nous venons de tirer la valeur du tems, la vitesse ne peut parvenir à une uniformité rigoureuse qu'au bout d'un tems infini. Dans le commencement du mouvement, l'impulsion du vent contre le navire est très-grande; d'où il suit que  $u$  augmente très-promptement: & comme le carré de  $u$  entre dans l'expression de la résistance que l'eau oppose au navire, on comprend que  $u$

peut approcher très-près de  $\frac{AV}{A+BVP}$ , sans qu'on ait pour cela rigoureusement  $A(V-u)^2 = pB^2u^2$ . Ainsi s'il n'y avoit pas d'autre cause qui influât sur la vitesse, elle ne parviendroit pas à l'uniformité absolue. Mais il faut remarquer que le navire éprouve encore une autre sorte de résistance qui achève d'opérer l'effet dont il s'agit. Cette seconde résistance est celle qui naît de la ténacité ou de l'adhésion mutuelle des parties de l'eau. Elle est comme nulle, en comparaison de la première, lorsque le navire a acquis une vitesse un peu considérable. Mais dans les premiers instans du mouvement, elle doit se faire sentir & produire quelque retardation dans la vitesse du vaisseau, de manière que, par la combinaison des deux résistances, la vitesse devient bientôt uniforme, comme on l'observe en effet.

Quant à ce que nous avons ajouté que l'impulsion du vent & la résistance de l'eau sont des forces très-petites en comparaison de la pesanteur du vaisseau, & de la poussée verticale de l'eau; cela est aisé à voir par les calculs de l'impulsion de l'eau contre la proue de plusieurs vaisseaux, que M. Duhamel a faits dans son Architecture navale.

## X L.

Je reviens à mon sujet, & je vais en conséquence de toutes les remarques qui précèdent, déterminer les mouvemens d'oscillation du vaisseau, en supposant ces oscillations très-petites, & en n'ayant égard qu'à la pesanteur du vaisseau, & à la poussée verticale de l'eau. Je compte parmi ces oscillations le mouvement d'ascension verticale du centre de gravité. Les autres mouvemens du centre de gravité sont supposés ou nuls, ou parfaitement uniformes. La résistance que le navire éprouve en frappant l'eau, en vertu des mouvemens d'oscillation dont on vient de parler, doit être négligée, parce que cette force renferme dans son expression le carré de la vitesse, qui est un infiniment petit du second ordre.

Fig. 19,  
20, 21, 22.

Soient reprises les hypothèses & les constructions des §. XXXIV, XXXV, XXXVI, XXXVII, en observant néanmoins qu'ici le plan  $ARZB$  peut être censé passer par la quille, & partager le vaisseau en deux parties parfaitement égales & semblables, parce que l'inclinaison primitive est très-petite. Qu'outre les dénominations déjà employées dans ces mêmes paragraphes, on suppose encore

La gravité . . . . .	$=g$
Le volume du navire . . . . .	$=N$
Sa densité . . . . .	$=l$
Le volume de la carène primitive . . . . .	$=M$
La densité de l'eau . . . . .	$=p$
La distance $OH$ du centre de gravité du plan de flottaison $ADBE$ (fig. 20) au point $O$ . . .	$=k$
La hauteur du centre de gravité du navire au- dessus de celui de la carène au premier instant	$=b$
La distance initiale très-petite du centre de gra- vité de la carène primitive aux plan vertical $ARZB$ . . . . .	$=f$

La distance initiale aussi très-petite du centre de gravité de la carène primitive au plan vertical

$DeE$  (fig. 22) . . . . .  $=f'$

L'aire  $ADBE$  (fig. 20) . . . . .  $=aa$

Le mouvement d'ascension verticale du centre de gravité . . . . .  $=u$ .

Nous aurons ici  $F=0$ ,  $E=0$ .

La force  $D$ , la seule qui nous reste, est égale à l'excès de la poussée verticale de l'eau sur la pesanteur du navire. Supposons que le plan de flottaison  $AB$  ayant pris la position  $ab$  peu différente de la première, en vertu de la rotation du navire autour de l'axe  $GT$ , on abaisse du centre de gravité  $G$  la perpendiculaire  $Go$  sur  $ab$ : il est clair que les points  $O$  &  $o$  étant très-proches l'un de l'autre, les deux plans de flottaison  $AB$  &  $ab$  peuvent être censés se couper sur la verticale  $GO$ ; & que de plus les angles formés par la rencontre de  $AB$  & de  $ab$  sont égaux à l'angle  $OG_o$ . Les mêmes remarques ont lieu relativement au mouvement du navire autour de l'axe  $GQ$ . Cela posé, il est évident que la nouvelle carène, après le tems  $t$  écoulé, est égale à la première  $M$ , moins un prisme qui a pour base le plan de flottaison  $ADBE$ , & pour hauteur la hauteur parcourue verticalement par le centre de gravité, moins un onglet formé par la rotation de la partie  $EBD$  autour de  $ED$ , plus un onglet formé par la rotation de la partie  $EAD$  autour de  $ED$ , moins un onglet formé par la rotation de la partie  $AEB$  autour de  $AB$ , plus un onglet formé par la rotation de la partie  $ADB$  autour de  $AB$ . Donc à cause de l'égalité de ces deux derniers onglets, la nouvelle carène sera  $M - aau - az + ez$ ,  $a$  &  $e$  étant des coefficients donnés par la nature de la courbe  $ADBE$ . Donc

1.°  $D = gP(M - aau - az + ez) - gN$ .

2.° La distance initiale du centre de gravité de  $M$  au plan  $DeE$  étant  $f'$ , cette distance après le tems  $t$  sera

$f'+bz$ . Soient  $a'z$  &  $\epsilon'z$  les momens des deux onglets  $az$ ,  $ez$  par rapport à l'axe  $GT$ ,  $a'$  &  $\epsilon'$  étant encore des coefficients donnés. Je néglige deux momens de la forme  $a'y$ , à cause de leur petitesse. Le moment du prisme  $aa'u$  par rapport à l'axe  $GT$  est  $aa'ku$ . Donc, en observant que le moment de la poussée de l'eau par rapport à l'axe  $GT$  doit être pris dans un sens contraire au moment de la force  $D$  dans la figure 18, nous aurons ici

$$-D \times DH = gp[M(f'+bz) - aa'ku - a'z - \epsilon'z].$$

De même, en nommant  $\gamma\gamma$  le moment de l'onglet formé par la rotation de  $AEB$  ou de  $ADB$  autour de  $AB$ , par rapport à l'axe  $GQ$ ; & observant que le prisme  $aa'u$  & les deux autres onglets  $az$ ,  $ez$  n'ont point de momens par rapport à l'axe  $GQ$ , nous aurons

$$-D \times DK = gp[M(f+by) - 2\gamma\gamma].$$

3.<sup>o</sup> Les oscillations étant supposées fort petites, il est évident que dans les valeurs de  $r$ ,  $q$ ,  $s$  trouvées ci-dessus, (§ XXXVII), on peut négliger tous les termes qui contiennent plus d'un sinus, & supposer dans les termes qui contiennent un sinus & un cosinus ou deux cosinus, chaque cosinus = 1 : d'où il résulte qu'on aura

$$\begin{aligned} sdq - qds &= -\lambda\mu dx + (\mu^2 + \psi^2) dz + \psi\lambda dy, \\ rdq - qdr &= -(\psi^2 + \lambda^2) dx + \lambda\mu dz - \psi\mu dy, \\ sdr - rds &= \psi\mu dx + (\lambda^2 + \mu^2) dy + \psi\lambda dz. \end{aligned}$$

Done

$$\begin{aligned} \int dPd(sdq - qds) &= -ddx \int \lambda\mu dN + ddz \int (\mu^2 + \psi^2) dN - ddy \int \psi\lambda dN, \\ \int dPd(rdq - qdr) &= -ddx \int (\psi^2 + \lambda^2) dN + ddx \int \lambda\mu dN - ddy \int \psi\mu dN, \\ \int dPd(sdr - rds) &= ddx \int \psi\mu dN + ddy \int (\lambda^2 + \mu^2) dN + ddz \int \psi\lambda dN. \end{aligned}$$

Les quantités qui sont sous le signe d'intégration sont données par la figure du navire.



Ces formules peuvent se simplifier ; car puisque le navire est divisé en deux parties égales & semblables par la coupe longitudinale  $ARZB$ , il est clair qu'on a  $\int \lambda \mu dN = 0$ ,  $\int \psi \lambda dN = 0$ . Ainsi on aura simplement

$$\int dPd(sdq - qds) = ddz \int (\psi^2 + \mu^2) dN,$$

$$\int dPd(rdq - qdr) = -ddx \int (\psi^2 + \lambda^2) dN - ddy \int \psi \mu dN,$$

$$\int dPd(sdr - rds) = ddx \int \psi \mu dN + ddy \int (\lambda^2 + \mu^2) dN.$$

Nous supposons, pour abrégé,  $\int (\psi^2 + \mu^2) dN = Q$  ;  
 $\int (\psi^2 + \lambda^2) dN = R$ ,  $\int \psi \mu dN = S$ ,  $\int (\lambda^2 + \mu^2) dN = V$  ; & l'on se souviendra que

$Q$  représente la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe latitudinal  $GT$ ,

$R$  représente la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe vertical  $GC$ ,

$S$  représente la somme des produits des particules du navire par leurs distances à la coupe latitudinale passant par le centre de gravité & à la coupe horisontale passant aussi par le centre de gravité,

$V$  représente la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe longitudinal  $GQ$ .

Tout cela posé, on aura ces quatre équations fondamentales,

$$gp(M - aau - az + \epsilon z) - gN = \frac{Nddu}{dt^2},$$

$$gp[M(f' + bz) - aaku - a'z - \epsilon'z] = \frac{Qddz}{dt^2},$$

$$Rddx + Sddy = 0,$$

$$gp[M(f + by) - 2\gamma\gamma] = \frac{Sddx + Vddy}{dt^2},$$

dont les deux premières combinées ensemble sont intégrables par des méthodes connues ; les deux dernières aussi combinées ensemble sont encore plus faciles à intégrer.

## X L I.

Pour parvenir à des résultats très-simples & facilement applicables à la pratique, nous négligerons encore le mouvement d'ascension verticale du centre de gravité, qui ne peut jamais être fort sensible, lorsqu'on fait abstraction, comme nous faisons ici, de l'action des lames. Alors la première équation devient nulle, & le terme  $aaku$  disparaît de la seconde. Par conséquent les trois mouvements d'oscillation du vaisseau seront exprimées par ces trois équations

$$(A) \quad gp[M(f'+hz) - a'z - e'z] = \frac{Qddz}{dt^2},$$

$$(B) \quad Rddx + Sddy = 0,$$

$$(C) \quad gp[M(f+hy) - 2\gamma y] = \frac{Sddx + Vddy}{dt^2}.$$

Multipliant tous les termes de la première par  $dz$ , & intégrant, on aura

$$gp[Mf'z + \frac{(Mh - a' - e')z^2}{2}] = \frac{Qdz^2}{2dt^2},$$

d'où l'on tire facilement

$$z = \frac{Mf'}{a'+e'-Mh} - \frac{Mf'}{a'+e'-Mh} \cos\left(t\sqrt{\frac{gp.(a'+e'-Mh)}{Q}}\right).$$

On trouvera de même

$$y = \frac{Mf}{2\gamma - Mh} - \frac{Mf}{2\gamma - Mh} \cos\left(t\sqrt{\frac{gp.R(2\gamma - Mh)}{RV - S\delta}}\right);$$

$$x = -\frac{S}{R} \times \frac{Mf}{2\gamma - Mh} + \frac{S}{R} \times \frac{Mf}{2\gamma - Mh} \cos\left(t\sqrt{\frac{gp.R(2\gamma - Mh)}{RV - S\delta}}\right).$$

Ces intégrales sont complètes, parce qu'on doit avoir  $z=0$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ , lorsque  $t=0$ .

Qu'on prenne une nouvelle variable  $v$  telle que l'on ait

$$t = v\sqrt{\frac{Q}{gp.(a'+e'-Mh)}}$$

on

on trouvera

$$z = \frac{Mf'}{a'+\epsilon'-Mh} - \frac{Mf'}{a'+\epsilon'-Mh} \times \cos v,$$

$$y = \frac{Mf}{2\gamma - Mh} - \frac{Mf}{2\gamma - Mh} \times \cos v \left( v \sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS)(a'+\epsilon' - Mh)}} \right),$$

$$x = -\frac{S}{R} \times \frac{Mf'}{2\gamma - Mh} + \frac{S}{R} \times \frac{Mf'}{2\gamma - Mh} \times \cos v \left( v \sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS)(a'+\epsilon' - M)}} \right)$$

Dans chacune de ces valeurs de  $z$ ,  $y$ ,  $x$ , le premier terme est *constant*, le second est *variable*. Celui ci peut être considéré comme l'équation du premier, en employant ce mot dans le même sens que font les Astronomes en pareil cas. L'un & l'autre terme est fort petit, parce qu'on a supposé que  $f$  &  $f'$  étoient des quantités très-petites.

Ces formules vont nous fournir (au moins par une approximation suffisamment exacte dans la pratique) les moyens de procurer aux vaisseaux toute la stabilité convenable, & de modérer les mouvemens de tangage, de roulis & de rotation horisontale. Commençons par la stabilité.

## X L I I.

En remontant aux trois équations fondamentales (A), (B), (C), on trouve que si  $Mh$  est plus grand que  $(a'+\epsilon')$ , ou que ces deux quantités soient seulement égales, lorsqu'il s'agit des mouvemens de tangage; & que si  $Mh$  est plus grand que  $2\gamma$ , ou que ces deux quantités soient seulement égales, lorsqu'il s'agit des mouvemens de roulis & de rotation horisontale: on trouvera, dis-je, que les valeurs de  $z$ ,  $y$ ,  $x$  contiendront des logarithmes, & seront par conséquent sujettes à augmenter à mesure que le tems  $t$  augmentera. Or ces quantités ont été supposées très-petites. Donc alors le navire n'aura pas de stabilité. Ainsi lorsqu'il s'agit des mouvemens de tangage, la limite de la plus grande hauteur à laquelle le centre de gravité de la charge

totale puisse être placée au-dessus de celui de la carène, est donnée par cette équation

$$h = \frac{\alpha' + \epsilon'}{M};$$

Et lorsqu'il s'agit des mouvemens de roulis, & de rotation horizontale, la limite de la plus grande hauteur à laquelle le centre de gravité de la charge puisse être placée au-dessus de celui de la carène, est donnée par cette équation

$$h = \frac{2\gamma}{M}.$$

Il est évident que cette dernière hauteur est moindre que la précédente, & doit être prise dans tous les cas pour la limite de la distance des deux centres de gravité, parce que le vaisseau roule en même temps qu'il tangue, ou roule après avoir tangué. On cherchera donc la valeur de la quantité  $\frac{2\gamma}{M}$ , & on aura soin de distribuer la charge, de manière qu' $h$  soit plus petite que  $\frac{2\gamma}{M}$ . Le vaisseau aura d'autant plus de stabilité que  $h$  sera moindre en comparaison de  $\frac{2\gamma}{M}$ .

Il me semble que cette manière de déterminer la stabilité du vaisseau, ou la position du *metacentre*, est plus simple & plus directe que toutes celles que l'on a employées jusques à présent.

On doit se souvenir que conformément à nos dénominations,  $\alpha'$  est le moment de l'onglet très-petit formé par la rotation de l'aire  $FBD$  autour de  $ED$ , par rapport à la même ligne  $ED$ ;  $\epsilon'$  est le moment de l'onglet formé par la rotation de l'aire  $EAD$  autour de  $ED$ , par rapport à la même ligne  $ED$ ;  $\gamma$  est le moment de l'onglet formé par la rotation de l'aire  $AEB$  ou  $ADB$  autour de  $AB$ , par rapport à la même ligne  $AB$ . Comme on néglige le mouvement d'ascension du centre de gravité du vaisseau, & que

Fig. 20.

par conséquent la verticale élevée par ce même centre de gravité passe, du moins à-très-peu-près, par le centre de gravité du plan de flottaison, on a  $\epsilon' = \alpha'$ , au moins sensiblement.

## X L I I I.

Il n'est pas moins facile de déterminer l'amplitude des oscillations du vaisseau.

Les valeurs de  $z$ ,  $y$ ,  $x$ , augmentent depuis 0 jusqu'à ce que chaque cosinus particulier qu'elles renferment, devienne égal à  $-1$  : alors elles atteignent leur *maximum* ; après quoi elles diminuent par les mêmes degrés. Donc si l'on nomme  $Z$ ,  $Y$ ,  $X$  respectivement les amplitudes *totales* & *absolues* des mouvemens de tangage, de roulis, & de rotation horizontale, on aura (en supposant  $\alpha' = \epsilon'$ ),

$$Z = \frac{2Mf'}{2a' - Mh},$$

$$Y = \frac{2Mf}{2\gamma - Mh},$$

$$X = \frac{S}{R} \times \frac{2Mf}{2\gamma - Mh}.$$

D'où l'on voit que pour diminuer l'amplitude des mouvemens de tangage & de roulis, la question se réduit à diminuer  $h$  dont on est le maître, c'est-à-dire, à abaisser de plus en plus le centre de gravité de la charge totale. Quant aux mouvemens de rotation horizontale, on les diminuera en abaissant le centre de gravité de la charge, en distribuant la charge, de la même manière (autant qu'il est possible), soit par rapport à la coupe latitudinale passant par le centre de gravité, soit par rapport à la coupe horizontale passant par le centre de gravité, & en éloignant les poids de l'axe vertical.

Tel est donc le moyen d'empêcher qu'un vaisseau, dans

le roulis & le tangage ne décrive de trop grands arcs, c'est d'abaisser le plus qu'il est possible le centre de gravité de la charge. Par-là le vaisseau acquiert encore de la stabilité. Lorsque la carène est fort pincée par le bas, le vaisseau plie sous le vent jusqu'à ce qu'il ait atteint son fort, & l'inclinaison peut être portée très-loin. On prévient cet inconvénient, en abaissant le centre de gravité. Mais il est quelquefois dangereux que le vent & la poussée verticale de l'eau, en se combattant mutuellement, n'exposent la mâture à se briser, lorsque l'une des deux forces cède tout d'un coup à l'autre. La profondeur du centre de gravité ne doit donc pas passer certaines limites, qu'on ne peut assigner en général, mais que les Marins expérimentés trouveront sans peine dans chaque cas particulier. Au contraire un vaisseau dont les fonds sont arrondis, tend à tourner dans toutes les situations; il cède presque sans résistance aux efforts du vent & des lames. Ainsi pour lui procurer de la stabilité, & pour diminuer l'amplitude de ses oscillations, on ne sauroit trop faire descendre son centre de gravité. Malheureusement on n'est pas toujours le maître de placer ce point comme il conviendrait, parce qu'on est gêné par les emplacements fixes que certaines matières doivent nécessairement occuper. Par exemple, dans les vaisseaux de guerre, l'artillerie élève considérablement le centre de gravité. Alors il fera du moins avantageux, toutes choses d'ailleurs égales, que les canons de la première batterie soient plus pesans que ceux de la seconde, les canons de la seconde plus pesans que ceux de la troisième, &c. C'est une règle que la pratique a enseignée, & que la théorie confirme.

## X L I V.

Enfin nous déterminerons encore par nos formules la *vitesse* des oscillations. Le problème se réduit à trouver le

tems que le navire emploie à faire les oscillations totales  $Z, Y, X$ ; car selon que ce tems fera plus ou moins long, la vitesse fera moins ou plus rapide.

Nous avons trouvé en général (§. XLI)

$$t = v \sqrt{\frac{Q}{gp(2a' - Mh)}};$$

or lorsque  $z$  devient  $Z$ ,  $\cos. v = -1$ , ou bien  $v = 180^\circ$ ,

lorsque  $y$  devient  $Y$ ,  $\cos. (v \sqrt{\frac{QR.(2\gamma - Mh)}{(RV - SS).(2a' - Mh)}}) = -1$ ,

ou bien  $v = 180^\circ \sqrt{\frac{(RV - SS).(2a' - Mh)}{QR.(2\gamma - Mh)}}$ ; lorsque  $x$  devient

$X$ ,  $v = 180^\circ \sqrt{\frac{(RV - SS).(2a' - Mh)}{QR.(2\gamma - Mh)}}$ .

Donc, en considérant que le sinus total est 1, & nommant  $n$  le rapport de la demie circonférence au rayon,  $t(T)$  le tems de l'oscillation totale de tangage,  $t(R)$  le tems de l'oscillation totale de roulis,  $t(H)$  le tems de l'oscillation totale de rotation horizontale, on aura

$$t(T) = n \sqrt{\frac{Q}{gp.(2a' - Mh)}},$$

$$t(R) = n \sqrt{\frac{(RV - SS)}{gpR(2\gamma - Mh)}},$$

$$t(H) = n \sqrt{\frac{(RV - SS)}{gpR(2\gamma - Mh)}}.$$

On voit que les deux derniers tems sont égaux entr'eux. L'expression de ces deux mêmes tems peut se simplifier, parce que la quantité  $S$ , dans tous les vaisseaux, étant fort petite par rapport à chacune des quantités  $Q, R, V$ , il est permis de négliger le terme  $S^2$ .

Comme les valeurs des trois tems proposés ne contiennent point les lettres  $f$  &  $f'$ , il est clair que les tems des oscillations seront toujours les mêmes dans chaque

espèce, quelles que puissent être les amplitudes de ces oscillations, pourvu néanmoins qu'elles demeurent toujours fort petites.

Pour employer commodément ces formules, supposons qu'on exprime par  $b$  &  $c$  respectivement les quantités

$\frac{Q}{p(2\alpha' - Mh)}$  &  $\frac{V}{p \cdot 2\gamma - Mh}$  qui sont évidemment des lignes; de

manière que l'on ait  $t(T) = n\sqrt{\frac{b}{g}}$ ,  $t(R)$  ou  $t(H) = n\sqrt{\frac{c}{g}}$ .

Soient nommés  $\theta$  &  $\theta'$  respectivement les tems qu'un corps employeroit par sa pesanteur à parcourir les espaces  $b$  &  $c$ :

on aura, comme on fait,  $\theta = \sqrt{\frac{2b}{g}}$ ,  $\theta' = \sqrt{\frac{2c}{g}}$ ; donc

$t(T) = \frac{n\theta}{\sqrt{2}}$ ,  $t(R)$  ou  $t(H) = \frac{n\theta'}{\sqrt{2}}$ . Or si l'on suppose qu'un corps pesant parcoure 15 pieds pendant la première se-

conde de sa chute, on aura  $\theta = 1'' \sqrt{\frac{b \text{ pieds}}{15 \text{ pieds}}}$ ,

$\theta' = 1'' \sqrt{\frac{c \text{ pi.}}{15 \text{ pi.}}}$ ; donc enfin

$$t(T) = 1'' \times n \sqrt{\frac{Q}{30 \text{ pi.} \cdot p(2\alpha' - Mh)}},$$

$$t(R) \text{ ou } t(H) = 1'' \times n \sqrt{\frac{V}{30 \text{ pi.} \cdot p(2\gamma - Mh)}},$$

expressions dans lesquelles les quantités radicales sont des nombres absolus.

Toutes ces préparations faites, voici les réflexions pratiques sur la vitesse des oscillations.

1.<sup>o</sup> On voit que pour diminuer la vitesse des mouvemens de tangage, ou pour augmenter  $t(T)$ , il faut aug-

menter la fraction  $\frac{Q}{2\alpha' - Mh}$ . Or dans cette fraction, le vo-

lume  $M$  de la carène est donné; la quantité  $\alpha$  est aussi donnée. Restent donc seulement les deux quantités  $Q$  &  $b$



qu'on est le maître de changer par l'arrimage. Or puisque  $Q$  représente la somme des produits des particules de la charge par les quarrés de leurs distances à l'axe latitudinal, il est évident qu'on diminuera la vitesse des mouvemens de tangage, en écartant le plus qu'on pourra de l'axe latitudinal des poids fort pesans, c'est-à-dire, en transportant ces poids vers la proue & vers la poupe. Nous avons suffisamment indiqué (§. XXXII), les poids dont on peut se servir pour faire ces sortes d'arrangemens, soit qu'il s'agisse d'arrimer le vaisseau dans le port, soit qu'il faille changer quelque chose en mer à l'arrimage. Quant à l'autre moyen, qui consiste à augmenter  $h$ , c'est-à-dire, à élever le centre de gravité de la charge, il n'est pas tout-à fait si efficace que le premier; cependant il peut être utile en plusieurs occasions. Lorsqu'un vaisseau doit porter des effets très pesans, tels que des canons, des ancres, du marbre, &c, & qu'on veut l'empêcher d'osciller avec trop de vivacité, on élève le centre de gravité de la charge, en arrimant les canons, les ancres, &c, sur un fardage qui est composé de lits de fagots, & dont l'épaisseur est plus ou moins grande, suivant le besoin.

2.<sup>o</sup> En raisonnant de même au sujet des mouvemens de roulis & de rotation horizontale, il est clair qu'on diminuera la vitesse de ces mouvemens, si l'on écarte le plus qu'on pourra de l'axe longitudinal du vaisseau, des poids fort pesans, c'est à-dire, si l'on transporte ces poids bas bord & tribord dans les flancs du vaisseau. Cette même vitesse diminue aussi par l'élévation du centre de gravité de la charge.

## X L V.

Nous avons vu (§. XLII & XLIII) que pour augmenter la stabilité du vaisseau, & pour diminuer l'amplitude de ses oscillations, il faut abaisser le centre de gravité de la charge; & nous venons de voir au contraire qu'un des

moyens de diminuer la vitesse des oscillations, est d'élever le même centre. Ainsi les deux qualités de bien porter la voile, & de faire de petites oscillations sont en opposition avec celles d'osciller lentement. Dans les vaisseaux de guerre, l'artillerie élève le centre de gravité de la charge; d'où il résulte que ces vaisseaux sont moins stables & font de plus grandes oscillations que si l'artillerie étoit dans la calle; mais en récompense ils oscillent avec plus de lenteur qu'ils ne feroient dans le cas purement hypothétique dont nous venons de parler. C'est une observation que les Marins ne paroissent pas avoir suffisamment développée; car on n'a pas encore fixé, ce me semble, d'une manière bien claire, ce qu'on entend par rouler ou tanguer plus ou moins. On n'a pas non plus une idée bien nette de l'action des différentes sortes de lest qu'on emploie dans l'arrimage. Tous les jours on entend dire qu'une trop grande quantité de lest en fer procure des secousses rudes au vaisseau, parce que ce genre de lest a moins d'élasticité, & se prête moins aux mouvemens du vaisseau, que le lest en caillou. Mais il est évident que cette raison est chimérique, & qu'il faut attribuer l'effet dont il s'agit à la position moins ou plus élevée du centre de gravité de la charge. Je crois qu'il ne restera aucune obscurité sur cette matière, si l'on considère la distinction qu'on doit mettre entre l'amplitude & la vitesse des oscillations. Lorsqu'on abaisse le centre de gravité de la charge, l'amplitude des oscillations diminue; mais leur vitesse augmente. Lorsqu'on élève le centre de gravité, la vitesse des oscillations diminue; mais leur amplitude augmente. La perfection de l'arrimage est de distribuer tellement la charge que le vaisseau, en oscillant, ne décrive ni de trop grands ni de trop petits arcs; car de trop grands arcs, quoique décrits lentement, ne manquent pas de tourmenter beaucoup la mâture & l'équipage; & de trop petits arcs, par la vivacité dont ils sont décrits, ont les mêmes & peut-être de plus grands inconvéniens. On parviendra à

- l'objet

l'objet proposé, en étudiant la capacité & la forme du vaisseau qu'on veut charger. Par exemple, un vaisseau, arrondi par les fonds, doit avoir son centre de gravité très-bas. Alors il faut employer un lest très-pesant. Un vaisseau qui a les façons hautes, n'a pas besoin que son centre de gravité soit si bas. Cette remarque s'applique, proportions gardées aux cas intermédiaires. Il est vrai qu'on est souvent gêné dans l'arrimage, comme nous l'avons déjà observé ci dessus, & qu'on ne peut pas toujours atteindre au but que l'on apperçoit. Car, par exemple, lorsqu'une campagne doit durer long-tems, & qu'on prend des vivres en conséquence, ces provisions occupent une partie considérable de la calle; & il peut se faire qu'il ne reste pas assez de place pour la quantité nécessaire de lest. En ce cas, il convient sur-tout d'employer un lest très-pesant, & de diminuer d'ailleurs la vitesse des oscillations par l'autre moyen que nous avons proposé, c'est-à-dire en écartant le plus qu'il est possible les parties les plus pesantes de la charge, de l'axe latitudinal & de l'axe longitudinal du vaisseau.

## X L V I.

Après avoir exposé la manière la plus avantageuse d'arrimer un vaisseau, il ne nous reste plus qu'à examiner les effets des changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage. Cette nouvelle recherche demande quelques principes de mécanique qu'il faut d'abord établir.

1.<sup>o</sup> Soit une verge inflexible  $AM$ , à laquelle soient appliqués un nombre quelconque de poids  $A, B, C, K, M$ . Soit  $hH$  la direction de la résultante de tous ces poids; & supposons qu'on prenne, par exemple, le poids  $C$  dans un endroit connu, & qu'on le transporte à l'endroit connu  $E$ . Il est clair que, par cette transposition, la résultante de tous les poids ne passera plus par le point  $H$ , mais par quelqu'autre point  $O$  situé du côté de  $M$ ; & il n'est pas difficile de voir qu'en nommant  $F$  la somme de tous les

Fig. 249

poids, pour abrégé, on aura  $F:C::CE:HO$ , ou bien  
 $HO = \frac{C \times CE}{F}$ . Mais pour démontrer cela en rigueur, soit

$N$  la direction de la résultante de tous les poids qui sont placés du côté de  $M$  par rapport au point  $H$ , & soit nommée  $N$  cette résultante. Pareillement soit  $dD$  la direction de la résultante de tous les poids qui sont du côté de  $B$ , à l'exception cependant du poids  $C$ , & soit nommée  $D$  cette résultante. On aura avant la transposition du poids  $C$ ,

$$N \times NH = D \times DH + C \times CH,$$

& après la transposition du poids  $C$ ,

$$N \times NO = D \times DO + C \times EO,$$

ou bien

$$N \times (NH - HO) = D \times (DH + HO) + C \times (CH + HO - CE);$$

donc

$$N \times HO + (D + C) \times HO = C \times CE,$$

&

$$HO = \frac{C \times CE}{N + D + C} = \frac{C \times CE}{F}.$$

2.<sup>o</sup> Si l'on nomme  $P$  la somme des produits de tous les corps multipliés chacun par le carré de sa distance à un axe passant par le point  $H$ , avant la transposition du poids  $C$ ; il est clair qu'après la transposition de ce poids de  $C$  en  $E$ , la somme de tous les poids par les carrés de leurs distances au point ou axe  $H$  fera  $P - C \times CH^2 + C \times EH^2$ .

3.<sup>o</sup> La somme des produits de plusieurs corps multipliés chacun par le carré de sa distance à un axe qui ne passe pas par le centre de gravité du système, est égale à la somme des produits des mêmes corps multipliés chacun par le carré de sa distance à un axe qui passe par le centre de gravité du système, & parallèle au premier, plus au produit de la somme de tous les corps multipliée par le carré de la distance des deux axes. Cette proposition est

démontrée dans plusieurs livres de Dynamique\* auxquels je renvoie le Lecteur, pour ne pas trop m'écartier de mon objet.

Il résulte de tout ce qu'on vient de dire, que si après la transposition du corps  $C$  en  $E$ , on nomme  $R$  la somme des produits de tous les corps multipliés chacun par le carré de sa distance au point ou axe  $O$ , on aura

$$P - C \times \overline{CH}^2 + C \times \overline{EH}^2 = R + F \times \frac{\overline{CE}^2 \times C^2}{F^2},$$

$$R = P - C \times \overline{CH}^2 + C \times \overline{EH}^2 - \frac{C^2 \times \overline{CE}^2}{F}.$$

## X L V I I.

Maintenant il est aisé de déterminer les changemens Fig. 24. A: qui arrivent dans la stabilité, l'amplitude & la durée des oscillations, lorsqu'on transporte des poids d'un endroit du vaisseau dans un autre.

Soient les trois axes  $GC$ ,  $GQ$ ,  $GT$  qui se croisent perpendiculairement au centre de gravité  $G$  du vaisseau. Supposons qu'on prenne un poids  $E$  à un endroit quelconque mais connu, & qu'on le transporte à l'endroit connu  $D$ . Des points  $E$  &  $D$  soient abaissées sur le plan horizontal  $TGQ$  les perpendiculaires  $ER$ ,  $DF$ ; & des points  $R$ ,  $F$  soient tirées perpendiculairement aux deux axes  $GQ$ ,  $GT$  les droites  $RH$ ,  $RM$ ,  $FK$ ,  $FV$ . Soient aussi tirées les droites  $EM$ ,  $EH$ ,  $EN$  qui expriment les distances respectives du point  $E$  aux trois axes  $GT$ ,  $GQ$ ,  $GC$ ; les droites  $DV$ ,  $DK$ ,  $DO$  qui expriment les distances respectives du point  $D$  aux trois mêmes axes. Puisque la grandeur & la position de la droite  $ED$  sont données, les droites  $RM$ ,  $RH$ ,  $RE$ ,  $FV$ ,  $FK$ ,  $FD$ ,  $EM$ ,  $EH$ ,  $EN$ ,  $DV$ ,  $DK$ ,  $DO$  sont connues.

Supposons  $\left\{ \begin{array}{l} EH \dots \dots \dots = m \\ EM \dots \dots \dots = n \end{array} \right.$

H 2

\* Voyez, par exemple, la Science Navale de M. Euler, tom. I, pag. 74.

Supposons	{	$EN$ . . . . .	$=q$
		$DK$ . . . . .	$=m'$
		$DV$ . . . . .	$=n'$
		$DO$ . . . . .	$=q'$
		$ER$ . . . . .	$=\theta$
		$DF$ . . . . .	$=\theta'$
		$FV$ . . . . .	$=\Pi$
		$RM$ . . . . .	$=\Pi'$
		$ER-DF$ . . . . .	$=\varphi$
		$RH-FK$ . . . . .	$=\varphi'$
$FV-RM$ . . . . .	$=\varphi''$		

Cela posé, il est clair que par la transposition du poids  $E$ , le plan horizontal  $TGQ$  s'abaissera parallèlement à lui-même, de la quantité  $\frac{\varphi'E}{N}$ , en nommant  $N$  le poids total du navire, comme dans les §. XL, XLI, XLII, XLIII, XLIV; le plan vertical  $TGC$  s'éloignera parallèlement à lui-même de sa première position de la quantité  $\frac{\varphi''E}{N}$ . Par conséquent dans les formules de la stabilité, des amplitudes & des durées des oscillations, il faudra substituer

à la place de  $h$  la quantité  $h - \frac{\varphi E}{N}$ ;

à la place de  $Q$  la quantité  $Q - En^2 + En'^2 - \frac{(\varphi^2 + \varphi''^2)E^2}{N}$ ;

à la place de  $V$  la quantité  $V - Em^2 + Em'^2 - \frac{(\varphi^2 + \varphi'^2)E^2}{N}$ ;

à la place de  $R$  la quantité  $R - Eq^2 + Eq'^2 - \frac{(\varphi'^2 + \varphi''^2)E^2}{N}$ ;

à la place de  $S$  la quantité  $S - E\theta\Pi' + E\theta\Pi - \frac{E^2\varphi\varphi''}{N}$ .

On voit donc qu'on peut soumettre à un calcul précis les phénomènes que la transposition de certains poids occasionne dans les mouvemens de roulis & de tangage

d'un vaisseau. Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer, dans un cas à-peu-près pareil, qu'on ne fait guères en mer ces sortes de calculs. Aussi ce n'est pas dans cette vue que nous en proposons la méthode. Notre objet est d'indiquer les moyens de discuter exactement ce qui arrivera, lorsqu'ayant fait un certain arrimage pour une campagne, on jugera convenable ou nécessaire d'y faire quelques changemens pour une autre campagne. Ces opérations ne doivent pas être abandonnées au hasard. L'esprit n'est éclairé qu'autant qu'il peut se rendre raison des procédés de la pratique.

*Application de la théorie précédente à un exemple.*

### X L V I I I.

Quoique l'application de nos formules à chaque vaisseau particulier soit une opération fort simple, je ferai moi-même cette application à un exemple, mon intention étant de mettre, autant qu'il m'est possible, ces recherches à la portée des jeunes marins. On ne permettra les détails assez étendus dans lesquels je vais entrer, en faveur de l'utilité dont j'espère qu'ils seront.

Je prends pour exemple le vaisseau du Roi, appelé *la Ville de Paris*, de quatre-vingt-dix canons, construit à Rochefort par M. Deslauriers, & lancé à la mer le 25 Janvier de cette année 1764. Ce vaisseau fut commencé en 1758. Il devoit alors porter le nom de *l'Impétueux*; mais des circonstances connues ont fait changer ce nom en celui qu'il a aujourd'hui.

Suivant des mesurages & des calculs faits sous les yeux de M. Deslauriers par un jeune Constructeur fort instruit, la longueur prise à la ligne d'eau en charge est de 173 pieds; la plus grande largeur, prise toujours à la ligne d'eau & en dehors des membres, est de 48 <sup>pieds</sup> 5 <sup>pou.</sup> La plus

grande profondeur de la carène est de 20 pi. 1 po., à compter du dessous de la quille. La différence du tirant d'eau de l'avant à l'arrière est de 1 pi. 8 po. Le centre de gravité de la carène est élevé au-dessus de la surface supérieure de la quille de 12 pi. 1 po., & en avant du vrai milieu, de 16 pouces. La quille a 1 pouce de hauteur. Le poids de l'eau déplacée par la carène, & par conséquent aussi la charge totale du vaisseau est de 4256 tonneaux environ.

Lorsqu'il est question de déterminer la carène & la position de son centre de gravité, il faut nécessairement employer les méthodes exposées dans les §. IV, V, VI, VII, ou d'autres équivalentes, parce qu'il est essentiel de connoître le port du vaisseau, & la proportion qui doit exister entre les poids de l'avant & de l'arrière. Mais on n'a pas besoin d'une si grande précision, lorsqu'il s'agit de déterminer les loix de la stabilité & des balancemens du vaisseau. Il suffit alors d'avoir des termes de comparaison entre lesquels les quantités qu'on cherche se trouvent placées. Ainsi, pour éviter des calculs rebutans par leur longueur, j'examinerai les loix de la stabilité & des oscillations de deux solides, entre lesquels *la Ville de Paris* est compris. Le premier solide est un parallélepède rectanglé *FRZIYH* & *S* (fig. 25); le second est une espèce d'ellipsoïde (fig. 26), qui a pour plan de flottaison l'ellipse *ADBE*, pour coupe longitudinale la demie ellipse *AVB*, & qui est formé d'une suite de demi-ellipses *LKl* verticales & perpendiculaires à la demi-ellipse *AVB*. Nous supposons que dans l'un & l'autre solide, la longueur *AB* est de 173 pieds, la largeur *DE* de 48 pieds, la profondeur *CV* de 20 pieds, en nombres ronds. Pour mettre de la clarté dans notre recherche, nous la diviserons en plusieurs articles,

Fig. 25, 26.



## ARTICLE I.

*Stabilité du Vaisseau.*

La limite de la plus grande hauteur du centre de gravité de la charge au-dessus de celui de la carène, est déterminée en général (§. XLII), par ces équations

$$h = \frac{2a'}{M}, \text{ lorsqu'il s'agit des mouvemens de tangage ;}$$

$h = \frac{2\gamma}{M}$ , lorsqu'il s'agit des mouvemens de roulis & de rotation horizontale.

La question est de trouver les valeurs des quantités  $M$ ,  $a'$ ,  $\gamma$ , dans le cas de nos deux solides. Supposons en général la longueur  $AB = 2a$ , la largeur  $DE = 2b$ , la profondeur  $CV = c$ .

Dans le parallélepède, on a  $M = 4abc$ . Supposons Fig. 25: qu'en vertu du mouvement de tangage, la partie  $EDZI$  du plan de flottaison prenne la position  $EDzi$ ; & imaginons que l'onglet  $EDZliz$  est composé d'une infinité de triangles  $prs$  perpendiculaires à  $DE$ . Il est clair qu'en nommant, comme ci-dessus,  $z$  l'angle de rotation de tangage pour le rayon 1, & faisant  $Cp = y$ , le moment élémentaire de l'onglet, par rapport à  $DE$ , est  $\frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3} a dy \times \frac{z}{1}$ ; donc la quantité  $a' = 2 \int \frac{a^2}{3} \times \frac{2}{3} a dy = \frac{2a^3b}{3}$ , en supposant  $y = b$  après l'intégration. On trouvera de même que la quantité  $\gamma = \frac{2b^3a}{3}$ . Par conséquent on aura

$$h = \frac{a^2}{3c} = 124 \frac{169}{240} \text{ pieds pour les mouvemens de tangage.}$$

$$h = \frac{b^2}{3c} = 9 \frac{9}{10} \text{ pieds pour les mouvemens de roulis.}$$

On voit que le métacentre est placé à-très-peu-près sur le plan de flottaison ; car la position de ce point doit toujours être déterminée relativement aux mouvemens de roulis, comme nous l'avons remarqué §. XLII.

Fig. 26. Dans le solide ellipsoïdal, toutes les sections  $LKl$  parallèles à la demi-ellipse latitudinale  $EVD$  sont des demi-ellipses semblables à cette demi-ellipse  $EVD$  ; & toutes les sections  $RYS$  parallèles à la demi-ellipse longitudinale  $AVB$  sont des demi-ellipses semblables à cette demi-ellipse  $AVB$ . Cela est trop facile à démontrer pour s'y arrêter. Supposons le rapport de la circonférence au diamètre  $=n$ ,

$$CP = x : \text{on aura l'aire } EVD = \frac{nb^2c}{2}, \quad PL = \frac{b}{a} \sqrt{aa - xx},$$

$$PK = \frac{c}{a} \sqrt{aa - xx}, \quad \text{l'aire } LKl = \frac{nb^2c(aa - xx)}{2aa}. \quad \text{Donc l'élément}$$

$$\text{du solide est } \frac{nb^2c(aa - xx)dx}{2aa} \quad \text{dont l'intégrale est } \frac{nb^2cx}{2} - \frac{nb^2cx^2}{6a^2}.$$

Supposant  $x = a$ , & doublant l'intégrale, on aura  $\frac{2nb^2ca}{3}$  pour la valeur de  $M$ ,

De plus nous avons besoin de connoître le centre de gravité du solide  $M$ . Ce centre est évidemment placé en quelque point  $G$  sur l'axe vertical  $CV$ . Or on fait, par la simple Géométrie élémentaire, que le moment de la demi-ellipse  $LKl$  par rapport au point  $P$  est exprimé par  $\frac{2}{3}PL \times PK^2$ . Donc le moment élémentaire du solide  $ADEC$ , par rapport à l'axe  $AB$ , est exprimé par  $\frac{2b^2c}{3a^2} dx(aa - xx)^{\frac{3}{2}}$ .

Pour intégrer cette quantité, on remarquera que  $dx(aa - xx)^{\frac{3}{2}} = a dx \sqrt{aa - xx} - xx dx \sqrt{aa - xx}$  ; que

$$\frac{d(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{dx(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{3} - xx dx \sqrt{aa - xx} ; \quad \text{que par consé-}$$

$$\text{quent } dx(aa - xx)^{\frac{3}{2}} = d\left(\frac{xx(aa - xx)^{\frac{3}{2}}}{3}\right) - a dx \sqrt{aa - xx}$$

$dx$

$$\frac{x(aa-xx)^{\frac{1}{2}}}{3}, \text{ ou bien } \frac{4}{3} dx(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{d(x(aa-xx)^{\frac{1}{2}})}{3} + aadx$$

$\sqrt{aa-xx}$ ; donc  $\int dx(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{x'aa-xx^{\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4}a \int dx\sqrt{aa-xx}$ ,  
 intégrale qui est complète, parce qu'elle doit s'évanouir  
 lorsque  $x=0$ . Supposant  $x=a$ , le premier terme s'éva-  
 nouit, & le facteur  $\int dx\sqrt{aa-xx}$  devient un quart de  
 cercle dont  $a$  est le rayon. Donc, en nommant toujours  $n$   
 le rapport de la circonférence au diamètre, le moment du  
 solide  $ADVE$ , par rapport à  $AB$ , est exprimé par  $\frac{nabcc}{8}$ .

Doublant cette quantité, & divisant par  $\frac{2nbca}{3}$ , valeur du  
 solide entier  $M$ , on aura  $\frac{3}{8}c$  pour la distance  $CG$  du centre  
 de gravité de  $M$  au point  $C$ .

Enfin imaginons que l'onglet formé pour la rotation de  
 l'aire  $EDB$  autour de  $ED$ , est composé d'une infinité de  
 triangles  $prs$  perpendiculaires à l'axe  $ED$ . En faisant  
 $Cp=y$ , & par conséquent  $pr = \frac{a}{b}\sqrt{bb-yy}$ , il est clair que  
 le moment élémentaire du demi-onglet, par rapport à  
 $ED$ , est  $\frac{a^2(bb-yy)}{2b} \times \frac{2a\sqrt{bb-yy}}{3b} \cdot dy \times \frac{Z}{1}$ ; d'où il suit que  
 $a' = 2 \int \frac{a^3(bb-yy)^{\frac{1}{2}} dy}{3b^2}$ , en supposant  $y=b$  après l'intégration.

On trouvera, par la même méthode dont on vient de se  
 servir,  $a' = \frac{na^3b}{8}$ . Pareillement  $\gamma = \frac{nb^3a}{8}$ . Donc on aura

$$b = \frac{3a^2}{8c} = 140 \frac{187}{640} \text{ pieds pour les mouvemens de tangage.}$$

$$b = \frac{3b^3}{8c} = 10 \frac{4}{7} \text{ pieds pour les mouvemens de roulis.}$$

Ainsi la hauteur du métacentre au dessus du centre de gra-  
 vité de la carène, est de 10 pieds  $\frac{4}{7}$ ; & comme ce dernier  
 point est au dessous du plan de flottaison, de 7  $\frac{1}{2}$  pieds, il

s'enfuit que le métacentre est élevé au-dessus du plan de flottaison, de  $3\frac{2}{10}$  pieds.

Comme le vaisseau *la Ville de Paris* approche plus du solide ellipsoïdal que du parallélepède, on doit conclure que son métacentre est élevé au-dessus du plan de flottaison, d'environ 1 ou 2 pieds.

## A R T I C L E I I .

### *Amplitude des oscillations du vaisseau.*

Nous venons de voir que le métacentre de notre vaisseau est placé aux environs du plan de flottaison. Ainsi il convient de placer le centre de gravité de la charge au-dessous de ce même plan. Supposons que la charge totale soit distribuée uniformément, de manière que son centre de gravité se confonde avec celui de la carène. De l'examen de ce cas simple naîtront les observations qu'on doit faire, lorsqu'il faut avoir égard à la distribution réelle de la charge.

Les mouvemens absolus de tangage & de roulis sont exprimés (§. XLIII), par ces équations

$$Z = \frac{2Mf'}{2a' - Mh},$$

$$Y = \frac{2Mf}{2\gamma - Mh},$$

& il n'y a point de rotation horizontale, parce qu'il est évident que la quantité  $S = 0$ .

Comme on suppose le centre de gravité de la charge réuni à celui de la carène, on a  $h = 0$ , & nos deux équations deviennent

$$Z = \frac{Mf'}{a'},$$

$$Y = \frac{Mf}{\gamma};$$

ou bien en considérant que le sinus total est pris pour l'unité, & que ce sinus est égal à un arc de  $57^{\circ} 17' 44''$ ,

$$Z = \frac{Mf'}{a} \times (57^{\circ} 17' 44''),$$

$$Y = \frac{Mf}{\gamma} \times (57^{\circ} 17' 44'').$$

Or dans le parallélepède, on a, par l'article précédent,

$$\frac{M}{a} = \frac{6c}{a^2}, \quad \frac{M}{\gamma} = \frac{6c}{b^2};$$

Fig. 25;

donc en supposant, par exemple, que par quelque coup de vent ou quelque coup de lame, ou par quelque bouffée de vent, le centre de gravité de la carène se soit écarté de 4 pouces de la coupe latitudinale & de la coupe longitudinale, c'est-à-dire,  $f' = 4$  pou.,  $f = 4$  pou.: on trouvera

$$Z = 0^{\circ} 18' 22'',$$

$$Y = 3^{\circ} 58' 43''.$$

Dans le solide ellipsoïdal, on a  $\frac{M}{a'} = \frac{16c}{3a^2}$ ,  $\frac{M}{\gamma} = \frac{16c}{3b^2}$ ; donc

Fig. 26.

en supposant toujours  $f' = 4$  pouces,  $f = 4$  pouces: on trouvera

$$Z = 0^{\circ} 16' 20'',$$

$$Y = 3^{\circ} 32' 12''.$$

On sent assez qu'on n'a supposé chacune des lignes  $f'$  &  $f$  de 4 pouces, que pour faire une application des formules à un cas particulier. Les valeurs de ces lignes ne sont pas faciles à déterminer directement en général. Mais si au lieu de conclure les angles  $Z$  &  $Y$  des valeurs supposées connues de  $f'$  &  $f$ , on supposoit au contraire les angles  $Z$  &  $Y$  donnés par des observations immédiates; il est évident que par nos formules on connoîtroit  $f'$  &  $f$ , c'est-à-dire les bras de levier de la poussée verticale de l'eau pour ramener le vaisseau à sa situation d'équilibre. Cette connoissance est utile en plusieurs occasions, comme

par exemple, quand on a besoin de comparer l'effort des lames ou des bouffées de vent avec la poussée verticale de l'eau.

Les mouvemens de tangage sont fort petits. Ceux de roulis sont plus considérables. Comme le centre de gravité de la charge totale est toujours placé au dessus de celui de la carène, dans les vaisseaux de guerre, les mouvemens de tangage & de roulis du vaisseau *la Ville de Paris* pourront être plus sensibles qu'on ne vient de les trouver.

## ARTICLE III.

*Durée des oscillations du vaisseau.*

Nous continuerons de supposer que le centre de gravité de la charge totale est confondu avec celui de la carène, comme dans l'article précédent.

Fig. 25 &  
26.

Les trois axes  $GC$ ,  $GQ$ ,  $GT$  sont ici les mêmes respectivement que les trois axes désignés par les mêmes lettres dans la figure 23 : seulement on en a changé la perspective, pour faire mieux voir les autres lignes dont on a besoin ; mais cela ne doit produire aucun embarras. Il suffit d'en être averti.

Les tems des mouvemens de tangage & de roulis sont représentés (§. XLIV), par ces équations

$$t(T) = 1'' \times n \sqrt{\frac{Q}{30i^4 p(2a' - Mh)}}$$

$$t(R) = 1'' \times n \sqrt{\frac{V}{30i^4 p(2\gamma - Mh)}}$$

Il s'agit de trouver les quantités  $V$  &  $Q$ , c'est-à-dire, les sommes des produits des particules de chaque solide par les carrés de leurs distances aux deux axes horizontaux  $GQ$ ,  $GT$ . La quantité  $h=0$ .

Fig. 25.

Soient  $LXXI$  une section quelconque du parallélepède

faite perpendiculairement à sa longueur;  $PK$  la rencontre de cette section avec la coupe longitudinale  $ABba$ ;  $Nn$  un élément quelconque du rectangle  $LXxl$ . Qu'on prenne sur  $Nn$  une partie infiniment petite  $\Pi\varpi$ , & qu'on mène du point  $\Pi$  au point  $O$ , où l'axe longitudinal  $GQ$  & la verticale  $PK$  se rencontrent, la droite  $\Pi O$ . Supposons  $CP=x$ ,  $PM=z$ ,  $M\Pi=q$ , & par conséquent  $MO=\frac{c}{2}-z$ . Il est clair que le produit de  $\Pi\varpi$  par le carré de sa distance à l'axe longitudinal  $GQ$  est  $qqdq + dq(\frac{c}{2}-z)^2$ , dont l'intégrale est  $\frac{q^2}{3} + q(\frac{c}{2}-z)^2$ . Supposant  $Q=b$ , & doublant l'intégrale, on aura  $\frac{2q^2}{3} + 2b(\frac{c}{2}-z)^2$  pour la somme des produits de tous les points de  $Nn$  par les carrés de leurs distances à l'axe  $GQ$ . Multipliant cette quantité par  $dz$ , intégrant le produit, & supposant après l'intégration  $z=c$ , on trouvera  $\frac{2b^2c}{3} + \frac{bc^2}{6}$  pour la somme des produits de tous les points du rectangle  $LXxl$  par les carrés de leur distance à l'axe  $GQ$ . Enfin multipliant cette dernière quantité par  $dx$ , intégrant, supposant  $x=a$  après l'intégration, & doublant l'intégrale, on aura  $\frac{4ab^2c}{3} + \frac{abc^2}{3}$  pour la somme des produits des particules du parallélepède par les carrés de leur distance à l'axe  $GQ$ . Nous aurons donc

$$V = \frac{4ab^2c}{3} + \frac{abc^2}{3}.$$

On trouvera pareillement

$$Q = \frac{4ba^2c}{3} + \frac{abc^2}{3}.$$

Donc

$$\frac{Q}{2a^2} = \frac{4aac + c^2}{4aa},$$

$$\frac{V}{2c} = \frac{4bbc + c^2}{4bb}.$$

Donc en remarquant qu'ici  $p=1$ , on aura

$$t(T) = 1'' \times \frac{355}{113} \times \sqrt{\frac{60658}{89787}} = 2'' \frac{1}{2} \text{ à-peu-près,}$$

$$t(R) = 1'' \times \frac{355}{113} \times \sqrt{\frac{3408}{6912}} = 2'' \frac{4}{5} \text{ à-peu-près.}$$

Les mouvemens de tantage & de roulis se font avec promptitude, comme on voit, & doivent paroître sensibles.

Fig. 26.

Soit, comme ci-dessus, la demi-ellipse  $LKl$  un élément quelconque du solide ellipsoïdal. Que  $Nn$  soit une double ordonnée à l'axe  $PK$ . En faisant  $CP=x$ ,  $PM=z$ , & consi-

dérant que  $MN = \frac{PL}{PK} \cdot \sqrt{PK^2 - PM^2} = \frac{b}{c} \sqrt{\frac{aacc - ccxx}{aa} - zz}$ ,

on trouvera, par la même méthode dont on vient de se servir pour le parallélepède, que la somme des produits de tous les points de  $Nn$  par les carrés de leurs distances à

l'axe  $GQ$ , est exprimée par  $\frac{2b^3}{3c^3} \left( \frac{aacc - ccxx}{aa} - zz \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2b}{c} \cdot$

$\sqrt{\frac{aacc - ccxx}{aa} - zz} \cdot \left( \frac{3}{8}c - z \right)^2$ . Donc cette somme élémen-

taire pour la demi-ellipse  $LKl$ , est  $\frac{2b^3}{3c^3} \cdot dz \left( \frac{aacc - ccxx}{aa} - zz \right)^{\frac{3}{2}}$

+  $\frac{2b}{c} \cdot dz \left( \frac{3}{8}c - z \right)^2 \sqrt{\frac{aacc - ccxx}{aa} - zz}$ , expression dans la-

quelle  $z$  seule est variable en ce moment. Supposons, pour abrégé un peu le calcul,  $\frac{aacc - ccxx}{aa} = A^2$ . On aura

$\int dz (A^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(A^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3A^2}{4} \int dz \sqrt{A^2 - z^2}$ . Le terme

$\int dz \left( \frac{3}{8}c - z \right)^2 \sqrt{A^2 - z^2} = \frac{9cc}{64} \int dz \sqrt{A^2 - z^2} + \frac{3}{4}c \int z dz$

$\sqrt{A^2 - z^2} + \int z dz \sqrt{A^2 - z^2} = \frac{9cc}{64} \int dz \sqrt{A^2 - z^2} +$

$\frac{c(A^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \int z dz \sqrt{A^2 - z^2}$ . Pour effectuer l'intégration

du dernier terme, on remarquera que  $d(z(A^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}) = dz$

$(A^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z dz \sqrt{A^2 - z^2} = A^2 dz \sqrt{A^2 - z^2} - 4z dz$



$\sqrt{A^2 - z^2}$ ; que par conséquent  $\int z z dz \sqrt{A^2 - z^2} = \frac{A^2}{4}$   
 $\int dz \sqrt{A^2 - z^2} = \frac{z(A^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}$ . Donc, en reprenant les facteurs  
 constans négligés dans les intégrations, réunissant toutes  
 les parties de l'intégrale, & observant qu'elle doit s'éva-  
 nouir, lorsque  $z=0$ ; & recevoir sa valeur complete,  
 lorsque  $z=A$ : on trouvera que la somme des produits de  
 tous les points de la demi-ellipse  $LKl$  par les quarrés de  
 leurs distances à l'axe longitudinal  $GQ$ , est exprimée par  
 la quantité

$$\left(\frac{b^3 + \frac{25bc}{3z}}{2c}\right) \cdot \frac{nc}{4aa} \cdot (aa - xx) - \left(\frac{b^3 + bc}{2c + z}\right) \cdot \frac{nc}{4a^3} \cdot (aaxx - x^4).$$

Multipliant cette quantité par  $dx$ , intégrant, supposant  
 $x=a$ , après l'intégration, & doublant l'intégrale, on  
 trouvera

$$\frac{n}{2} \left( \frac{647b^3c + 19abc^3}{240} \right)$$

pour la somme des produits des particules du solide entier  
 par les quarrés de leurs distances à l'axe longitudinal.

On trouvera de même que la somme des produits des  
 particules du solide par les quarrés de leurs distances à  
 l'axe latitudinal  $GT$  est exprimée par

$$\frac{n}{2} \cdot \left( \frac{64ba^3c + 19abc^3}{240} \right).$$

Nous aurons donc

$$\frac{Q}{2a^2} = \frac{64aac + 19c^3}{120aa},$$

$$\frac{V}{27} = \frac{64bbc + 19c^3}{120bb}.$$

Par conséquent on trouvera

$$t(T) = 1'' \times \frac{115}{113} \sqrt{\frac{1044928}{2691610}} = 1'' \frac{19}{20},$$

$$t(R) = 1'' \times \frac{353}{113} \times \sqrt{\frac{60928}{207360}} = 2'' \frac{17}{25}$$

Dans le solide ellipsoïdal, les mouvemens de tangage & de roulis sont un peu plus rapides que dans le parallélepède.

Il suit de-là que si la charge de la *Ville de Paris* étoit distribuée uniformément dans la callè, & que son centre de gravité tombât sur celui de la carène considérée comme homogène, les mouvemens de tangage & de roulis seroient très-rapides, & tourmenteroient extrêmement la mâture & l'équipage. Pour en diminuer la vitesse, on aura soin de mettre le plus qu'il sera possible les poids les plus pesans de la charge aux extrémités & dans les flancs du vaisseau. Il est vrai que par-là la quille sera un peu fatiguée (§. XXIV); mais cette pièce a ordinairement beaucoup plus de force qu'il ne lui en faut pour résister aux forces dont elle est pressée (§. XXIX).

### Résultat de tout cet examen.

Le métacentre du vaisseau *la Ville de Paris* est placé à 1 ou 2 pieds au-dessus du plan de flottaison. Si donc on veut que ce vaisseau porte bien la voile, il faudra distribuer la charge, de manière que son centre de gravité soit placé au moins à 1 ou 2 pieds au-dessous du plan de flottaison. Il conviendra que la plus grande partie du lest soit en fer, & qu'elle soit distribuée dans les flancs du vaisseau, ainsi que sous la fosse aux cables & vers la soute aux poudres. Ce vaisseau décrira de fort petits arcs dans le tangage; mais dans le roulis il en décrira qui, même par un tems calme, pourront monter à 7 ou 8 degrés. Il paroît qu'en arrimant comme on vient de le dire, les mouvemens de tangage seront peu sensibles; mais quelques précautions qu'on prenne, ceux de roulis seront peut-être un peu rudes, principalement lorsqu'on ira vent arrière. L'événement décidera de la justesse de ces remarques; car en ce moment

(Février

(Février 1764) la Ville de Paris est encore dans le port, dénuée de sa mâture, & remplie de copeaux.

On discutera de la même manière tous les vaisseaux dont on connoîtra les dimensions.

## SECTION IV.

*Influence de l'arrimage sur les mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail ou des voiles.*

## X L I X.

JE ne m'arrêterai pas ici à expliquer la manœuvre du gouvernail ; c'est une chose assez connue. Mais je ne puis me dispenser de remarquer que tous les Auteurs qui ont entrepris de donner la théorie des mouvemens que cette pièce imprime au vaisseau, ont regardé le vaisseau & le gouvernail comme solidement liés entr'eux, & ne faisant, pour ainsi dire, qu'un seul & même corps ; ce qui n'est pas exact, puisque le vaisseau & le gouvernail sont réellement deux corps séparés, mobiles l'un & l'autre sur les gonds qui les unissent. D'où il résulte que les solutions de ces Auteurs sont incomplètes, au moins dans la rigueur géométrique. En voici une qui n'a pas le même défaut.

Supposons que  $AB$  représente le corps du navire,  $BC$  le gouvernail qui est mobile sur le gond ou la charnière  $B$ . Soit  $Ff$  la direction du choc de l'eau qui résulte perpendiculairement au gouvernail. Cette force est supposée ici exercer librement son effet. Qu'au bout d'un instant, le système  $ABC$  parvienne dans la situation  $abc$ , de manière que le point  $B$  ait parcouru  $Bb$ , & qu'ayant mené par le point  $b$  les droites  $ba$ ,  $bk$  parallèles à  $BA$  & à  $BC$  respectivement, le navire ait décrit autour du point  $B$  ou  $b$  l'angle  $aba$ , & le gouvernail l'angle  $cbk$  autour du même point. Je

Fig. 27.

prolonge indéfiniment  $AB$  au-delà de  $B$ , & représentant l'impulsion de l'eau sur le gouvernail par  $FD$ , je décompose cette force en deux autres  $FE$ ,  $FH$ , l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la direction  $AB$  de la quille. Soient  $R$  &  $Q$  deux points quelconques du vaisseau & du gouvernail. Il est clair que si on prend  $bS=BR$ ,  $bO=BQ$ , & qu'on mène les lignes  $RS$ ,  $QO$ , ces lignes seront les espaces parcourus par les points  $R$  &  $Q$ . Du point  $b$  soient décrits, avec les rayons  $bS$ ,  $bO$ , les petits arcs  $ST$ ,  $ON$ , & soit abaissée  $bh$  perpendiculaire sur  $AB$  prolongée, &  $bi$  sur  $CB$  prolongée. Soit décomposée la vitesse  $RS$  en deux autres  $RX$ ,  $RZ$ , l'une dirigée suivant  $AB$ , l'autre perpendiculaire à  $AB$ . Pareillement soit décomposée la vitesse  $QO$  en deux autres  $QM$ ,  $QP$  ou  $MO$ , l'une dirigée suivant  $BC$ , l'autre perpendiculaire à  $BC$ . Supposant que  $QO$  prolongée, s'il est nécessaire, rencontre en  $g$  le prolongement de  $AB$ , & ayant pris  $gm=QO$ , soit décomposée la vitesse  $gm$  en deux autres  $gp$ ,  $gn$ , l'une dirigée suivant  $Bp$ , l'autre perpendiculaire à la même ligne.

Supposons	}	L'impulsion $FD$ de l'eau contre le gouvernail	$=F$
		La vitesse $Bb$ du point $B$ dans le sens de la quille	$=x$
		La vitesse $hb$ du même point $B$ perpendiculairement à la quille	$=y$
		La vitesse de rotation du navire autour du point $B$ , pour le rayon 1	$=V$
		La vitesse de rotation du gouvernail autour du point $B$ , pour le rayon 1	$=v$
		La masse du navire	$=N$
		Chaque particule élémentaire du navire	$=dN$
		La masse du gouvernail	$=G$
		Chaque particule élémentaire du gouvernail	$=dG$

$$\text{Supposons } \left\{ \begin{array}{l} \text{L'angle } CBp \dots\dots\dots = a \\ BF \dots\dots\dots = b \\ BR \dots\dots\dots = p \\ BQ \dots\dots\dots = q. \end{array} \right.$$

Il est clair qu'on aura la force  $FE = F \cos. a$ , la force  $FH = F \sin. a$ ,  $TS = pV$ ,  $ON = qu$ ,  $SX = y - pV$ . De plus si l'on tire la droite  $RT$ , il est évident qu'à cause de  $bT = bX$ , & de  $bT = bS = BR$ , les deux triangles rectangles  $RXT$ ,  $Bbs$  sont parfaitement égaux; donc  $RX = x$ . Pareillement si l'on tire la droite  $QN$ , les deux triangles rectangles  $QMN$ ,  $Bib$  sont parfaitement égaux; donc  $QM = Bi$ ,  $MN = ib$ ,  $MO = ib + ON = ib + qu$ . Or l'angle  $bBi$  étant visiblement le supplément de la somme des deux angles  $CBp$ ,  $bBb$ , on aura

$$bi = y \cos. a + x \sin. a,$$

$$Bi = y \sin. a - x \cos. a.$$

Donc

$$QM = y \sin. a - x \cos. a,$$

$$MO = y \cos. a + x \sin. a + qu.$$

Dans le triangle  $BQg$ , le sinus de l'angle  $BgQ$  ou de son égal  $pgm$  est égal au sinus de la somme des deux angles  $QBg$ ,  $BQg$ ; donc

$$\sin. pgm = \sin. a \times \frac{QM}{QO} + \cos. a \times \frac{OM}{QO};$$

$$\cos. pgm = \sin. a \times \frac{OM}{OQ} - \cos. a \times \frac{QM}{QO};$$

Donc

$$pm = \sin. a (y \sin. a - x \cos. a) + \cos. a (y \cos. a + x \sin. a + qu),$$

$$gp = \sin. a (y \cos. a + x \sin. a + qu) - \cos. a (y \sin. a - x \cos. a).$$

Cela posé, on fait, par la loi fondamentale de la com-

municaton des mouvemens, que la somme des mouvemens gagnés par le navire & par le gouvernail, parallèlement à la quille, est égale à la force  $FH$ , & que la somme des mouvemens gagnés par le navire & par le gouvernail, perpendiculairement à la quille, est égale à la force  $FE$ . Ainsi on aura d'abord ces deux équations

$$F \sin. a = Nx + Gx + u \sin. a \int qdG,$$

$$F \cos. a = NyV - N \int pdN + Gy + u \cos. a \int qdG.$$

De plus le moment de la force  $F$  par rapport au point  $B$  est égal à la somme des momens de toutes les particules du navire & du gouvernail, par rapport au même point  $B$ . Ainsi on aura

$$Fh = \int dN \times BR \times SX + \int dG \times BQ \times QP,$$

c'est-à-dire

$$Fh = y \int pdN - V \int ppdN + y \cos. a \int qdG + x \sin. a \int qdG + u \int qqdG.$$

Enfin on remarquera que la résultante de toutes les forces  $RS$ ,  $QO$  des particules du navire & du gouvernail, doit nécessairement passer par le point  $B$ ; car cette résultante doit être telle que si on imprimoit au système une force égale & contraire, tout le système demeurât en équilibre. Or si cette dernière force ne passoit pas par le point  $B$ , il est évident qu'elle produiroit un mouvement de rotation autour de ce point, ce qui est contraire à l'hypothèse. Cette nouvelle considération fournit l'équation

$$\int dN \times BR \times SX = \int dG \times BQ \times QP,$$

c'est-à-dire,

$$y \int pdN - V \int ppdN = y \cos. a \int qdG + x \sin. a \int qdG + u \int qqdG.$$

Dans ces quatre équations, les quantités  $\int pdN$ ,  $\int ppdN$ ,  $\int qdG$ ,  $\int qqdG$ , sont données par les figures du navire & du gouvernail. Par conséquent on pourra déterminer les

quatre inconnues  $x$ ,  $y$ ,  $V$ ,  $u$ , c'est-à-dire, le mouvement du navire parallèlement à la quille, le mouvement du navire perpendiculairement à la quille, le mouvement de rotation du navire autour du point  $B$ , enfin le mouvement de rotation du gouvernail autour du même point. La question se réduit à résoudre quatre équations du premier degré.

## L.

Telle est la solution générale du problème proposé. Mais comme la masse du gouvernail est fort petite en comparaison de celle du navire, dans l'application qu'on fera de ces formules au sujet proposé, il est très-permis de négliger tous les termes qui contiennent  $G$ ,  $\int qdG$ ,  $\int qqdG$ . Alors on trouvera

$$x = \frac{F \sin a}{N},$$

$$y = \frac{F \cos a \int p p dN}{N \int p p dN - (\int p dN)^2},$$

$$V = \frac{F \cos a \int p dN}{N \int p dN - (\int p dN)^2}.$$

Quant à la valeur de  $u$ , on voit bien qu'elle doit être regardée comme infinie par rapport à celle de  $V$ .

Ces formules peuvent encore se simplifier. Car si l'on nomme  $b$  la distance du centre de gravité de la charge à un axe vertical élevé par le point  $B$ ,  $S$  la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à un axe vertical passant par le centre de gravité de la charge, on aura, comme on fait, par les loix de la mécanique,  $\int p dN = Nb$ ,  $\int p p dN = S + Nb^2$ , & nos trois formules deviendront

$$x = \frac{F \sin a}{N},$$

$$J = \frac{F \cos. a (S + Nbb)}{N.S.},$$

$$V = \frac{Fb \cos. a}{S},$$

équations qui renferment toute la théorie des mouvemens communiqués au vaisseau par l'action du gouvernail.

### L I.

Le choc de l'eau contre le gouvernail produit deux effets, comme on voit. Il retarde la rapidité du sillage, & il fait tourner le vaisseau. Le premier effet, qui est contraire au but de la navigation, est exprimé par les deux premières équations. Notre objet n'est pas de l'examiner en détail. Mais nous devons analyser le mouvement de rotation qui est représenté par la formule

$$V = \frac{Fb \cos. a}{S}.$$

Dans cette formule,  $V$  est l'angle  $ab\alpha$ . Supposons que le point  $G$  représente le centre de gravité du vaisseau, & par ce point soit menée la droite  $LG'$  parallèle à  $AB$ : il est clair que les deux angles  $ab\alpha$ ,  $bG'l$  sont égaux. Ainsi  $V$  peut être considéré comme l'angle décrit par le vaisseau autour de l'axe vertical passant par le point  $G$ , en vertu d'une force  $F \cos. a$  appliquée en  $B$ , perpendiculairement à  $AB$ . Nommons  $s$  l'espace parcouru circulairement à la distance  $r$  de l'axe  $G$ ,  $v$  la vitesse circulaire d'un point pris à la même distance,  $t$  le tems de la rotation: il est visible qu'on aura

$$v dv = \frac{Fb \cos. a ds}{S},$$

$$dds = \frac{Fb \cos. a. dt^2}{S};$$

Donc



$$v = \sqrt{\frac{2tb \cos. a. s}{S}},$$

$$t = \sqrt{\frac{2S.s}{tb \cos. a.}}$$

Soient  $g$  la gravité,  $u$  la vitesse qu'un corps acqueroit par la gravité, en parcourant l'espace  $s$ ;  $\theta$  le tems employé à acquérir cette vitesse; & supposons que la force  $F \cos. a$  soit égale à un poids dont la masse est  $P$ , c'est-à-dire, que cette force soit représentée par  $gP$ . On aura (en mettant la lettre  $R$  à la place du rayon 1, pour rétablir les homogènes),

$$v = u \times \sqrt{\frac{PbR}{S}},$$

$$t = \theta \times \sqrt{\frac{S}{PbR}}$$

formules dans lesquelles les quantités radicales sont des nombres absolus. Ces formules sont d'un usage très-commode. Mais il faut observer qu'elles n'ont lieu que pour le commencement du mouvement, parce qu'on a négligé la résistance que le navire éprouve en divisant l'eau par sa rotation, & que cette résistance augmente sensiblement à mesure que la vitesse de rotation augmente.

## L I I.

Ces principes posés, il est question de discuter l'influence de l'arrimage sur les mouvemens dont nous venons de parler.

Or, 1.<sup>o</sup> on voit que si, toutes choses égales d'ailleurs, on augmente la force  $F$ , ou que le gouvernail présente une plus grande surface au choc de l'eau, la vitesse de rotation du vaisseau autour de son centre de gravité augmentera. L'expérience & la théorie ont fixé les dimensions du gouvernail dans chaque vaisseau. Il n'est pas permis d'y faire des changemens bien sensibles; car en même temps

qu'une plus grande surface exposée au choc de l'eau, produiroit un plus grand mouvement de rotation, elle ralentiroit considérablement la rapidité du fillage. Mais il y a des occasions en mer, où l'on a besoin d'une action efficace & prompte de la part du gouvernail. Alors rien n'est plus utile que de faire enfoncer davantage le gouvernail dans l'eau. Cela s'exécute en transportant quelques poids assez pesans de l'avant à l'arrière. Il est vrai que par cette opération, il pourra arriver que la quantité  $S$  augmente, & que par conséquent la vitesse de rotation du vaisseau diminue d'un côté, tandis qu'elle augmente de de l'autre; mais l'augmentation l'emporte toujours sur la diminution, comme on pourra s'en assurer par la méthode que nous donnerons dans un moment; & c'est une très-bonne manœuvre de surcharger l'arrière du vaisseau, lorsque le vaisseau porte d'ailleurs bien la voile, & qu'il n'est pas assez docile à l'action de son gouvernail.

2<sup>o</sup> On peut augmenter la vitesse de rotation du vaisseau en laissant la même surface au gouvernail, mais en diminuant la quantité  $S$ , c'est à-dire en rapprochant le plus qu'il est possible les différens poids qui composent la charge, de l'axe vertical élevé par le centre de gravité du vaisseau. Ce moyen ne peut guères être pratiqué efficacement en mer, parce que le milieu de la calle est presque entièrement occupé par des poids qu'il n'est pas facile de mettre ailleurs, & que d'un autre côté il seroit quelquefois dangereux de faire des changemens trop considérables à la distribution primitive de la charge. Mais lorsqu'on fait le chargement dans le port, & qu'on discute l'influence de l'arrimage sur les qualités du vaisseau, on ne doit pas oublier qu'un des meilleurs moyens de rendre le navire sensible au gouvernail, est de rapprocher de l'axe vertical les principaux poids dont les emplacements ne sont pas nécessairement assignés dans telle ou telle partie de la calle, L'arrangement dont il s'agit a de plus l'avantage de soulager

la quille, comme nous l'avons vu (§. XXIX); mais il peut avoir l'inconvénient d'augmenter les mouvemens de roulis & de tangage, comme il est aisé de voir par les méthodes exposées dans la section précédente. On ne procure presque jamais une bonne qualité à un vaisseau, qu'on ne lui en fasse perdre une autre. C'est aux Marins éclairés de bien peser les raisons favorables & contraires à l'opération proposée. Cet examen sera facile, & l'on choisira infailliblement le parti le plus avantageux, lorsqu'on connoîtra exactement la forme & les capacités du vaisseau.

## L I I I.

Nous nous sommes engagés à examiner les changemens qui arrivent dans la fraction  $\frac{F}{S}$ , lorsqu'on fait augmenter la surface que le gouvernail présente au choc de l'eau, en transportant quelques poids de l'avant à l'arrière. Voici cette discussion qui dépend des mêmes principes que celle du §. XLVII.

Soient  $AB$  le corps du navire,  $GC$  l'axe vertical élevé par son centre de gravité  $G$ . Supposons qu'on prenne à l'endroit connu  $K$  de l'avant un poids connu que je nomme  $K$  pour le transporter à l'endroit connu  $M$  de l'arrière; & qu'en vertu de cette transposition, l'axe  $GC$  prenne la position  $gc$ . Par les points  $G$  &  $g$  soient menés les deux axes horizontaux  $GT$ ,  $gt$  perpendiculaires l'un & l'autre à  $AB$ . Le centre de gravité du vaisseau ayant passé de  $G$  en  $g$ , la poussée verticale de l'eau, qui s'exerce toujours suivant  $GC$  fera tourner le vaisseau autour de l'axe horizontal  $gt$ , & lui fera décrire l'angle  $Bgb$  dans le plan vertical mené suivant  $AB$ . Il est clair que si l'on parvient à connoître cet angle, & la partie  $Bg$ , on connoîtra aussi la grandeur absolue du petit arc  $Bb$  qu'on peut regarder comme une ligne verticale. Par conséquent on connoîtra la quantité

Fig. 28:

dont tous les points de la surface du gouvernail se font abaissés verticalement ; d'où il suit qu'on connoîtra la nouvelle surface que le gouvernail présente au choc de l'eau, & la force avec laquelle cette surface est frappée.

Supposons

$$\left\{ \begin{array}{l} BG \dots\dots\dots = b \\ GK \dots\dots\dots = c \\ GM \dots\dots\dots = f \\ \text{La gravité} \dots\dots\dots = g \\ \text{La masse du navire} \dots\dots\dots = N \\ \text{La somme des produits des particules} \\ \text{du navire par les quarrés de leurs dis-} \\ \text{tances à l'axe latitudinal } GT, \text{ avant} \\ \text{la transposition du poids } K \dots\dots\dots = Q \\ \text{La somme des produits des particules du} \\ \text{navire par les quarrés de leurs distances} \\ \text{à l'axe } gt, \text{ après la transposition du} \\ \text{poids } K \dots\dots\dots = Q' \\ \text{L'angle } Bgb, \text{ pour le rayon } 1 \dots\dots\dots = Z. \end{array} \right.$$

On aura (§. XLVI)  $Gg = \frac{K \cdot (c+f)}{N}$  ; donc  $gN \times \frac{K(c+f)}{N} = Q' \times \frac{Z}{1}$  ;

mais (§. XLVI),  $Q' = Q - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K^2(c+f)^2}{N}$  ;

Donc

$$Z = \frac{gK \cdot (c+f)}{Q - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K^2(c+f)^2}{N}}$$

ou bien, en supposant le sinus total  $1 = R$ , pour rétablir les homogènes ;

$$Z = \frac{gK(c+f) \cdot R}{Q - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K^2(c+f)^2}{N}}$$

Ainsi l'angle  $Bgb$  sera connu. La ligne  $Bg$  est aussi connue, puisque  $Bg = BG - gG = b - \frac{K \cdot (c+f)}{N}$ .

Maintenant reprenons la formule  $V = \frac{Fb \cos. a}{S}$  du §. L ;

dans laquelle  $F$  est le choc que l'eau exerce perpendiculairement contre le gouvernail dans son premier état,  $a$  l'angle formé par la quille & par le gouvernail,  $b$  le bras de levier de la force  $F \cos. a$ , c'est-à-dire la ligne  $BG$ ,  $S$  la somme des produits des particules du vaisseau par les quarrés de leurs distances à l'axe vertical  $GC$ ,  $V$  l'angle de rotation horizontale produite autour de l'axe  $GC$  par le choc de l'eau contre le gouvernail. Suivant la remarque que nous avons faite, la force  $F$  est augmentée d'une quantité connue que je nomme  $dF$ . De plus la rotation horizontale se fait maintenant autour de l'axe  $gc$ ; & si l'on nomme  $S'$  la somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe  $gc$ , après la transposition du poids  $K$ ,  $V'$  l'angle de rotation autour de l'axe  $gc$ , on aura

$$(F+dF) \cos. a. \left( b - \frac{K(c+f)}{N} \right) = S' \times \frac{V'}{1};$$

mais (§. XLVI)  $S' = S - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K^2(c+f)^2}{N}$ ;

Donc

$$V' = \frac{(F+dF) \cos. a \left( b - \frac{K(c+f)}{N} \right)}{S - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K^2(c+f)^2}{N}}.$$

Comparant cette valeur de  $V'$  avec celle de  $V$ , on trouvera dans chaque cas particulier applicable à la pratique, que  $V'$  est plus grand que  $V$ ; d'où il résulte que l'angle de rotation horizontale du vaisseau augmente à mesure que le gouvernail présente une plus grande surface au choc de l'eau.

#### L I V.

Toutes ces formules ne servent pas seulement à démontrer en général que telle cause produira tel effet; elles ont de plus l'avantage de donner des mesures précises des causes & des effets. Nous voyons ici que si l'on fait, par exemple,  $f=0$ , ou qu'on transporte le poids  $K$  précisément au centre

de gravité de la charge, ou plutôt de la ligne verticale élevée par ce point, l'angle  $V'$  augmentera sensiblement, puisque le numérateur de la fraction qui en est la valeur, augmentera & que son dénominateur diminuera. Cette augmentation de l'angle  $V'$  peut être soumise à un calcul rigoureux. Il en est de même de toute autre transposition de poids. En quelqu'endroit de l'avant qu'on prenne un poids, pour le transporter à l'arrière, l'angle de rotation se calcule sans peine. Il y a plus : la formule précédente fournit le moyen de reconnoître parmi toutes les transpositions possibles de poids de l'avant à l'arrière celle qui est la plus avantageuse au mouvement de rotation ; & voici comment on résoudra ce problème.

## L V.

Considérons le gouvernail comme un rectangle vertical dont la largeur est très-petite par rapport à la demi-longueur du vaisseau, de manière que toutes les lignes horizontales menées de l'axe vertical  $gc$  à tous les points de la surface du gouvernail puissent être regardées comme égales. Nous ne faisons cette supposition que pour abrégé ; car le problème se résoud par la même méthode, quelles que soient la figure & les dimensions du gouvernail. Il est clair que la rapidité du sillage demeurant toujours la même, la force  $F$  est simplement proportionnelle à la surface du rectangle qui forme le gouvernail. Soient  $h$  la hauteur verticale de ce rectangle, avant la transposition du poids  $K$ ,  $m$  sa largeur horizontale. Par la transposition du poids  $K$  de l'avant à l'arrière, la hauteur  $h$  augmente de la quantité  $Bb$ , c'est-

à-dire de  $\frac{gK.(c+f)R}{Q-Kc^2+Kf^2-\frac{K^2(c+f)^2}{N}} \times \left( b - \frac{K(c+f)}{N} \right)$ . Cela posé,

on mettra  $hm$  à la place de  $F$ , le produit de  $m$  par cette valeur de  $Bb$  à la place de  $dF$ , dans la valeur générale de  $V'$ , & on fera  $V' = \text{maximum}$ , & par conséquent  $dV' = 0$ . Si dans cette différentiation, on regarde  $f$  seule comme

variable, & le reste comme constant, on déterminera l'endroit de l'arrière où il faut mettre un poids qu'on prend dans un endroit connu de l'avant. Si l'on regarde  $c$  comme variable & tout le reste comme constant, on déterminera l'endroit de l'avant où il faut prendre un poids pour le mettre a un endroit connu de l'arrière. Je n'achève pas le calcul qui est un peu long, & dont vrai-semblablement la pratique ne tireroit pas grand secours. Il suffit d'avoir indiqué la solution du problème.

## L V I.

L'objet principal des voiles est de procurer au vaisseau le mouvement de sillage. Mais elles servent aussi, de même que le gouvernail, à faire tourner le vaisseau autour de l'axe vertical  $GC$  élevé par le centre de gravité de la charge. Lorsqu'il y a un équilibre absolu entre les voiles de l'avant & celles de l'arrière, par rapport à la ligne verticale dont on vient de parler, les voiles ne peuvent imprimer aucun mouvement de rotation au vaisseau. Mais sitôt qu'on cargue quelques voiles d'un côté sans toucher aux voiles qui sont du côté opposé, l'équilibre est rompu, & le navire tourne nécessairement autour de son centre de gravité. Supposons, par exemple, qu'on cargue quelques voiles du côté de l'avant  $A$ , de manière que la résultante de tous les efforts du vent contre les voiles soit maintenant dirigée suivant  $Rr$ : il est clair que l'arrière  $GB$  du vaisseau tournera en allant de droite à gauche, & l'avant en allant de gauche à droite. Au contraire si l'on carguoit quelques voiles du côté de l'arrière, l'avant du vaisseau tourneroit en allant de droite à gauche, & l'arrière de gauche à droite. On voit par là que la plupart des choses que nous avons dites au sujet des mouvemens de rotation produits par l'action du gouvernail, s'appliquent aux mouvemens de rotation produits par l'action des voiles. Lorsqu'on voudra favoriser ces

Fig. 28.

derniers mouvemens par l'arrimage, sans faire changer de position à l'axe vertical  $GC$ , il faudra rapprocher le plus qu'on pourra de cet axe quelques poids fort pesans, en prenant ces poids égaux deux à deux, à distances opposées & égales de  $GC$ ; & les plaçant à distances opposées égales du même axe  $GC$ . Toutes ces conditions, ou du moins d'autres équivalentes doivent être remplies.

L V I I,

Nous avons dit, *sans faire changer de position à l'axe  $GC$* ; car si, par exemple, on cargue quelques voiles du côté de l'avant, & que le centre d'impression de celles qui restent tant à l'avant qu'à l'arrière, soit au point  $R$  du côté de l'arrière, qu'ensuite on prenne un poids  $K$  du côté de l'avant pour le porter en  $M$  à l'arrière, les résultats changent; & la nouvelle place du poids  $K$  doit être déterminée de manière que l'angle de rotation soit un *maximum*.

Supposons {

- L'impulsion du vent dirigée suivant l'horizontale  $Rr$  perpendiculaire à  $AB$  . . . =  $F$
- $GR$  . . . . . =  $a$
- $GK$  . . . . . =  $c$
- $GM$  . . . . . =  $f$
- La masse du navire . . . . . =  $N$
- La somme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe  $GC$ , avant la transposition du poids  $K$  . . . . . =  $S$
- L'angle de rotation pour le rayon 1 . . . . =  $u$ .

On trouvera, en raisonnant comme ci-dessus,

$$u = \frac{F(a - \frac{K(c+f)}{N})}{S - Kc^2 + Kf^2 - \frac{K(c+f)^2}{N}} = \text{maximum};$$

Donc, en considérant qu'ici  $F$  est une quantité constante;



& faisant varier  $f$  seulement, on trouvera que la valeur de  $f$  est exprimée par une équation du second degré. Pareillement si l'on fait varier  $e$ , en regardant tout le reste comme constant, la valeur de  $e$  sera exprimée par une équation du second degré.

Je ne fais pas d'application particulière de la théorie établie dans cette section, comme j'en ai fait de la théorie établie dans la section précédente. Ce détail ne peut avoir aucune difficulté. J'avertirai seulement les Lecteurs qui voudront appliquer nos formules au vaisseau du §. XLVIII, que la surface du gouvernail de ce vaisseau est d'environ 400 pieds quarrés.

### C O N C L U S I O N.

**I**L ne fera peut-être pas inutile de remettre ici sous les yeux du Lecteur les principaux résultats de ces recherches. Le problème de l'arrimage des vaisseaux est un problème indéterminé, qui admet autant de différentes solutions qu'on peut avoir de différens vaisseaux à arrimer. Cette proposition évidente par elle-même est établie par toutes les réflexions que nous avons faites sur la manière dont l'arrimage favorise ou contredit les qualités du vaisseau. En effet, nous avons vu dans la section I du chapitre III, que pour empêcher la quille de plier sous les forces dont elle est pressée, il conviendrait de distribuer la charge proportionnellement aux capacités de la carène: on a vu dans la section III du même Chapitre que pour augmenter la stabilité du vaisseau & diminuer l'amplitude de ses oscillations, il faut abaisser le centre de gravité de la charge totale; que pour diminuer la vitesse des oscillations il faut élever le centre de gravité de la charge, ou bien distribuer le plus qu'il est possible la charge dans les extrémités & dans les flancs du vaisseau: enfin nous venons de voir dans



Creux au-dessus de la quille, sous le maître bau	19	pieds 0 pou.
Longueur de la quille . . . . .	135	0
Quête de l'étambot . . . . .	2	0
Élancement de l'étrave . . . . .	14	0
Tirant d'eau de l'arrière, le vaisseau armé en guerre . . . . .	19	0
Tirant d'eau de l'avant, le vaisseau armé en guerre . . . . .	17	0

Équipage en paix . . . . .	320	hommes.
Équipage en guerre . . . . .	450	

Canons	{	de 24 <sup>liv.</sup> . . . . .	26	} Total 64
		de 12 . . . . .	28	
		de 6 . . . . .	10	

Port en tonneaux . . . . . 1100 tonneaux

*Proportions du FANTASQUE, vaisseau du Roi, de 64 canons, construit à Toulon par M. Chapelle fils, en 1756, & lancé à l'eau le 20 Mai 1758.*

Longueur de l'étrave à l'étambot . . . . .	151	pieds 0 pou.
Largeur au maître bau de dehors en dehors des membres . . . . .	40	6
Creux de dessus la quille sous le maître bau . . .	19	6
Longueur de la quille . . . . .	133	9
Quête de l'étambot . . . . .	3	0
Élancement de l'étrave . . . . .	14	3
Tirant d'eau d'arrière, le vaisseau armé en guerre . . . . .	20	6
Tirant d'eau d'avant, le vaisseau armé en guerre . . . . .	17	3

Équipage en paix . . . . .	320	hommes
Équipage en guerre . . . . .	450	

Canons	}	de 24 <sup>liv.</sup> ..... 26	}	Total 64
		de 12..... 28		
		de 6..... 10		

Port en tonneaux..... 1150 tonneaux

*Devis de l'ALTIER, commandé par M. de Rochemore, Capitaine de vaisseaux ; campagne de 1762.*

Vivres pour 6 mois ; eau pour 3 mois ; 450 hommes d'équipage & 45 mouffes ; 21 barquées de lest, savoir 17½ en pierres, 3½ en fer.

Ce vaisseau étant neuf, on a suivi, tant pour la quantité du lest, que pour la façon de le placer, l'avis du Constructeur. En conséquence on a placé 2 barquées de lest en canons en avant de l'archipompe, & une barquée & demie en saumons sous la fosse aux cables, sur le lest en pierres. Des 17 barquées & demie en pierres, deux ont été placées de l'arrière de l'archipompe ; 12 à la calle à l'eau depuis l'archipompe jusqu'à la cloison de la fosse aux cables ; 3½ sous la fosse aux cables.

Suivant le Constructeur, on devoit avoir en lest 2 pieds 2 pouces de différence ; & on trouva que le vaisseau tiroit de l'arrière 15 pieds, & de l'avant 12 pieds 6 pouces ; que par conséquent la différence étoit 2 pieds 6 pouces, c'est-à-dire de 4 pouces plus grande que le Constructeur ne pensoit. Ainsi on fut obligé de mettre la barquée & demie en saumons sous la fosse aux cables. Après avoir embarqué tous les vivres, & généralement toute la charge, le vaisseau tiroit d'eau

de l'arrière.....	19	pieds 5	pou.
de l'avant.....	18	3	
Différence.....	1	2	

Ce vaisseau porte très-bien la voile, allant assez bien

vent arrière ou vent large, mais non aussi bien au plus près. Il va beaucoup mieux par un vent fort que par un vent foible. Son rangage est fort doux. Il soutient bien la cappe, & sur-tout celle de la grande voile. Il ne fatigue pas la mâture. Il vire très-bien vent devant, mais il est un peu lâche pour arriver. Il dérive un peu à la cappe & ne va pas de l'avant. Pendant le premier mois, il étoit ce qu'on appelle vaisseau de compagnie; mais il n'a jamais été bon voilier.

Le Capitaine pense que ce vaisseau doit naviger au moins avec deux barquées de plus de lest; qu'ainsi il faut en mettre 23 au lieu de 21; & que la différence du tirant d'eau doit être de 14 pouces au lieu de 16 que le Constructeur avoit marqués. On n'a pas pu pendant la campagne mettre le vaisseau à cette différence, parce qu'on ne mouilla qu'à Tunis & à Alger, où la mer fut si grosse qu'il fut impossible de prendre le tirant d'eau dont il s'agit. Le Capitaine pense aussi qu'il ne faut mettre que deux barquées au plus sous la fosse aux cables, & une barquée de plus en arrière. De cette manière, le vaisseau marchera bien, car il n'a d'ailleurs aucune mauvaise qualité.

*Premier devis du FANTASQUE, commandé par M. de Castillon le cadet, Capitaine de vaisseaux, campagne de 1759.*

Vivres pour 5 mois; 481 hommes d'équipage, 54 mouffes; eau pour 3 mois en trois plans; lest 240 tonneaux dont 70 en fer, 170 en pierre. Le plus fort du lest étoit depuis le grand mât en avant, & le reste en arrière jusqu'à la cloison des soutes à poudre.

Tirant d'eau de l'arrière . . . . .	16	0	pou.
Tirant d'eau de l'avant . . . . .	12	7	
Différence . . . . .	3	5	en lest.
	<hr/>		
	M	2	

On trouva que cette différence étoit un peu trop grande, & on fut obligé de passer du lest sous le plancher de la fosse aux cables, pour mettre le vaisseau à la différence de 2 pieds 4 pouces. Il ne faudroit donner à ce vaisseau, pour une pareille campagne, que 3 pieds 2 pouces de différence en lest, comme il suit des observations qu'on rapportera bientôt.

Le vaisseau en rade & prêt à partir, tiroit d'eau

De l'arrière . . . . .	20	pieds	0	pou.	
De l'avant . . . . .	17		6		
Différence . . . . .	2		6		
Hauteur de la batterie	{	au sabord du milieu	4	6	
		au sabord de l'arrière	5	6	lig.
		au sabord de l'avant	5	5	

On a observé, pendant la campagne, que la différence qui convient le mieux à ce vaisseau est de 2 pieds 2 à 3 pouces. Il a très-bien gouverné. Il n'a jamais manqué à virer. Ses mouvemens sont très-doux, & il ne fatigue pas sa mâture.

*Second devis du FANTASQUE, commandé par M. de Rochemore, campagne de 1760.*

Vivres pour 5 mois, & un mois en argent; 480 hommes d'équipage & 60 mouffes; 20 barquées de lest, dont 10 en fer & 10 en pierre. Le lest en fer étoit composé de 7 barquées en vieux canons de plusieurs calibres placés depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables. A travers du vaisseau une barquée en boulets qui remplissoient les vuides des canons; deux autres en saumons sous le plancher de la fosse aux cables.

Tirant d'eau avec le lest en fer seulement.

De l'arrière . . . . .	15	3	pou.
De l'avant . . . . .	12	2	
Différence . . . . .	3	1	

Des 10 barquées en pierre, 7 étoient répandues depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables, & horizontalement; les 3 autres dans la calle au vin.

Tirant d'eau avec tout le lest tant en fer qu'en pierre,

De l'arrière . . . . .	15	9	pou.
De l'avant . . . . .	11	8	6 lig.
Différence . . . . .	3	0	6

Le vaisseau étant prêt à partir, tiroit d'eau,

de l'arrière . . . . .	19	5	pou. 7 lig.
de l'avant . . . . .	17	10	0
Différence . . . . .	1	7	7

Il avoit alors 4 pieds 8 pouces 10 lignes de batterie au milieu.

Pendant la navigation, ce vaisseau a assez bien porté la voile. Il plioit facilement jusqu'à sa préceinte; mais il s'arrêtoit à cet endroit avec le gros comme avec le petit vent. Son fort pour la marche étoit le vent large. Il ne marchoit pas si bien vent arrière, encore moins au plus près. Il gouvernoit bien, mais il ne marchoit pas avec un petit vent. Il viroit bien de bord. Ses mouvemens de tangage & de roulis étoient très-doux, & il ne fatiguoit pas sa mâture.

Comme ce vaisseau a son avant très-renforcé, le Capitaine jugea convenable de le mettre plus sur l'avant que ne porte le dernier devis; il le fit mettre à 2 pieds de différence, & on s'en trouva bien. Le vaisseau marcha mieux qu'auparavant; on présume que si on le mettoit à 22 pouces de différence, il marcheroit encore mieux.

Troisième devis du *FANTASQUE*, commandé par M. de Cabaroux, Capitaine de vaisseaux, campagne de 1762.

Vivres pour 6 mois ; eau pour 3 mois ; 410 hommes d'équipage & 45 mouffes ; 22 barquées de lest, dont 5 en fer & 17 en pierre. Le lest en fer étoit composé de 35 tonneaux de vieux canons placés depuis l'archipompe jusqu'à la fosse aux cables, de 15 tonneaux en saumons, qui furent mis en réserve moitié de chaque côté du grand mât pour balancer le vaisseau. Des 17 barquées de lest en pierre, il en a été placé 25 tonneaux depuis la fosse aux cables jusqu'à l'archipompe ; & à l'arrière de l'archipompe jusqu'à la soute aux poudres, il a été fait un remplissage entre les varanges de porques avec 1500 saumons de fer, sur lesquels on a mis seulement 15 tonneaux de lest en pierre.

Le vaisseau dans cet état, son gouvernail en place, ses affuts de canon chacun à leur bord, tiroit d'eau

de l'arrière . . . . .	15	6	pou.
de l'avant . . . . .	12	8	

Différence . . . . .	2	10	
----------------------	---	----	--

Tout armé & prêt à partir, il tiroit d'eau

de l'arrière . . . . .	19	8	pou.
de l'avant . . . . .	17	7	

Différence . . . . .	2	1	
----------------------	---	---	--

Hauteur de la batterie au sabord du milieu 4 pieds 8 pou.

Ce vaisseau n'a jamais bien marché qu'en partant du port. Il étoit vaisseau de compagnie avec toute l'escadre ; il gouvernoit bien. Mais à mesure qu'il a été plus allégé par la consommation, il n'a plus marché. On a tenté de le mettre sur l'avant, sur l'arrière, mais inutilement ; ce qui a fait penser que ce vaisseau veut être appuyé, & que



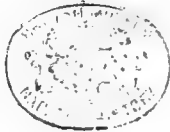
dans une pareille campagne, il auroit dû avoir 24 barquées de lest.

Il plie & va chercher son fort, haut; mais il se comporte parfaitement à la mer dans le gros temps. Sa batterie ne fait ni bruit ni mouvement. Il ne fatigue pas sa mâture; & ses mouvemens de tangage & de roulis sont fort doux.

Le fort de sa marche est vent large & à quartier. Il n'est pas bon boulinier. Il craint la mer de l'avant & de l'arrière au plus près; ce qui fait penser qu'il seroit nécessaire de lui mettre une contrequille. Le Capitaine juge aussi qu'il conviendrait de porter ses deux mâts majeurs un peu plus à l'arrière: il est certain que par-là les voiles d'avant s'orienteroient mieux, & que le petit perroquet, qui ne porte jamais, boulineroit mieux.

LES exemples d'arrimage que je viens de rapporter, & les jugemens portés par les Capitaines sur les mouvemens des deux vaisseaux dont il s'agit, confirment plusieurs réflexions générales répandues dans le corps de cet Ouvrage. La plus importante de toutes, & qu'on ne sauroit trop répéter, est que la forme du vaisseau, la quantité & l'arrangement du lest, relativement à la durée de la campagne, ont ensemble une étroite liaison, qu'il faut étudier, parce que de-là dépend le sort de la navigation.

**F I N.**



11/11/11

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]

[Faint, illegible text]









