RECUEIL
DES PIECES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

TOME HUITIEME.

RECUEIL DES PIECES

QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

DEPUIS LEUR FONDATION EN M. DCC. XX.

TOME HUITIEME.

Qui contient une partie des Pieces de 1753, *celles de* 1756 & 1757, & *le reste de celles de* 1760.

A PARIS,
Chez PANCKOUCKE, rue des Poitevins, à l'Hôtel de Thou.

M. DCC. LXXI.

AVERTISSEMENT

Au sujet des Pieces qui composent ce VIII^e Volume.

DANS l'Avertissement que j'ai placé à la tête du septieme Volume, publié en 1769, je rendis compte des raisons qui avoient fait intervertir l'ordre chronologique des Pieces des Prix. Ce Volume contenoit la Piece de M. BERNOULLI, qui avoit remporté le Prix de 1753, sur la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux. Celles de M. EULER & de M. MATHON *de la Cour*, qui avoient eu l'*Accessit*, sont les deux premieres de ce huitieme Volume.

En 1754 le Prix ne fut point adjugé.

La Piece de 1755 est imprimée à part chez Delatour.

En 1756, l'Académie proposa la Théorie des inégalités de la Terre; la Piece de M. Euler est la troisieme de ce Volume.

En 1757, M. Bernoulli remporta le prix sur le Roulis & le Tangage des vaisseaux; sa Piece est la quatrieme de ce Volume.

La Piece de 1758, par le P. Frisi, a été imprimée en Italie.

En 1759, sur le Roulis & le Tangage, il y eut deux Pieces, l'une de M. Grognard, qui est dans le Tome VII; l'autre, de M. Euler, qui est la cinquieme de ce VIII^e Volume.

En 1760, on proposa l'examen des altérations du moyen mouvement des planetes; la piece de M. Charles Euler est la sixieme de ce Volume; celle du P. Frisi, qui eut l'*Accessit*, est imprimée dans le second Volume du Recueil qu'il a donné en Italie. La Piece composée à l'occasion du Prix extraordinaire, sur les Verreries, est dans le VII^e Volume.

En 1761, il y eut deux Pieces sur l'Arrimage des Vaisseaux; elles sont dans le septieme Volume.

AVERTISSEMENT.

En 1762, M. l'Abbé Boſſut remporta le Prix, par ſes *Recherches ſur les altérations que la réſiſtance de l'Ether peut produire dans le mouvement moyen des Planetes*, imprimées à part en 1766; elles ſont jointes à ce Volume.

La Piece de M. Jean-Albert Euler, que l'Académie cita avec éloge, eſt auſſi dans le Volume que nous publions aujourd'hui.

Pour 1763, l'Académie demanda la deſcription des différentes méthodes qu'on emploie pour l'arrimage des vaiſſeaux, & la maniere de les perfectionner; le Prix ne fut point adjugé, il ne l'a été qu'en 1765.

En 1764, le Prix fut remporté par M. de la Grange, ſur la libration de la lune. Cette Piece commencera le neuvieme Volume, que nous eſpérons de publier inceſſamment.

La fondation du Prix de l'Académie, par M. Rouillé de Meslay, eſt une époque intéreſſante dans l'Hiſtoire des Sciences; elle a produit des recherches ineſtimables ſur les plus belles parties de la Phyſique Céleſte & de la Théorie de la Navigation. Nos connoiſſances ſur les effets de l'attraction ſont dûes en grande partie à ce bel établiſſement; & il n'y a gueres de Recueil auſſi intéreſſant que celui que nous continuons de donner au Public. On ſera peut-être ſurpris que l'exemple de M. Rouillé de Meſlay n'ait déterminé perſonne à le ſuivre, & à contribuer, par quelque établiſſement de même genre, au progrès de nos Sciences. Ces études, auſſi difficiles & auſſi rares qu'elles ſont curieuſes & importantes, ont beſoin de l'émulation & des ſecours que procurent de ſemblables inſtitutions. A Paris, le premier Avril 1771.

DE LA LANDE.

MÉMOIRE

MEMOIRE

SUR

LA MANIERE LA PLUS AVANTAGEUSE

DE SUPPLÉER

A L'ACTION DU VENT

SUR LES GRANDS VAISSEAUX.

Présenté à l'Académie à l'occasion du Prix de 1753.

Tali remigio navis se tarda movebat. Virg. Æneid. Liv. 5.

MÉMOIRE

Sur la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du Vent ſur les grands Vaiſſeaux.

DE PROMOTIONE NAVIUM

SINE VI VENTI.

§. I. CUM vento uti non licet ad navem propellandam, aliæ vires non reliquuntur, præter eas, quas homines in nave verſantes præſtare valent. Primum igitur diſpiciendum erit, qua ratione homines ad quodvis opus applicari conveniat, ut maximum effectum producant. Determinari ſcilicet opportet, quanta celeritas actioni hominum tribui debeat, ut ex viribus, quas tum exercent, maximus effectus oriatur. Experientia quidem conſtat, quo majori celeritate homo operetur, eo minorem vim eum exerere, nihilo tamen minus, cum effectus non ſolum ex vi ſed etiam ex celeritate, qua agit, æſtimandus ſit, etiamſi aucta ejus celeritate vis diminuatur, tamen fieri poteſt, ut inde major effectus exſiſtat, qui, quo caſu omnium maximus evadat, hic primum definiendum videtur quocumque enim modo a viribus hominum naves propelli poſſe deinceps deprehendemus, id ſemper maximo cum lucro efficietur ſi actio hominum adjuſtum celeritatis gradum temperetur.

§. II. Primum autem conſideranda eſt vis, quam homo quietus edere valet; quæ quidem non major eſt capienda, quam ut homo eam aliquamdiù ſine nimia defatigatione ſuſtinere queat; exponatur hæc vis pondere M, ita ut homo huic ponderi ſuſpenſo tenendo par ſit. Hoc pondus ſi ad experientiam ſpectemus 70 circiter librarum conſtitui poteſt, ſeu æquale ponderi unius pedis cubici aquæ.

§. III. Secundo loco ſpectari debet maxima celeritas, qua homo vel currere vel membra ſua vibrare ſive nimia defatigatione valet, tanta enim celeritate, ſi homo actu movetur, nullam omnino vim exerere valebit, cum omnes ejus conatus in proprio motu conſumantur. Sit igitur iſta celeritas $= \surd c$ ſeu debita altitudini c; cum igitur iſta maxima celeritas cenſeri poſſit ſex pedum uno minuto ſecundo, altitudo huic celeritati debita erit $\frac{576}{1000}$ pedis.

§. IV. Cum igitur homo, in quiete conſtitutus, vi polleat $= M$, motus autem celeritate $= \surd c$ omni vi deſtituatur, videndum eſt, quanta vis in eo ſit futura, ſi celeritate quacunque minore progrediatur. Exprimat $\surd v$ celeritatem minorem quam $\surd c$, ſitque Q vis, qua homo in hoc ſtatu erit præditus, atque manifeſtum eſt Q ejuſmodi eſſe debere functionem ipſius v, ut, poſito $v = o$, fiat $Q = M$: facto autem $v = c$, prodeat $Q = o$; quibus quidem conditionibus infinitis modis ſatis fieri poteſt, veluti ſi ponatur: $Q = M\left(1 - \frac{v^n}{c^n}\right)^m$.

§. V. Ad experientiam autem caſus videtur maxime accomodatus ſi ponatur $n = \frac{1}{2}$ & $m = 2$; ita ut ſit

$$Q = M\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2.$$

Veritas hujus formulæ ex vi aquæ illuſtrari poteſt, ſi enim aqua celeritate $\sqrt{c}$ in planum $= ff$ directe incurram vim exeret $= ffc$, ſin. autem idem Planum celeritate $= \sqrt{c}$ cum fluvia progrediatur, nullam vim excipiet; celeritate minore $\sqrt{v}$ latum, a fluvio propelletur vi $= ff(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$: jam ffc reſpondet noſtro M, unde ob $ff = \frac{M}{c}$ fit Q ſeu vis celeritati $\sqrt{v}$ reſpondens $= M \left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$.

§. VI. Ut hinc actionem hominis maxime lucroſam definiamus, ponamus, hominem ope axis in peritrochio datum pondus P elevare debere; adhunc enim caſum omnes machinas utcunque poſitas reducere licet Sit ergo ſemidiameter cylindri $= a$, & longitudo Scytalæ cui homo eſt applicatus $= r$; homo autem procedat celeritate $= \sqrt{v}$, erit celeritas, qua pondus P elevatur $= \frac{a}{r} \sqrt{v}$: vis autem hominis hac celeritate operantis eſt $= M \left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$: cujus momentum $Mr \left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$; æquale eſſe debet momento ponderis P renitentis, quod eſt $= Pa$; ita ut habeamus hanc æquationem

$$Pa = Mr\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2;$$

Qua determinatur ſtatus machinæ.

§. VII. Ex hac æquatione inventa elicimus; $\frac{a}{r} = \frac{M}{P}\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)^2$:

Hinc ergo celeritas, qua pondus P actu elevatur erit:

$$\frac{M}{P}\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{c}}\right)\sqrt{v}.$$

Quam perſpicuum eſt maxime pendere a celeritate $\sqrt{v}$; ſive enim ſit $v = o$, ſive $v = c$, pondus plane non elevatur, quare neceſſe eſt, certum dari valorem pro $\sqrt{v}$, quo pondus citissime elevetur, atque hic ipse est gradus ille celeritatis, quo homo operans maximum effectum producere est censendus. Iste igitur valor ipsius v per methodum Maximorum & Minimorum determinabitur.

§. VIII. In hunc finem ponamus $\sqrt{v} = z$ & $\sqrt{c} = e$ ita ut maximum reddi debeat $z(1 - \frac{z}{e})^2$; cujus differentiale nihilo æquatum præbet; $dz(1-\frac{z}{e})^2 - \frac{2zdz}{e}(1-\frac{z}{e}) = o$; unde elicitur $z = \frac{1}{3}e$ ideoque $\sqrt{v} = \frac{1}{3}\sqrt{c}$: Celeritas ergo hominis maximo effectui conveniens præcisè est pars tertia maximæ celeritatis cujus homo est capax. Quæ cum æstimata sit 6 pedum uno minuto secundo, erit celeritas hominis efficacissima duorum pedum pro uno minuto secundo: sicque sive homo celerius sive tardius vires suas impendat, debiliorem semper effectum producat.

§. IX. Cum sit $\sqrt{v} = \frac{1}{3}\sqrt{c}$ erit $v = \frac{1}{9}c$: ideoque Altitudo huic celeritati maximæ lucrosæ debita erit $= \frac{64}{1000}$ seu $= \frac{8}{125}$ pedis; vis autem, quam homo, hac celeritate nitens exercebit erit $= \frac{4}{9}M$. Unde si M æstimetur 70 librarum, erit ista vis $= 33\frac{1}{3}$ libr. seu æqualis ponderi $\frac{4}{9}$ pedis cubici aquæ. Hæc igitur determinatio latissime patet atque ad omnes casus, quibus opus, quodcunque viribus humanis perficiendum proponitur, extendi debet. Omnes igitur Machinæ, cujuscunque sint generis, ita instrui debent ut celeritas hominum agitantium singulis minutis secundis bines pedes conficiat, sive ut altitudo huic celeritati debita sit $= \frac{8}{125}$ pedis.

§. X. Hanc igitur regulam observari opportet in iis operationibus quibus navis vi hominum est propellenda, quod, quibus modis effici queat, nunc diligentius sum perscrutaturus.

§. XI. Quibuscunque autem viribus homo in nave constitutus moliatur, nullam omnino vim ad navem propellendam exeret, nisi in objecta extra navem sita nitatur, dum autem navis in Alto versatur, aliud objectum externum, in quo homo vires ſuas conſumat, non occurrit præter ipſam aquam, niſi forte aërem quoque huc numerare velimus.

§. XII. Omnes autem vires, quæ in hunc finem ab aqua peti poſſunt, ad duo genera referri obſervo. In altero ſcilicet genere eas complector vires, quæ à percuſſione aquæ naſcuntur, quorſum pertinent vires à remis oriundæ, ad alterum autem genus refero vires, quas reactio aquæ, dum ex receptaculo quopiam effluit, ſuppeditat. Utrumque ergo genus hic ſeorſim evolvam.

SECTIO PRIMA.

De viribus ex percussione aquæ oriundis.

§. XIII. Tam ex Theoria quam Experientia satis constat: si superficies plana, quæ sit æqualis ff contra aquam directe impingat celeritate altitudini v debita, fore vim aquæ æqualem ponderi massæ aqueæ, cujus volumen sit $= ffv$; hanc ergo vim per ffv exprimam. Perspicuum porro est hanc vim eandem esse futuram; sive planum in aquam, sive aqua in planum pari celeritate incurrat, sive etiam utrumque moveatur, dummodo celeritas relativa fuerit $= \surd v$.

I.

Primus modus Navem propellendi

Tabula I. Fig. 1. §. XIV. Ex hoc jam principio sequentes modi navem propellendi obtinentur. Primum scilicet ponamus; superficiem vel tabulam planam FF, cujus area $= ff$, in aqua horizontaliter agitari ope vectis inflexi ABG, qui ab hominibus super trochlea C horizontaliter promoveatur; ubi quidem perspicuum est, hunc vectem, si in prora applicetur attrahendo ad navem, sin autem in puppi applicetur à nave repellendo, movere debere. Calculus autem perinde se habebit sive hæc machina in prora, sive in puppi adhibeatur. Notandum autem est, cum iste vectis vel satis fuerit attractus vel protrusus, Tabulam, inclinando vectem, super aquam elevari debere, donec iterum ad novam actionem producendam aquæ immergatur.

§. XV.

§. XV. Quoniam autem hic imprimis ipſius navis motus ratio haberi debet, ponamus navem jam ſecuncundum directionem AB moveri celeritate $= \sqrt{c}$: tabulam autem FF cum vecte GBA in navi promoveri celeritate $= \sqrt{v}$, quæ ſi æqualis eſſet celeritati navis $\sqrt{c}$, nulla vis inde in navem redundaret, eatenus igitur tantum hinc vis ad navem propellendam orietur, quatenus eſt $\sqrt{v} > \sqrt{c}$, tum enim Tabula aquam feriet celeritate $= \sqrt{v} - \sqrt{c}$.

§. XVI. Altitudo ergo huic celeritati, qua tabula in aquam impingit, debita erit $(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$; ideoque vis, quam ab aqua ſuſtinet erit $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, qua tabula æque ac ipſa navis ſecundum directionem GH urgebitur; per hypotheſin autem hæc directio convenit cum directione navis. Unde, ſi vis iſta æqualis fuerit reſiſtentiæ, quam navis in aqua ſuſtinet, navis ſuam celeritatem $\sqrt{c}$ conſervabit, ſin autem illa vis vel major fuerit vel minor quam reſiſtentia motus navis vel accelerabitur vel retardabitur.

§. XVII. Quoniam autem potiſſimum ad motum uniformem attendi convenit, ponamus, navem jam eum aſſecutam eſſe motum, quo ab hac vi impulſa uniformiter progredi valet, ita ut reſiſtentia, quam navis celeritate $\sqrt{c}$ procedens patitur, æqualis ſit vi inventæ $ff(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$. Convenientius enim effectus virium determinari non poteſt, quam ſi ipſam celeritatem navi inde impreſſam aſſignavero.

§. XVIII. Quacunque autem figura navis fuerit prædita, ſemper exhiberi poteſt ſuperficies plana, quæ pari celeritate in aquam directe incurrens eandem reſiſtentiam patiatur atque ipſa navis. Si igitur iſta ſuperficies pro navi propoſita vocetur kk, quoniam navis celeritate $\sqrt{c}$ progreditur, erit reſiſtentia $= kkc$; unde erit $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$.

§. XIX. Hinc ergo celeritas navis determinari poterit, quam vires, quæ ad machinam noſtram, celeritate

$\sqrt{v}$ agitandam, requiruntur, navi inducere valent. Extracta enim radice quadrata erit $k\sqrt{c}=f\sqrt{v}-f\sqrt{c}$ unde dicitur $\sqrt{c}=\frac{f\sqrt{v}}{k+f}$; unde manifestum est, quod quidem per se est clarum, celeritatem navis $\sqrt{c}$ semper minorem esse celeritate $\sqrt{v}$ & quidem in ratione f ad $k+f$.

§. XX. Videamus nunc, quot hominum vires ad hunc motum requirantur; ponamus igitur n homines adhiberi, qui cum præscripta celeritate agere debeant, quæ fortasse diversa erit à celeritate vectis $\sqrt{v}$; quæ diversitas cum innumeris modis obtineri queat: rem ita consideremus, ac si machina nostra ope vectis OA circa polum O mobilis agitetur, huicque vecti in puncto M vires hominum secundum directionem MN essent applicatæ. Sit igitur $OA=a$ & $OM=x$; erit celeritas vis motricis in M applicatæ $=\frac{x\sqrt{v}}{a}$.

§. XXI. Sit nunc celeritas, qua quisque homo maximo cum successu agere inventus est $=\sqrt{e}$; ita ut sit $e=\frac{8}{125}$ pedis, vis autem singulorum hominum ponatur $=A$, quæ, ut vidimus est $33\frac{1}{3}$ librarum vel $\frac{4}{9}$ pedis cubici aquæ. Oportet igitur sit $\frac{x\sqrt{v}}{a}=\sqrt{e}$ & quia vis omnium hominum in M applicata est $=nA$, vis huic in puncto A æquivalens $=\frac{nAx}{a}$, qua vectis ABG actu retrahitur, quæ propterea æqualis esse debet vi aquæ reluctanti $=ff(\sqrt{v}-\sqrt{c})^2$ seu vi resistentiæ $=kkc$.

§. XXII. Tres igitur assecuti sumus æquationes:

I. $kkc=ff(\sqrt{v}-\sqrt{c})^2$: sive $k\sqrt{e}=f\sqrt{v}-f\sqrt{c}$.

II. $\frac{x\sqrt{v}}{a}=\sqrt{e}$.

III. $\frac{nAx}{a}=(ff\sqrt{v}-\sqrt{c})^2$.

Harum secunda dat $\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{v}}$: qui valor in tertia substitutus præbet: $\frac{nA\sqrt{e}}{\sqrt{v}}=ff(\sqrt{v}-\sqrt{c})^2=kkc$: Hinc reperitur: $\sqrt{v}=\frac{nA\sqrt{e}}{kkc}$: & cum sit $\sqrt{c}=\frac{f\sqrt{v}}{k+f}$ erit $c\sqrt{c}=\frac{nAf\sqrt{e}}{kk(k+f)}$; inventa hinc celeritate $\sqrt{c}$ definietur locus applicationis virium M per formulam $\frac{x}{a}=\frac{kkc}{nA}$.

§. XXIII. Ex hac formula patet, ſi celeritas navis cum numero hominum comparetur, fore cubum celeritatis numero hominum proportionalem. Ut igitur navi celeritas duplo major imprimatur numero hominum octuplo majore erit opus. Unde patet, celeritatem navis non ultra certum terminum augeri poſſe, cum navis non niſi modici hominum numeri ſit capax. Sin autem celeritas navis $\sqrt{c}$ cum quantitate f conferatur, patet ſi fit $f = o$, celeritatem navis quoque evaneſcere, creſcente autem f, celeritatem quoque creſcere, maxima igitur celeritas prodit ſit fiat $f = \omega$, quo caſu erit: $c\sqrt{} = \frac{nA\sqrt{e}}{kk}$; ideoque $\sqrt{c} = \sqrt[3]{\frac{nA\sqrt{e}}{kk}}$.

§. XXIV. Cum autem tabula major capi nequeat, quam ut ab hominibus regi poſſit: perſpicuum eſt, quantitatem f non ultra certum limitum augeri poſſe, qui limes à numero hominum ideoque à quantitate navis plerumque pendebit. Videtur igitur ſtatui poſſe $f = k$, ita ut ſit: $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{e}}{2kk}$; cubus ergo hujus celeritatis ſemiſſis eſt cubi celeritatis maximæ, unde ipſa celeritas tantum parte quinta circiter deficiet à celeritate maxima; quod diſcrimen non admodum eſt notabile. Sin autem accipiatur $f = 2k$, celeritas prodibit à celeritate maxima deficiens parte circiter octava. Unde patet opere non eſſe pretium ut tabula tantopere amplificetur.

§. XXV. Conferamus etiam celeritatem navis $\sqrt{c}$ cum ejus *reſiſtentia abſoluta:* (quam area kk mens uremus,) ac manifeſtum eſt fore $c\sqrt{c}$ ut $\frac{1}{kk}$, ſeu cubum celeritatis reciproce eſſe proportionalem reſiſtentiæ abſolutæ. Hinc ſi reſiſtentia abſoluta octies fiat minor, celeritatem tantum duplo fieri majorem: unde patet, diminuendo reſiſtentiam abſolutam parum notabile celeritatis incrementum inde reſultare.

§. XXVI. Imprimis autem obſervandum eſt homines, quos hic ſumus comtemplati, non continuo vires ſuas ad navem propellendam impendere: quoniam, ad-

admota tabula ad navem, coguntur eam ex aqua extrahere, ac per aërem vibrando denuo aquæ immergere, quæ operatio duplo diutius durare censenda est quam operatio in navis promotione consumpta, quocirca celeritas navis supra inventa $\sqrt{c}$ non est effectus n hominum sed spectari debet tanquam effectus $3\,n$ hominum. Dato ergo numero hominum, qui huic operi applicantur, ejus numeri tantum pars tertia nobis valerem litteræ n præbebit.

§. XXVII. Videamus jam, quanta preditura sit navis celeritas in quolibet casu, si homines modo efficacissimo operi admoveantur. Vidimus autem esse $A = \frac{4}{9}$ ped. cub. & $e = \frac{8}{125}$ ped. omnibus igitur reliquis quantitatibus in pedibus expressis, erit $c\sqrt{c} = \frac{4nf\sqrt{\frac{8}{125}}}{9kk(k+f)} = \frac{nf}{9kk(k+f)}$. Unde celeritas maxima, quæ prodit si $f =$ infin. cognoscetur ex formula $c\sqrt{c} = \frac{n}{9kk}$. Sufficiet autem celeritatem maximam assignavisse, cum quolibet casu, quo f finitum obtinet valorem, defectus à maxima celeritate facile æstimari possit.

§. XXVIII. Ponamus igitur pro navi non nimis magna esse resistentiam absolutam $kk = 50$ ped. quad. & numerum hominum operantium esse $= 30$ ita ut sit $n = 10$; hoc ergo casu habebitur $c\sqrt{c} = \frac{1}{45}$ unde altitudo celeritati maximæ debita erit $c = 0,079$ ped. Unde conficiet navis uno minuto secundo spatium $2\frac{1}{2}$ pedum, cui intervallo unius horæ triens feræ milliaris germanici respondet. Ut igitur eadem navis singulis horis milliare germanicum absolvat, viribus 810 hominum utendum esset: vel manente hominum numero triginta, resistentia absoluta kk ad $1\frac{23}{27}$ ped. quad. diminui deberet.

Tabula I. Fig. 2. §. XXIX. In hoc casu exposito, quo $n = 10$ & $kk = 50$ fiet $\frac{x}{a} = \frac{kkc}{nh} = 0,888 = \frac{8}{9}$. Vires ergo hominum in vectis OA puncto M applicari debent ita ut sit $AM = \frac{1}{9}\,OM$; & quo pluribus hominibus locus operandi procuretur vecti in puncto M trabs transversalis NN adjungi poterit, in quam urgendo homines vires suas exerceant, atque hujusmodi machina tam in prora quam in puppi constitui poterit, si quidem circumstantiæ id permittant.

§. XXX. Hoc autem modo ingens se offert incommodum, quando tabula ex aqua extrahi & per aërem retrudi deberet, quoniam ad hanc operationem machina à vecte OA liberari, aliaque virium applicatio institui deberet; huic autem incommodo occurri poterit, si tabula quasi fenestris sit instructa, quæ, dum tabula attrahitur, claudantur & aquæ vim excipiant. Sic enim tabula ope ejusdem vectis OA in aqua removeri poterit, quo motu, cum fenestræ apperiantur, nulla fere resistentia sentietur; quo continuo motu operatio & agitatio machinæ satis commoda reddetur.

II.

Secundus Modus Navem propellendi.

§. XXXI. Huc pertinet quoque vulgaris remorum usus, qui autem, cum jam satis sit pertractatus, tum vero in grandioribus navibus pluribus incommodis est obnoxius, eum hic non attingam; ejus vero loco proponam machinam affinem, qua utrinque ad latera navis tabulæ FF ope axis incurvati $DBCCBD$ in aqua vibrantur, dum vires hominum parti CC applicantur, qui motus, ut sine intermissione reciprocari possit, tabula iterum fenestris instrui poterunt. *Tabula I. Fig. 3.*

§. XXXII. Ponatur utriusque tabulæ junctim sumtæ superficies $= ff$, quarum vis in punctis G excipiatur; sit hujus puncti ab axe rotationis DAB distantia $DG = a$ & axi curvati distantia $BC = x$; progrediatur navis celeritate $= \sqrt{c}$ & tabulæ vibrentur in aqua celeritate $\sqrt{v}$; erit celeritas respectiva, qua tabula aquam percutit

$= \sqrt{v} - \sqrt{c}$. Hoc ſcilicet locum habet, ſi tabula ſitum verticalem tenet, in ſitu enim obliquo vis aliquantum diminuetur, cujus ratio facile haberi poterit, etiamſi in calculo brevitatis gratia negligatur.

§. XXXIII. Erit ergo vis aquæ in utramque tabulam $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, quæ ad navem propellendam impenditur, ut ergo navis celeritatem ſuam $\sqrt{c}$ conſervet, neceſſe eſt, hanc vim reſiſtentiæ eſſe æqualem. Poſita igitur reſiſtentia abſoluta $= kk$, oportet ſit $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ ſeu $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$. Ejuſdem autem vis momentum reſpectu axis DB eſt $= ffa(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ ſeu $= kkac$, quæ à viribus hominum ſuſtineri debet.

§. XXXIV. Ponamus igitur n homines trabem CC impellere, & cujuſque hominis celeritate $\sqrt{e}$ agentis vim valere A erit vis onmnium hominum $= nA$ cujus momentum $= nAx$, quod ergo æquari debet $kkac$ ita ut ſit: $nAx = kkac$: unde prodit $\frac{a}{x} = \frac{kkc}{nA}$; præterea autem eſſe opportet: $\sqrt{v} : \sqrt{e} = a : x$ ſeu $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{v}}$.

§. XXXV. Habemus ergo $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{v}} = \frac{kkc}{nA}$: unde fit $\sqrt{v} = \frac{nA\sqrt{e}}{kkc}$; qui valor in æquatione $k\sqrt{c} = f\sqrt{v} - f\sqrt{c}$, ſeu $f\sqrt{v} = (k+f)\sqrt{c}$ ſubſtitutus præbet: $\frac{nAf\sqrt{e}}{kkc} = (k+f)\sqrt{c}$ unde elicitur $c\sqrt{c} = \frac{nAf\sqrt{e}}{kk(k+f)}$. Quæ formula cum à ſuperiori non diſcrepet, patet ſive homines hoc modo applicentur ſive modo præcedente, navem utroque caſu pari velocitate promoveri.

§. XXXVI. Ex reliquis ergo circumſtantiis dijudicari opportebit, utrum hoc modo an præcedente uti expediat; quin etiam nihil impedit, quomius uterque modus ſimul adhibeatur & ex poſteriori plures hujuſmodi machinas in navi ſecundum longitudinem conſtitui poſſent. Quod ſi fiat, notandum eſt in calculo, ſummam omnium tabularum in ff comprehendi debere, parique modo n denotabit numerum omnium hominum, omnes machinas ſimul urgentium.

III.

Tertius Modus Navem propellendi.

§. XXXVII. Si in Machina præcedente Tabula *FF* circa axem *AA* omnino in gyrum agantur, feneſtris non erit opus. ac ne, dum tabulæ per aërem vibrantur, vires hominum inutiliter conſumantur, plures hujuſmodi tabulæ circa axem *AA* diſponi poterunt, ut, dum aliæ ex aqua tolluntur aliæ de novo immergantur. Hoc ergo modo vires hominum ſine intermiſſione ad navem propellendam impenduntur neque tantum tertia pars ut in modis præcedentibus uſu venit, navem actu propellere erit cenſenda. *Tabula I. Fig. 4.*

§. XXXVIII. Neque tamen numerum hujuſmodi radiorum *AG* nimium augeri convenit, ne machina nimis fiat complicata, aliiſque navis deſtinationibus adverſetur. Ita commodiſſimum videtur, axem utrinque quaternis tantum hujuſmodi alis inſtrui, perpendiculariter inter ſe diſpoſitis. Sic enim ne tormentorum quidem uſus impedietur, cum enim tormenta explodere opus fuerit, dato ſigno, axis *AA* in eo ſitu poterit detineri, ut binæ alæ in ſitu verticali, alteræ in horizontali ſerventur.

§. XXXIX. Pro hac machina calculus difficilior non evadit quam caſu præcedente: cum enim axis *AA* ſupra aquam elevatus eſſe debeat, dum una tabula *FF* in ſitu verticali verſatur, reliquæ tres utrinque ſupra aquam eminebunt, illaque unica vim aquæ eandem quam ſupra definivimus excipiet, quando verum in ſitum ſatis obliquum pervenerit, ejuſque vis proinde debilitata fuerit, tum alia ala aquæ immergetur ſicque jactura illa compenſabitur; ex quo efficitur ut tota vis perpetuo eadem ſit proditura ac ſi ſemper una ala ſitum verticalem teneret.

§. XL. Denotabit ergo ff superficiem duarum tabularum ut ante & a distantiam centri cujusque tabulæ ab axe AA, unde si celeritas navis ponatur æqualis $\sqrt{c}$ & celeritas gyratoria punctorum G circa axem $AA = \sqrt{v}$ erit vis, quæ perpetuo ab aqua excipietur $= ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$, quæ resistentiæ navis kkc æqualis posita dabit $kkc = ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2$ seu $(k+f)\sqrt{c} = f\sqrt{v}$.

§. XLI. Nunc autem machina non amplius ope axis inflexi commode agitari poterit, sed potius conveniet axem AA verticillo D instrui, qui à rota dentata horizontali E convertatur. Ipsa autem rota conjuncta sit cum axe verticali O, qui ope scytalarum OM ab hominibus in gyrum agatur. Quoniam igitur homines hoc pacto semper eandem resistentiam offendunt motu semper æquabili vires suas exercere poterunt, quo ipso non contemnendum virium incrementum impetrabitur, cum contra, quando motus est inæquabilis non exigua pars virium in ipsius machinæ motu tam accelerando quam retardando consumatur, quin etiam homines hujusmodi actione æquabile non tantopere defatigabuntur.

§. XLII. Sit igitur hominum numerus $= n$ qui celeritate $\sqrt{e}$ progredientes scytalis OM in distantia $OM = x$ ab axe O sint applicati; singulique vi $= A$ nitantur, deinde sit numerus dentium rotæ $E = \mu$; numerus autem bacillorum verticilli $D = \nu$. Dum igitur rota E semel circumagitur, verticillus D cum axe AA faciet $\frac{\mu}{\nu}$ revolutiones. Unde celeritas punctorum M, quibus homines sunt applicati erit ad celeritatem punctorum G, quæ aquæ vim sustinent ut x ad $\frac{\mu}{\nu}a$, ideoque habebitur $\sqrt{e} : \sqrt{v} = x : \frac{\mu}{\nu}a$ seu $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{e}} = \frac{\mu a}{\nu x}$.

§. XLIII. Cum autem porro vires hominum cum vi aquæ in æquilibrio esse debeant ex universali æquilibrii principio, necesse est, ut sit vis hominum, quæ est $= nA$, ad vim aquæ, quæ est $ff(\sqrt{v} - \sqrt{c})^2 = kkc$,

ut

ut celeritas punctorum G ad celeritatem punctorum M, hoc eſt ut $\sqrt{v}$ ad $\sqrt{e}$ unde nanciſcimur $kkc\sqrt{v} = nA\sqrt{e}$: atqui eſt $f\sqrt{v} = (k+f)\sqrt{c}$; ergo $\frac{k}{f} = \frac{nA\sqrt{e}}{(k+f)\sqrt{c}}$. Unde elicimus ut ante: $c\sqrt{c} = \frac{nAf\sqrt{e}}{kk(k+f)}$. Quam celeritatem cum n homines navi imprimant, in præcedentibus autem machinis ad eandem celeritatem $3\,n$ homines requirantur, patet hoc modo cubum celeritatis navis ter fieri majorem ipſamque adeo celeritatem fere in ratione ſeſqui altera augeri.

§. XLIV. Perſpicitur ergo, hanc machinam iis, quas ante expoſui, atque etiam ſolitæ remorum actioni longè eſſe anteferendam, cum à pari hominum numero navi celeritas fere ſemiſſi major induci queat, dum ſcilicet utrinque homines æquali vi operari ponuntur. Hoc autem commodum eo majoris momenti evadet, cum in hac machina homines perpetuo motu æquabili agant eaſdemque vires exerceant. Unde non contemnendum lucrum in totum effectum redundat.

§. XLV. Quamobrem non dubito iſtum modum naves propellendi præ hactenus explicatis ad uſum practicum commendare. Ac ſi is nonnullis difficultatibus adhuc obnoxius videatur, eo magis in id erit incumbendum, ut iis difficultatibus, quantum fieri poteſt occurratur. Equidem non ignoro incommoda, quibus rotæ huic machinæ ſimiles, cujuſmodi jam ſæpius ad naves propellendas ſunt propoſitæ, laborant: verum hæc incommoda plerumque evaneſcere confido, cum non totam rotam ſed tantum axem; quaternis utrinque radiis inſtructum, adhiberi velimus, qua ratione nonſolum ſimplicitati conſulitur, ſed etiam tempeſtates ipſiuſque navis agitationes uſui hujus machinæ vix quicquam nociture videntur.

§. XLVI. Imprimis autem in ideſt incumbendum, ut vires hominum maximo cum lucro applicentur, quæ circumſtantia, ſi negligatur, fieri utique poſſet, ut hæc machina conſuetæ remigationi poſtponenda videretur. Hunc in finem actionem hominum maxime efficacem sollicite investigavi, atque hic rotam dentatam in machina introduxi, ut; commodo dentium numero constituto, scytalis OM ejusmodi longitudo tribui queat, quæ quamplurimis hominibus excipiendis satis sit idonea. Quin etiam axis verticalis OOO vel in superius vel in inferius pavimentum continuari potest, ut homines in duobus pontibus ad eum circumagendum adhiberi queant.

§. XLVII. Cum enim $\surd v = \frac{nA\surd e}{kkc}$; erit $\frac{nA}{kkc} = \frac{\mu a}{\nu x}$. Unde determinatio machinæ aptissima facile deducitur. Tribuatur enim scytalis $OM = x$ tanta longitudo, quantam capacitas navis permittit, eritque $\frac{\mu}{\nu} = \frac{nAx}{kkac}$. Unde ratio rotæ E ad verticillum D cognoscitur, quæ si in praxi observetur, vel dummodo non nimium ab ea recedatur, machina erit ita perfecta ut ab iisdem viribus alio modo applicatis major effectus nullo modo produci queat.

§. XLVIII. Ut rem exemplo illustremus, ponamus navis resistentiam absolutam $kk = 100$ ped. quad. quæ jam in grandiores naves competit, sitque numerus hominum $n = 100$: sit porro summa tabularum aquam simul percutientium $ff = 100$ ped. quad. Hincque cum sit $A = \frac{4}{9}$ & $e = \frac{8}{125}$, prodibit $c\surd c = 0,056$ unde reperitur $c = 0,1464$ ped. Cui altitudini respondet celeritas, qua singulis secundis spatium 3 pedum, ideoque singulis horis fere semissis milliaris germanici conficietur. Unde facile colligitur, quanta futura sit navis celeritas si vel plures homines operi admoveantur vel resistentia navis absoluta minor majorve exsistat.

§. LXIX. Ponamus porro scytalarum longitudinem $x = 10$ pedum & longitudinem $AG = a = 20$ ped. ac prodibit ratio $\frac{\mu}{\nu} = \frac{2000}{1317}$ cujus valor proxime est $= \frac{3}{2}$. Hinc si verticillo 10 bacilli tribuantur; rota 15 dentibus instructa esse debet, sicque machina ad praxin maxime videtur accommodata.

IV.

Quartus Modus Navem propellendi.

§. L. Ad similitudinem Molarum alatarum, quæ vento impelluntur, ejusmodi rota navi vel in Prora vel in Puppi applicari poterit, quæ alis oblique positis instructa & circa axem vibrata ab aqua vim excipiat ad navem propellendam idoneam. Cujusmodi machina, cum non solum sit nova sed etiam singulari principio innixa, omnino digna videtur, ut effectum, quem præstare caleat, accuratius investigemus; fortasse enim paucioribus difficultatibus erit subjecta, ita ut, si vires sufficientes suppeditaverit non sine insigni commodo in praxi usurpari queat, quin etiam nihil impediret, quo minus simul cum machina ante descripta ad usum adhibeatur.

§. LI. Sit igitur axis AB Proræ horizontaliter incumbens, qui instructus sit quatuor radiis AG, quibus oblique affixæ sunt tabulæ FF. Quod si jam axis AB circumagatur vel una vel duæ tabulæ sub aqua versabuntur, quæ aquam oblique percutientes vim quoque obliquam ab aqua excipient quæ resoluta dabit cum vim navem propellentem tum etiam vim motui alarum resistentem. Sicque à determinatione hujus duplicis vis pendebit machinæ effectus. *Tabula II. Fig. 5.*

§. LII. Teneat unus radius AG situm verticalem, ita ut nunc solus aquæ sit immersus, ac per punctum G, quod sit quasi centrum tabulæ, existente distantia $AG = a$; & area tabulæ $= ff$, facta concipiatur sectio horizontalis, in qua sit ab recta axi AB seu navis directioni parallela & Ff repræsentet sectionem tabulæ, cujus obliquitatis angulus aGF seu bGf ponatur $= \varphi$. *Fig. 5 & 6.*

Motus tabulæ circa axem AB ita ſit comparatus ut punctum G ſecundum directionem GL ad ab normalem vibretur celeritate $= \sqrt{v}$.

§. LIII. Hinc ſi navis quieſceret, tabula eandem vim ſuſtineret ac ſi aquæ celeritate $= \sqrt{v}$ in directione LG in tabulam oblique impingeret, verum ponamus navem jam totum acquiſiviſſe motum, quem ab hac machina impetrare poteſt, eſſeque ejus celeritatem ſecundum directionem $Ga = \sqrt{c}$. Unde idem reſultabit effectus, ac ſi aqua celeritate $\sqrt{c}$ in directione aG in tabulam impingeret. Capiatur $G\alpha$ ad GL ut $\sqrt{c}$ ad $\sqrt{v}$, & completo rectangulo αGLN diagonalis NG repræſentabit & directionem & celeritatem, qua aqua in tabulam impingere eſt concipienda. Cujus directio, ſi eſſet in tabulam perpendicularis, inde oriretur vis $= ff\,NG^2$, cum autem aqua oblique in tabulam impingat ſub angulo incidentiæ FGN vis illa diminui debet ſecundum rationem duplicatum ſinus iſtius anguli ſicque vis aquæ in tabulam erit $= ff\,NG^2\,(\mathit{ſin.}\,FGN)^2$.

§. LIV. At in triangulo $NG\gamma$ eſt $NG : N\gamma = \mathit{ſin.}\,\alpha\gamma G : \mathit{ſin.}\,FGN$: unde fit $NG\,\mathit{ſin.}\,FGN = N\gamma\,\mathit{ſin.}\,\alpha\gamma G$; cum autem ſit $G\alpha = \sqrt{c}$; $GL = \sqrt{v}$; & $FG\alpha = \varphi$ erit: $\mathit{ſin.}\,\alpha\gamma G = \mathit{coſ.}\,\varphi$; $\alpha\gamma = \mathit{tang}\,\varphi\sqrt{c}$ & $N\gamma = \sqrt{v} - \mathit{tang}\,\varphi\sqrt{c}$; unde fit:
$NG\,\mathit{ſin.}FGN = (\sqrt{v} - \mathit{tang}\,\varphi\sqrt{c})\,\mathit{coſ.}\,\varphi = \mathit{coſ}\,\varphi\sqrt{v} - \mathit{ſin.}\,\varphi\sqrt{c}$: Conſequenter vis aquæ in tabulam
$= ff\,(\mathit{coſ.}\,\varphi\sqrt{v} - \mathit{ſin.}\,\varphi\sqrt{c})^2$;
Cujus vis directio eſt recta GH ad tabulam normalis.

§. LV. Hic obiter notari convenit, hanc expreſſionem multo facilius erui potuiſſe, conſiderando tantum ex utroque aquæ motu eam celeritatem, quæ in tabulam eſt perpendicularis, & quam propterea celeritatem *Impulſus* vocari liceat. Sic ex motu aquæ αG oritur celeritas impulſus $= \mathit{ſin.}\,\varphi\sqrt{c}$ ac ex motu LG erit celeritas impulſus $= \mathit{coſ.}\,\varphi\sqrt{v}$, cui cum præcedens ſit contraria erit tota celeritas impulſus $= \mathit{coſ.}\,\varphi\sqrt{v} - \mathit{ſin.}\,\varphi\sqrt{c}$.

Unde manifestum est, vim aquæ in tabulam fore $= ff(cos.\,\phi\sqrt{v} - sin.\,\phi\sqrt{c})^2$: ut ante.

§. LVI. Cum nunc hujus vis directio sit recta GH in tabulam normalis, resolvatur ea in duas alias GJ & GK, quarum illa cum directione navis convenit, hæc vero ad illam sit normalis, erit igitur vis

$$GJ = ff\,sin.\,\phi\,(cos.\,\phi\sqrt{v} - sin.\,\phi\sqrt{c})^2: \text{ \& vis}$$
$$GK = ff\,cos.\,\phi\,(cos.\,\phi\sqrt{v} - sin.\,\phi\sqrt{c})^2.$$

Cum nunc illa vis ad navem propellendam impendatur, æqualis sit necesse est resistentiæ navis, quæ cum, posita resistentia absoluta $= kk$, sit $= kkc$: erit

$$ff\,sin.\,\phi\,(cos.\,\phi\sqrt{v} - sin.\,\phi\sqrt{c})^2 = kkc \text{ seu}$$
$$f\,cos.\,\phi\sqrt{v\,sin.\,\phi} = (k + f\,sin.\,\phi\sqrt{sin.\,\phi})\sqrt{c}.$$

§. LVII. Altera autem vis GK, quæ est $= \frac{kkc}{tang\,\phi}$, tota motui machinæ reluctatur, ideoque instar oneris movendi spectari debet. Quare si axi AB verticillus ut ante ν bacillis instructus concipiatur annexus, qui ope rotæ μ dentibus præditæ moveatur. Rotæ autem adjunctus sit axis in peritrochio, qui ab n hominibus singulis ad distantiam $= x$ ab axe applicatis, in gyrum agatur. Unusquisque autem homo vi $= A$ & celeritate $= \sqrt{e}$ operetur, erit celeritas vis moventis ad celeritatem oneris ut x ad $\frac{\mu}{\nu}a$; unde fit: *Tabula II. Fig. 5.*

$$\sqrt{e} : \sqrt{v} = x : \frac{\mu}{\nu}a \text{ seu } \frac{\mu a}{\nu x} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{e}}.$$

§. LVIII. Porro cum vis movens, quæ est $= nA$, in æquilibrio esse debeat cum vi renitente $\frac{kk}{tang\,\phi}$, hæ vires suis celeritatibus $\sqrt{e}$ & $\sqrt{v}$ reciproce sint proportionales necesse est; unde fit $nA : \frac{kkc}{tang\,\phi} = \sqrt{v} : \sqrt{e}$; ideoque $\sqrt{v} = \frac{nA\,tang\,\phi\sqrt{e}}{kkc}$. Qui valor in superiori æquatione (§. LVI.) substitutus dabit

$$\frac{nAf\,\text{fin.}\,\phi\,\sqrt{e\,\text{fin.}\,\phi}}{kkc} = (k + f\,\text{fin.}\,\phi\,\sqrt{\text{fin.}\,\phi})\sqrt{c}.$$

Unde reperitur cubus celeritatis navis

$$c\sqrt{c} = \frac{nAf\,\text{fin.}\,\phi\,\sqrt{e\,\text{fin}\,\phi}}{kk\,(k + f\,\text{fin.}\,\phi\,\sqrt{\text{fin}\,\phi})}.$$

§. LIX. Hæc formula ſimilis eſt illi, quam pro præcedente machinæ elicuimus. Si enim ponamus:

$$f\,\text{fin.}\,\phi\,\sqrt{\text{fin.}\,\phi} = g,\ \text{erit}\ c\sqrt{c} = \frac{nAg\sqrt{e}}{kk\,(k+g)};$$

ita ut, quod ante erat f, id nobis hic ſit $g = f\,\text{fin.}\,\phi\sqrt{\text{fin.}\,\phi}$. Ut igitur navi hinc maxima celeritas concilietur, non ſolum f ſeu quantitas alarum tanta accipi debet, quam circumſtantiæ id permittunt, ſed etiam angulum ϕ quam fieri poteſt maximum conſtitui opportet, neque tamen hunc angulum ad rectum uſque augere licebit, quia tum celeritas alarum $\sqrt{v}$ deberet eſſe infinita, quod quidem Theoriæ ob reſiſtentiam $\frac{kkc}{tang\phi} = o$ non repugnaret ſed tamen in praxi, quia ob alarum craſſitiem ſemper notabilis reſiſtentia adeſt, hic caſus locum habere nequit.

§. LX. Interim tamen ſunt angulum ϕ tantum aſſumere licebit ut non multum à recto deficiat, ita ſi ſtatuatur $\phi = 75^\circ$ fiet $g = 0.94932.f$. Qui valor parum ab eo deficit, qui prodiret ſi poneremus $\phi = 90^\circ$. Unde dummodo alæ ſatis amplæ conficiantur, hac machina navis æque celeriter propelli poterit atque ope machinæ præcedentis, unde ea machina, quæ ad uſum aptior videbitur ſine diſcrimine uti licebit.

§. LXI. Videamus autem, quomodo hæc machina commodiſſime ſit inſtruenda, quod à valore litterarum μ, ν & x pendet. Cum igitur ſit:

$$\sqrt{v} = \frac{nA\,tang\,\phi\sqrt{e}}{kkc}\ \text{erit}\ \frac{\mu a}{\nu x} = \frac{nA\,tang\,\phi}{kkc}$$

& poſito $\phi = 75^\circ$ erit $\frac{\mu a}{\nu x} = \frac{373.2\,nA}{kkc}$.

Quare si tam numerus hominum n quam distantiæ a & x eædem ponantu, atque in machina præcedente, ratio μ ad ν fere quadruplo major esse debet, seu rota dentata fere quadruplo plures dentes habere debet, quam ante, manente scilicet eodem bacillorum numero in verticillo.

§. LXII. De hac Machina autem animadvertendum est, ab illa præter vim navem propellentem etiam nasci vim, qua navis ad latera pellitur. Vis enim $GK = \frac{kkc}{tang\,\varphi}$ quoque in navem agit, quæ eo minor evadit, quo angulus φ major assumitur. Necesse igitur esset, effectum hujus vis lateralis per actionem Gubernaculi destrui, quod sine detrimento motus navis fieri non potest. *Tabula II. Fig. 6.*

§. LXIII. Hoc incommodum maximam partem tolli poterit, si axis GD, circa quem alæ gyrantur, aliquantum ad axem navis AB inclinetur, tum enim directio vis, quam ala Ff excipit scilicet recta GA parallela reddi poterit motui navis: quod eveniet, si inclinatio axis GD ad AB fuerit complementum anguli φ, ita, si angulus φ constituatur 75° opportebit angulum declinationis AEG esse 15°, hæc obliquitas qua cursus navis directus obtinetur nihil fere immutabit in reliquis determinationibus, quæ ad machinam construendam requiruntur. *Fig. 7.*

SECTIO SECUNDA.

De viribus ex reactione aquæ oriundis.

§. LXIV. Quamdiu aqua in vaſe quocunque ſtagnat, vires, quibus latera vaſis premuntur ſe mutuo in æquilibrio ſervant, neque enim vas inde ad motum ſollicitabitur. Statim autem atque aqua in vaſe movetur, erumpendo per foramen quodpiam, æquilibrium turbatur & vas ad motum ſollicitabitur, quæ vis aquæ motæ in vas exercita vocatur *Vis Reactionis*, quæ ideo etiam apta videtur ad naves propellendas.

§. LXV. Quanta autem ſit vis iſta reactionis in quovis caſu, difficilis ad modum eſt quæſtio, ac plerumque per experimenta vel ratiocinia minus directa explicari ſolet, quam per ſolida Theoriæ principia. Operam igitur dabo, ut arduam hanc quæſtionem ex primis Mechanicæ principiis luculenter evolvam, & quovis caſu veram reactionis quantitatem accurate determinem.

§. LXVI Ad hoc autem ſequenti ratiocinio uti conveniet. Primum conſiderandæ ſunt vires quibus aqua actu ſollicitatur ad motum, quorſum pertinet gravitas & quævis vires, quibus aqua extrinſecus urgetur, has vires cunctas litera P indicabo, quæ vires procognitis ſunt habendæ. Secundo conſiderandæ ſunt vires, quibus vas ab aqua ad motum impellitur, quæ ſunt vires quas determinare opportet, eaſque litera R indicabo. Tertio definiri debent vires, quæ ad motum aquæ producendum requiruntur, quæque ex motu aquæ tanquam jam cognito aſſumto per regulas mechanicas inveniuntur, has igitur vires litera Q denotabo.

§. LXVII.

§. LXVII. Cum vas ab aqua urgeatur vi R necesse est, ut aqua viciſſim à vaſe urgeatur æquali vi R ſed ſecundum directionem contrariam; unde vis hinc oriunda, qua aqua ſollicitatur æſtimanda erit $= - R$; ſic ergo aqua omnino ad motum impellitur à viribus binis P & $- R$ ſeu vi $P - R$. Hæc ergo vis æqualis eſſe debet viribus Q, quæ ſecundum principia mechanica ad motum aquæ producendum requiruntur, ita ut ſit $Q = P - R$.

§. LXVIII. Hinc ergo vis reactionis R, ſeu ea vis, qua vas ab aqua ad motum ſollicitatur, determinari poterit; erit enim $R = P - Q$. Unde cognitis cum viribus P, quibus aqua ſollicitatur, tum viribus Q, quæ ad ejus motum producendum requiruntur, facillimè definitur vis reactionis aquæ, quæ alias per principia indirecta ac ratiocinia non parum perplexa determinari ſolet.

§. LXIX. Quoniam quovis caſu vires P ſponte patent, quemadmodum vires Q determinari debeant inveſtigabo, quæ quidem ex conſideratione motus aquæ deducendæ ſunt. Si enim aqua ſtagnaret, tunc utique eſſet $Q = o$; foretque ideo $R = P$. Hoc ſcilicet caſu vas eaſdem vires ſuſtinet, quibus aqua urgetur, & ob gravitatem aquæ deorſum premetur vi ipſi aquæ ponderi æquali, ac ſi aqua à præterea quapiam vi premeretur, tunc vas ipſam hanc vim quoque eſſet experturum, quod quidem per ſe eſt perſpicuum.

§. LXX. Ut igitur in genere vires Q pro quovis caſu determinem, contemplabor tubum figuræ cujuſcunque $EEFF$, ex quo aqua effluat per orificium FF, cujus amplitudo $= ff$. Tubum autem in calculo quaſi infinite anguſtum concipio, ita ut aqua per illum moveatur ſecundum ſectiones MN & mn ad tubum perpendiculares; calculo autem expedito patebit amplitudinem tubi penitus egredi, ita ut concluſiones etiam pro tubis utcunque amplis valeant. *Tabula II. Fig. 8.*

§. LXXI. Ponamus autem nunc, aquam per orificium FF erumpere celeritate $= \sqrt{v}$; elapſo autem tempuſculo dt, celeritatem aquæ eſſe $\sqrt{(v + dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$; ita ut $\sqrt{v}$ futura ſit functio quæpiam temporis t, cujus etiam functio erit $\frac{dv}{dt}$ ſeu $\frac{dv}{2dt\sqrt{v}}$.

§. LXXII. Sit nunc in loco tubi quocunque M cujus amplitudo $= zz = MN$, eritque aquæ celeritas in ſectione $MN = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$. Hac celeritate aqua in MN tempuſculo dt conficiet ſpatiolum $Mm = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$. Tum autem ejus celeritas erit $\frac{ff\sqrt{v}}{zz} + d\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$; ſeu erit $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz} + \frac{2zz\sqrt{v}}{ffdv} - \frac{2ffdz\sqrt{v}}{z^3}$. Hæc ergo variatio celeritatis nonſolum pendet à variabilitate celeritatis $\sqrt{v}$, ſed etiam à diverſitate amplitudinis tubi. Quaternus ergo quælibet particula aquæ in ſectione MN contenta vel motu accelerato progreditur ſeu retardato vel etiam à tramite recto deflectere cogitur, eatenus viribus opus erit ad has mutationes producendas.

§. LXXIII. Referamus hæc ad axem fixum verticalem AB per applicatas horizontales PM & pm, ſitque à puncto fixo A, abſciſſa $AP = x$ & applicata $PM = y$. Concipiatur guttula quæpiam in ſectione MN contenta, cujus maſſa ſit dM: Atque ex principiis Mechanicæ conſtat, ſi elementum temporis capiatur conſtans, ad motum hujus guttulæ requiri duas vires $M\mu$ & $M\nu$, illam verticalem, hanc vero horizontalem; ita ut ſit:

$$\text{Vis } M\mu = \frac{2dMddx}{dt^2} : \& \text{ Vis } M\nu = \frac{2dMddy}{dt^2}.$$

§. LXXIV. Ponatur elementum $Mm = ds$, quod guttula tempuſculo dt abſolvit, quod, quia ſit celeritate $\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, erit $ds = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$. Sit præterea angulus inclinationis $mM\mu = \varphi$, erit $dx = ds\, cof.\varphi = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz} cof.\varphi$ &:

$dy = ds\,\text{sin.}\,\varphi = \frac{ff\,dt\sqrt{v}}{zz}\,\text{sin.}\,\varphi$. Unde fit
$\frac{dx}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}\,\text{cos.}\,\varphi$ & $\frac{dy}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}\,\text{sin.}\,\varphi$:

§. LXXV. Ex his formulis, denuo differentiatis, eliciemus vires sequenti modo expressas:

$$\text{Vis } M\mu = \frac{2\,dM\cdot ddx}{dt^2} = \frac{2\,ff\,dM}{dt}$$

$$\left(\frac{dv}{2zz\sqrt{v}}\,\text{cos.}\,\varphi - \frac{2\,dz\sqrt{v}}{z^3}\,\text{cos.}\,\varphi - \frac{d\varphi\sqrt{v}}{zz}\,\text{sin.}\,\varphi\right) \;\&$$

$$\text{Vis } M\nu = \frac{2\,dM\,ddy}{dt^2} = \frac{2\,ff\,dM}{dt}$$

$$\left(\frac{dv}{2zz\sqrt{v}}\,\text{sin.}\,\varphi - \frac{2\,dz\sqrt{v}}{z^3}\,\text{sin.}\,\varphi + \frac{d\varphi\sqrt{v}}{zz}\,\text{cos.}\,\varphi\right)$$

Hic patet massulam dM utrinque multiplicatam esse per quantitatem finitam; nam $\frac{dv}{dt}$, ut vidimus, est functio ipsius t. Sed differentialia dz, & $d\varphi$ immediate cum elemento dt comparari nequeunt; variabilitas enim amplitudinis zz & inclinationis φ non à tempore t, sed à figura tubi pendet, quare hæc differentialia dz & $d\varphi$ cum differentiali ds comparari debebunt.

§. LXXVI. Cum igitur sit: $ds = \frac{ff\,dt\sqrt{v}}{zz}$ erit $dt = \frac{zz\,ds}{ff\sqrt{v}}$; qui valor interminis ubi dz & $d\varphi$ occurrunt loco dt substitui debet: Unde vires prodibunt.

$$\text{Vis } M\mu = 2\,ff\,dM\left(\frac{dv}{2zz\,dt\sqrt{v}}\,\text{cos.}\,\varphi - \frac{2\,ffv\,dz}{z^5\,ds}\,\text{cos.}\,\varphi - \frac{ffv\,d\varphi}{z^4\,ds}\,\text{sin}\,\varphi\right) \;\&$$

$$\text{Vis } M\nu = 2\,ff\,dM\left(\frac{dv}{2zz\,dt\sqrt{v}}\,\text{sin.}\,\varphi - \frac{2\,ffv\,dz}{z^5\,ds}\,\text{sin.}\,\varphi + \frac{ffv\,d\varphi}{z^4\,ds}\,\text{cos.}\,\varphi\right)$$

§. LXXVII. His igitur viribus omnes particulas aquæ in spatiolo $MNnm$ contenta sollicitari opportet. Unde ad vires inveniendas quibus tota aquæ massa $MNnm$ sollicitatur, tantum opus est ut pro dM hanc ipsam massam substituamus. Cum igitur hæc massa sit prisma basea $= zz$ & altitudinis $= ds$, erit ejus soliditas $= zz\,ds$, qui ergo valor loco dM substitutus dabit vires massam elementarem $MNnm$ sollicitantes.

$$\text{Vis } M\mu = \frac{ffVv}{dtdv} ds\, cos.\phi - 4f^4 v \frac{dz\, cos.\phi}{z^3} - 2f^4 v \frac{d\phi\, sin.\phi}{zz} \text{ \&}$$

$$\text{Vis } M\nu = \frac{ffdv}{dtVv} ds\, sin.\phi - 4f^4 v \frac{dz\, sin.\phi}{z^3} + 2f^4 v \frac{d\phi\, cos.\phi}{zz}$$

§. LXXVIII. In his formulis duplicis generis quantitates variabiles occurrunt, quarum alteræ à tempore pendent & nonnisi cum tempore mutantur, quæ sunt v & $\frac{dz}{dt}$, alteræ pendent à figura tubi, quæ sunt s, z & ϕ, quas idcirco sollicite à prioribus distingui opportet.

§. LXXIX. Si ergo velimus vires investigare, quæ præsenti momento ad conservationem motus aquæ, in tubo contentæ, requiruntur, formulas differentiales inventas ita integrari opportet, ut quantitates prioris generis v & $\frac{dz}{dt}$ tanquam constantes considerentia & tantum variabilitas quantitatum posterioris generis spectetur, quoniam vires pro elemento aquæ $MNnm$ per totum tubum summari debent.

§. LXXX. Cum igitur sit $ds\, cos.\phi = dx$ & $ds\, sin.\phi = dy$ erit summa omnium virium verticalium,

$$\int M\mu = A + \frac{ffdv}{dtVv} x + 2f^4 v \frac{cos.\phi}{zz}$$

& summa omnium virium horizontalium,

$$\int M\nu = B + \frac{ffdv}{dtVv} y + 2f^4 v \frac{sin.\phi}{zz}.$$

Ad constantes A & B determinandas consideretur suprema tubi sectio EE quæ sit $= ee$ & angulus inclinationis ϕ hic sit $= \epsilon$; & cum axis AB positio à lubitu nostro pendeat fiat y hic $= o$ seu sit $AE = o$. Hinc ab initio EE incipiendo fiet:

$$\int M\mu = o = A + 2f^4 v \frac{cos.\epsilon}{ee};\ \&\int M\nu = o = B + 2f^4 v \frac{sin.\epsilon}{ee}$$

§. LXXXI. Hinc ergo fit $A = -2f^4 v \frac{cos.\epsilon}{ee}$ & $B = -f^4 v \frac{sin.\epsilon}{ee}$.

Hinc vires ad motum aquæ $EEMN$ requisitæ erunt:

$$\text{Vis verticalis } M\mu = \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\, x + 2f^4 v \left(\frac{\text{cos}.\varphi}{zz} - \frac{\text{cos}.\varepsilon}{ee}\right) \text{ \&}$$

$$\text{Vis horizontalis } M\nu = \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\, y + 2f^4 \left(\frac{\text{sin}.\varphi}{zz} - \frac{\text{sin}.\varphi}{ee}\right).$$

Extendamus has vires per totum tubum. Ponatur ergo tota altitudo $AB = a$ & horizontalis $BF = = b$ & φ hic abeat in ζ & quia hic zz abit in ff erit

$$\text{Vis verticalis tota } M\mu = \frac{affdv}{dt\sqrt{v}} + 2f^4 v \left(\frac{\text{cos}.\zeta}{ff} - \frac{\text{cos}.\varepsilon}{ee.}\right)$$

$$\text{Vis horizontalis tota } M\nu = \frac{bffdv}{dt\sqrt{v}} + 2f^4 v \left(\frac{\text{sin}.\zeta}{ff} - \frac{\text{sin}.\varepsilon}{ee}\right)$$

§. LXXXII. Hæ ergo sunt vires ad motum aquæ requisitæ, quas supra in genere littera Q sum complexus. Ita ut Q designet duas vires, alteram verticalem $M\mu$ & alteram horizontalem $M\nu$, quarum virium quantitatem in paragrapho præcedente determinavi. Circa has vires observo, si motus aquæ per foramen FF fuerit uniformis, qui casus plerumque in hujus generis machinis locum habere solet, ita ut sit $\frac{dv}{dt} = o$, tum has vires fore:

$$\text{Vis verticalis } M\mu = 2f^4 v \left(\frac{\text{cos}.\zeta}{ff} - \frac{\text{cos}.\varepsilon}{ee}\right) \text{ \&}$$

$$\text{Vis horizontalis } M\nu = 2f^4 v \left(\frac{\text{sin}.\zeta}{ff} - \frac{\text{sin}.\varepsilon}{ee}\right)$$

§. LXXXIII. Præterea notari debet, has vires neque à figura tubi neque ab ejus amplitudine pendere, sed tantum per sectiones extremas EE & FF una cum earum inclinationibus ε & ζ determinari. Hinc patet, etiamsi in calculo amplitudinem tubi tanquam infinite parvam spectaverim, tamen has determinationes ad tubos vel casa cujus cunque figuræ æque pertinere.

§. LXXXIV. Inventis nunc viribus Q, contemplemur vires P, quibus aqua actu sollicitatur; ac primo quidem occurrit gravitas aquæ cujus pondus littera M indicemus; hinc ergo P in se complectetur vim verticalem M deorsum tendentem. Præterea ponamus, æquam impelli à quadam vi V secundum directionem VT, quæ ad supremam sectionem EE sit normalis, quæ cum ad verticalem inclinetur angulo ε, inde orietur vis verticalis secundum $M\mu = V\,cos.\,\varepsilon$ & vis horizontalis secundum $M\nu$ $V\,sin.\,\varepsilon$. Omnino ergo P continebit vim verticalem secundum $M\mu = V\,cos.\,\varepsilon$ & vim horizontalem secundum $M\nu = V\,sin.\,\varepsilon$.

§. LXXXV. Hinc ergo vis reactionis aquæ, seu vis, quam vas ab aqua sustinet, definietur; cum enim inventa sit hæc vis $R = P - Q$, hæc vis duas vires in se complectetur alteram verticalem secundum $M\mu$:

Quæ erit $= M + V\,cos.\,\varepsilon - \frac{affdv}{dtVv} - 2f^4 v\left(\frac{cos.\,\zeta}{ff} - \frac{cos.\,\varepsilon}{ee}\right)$

Alteram horizontalem secundum $M\nu$,

Quæ erit $= V\,sin.\,\varepsilon - \frac{bffdv}{dtVv} - 2f^4 v\left(\frac{sin.\,\zeta}{ff} - \frac{sin.\,\varepsilon}{ee}\right)$

§. LXXXVI. Quod si jam hujusmodi vas cum aqua effluente navi adjungatur, ipsa quoque navis has vires sustinebit, ac prior quidem vis verticalis $M\mu$ nihil conferet ad navem movendam, unde tantum vis posterior ad motum navis imponditur, sicque navis propelleretur secundum directionem $M\nu$ vi

$$V\,sin.\,\varepsilon - \frac{bffdv}{dtVv} - 2f^4 v\left(\frac{sin.\,\zeta}{ff} - \frac{sin.\,\varepsilon}{ee}\right).$$

Verum cum vis V in ipsa navi exerceatur ob renitentiam ipsi æqualem iterum destruitur, unde navis secundum directionem MP propelletur vi

$$\frac{bffdv}{dtVv} + 2f^4 v\left(\frac{sin.\,\zeta}{ff} - \frac{sin.\,\varepsilon}{ee}\right).$$

Ac si motus aquæ se jam ad uniformitatem composuerit erit $d\,v = o$ & vis navem propellens erit $= 2\,f^4\,v$ $\left(\frac{sin.\,\zeta}{ff} - \frac{sin.\,\varepsilon}{ee}\right)$.

§. LXXXVII. Quo nunc hæc vis maxima reddatur, navisque quam fortissime propellatur, angulus ε ita constitui debet ut ejus sinus non solum evanescat sed etiam fiat negativus & quidem maximus quam fieri potest, fieri ergo debet angulus $\varepsilon = -90°$, deinde manifestum est angulum ζ commodissime statui $= 90°$, ut sit $sin.\,\zeta = +1$ quare vas hujus modi habebit figuram, ut tam supra quam infra desinat in tubum horizontalem utrumque in eandem plagam spectantem, eritque hoc casu vis navem propellens $= 2\,f^4\,v\,(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee})$ *Tabula II. Fig. 9.*

§. LXXXVIII. Hæc ergo vasis constitutio & aptissima ad propulsionem navis, verum si aqua super ne nulla vi adigatur, suprema superficies $e\,e$ erit horizontalis ideoque angulus $e = o$. Unde hoc casu vis navem propellens, si quidem aqua per foramen FF horizontaliter effluat, ut sit $\zeta = 90°$, erit $= 2\,f^4\,v\,\frac{1}{ff} = 2\,ff\,v$; quæ ergo vis reactionis æquatur duplo cylindro cujus basis est foramen FF & altitudo æqualis altitudini celeritati debitæ v. *Fig. 9.*

LXXXIX. Verum hic opus est celeritatem nosse qua aqua quovis casu per foramen FF est eruptura, quæ etsi facile definitur, cum motus ad uniformitatem fuerit perductus & quasi per experientiam constet, tamen, quoniam hic jam præcipua Hydraulicæ fundamenta jeci; non abs re fore arbitror, si etiam modum ipsam celeritatem determinandi ex Theoria proposuero.

§. XC. Ad hoc considerari debet status compressionis aquæ in quovis tubi loco. Quamquam enim aqua in minus spatium se cogi non patitur, tamen comparari potest cum eo statu, quem aqua ad diversas profunditates obtinet; hinc statum compressionis per altitudinem designabo, vel potius profunditatem, ad quam aqua stagnans in pari statu compressionis reperitur.

Tabula II. Fig. 8.

§. XCI. Exponatur ergo status compressionis aquæ in sectione MN per altitudinem p, sive hic aqua in eodem sit statu, ac si columna aquea altitudinis $= p$ immineret. Hinc ergo aqua circa sectionem MN, quam supra posui $= zz$, propelletur vi $= pzz$. Simili autem modo in sectione mn status compressionis erit $p + dp$, unde oritur vis, abs qua aqua anterior $mnFF$ propellitur, posterior vero repellitur.

§. XCII. Elementum igitur aquæ $MNmn$ ad basin MN propellitur vi $= pzz$ ad alteram vero basin mn repellitur vi $= (p + dp)\ (zz + 2z\,dz)$. Quæ vires essent in æquilibrio si rationem basium tenerent, hoc est si esset:

$$pzz : (p + dp)\ (zz + 2z\,dz) = zz : zz + 2z\,dz$$

Hoc ergo aquæ elementum esset in æquilibrio si esset $dp = o$. Si ergo dp non est $= o$, hoc aquæ elementum actu repelletur vi $= dp\ (zz + 2z\,dz) = zz\,dp$.

§. XCIII. Præterea autem hæc aqua, quia est gravis, deorsum nititur suo pondere $= zz\,ds$; unde ob gravitatem hæc aqua secundum directionem tubi Mm propelletur vi $= zz\,ds\ cos.\ \varphi = zz\,dx$; hinc ergo conjunctim propter gravitatem & statum compressionis elementum aquæ $MNnm$ secundum directionem tubi Mm propelletur vi $= zz\,dx - zz\,dp$, hæcque est vera vis, qua motus hujus aquæ acceleratur.

§. XCIV. Supra autem (§. LXXVII) vidimus ad motum elementi aquæ $MNnm$ requiri duas vires $M\mu$ & $M\nu$, ex quibus conficitur vis aquam secundum directionem tubi Mm propellens $=$ vis $M\mu\ cos.\ \varphi +$ vis $M\nu\ sin.\ \varphi = \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\,ds - \frac{4f^4 v\,dz}{z^3}$. Hæc ergo vis æqualis esse debet vi ante inventæ; unde oritur hæc æquatio

$$zz\,dx - zz\,dp = \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\,ds - \frac{4f^4 v\,dz}{z^3},$$

Ex

Ex qua definiri debet altitudo p ſtatum compreſſionis exponens, ubi quidem ad huc celeritatem $\surd v$ tanquam cognitam ſpectamus.

§. XCV. Hinc ergo nanciſcimur iſtam equationem:

$$dp = dx - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ds}{zz} + \frac{4f^4 v dz}{z^5}.$$

Hæc formula iterum ita integrata, ut $\surd v$ & $\frac{dv}{dt}$ pro conſtantibus habeantur, quoniam tantum ſtatum compreſſionis aquæ pro præſenti momento determinare eſt propoſitum, prodibit ergo:

$$p = x - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ds}{zz} - \frac{f^4 v}{z^4} + C.$$

Hic perſpicitur, valorem integralem $\int \frac{ds}{zz}$ à figura tubi ejuſque amplitudine pendere, quæ, ſi fuerit cognita, etiam valor illius formulæ poterit aſſignari.

§. XCVI. Hic jam primo obſervandum eſt in orificio FF nullam compreſſionem totum habere, ſi quidem à preſſione Atmoſphæræ animum abſtrahamus; erit ergo hic $p = o$: ponatur ergo integralis $\int \frac{ds}{zz}$ per totam longitudinem tubi ſumti valor $= F$; erit $o = a - \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} F - v + C$. Unde conſtans C determinatur; ſicque pro loco tubi quodcunque M ſtatus compreſſionis erit:

$$p = x - a + v\left(1 - \frac{f^4}{z^4}\right) + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\left(F - \int \frac{ds}{zz}\right)$$

§. XCVII. Exprimat altitudo C ſtatum compreſſionis in ſectione ſuprema EE erit: $C = -a + 1\left(-\frac{f^4}{e^4}\right) + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} F$. Tota ergo vis, qua ſuperficies aquæ EE propellitur, erit $= Cee$; quæ ergo vis æqualis eſſe debet vi ſupra in calculum inductæ V ita ut ſit $C = \frac{V}{ee}$; unde obtinemus hanc æquationem:

$$\frac{V}{ee} + a = v\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}\,F.$$

Ex qua celeritas v poterit determinari ſeu celeritas $\sqrt{v}$ ad quodvis tempus determinari.

§. XCVIII. Integrationi hujus æquationis, quia nihil habet difficultatis, non immoror, ſed tantum obſervo, cum motus perductus fuerit ad uniformitatem, quod plerumque ſatis cito fieri ſolet, celeritatem, ob $dv = o$, hac æquatione determinari: $v = \left(\frac{V}{ee} + a\right) : \left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right)$.

§. XCIX. Hinc igitur patet, ſi amplitudo ſuperior EE multo major fuerit quam foramen FF celeritatem aquæ per FF effluentis debitam fore altitudini v, ut ſit $v = a + \frac{V}{ee}$. Ac ſi vas ſupra fuerit apertum, neque ulla vi V urgeatur fore $v = a$, ſcilicet aqua effluet celeritate, quæ erit debita altitudini æquali altitudini aquæ in vaſe ſupra foramen.

I.

Primus Modus Navem propellendi.

Tabula III. Fig. 10.

§. C. Conſtituatur in Puppi navis vas ampliſſimum $AEFB$, quod aqua jugiter plenum ſervetur, ex quo aqua horizontaliter effluat per foramen $FF = ff$, ſitque altitudo aquæ ſupra hoc foramen $EF = a$, atque ut vidimus aqua effluet celeritate $\sqrt{v} = \sqrt{a}$. Vis igitur reactionis aquæ ſecundum directionem horizontalem erit $= 2ffv = 2ffa$, uti in §. LXXXVIII eſt oſtenſum.

§. CI. Tanta igitur vi navis actu propelletur, unde ſi navis jam celeritate $= \sqrt{c}$ progrediatur, ejuſque reſiſtentia abſoluta fuerit $= kk$, ita ut reſiſtentia ipſa ſit $= kkc$, neceſſe eſt ut ſit $kkc = 2ffa$, ſi quidem motum navis jam ad uniformitatem perveniſſe ponamus. Hinc ergo ex datis quantitatibus a, ff & kk celeritas navis ita erit comparata ut sit $c = \frac{2ffa}{kk}$ seu ipsa celeritas erit $\sqrt{c} = \frac{f}{k}\sqrt{2a}$.

§. CII. Cum autem constanter tantumdem aquæ supernæ in vas affundi debeat, quantum per foramen effluit, videndum est, quantum aquæ singulis minutis secundis per foramen effluat. Ponamus igitur, grave minuto secundo cadere per altitudinem l, ac si aqua efflueret celeritate $\sqrt{l}$ uno minuto secundo prorumperet volumen aquæ $= 2ffl$. Quare cum aqua effluat celeritate $= \sqrt{a}$, quantitas aquæ singulis minutis secundis elapsæ erit $= 2ff\sqrt{al}$: hinc singulis minutis secundis perpetuo tantumdem aquæ supra in vas infundi debet.

§. CIII. Quæ aquæ, cum ex mari hauriri, atque ad altitudinem tanto majorem, quam est altitudo vasis a elevari debeat, quanto magis ipsum vas supra aquam fuerit elevatam hoc sine dispendio virium fieri nequit. Sit altitudo vasis supra aquam $FO = i$, atque tantis viribus opus erit, quæ sufficiant quantitati aquæ $= 2ff\sqrt{al}$ singulis minutis secundis ad altitudinem $a + i$ elevandæ, altitudo autem $FO = i$ tanto major accipi debet, quo magis navis à fluctibus agitatur, necesse enim est ut foramen FF semper supra aquam emineat.

§. CIV. Ponamus igitur ad hoc n homines adhiberi, qui singuli celeritate $\sqrt{b}$ agant & vim $= A$ exerceant. Quilibet ergo homo singulis minutis secundis onus $= A$ promovebit per spatium $= 2\sqrt{bl}$. Unde effectus unius hominis uno minuto secundo editus æstimandus est $= 2A\sqrt{bl}$ & effectus n hominum $= 2nA\sqrt{bl}$. Qui cum æqualis esse debeat effectus eodem tempore præstando, quo massam aquæ $2ff\sqrt{al}$ ad altitudinem $(a + i)$ attolli opportet, sequentem obtinebimus æquationem.

$$2(a + i)ff\sqrt{al} = 2nA\sqrt{bl},$$

seu $(a + i)ff\sqrt{a} = nA\sqrt{b}$.

§. CV. Hinc non determino utrum homines immediate aquam hauriant an ope cujuspiam machinæ, semper enim idem obtinetur effectus, si quidem homines pari celeritate operentur. Machina autem, si qua uti videatur, ita comparata esse debet, ut homines ea celeritate $\sqrt{b}$, quæ supra commodissima est ostensa, agere queant. Quod, quomodo efficiendum sit, ex iis, quæ supra de constitutione machinarum sunt exposita, non difficulter colligere licet.

§. CVI. Ex æquatione igitur inventa nanciscimur amplitudinem foraminis $ff = \frac{nA\sqrt{b}}{(a+i)\sqrt{a}}$; unde altitudo celeritati navis debita reperitur $c = \frac{2nA\sqrt{ab}}{kk(a+i)}$. Hic quantitates n, A, b, kk, & i sunt datæ ac sola altitudo vasis a arbitrio nostro relinquitur; quam ergo definiri convenit, ut navis maximam celeritatem adipiscatur: expressio igitur $\frac{\sqrt{a}}{a+i}$ maxima est reddenda, quod evenit si statuatur $a = i$ unde fit $c = \frac{nA}{kk}\sqrt{\frac{b}{i}}$.

§. CVII. Applicemus hoc ad casum navis supra (§. XLVIII) consideratæ, sitque $kk = 100$, $n = 100$, $A = \frac{4}{9}$ & $b = \frac{8}{125}$, ac tribuamus altitudini i quantitatem 5 pedum, ut sit $i = 5$; hinc ergo eruitur $c = 0,05028$3, cui respondet celeritas fere $1\frac{4}{5}$ pedis in minuto secundo. Machina autem supra adhibita navem ab eadem celeritate fere duplo majori propelli vidimus. Unde hic modus præ superioribus non admodum commendabilis videtur.

§ CVIII. Disparitas hic insignis inter hujus machinæ effectum & superiorum machinarum notanda occurrit, cum enim ibi cubus celeritatis navis numero hominum proportionalis esset inventus, hic tantum quadratum celeritatis numero hominum proportionale est repertum. Ita hic ad duplam navi celeritatem imprimendam, numero hominum quadruplo majori erit opus, cum ante octuplo majori erit opus fuisset. Unde sequitur, si numerus hominum pro lubitu multiplicari posset, hoc modo tandem navi multo majorem celeritatem impressum iri, quam modis præcedentis sectiones, quod tamen minime probabile videtur.

§. CIX. Ratiocinium autem, quo hic usus sum, esset justum, si elevatio aquæ, tam pro casu navis quiescentis, quam motæ eandem vim requireret; verum manifestum est, si navis ipsa progrediatur, aqua antequam elevari queat motum ipsius navis motui æqualem imprimi debere. Quod cum sine vi effici nequeat, eo majori vi opus erit ad aquam elevandam, quo celerius navis progrediatur. Existimare autem licet ad hoc tantam vim requiri, quanta opus est ad aquam ad altitudinem $= c$ elevandam.

§. CX. Quod si ergo superius ratiocinium hinc emendare velimus, aqua non solum ad altitudinem $a + i$ sed potius ad altitudinem $a + i + c$ elevari debere, censenda est. Hinc ergo prodibit ista æquatio $c = \frac{2nAVab}{kk(a+i+c)}$ ita ut hæc resolvenda sit æquatio quadratica

$$cc + (a + i)c = \frac{2nAVab}{kk}$$

Ex qua elicitur $c = -\frac{1}{2}(a+i) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}(a+i)^2 + \frac{2nAVab}{kk}\right)}$ Qui valor jam proxime ad veritatem accedet.

§. CXI. Ut hæc celeritas fiat maxima, non amplius locum habet valor, $a = i$, sed per differentiationem æquationis quadraticæ, posito a variabili, reperitur $c = \frac{naVb}{kkVa}$; ideoque $\sqrt{a} = \frac{naVb}{kkc}$, qui valor substitutus dabit $cc + ic = \frac{nnAAb}{k^4 c}$ seu $c^3 + icc = \frac{nnAAb}{k^4}$. A cujus æquationis cubicæ resolutione pendet determinatio celeritatis.

§. CXII. Cum altitudo i tam exigua capiatur quam fieri potest, si esset $i = o$, foret $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{kk}$. Quæ formula similis est illis, quæ pro modis præcedentibus sunt inventæ (§. XXIII). Unde patet hoc casu navi eandem celeritatem impressum iri atque supra. Sed cum c vix unquam exsurgat ad unum pedem, altitudo autem i aliquot pedes superare debeat, certe erit $i > ec$, posito igitur $i = 3c$; erit $c\sqrt{c} = \frac{na\sqrt{b}}{2kk}$. Quæ expressio convenit prorsus cum ea quæ §. XXIV, tanquam ad praxin idoneam est inventa: ita ut hoc modo parem hominum vim adhibendo, navis æque celeriter propelli possit atque iis modis præcedentibus, quibus nulla inutiliter impenditur.

§. CXIII. Cum hic casus ad praxin satis accommodatus videatur, ponamus $i = 3c$ ut sit $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{2kk}$; erit $c = \sqrt[3]{\frac{nnAAb}{4k^4}}$, qui valor substitutus pro altitudine vasis a dabit $\sqrt{a} = \frac{nA\sqrt{b}}{kk\sqrt[3]{\frac{nnAAb}{4k^4}}} = \sqrt[3]{\frac{4nA\sqrt{b}}{kk}}$ Unde ipsa altitudo colligitur $a = \sqrt[3]{\frac{16nnAAb}{k^4}} = 4c$.

§. CXIV. Consideremus iterum casum ante allatum, quo erat $n = 100$; $kk = 100$; $A = \frac{4}{9}$ & $b = 125$: reperitur $c = \sqrt[3]{\frac{81 \cdot 125}{32}}$ ped. $= 0,14675$ ped. Unde celeritas nascitur singulis minutis secundis spatium 3 pedum absolvens, erit ergo $i = 0{,}44025$; porro prodit altitudo vasis $a = 0{,}58700$; orificii denique, per quod aqua effluit, amplitudo erit $ff = \frac{kkc}{2a} = 12\frac{1}{2}$ pedum quad.

§. CXV. Arca igitur amplissima ad puppin navis adjungi deberet, cujus altitudo, cum semissem pedis parum superare debeat, foramen per totum latus posterius instar rimæ exscindi deberet, cujus altitudo, si caperetur $\frac{1}{4}$ pedis, latitudo vasis 50 pedum esse deberet, ut hinc amplitudo foraminis prodiret $12\frac{1}{2}$ pedum quadratorum. Quia autem hæc area vix dimidio pede supra aquam prominere deberet, minima agitatio effectum hujus machinæ penitus turbaret. Quin etiam haustus aquæ ad tam parvam altitudinem magnis difficultatibus foret obnoxia.

§. CXVI. Quod incommodum, quo evitetur, altitudini i multo major valor tribui debet; quod si ergo ponamus $i = 15c$, erit $c\sqrt{c} = \frac{nA\sqrt{b}}{4kk}\, a\, 16c$. Qui casus jam propius ad praxin esset accommodatus, verum hinc celeritas navis multo minor evaderet, ideoque hæc machina præcedentibus merito postponenda videtur, quippe quibus navi ab iisdem viribus major celeritas imprimi potest.

II.

Secundus Modus Navem propellendi.

§. CXVII. Quemadmodum aqua libere effluere est posita, ita nunc ponamus aquam præter gravitatem vi quadam expelli. Jam vero vidimus maximam hinc vim obtineri si canalis tam supra quam infra fuerit horizontaliter reclinatus.

§. CXVIII. Hic autem non sufficit propulsionem aquæ, quacunque vi perficiatur, determinasse, verum imprimis opus eſt, ut modus exponatur, quo aqua continuo elevetur, atque machina ita inſtruatur, ut, vel ſine intermiſſione aquam expellat, vel alternatim aquam cum attrahendo tum ejiciendo effectum ſuum præſtet. Commodiſſima igitur ad hoc inſtitutum videtur machina anticis ordinariis ſimilis, qua aqua motu reciproco attollitur & expellitur.

Tabula III. Fig. 11. §. CXIX. Concipiamus ergo in ſuperiori parte vas inſtructum eſſe tubo horizontali AC, in quo embolus EE ſit agitandus, infra autem deſinat in duplicem ramum, alterum NB, qui aquæ ſit immerſus, alterum autem MF horizontaliter reflexum, per cujus orificium FF aqua in aërem expellatur. Valvulis autem m, n efficiatur, ut, dum embolus extrahitur, valvula m clauſa, altera n aperiatur & aqua ex mari attollatur, contra vero, dum embolus intruditur, occluſa valvula n, aqua per alteram m apertam expelli poſſit; ſicque alterna emboli agitatione machina tam aquam attollat quam iterum ejiciat.

§. CXX. Cauſa autem quæ aquam, dum embolus extrahitur, ſurſum pellit eſt preſſio atmoſphæræ, quæ, uti conſtat, æquipollet columnæ aquæ 32 pedes altæ. Unde altitudo tubi horizontalis AC ſupra aquæ ſuperficiem 32 pedes excedere nequit; ergo altitudo AN aliquot pedibus minor eſſe debet, ita ut nunquam triginta pedes ſuperare poſſit.

§. CXXI. Ponamus igitur vim embolum extrahentem eſſe $= U$ & emboli amplitudinem $EE = ee$: ejus vero altitudinem ſuper aqua $= a$ atque ex hydroſtaticis conſtat vim U æqualem eſſe debere ponderi voluminis aquæ $= eea$. Tanta ergo vi opus erit ad embolum extrahendum ſcilicet erit $U = eea$ & $a < 32$ ped.

§. CXXII. Exponat u altitudinem debitam celeritati, qua embolus extrahitur, eritque $\sqrt{u}$ celeritas aquæ in ſectione EE, amplitudo autem tubi in B ſit æqualis

gg,

gg, eritque celeritas, qua aqua ad B in tubum intrat $= \frac{ee}{gg} \sqrt{u}$. Quæ, quia aqua in tubum ingreditur, comparanda est cum $-\sqrt{v}$, quam supra adhibuimus, uti etiam gg pro ff scribi opportet. Hinc ad motum hujus aquæ requiritur vis horizontalis $= 2eeu$, per §. LXXXVI, ob $\zeta = o$ & $\varepsilon = -90^\circ$.

§. CXXIII. Tanta ergo vi quoque navis propelletur, dum embolus extrahitur. Hinc ergo patet istum modum præcedenti esse anteferendum, quoniam vis aquam elevans quoque aliquid confert ad navem propellendam, cum superiori modo inutiliter impendatur. Quare hinc quoque præcedentem modum perficere liceret, si scilicet aquam, quæ ibi simpliciter hauriri ponebatur, hoc modo ope hujus antliæ elevaretur, verum, quia hæc perfectio jam in hoc modo continetur, eam tantum indicasse sufficiat.

§. CXXIV. Hæc vis etiam ulterius augeri potest, si ima pars tubi B etiam horizontaliter reflectatur, ut tubo MF fiat parallela; tum enim ob *sin.* $\zeta = 1$ prodibit vis navem propellens $= 2\, e^4 u \left(\frac{1}{gg} + \frac{1}{ee}\right)$. Quia autem amplitudo gg admodum magna saltem in calculo assumi debet, quoniam alioquin aqua ascendens motum emboli non sequeretur, hoc augmentum parvi erit momenti. Si enim celeritas $\sqrt{u}$ propterea diminueretur, multo majus detrimentum inde vis propellens pateretur.

§. CXXV. Consideremus nunc etiam alteram partem, qua embolus intruditur & aquam per orificium FF expellit, posita autem amplitudine orificii $= ff$, celeritate, qua aqua expellitur $= \sqrt{v}$, & vi embolum urgente $= V$. Supra invenimus vim navem propellentem esse $= 2 f^4 v \left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee}\right)$ (§. LXXXVII). Tum vero celeritas aquæ $\sqrt{v}$ ita est definita ut sit:

$v = \frac{\frac{V}{ee} + a}{1 - \frac{f^4}{e^4}}$; denotante a altitudinem emboli supra orificium FF.

§. CXXVI. Valore ergo hoc substituto, vis navem propellens erit:

$$\frac{2f^4 \left(\frac{V}{ee} + a\right)\left(\frac{1}{ff} + \frac{1}{ee}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}} = \frac{2ff(V + aee)}{ee - ff}.$$ Neminem hic offendat, quod casu $ff = ee$, hæc vis prodeat infinita, hoc enim casu celeritas nunquam ad uniformitatem, uti assumsimus, reducitur, sed continuo in infinitum usque augetur; id quod etiam evenit si $ee < ff$. Quare, ut mox motus obtineatur uniformis, necesse est, ut amplitudo ee notabiliter major statuatur quam ff.

§. CXXVII. Cum igitur sit celeritas aquæ effluentis $\sqrt{v} = e\sqrt{\frac{V + aee}{e^4 - f^4}}$: erit celeritas, qua embolus introducitur $= \frac{ff}{e}\sqrt{\frac{V + aee}{e^4 - f^4}}$. Sic igitur elicuimus tam celeritatem quam vim, qua embolus intruditur, quorsum deinceps vires hominum accommodari oportet.

§. CXXVIII. Ponamus nunc tam extractionem emboli quam ad intrusionem easdem vires eademque celeritate adhiberi, quo commodius machina tractari queat. Debet ergo esse $V = U = eea$; ubi a aliquantum major est quam in formulis præcedentibus quia hic totam altitudinem super aquæ superficiem denotat, qui excessus seu elevatio foraminis FF super aquam si vocetur $= \alpha$, erit $V = ee(a + \alpha)$. Deinde esse debet celeritas, qua embolus extrahitur

$$\sqrt{u} = \frac{ff}{e}\sqrt{\frac{V - aee}{e^4 - f^4}} = ff\sqrt{\frac{2a + \alpha}{e^4 - f^4}}.$$

§. CXXIX. Vis ergo, qua navis, dum embolus extrahitur, ad motum incitatur, erit $\frac{2f^4}{gg}(ee+gg)\left(\frac{2aee+\alpha ee}{e^4-f^4}\right)$. Dum autem embolus intruditur, erit vis navem propellens $= 2eeff\left(\frac{2a+\alpha}{ee-ff}\right)$. Ut igitur navis perpetuo æquali vi propellatur, conveniet duas hujusmodi machinas in nave conſtitui, quæ ita agitentur, ut, dum in altera embolus extrahitur, in altera intrudatur: ſic vis conſtanter navem propellens erit $=$

$$\frac{2eef^4}{gg}(ee+gg)\left(\frac{2a+\alpha}{e^4-f^4}\right)+2eeff\left(\frac{2a+\alpha}{ee-ff}\right).$$

§. CXXX. Ab hujuſmodi igitur machina geminata navis perpetuo æquali vi incitabitur: unde cum motus navis jam ad uniformitatem fuerit perductus, hæc vis reſiſtentiæ debet eſſe æqualis. Quare, poſita celeritate navis $=\sqrt{c}$ & reſiſtentia abſoluta $=kk$ erit

$$kkc=\frac{2eef^4}{gg}(ee+gg)\left(\frac{2a+\alpha}{e^4-f^4}\right)+2eeff\left(\frac{2a+\alpha}{ee-ff}\right).$$

§. CXXXI. Ponamus ad utramque machinam agitandam ſimul n homines applicari, ita ut numerus hominum unam moventium ſit $=\frac{1}{2}n$; quilibet autem homo operetur vi $=A$ & celeritate $=\sqrt{b}$. Agitetur autem embolus ope vectis VC circa C mobilis, cui vires hominum applicatæ ſint in puncto P, ac vocetur $CV=x$ & $CP=z$; huc enim omnis generis machinæ, quibus uti viſum fuerit, reduci poſſunt.

§. CXXXII. Cum igitur celeritas hominum ſeu puncti P ſit $=\sqrt{b}$; erit celeritas puncti $V=\frac{x}{z}\sqrt{b}$; quæ æqualis eſſe debet celeritati emboli. Ex quo naſcitur hæc æquatio $\frac{x}{z}\sqrt{b}=ff\sqrt{\frac{2a+\alpha}{e^4-f^4}}$.

§. CXXXIII. Porro vis uni machinæ in P applicata eſt $=\frac{1}{2}nA$, cujus momentum ergo $\frac{1}{2}nAz$ æquari debet momento vis, ad motum emboli requisitæ Vx. Cum autem sit $V = ee\,(a+\alpha)$, habebitur ista æquatio, $\frac{1}{2} nAz = ee\,(a+\alpha)\,x$. Ex qua elicitur $\frac{x}{z} = \frac{\frac{1}{2}nA}{ee\,(a+\alpha)}$. Qui valor in præcedente æquatione substitutus præbet: $\frac{nA\sqrt{b}}{2ee\,(a+\alpha)} = ff\sqrt{\frac{2a+\alpha}{e^4 - f^4}}$.

§. CXXXIV. Cum nunc sit $ff = \frac{neeA\sqrt{b}}{\sqrt{(4e^4(2a+\alpha)^2 + nnAAb)}}$: erit, valorem hunc in prima æquatione substituendo:

$$kkc = \frac{(ee+gg)\,nnAAb}{2ggee\,(a+\alpha)^2}$$

$$+ \frac{2ee(2a+\alpha)nA\sqrt{b}}{\sqrt{(4e^4(2a+\alpha)(a+\alpha)^2 + nnAAb)} - nA\sqrt{b}}$$

quæ reducitur ad formam sequentem

$$kkc = \frac{(ee+gg)\,nnAAb}{2ggee\,(a+\alpha)^2}$$

$$+ \frac{nA\sqrt{b}\,(\sqrt{(4e^4(2a+\alpha)(a+\alpha)^2 + nnAAb)} + nA\sqrt{b})}{2ee\,(a+\alpha)^2}$$

$$\text{seu } kkc = \frac{nnAAb\,(2+\frac{ee}{gg})}{2ee\,(a+\alpha)^2}$$

$$+ \frac{nA\sqrt{b}\,(4e^4(2a+\alpha)(a+\alpha)^2 + nnAAb)}{2ee\,(a+\alpha)^2}.$$

§. CXXXV. Quod si brevitatis gratia ponatur $\frac{nA\sqrt{b}}{2ee\,(a+\alpha)} = \sqrt{p}$, ut sit $nA\sqrt{b} = 2ee\,(a+\alpha\sqrt{p})$; prodibit facta substitutione: $kkc = 2eep\,(2+\frac{ee}{gg}) + 2ee\sqrt{p}\,(2a+\alpha+p)$. Unde fit altitudo celeritati navis debita $c = \frac{2ee}{kk}\,p\,(2+\frac{ee}{gg}+\sqrt{(1+\frac{2a+\alpha}{p})})$. Quæ expressio etiam in hanc transformatur $c = \frac{2nAAb}{2kkee\,(a+\alpha)^2}$ $(2+\frac{ee}{gg}+\sqrt{(1+\frac{4(2a+\alpha)e^4(a+\alpha)^2}{nnAAb})})$.

§. CXXXVI. Quoniam autem vidimus ad id, ut motus aquæ erumpentis quavis actione ſtatim ad uniformitatem reducatur, requiri, ut ee multis vicibus excedat foramen ff quia alioquin vis hic per calculum definita vel nunquam vel nimis ſero exiſteret, ponamus $ee = mff$, ut ſit m numerus unitate multo major; eritque $\frac{x}{z} = \frac{nA}{2mff(a+\alpha)}$ & tertia æquatio præbet: $ff = \frac{nA\sqrt{b(mm-1)}}{2m(a+\alpha)\sqrt{(2a+\alpha)}}$; unde conficitur $\frac{x}{z} = \sqrt{\frac{2a+\alpha}{b(mm-1)}}$.

§. CXXXVII. Poſito autem $ee = mff$, ac pro ff ſubſtituto valore invento, æquatio prima ſuppeditat $kkc = \frac{nA\sqrt{b(2a+\alpha)}}{(a+\alpha)\sqrt{(mm-1)}}(2+m+\frac{mff}{gg})$. Unde altitudo celeritati navis debita erit $c = \frac{nA\sqrt{b(2a+\alpha)}}{kk(a+\alpha)\sqrt{(mm-1)}}$ $(2+m+\frac{ee}{gg})$. Ubi ratio ee ad gg ita accipi debet, ut in extractione emboli aqua embolum ſequatur; ſicque conveniet fractioni $\frac{ee}{gg}$ valorem unitate minorem tribui.

§. CXXXVIII. Hic ſtatim ingens ſe offert diſcrimen inter effectum hujus machinæ ac præcedentium, cum hic numerus hominum quadrato celeritatis navis, ſupra autem ejus cubo proportionalis ſit inventus, ita ut hanc machinam adhibendo ſi navis duplo celerius progredi debeat, numerus hominum tantum ſit quadruplicandus, cum ante octuplicari debeat. In quo non exigua prærogativa præ machinis præcedentibus eſt ſita.

§ CXXXIX. Ex hac formula quoque apparet expedire, ut altitudines a & α quam minimæ ſtatuantur, quia tum celeritas navis prodit maxima. Si enim a & α evaneſcerent, celeritas navis revera infinita prodiret, qui autem caſus locum habere nequit, cum ipſum foramen FF deberet eſſe infinitum & ratio x ad z infinite parva. Quam ob cauſam neceſſe eſt ut litteris a & α modici valores tribuantur, quo hypotheſis calculi ratione motus uniformis melius obtineatur.

§. CXL. Præterea vero ipſa navis agitatio requirit, ut altitudo α unum vel aliquot pedes ſuperet. Deinde etiam neceſſe eſt, ut altitudo a multis vicibus excedat diametrum foraminis, quia alioquin amplitudinis foraminis ratio ad altitudinem a haberi debuiſſet in calculo, quæ tamen eſt prætermiſſa. Oportet ergo eſſe aa multo majus quam $\frac{na\sqrt{b}(mm-1)}{2m(a+\alpha)\sqrt{(2a+\alpha)}}$; ſeu quia m eſt numerus valde magnus & α tam parvum aſſumitur quam circumſtantiæ permittunt, debet eſſe $a^3\sqrt{a}$ multo majus quam $\frac{nA\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}$.

§. CXLI. Evolvamus igitur caſum ſupra conſideratum (§. CXIV.) quo erat $n=100$; $kk=100$; $A=\frac{4}{9}$ & $b=\frac{8}{125}$. Atque ſtatim reperitur $a^3\sqrt{a}$ multo majusquam 4, ſeu a^7 multo majus quam 16. Ponamus ergo eſſe $a=10$ ped. & $\alpha=5$ ped. Præterea ſit $m=5$ & $\frac{cc}{68}=\frac{1}{2}$ unde fit $c=\frac{100.\frac{4}{9}\sqrt{\frac{8}{125}}.25.}{100.15.\sqrt{24}.}.7\frac{1}{2}$ ſive $c=\frac{2}{9}\sqrt{\frac{1}{15}}=0,0574$ ped. cui altitudini reſpondet celeritas ſingulis ſecundis ſpatium $1\frac{9}{10}$ pedum abſolvens, quæ multo minor eſt quam ea, quæ pro eodem caſu per modum tertium ſectionis ſuperioris eſt inventa (§. XLVIII.).

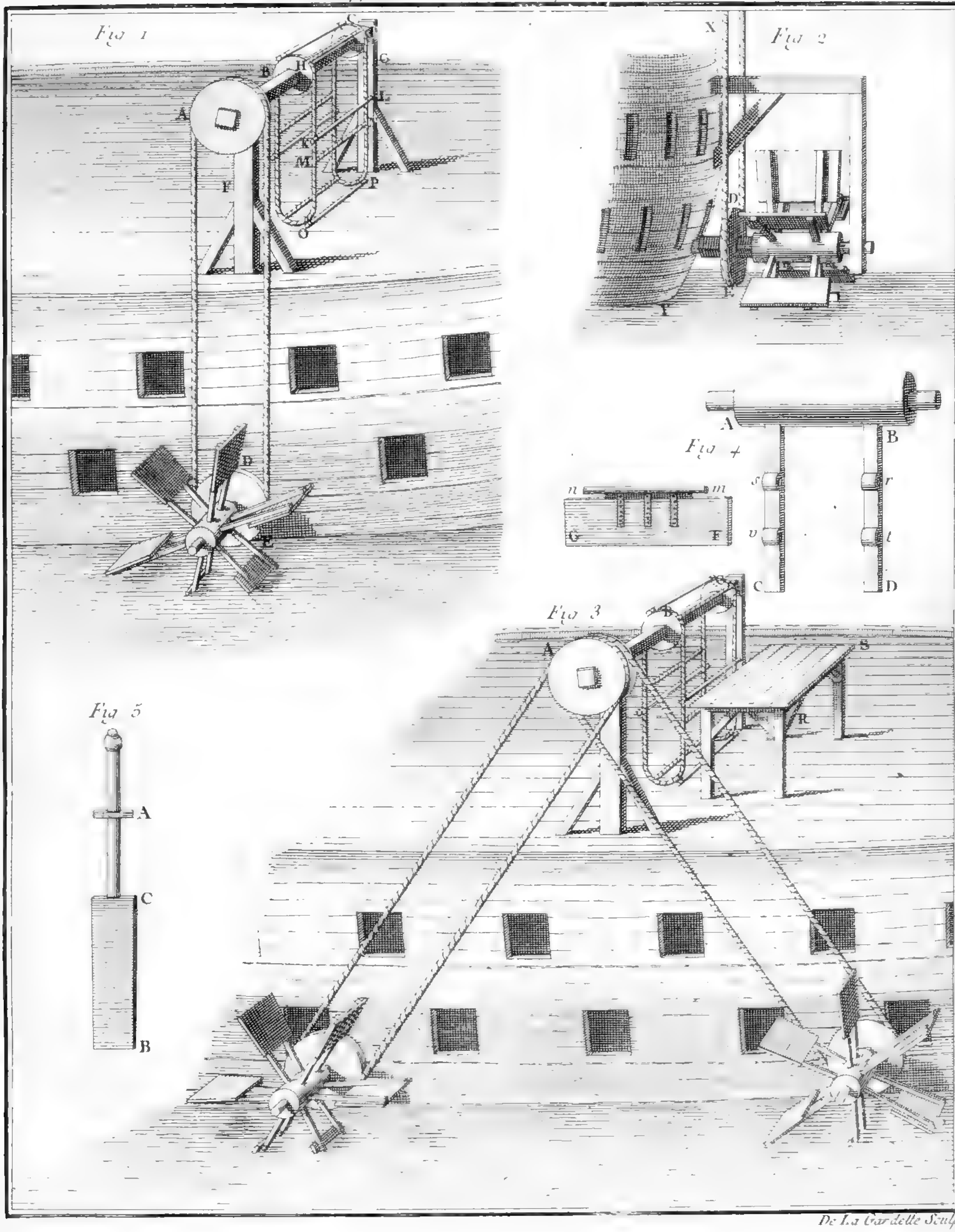
§. CXLII. Ponamus autem, quo navi majorem celeritatem conciliemus, altitudinem $a=5$ ped. & $\alpha=2$ ped., reliquis quantitatibus iiſdem relictis, prodibitque $c=\frac{4}{21}\sqrt{\frac{1}{5}}=0,0852$ pedis, cui altitudini reſpondet celeritas $2\frac{1}{3}$ pedum in minuto ſecundo, quæ præcedentem tantum fere dimidio pede ſuperat & adhuc multo minor eſt quam per machinas præcedentis ſectionis navi ab iisdem viribus imprimi poteſt.

§. CXLIII. Cum igitur hoc modo à 100 hominibus navi minor celeritas imprimatur, quam modis in ſectione priori deſcriptis, multo minorem effectum ab hoc modo expectare licebit, ſi pauciores homines adhibeantur, quoniam hic celeritas navis ſecundum rationem ſubduplicatam, ibi vero ſecundum rationem ſubtriplicatam numeri hominum decreſcit. Unde ſi non nimis magno hominum numero uti licet, reſpectu reſiſtentiæ abſolutæ kk, ſemper præſtabit machinas prioris ſectionis uſurpare, quam iſtam hic deſcriptam.

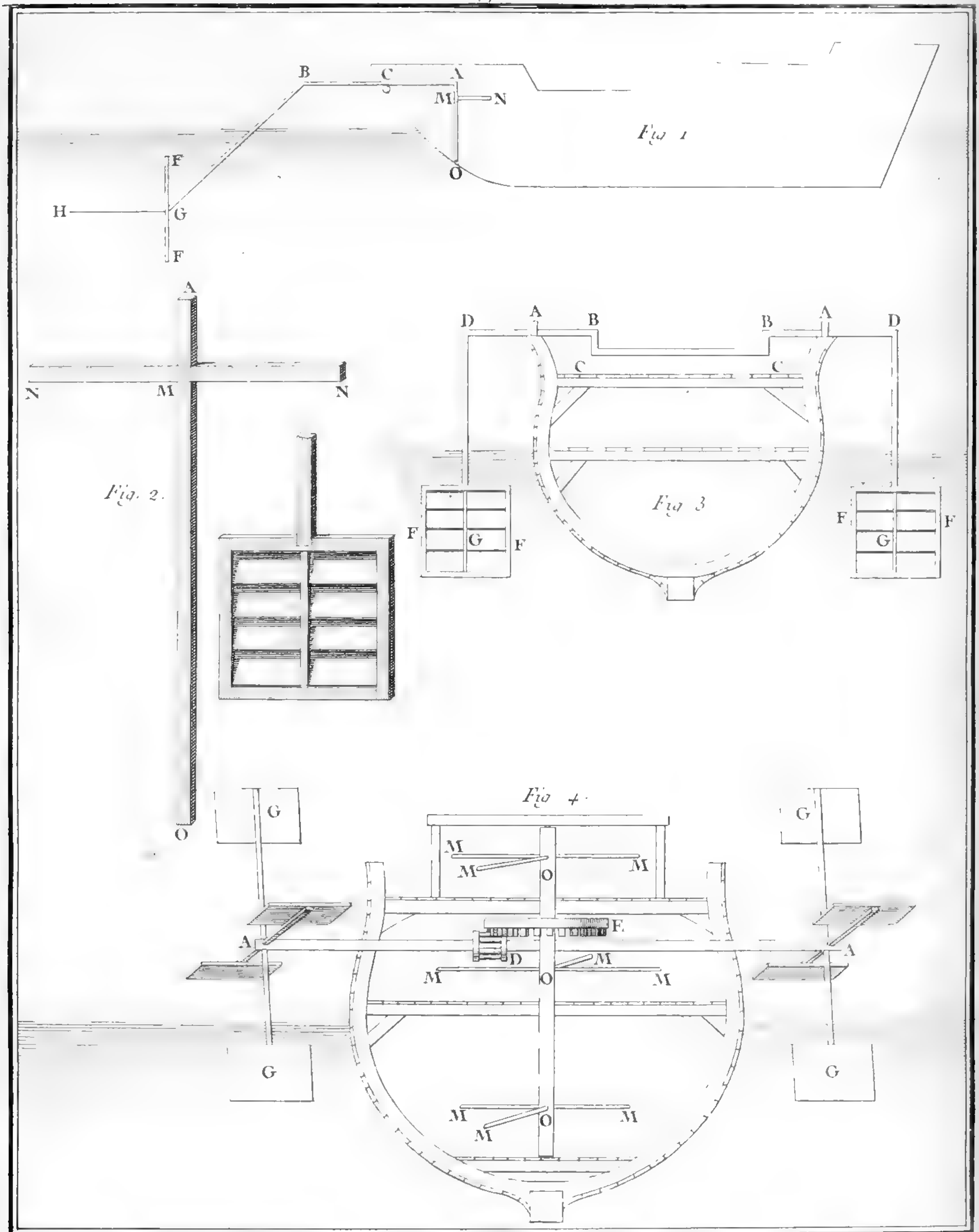
§. CXLIV. Contra autem ſi multo plures homines operi admoveri queant, quam hic aſſumſimus, tum utique effectus hujus poſtremæ machinæ præcedentes ſuperare poſſet. Verum, quia tunc altitudo a major aſſumi debet ob rationes ante allatas: inde ipſa quoque navis celeritas minor eſſet proditura, quamobrem etiam hoc caſu nullum lucrum impetraretur.

§. CXLV. His perpenſis merito concludi poſſe videtur, machinas hujus ſectionis multo debiliores eſſe cenſendas quam præcedentes, ideoque à praxi removendas. Quocirca machinas prioris ſectionis præcipue ad uſum commendandas eſſe arbitror, ex iiſque imprimis modos tertio & quarto loco deſcriptos, quippe qui navi maximam celeritatem imprimunt, ſi quidem paribus viribus utamur. Quin etiam iſti modi ad praxin magis videntur accommodati, neque adeo difficile videtur obſtacula, quæ forte occurrere queant, removere.

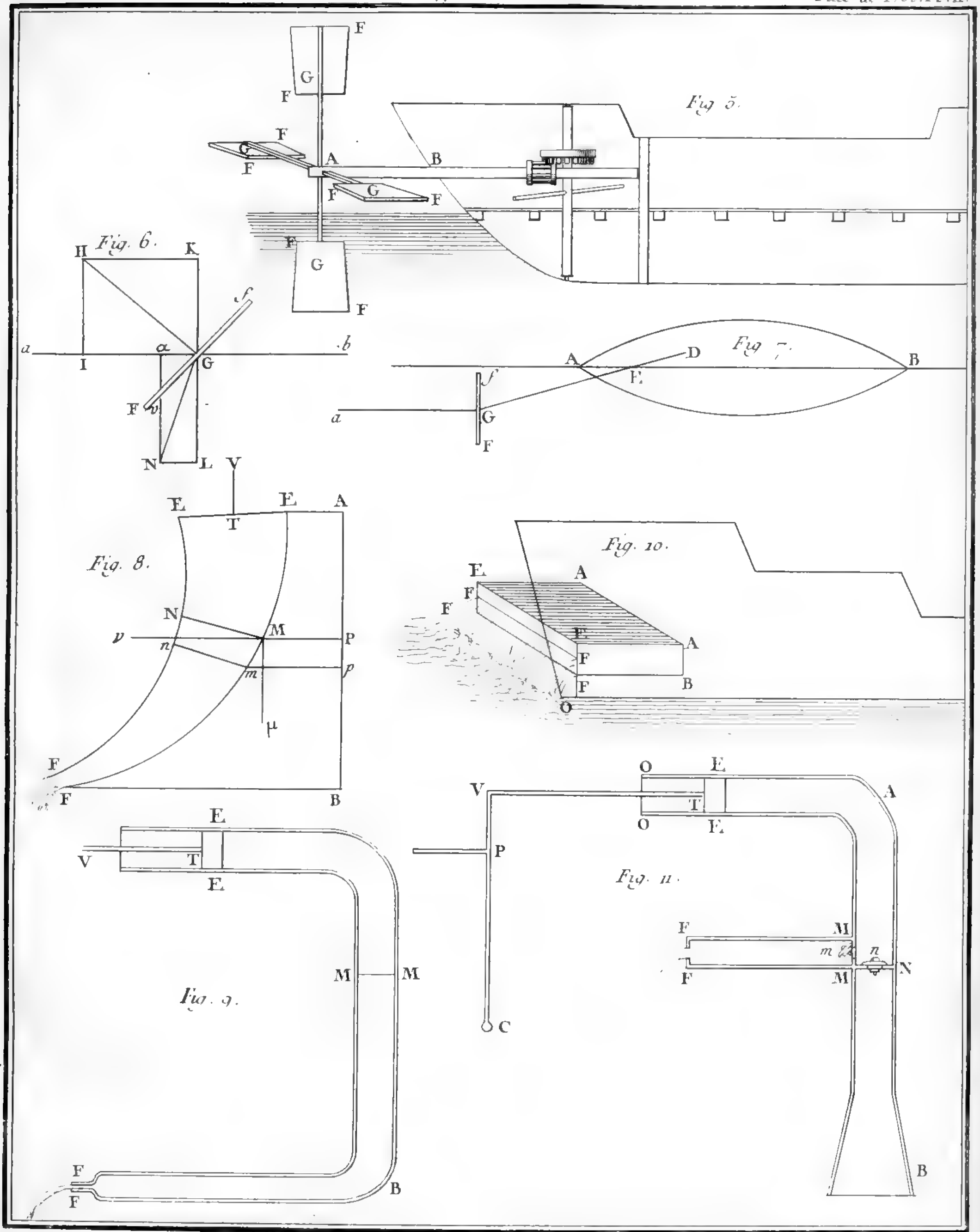
FINIS.



De La Gardelle Sculp.



De La Gardette Sculp.



De la Gardette Sculp.

MEMOIRE

PRÉSENTÉ

A L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

A L'OCCASION DU PRIX DE M.DCC.LIII.

Par M. MATHON DE LA COUR, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Lyon.

Parmâ inglorius albâ.

MÉMOIRE

Sur la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du Vent sur les grands Vaisseaux, soit en y appliquant les rames, soit en employant quelqu'autre moyen que ce puisse être.

UN vaisseau environné de deux fluides, l'air & l'eau, peut recevoir son mouvement de leur action ou de leur réaction : de leur action, lorsqu'il est poussé par le vent ou entraîné par un courant : de leur réaction, si on fait mouvoir contre ces fluides une surface tellement liée au vaisseau, qu'il serve comme de point d'appui à la résistance qu'elle éprouve; elle lui procurera alors un mouvement en sens contraire au sien.

L'air a si peu de densité en comparaison de l'eau, qu'on peut du premier coup négliger les moyens fondés sur sa réaction. Celle de l'eau sera toujours infiniment plus efficace, & c'est de ce côté-là qu'il faut tourner nos premieres vues.

Tâchons donc de présenter à la réaction de l'eau une surface qui la frappe le plus directement qu'il sera posſible ; car la viteſſe du ſillage réduiroit à preſque rien la viteſſe reſpective des ſurfaces qui frapperoient l'eau obliquement. Cherchons en même tems les proportions les plus convenables pour procurer une grande viteſſe ſans trop fatiguer les agens que nous emploierons, & ſans déranger ni incommoder les autres opérations de l'équipage. Celui qui parviendra à remplir ces différens objets, peut eſpérer le ſuffrage de la célebre compagnie qui a propoſé la queſtion que j'entreprens de traiter, & dont la ſimple approbation eſt le prix le plus flatteur de tous pour un cœur ſenſible à la véritable gloire.

Comme les diverſes manieres de procurer le mouvement de la ſurface qui doit éprouver la réaction de l'eau peuvent ſe réduire preſque toutes au principe du levier du premier genre, c'eſt ſous cette forme que je les examinerai en général. On peut appliquer ſi aiſément les mêmes principes aux autres cas où il ne ſe trouve point de bras de levier, qu'il n'eſt pas néceſſaire d'en faire un article ſéparé.

C'eſt donc ſous l'idée des rames ordinaires que je conſidererai le moteur du vaiſſeau. La réſiſtance de l'eau ou ſa réaction ſur la ſurface des pales doit être en équilibre avec la force ou puiſſance de l'agent qui meut la rame. Le point d'appui eſt le vaiſſeau même, ou ſi l'on veut, c'eſt la réſiſtance de l'eau au mouvement de la proue.

Il faut obſerver cependant que le vaiſſeau ne ſupporte pas ici l'action des deux forces qui ſont en équilibre aux deux extrêmités de la rame, comme il ſemble que le point d'appui d'un levier du premier genre devroit les ſupporter. Dans le cas préſent où la puiſſance motrice n'eſt pas étrangere & extérieure au vaiſſeau, elle ne ſauroit agir ſans être buttée contre lui, & ſans lui rendre par conſéquent autant de mouvement en arriere que le point d'appui en a reçu en avant de cette même puiſſance. De-là vient qu'il ne conſerve pour aller en avant que la ſeule force de la réaction de l'eau ſur la pale. Celle de la puiſſance, ſe détruiſant elle-même par rapport à ſon action ſur le point d'appui, ne mérite plus d'être conſidérée que par rapport à l'équilibre où elle doit être avec la réaction de l'eau ſur la pale. C'eſt faute d'avoir ſuffiſamment développé cette idée qu'on a été ſi longtems embarraſſé à expliquer nettement l'action des rames.

Je diviſerai mon ouvrage en deux parties. Dans la premiere j'établirai les principes de Théorie néceſſaires pour choiſir entre les moyens divers qu'on peut employer. Dans la ſeconde j'en tirerai les conſéquences pratiques qui ſont l'objet principal de la queſtion propoſée.

PREMIERE PARTIE.

J'APPELLE la maſſe ou le poids du vaiſſeau exprimé en livres, M

La ſurface de la proue, qui éprouve la réſiſtance de l'eau, réduite à une ſurface plane qui ſeroit choquée directement & exprimée en piés quarrés, f

La ſurface dont la réaction produit le mouvement du mouvement du vaiſſeau, c'eſt-à-dire la ſurface de toutes les pales priſes enſemble, s

La force de la puiſſance motrice exprimée par un poids, c'eſt-à dire par un certain nombre de livres n

La viteſſe avec laquelle cette puiſſance eſt mue, exprimée par le nombre de piés qu'elle parcourt dans une ſeconde, v

La viteſſe du ſillage, c

Le bras de levier de la puiſſance, ou manche de la rame, a

Celui de la réſiſtance, c'eſt-à-dire la longueur de la rame depuis le point d'appui juſqu'au point que nous regarderons comme le centre d'impulſion des pales, b

La viteſſe de ce centre des pales ſera donc égale à $\frac{bv}{a}$

Et a étant $= 1$, elle ſera égale à bv.

Pour avoir des formules moins compliquées, je commencerai par examiner en général les propriétés des rames en faiſant abſtraction de leur poids (il eſt aiſé d'y avoir égard dans la pratique en ajoûtant à la force motrice ce qui eſt néceſſaire pour cela), en ſuppoſant la puiſſance n appliquée en un ſeul point à l'extrêmité du bras de levier a, & la réaction de l'eau ſur les différentes bandes des pales comme agiſſant toute entiere à la diſtance b du point d'appui, ſur une ſurface égale à s. Ce que cette ſuppoſition pourroit avoir de contraire à la réalité, n'empêchera pas que nous n'en tirions des conſéquences générales utiles pour tous les cas. Elles ſeront d'autant plus ſenſibles, que les formules ſeront plus ſimples. J'y ajoûterai une méthode pour calculer la force & le moment des rames avec plus de préciſion.

Je laiſſe de côté les frottemens légers, la réſiſtance de l'air au mouvement du vaiſſeau, l'adhéſion des particules d'eau, &c. & je calcule dans l'hypotheſe la plus ſimple, d'autant mieux qu'il s'agit bien plus ici de comparer entr'eux les différens moyens de donner du mouvement au vaiſſeau que de meſurer leur effet abſolu, & que cette comparaiſon n'exige pas, avec la même rigueur, qu'on faſſe entrer tous ces élémens dans le calcul.

Il y a deux cas à examiner; le premier, lorſque la force motrice agit ſans interruption, comme par exemple lorſqu'au lieu de rames ordinaires on emploie une roue dont les vannes ou aubes choquent l'eau continuellement. Le ſecond lorſque l'action n'eſt pas continue, comme ſur les galeres, où l'on eſtime communément que l'intervalle entre deux coups de rame eſt double du tems de l'action de la rame.

PROBLEME PREMIER.

Trouver les rapports entre les forces, les ſurfaces, les bras de levier & les viteſſes, & les changemens que produiſent leurs différentes combinaiſons.

L'HYDRAULIQUE enſeigne que la réaction de l'eau, choquée directement par une ſurface, avec une certaine viteſſe, ſe réduit au poids d'une colonne d'eau qui auroit cette même ſurface pour baſe, avec une hauteur, égale à la hauteur d'où un corps tombant acquerroit par ſa chute la viteſſe avec laquelle ſe fait le choc. C'eſt pour quoi, en ſuppoſant les expériences qui donnent ſoixante-douze livres de poids au pié cubique d'eau marine & $30\frac{1}{6}$ piés par ſeconde de viteſſe à un corps, après l'eſpace d'une ſeconde de chûte, ſi la viteſſe reſpective de la ſurface s de la pale eſt $bv - c$, la force de la réaction de l'eau ſur cette ſurface étant exprimée en livres ſera $\frac{72}{60\frac{1}{3}} s\,(bv - c)^2$.

La réſiſtance de l'eau à la ſurface réduite f de la proue ſera par la même raiſon égale à $\frac{72}{60\frac{1}{3}} f c^2$, ou $\frac{216}{181} f c^2$.

Dans l'action continue la viteſſe c du ſillage ne peut plus croître, lorſque la réaction de l'eau ſur les pales eſt égale à la réſiſtance de l'eau au mouvement du vaiſſeau. Toute la force eſt alors en équilibre avec la réſiſtance, & ne ſert qu'à empêcher la viteſſe de décroître. Alors $s\,(bv - c)^2 = f c^2$, d'où je tire $c = \frac{bv}{1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}$. La viteſſe c ne peut plus croître lorſqu'elle eſt parvenue à cette valeur.

L'équilibre néceſſaire entre la puiſſance & la réſiſtance nous fournit l'égalité $\frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}{b} = s\,(bv - c)^2 = f c^2$, le bras de levier a étant ſuppoſé égal à 1; la force motrice n doit donc être égale à $\frac{72}{60\frac{1}{3}} b f c^2$ & la viteſſe c lorſqu'elle ne croît plus eſt égale à $\frac{\sqrt{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72}\right) n}}{\sqrt{bf}}$.

L'égalité $c = \frac{bv}{1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}$ nous montre que plus on augmentera la ſurface s des pales ſans toucher aux autres proportions, plus la viteſſe c du ſillage ſera grande, pourvu cependant qu'on augmente ſuffiſamment la force

motrice

motrice n, puiſque c ne peut pas être plus grande que $\frac{\sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72}n}}{\sqrt{bf}}$.

Si la ſurface des pales pouvoit croître juſqu'à devenir infinie, la viteſſe du ſillage deviendroit égale à celle de la rame, mais elle ne peut pas être plus grande. On trouvera la longueur du bras de levier pour ce cas-là en combinant les deux valeurs de C. La premiere eſt alors $c = bv$, & la ſeconde $c = \frac{\sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72}n}}{\sqrt{bf}}$ ce qui donne $b = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72}n\right)}{fv^2}}$. Mettant cette valeur de b dans l'égalité $c = bv$, elle ſe change en celle-ci $c = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72}nv\right)}{f}}$ ce qui eſt le terme de la plus grande viteſſe qu'il ſoit poſſible de ſuppoſer au vaiſſeau lorſque nv & f ſont déterminées. Si l'on faiſoit b plus court que $\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72}n\right)}{fv^2}}$ ſans augmenter la viteſſe v de la puiſſance, celle du ſillage (qui eſt égale à bv dans la ſuppoſition où nous ſommes d'une ſurface s infinie) diminueroit; & une partie de la force motrice n reſteroit inutile, puiſqu'elle doit être égale à $\frac{72}{60\frac{1}{3}}bfc^2$.

Il ne faut donc jamais faire le bras extérieur b de la rame plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72}n\right)}{fv^2}}$, & il faut toujours le faire plus long, puiſque la ſuppoſition d'une ſurface s infinie eſt impoſſible, & que dans la pratique elle ne peut pas même être exceſſivement grande; mais d'un autre côté plus on allongera ce bras pour diminuer la ſurface s des pales, la force n reſtant la même, plus la viteſſe du ſillage ſera petite, puiſqu'elle eſt en raiſon inverſe de $\sqrt{b}$, car $c = \frac{\sqrt{\left(\frac{60\frac{1}{3}}{72}\right) n}}{\sqrt{bf}}$. C'eſt ce qu'on ſavoit déja en partie par la raiſon qu'on ne peut augmenter le bras de levier de la réſiſtance, en conſervant cependant l'équilibre ſans diminuer en même tems cette réſiſtance qui eſt égale à $\frac{72}{60\frac{1}{3}} f c^2$.

Les combinaiſons des deux mêmes égalités $c = \frac{bv}{1 \times \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}$ & $c = \frac{\sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}}{\sqrt{bf}}$ nous donneront les rapports entre b, s, v, c & n lorſque la ſurface des pales n'eſt pas infinie. On aura donc $b = \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n \cdot \overline{1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}^2}{f v^2}\right)}$ $n = \frac{72}{60\frac{1}{3}} b^3 v^2 s . \frac{f}{\overline{\sqrt{s} + \sqrt{f}}^2}$ $v = \left(1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}\right) . \sqrt{\frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}{b^3 f}}$,

$\sqrt{s} = \frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n \sqrt{f} + f v \sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n b^3}}{b^3 f v^2 - \frac{60\frac{1}{3}}{72} n}$ mettant cette valeur de b dans l'égalité $c = \frac{bv}{1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}$ on en tire $c = \sqrt[3]{\frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n v}{f} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}}$

J'en conclus que ſi l'on veut faire croître la viteſſe du ſillage en augmentant la force n & en donnant au bras extérieur b de la rame ſa valeur $b = \sqrt[3]{\frac{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}{f v^2} \overline{1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}^2}$ ſans toucher au reſte, il faut que la force n croiſſe comme les cubes de c; au lieu qu'il ſuffit qu'elle croiſſe comme les quarrés de c, lorſque b reſtant le même on augmente la viteſſe v, en donnant à la ſurface s la proportion réquiſe, puiſque nous avions ci-devant l'égalité $c = \frac{\sqrt{\frac{60\frac{1}{3}}{72} n}}{\sqrt{fb}}$.

Lorſqu'on commence à ramer & que c eſt encore $= o$ la force n doit être $= \frac{72}{66\frac{1}{3}} b^3 v^2 s$ pour être en équilibre contre l'effort de la rame. Multipliant cette valeur par la fraction $\frac{f}{\overline{\sqrt{s} + \sqrt{f}}^2}$, on aura la force qui ſuffit pour maintenir la viteſſe du ſillage lorſqu'elle ne croit plus.

Il ſembleroit que puiſque $n\, v$ eſt comme le cube de c, il doit être indifférent d'augmenter n ou v, pourvu que leur produit ſoit un *plus grand ;* mais nous verrons dans le problême ſuivant qu'une plus grande viteſſe v procure plus promptement le mouvement au vaiſſeau.

Je conclus de tout cela qu'il faut 1°. tâcher que la viteſſe v de l'agent ſoit la plus grande que faire ſe pourra, ſans diminuer ſon produit par la force n. 2°. Augmenter plutôt la ſurface des pales que la longueur du bras extérieur b de la rame, à moins qu'on ne ſoit forcé à ce dernier parti, ſoit parce que la force motrice ne manque pas & que ſa viteſſe v eſt trop petite ; alors en augmentant le bras de levier & par conſéquent la viteſſe des pales, on augmentera auſſi la viteſſe du ſillage. 3°. Il faut par la même raiſon prendre garde de ne pas accourcir le bras intérieur ou manche a de la rame en plaçant des rameurs trop près du point d'appui. 4°. Il eſt très-utile, dans tous les cas, de diminuer la ſurface de réſiſtance f de la proue le plus qu'on pourra, ſans nuire aux autres opérations du navire.

PROBLEME SECOND.

Trouver la viteſſe c *que le vaiſſeau acquiert pendant un tems déterminé* T, *lorſque l'action de la rame eſt continue. Ou la viteſſe* c *étant donnée, trouver le tems* T.

DANS le Problême précédent nous avons trouvé la plus grande viteſſe que l'action continue pouvoit donner au vaiſſeau. Il eſt important de ſavoir s'il faut long-tems pour acquérir cette viteſſe, ou au moins pour en approcher (car il eſt aiſé de comprendre qu'on ne pourroit y parvenir qu'au bout d'un tems infini); & quels ſont les moyens de la procurer plus promptement.

Nous ſavons que l'effort abſolu ſur les pales des rames eſt $\frac{72}{60\frac{1}{3}}.\, s\,(bv - c)^2$, & la réſiſtance de l'eau au mouvement du vaiſſeau $\frac{72}{60\frac{1}{3}}.\, fc^2$; ainſi la force que pouſſe le vaiſſeau étant exprimée par un poids ſera

$$\frac{72}{60\frac{1}{3}}\,(s\,(bv - c)^2 - fc^2).$$

On peut comparer ſon effet & la viteſſe qu'elle donne au vaiſſeau à l'effet de la peſanteur, & à la viteſſe de la chute des corps graves.

J'appelle g l'élément de la viteſſe des corps dans leur chute cauſée par la peſanteur; je veux dire la portion de viteſſe que les graves acquierent à chaque inſtant. La peſanteur leur en donne une égale lorſque les tems de leur chute ſont égaux & que rien ne leur réſiſte, parce qu'étant proportionnelle à leur maſſe, c'eſt-à-dire étant également dans toutes les parties de leur maſſe, elle agit ſur cette même maſſe; au lieu que dans le cas que nous examinons, le poids qui pouſſe le vaiſſeau eſt variable, & agit ſur la maſſe du même vaiſſeau qui ne lui eſt point proportionnelle.

L'égalité qui doit ſe trouver entre la cauſe & l'effet donnera pour la chute des graves l'équation differentielle $g M dt = dc$ (M exprimant la maſſe des corps peſans & c leur viteſſe) d'où l'on tire l'égalité $t = \frac{c}{g}$ qui ſignifie que le tems t eſt à celui qu'on a pris pour l'unité, par exemple, à une ſeconde ce que c eſt à la viteſſe élémentaire g, ou que les tems ſont en même proportion que les viteſſes, & que cette eſpece de rapport des tems aux viteſſes a $\frac{1}{g}$ pour expoſant.

Si l'on veut à préſent exprimer les viteſſes c & g par les eſpaces que chacune d'elles fait parcourir dans une ſeconde, on ſait par l'expérience que g eſt $= 30\frac{1}{6}$ piés par ſeconde; c'eſt-à-dire que la viteſſe acquiſe dans la chute, fait parcourir à un corps grave autant de fois $30\frac{1}{6}$ piés par ſeconde, que le tems de la chute t contient de ſecondes. Nous ferons donc dans la ſuite de nos calculs $g = 30\frac{1}{6}$.

Dans le cas que nous examinons, où la force $\frac{72}{6c^{\frac{1}{3}}}$ $(s.\,(bv - c)^2 - fc^2)$ qui pouſſe le vaiſſeau eſt égale à un poids, qui n'eſt pas en même raiſon que la maſſe M du vaiſſeau qu'elle fait mouvoir, l'égalité qui doit ſe trouver entre la cauſe & l'effet nous donnera pour équation élémentaire de la viteſſe c du ſillage

$$\frac{72}{6c^{\frac{1}{3}}}\, g\,(s.\,(bv - c)^2 - fc^2)\, dT = M\,dc,$$

d'où je tire en écrivant $30\frac{1}{6}$ au lieu de g,

$$T = \frac{1}{36}\, M \int \frac{dc}{sb^2v^2 - 2sbvc + (s-f).c^2}$$

pour intégrer la fraction qui eſt ſous le ſigne $\int$ je la partage en deux autres qui lui ſont égales.

$$\frac{\frac{dc}{2bv\sqrt{sf}}}{-\frac{sbv - bv\sqrt{sf}}{s-f} + c} \quad \& \quad \frac{\frac{dc}{2bv\sqrt{sf}}}{\frac{sbv - bv\sqrt{sf}}{s-f} - c}$$

On remarquera, pour rendre l'intégrale complette, que lorsque T est $= o$, il faut que c soit aussi $= o$. On aura donc

$$T = \frac{\frac{1}{72} M}{bv\sqrt{sf}} \left\{ L\left(\frac{-sbv - bv\sqrt{sf} + c}{s-f}\right) - L\left(\frac{sbv - bv\sqrt{sf} - c}{s-f}\right) - L\left(\frac{-sbv - bv\sqrt{sf}}{s-f}\right) + L\left(\frac{sbv - bv\sqrt{sf}}{s-f}\right) \right\}$$

réduisant ces logarithmes à un seul & divisant par $s-f$ on aura $\frac{72\, bv\sqrt{sf}.\, T}{M} = L \frac{-sbv + (s - \sqrt{sf})c}{-sbv + (s + \sqrt{sf})c}$. Pour réduire ce logarithme à ceux des tables ordinaires, il faut le multiplier par la fraction décimale 2 3 0 2 5 8 5 &c. (*Voyez* Wolfius *Element. Analyseos*, Part. II, Sect. 2, N°. 259.) ce qui donne, en employant les fractions décimales,

$$\frac{31.2692.\, bv\sqrt{sf}.\, T}{M} = L \frac{-sbv + (s - \sqrt{sf})c}{-sbv + (s + \sqrt{sf})c}$$

La vitesse c étant donnée, il sera aisé de trouver le tems T par cette formule. Si c'est au contraire le tems qui est connu, voici comment on trouvera la vitesse. Appellons N la quantité qui est sous le signe L. Elle sera connue, puisque son logarithme est supposé connu.

On aura donc l'équation $N = \frac{-sbv + (s - \sqrt{sf})c}{-sbv + (s + \sqrt{sf})c}$

d'où l'on tire $c = \frac{bv}{1 + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{\frac{f}{s}}}$. Plus le tems T est long, plus la valeur de N sera grande, & plus l'expression $\frac{N-1}{N+1}$ approchera d'être $= 1$, & c d'être $= \frac{bv}{1 + \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{s}}}$. Nous avons vu, dans le Problême précédent, que c'étoit un terme au-delà duquel elle ne pouvoit plus croître.

Quelque grande que ſoit la maſſe M du vaiſſeau, on trouvera, en calculant ſelon cette formule, qu'un intervalle de tems aſſez court ſuffit ordinairement pour parvenir à une viteſſe fort approchante de ce terme; mais il faudroit un tems infini pour y arriver tout-à-fait & pour avoir $\frac{N+1}{N-1} = 1$.

Cette formule nous apprend auſſi que plus les valeurs de bv & de $\sqrt{s}$ ſeront grandes, moins il faudra de tems au vaiſſeau pour acquérir la viteſſe c.

Si le vaiſſeau avoit déja une viteſſe k lorſque l'action de la rame a commencé, il eſt évident que le tems T qu'il lui faut pour parvenir à une certaine viteſſe c, doit être égal à celui que donne la formule précédente pour acquérir c, moins celui qu'il eût fallu pour acquérir k; d'où l'on tirera l'égalité $\frac{31.2692.\ bv\sqrt{sf}.\ T}{M}$ = logarith. de

$$\frac{sb^2v^2 - (sbv - bv\sqrt{sf})k + (s-f)kc - (sbv + bv\sqrt{sf})c}{sb^2v^2 - (sbv + bv\sqrt{sf})k + (s-f)kc - (sbv - bv\sqrt{sf})c}$$

Si nous appellons N ce qui eſt ſous le ſigne L, on aura $c = bv. \frac{sbv + \left(\frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf} - s\right)k}{\left(s + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf}\right)bv + (f-s)k}$

Cette formule devient égale à la précédente 1°. lorſque K eſt $= o$. 2°. Lorſque K eſt $= 1$, de même que $\frac{N+1}{N-1}$ parce que alors le tems étant infini, la viteſſe du ſillage parvient dans toutes les deux à ſa plus grande valeur.

PROBLEME TROISIEME.

Trouver les diminutions de la vitesse du vaisseau produites dans un certain intervalle de tems par la resistance de l'eau, lorsque l'action qui causoit son mouvement a cessé. Ou cette diminution étant connue, trouver le tems.

J'APPELLE ce tems t, la vitesse du sillage lorsque l'action a cessé c, la vitesse décroissante (exprimée par l'espace qu'elle fait parcourir dans une seconde) κ.

La force qui produit cette diminution, est la résistance de l'eau que nous savons égale à $\frac{72}{6c^{\frac{1}{3}}} f\kappa^2$. L'élément de la vitesse décroissante sera donc, en suivant la méthode du Problême premier, $\frac{72}{6c^{\frac{1}{3}}} gf\kappa^2 dt = M - d\kappa$; d'où nous tirerons $t = \frac{M}{36f}\left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{c}\right)$ & $\kappa = \frac{Mc}{M + 36ftc}$ en observant que lorsque t est $= o$, κ est $= c$ & que g est $= 30\frac{1}{6}$.

PROBLEME

PROBLEME QUATRIEME.

Trouver la plus grande viteſſe où puiſſe parvenir un vaiſſeau lorſque l'action qui lui donne ſon mouvement n'eſt pas continue, mais qu'elle eſt alternativement interrompue. Et les viteſſes étant données, trouver les tems de l'action & de l'interruption,

On peut connoître à-peu-près cette viteſſe par un calcul prompt & facile, ſi l'on ſuppoſe d'un côté que l'action de la rame, & de l'autre la réſiſtance de l'eau au mouvement du vaiſſeau ne varient pas ſenſiblement, & qu'elles font croître ou décroître la viteſſe à proportion du tems qu'elles agiſſent. Cela arrive ainſi : lorſque les tems de l'action & de l'interruption ſont tous les deux fort courts ; lorſqu'ils ſont plus longs, les changemens de la viteſſe dont nous ne prenons ici qu'une eſpece de valeur moyenne, peuvent apporter quelque différence à la meſure des forces.

Si la durée de l'interruption eſt à celle de l'action comme p eſt à 1, on aura l'égalité $s(bv-c)^2 - fc^2 = pfc^2$; car il faut que l'action rétabliſſe ce que l'interruption a fait perdre, & par conſéquent que $s(bv-c)^2 c^2 - fc^2$ qui repréſente la force pendant l'action, ſoit d'autant plus grand que le tems p de l'interruption & la force de la réſiſtance ſont plus grands.

On en conclut $c = \dfrac{v}{1 + \frac{\sqrt{f}\sqrt{(p+1)}}{\sqrt{s}}}$. D'où l'on voit que ſi par exemple s eſt $= f$, dans l'action continue, la viteſſe auroit pu devenir égale à $\frac{100}{200} bv$; ſi le tems de l'interruption eſt égal à celui de l'action, & par conſéquent $p = 1$, elle ne croîtra pas au-delà de $\frac{100}{240} bv$; si le tems de l'interruption est double de celui de l'action & $p = 2$, elle ne passera pas $\frac{100}{273} bv$. Cette perte de vitesse, produite par l'interruption de l'action, sera d'autant plus grande, que la surface s des pales sera plus petite en comparaison de celle de la proue, comme il est aisé de le voir par la seule inspection de la formule. Ce qui prouve de nouveau combien il est utile d'avoir une grande surface des pales.

Comme cette méthode n'est pas suffisante pour satisfaire à toute la rigueur géométrique, en voici une plus exacte.

Nous avons vu dans le Problême troisieme que si le vaisseau avoit une vitesse c, lorsque l'action de la rame a cessé, il n'aura plus, après un tems égal à t, qu'une vitesse $k = \frac{Mc}{M + 36ftc}$.

Le Problême second nous a montré que si le vaisseau a une vitesse k, lorsque l'action de la rame commence, il parviendra dans un tems t à une vitesse

$$c = bv \frac{sbv + \left(\frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf} - s\right)k}{\left(s + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf}\right)bv + (f-s)k}.$$

Il est donc visible que si c & k du Problême troisieme sont les mêmes que c & k du Problême second, nous aurons la solution que nous cherchons (T étant le tems de l'action de la rame & t celui de l'interruption), il faut donc, au lieu de k, écrire dans le Problême second sa valeur $\frac{Mc}{M + 36ftc}$ tirée du Problême troisieme, nous parviendrons à l'égalité

$$c^2 + \left\{\frac{(M - 18bvft)\,2sbvc}{(f-s)M + 36bvft\left(s + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf}\right)} = \frac{sb^2v^2M}{(f-s)M + 36bvft\left(s + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{sf}\right)}\right\}$$

d'où l'on tirera les valeurs de c & de k, les tems T & t

étant donnés ; ou au contraire, les viteſſes étant données, on trouvera les tems, puiſque le rapport de *N* au tems *T* eſt déterminé dans le Problême ſecond.

PROBLEME CINQUIEME.

Trouver la force abſolue & le moment d'une rame AB (fig. 5.) *qui eſt mue autour d'un centre* A, *& les rapports entre les tems* T *& les viteſſes* c *du ſillage.*

Nous avons ſuppoſé juſqu'à préſent que tous les points de la ſurface *s* des pales étoient choqués également & à une même diſtance *b* du centre. Les concluſions que nous avons tirées de cette ſuppoſition n'en ſont pas moins utiles pour nous faire connoître les propriétés du mouvement des rames & les principales proportions entre les forces, les ſurfaces & les viteſſes, ſurtout quand il n'y a que l'extrêmité de la rame qui ſoit plongée dans l'eau. Mais comme dans la réalité chaque bande de la pale a une viteſſe rélative différente, & fait par conſéquent un effort abſolu différent, & a une diſtance du centre différente ; il eſt utile de calculer ces efforts abſolus & ces momens avec plus de préciſion.

Je ſuppoſe que le mouvement de la rame eſt fait dans un plan vertical ; les concluſions que j'en tirerai s'appliqueront plus naturellement au mouvement des roues à aubes que j'ai principalement en vue, & il n'en ſera pas moins aiſé de les appliquer aux rames inclinées, comme ſont celles des galeres.

J'appellerai la longueur du bras extérieur de la rame exprimée en piés *h*

Celle du bras intérieur ou manche de la rame, en supposant que tout l'effort de la puissance se fait au même point. a
La distance du centre à chaque bande de la pale x
La vitesse de l'extrêmité de la rame qui est plongée dans l'eau v
Celle de chaque bande sera donc $\frac{x}{h}$
Le sinus total r
Celui de l'angle d'inclinaison de la rame avec la ligne horizontale; c'est-à-dire avec la direction de la vitesse c du vaisseau z
La largeur de la pale que je suppose égale partout L

La vitesse rélative de chaque petite bande de la pale sera donc $\frac{xv}{h} - \frac{zc}{r}$. Et par conséquent la force absolue sur chacune de ces petites bandes, dont la longueur est L & la largeur dx, étant exprimée en poids & en livres, sera $\frac{72}{60\frac{1}{3}} L\,dx\,(\frac{xv}{h} - \frac{zc}{r})^2$ & leur moment $\frac{72}{60\frac{1}{3}} L\,x\,dx\,(\frac{xv}{h} - \frac{zc}{r})^2$. Formules dont les intégrales donneront l'effort absolu & le moment de la rame.

Si elle est plongée dans l'eau jusqu'en A, la partie la plus proche du centre qui aura une vitesse moindre que celle du vaisseau, nuira au mouvement, bien loin de le favoriser. L'effort utile de la rame ne commence qu'au point où x est $= \frac{hzc}{rv}$.

Il faut donc, dans la supposition que la rame est plongée jusqu'au centre, après avoir intégré & mis h au lieu de x dans l'intégrale, soustraire de cette même intégrale pour la rendre complette deux fois la valeur de l'intégrale où l'on auroit écrit $\frac{h\,v}{rc}$ au lieu de x. Une fois parce que cette quantité ne doit pas être comprise dans l'effort de la rame, & une seconde fois parce qu'elle agit en sens contraire & détruit une partie de cet effort.

Cette souſtraction ſe fera d'elle-même, quand on cherchera par la méthode ſuivante l'effort & le moment ſur la pale cB qui commence à une diſtance Ac du centre, telle que la viteſſe du point c eſt plus grande ou au moins égale à celle du ſillage. C'eſt pourquoi, dans les calculs ſuivans, je ſuppoſe qu'on aura eu cette attention en plaçant les rames, & je cherche ſimplement quel eſt l'effort & le moment ſur une pale cB, dont le point c a une viteſſe en arriere plus grande que celle du ſillage.

J'appelle la ligne Ac, mh.

Il faut 1°. prendre l'intégrale des formules qui donnent l'élément de l'effort, & celui du moment, en ſuppoſant $x = h$, & ſans y faire aucun changement pour les quantités conſtantes qu'il faudroit ſouſtraire, parce que cette ſouſtraction ſe fera d'elle-même, comme je viens de le dire. 2°. Prendre la même intégrale, en ſuppoſant x égal à mh. 3°. Souſtraire cette ſeconde valeur de la précédente. Le reſte exprimera l'effort abſolu ſur la pale cB dans la premiere formule, & le moment dans la ſeconde. Cet effort abſolu ſera donc

$$\frac{72}{60\frac{1}{3}} Lh \left(\frac{1-m^3}{3} v^2 - (1-m^2) v \frac{z}{r} c + (1-m) \frac{z^2}{r^2} c^2\right).$$

Mais on obſervera que lorſque les rames ne font pas un angle droit avec la direction du ſillage, leur effort qui eſt perpendiculaire à la pale, n'agit pas dans la direction du ſillage. Il faut donc le décompoſer en le multipliant par $\frac{z}{r}$ pour avoir la portion avec laquelle il agit utilement pour le mouvement du vaiſſeau, & avec laquelle il s'oppoſe à la réſiſtance de la proue $\frac{72}{60\frac{1}{3}} fc$. On aura donc

$$Lh \left(\frac{1-m^3}{3} \frac{z}{r} v^2 - (1-m^2) v \frac{z^2}{r^2} c + (1-m) \frac{z^3}{r^3} c^2\right) = fc^2.$$

L'égalité qui doit ſe trouver entre le moment de l'effort abſolu & celui de la puiſſance n nous donnera l'équation

$$Lh^2\left(\frac{1-m^4}{3}v^2-\frac{2}{3}(1-m^3)\frac{z}{r}vc+\frac{1}{2}(1-m^2)\frac{z^2}{r^2}c^2\right)=\frac{60\frac{1}{3}}{72}an.$$

On en peut conclure qu'il eſt plus avantageux d'augmenter la largeur L des rames que leur longueur h, puiſque leurs momens ſont comme les quarrés de h & ſeulement comme les largeurs L, lorſque m eſt une quantité conſtante, c'eſt-à-dire que la longueur de la pale eſt proportionnelle à celle du bras extérieur h.

Si nous voulons connoître l'effort ou le moment d'une roue à aubes, il faudra prendre la ſomme des efforts ou des momens de chaque aube.

PROBLEME SIXIEME.

Trouver les rapports entre les tems T *& les viteſſes* c, *tant lorſque l'action des rames ou des roues à aube eſt continue, que lorſqu'elle eſt interrompue.*

POUR trouver plus aiſément les rapports entre les tems & les viteſſes, & abréger les calculs, on peut ſe contenter de prendre les efforts moyens. En donnant par exemple à $\frac{z}{r}$ une valeur moyenne entre ſes différentes valeurs, on aura l'effort moyen d'une rame qui parcourt dans ſon mouvement un arc connu. Si c'eſt une roue qui fait mouvoir le vaiſſeau, il faut calculer ſes principales ſituations, & prendre l'effort moyen entr'elles. Dans tous ces cas, il ſera toujours exprimé par une formule qui ſe réduira à cette forme :

$$\frac{72}{60\frac{1}{3}}(pv^2-qvc+bc^2,$$

p, q & b exprimant des coëfficiens connus, compoſés des quantités $(1-m)$ L, h, $\frac{z}{r}$, &c.

L'élément de la viteſſe ſera, comme dans le Problême ſecond, $dT = \frac{1}{36} M \int \frac{dc}{pv^2 - qvc + (b-f)c^2}$. Pour intégrer, je partage la fraction qui eſt ſous le ſigne $\int$ en deux autres qui lui ſont égales, & j'écris s au lieu des quantités connues $b-f$; ce qui me donne

$$T = \frac{1}{36} M \int \frac{\frac{dc}{v\sqrt{(q^2-4ps)}}}{\frac{qv - v\sqrt{(q^2-4ps)}}{2s} - c} + \frac{\frac{dc}{v\sqrt{(q^2-4ps)}}}{\frac{-qv - v\sqrt{(q^2-4ps)}}{2s} + c}$$

Après avoir intégré, ajoûté & ſouſtrait les quantités qui rendent l'intégrale complette, comme dans le Problême ſecond, & réduit le logarithme à ceux des tables ordinaires, j'aurai

$$15.6346.\ \frac{v\sqrt{(q^2-4ps)}T}{M} = L\, \frac{-2pv + (q - \sqrt{(q^2-4ps)}).c}{-2pv + (q + \sqrt{(q^2-4ps)}).c}$$

& $c = \frac{2pv}{q + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{(q^2-4ps)}}$, N exprimant la quantité qui eſt ſous le ſigne L.

Si le vaiſſeau avoit une viteſſe k, lorſque l'action des rames, ou des roues a commencé, le rapport entre les tems & les viteſſes, ſera exprimé par cette formule:

$$15.\ 6346.\ \frac{v\sqrt{(q^2-4ps)}}{M}.\ T =$$

$$L\, \frac{2pv^2 - v(q + \sqrt{(q^2-4ps)})k - v(q - \sqrt{(q^2-4ps)})c + 2skc}{2pv^2 - v(q - \sqrt{(q^2-4ps)})k - v(q + \sqrt{(q^2-4ps)})c + 2skc}$$

$$\& \ c = v.\ \frac{2pv - qk + \frac{N+1}{N-1}\sqrt{(q^2-4ps)}k}{vq - 2sk + \frac{N+1}{N-1}v\sqrt{(q^2-4ps)}}$$

On aura la plus grande viteſſe c où puiſſe arriver le vaiſſeau, lorſque alternativement l'action eſt interrompue pendant le tems t & agit pendant un tems T, ſi l'on écrit dans la formule précédente, au lieu de k, ſa valeur $\frac{Mc}{M+36ftc}$ tirée du Problême troiſieme, cela donnera l'égalité

$$c^2 + \frac{2v(qM - 36pvft)c}{36ft\left(qv + v\,\frac{N+1}{N-1}\,.\,\sqrt{(q^2 - 4ps)}\right) - 2sM} =$$

$$\frac{2pv^2M}{36ft\left(qv + \frac{N+1}{N-1}\,.\,v\sqrt{(q^2 - 4ps)}\right) - 2sM}$$

d'où l'on tirera les valeurs de k & de c ; ou, au contraire, ces viteſſes étant connues, on trouvera les tems T & t.

SECONDE PARTIE.

LES principes démontrés dans la premiere Partie de cet ouvrage, indiquent l'effet que nous devons attendre des moyens divers qu'on peut employer pour procurer le mouvement d'un vaiſſeau abandonné par le vent, & guident dans le choix.

Ces moyens peuvent être différens ſelon les circonſtances particulieres de la forme & de la grandeur du vaiſſeau, de la force de l'équipage, de la nature des mers où l'on navige, &c. C'eſt pourquoi nous devons naturellement laiſſer une grande partie du détail de l'exécution à l'habileté des conſtructeurs des navires & de ceux qui les commandent, & nous contenter de marquer en gros le méchaniſme qui nous a paru le plus propre à donner une plus grande viteſſe au vaiſſeau en fatiguant moins l'équipage.

On ne peut gueres penſer à avoir d'autres moteurs que des hommes, les chevaux exigent pour leur ſubſiſtance une trop grande quantité d'eau, de foin & de grains; ils auroient trop de peine à ſupporter le travail, joint à la fatigue du voyage, & on ne peut les employer qu'avec des machines trop compoſées & qui tiennent trop de place. Tâchons donc de tirer le meilleur parti que nous pourrons de la force des hommes.

Rien de plus ſimple que les rames; mais ſi on les fait ſemblables à celles des galeres, leur longueur & leur poids les rendront pénibles, embarraſſantes, & d'un mouvement trop lent pour en attendre un effet qui réponde à la fatigue qu'elles cauſent à l'équipage.

On éviteroit la plus grande partie de ces inconvéniens, en attachant aux deux côtés du vaiſſeau des rames verticales tournant autour d'un eſſieu placé à la hauteur la plus convenable. Les pales ſeroient des vannes à charniere qui ne réſiſteroient que dans un ſens, & qui laiſſeroient un paſſage libre à l'eau lorſqu'elles ſeroient mues dans une direction contraire; je comptois d'en propoſer qui me paroiſſoient aſſez commodes; mais, toutes réflexions faites, j'ai penſé que l'interruption inévitable entre les deux coups de rame, & la réſiſtance qu'on éprouve néceſſairement en les ramenant de la pouppe vers la proue (d'autant plus que leur mouvement eſt alors augmenté par la viteſſe du ſillage), j'ai penſé, dis-je que ces inconvéniens rendoient leur produit beaucoup moindre que celui des roues. Quelque éloignement que les marins aient toujours montré pour ce dernier moyen, on ne peut s'empêcher de convenir qu'il a l'avantage de la continuité de l'action, & de ce qu'on ne porte pas le poids de la rame.

Il ne s'agit ici que de ſuppléer au défaut de vent, c'eſt-à-dire, d'avoir le moyen de naviger lorſque la mer eſt calme. Alors les roues peuvent être employées ſans inconvénient. Rien n'empêche de les conſtruire aſſez légeres pour être enlevées commodément & démontées lorſqu'on ne voudra plus s'en ſervir. Nous les ferons d'un diametre qui ne couvrira pas trop les flancs du vaiſſeau, & qui n'empêchera pas l'uſage de l'artillerie. Enfin nous leur donnerons un moteur qui multiplie en quelque façon la force des hommes ſans qu'il ſoit beſoin d'en multiplier le nombre. On les placera aux deux côtés du vaiſſeau, leur centre élevé de trois piés au-deſſus de la ſurface de l'eau, hauteur où l'on pratique ſans danger des ouvertures & des ſabords. Elles auront ſix piés de rayon; mais il ſuffit que les vannes en occupent trois, car nous avons vu dans le cinquieme Problême que la partie la plus près du centre ne doit pas être plongée dans l'eau.

Une maniere fort ſimple pour les faire tourner, & qui cauſe peu de frottemens, c'eſt d'y joindre du côté le plus proche du vaiſſeau une autre roue *DE* (*Fig. 1 & 2*) d'un moindre diamètre, autour de laquelle on fera paſſer une corde ou chaîne ſans fin, qui enveloppera de même une roue verticale *A* (*Fig. 1*) placée au-deſſus de celle-ci; enſorte qu'elle lui communiquera ſon mouvement par le moyen de la corde qui les environnera toutes les deux.

L'arbre de la roue *A* ſera appuyé ſur deux ou ſur pluſieurs piliers de bois *FG*, qu'on placera & qu'on affermira ſur le tillac lorſqu'on voudra ſe ſervir des roues.

D'autres roues verticales *B*, *C* fixes ſur le même arbre porteront une eſpece d'échelle tournante & ſans fin, faite avec des cordes ou avec des chaînes, leſquelles ſeront jointes par des traverſes ou échelons de bois *KL*, *OP*, & par des cordes *HI*, *MN*, &c. Le mouvement des roues *B* & *C* entraînera celui de la roue *A*, qui eſt fixe ſur le même arbre; & celle-ci fera tourner la roue à vannes. Les Méchaniciens connoiſſent pluſieurs manieres de communiquer ainſi le mouvement d'une roue à l'autre, ſoit par des chaînes fabriquées exprès pour cet uſage, ſoit par des cordes à nœuds, à olives, &c.; & je crois pouvoir me diſpenſer de preſcrire ici aucun de ces moyens en particulier.

Je deſtine le poids des hommes pour être le principe du mouvement de cette machine. En voici la raiſon. Un homme qui tire ou qui pouſſe ne peut agir quelque tems de ſuite qu'en faiſant un effort d'environ vingt-cinq livres, avec une viteſſe qui ne paſſe gueres un pié & demi par ſeconde. Au lieu que le poids des hommes ordinaires étant de cent quarante livres, ſi on leur donne une viteſſe d'un pié par ſeconde, qui ne diminuera preſque pas l'action de leur peſanteur, on triplera, & au-delà l'effet des machines tirées par des hommes.

On placera un échaffaut ou plateforme *R S* (*fig.* 3) capable de contenir le nombre d'hommes néceſſaire au ſervice de la machine, environ trois ou quatre piés au-deſſous du diametre horizontal des roues *B C*, & à deux piés de diſtance au plus de l'échelle tournante qu'elles portent. Ceux qui ſeront rangés ſur le bord de la plateforme, ſaiſiront une des cordes telles que *H I*, ou *M N* (*fig.* 1), dans l'inſtant qu'elle ſe trouvera à la portée de leurs mains, & ſans perdre de tems, appuyeront leurs piés ſur la traverſe ou échelon de bois qui eſt au-deſſous, & ſe laiſſeront couler avec elle juſqu'à terre.

Les diſtances entre ces échelons ſeront combinées avec la hauteur & le diametre des roues *B* & *C*, de ſorte que lorſqu'une bande d'hommes arrive à terre, une autre ſe jette en même tems ſur la machine, afin de conſerver l'égalité de ſon mouvement. Si on trouve à propos d'élever aſſez les roues *B* & *C*, & toute la machine, pour que cette eſpece d'échelle puiſſe contenir pluſieurs rangs d'hommes les uns ſur les autres, on augmentera d'autant la force. Il eſt à propos que ces traverſes qui portent les hommes ne puiſſent parvenir que juſqu'à deux ou trois pouces au-deſſus du tillac, de peur qu'ils ne ſe frappent en arrivant à terre. Cette précaution peut être ſuperflue, mais elle coute peu. Ils quitteront l'échelle ſans perdre de tems, & remonteront ſur la plateforme pour redeſcendre de nouveau bande par bande, lorſque leur tour ſera venu.

Je crois qu'il faut un peu moins de deux piés d'intervalle entre le bord de la plateforme & l'échelle tournante, afin d'un côté que les travailleurs ne ſoient pas obligés de s'élancer de trop loin, au riſque de manquer d'appuyer leurs piés ſur les traverſes. En tout cas, les plus maladroits en ſeront quittes pour reſter ſuſpendus ſur leurs mains pendant un intervalle de tems aſſez court, s'ils n'ont pas eu aſſez d'adreſſe pour appuyer auſſi leurs piés. D'un autre côté, cette diſtance eſt néceſſaire, de peur qu'ils ne ſe bleſſent en deſcendant & en frottant contre la plateforme. On pourra, par un excès de précaution, garnir ce bord d'une bande de natte de paille, ou le rembourrer de quelqu'autre façon.

Il ſera aiſé de gouverner le vaiſſeau avec cette machine. Il ſuffira pour cela d'arrêter ou de diminuer le mouvement d'une ou de pluſieurs roues d'un côté du vaiſſeau, tandis qu'on laiſſera mouvoir celles de l'autre.

Ces roues, avec les plateformes & les échelles pour y monter, n'embarraſſeront pas plus le tillac pendant le calme que les voiles, leurs cordages & leurs agrès l'embarraſſent lorſqu'on cingle avec le vent. Tout cela ſe démontrera lorſqu'on voudra & ſe réduira en un aſſez petit eſpace, & il ſera aiſé de le remonter, même très-ſolidement, lorſqu'on voudra s'en ſervir.

Rien n'empêche d'employer un ſeul de ces équipages d'échelles & de plateformes, &c. pour pluſieurs roues à vannes à la fois. La circonférence de la roue *A* peut avoir deux cannelures différentes (*fig.* 3) dont chacune recevra la corde d'une des roues à vannes.

L'effort que ces cordes auront à ſupporter, n'en exige que d'une groſſeur très-médiocre, & qui ne demanderont pas que les roues *A* & *D* ſoient d'un fort grand rayon pour ſe plier autour d'elles ſans réſiſtance. On peut leur donner communément trois ou quatre piés de diametre. Quand à celles qui forment l'échelle tournante, on peut multiplier à volonté les roues qui la portent, telles que *B* & *C*. Par ce moyen, on ne donnera que peu de largeur à chaque échelle; elles ne porteront qu'un poids médiocre, & il ne faudra point de groſſe corde.

Si on veut ſupprimer la roue *A*, une des deux autres roues *B* ou *C* portera dans une cannelure particuliere deſtinée à cet uſage une corde ſans fin, laquelle paſſant par une ouverture du tillac, ira envelopper & faire tourner entre les deux ponts inférieurs une autre roue. Celle-ci, par le moyen d'un engrenage, fera tourner la roue à vannes. Je n'ai placé cette roue *A* en-dehors du vaiſſeau que pour ne rien changer à ſon intérieur. On pourra encore ſupprimer les roues *B* ou *C*, en élevant un ſeul timpan aſſez haut pour qu'il puiſſe porter une échelle tournante, qui contiendra pluſieurs hommes placés d'étage en étage les uns ſur les autres, mais qui ne feront tout au plus que deux de front ſur le même échelon. La plus grande hauteur pourra compenſer ce qu'on perdra par le défaut de largeur.

Si on réduit ainſi le tout à un ſeul timpan, ne peut-on pas ſe ſervir d'un mât pour l'appuyer en partie, alors chaque mât pourra avoir le ſien. Les plateformes ſeront fort petites, & le tillac en ſera ſi peu embarraſſé, qu'à peine s'en appercevra-t-on.

Si on craint que le peu de roulis qui pourroit reſter au vaiſſeau, malgré le calme, ne cauſe trop d'inégalité au mouvement de cette machine, en enfonçant dans l'eau alternativement les vannes d'un côté & les retirant de l'autre, on peut y remédier en plaçant ces vannes de ſorte qu'elles ſoient au-deſſous de la ſuperficie de l'eau dans leur ſituation verticale. Etant ainſi plongées plus avant, elles ſeront ſujettes à de beaucoup moindres inégalités.

On me demandera quel effet on peut attendre d'une telle machine, & quelles doivent en être les principales dimenſions? Je vais tâcher d'y répondre en peu de mots. J'ai calculé la force & le moment des roues de douze aubes, en ſuppoſant leur rayon de ſix piés, & leur centre élevé de trois piés au-deſſus de la ſurface de l'eau, les vannes occupant trois piés de l'extrêmité du rayon. Le Problême cinquiéme m'a fait connoître l'effet des deux ſituations principales de la roue. Dans l'une un rayon eſt vertical, & deux autres ſont éloignés de la verticale de trente degrés. Dans l'autre, deux rayons sont éloignés de la ligne verticale de 15°, & deux autres de 45°. Les portions de vannes qui choquent l'eau, se trouvent différentes, selon que chaque rayon est différemment incliné ; ce qui donne des valeurs de *m* différentes pour chacune dans les formules du Problême cinquieme.

J'ai supposé dans ces calculs la largeur *L* de dix-huit piés; c'est-à-dire que toutes les roues avoient ensemble dix-huit piés de large. Ainsi, si l'on met trois roues de chaque côté du vaisseau, il faudra leur donner à chacune trois piés de large, & les six ensemble en auront dix-huit; ce qui n'est point excessif, d'autant plus que l'extrêmité extérieure de leur essieu peut être soutenue par quelque appui porté par une espece de console en saillie (*Fig.* 2, où la roue est vue de côté, portée par le flanc XY du vaisseau). Il peut, outre cela, être placé à l'ouverture d'un sabord, & affermi très-solidement par une charpente buttée en-haut & en-bas, entre deux ponts.

J'ai cherché la vitesse du sillage que chacune de ces deux situations de la roue pouvoit produire par sa continuité; d'un autre côté, j'ai cherché celle que donnoit la force moyenne, entre la somme des deux forces de ces deux situations. Tous ces calculs ont concouru à donner, à peu de chose près, pour la vitesse que le mouvement continu pouvoit procurer au sillage $c = o\ 415\ v$; d'où l'on voit que la machine aura peu de variation dans son mouvement lorsque les roues auront douze aubes.

Pour trouver le nombre d'hommes nécessaire au mouvement du vaisseau, je me suis servi de la formule du Problême cinquiéme, qui donne le moment ; & pour tout mettre au pis, j'ai calculé sur le plus grand des deux efforts des deux situations des roues avec la vitesse moyenne $c = o\ 415\ v$. Mettant cette valeur de *c* dans la formule, j'ai trouvé que si les hommes qui font mouvoir la machine descendent avec un pié de vitesse par seconde, & que la circonférence de la roue à aubes en parcoure six dans le même tems, il faudra soixante-quatre hommes sur les échelles pour donner une vitesse de sillage de deux piés & demi par seconde à un des plus grands vaisseaux du premier rang, dont la surface réduite *f* de la proue seroit de cent cinquante piés. Le tems qu'il faut pour acquérir à-peu-près cette vitesse est très-court. Je n'ai même compté que cent vingt-cinq livres au lieu de cent quarante pour le poids de chaque homme, tant à cause que la vitesse avec laquelle ils descendent, diminue un peu l'action de leur pesanteur sur la machine, que pour avoir égard aux frottemens, quelque peu considérables qu'ils soient.

Il faut deux ou trois fois plus de tems aux hommes pour remonter sur les plateformes que pour en descendre; ainsi on aura deux ou trois autres bandes de soixante-quatre hommes pour entretenir le mouvement & tenir les plateformes garnies de gens toujours prêts à descendre. C'est pourquoi on destinera deux cent cinquante hommes ou environ pour faire faire demi-lieue par heure à ce grand vaisseau. Il en faut beaucoup moins pour les vaisseaux plus petits. Leur travail est très-modéré; ce qu'il y a de plus pénible, c'est de monter sur les plateformes par des échelles. Ce n'est plus un travail de forçat comme sur les galeres.

La proportion qu'on mettra entre la roue *A*, la roue *DE*, & les roues *B* & *C*, donnera celle que nous souhaitons entre la vitesse de la descente des hommes & celle que doivent avoir les vannes. Si on veut que celle-ci soit de six piés, tandis que l'autre n'est que d'un pié, on pourra faire les diametres des roues *A* & *D* de quatre piés chacun, & celui des roues ou timpan *B* & *C* de deux piés.

Si

Si les plateformes font élevées de douze piés, on pourra charger l'échelle tournante de deux étages d'hommes, les premiers auront leurs piés fur la traverfe ou échelon *O P*, & leurs mains fur la corde *M N* (*Fig.* 1), tandis que les autres mettront leurs piés fur la traverfe *K L*, qui eft éloignée de fix piés de *O P*, & leurs mains fur la corde *H i*. Les cordes doivent être près de cinq piés au-deffus des traverfes ou échelons de bois.

On peut, fi l'on veut, garnir toute l'échelle d'échelons de bois de deux piés en deux piés, & de cordes entre deux. Un homme occupera environ deux piés de largeur fur cette échelle. Ils peuvent cependant en cas de néceffité s'y tenir un peu de côté, n'appuyant qu'un pié & une main. Il eft aifé de calculer là-deffus le nombre qu'il en faut, & la largeur qui leur eft néceffaire.

On peut encore multiplier l'effet de cette machine, en ne lui donnant pas un mouvement continu. Nous avons vu, dans la premiere partie, qu'il étoit très-avantageux d'augmenter la viteffe de la puiffance, pour pouvoir augmenter en même tems fon bras de levier, c'eft-à-dire, fon éloignement du point d'appui ; ce qui revient au même que de diminuer le bras extérieur de la rame.

Or la feule raifon qui nous oblige de ne donner qu'un pié par feconde de viteffe à l'échelle tournante, c'eft la difficulté de la faifir lorfque fon mouvement feroit rapide. On peut cependant remédier à cet inconvénient, & augmenter fa viteffe, fans ôter la facilité de s'y placer commodément. Il faut pour cela ne faire defcendre qu'un feul rang d'hommes à la fois. Dans l'inftant qu'ils feront à terre, le mouvement fera fort diminué, parce que la roue à vannes ne recevra plus que la feule impulfion de la viteffe du fillage. On profitera de ce moment pour faifir l'échelle & s'y placer.

Rien n'empêche alors de faire defcendre les hommes avec une viteſſe beaucoup plus grande, comme par exemple avec celle de cinq ou ſix piés par ſeconde, qui n'eſt pas exorbitante, puiſqu'on les fait ſouvent en marchant. L'action de leur peſanteur ne ſera diminuée que de peu, comme il eſt aiſé de s'en convaincre. S'ils deſcendent, par exemple, d'une hauteur de quinze piés avec cinq piés de viteſſe par ſeconde, il faudra ſouſtraire les quinze piés qu'ils parcourront pendant les trois ſecondes qu'ils emploieront à deſcendre, des cent trente-cinq que leur peſanteur leur auroit fait parcourir pendant ces trois ſecondes, pour juger de la force qu'elle conſervera pour agir ſur la machine. Cette maniere de calculer la diminution moyenne de leur peſanteur eſt aſſez juſte ſans être véritablement géométrique. Il faudra dans ce cas donner des proportions différentes aux diametres des roues; les problêmes précédens ſerviront à les déterminer, ſelon les circonſtances.

Si on craint que la viteſſe du ſillage ne conſerve trop de mouvement à la roue à vannes, & trop de rapidité à l'échelle tournante pour être ſaiſie commodément, on pourra la réduire à peu de choſe, en employant des vannes qui ne réſiſteront que dans un ſens, & cederont ſans difficulté, lorſqu'elles ſeront preſſées dans une direction contraire. Quoique ce moyen ne ſoit pas toujours abſolument néceſſaire, il peut être employé très-utilement.

Les deux rayons *B D*, *A C* de la roue à aubes (*fig.* 4) deſtinés à porter une vanne, auront des plaques *r s* & *t v* percées d'une ouverture ronde, dans laquelle tourneront librement les deux exrêmités *m* & *n* d'une verge de fer attachée à la vanne *F G*. Ainſi cette vanne ſera appuyée par les rayons *B D* & *A C*, lorſqu'on voudra qu'elle augmente le mouvement du vaiſſeau, & cedera au contraire à la preſſion de l'eau lorſqu'elle ſera pouſſée de l'autre côté.

On peut faire en fer la portion des rayons *A C* & *B D* qui eſt deſtinée à être plongée dans l'eau ; elle en aura moins de volume, & éprouvera par conſéquent moins de réſiſtance. On aura ſoin de leur donner, du côté de la proue, une ſurface qui diminue la réſiſtance, & de mettre leur plus grande largeur dans le ſens parallele au vaiſſeau.

Il eſt à propos que les vannes de bois *F G* aient plus de peſanteur ſpécifique que l'eau, afin qu'elles ſe referment plus promptement. Quelques lames de fer ou de plomb les rendront plus ſolides & plus peſantes. C'eſt par la même raiſon qu'il peut être utile d'en mettre pluſieurs étages ſur les mêmes rayons, comme en *r s* & *t v*. Ayant moins de largeur, & par conſéquent moins de chemin à parcourir pour ſe fermer, elles appuieront plutôt ſur les rayons *B D* & *A C*, lorſque l'action recommencera, & il y aura moins de tems à perdre.

Les deux extrêmités *m*, *n* de la verge qui porte la vanne, étant inſérées dans les plaques *r s* & *t v*, pourront, ſi l'on veut, porter chacune une écroue qui empêchera les rayons *B D* & *A C*, de s'écarter, & rendra tout l'aſſemblage plus ſolide. Il faudra pour cela qu'elles ſoient taillées en forme de vis. On peut auſſi les arrêter plus ſimplement de la même maniere que les roues de charrette ſont arrêtées ſur leurs eſſieux.

Cette conſtruction de roue aura auſſi l'avantage de diminuer la réſiſtance nuiſible des vannes pendant l'inſtant de l'interruption. Elle n'eſt pas conſidérable, & retarderoit peu le ſillage, à cauſe du peu de frottemens de toute la machine, qui fait que la roue cederoit aiſément, quand même les vannes ne ſeroient pas mobiles.

J'ai calculé par le Problême ſixieme l'effet de cette machine pour un vaiſſeau de 7000000 de livres, ou de 3500 tonneaux, & dont la ſurface de réſiſtance ſeroit de 150 piés. C'eſt un vaiſſeau plus grand & plus peſant que ceux qui ſont en uſage. Cependant il y a lieu d'être étonné du peu de monde qu'il faut pour lui donner près de demi-lieue de vitesse par heure. J'ai supposé, comme ci-devant, six roues à vannes de douze aubes chacune, de six piés de rayon & de trois piés de large, la plateforme élevée de dix-huit piés, pour donner à l'échelle tournante six piés de vitesse par seconde, pendant trois secondes consécutives. Je n'ai compté que cent livres de poids à chaque homme, laissant les quarante autres tant pour la vitesse de leur descente que pour les frottemens & la résistance de la roue à vannes pendant l'interruption que j'ai supposée de trois secondes; ce qui est un tems plus que suffisant pour donner aux travailleurs le loisir de se placer à leur aise sur l'échelle, & à la roue de reprendre son mouvement. Seize à dix-sept hommes suffiront pour donner deux piés par seconde de vitesse au vaisseau, lorsque celle de l'extrêmité des vannes sera de six piés.

Il faudra un plus grand nombre d'hommes si les vannes ne sont pas mobiles, parce que les roues étant mues par la vitesse du sillage, lorsque l'échelle est vuide, on ne pourra allonger le bras de levier de la puissance que jusqu'au point où l'échelle vuide ne garderoit qu'un pié de vitesse, afin de pouvoir être saisie aisément. Je suis persuadé qu'on pourroit aussi, sans vannes mobiles, diminuer la vitesse de la roue à aubes pendant l'interruption, par le peu de méchanisme qu'on emploiera dans les cordes qui communiqueront le mouvement; on peut en imaginer quelqu'un qui donnera à la corde la faculté d'entraîner la roue avec elle, sans donner à la roue à aubes celle de faire mouvoir la corde & de communiquer son mouvement à l'échelle tournante.

On peut conclurre de tout cela que ces roues ne perdent pas leur avantage sur les autres moyens de faire mouvoir les vaisseaux, quoique leur action soit interrompue, surtout si le tems de l'interruption n'est pas plus long que celui de l'action. C'est même la maniere la plus commode de donner une plus grande viteſſe au ſillage du vaiſſeau ſur lequel j'ai fait tous ces calculs, ſans augmenter le nombre des roues ni leur rayon. Par exemple, cent ſoixante hommes ſur les échelles tournantes lui donneroient quatre piés de viteſſe par ſeconde, s'ils en avoient une de cinq piés, & ſi la circonférence de la roue à vannes mobiles en parcouroit douze dans le même tems. J'ai eu égard, dans ce calcul, à la hauteur où le mouvement des vannes fait reſter l'eau au-deſſous de ſon niveau. C'eſt une attention qu'il ne faut pas négliger dans ces ſortes de cas.

Il ſera toujours utile d'élever les plateformes le plus qu'on pourra, pour que le tems de l'action ſoit plus long par rapport à l'autre. Je crois auſſi qu'il eſt à propos qu'un de ceux qui ſont prêts à ſaiſir l'échelle, donne un ſignal avec la voix à tous les autres du même rang, afin qu'ils le faſſent tous enſemble.

Quoique je croie l'avantage des roues démontré, j'avoue cependant qu'il y a des cas où la ſimplicité du méchaniſme des rames ordinaires, lorſqu'on ne manque ni de monde, ni de place, pourra plaire par préférence à une machine qui épargne à la vérité le nombre d'ouvriers, mais qui eſt plus compoſée. Je ne blâmerai pas alors ceux qui les emploieront. J'ai tâché de donner, dans la premiere Partie de cet ouvrage, les principes néceſſaires pour décider de ce qui convient le mieux à chaque circonſtance. Je n'en dirai pas davantage, d'autant plus que j'écris pour des lecteurs ſi éclairés, que ſi le fond de mon idée peut leur plaire, leurs lumieres ſuppléeront au défaut de la maniere de l'expliquer.

FIN.

INVESTIGATIO PERTURBATIONUM

Quibus Planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur.

Autore LEONARDO EULERO, Matheſeos Profeſſore, Academiarum Pariſienſis, Berolinenſis & Petropolitanæ Socio.

Sidera quod tantis cieant ſe viribus æquis
In motu terræ plurima ſigna docent.

Hæc Diſſertatio meruit Præmium duplicatum anno M.DCC.LVI.

PRÆFATIO.

PLANETAS non ſolum ad Solem ſecundum inverſam diſtantiarum rationem duplicatam impelli, ſed etiam ſimili ratione ſe mutuo incitare ex perturbationibus motuum Saturni & Jovis manifeſto eſt perſpectum. Cum enim Tabulæ Aſtronomicæ ita conſtrui ſoleant, quaſi planetæ ad ſolum Solem ſollicitati ſecundum regulas Keplerianas in ellipſibus revolverentur, ſi ex iis loca Saturni vel etiam Jovis definiantur ea nonnunquam ad plura minuta prima à veritate aberrare deprehenduntur; neque jam ullum eſt dubium, quin iſti errores ab actione mutua, qua hi duo planetæ ſe invicem impellunt, proficiſcantur. Reliquorum quidem planetarum motus ac præcipue terræ regulis illis Keplerianis magis eſt conformis, ac ſi quando errores in eorum motu à Tabulis occurrunt, incertum plerumque eſt, utrum illi vel non recte conſtitutis Tabularum elementis, vel ipſarum obſervationum imperfectioni cuipiam potius ſint tribuendi, quam ipſi Theoriæ, cui Tabulæ innituntur. Interim tamen jam ipſa tabularum ratio, qua pro quolibet planeta tam lineæ abſidum quam lineæ nodorum motus peculiaris aſſignatur, manifeſtum indicium aberrationis cujuſdam à Theoria continet: ſi enim planetæ nullam aliam impulſionem præter eam qua ſecundum rationem quadrati diſtantiarum inverſam ad ſolem urgentur, ſuſtinerent, non ſolum circa ſolem tanquam focum perfectas deſcriberent ellipſes, ſed etiam perpetuo in eodem plano ferrentur, axeſque iſtarum ellipſium omnino fixi manerent; neque idcirco linea abſidum neque linea nodorum ulli obnoxia foret mutationi, ſaltem reſpectu ſtellarum fixarum. Ad hanc quoque normam computatæ ſunt à ſtretio Tabulæ Carolinæ, in quibus tam apheliis quam nodis ſingulorum planetarum in cœlo ſidereo loca fixa aſſignantur; at vero inſignis harum tabularum à veritate diſſenſus mox luculenter monſtravit, huic hypotheſi locum concedi non poſſe. Cum igitur certum ſit tam aphelium quam linea nodorum cujuſque planetæ motu peculiari per cœlum proferri, atque etiam reſpectu ſtellarum fixarum continuo mutari; minime amplius dubitare licet, quin præter eam vim conſtantem, qua ſinguli planetæ ad ſolem pelluntur, aliæ quoque vires in eos effectum quempiam exerant. Quemadmodum enim in Saturno & Jove præter alias perturbationes ab eorum actione mutua utriusque lineæ absidum & nodorum certus imprimi motus est inventus observationibus satis consentaneus, ita multo minus dubitare poterimus, quin similis variatio in apheliis & nodis reliquorum quoque planetarum ab eorum actione mutua proficiscatur, etiamsi in cæteris motus horum planetarum elementis nulla alteratio perciperetur. Sunt autem effectus talium virium in loca apheliorum & nodorum ita comparati, ut etiamsi sint minimi, tamen cum tempore continuo crescant, & post satis longum intervallum sensibiles evadant dum reliquæ perturbationes inde oriundæ sunt periodicæ, & post certas revolutiones iterum penitus in nihilum redigantur, unde fit ut si sint minimæ, percipi omnino non possint. Interim tamen Theoria motus telluris, cujus elementa per observationes Solis multo accuratius definire licet quam reliquorum planetarum, haud obscura talium minimarum perturbationum signa exhibet, dum excentricitas ejus orbitæ prouti alia atque alia tempestate per observationes investigatur, modo aliquantum major modo minor deprehenditur, quæ inconstantia ad integrum minutum assurgere videtur. Quibus perpensis palam omnino est non solum motum Saturni ac Jovis, sed etiam reliquorum planetarum ab aliis viribus præter eam qua lege constanti ad Solem pelluntur, perturbari, earumque adeo effectum ab Aſtronomis manifeſto eſſe obſervatum. Quamvis enim Aſtronomorum Princeps Halleyus Mercurii motum ab hujuſmodi perturbationibus prorſus immunem ſit arbitratus, propterea quod ob ſummam ſolis vicinitatem reliquorum planetarum vires præ vi Solis quaſi evaneſcere crediderit, qua ſententia fretus in tabulis ſuis etiam neque Aphelio Mercurii neque ejus lineæ nodorum motum ullum reſpectu ſtellarum fixarum adſcripſit: tamen ex poſtremo potiſſimum tranſitu hujus planetæ per ſolem Aſtronomi didicerunt Halleyi Tabulas inſigni emendatione ex hac parte indigere, dum aphelio Mercurii motum annuum quaſi 55″, ejuſque nodo 45″ ratione æquinoxii tribui debere eſt compertum; ex quo manifeſtum eſt etiam Mercurium actiones reliquorum planetarum ſentire ob eaſque certis perturbationibus eſſe obnoxium.

Cum igitur extra dubium ſit poſitum planetas in ſe invicem attrahendo agere, diſpiciendum eſt quamnam rationem eorum vires reſpectu ad diſtantias habito ſequantur. Ac præterquam quod conſtantia naturæ eandem legem quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem, quam in Sole ſtabilitam cernimus, exigere videtur, Theoria Lunæ atque Satellitum Jovis & Saturni hanc ſuſpicionem pleniſſime confirmat, ita ut amplius dubitare non liceat, quin Jupiter Saturnuſque ſuos Satellites, & Terra Lunam ad ſe alliciant viribus quadratis diſtantiarum reciproce proportionalibus; & quamquam motus Apogei Lunæ aberrationem tantillam ab hac lege innuere eſſet viſus, tamen à celeberrimo CLAIRAUT primum pulcherrimus conſenſus eſt evictus, ita ut jam audacter aſſeverare queamus non ſolum Solem ſed etiam cunctos planetas vi attractrice eſſe prædictos, qua omnia corpora ad maximas etiam diſtantias remota ad ſe præciſe ſecundum illam conſtantem legem attrahant. Quin etiam pari fere fiducia pronunciare licet, ſingulorum planetarum vires, quas ad diſtantias æquales exerunt, ipſorum maſſis eſſe proportionales, id quod communis centri gravitatis ſtatus poſtulare videtur: de cætero maſſam ſeu quantitatem materiæ, quam quiſque planeta continet, aliunde nobis cognoſcere non datur; nihilque impedit, quo minus id, cui vis abſoluta cujuſque planetæ revera eſt proportionalis, nomine maſſæ ejus deſignemus; hinc ſaltem nullus certe error eſt pertimeſcendus. Terra igitur perinde ac reliqui planetæ omnes non ſolum verſus Solem, ſed etiam verſus ſingulos reliquos planetas viribus legi iſti ſacræ conformibus ſollicitatur, à quibus ſine dubio præter promotionem illam apheliorum & nodorum aliæ vehementer exiguæ perturbationes efficiuntur, quarum inventio in Aſtronomia ſine dubio maximi eſt momenti.

Hinc naſcitur quæſtio latiſſime patens ad Mechanicam referenda, qua determinatio motus plurium corporum, quæ ſe mutuo attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, requiritur; cujus ſolutio eo ardentius eſt expetenda, quod omnia incrementa Aſtronomiæ, quæ adhuc deſiderantur, ex ea derivanda videantur. Verum enodatio hujus quæſtionis tot tantiſque difficultatibus eſt involuta, ut ſi in genere ſpectetur, vires ingenii humani longe ſuperare videatur; etſi enim caſus duorum corporum facilem habeat ſolutionem, tamen ſtatim ac tria aſſumuntur, nulla adhuc inventa ſunt artificia, quorum ope ad motus determinationem pervenire licuerit, unde multo minus pro caſu plurium corporum quicquam ſperare poſſumus. Interim tamen cum perturbationes, quas planetæ ſibi mutuo inferunt, ſint perquam exiguæ, neque eæ, quæ ab actione unius oriuntur, à reliquis affici ſint cenſendæ; hinc non contemnendum ſubſidium, impetramus aliquid ſaltem in hoc arduo negotio præſtandi, dum effectus ſingulorum planetarum ſeorſim inveſtigare licebit, & quoniam ſunt minimi, conſuetis calculi approximationibus, quarum in hujuſmodi quæſtionibus

uberrimus

uberrimus ſolet eſſe uſus, totum negotium confici debebit. In hunc etiam modum Illustris Academia Regia Parisina iſtam quæſtionem tractandam judicavit, cujus præceptis ut pro viribus ſatisfaciam, operam dabo, ut primo hoc abſtruſſimum argumentum ex primis Mechanicæ fontibus dilucide evolvam; atque ad æquationes analyticas perducam: tum vero quibuſnam modis ex iis aliquid per approximationes concludi queat, accuratius inveſtigabo. Denique præcepta quæ elicuero, ad perturbationes motus terræ accommodabo, examinaturus, quantum ſingula hujus motus elementa ab actione reliquorum planetarum continuo immutentur, quod inſtitutum ſequentibus ſectionibus abſolvere conabor.

INVESTIGATIO
PERTURBATIONUM

Quibus Planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur.

SECTIO PRIMA.

Generalis investigatio motus corporis à viribus quibuscunque impulsi.

§. I. SUMATUR pro lubitu cum planum, ad quod motus corporis referatur, quodque plano tabulæ repræsentari concipiatur, tum vero in hoc plano linea recta fixa CA, atque in hac ipsa punctum fixum C, ubi quasi motus spectator sit constitutus. Jam ad quodvis tempus, ubicunque corpus motum versetur veluti in R, de ejus loco R in illud planum demittatur perpendiculum RQ, ita ut punctum Q ejus locum ad hoc planum relatum exhibeat, deinde etiam ex puncto fixo C ad ambo loca *Fig. 1.*

R & Q ducantur rectæ CR & CQ. Quo facto perſpicuum eſt, ſi ad quodvis tempus aſſignare valeamus cum angulos ACQ & QCR, tum magnitudinem ſive rectæ CQ ſive CR, locum corporis R perfecte fore cognitum, indeque verum corporis motum innoteſcere; ita ut plena motus cognitio determinatione horum trium elementorum contineatur.

§. II. Hoc autem potiſſimum modo inveſtigationem motus inſtituo, cum quod videtur maxime naturalis, tum vero præcipue quod ad conſuetudinem Aſtronomorum, qua motus corporum cœleſtium conſiderare ſolent, imprimis eſt accommodatus. Namque ſi planum fixum tanquam planum eclipticæ ſpectemus, rectamque CA tanquam rectam ad ejus quodpiam punctum fixum directam, corpore moto in R exiſtente, angulus ACQ ejus longitudinem, angulus vero QCR ejus latitudinem referet; & quemadmodum recta CR ejus diſtantiam veram à puncto C denotat, ita recta CQ diſtantiam ejus curtatam deſignabit, quarum alteram tantum in calculum introduxiſſe ſufficiet. Vocemus igitur pro quovis tempore propoſito.

I. Longitudinem corporis ſeu angulum $ACQ = \varphi$.
II. Latitudinem ejus ſeu angulum $QCR \ldots = \psi$.
III. Diſtantiam curtatam ſeu rectam $CQ \ldots = x$.

§. III. Cognitis vero his tribus elementis, omnia, quæ ad motus notitiam pertinent, definiri poterunt. Primo enim ex diſtantia curtata $CQ = x$ & latitudine $QCR = \psi$ habetur diſtantia vera $CR = \psi$ ſeu $CR = \frac{x}{cof.\,\psi}$ poſito ſinu toto conſtanter $= 1$. Tum vero ipſa diſtantia corporis à plano erit $QR = x\ tang.\ \varphi$. Deinde ſi à puncto Q ad rectam fixam CA ducatur normalis QP, ex diſtantia curtata $CQ = x$ & longitudine $ACQ = \varphi$, elicitur $CP = x\,cof.\,\varphi$ & $PQ = x\,fin.\,\varphi$; atque hoc modo pro loco puncti R, uti in Geometria fieri folet, ternas obtinemus coordinatas inter fe rectangulas CP, PQ & QR. A quibus cum etiam inveftigatio mechanica incipiat, has lineas tantifper peculiaribus fignis indicemus, quoad calculum ad illa primaria elementa perducere licuerit. Sit igitur $CP = x\,cof.\,\varphi = p$; $PQ = x\,fin.\,\varphi = q$ & $QR = x\,tang.\,\psi = r$; ficque habebimus $x = \surd(pp + qq)$; $cof.\,\varphi = \frac{p}{\surd(pp+qq)}$; $fin.\,\varphi = \frac{q}{\surd(pp+qq)}$ & $tang.\,\psi = \frac{r}{\surd(pp+qq)}$.

§. IV. Hæc autem motus elementa ex follicitatione virium quarum actioni corpus fuerit fubjectum, fecundum præcepta mechanica determinari opportet. A quibufcunque autem viribus corpus impellatur, eas femper per notam refolutionem ad ternas directiones determinatas revocare licet. Concipiamus igitur corpus à tribus viribus follicitari, quarum prima urgeat fecundum directionem RQ ad planum fixum normalem, binarum autem reliquurum directiones fint ipfi plano parallelæ; altera quidem habeat directionem diftantiæ curtatæ QC parallelam, altera vero huic normalem, cui in plano fixo parallela fit recta QN ad CQ normalis. Iftas vires ftatuamus acceleratrices, five jam ad corporis maffam applicatas, eafque denotemus;

I. Vim acceleratricem fecundum $QC = V$

II. Vim acceleratricem fecundum $QN = T$

III. Vim acceleratricem fecundum $RQ = R$

Ita, ut, quomodo per has vires terna illa elementa φ, ψ & x determinentur, fit inveftigandum.

§. V. Cum autem regulæ mechanicæ ad ternas coordinatas normales, quarum directiones perpetuo maneant fixæ accommodatæ effe foleant, harum autem virium tertia tantum RQ cum una coordinatarum conveniat, dum diarum reliquarum directiones QC & QN maxime ſunt variabiles, & has ad directiones fixas revocari conveniet. Dabit igitur vis V reſoluta:

Secundum directionem $PC = V\, cof.\, \varphi$
& ſecundum QP vim $= V\, fin.\, \varphi$;

vis vero T ſimili modo reſoluta:

Secundum directionem $PC = -T\, fin\, \varphi$
& ſecundum QP vim $= T\, cof.\, \varphi$.

Hinc itaque pro directionibus noſtrarum ternarum coordinatarum PC, QP, & RQ obtinebimus tres vires acceleratrices ſequentes quæ ſunt:

I. Vis acceleratrix ſecundum $PC = V\, cof.\, \varphi - T\, fin.\, \varphi$
II. Vis acceleratrix ſecundum $QP = V\, fin.\, \varphi + T\, cof.\, \varphi$
III. Vis acceleratrix ſecundum $RQ = R$.

§. VI. Quoniam actio harum ternarum virium ad diminutionem coordinatarum reſpondentium tendit, accelerationes quæ corpori inde ſecundum eaſdem coordinatas inducuntur negativæ ſunt concipiendæ. Cum igitur poſito temporis elemento $= dt$, ſint corporis celeritates ſecundum has coordinatas $\frac{dp}{dt}$; $\frac{dq}{dt}$ & $\frac{dr}{dt}$; ſi elementum temporis dt pro conſtanti aſſumamus, erunt ipſæ accelerationes ſecundum iſtas directiones $\frac{ddp}{dt^2}$; $\frac{ddq}{dt^2}$; $\frac{ddr}{dt^2}$, quæ viribus illis acceleratricibus negative ſumtis debent eſſe proportionales. Proportionalitate ergo, uti fieri ſolet, ſtabilita obtinebimus ternas ſequentes æquationes.

I. $ddp = -\frac{1}{2}dt^2\,(V\, cof.\, \varphi - T\, fin.\, \varphi)$
II. $ddq = -\frac{1}{2}dt^2\,(V\, fin.\, \varphi + T\, cof.\, \varphi)$
III. $ddr = -\frac{1}{2}R\, dt^2$

quarum æquationum reſolutione tota motus determinatio continetur.

§. VII. Jam iterum ambas vires V & T commode à se invicem separare licet, ut pateat quid utraque seorsim præstet. Nam I × $cos. \phi$ + II × $sin. \phi$ dat

$$ddp\,cos.\phi + ddq\,sin.\phi = -\tfrac{1}{2}V\,dt^2$$

Deinde II × $cos. \phi$ — I × $sin. \phi$ præbet hanc æquationem

$$ddq\,cos.\phi - ddp\,sin.\phi = -\tfrac{1}{2}T\,dt^2$$

at ex tertia vi R nascitur æquatio $ddr = -\tfrac{1}{2}R\,dt^2$. Nunc igitur recordandum est nos supra posuisse

$$p = cos.\phi;\quad q = x\,sin.\phi \;\&\; r = x\,tang.\psi$$

unde loco quantitatum subsidiariarum p, q, r, elementa nostra principalia ϕ, ψ & x in calculum introduci poterunt. Tres autem emergent æquationes, quæ propterea his tribus elementis definiendis sufficient: atque ita tota investigatio à principiis mechanicis ad Analysin puram traducetur.

§. VIII. Cum sit $p = x\,cos.\phi$ & $q = x\,sin.\phi$ erit differentiando;

$$dp = dx\,cos.\phi - x\,d\phi\,sin.\phi \;\&\; dq = dx\,sin.\phi + x\,d\phi\,cos.\phi$$

denuoque differentiando

$$ddp = ddx\,cos.\phi - 2dx\,d\phi\,sin.\phi - x\,d\phi^2\,cos.\phi - x\,dd\phi\,sin.\phi$$

$$ddq = ddx\,sin.\phi + 2dx\,d\phi\,cos.\phi - x\,d\phi^2\,sin.\phi + x\,dd\phi\,cos.\phi$$

unde per combinationem elicitur

$$ddp\,cos.\phi + ddq\,sin.\phi = ddx - x\,d\phi^2$$

$$\&\; ddq\,cos.\phi - ddp\,sin.\phi = 2\,dx\,d\phi + x\,dd\phi.$$

Valorem autem ipsius $r = x\,tang.\psi$ nulla adhibita evolutione tantisper retineamus, donec compererimus, quomodo aptissime eum tractari conveniat. Hoc itaque pacto totum negotium ad resolutionem trium sequentium æquationum erit perductum:

$$\text{I.}\quad ddx - x\,d\phi^2 = -\tfrac{1}{2}V\,dt^2$$

$$\text{II.}\quad 2\,dx\,d\phi + x\,dd\phi = -\tfrac{1}{2}T\,dt^2$$

$$\text{III.}\quad dd.\,x\,tang.\psi = -\tfrac{1}{2}R\,dt^2.$$

§. IX. Cum hæ æquationes ſint differentiales ſecundi gradus, temporis differentiali dt ſumto conſtante, primum diſpiciendum eſt, quamnam proportionem differentialia prima $d\phi$, $d\psi$ & dx cum inter ſe tum ad temporis differentiale dt teneant, quod etſi ſine introductione formularum integralium fieri nequit, quamdiu vires ſollicitantes V, T & R in genere conſideramus, tamen eæ proportionem quæſitam minus perturbare ſunt cenſendæ. Quin etiam in negotio quod ſuſcipimus, ipſæ vires V, T & R quantitates incognitas, ϕ, ψ & x cum tempore t implicare reperientur, quominus earum ſeparatio perfecta expectari poterit. Pro initio igitur contenti eſſe debebimus, formulas noſtras à contemplatione differentialium ſecundorum liberaſſe, & quocunque modo relationem differentialium primorum determinaſſe, ut deinceps, approximationum artificio in ſubſidium vocato, ipſarum quantitatum finitarum relationem inde colligere valeamus.

§. X. Tertiam quidem æquationem $dd.\ x\ tang.\ \psi = -\frac{1}{2} R\, dt^2$ tantiſper ſeponamus, poſtmodum inveſtigaturi, quo modo ejus ratio convenientiſſime haberi queat; ambas igitur priores, quæ ſunt:

$$\text{I. } ddx - x\,d\phi^2 = -\tfrac{1}{2} V\,dt^2 \ \&$$

$$\text{II. } 2\,dx\,d\phi + x\,dd\phi = -\tfrac{1}{2} T\,dt^2$$

accuratius perpendamus, ut inde relationem differentialium primorum dx, $d\phi$ & dt eliciamus. Ac primo quidem prius membrum ſecundæ æquationis ſi per x multiplicetur, redditur integrale, proditque

$$d\,(xx\,d\phi) = -\tfrac{1}{2} \textstyle\int T x\,dt^2$$

$$\text{ſeu } xx\,d\phi = \tfrac{1}{2}\,dt\,(C - \textstyle\int T x\,dt)$$

unde ſi vis T ſecundum directionem QN trahens evaneſcat, oritur æquabilis arearum deſcriptio. Hinc autem patet eandem illam æquationem integrabilem reddi ſi multiplicetur non ſolum per x, ſed etiam inſuper per functionem

functionem quamcunque ipsius $xxd\varphi$; Multiplicetur ergo per $xd\varphi$; eritque integrale:

$$\tfrac{1}{2}x^4 d\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}dt^2 \int Tx^3 d\varphi,$$

seu $x^4 d\varphi^2 = dt^2 (A - \int Tx^3 d\varphi)$;

unde invenitur

$$dt^2 = \frac{x^4 d\varphi^2}{A - \int Tx^3 d\varphi} \ \& \ dt = \frac{xxd\varphi}{\surd(A - \int Tx^3 d\varphi)}.$$

§. XI. Cum igitur sit $xd\varphi^2 = \frac{dt^2}{x^3}(A - \int Tx^3 d\varphi)$, hoc valore in prima æquatione substituto habebimus:

$$ddx = dt^2 \left(\tfrac{A}{x^3} - \tfrac{1}{x^3}\int Tx^3 d\varphi - \tfrac{1}{2}V\right),$$

quæ per $2dx$ multiplicata & integrata præbet:

$dx^2 = dt^2 (B - \frac{A}{xx} - 2\int \frac{dx}{x^3}\int Tx^3 d\varphi - \int Vdx)$. At est

$$-2\int \tfrac{dx}{x^3}\int Tx^3 d\varphi = \tfrac{1}{xx}\int Tx^3 d\varphi - \int Txd\varphi$$

quo valore introducto erit:

$dx^2 = dt^2 (B - \frac{A}{xx} + \frac{1}{xx}\int Tx^3 d\varphi - \int Txd\varphi - \int Vdx)$, vel

$x^2 dx^2 = dt^2 (Bxx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx\int (Txd\varphi + Vdx))$,

unde nanciscimur

$$dt = \frac{\pm xdx}{\surd(Bxx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx\int(Txd\varphi + Vdx))} \ \&$$

$$d\varphi = \frac{\pm dx\surd(A - \int Tx^3 d\varphi)}{x\surd(Bxx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx\int(Txd\varphi + Vdx))}.$$

§. XII. Ambiguitas signorum, quam motus natura involvit, ita ab arbitrio nostro pendet, ut positivum valeat, si motum ab eo loco, ubi corpus puncto fuit proximum, definire velimus, negativum vero si à distantia maxima discesserit. Quoniam igitur in Astronomia usus est, motum corporum à maxima distantia computare, valeat signum negativum, ut habeamus has duas æquationes:

$$dt = \frac{-xdx}{\surd(Bxx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx\int(Txd\varphi + Vdx))}$$

$$d\varphi = \frac{-dx\surd(A - \int Tx^3 d\varphi)}{x\surd(Bxx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx\int(Txd\varphi + Vdx))};$$

cujus poſterioris loco & hæc primum inventa $d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{(A - \int T x^3 d\varphi)}$ uſurpari poteſt. Sunt autem A & B quantitates conſtantes, per duplicem integrationem invectæ, quæ deinceps ad quemvis caſum oblatæ accommodari debent.

§. XIII. Quando vis normalis T evaneſcit, alteraque vis V ad C tendens per ſolam diſtantiam x determinatur, utraque æquatio habebit variabiles ſeparatas, ita ut non ſolum differentialium dt & $d\varphi$ ratio ad dx abſolute poſſit aſſignari, ſed etiam per integrationem ipſæ quantitates finitæ t & φ per diſtantiam x definiri: hocque ergo caſu problematis ſolutio perfecta poterit exhiberi. Neque vero in genere hæ formulæ magis ad uſum accommodari poſſe videntur. Sed contentos nos eſſe opportet, hoc pacto rationem differentialium dt, $d\varphi$ & dx elicuiſſe. Quamvis enim adſint formulæ integrales $\int T x d\varphi$, $\int T x^3 d\varphi$, & $\int V dx$ hanc ipſam rationem involventes, eæ tamen negotium approximationis non multum turbant, dummodo earum valores ſint perquam exigui, propterea quod tunc ſufficit rationes differentialium prope veras noſſe. Verum ipſum approximationis negotium alias requirit conſiderationes, antequam cum ſucceſſu ſuſcipi queat, quas deinceps evolvemus.

§. XIV. Perductis igitur binis prioribus æquationibus differentio-differentialibus ad formulas ſimpliciter differentiales, quæ ad uſum maxime videntur accommodatæ, tertiam quoque æquationem $ddr = -\frac{1}{2} R dt^2$ inſtituto convenientius transformare conemur. Quæ cum latitudinis ψ determinationem ob $r = x\ tang.\ \psi$ contineat commodiſſime ea inſtituetur, ſi more apud Aſtronomos recepto lineam nodorum cum inclinatione orbitæ ad planum aſſumtum in calculum introducamus. Hunc in finem conſideretur quovis momento planum, quod puncto fixo C & ſpatiolo à corpore jam jam percurrendo determinetur. Quodque pro isto saltem momento planum orbitæ appellare liceat. Sit igitur dum corpus versatur in R recta $C\Omega$ intersectio plani orbitæ & plani assumti, quæ linea nodorum vocari solet, atque ad latitudinem ψ commodius investigandam ponamus:

I. Longitudinem lineæ nodorum seu angulum $AC\Omega = \pi$,
II. Inclinationem plani orbitæ ad planum assumtum $= G$;

quæ duo nova elementa tanquam utcunque variabilia contemplor.

§. XV. Ad inclinationem autem definiendam ex punctis R & Q ad lineam nodorum $C\Omega$ ducantur normales RS & QS, quarum inclinatio seu angulus QSR inclinationem metietur, ita ut sit $QSR = G$. Deinde ob angulum $\Omega CQ = \varphi - \pi$ & $CQ = x$, erit $QS = x\,\mathit{sin.}\,(\varphi - \pi)$; unde fit $QR = x\,\mathit{sin.}\,(\varphi - \pi)\,\mathit{tang.}\,G$. Cum igitur habeamus $QR = r = x\,\mathit{tang}\,\psi$, erit:

$$\mathit{tang.}\,\psi = \mathit{sin.}\,(\varphi - \pi)\,\mathit{tang.}\,G;$$

sicque ex elementis φ, π & G, latitudo quæsita ψ reperietur. Quoniam autem loco latitudinis ψ duo nova elementa π & G æque ad locum corporis sequentem pertineant; unde differentiale ipsius ψ seu *tang.* ψ idem prodire debet sive elementa ambo π & G sumantur constantia, sive ambo variabilia, ex qua proprietate relatio inter π & G innotescet, quæ locum quartæ æquationis sustinebit, si quidem jam quatuor elementa x, φ, π & G in calculo habemus.

§. XVI. Cum igitur positis π & G constantibus sit

$$d.\,\mathit{tang.}\,\psi = d\varphi\,\mathit{cos.}\,(\varphi - \pi)\,\mathit{tang.}\,G,$$

iisdem autem tanquam variabiles tractatis prodeat

$$d.\,\mathit{tang.}\,\psi = (d\varphi - d\pi)\,\mathit{cos.}\,(\varphi - \pi)\,\mathit{tang.}\,G + \mathit{sin.}\,(\varphi - \pi)\,d.\,\mathit{tang.}\,G;$$

his valoribus inter se æquatis obtinebimus

$$d.\,tang.\,G = \frac{d\pi\, cos.\,(\phi - \pi)}{sin.\,(\phi - \pi)}\, tang.\,G,$$

$$\text{seu}\ \frac{d.\,tang.\,G}{tang.\,G} = \frac{d\pi\, cos.\,(\phi - \pi)}{sin.\,(\phi - \pi)}.$$

Sufficit igitur longitudinem nodi π ejusque variationem determinavisse, indeque facile inclinatio orbitæ G definietur; est enim $\frac{d.\,tang.\,G.}{tang.\,G.}$ differentiale logarithmi ipsius G, quod si ita indicemus $d.\,l\,tang.\,G$, erit

$$d.\,l\,tang.\,G = \frac{d\pi\, cos.\,(\phi - \pi)}{sin.\,(\phi - \pi)} = d\pi\, cot.\,(\phi - \pi).$$

Patet igitur nisi linea nodorum sit fixa ideoque $d\pi = o$, inclinationem orbitæ continuis variationibus esse obnoxiam, quarum autem alteræ ex alteris facile definiri poterunt.

§. XVII. Propositum autem est invenire ddr, cujus valor ob $r = x\, tang.\,\psi$ est: $ddx\, tang.\,\psi + 2dx\, d.\,tang.\,\psi + x\,dd\ tang.\,\psi = -\frac{1}{2} R\,dt^2$. Verum invenimus:

$$tang.\,\psi = sin.\,(\phi - \pi)\ tang.\,G\ ,\ \text{atque}$$

$$d.\,tang.\,\psi = d\phi\, cos.\,(\phi - \pi)\ tang.\,G;\ \text{unde ob}$$

$$d.\,tang.\,G = \frac{d\pi\, cos.\,(\phi - \pi)}{sin.\,(\phi - \pi)}\, tang.\,G,$$ erit porro differentiando

$$dd.\,tang.\,\psi = dd\phi\, cos.\,(\phi - \pi)\, tang.\,G - d\phi\,(d\phi - d\pi)\ sin.\,(\phi - \pi)\ tang.\,G + \frac{d\phi\, d\pi\, cos.\,(\phi - \pi)^2}{sin.\,(\phi - \pi)}\ tang.\,G,$$

$$\text{sive}\ dd.\,tang.\,\psi = dd\phi\,(cos.\,(\phi - \pi) - d\phi^2\, sin.\,(\phi - \pi) + \frac{d\phi\, d\pi}{sin.\,(\phi - \pi)})\, tang.\,G.$$

Quibus valoribus substitutis tertia æquatio induet hanc formam

$$\left\{\begin{matrix} + ddx\, sin.\,(\phi - \pi) + 2dx\,d\phi\, cos.\,(\phi - \pi) \\ + x\,dd\phi\, cos.\,(\phi - \pi) - x\,d\phi^2\, sin.\,(\phi - \pi) + \dfrac{x\,d\phi\,d\pi}{sin.\,(\phi - \pi)} \end{matrix}\right\} tang.\,G = -\tfrac{1}{2} R\,dt^2$$

At ex binis prioribus æquationibus erat : $ddx - xd\varphi^2 = -\frac{1}{2}Vdt^2$ & $2dxd\varphi + xdd\varphi = -\frac{1}{2}Tdt^2$; sicque fiet:

$$\left(-\tfrac{1}{2}Vdt^2 fin.(\varphi-\pi) - \tfrac{1}{2}Tdt^2 cof.(\varphi-\pi) + \frac{xd\varphi d\pi}{fin.(\varphi-\pi)}\right) tang.G = -\tfrac{1}{2}Rdt^2, \text{ seu}$$

$$\frac{xd\varphi d\pi}{fin.(\varphi-\pi)} = \tfrac{1}{2}dt^2\left(V fin.(\varphi-\pi) + T cof.(\varphi-\pi) - \frac{R}{tang.G}\right).$$

§. XVIII. Ex viribus igitur sollicitantibus V, T & R quaterna nostra elementa x, φ, π & G ad quodvis tempus t per sequentes quaternas æquationes differentiales primi gradus determinantur.

$$\text{I. } dt = \frac{-xdx}{\sqrt{(Bxx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx\int(Txd\varphi + Vdx))}}$$

$$\text{II. } d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{(A - \int Tx^3 d\varphi)}.$$

$$\text{III. } d\pi = \frac{dt^2 fin.(\varphi-\pi)}{2xd\varphi}\left(V fin.(\varphi-\pi) + T cof.(\varphi-\pi) - \frac{R}{tang.G}\right).$$

$$\text{IV. } d.l.tang.G = \frac{d\pi\, cof.(\varphi-\pi)}{fin.(\varphi-\pi)}, \text{ seu } d.l.tang.G = \frac{dt^2 cof.(\varphi-\pi)}{2xd\varphi}\left(V fin.(\varphi-\pi) + T cof.(\varphi-\pi) - \frac{R}{tang.G}\right).$$

quæ æquationes in genere vix tractabiliores reddi posse videntur, nisi certa quædam virium sollicitantium relatio accedat.

SECTIO II.

Reductio harum formularum ad casum quo corpus imprimis ad punctum fixum urgetur vi in quadratis distantiarum reciproce proportionali, cujus respectu reliquæ vires sunt valde parvæ.

§. XIX. QUONIAM nobis est propositum in perturbationes motus planetarum quatenus ab eorum actione mutua oriuntur inquirere, tantum jam pro certo assumere licet, eorum motum, proxime saltem, regulis Keplerianis esse conformem ac perturbationes quas definiri opportet, vehementer esse exiguas. Moderatio igitur præcipua motus eorum efficitur à vi quadam ad punctum fixum secundum rationem reciprocam duplicatam distantiarum tendente, præ qua reliquæ vires quasi evanescant. Diserte enim fateri cogor, nisi hujusmodi vis inter reliquas vires sollicitantes longe emineat, nullo plane modo me perspicere, qua ratione ad aliqualem saltem motus cognitionem pertingere nobis liceat. Minime autem casui tribuendum videtur, quod hujusmodi motus, quorum investigatio vires nostras penitus superaret, etiamsi æque facile existere potuissent, in mundo non deprehendantur.

Fig. I. §. XX. Sit igitur C id punctum, ad quod vis illa principalis quadratis distantiarum reciproce proportionalis dirigatur, si quidem hactenus hoc punctum ab arbitrio nostro pendebat. Neque tamen hanc vim quadrato distantiæ veræ RC reciproce proportionalem statuamus quoniam ejus reductio ad nostras formulas denuo latitudinem involveret. Sed quoniam planum fixum semper ita assumere licet, ut corpus ab eo non nisi quam minime recedat, angulusque ψ perpetuus sit valde exiguus, casum ita stabiliamus, ut vis V secundum directionem QC sollicitans habeat partem eximiam quadrato distantiæ $QC = x$ reciproce proportionalem, cujus respectu tam reliqua pars quam binæ reliquæ vires T & R pro minimis haberi queant. Statuamus igitur $V = \frac{ff}{xx} + S$ ita ut vires S, T & R præ vi $\frac{ff}{xx}$ quasi evanescant.

§. XXI. Posito autem $V = \frac{ff}{xx} + S$ erit $\int V dx = \frac{-ff}{x} + \int S dx$ & $xx\int V dx = -ffx + xx\int S dx$, quo valore in nostris formulis surrogato habebimus,

I. $dt = \dfrac{-x dx}{\sqrt{(Bxx + ffx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx(\int Tx d\varphi + \int S dx))}}$.

II. $d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{(A - \int Tx^3 d\varphi)}$, seu $d\varphi =$
$\dfrac{-dx(A - \int Tx^3 d\varphi)}{x\sqrt{(Bxx + ffx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx(\int Tx d\varphi + \int S dx))}}$.

$$\text{III. } d\pi = \frac{dt^2 \,\text{fin.}(\varphi - \pi)}{2x d\varphi} \times$$
$$\left(\frac{xx}{ff}\text{fin.}(\varphi - \pi) + S\,\text{fin.}(\varphi - \pi) + T\,\text{cof.}(\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang.}\,G}\right).$$

IV. $d.\,l.\,\text{tang.}\,G = \dfrac{d\pi\,\text{cof.}(\varphi - \pi)}{\text{fin.}(\varphi - \pi)}$, seu $d.\,l.\,\text{tang.}\,G = \dfrac{dt^2 \text{cof.}(\varphi - \pi)}{2x d\varphi} \times$
$$\left(\frac{ff}{xx}\text{fin.}(\varphi - \pi) + S\,\text{fin.}(\varphi - \pi) + T\,\text{cof.}(\varphi - \pi) - \frac{R}{\text{tang.}\,G}\right).$$

Unde latitudo ψ ita determinatur ut fit $\text{tang.}\,\psi = \text{fin.}(\varphi - \pi)\,\text{tang.}\,G$. Hasque æquationes, quatenus termini litteras S, T & R involventes sunt minimi, ad institutum nostrum propius accommodari opportet.

§. XXII. Quo rationem parvitatis virium T & S facilius in calculum introducere queamus, contemplemur primum casum, quo istæ vires penitus evanescunt; binæque priores æquationes sequentem induent formam:

$$\text{I. } dt = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(Bxx + ffx - A)}} \;\&$$

$$\text{II. } d\varphi = \frac{dt\sqrt{A}}{xx} = \frac{-dx\sqrt{A}}{x\sqrt{(Bxx + ffx - A)}};$$

quarum evolutio ita est in promtu, ut introducendo quodam angulo v, qui anomalia vera vocari solet, si ponatur $x = \frac{b}{1 - k\,cos.\,v}$, constantes illæ A & B per has novas b & k ita definiri queant, ut formula irrationalis $\sqrt{(Bxx + ffx - A)}$ evanescat sive angulus v sit $= o$ sive duobus rectis æqualis. Atque hinc oritur notissima motus elliptici ratio, pro quo littera b denotat semiparametrum ellipsis & k ejus excentricitatem, seu focorum distantiam per axem transversum divisam. Accedentibus autem viribus minimis T & S motus aliquantillum ab hac lege discrepabit.

§. XXIII. Discrimen scilicet in hoc consistet, quod jam quantitates b & k non amplius futuræ sunt constantes, sed variabilitatem à viribus T & S oriundam implicent. Quamobrem ponamus $x = \frac{p}{1 - q\,cos.\,v}$, sitque ut ante v ejusmodi angulus, quo sive evanescente sive ad 180° increscente, distantia x fiat sive maxima sive minima: seu quod eodem redit ut fiat $dx = o$, si sit $fin.\,v = o$. Cum igitur sit: $dx = -\frac{dt}{x} \times \sqrt{(Bxx + ffx - A + \int Tx^3 d\varphi - xx(\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx))}$ formula irrationalis, posito $x = \frac{p}{1 - q\,cof.\,v}$, factorem $fin.\,v$ involvere seu hujusmodi formam $W\,fin.\,v$ habere debebit: quod ut eveniat ipsæ quantitates variabiles p & q debito modo definiri conveniet. At posito præterquam in

in formulis integralibus $x = \frac{p}{1 - q\,cos.\,v}$, habebimus: $dx = -\frac{dt}{p} \times$
$\sqrt{(Bpp + ffp(1 - q\,cos.\,v) - A(1 - q\,cos.\,v)^2 + (1 - q\,cos.\,v)^2 \int Tx^3 d\varphi - pp(\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx))}$.

§. XXIV. Evolvamus hanc formulam secundum $cos.\,v$ hoc modo:

$$dx = -\frac{dt}{p}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} Bpp + ffp - A + \int Tx^3 d\varphi - pp(\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx) \\ - ffpq\,cos.\,v + 2Aq\,cos.\,v - 2q\,cos.\,v.\int Tx^3 d\varphi \\ - Aqq\,cos.\,v^2 + qq\,cos.\,v^2 \int Tx^3 d\varphi \end{array}\right\}}$$

jam ut in signo radicali $sin.\,v^2$ seu $1 - cos.\,v^2$ involvatur, reddamus terminos ipsum $cos.\,v$ continentes nihilo æquales, unde divisione per $2q\,cos.\,v$ instituta fit:

$-\frac{1}{2}ffp + A - \int Tx^3 d\varphi = o$, seu $A - \int Tx^3 d\varphi = \frac{1}{2}ffp$,
hocque valore substituto orietur:

$$dx = -\frac{dt}{p}\sqrt{\left\{\begin{array}{l} Bpp + \frac{1}{2}ffp - pp(\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx) \\ - \frac{1}{2}ffpqq\,cos.\,v^2. \end{array}\right\}}$$

Fiat porro:
$Bpp + \frac{1}{2}ffp - pp(\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx) = \frac{1}{2}ffpqq$,
seu $\frac{1}{2}ffqq = Bp + \frac{1}{2}ff - p(\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx)$
quo facto habebitur:

$$dx = -\frac{dt}{p}\sqrt{(\tfrac{1}{2}ffpqq - \tfrac{1}{2}ffpqq\,cos.\,v^2)} = -\frac{fq\,dt\,sin.\,v}{\sqrt{2p}}.$$

§. XXV. Posito ergo $x = \frac{p}{1 - q\,cos\,v}$, ut p exprimat semiparametrum, & q excentricitatem ellipsis, utramque ob perturbationes variabilem, atque v anomaliam veram, hæ quantitates ita per vires T & S determinari debent ut sit;

$$p = \frac{2A - 2\int Tx^3 d\varphi}{ff}, \ \&$$

$$qq = \frac{ff + 2Bp - 2p(\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx)}{ff}.$$

Cum autem hæ ipsæ quantitates, evanescentibus viribus T & S, evadant constantes, sicque earum valores quasi medii prodire debeant, ponantur hi $p = b$ & $qq = kk$, hincque constantes A & B instituto convenienter ita definientur ut sit:

$$b = \frac{2A}{ff} \text{ seu } A = \tfrac{1}{2} bff, \&$$
$$kk = \frac{ff + 2Bb}{ff} \text{ seu } B = \frac{-ff(1-kk)}{2b}.$$

Hinc itaque habebimus:

$$p = b - \tfrac{2}{ff} \int Tx^3 d\phi,$$
$$qq = 1 - \tfrac{(1-kk)p}{b} - \tfrac{2p}{ff}(\int Tx\, d\phi + \int S\, dx).$$

§ XXVI. Valoribus igitur p & q ita stabilitis, ut earum variabilitas tantum à viribus T & S, quarum actio est valde parva, pendeat, obtinebimus inde:

Ipsam distantiam curtatam $x = \frac{p}{1 - q \cos. v}$,
Ejusque differentiale . . . $dx = \frac{-fq\, dt \sin. v}{\sqrt{2p}}$.

Tum vero erit ut ante invenimus:

$$d\phi = \tfrac{dt}{xx} \sqrt{(A - \int Tx^3 d\phi)} = \tfrac{dt}{xx} \sqrt{(\tfrac{1}{2} bff - \int Tx^3 d\phi)},$$
$$\text{vel etiam } d\phi = \tfrac{f dt}{xx} \sqrt{\tfrac{1}{2} p} = \tfrac{f dt (1 - \cos. v)^2}{p\sqrt{2p}}.$$

Sicque commodius differentialia dx & $d\phi$ per differentiale temporis dt habentur expressa. Hæ autem formulæ in locum binarum priorum æquationum (§. XXI) inventarum sunt substituendæ; quod vero ad binas posteriores attinet, quæ ad latitudinem spectant, eas deinceps seorsim considerabo, quia earum evolutio non tantis est subjecta difficultatibus. Hic igitur ita binis prioribus inhærebo, quasi binæ posteriores prorsus abessent.

§. XXVII. Verum conditio, qua esse debet $dx = \frac{-fg\, dt \sin. v}{\sqrt{2p}}$ existente $x = \frac{p}{1 - q \cos. v}$, novam determinationem continet, quæ indolem anomaliæ veræ v & quemadmodum ejus differentiale sit comparatum definiet. Cum enim sit $1 - q\, cos.\, v. = \frac{p}{x}$ erit, differentiando & pro dx valorem $-\frac{fq\,dt\, sin.\, v}{\sqrt{2p}}$ substituendo:

$$-dq\, cos.\, v + q\, dv\, sin.\, v = \frac{dp}{x} + \frac{fq\, dt\, sin.\, v}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p}, \text{ seu}$$

$$q\, dv\, sin.\, v. = \frac{dp}{x} + dq\, cos.\, v + \frac{fq\, dt\, sin.\, v}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p}.$$

Per valores autem pro p & q supra inventos, etiam harum quantitatum differentialia innotescunt: erit enim

$$dp = -\frac{2Tx^3 d\varphi}{ff} = -\frac{Tx\,dt}{f}\sqrt{2p} \text{ ob } d\varphi = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p}, \text{ \&}$$

$$d.\frac{qq}{p} = -\frac{dp}{pp} - \frac{2Tx\,d\varphi}{ff} - \frac{2S\,dx}{ff} =$$

$$\frac{Tx\,dt}{fpp}\sqrt{2p} - \frac{T\,dt}{fx}\sqrt{2p} + \frac{2Sq\,dt\, sin.\, v}{f\sqrt{2p}}$$

substitutis pro dp, $d\varphi$ & dx valoribus inventis. Qua formula porro evoluta oritur:

$$\frac{2q\,dq}{p} = -\frac{Tqqx\,dt}{fpp}\sqrt{2p} + \frac{Tx\,dt}{fpp}\sqrt{2p} - \frac{T\,dt}{fx}\sqrt{2p} + \frac{2Sq\,dt\, sin.\, v.}{f\sqrt{2p}}$$

quæ ob $p = x(1 - q\, cos.\, v)$ reducitur ad hanc formam:

$$dq = \frac{Tx\,dt}{2fp}(2\, cos.\, v - q - q\, cos.\, v^2)\sqrt{2p} + \frac{Sp\,dt\, sin.\, v}{f\sqrt{2p}}.$$

§. XXVIII. Cum igitur sit:

$$\frac{dp}{x} = -\frac{T\,dt}{f}\sqrt{2p} = -\frac{2Tx\,dt(1 - q\, cos.\, v)}{2fp}\sqrt{2p} \text{ erit}$$

$$\frac{dp}{x} + dq\, cos.\, v = \frac{Tx\,dt}{2fp}(2\, cos.\, v^2 + q\, cos.\, v - q\, cos.\, v^3 - 2)\sqrt{2p} + \frac{Sp\,dt\, sin.\, v\, cos.\, v}{f\sqrt{2p}},$$

hæc forma ob $1 - cos.\, v^2 = sin.\, v^2$ perducitur ad istam

$$\frac{dp}{x} + dq\, cos.\, v = -\frac{Tx\,dt\, sin.\, v^2}{f\sqrt{2p}}(2 - q\, cos.\, v) + \frac{Sp\,dt\, sin.\, v\, cos.\, v}{f\sqrt{2p}},$$

quo valore in superiori expressione pro $q\,dv\,\mathit{sin}.v$ inventa substituto, divisione facta per $q\,\mathit{sin}.v$, habebitur:

$$dv = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} - \frac{Tx\,dt\,\mathit{sin}.v}{fq\sqrt{2p}}(2 - q\,\mathit{cos}.v) + \frac{Sp\,dt\,\mathit{cos}.v}{fq\sqrt{2p}}.$$

Hæc autem porro, ob $x(1 - q\,\mathit{cos}.v) = p$, transit in formas sequentes:

$$dv = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}p - \frac{T\,dt\,\mathit{sin}\,v}{fq}\sqrt{2p} - \frac{Tx\,dt\,\mathit{sin}.v.\mathit{cos}.v.}{f\sqrt{2p}} + \frac{Sp\,dt\,\mathit{cos}.v}{fq\sqrt{2p}}, \text{ seu}$$

$$dv = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}p - \frac{p\,dt(2T\,\mathit{sin}\,v - S\,\mathit{cos}.v)}{fq\sqrt{2p}} - \frac{Tx\,dt\,\mathit{sin}.v\,\mathit{cos}.v}{f\sqrt{2p}}, \text{ vel etiam}$$

$$dv = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}}p + \frac{x\,dt\,(S\,\mathit{cos}\,v.(1 - q\,\mathit{cos}.v) - T\,\mathit{sin}.v.(2 - q\,\mathit{cos}.v))}{fq\sqrt{2p}}.$$

§. XXIX. Quoniam porro est:

$$d\varphi = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} \;\&\; dx = -\frac{fq\,dt\,\mathit{sin}.v}{\sqrt{2p}} \text{ erit:}$$

$$\int Tx^3\,d\varphi = f\int Tx\,dt\sqrt{\tfrac{1}{2}p}$$

$$\int Tx\,d\varphi = f\int \frac{T\,dt}{x}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} \;\&$$

$$\int S\,dx = -f\int \frac{Sq\,dt\,\mathit{sin}.v}{\sqrt{2p}}, \text{ ideoque}$$

$$\int Tx\,d\varphi + \int S\,dx = f\int \frac{dt}{\sqrt{2p}}(T(1 - q\,\mathit{cos}.v) - Sq\,\mathit{sin}.v).$$

His igitur valoribus substituendis non solum formulæ integrales, quæ etiamnunc in calculum ingrediuntur, ad differentiale temporis reducuntur, sed etiam omnium quantitatum variabilium, quibus jam erit utendum, differentialia per idem temporis differentiale dt erunt expressa. Neque vero adhuc ulla approximatione sumus usi, unde hæ determinationes etiam locum habent, tametsi forte vires T & S non fuerint adeo exiguæ. Interim tamen parum subsidii inde consequi licet, nisi istæ vires valde fuerint parvæ.

§. XXX. Hæ autem formulæ maxime videntur idoneæ, ad motus aberrationes à regulis Kepplerianis definiendas; referuntur enim ad motum in ellipsi continuo variabili tam ratione ejus parametri & excentricitatis quam ſitus lineæ abſidum. Quovis enim tempore minimo motus corporis ita conſiderari poteſt, quaſi fieret in ellipſi ſecundum regulas Keppleri, ac ſi pro quolibet tempore conſtet magnitudo iſtius ellipſis, ejuſque excentricitas una cum ſitu lineæ abſidum, ex formulis inventis verus corporis locus, quatenus ad planum aſſumtum refertur, aſſignari poterit. Aſſumo igitur ad tempus propoſitum t orbitæ ad planum noſtrum fixum relatæ eſſe

I. Semiparametrum orbitæ $= p$,

II. Excentricitatem ejus $= q$,

III. Atque anomaliam veram corporis $= v$.

Unde cum longitudo corporis poſita ſit $= \varphi$, longitudo abſidis ſummæ definietur angulo $= \varphi - v$.

§ XXXI. Ex his igitur elementis ellipticis primo deducitur diſtantia curtata $CQ = x$ ope formulæ $x = \frac{p}{1 - q\, cof.\, v}$; unde poſito angulo $v = o$ colligitur diſtantia abſidis ſummæ $= \frac{p}{1-q}$ & poſito $v = 180°$ diſtantia abſidis imæ à puncto $C = \frac{p}{1+q}$, quarum ſumma $\frac{2p}{1-qq}$ præbet axem tranſverſum orbitæ ellipticæ, cujus propterea ſemiſſis eſt $= \frac{p}{1-qq}$, & ſemiſſis diſtantiæ focorum $= \frac{pq}{1-qq}$: tum vero ſemi axis conjugatus erit $= \frac{p}{\sqrt{(1-qq)}}$. Deinde vero ipſa corporis longitudo ſeu angulus $ACQ = \varphi$ ita per hæc elementa determinatur, ut ſit:

$$d\varphi = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p}, \text{ ſeu } d\varphi = \frac{f\,dt\,(1 - q\, cof.\, v)^2}{p\sqrt{2p}};$$

unde ea per integrationem elici poterit, dummodo lex conſtet, qua quantitates variabiles p, q & v cum tempore mutentur, hanc autem variabilitatis legem jam eruimus.

§. XXXII. Si nullæ adessent vires perturbantes T & S, tam parameter orbitæ $2p$ quam excentricitas q essent quantitates constantes, atque anomalia vera v cum longitudine φ paria caperet incrementa; sicque ob $d\varphi - dv = o$, linea absidum immota maneret. Videamus igitur quales mutationes hæ quantitates subire debeant accedentibus istis viribus perturbatricibus T & S. Ac primo quidem ob $Tx^3 d\varphi = fTx\,dt\sqrt{\tfrac{1}{2}p}$, tempusculo dt semiparametri p incrementum inventum est:

$$dp = -\frac{Tx\,dt}{f}\sqrt{2p} = -\frac{Tp\,dt\sqrt{2p}}{f(1 - q\,cos.v)}$$

quod ergo tantum à vi T pendet, nisi quatenus variabilitas quantitatum q & v simul alteram vim S involvit. Hinc igitur erit:

$$\frac{dp}{p\sqrt{p}} = -\frac{T\,dt\sqrt{2}}{f(1 - q\,cos.v)} \;\&\; \frac{2}{\sqrt{p}} = \int\frac{T\,dt\sqrt{2}}{f(1 - q\,cos.v)}$$

seu cum medius valor ipsius p sit $= b$ erit:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{f\sqrt{2}}\int\frac{T\,dt}{1 - q\,cos.v}.$$

§. XXXIII. Secundo incrementum excentricitatis dq ita expressum invenimus pro tempusculo dt, ut sit:

$$dq = \frac{Tx\,dt(2\,cos.v - q - q\,cos.v^2) + Sp\,dt\,sin\,v}{f\sqrt{2p}},$$

quo substituto pro x valore $\frac{p}{1 - q\,cos.v}$ abit in

$$dq = \frac{p\,dt}{f\sqrt{2p}}\left(\frac{T}{1 - q\,cos.v}(2\,cos.v - q - q\,cos.v^2) + S\,sin.v\right), \text{ seu}$$

$$dq = \frac{dt}{f}\left(T\,cos.v + S\,sin.v + T.\frac{cos.v - q}{1 - q\,cos.v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p}, \text{ vel etiam}$$

$$dq = \frac{dt}{f}\left(2\,T\,cos.v + S\,sin.v - \frac{Tq\,sin\,v^2}{1 - q\,cos.v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p};$$

in qua formula ultimus terminus præ binis præcedentibus erit valde parvus, si quidem excentricitas q non adeo fuerit notabilis. Cognitis igitur viribus T & S cum anomalia vera, hinc facile colligitur, quantum excentricitas intervallo minimi tempusculi dt immutetur, quemadmodum ex formula præcedente variatio semiparametri p inotescit.

§. XXXIV. Hinc etiam definiri potest variabilitas axis transversi ellipsis, cum enim ejus semissis sit $= \frac{p}{1-qq}$ erit ejus differentiale:

$$d. \frac{p}{1-qq} = \frac{(1-qq)\,dp + 2pq\,dq}{(1-qq)^2}.$$

Quod si jam valores pro dp & dq inventi substituantur, reperitur reductione rite facta:

$$d. \frac{p}{1-qq} = -\frac{p\,dt\sqrt{2p}}{f(1-qq)^2}\,(T - q\,(T\,cos.\,v + S\,sin.\,v)).$$

Quare si semi-axis transversus ponatur $= r$, ut sit $r = \frac{p}{1-qq}$, ob $\frac{p\sqrt{2p}}{(1-qq)^2} = rr\sqrt{\frac{2}{p}}$, fiet

$$dr = -\frac{rr\,dt}{f\sqrt{\frac{1}{2}p}}\,(T - q\,(T\,cos.\,v + S\,sin.\,v)),\ \text{seu}$$

$$\frac{-dr}{rr} = d.\frac{1}{r} = \frac{dt\,(T - q\,(T\,cos.\,v + S\,sin.\,v))}{f\sqrt{\frac{1}{2}p}}.$$

Unde, si semi-axis transversus medius ponatur $= a$, fiet

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \int \frac{dt}{f\sqrt{\frac{1}{2}p}}\,(T - q\,(T\,cos.\,v + S\,sin.\,v)).$$

§. XXXV. Denique mutatio instantanea lineæ absidum est indaganda, cujus longitudo cum sit $= \varphi - v$, erit ejus incrementum tempusculo dt ortum $= d\varphi - dv$. Verum invenimus:

$$d\varphi = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\frac{1}{2}p} = \frac{f\,dt\,(1 - q\,cos.\,v)^2}{p\sqrt{2p}},\ \&$$

$$dv = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} + \frac{x\,dt\,(S\,cos.\,v\,(1 - q\,cos.\,v) - T\,sin.\,v\,(2 - q\,cos.\,v))}{fq\sqrt{2p}},\ \text{seu}$$

$$dv = d\varphi + \tfrac{dt}{fq}\left(S\,cos.v - \frac{T\,(2 - q\,cos.v)\,sin.v}{1 - q\,cos.v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p}.$$

Unde colligimus

$$d\varphi - dv = \tfrac{dt}{fq}\left(\frac{T\,(2 - q\,cos.v)\,sin.v}{1 - q\,cos.v} - S\,cos.v\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p} =$$

$$\tfrac{dt}{fq}\left(\frac{T\,sin.v}{1 - q\,cos.v} + T\,sin.v - S\,cos.v\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p}, \text{ five}$$

$$d\varphi - dv = \tfrac{dt}{fq}\left(2\,T\,sin.v - S\,cos.v + \frac{Tq\,sin.v\,cos.v}{1 - q\,cos.v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p}.$$

Hinc igitur patet motum lineæ abſidum eo fieri notabiliorem, quo minor fuerit excentricitas q; qua evaneſcente etiam in infinitum abire videtur. Verum notandum eſt, quo minor fuerit excentricitas, eo minus referre verum lineæ abſidum locum noſſe.

§. XXXVI. Poſtremo ad eadem elementa reducere poterimus æquationum principalium (§. XXI) binas poſteriores; cum enim ſit $d\varphi = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p}$ erit $\frac{dt^2}{2x\,d\varphi} = \frac{x\,dt}{f\sqrt{2p}}$, mutationes momentaneæ, quas cum linea nodorum tum inclinatio orbitæ ad planum fixum ſubibunt, ita per tempuſculum minimum dt erunt expreſſæ:

$$d\pi = \frac{x\,dt\,sin\,(\varphi - \pi)}{f\sqrt{2p}}\left(\frac{ff}{xx}\,sin.(\varphi - \pi) + S\,sin.(\varphi - \pi) + T\,cof.(\varphi - \pi) - \frac{R}{tang.G}\right)$$

$$d\,l\,tang.G = \frac{x\,dt\,cof.(\tau - \pi)}{f\sqrt{2p}}\left(\frac{ff}{xx}\,sin\,(\varphi - \pi) + S\,sin.(\varphi - \pi) + T\,cof.(\varphi - \pi) - \frac{R}{tang.G}\right).$$

Unde latitudo ψ ita definitur ut ſit $tang.\psi = sin.(\varphi - \pi)\,tang\,G$. Hic quidem partes adſunt à viribus perturbatricibus non pendentes, verum hoc inde venit, quod vim quadratis diſtantiarum reciproce proportionalem in plano fixo aſſumſimus. Si enim ea, uti rei natura poſtulat, ſecundum diſtantiam veram RC aſſumatur, iſtæ partes à vi $\frac{R}{tang.G}$ tollentur, id quod in applicatione fiet manifeſtum.

SECTIO III.

SECTIO III.

Investigatio Virium quibus motus Planetæ principalis ab actione alius Planetæ perturbatur.

§. XXXVII. Cum perturbationes, quibus planetæ principales se mutuo afficiunt, sint vehementer parvæ, dum uniuscujusque planetæ perturbationes investigamus, motum reliquorum tanquam regulis Kepleri perfecte conformem spectare licebit: tantillus enim error, qui hac ratione in motu planetæ perturbantis admittitur, in effectu multo minorem, hoc est evanescentem producere est censendus. Quoniam igitur quæstio ad planetas principales adstringitur, punctum fixum *C* in centro solis assumi conveniet; & quia motus planetæ perturbantis in plano fieri potest judicari, hoc ipsum planum pro plano illo fixo, ad quod motum planetæ turbati referre constituimus, commodissime assumemus. Cum enim invenerimus, quomodo motus istius planetæ respectu hujus plani immutetur, facile erit perturbationes ad quodvis aliud planum in cœlo fixum traducere, sicque inconstantiam, cui planum orbitæ planetæ perturbantis est obnoxium, exuere.

§. XXXVIII. Conveniat igitur planum tabulæ cum plano orbitæ planetæ perturbantis, in quo *C* sit centrum solis, & *CA* recta inde ad fixum cœli punctum ducta, unde longitudines numerentur. Ad datum ergo tempus *t* planeta perturbans sit in hujus plani puncto *V*, à quo ductâ rectâ *CV*, ponatur: *Fig. II.*

I. Diſtantia hujus planetæ à ſole . . . $CV = y$

II. Longitudo ejus ſeu angulus ACV . . . $= \theta$

Quod ſi ergo vis, qua hic planeta in V ad ſolem urgetur ſit $= \frac{ff}{yy}$, ejuſque orbitæ ſemi latus rectum, ſeu ſemiparameter $= c$, ejus excentricitas $= e$, & anomalia vera $= u$, erit per formulas ſupra inventas:

$$y = \frac{c}{1 - e\,cos.u}; \;\&\; d\theta = du = \frac{f\,dt}{yy}\sqrt{\tfrac{1}{2}c} = \frac{f\,dt\,(1 - e\,cos.u)^2}{c\sqrt{2c}};$$

unde fit $dy = -\frac{c\,e\,du\,fin.u}{(1 - e\,cos.u)^2} = -\frac{e\,f\,dt\,fin.u}{\sqrt{2c}}$; ſicque hæc differentialia ad elementum temporis dt habemus reducta.

§. XXXIX. Alter jam planeta, cujus perturbationes motus indagamus, extra hoc planum reperiatur in R unde ad id ducto perpendiculo RQ, junctiſque rectis RC & QC, ſit ut ante:

I. Ejus diſtantia à ſole curtata ſeu recta $CQ = x$

II. Longitudo ejus ſeu angulus ACQ . . $= \phi$

III. Latitudo ejus ſeu angulus QCR . . . $= \psi$

Unde fit ejus diſtantia à ſole vera . . . $= \frac{x}{cos.\psi}$

Verum pro latitudine conſiderentur linea nodorum $C\Omega$ & inclinatio orbitæ ad planum orbitæ prioris planetæ, ſitque

IV. Longitudo nodi aſcendentis ſeu angulus $AC\Omega = \pi$

V. Inclinatio orbitæ ſeu angulus QSR . . . $= G$

ex quibus elementis latitudo ita exprimitur, ut ſit

$$tang.\,\psi = fin.\,(\phi - \pi)\;tang.\,G.$$

Quod ſi porro jungantur rectæ QV & RV, erit

$$QV = \sqrt{(xx + yy - 2xy\,cof.\,(\phi - \theta))}, \;\&$$

$$VR = \sqrt{\left(\frac{xx}{cof.\psi^2} + yy - 2xy\,cof.(\phi - \theta)\right)} = z$$

ponamus enim brevitatis gratia hanc distantiam $VR = z$.

§. XL. Cum jam planeta R tam ad solem quam ad alterum planetam V attrahatur in ratione reciproca duplicata distantiarum, sit utraque vis ita comparata, ut ad distantiam d habeatur

vis acceleratrix ad solem tendens . . . $= \frac{E}{dd}$,

vis acceleratrix ad planetam tendens . . $= \frac{F}{dd}$.

Hinc itaque planeta in R urgebitur

primo ad solem secundum RC vi $= \frac{E \cos. \psi^2}{xx}$,

deinde ad planetam in V secundum RV vi $= \frac{F}{zz}$.

Quoniam vero ipse sol quoque ad planetam V sollicitatur secundum CV vi acceleratrice $= \frac{F}{yy}$, ut solem in quiete retineamus hæc vis secundum directionem contrariam Qv in planetam R transferri debet, hincque iste præterea sollicitabitur:

Secundum directionem Qv vi $= \frac{F}{yy}$.

Quin etiam ipse planeta V omnino ad solem urgeri censendus est secundum VC vi $= \frac{E+F}{yy}$, quam modo posueramus $= \frac{ff}{yy}$.

§. XLI. Nunc vero ante omnia vires planetam R sollicitantes revocari debent ad directiones QC, QN & RQ, ut inde valores virium assumtarum V, T & R obtineantur. Ac primo quidem vis secundum $RC = \frac{E \cos. \psi^2}{xx}$ præbet

Secundum directionem QC vim $= \frac{E \cos. \psi^3}{xx}$ pro vi V,

Secundum directionem RQ vim $= \frac{E \sin. \psi \cos. \psi^2}{xx}$ pro vi R;

Secunda vis secundum $RV = \frac{F}{zz}$, ob $QR = x\, tang.\, \psi$, & $VR = z$, præbet

Secundum directionem RQ vim $= \frac{F.QR}{z^3} = \frac{F x\, tang.\, \psi}{z^3}$ pro R.

Tum vero secundum QV vim $= \frac{F.QV}{z^3}$ quæ, ob

$$QV\, cos.\, CQV = -y\, cos.\, (\phi - \theta) + x \;\&$$
$$QV\, sin.\, CQV = y\, sin.\, (\phi - \theta),$$

reducitur ad binas sequentes

Secundum QC vim $= \frac{-F}{z^3}(y\, cos.\, (\phi - \theta) - x)$ pro vi V,

Secundum QN vim $= \frac{F y\, sin.\, (\phi - \theta)}{z^3}$ pro vi T;

Denique tertia vis secundum $Qv = \frac{F}{yy}$, ob $CQv = \phi - \theta$, dat

Secundum QC vim $= \frac{F\, cos.\, (\phi - \theta)}{yy}$ pro vi V,

Secundum QN vim $= \frac{-F\, sin.\, (\phi - \theta)}{yy}$ pro vi T.

§. XLII. Colligamus singulas has vires ad directiones QC, QN & RQ reductas, atque habebimus

Vim $V = \frac{E\, cos.\, \psi^3}{xx} + \frac{Fx}{z^3} - Fy\, (\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3})\, cos.\, (\phi - \theta)$,

Vim $T = Fy\, (\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3})\, sin.\, (\phi - \theta)$,

Vim $R = \frac{E\, sin.\, \psi\, cos.\, \psi^2}{xx} + \frac{F x\, tang.\, \psi}{z^3}$;

nihilque superest, nisi ut hæ expressiones in locum litterarum V, T & R substituantur. Quoniam vero angulus ψ semper est valde parvus, ejus cosinus proxime ad unitatem accedet; unde cum posuerimus $V = \frac{ff}{xx} + S$, ita ut sit

$$S = \frac{-ff}{xx} + \frac{E\,cos.\psi^3}{xx} + \frac{Fx}{z^3} - Fy\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) cos.(\phi - \theta),$$

pro ff assumi poterit E; & quamquam ante inveneramus $ff = E + F$, tamen quantitas F præ E tam est exigua, ut nullus plane error sit metuendus, si ponamus $ff = E$; ita ut habeamus:

$$S = \frac{-E(1 - cos.\psi^3)}{xx} + \frac{Fx}{z^3} - Fy\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) cos.(\phi - \theta).$$

§. XLIII. Antequam autem hujus reductionis rationem habeamus, substitutio virium V, T & R in æquationibus variationem lineæ nodorum & inclinationis continentibus commode fieri poterit, quæ eo magis est notatu digna, quod uti jam innuimus termini à vi perturbatrice non pendentes destruantur. Cum enim sit $tang.\,G = \frac{tang.\,\psi}{sin.(\phi - \pi)}$ factoris $V\,sin.(\phi - \pi) + T\,cos.(\phi - \pi) - \frac{R}{tang.\,G.}$, qui illas expressiones ingreditur, valor satis concinne definietur, habebitur namque:

$$V\,sin.(\phi - \pi) = \frac{E\,cos.\psi^3}{xx}\,sin.(\phi - \pi) + \frac{Fx}{z^3}\,sin.(\phi - \pi) -$$
$$Fy\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) cos.(\phi - \theta)\,sin.(\phi - \pi),$$
$$T\,cos.(\phi - \pi) = Fy\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) sin.(\phi - \theta)\,cos.(\phi - \pi),$$
$$-\frac{R}{tang.\,G.} = \frac{-E\,cos.\psi^3}{xx}\,sin.(\phi - \pi) - \frac{Fx}{z^3}\,sin.(\phi - \pi);$$

Quare cum sit $-cos.(\phi - \theta)\,sin.(\phi - \pi) + sin.(\phi - \theta)$ $cos.(\phi - \pi) = -sin.(\theta - \pi)$, erit $V\,sin.(\phi - \pi) + T\,cos.(\phi - \pi) - \frac{R}{tang.\,G} = -Fy\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) sin.(\theta - \pi)$.

§ XLIV. Perspicuum ergo est totam hanc expressionem, qua variatio in linea nodorum & inclinatione determinatur, unice à vi perturbante F pendere, cæterisque paribus sinui anguli $\theta - \pi$, qui oritur longitudinem nodi π a longitudine planetæ turbantis θ subtrahendo, esse proportionalem. Quodsi ergo ut ante semiparametrum orbitæ planetæ R ponamus $= p$, ex §. XXXVI, pro variatione tam lineæ nodorum, quam inclinationis, sequentes nanciscemur æquationes:

$$d\pi = -\frac{Fxydt\,\sin.(\varphi - \pi)\sin.(\theta - \pi)}{fV2p}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right),$$

$$d.\,l.\,tang.\,G = -\frac{Fxydt\,\cos.(\varphi - \pi)\sin.(\theta - \pi)}{fV2p}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right);$$

Ubi imprimis est memorabile has expressiones tanto simpliciores prodiisse. Quamvis autem eædem facilius ex ipsa virium sollicitantium indole erui potuissent, tamen earum derivationem ex formulis generalibus petere convenientius est visum.

§. XLV. Progrediamur ergo ad reliquas perturbationes, & cum posuerimus pro orbita planetæ R turbata:

Semiparametrum . . . . . . $= p$,
Excentricitatem . . . . . . $= q$,
Et anomiliam veram . . . . . . $= v$; ita ut sit

$$x = \frac{p}{1 - q\cos.v} \;\&\; dx = \frac{-fq\,dt\,\sin.v}{V2p},$$

primo variationem parametri ita invenimus expressam

$$dp = -\frac{Txdt}{f}\sqrt{2p} = -\frac{Tp\,dt\,V2p}{f(1 - q\cos.v)},$$

quæ ideoque hanc induet formam:

$$dp = -\frac{Fxydt\,\sin.(\varphi - \theta)}{f}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right)\sqrt{2p},$$

neque enim adhuc pro x, y & z valores supra designatos substitui conveniet, quia illi nonsolum jam sunt cogniti, ſed etiam eorum differentialia per dt exhiberi poſſunt

ob $y = \frac{c}{1 - e\, cof.\, u}$, $d\theta = du = \frac{f\,dt}{yy} \sqrt{\tfrac{1}{2}c}$, & $dy = -\frac{f\,e\,dt\, fin.\, u}{\sqrt{2c}}$.

§. XLVI. Secundo excentricitatis q variatio §. XXXIII eſt inventa

$$dq = \frac{dt}{f}\left(T\,cof.\,v + S\,fin.\,v + T.\frac{cof.\,v - q}{1 - q\,cof.\,v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p}, \text{ ſeu}$$

$$dq = \frac{dt}{f}\left(2\,T\,cof.\,v + S\,fin.\,v - \frac{T\,q\,fin.\,v^2}{1 - q\,cof.\,v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p},$$

ubi recordari debemus eſſe:

$$S = \frac{-E(1 - cof.\,\psi^2)}{xx} + \frac{Fx}{z^3} - Fy\left(\tfrac{1}{z^3} - \tfrac{1}{y^3}\right) cof.\,(\phi - \theta), \text{ \&}$$

$$T = Fy\left(\tfrac{1}{z^3} - \tfrac{1}{y^3}\right) fin.\,(\phi - \theta);$$

quorum valorum ſubſtitutionem fieri non eſt opus: quod cum etiam in reliquis commode fieri nequeat, eas apponamus uti invenimus §. XXXV. Tertio ſcilicet pro motu lineæ abſidum obtinuimus

$$d\phi - dv = \frac{dt}{fq}\left(2\,T\,fin.\,v - S\,cof.\,v + \frac{T\,q\,fin.\,v\,cof.\,v}{1 - q\,cof.\,v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p};$$

& quia $d\phi = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} = \frac{f\,dt\,(1 - q\,cof.\,v)^2}{p.\sqrt{2p}}$,

erit incrementum momentaneum anomaliæ veræ

$$dv = \frac{f\,dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}p} - \frac{dt}{fq}\left(2\,T\,fin.\,v - S\,cof.\,v + \frac{T\,q\,fin.\,v\,cof.\,v}{1 - q\,cof.\,v}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}p}.$$

§. XLVII. Nunc autem elementum temporis dt eliminari conveniet, cujus loco commodiſſime motus medius ſolis ſive terræ introducitur. Ponamus ergo diſtantiam mediam terræ à ſole eſſe $= a$, hocque motu medio abſolvi tempuſculo dt angulum $= d\omega$.

Quoniam hoc casu excentricitas adest nulla, visque ad solem tendens est $= \frac{ff}{aa} = \frac{F}{aa}$, erit ex principiis ante stabilitis: $d\omega = \frac{f\,dt}{aa} \surd \frac{1}{2} a = \frac{f\,dt}{a\surd 2a}$ ideoque $f\,dt = a\,d\omega \surd 2a$, &

$$\frac{dt}{f} = \frac{a\,d\omega \surd 2a}{ff} = \frac{a\,d\omega \surd 2a}{E}.$$

Tempore ergo absoluto t eliminato, ejusque loco angulo ω quem sol motu medio interea absolvit, nostræ formulæ differentiales omnes ad elementum istius motus medii $d\omega$ reduci poterunt. Ac si insuper ponatur $F = nE$, ubi n semper fractionem vehementer parvam denotabit, erit $\frac{T}{E} = ny\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) sin.\,(\phi - \theta)$,

$$\frac{S}{E} = -\frac{(1 - cos.\,\phi^2)}{xx} + \frac{nx}{z^3} - ny\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) cos.\,(\phi - \theta).$$

§. XLVIII. Substituto ergo pro dt isto valore, habebimus primo pro planeta perturbante:

$d\theta = du = \frac{a\,d\omega}{yy} \surd ac$; & $dy = -ae\,d\omega\, sin.\,u \surd \frac{a}{c}$,

at pro planeta perturbato:

$d\phi = \frac{a\,d\omega}{xx} \surd ap$; & $dx = -aq\,d\omega\, sin.\,v \surd \frac{a}{p}$ porroque

$dp = -\frac{T}{E}.\,2ax\,d\omega \surd ap = -2naxy\,d\omega\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right) sin.(\phi - \theta).\surd ap$,

$$dq = a\,d\omega\left(\frac{2T}{E} cos.\,v + \frac{S}{E} sin.\,v - \frac{T}{E}.\,\frac{q\,sin.\,v^2}{1 - q\,cos.\,v}\right).\surd ap,$$

$$d\phi - dv = \frac{a\,d\omega}{q}\left(\frac{2T}{E} sin.\,v - \frac{S}{E} cos.\,v + \frac{T}{E}.\,\frac{q\,sin.\,v\,cos.\,v}{1 - q\,cos.\,v}\right).\surd ap, \;\&$$

$$dv = \frac{a\,d\omega}{xx}.\surd ap - \frac{a\,d\omega}{q}\left(\frac{2T}{E} sin.\,v - \frac{S}{E} cos.\,v + \frac{T}{E}.\,\frac{q\,sin.\,v.\,cos.\,v}{1 - q\,cos.\,v}\right).\surd ap.$$

Si ulterius semi-axis transversus $\frac{p}{1 - qq}$ ponatur $= r$, erit

$$dr = \frac{-2arr\,d\omega \surd a}{\surd p}\left(\frac{T}{E} - \frac{T}{E} q\,cos.\,v - \frac{S}{E} q\,sin.\,v\right),$$

uti ex §. XXXIV colligere licet.

§. XLIX.

§. XLIX. Simili modo & mutationes, quas linea nodorum & inclinatio orbitæ tempuſculo, quo ſol ſecundum medium motum per angulum $d\omega$ progreditur ſubeunt, exprimi poterunt. Poſito enim $F = nE$, & ſolis diſtantia media à terra $= a$, quoniam invenimus:

$$\frac{dt}{f} = \frac{n a d\omega \sqrt{2a}}{E} \text{ erit } \frac{Fdt}{f} = n a d\omega \sqrt{2a}, \text{ \& } \frac{Fdt}{f\sqrt{2p}} = n a d\omega \sqrt{\frac{a}{p}};$$

formulæ ſupra exhibitæ abibunt in has:

$$d\pi = - naxyd\omega \cos.(\phi - \pi) \sin.(\theta - \pi).\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right).\sqrt{\frac{a}{p}}.$$

$$d.\,l.\,tang.\,G = - naxyd\omega \cos.(\phi - \pi) \sin.(\theta - \pi).\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3}\right).\sqrt{\frac{a}{p}}.$$

Cum autem valor ipſius $d\pi$ jam fuerit inventus, erit ſuccinctius

$$d.\,l.\,tang.\,G = \frac{d.\,tang.\,G}{tang.\,G} = d\pi \frac{\cos.(\phi - \pi)}{\sin.(\phi - \pi)}.$$

Per has igitur formulas omnium quantitatum, quibus determinatio perturbationum continetur, incrementa, quæ tempuſculo per motum ſolis medium $d\omega$ expreſſo capiunt, definiri poterunt, neque hactenus ulla approximatione ſumus uſi, niſi quatenus pro motu planetæ perturbantis loco $F + F$ ſimpliciter E ſcripſimus, unde autem nulla aberratio à vero oriri poteſt.

§. L. At vero in calculi ſubſidium jam multo graviorem hypotheſin aſſumſimus, dum motum planetæ perturbantis, quem in V fingimus, tanquam regulis Kepleri perfecte conſentaneum ſpectamus; ſi enim iſte planeta eſſet Saturnus, cujus motum non mediocriter ab actione Jovis turbari novimus, nullum certè eſt dubium, quin ejus perturbationes effectus, qui ab ejus actione in motum reliquorum planetarum redundant, aliquantillum eſſent affecturæ. Interim tamen pro certo ſtatuere licet, iſtas variationes incomparabiliter futuras eſſe minores, neque effectum Saturni verum ſenſibiliter eſſe diſcrepaturum ab eo, quem regulas Kepplerı exacte ſecutus, eſſet producturus; imprimis cum conſtet, univerſam perturbationem eſſe quam minimam, atque adeo nos contenti eſſe debeamus eam tantum vero proxime determinaſſe. Æque parvi autem momenti ſine ullo dubio æſtimanda erit ea aberratio, quæ dum pro $E + F$ tantum E ſeu 1 pro $1 + n$ ſemper eſt fractio quam minima.

§. LI. Non parum paradoxon videri debet, quod etiamſi vis planetæ perturbantis, ſeu fractio n penitus evaneſceret, tamen pro altero planeta tam excentricitas q quam linea abſidum mutationibus eſſet obnoxia: propterea quod evaneſcente fractione n, quantitas $\frac{S}{E}$ non in nihilum abeat, ſed valorem $= \frac{-1 + cof.\, \psi^3}{xx}$ retineat, quo utrumque differentiale dq & $d\varphi - dv$ afficitur. Verum perpendendum eſt, quod dum orbitam planetæ in aliud planum projicimus, projectio quidem quoque futura ſit ellipſis, ſed cujus focus non amplius futurus ſit in puncto C. Etiamſi ergo motus projectus fiat in ellipſi, areæque adeo circa punctum C deſcriptæ temporibus ſint proportionales, tamen quia in C non eſt focus ellipſis, motus regulis Keppleri non erit conformis. Cum autem nihilominus fingi poſſet quovis momento ellipſis focum habens in C, cujus elementum cum illius ellipſis elemento congruat, mirum non eſt hujus ellipſis fictæ tam excentricitatem quam poſitionem lineæ abſidum continuo variari: notatu autem eſt dignum parametrum ellipſis ſemper invariatum relinqui.

§. LII. Cum igitur caſu $n = o$ hoc incommodum penitus evitaremus, ſi motum planetæ non in plano alieno ſed proprio contemplaremur, idem quoque incommodum in genere evitabimus, ſi motum quovis tempore ad planum orbitæ ipſum referamus, ita ut x diſtantiam veram CR & φ longitudinem planetæ in proprio plano denotaret. Hinc quidem ob orbitæ inconſtantiam alia incommoda naſcerentur, quæ autem, dummodo inclinatio G ſit valde parva, quemadmodum id quidem ſemper uſu venit, fere penitus removebuntur, propterea quod inde ipſis perturbationibus minima perturbatio inducetur. Quo circa totum negotium ita promtius expedietur ut primo dum variationes quantitatum p, q, & $\varphi - v$, exquiruntur, à quibus locus planetæ in propria orbita pendet, latitudo ψ prorſus negligatur ponendo $\psi = o$; deinde vero ſeorſim ad quodvis tempus tam poſitio lineæ nodorum quam inclinatio inveſtigetur: & his denique inventis more apud Aſtronomos recepto ex loco planetæ in propria orbita ejuſque argumento latitudinis ipſa latitudo eliciatur, cum reductione longitudinis.

§. LIII. Hanc ob cauſam quæſtionem noſtram commode bipartito pertractare licebit dum ſeorſim primo motus planetæ in propria orbita, quaſi eſſet plana, deinde vero hujus orbitæ poſitio reſpectu orbitæ planetæ perturbantis inveſtigatur. Primo igitur x denotabit diſtantiam veram planetæ à ſole, & φ ejus longitudinem; tum poſito:

$z = \surd\, (xx + yy - 2\, xy\, cof.\, (\varphi - \theta))$, ob $\psi = o$,

ſi brevitatis gratia ſtatuamus

$$M = y\, (\tfrac{1}{z^3} - \tfrac{1}{y^3})\, fin.\, (\varphi - \theta)),$$

$$N = \tfrac{x}{z^3} - y\, (\tfrac{1}{z^3} - \tfrac{1}{y^3})\, cof.\, (\varphi - \theta));$$ habebimus:

$$y = \frac{c}{1 - e\, cof.\, u};\quad dy = -\, a\, e\, d\omega\, fin.\, u.\, \surd\, \tfrac{a}{c};$$

$$d\theta = du = \frac{a\, d\omega}{yy} \surd\, ac;$$

$$x = \frac{p}{1 - q\, cof.\, v};\quad dx = -\, a\, q\, d\omega\, fin.\, v.\, \surd\, \tfrac{a}{p};$$

$$d\varphi = \frac{a\,d\omega}{xx}\sqrt{ap};\ \text{itemque:}$$

$$dp = -2nMax\,d\omega.\sqrt{ap}:$$

$$dq = na\,d\omega\left(2M\,cos.\,v + N\,sin.\,v - \frac{Mq\,sin.\,v^2}{1-q\,cos.\,v}\right)\sqrt{ap},\ \&$$

$$d\varphi - dv = \frac{na\,d\omega}{q}\left(2M\,sin.\,v - N\,cos.\,v + \frac{Mq\,sin.\,v\,cos.\,v}{1-q\,cos.\,v}\right)\sqrt{ap};$$

ubi eſt $n = \frac{F}{E}$, cujus valor pro ſingulis planetis ex obſervationibus, quantum quidem id fieri licet, concludi debet.

§. LIV. Cum deinceps ex his formulis locus planetæ R in propria orbita cum ejus diſtantia à ſole fuerit inventus, porro inveſtigetur ad quodvis tempus propoſitum poſitio hujus orbitæ reſpectu plani fixi aſſumti, in quo orbita planetæ perturbantis verſatur, linea ſcilicet nodorum cum inclinatione mutua, ope formularum in §. XLIX exhibitarum; hincque facillime verus locus planetæ in cœlo aſſignabitur. In priori quidem inveſtigatione neglectio partis $\frac{-1+cos.\,\psi^2}{xx}$ in valore N nullum errorem creat, quippe quæ per reductionem ad propriam orbitam compenſatur. Sed ob poſitionem $\psi = o$, valor ipſius z aliquantillum immutatur, ſed tam parum, niſi inclinatio ſit enormis, ut error præ ipſa quantitate z ſit vehementer exiguus. Quoniam igitur ipſa quantitas z aliter non intrat in calculum niſi per fractionem minimam n multiplicat errores illi denuo hinc diminuentur, ut tuto pro nihilo æſtimari queant.

SECTIO IV.

Considerationes necessariæ ad resolutionem formularum inventarum expediendam.

§. LV. Ex his formulis primo sine integrationis adjumento variationes horariæ, quas singula motus elementa capiunt intervallo unius horæ, satis exacte colligi possunt, cum enim tantillo tempore omnes variationes sint quam minimæ, error plane erit imperceptibilis si ipsa differentialia tanquam variationes horarias spectemus. Cum igitur Sol secundum motum medium una hora angulum conficiat $= 2' \, 28,''$ seu accuratius $147\frac{5}{6}''$, si differentiali $d\omega$ hunc valorem tribuamus, ut sit $d\omega = 147\frac{5}{6}''$, seu in partibus radii, pro quo unitatem assumimus, $d\omega = 0,00071672$, reliqua differentialia dp, dq, $d\varphi - dv$, $d\varphi$, dx, $d\pi$, $d.\,tang.\,G$, $d\theta = du$, & dy incrementa horaria istorum elementorum exhibebunt, quæ igitur sine ulla integratione definire licebit, dummodo pro tempore proposito ipsa hæc elementa fuerint cognita. Neque etiam error erit sensibilis, si hoc modo variationes diurnas tribuendo ipsi $d\omega$ valorem vicies quater majorem definire vellemus, dummodo neutrius planetæ motus tempore unius diei admodum sit notabilis.

§. LVI. Si quis hunc laborem suscipere vellet, totum negotium sine integratione expedire posset. Cum enim pro dato quopiam tempore t explorati fuerint valores elementorum singulorum, quibus determinatio motus continetur, inventis singulorum incrementis horariis, colligemus hinc eorundem elementorum valores ad tempus $t+1$ hora; unde deinceps ſimili modo eadem elementa ad tempus $t+2$ horis obtinebimus, ſicque ad tempora quotcunque horis remota progredi licebit. Interim tamen quia in ſingulis gradibus error quidam, etiamſi in ſe ſpectatus ſit inſenſibilis committitur, is per continuam repetitionem ita accumulabitur, ut tandem ſatis notabilis evadat. Neque etiam is minoribus hora intervallis aſſumendis quo pacto quidem labor omnino inſuperabilis redderetur, evitari poſſet, etſi enim ſinguli errores fierent multo minores tamen ob majorem operationum numerum tandem quoque ad magnitudinem notabilem excreſcere poſſent.

§. LVII. Niſi igitur integratio in ſubſidium vocetur, ſperari omnino nequit, ut ſingulas motus perturbationes unquam exacte definire valeamus, vel ſaltem ut tempore quantum vis magno interjecto error non fiat notabilis. Huc quoque accedet, quod priori methodo utentes ad nullum tempus, unde calculum inchoare vellemus, per obſervationes ſingulorum elementorum veros valores aſſignare valeremus, ideoque etiam hi errores ſequentes operationes plurimum contaminarent. Quando autem integrationes in genere perficere licuerit, tum per obſervationes plurimas diverſis temporibus inſtitutas, dum eæ cum calculo generali conferentur, veri ſingulorum elementorum valores colligi poterunt, quibus ſemel definitis formulæ integratæ perpetuo uſum deſideratum præſtabunt. Quocirca ad perfectam omnium perturbationum cognitionem abſolute neceſſarium eſt, ut formulæ differentiales inventæ per integrationem ad determinationes finitas reducantur.

§. LVIII. Ac per reductiones quidem hactenus factas jam eximium commodum ſumus conſecuti, quod formulas differentio-differentiales, ad quas principia Mechanica nos immediate perduxerant, ad formulas ſimpliciter differentiales revocaverimus, quæ nullis amplius formulis integralibus ſint involutæ, quemadmodum uſu venit in iis quas primum (§. XXI) elicueramus, quæ partim ob irrationalitatem partim ob integrales, vix tractari potuiſſent. Præcipuum autem commodum ſine dubio in hoc conſiſtere eſt cenſendum, quod omnes formulas ad ſimilitudinem motus regularis, ſeu notiſſimis Keppleri regulis conformis explicuerimus, quæ reductio quoque ad uſum Aſtronomicum maxime videtur accommodata. Neque etiam amplius premimur ejuſmodi formulis irrationalibus, quarum valores ita ſint vagi, ut modo in nihilum abire, modo etiam negativi fieri queant, uti in formulis §. XXI uſu venerat.

§. LIX. Verum antequam integrationis negotium ſuſcipiamus, nonnulla moneri eſt neceſſe, quibus operationes inſtituendæ dirigantur. Cum enim integrationem abſolutam ac perfectam nullo modo ſperare queamus, ad approximationes confugere cogimur, in quo negotio cum multa arbitrio noſtro relinquantur, prouti alias atque alias particulas negligere velimus, præcipua cura hoc erit collocanda, ut nihil negligamus, unde error ſenſibilis reſultare poſſet. Ex circumſtantiis igitur judicari opportebit, quid ratione ſingulorum elementorum negligere liceat: ac primo quidem cum n ſit fractio tantopere exigua, quippe qua ratio maſſæ planetæ perturbantis ad maſſam ſolis exprimitur, nullum eſt dubium, quin ejuſmodi terminos, qui per quadratum hujus fractionis altioremve poteſtatem eſſent multiplicati, ſine hæſitatione rejicere queamus. Ex ipſa autem hujus numeri n parvitate cognoſcimus, perturbationes eſſe quam minimas, quæ adeo omnes evaneſcerent ſi eſſet $n = o$.

§. LX. Deinde etiam ſi orbitas ſingulorum planetarum conſideremus, earum excentricitates tam parvas deprehendimus, ut in determinatione perturbationum, ſi non ipſæ, tamen earum quadrata altioreſque poteſtates tuto negligi possint. De Mercurio quidem & Marte hic dubium suboriri posset, quorum planetarum excentricitas est maxima, è contrario eorum massæ tam sunt exiguæ præ massa Solis, ut totæ perturbationes inde oriundæ fere contemni queant. Quamquam autem in reliquorum planetarum motu proprio determinando quadratum excentricitatis perperam negligeretur, unde plerumque effectus satis sensibilis oriri solet, tamensi perturbationes quæ ab ejus actione in alios planetas redundant, investigentur, quoniam effectus quadrati insuper per fractionem n multiplicatur, is plane omnino imperceptibilis reddetur. Hinc quantitates e & q hujusque quantitatem mediam k tamquam tam parvas assumemus, ut in perturbationum investigatione earum quadrata certe ac plerumque etiam eæ ipsæ tuto rejici queant, quod dum evolutionem instituemus, clarius perspicietur.

§. LXI. Neque tamen pro planeta perturbato excentricitas q nimis parva concipi potest sed saltem tam magna, ut mutationes quas ipsi actio reliquorum planetarum inducere valet, præ tota ejus magnitudine tanquam minimæ spectari queant. Cum enim formula progressionem aphelii exprimens divisa sit per q, evidens est si valor ipsius q nimis esset exiguus, ac fortasse interdum plane evanesceret, motum aphelii maximis difficultatibus impeditum iri, ita ut si talis casus in mundo existeret, vix quicquam ex nostris formulis concludi liceret. Verum hic iterum ad insigne nostrum commodum usu venit, ut nullius planetæ excentricitas tam sit exigua, ut inde quicquam nobis sit extrimescendum. Cum enim Veneris excentricitas sit omnium minima, nullum tamen est dubium, quin mutationes, quas ea unquam ab actione reliquorum planetarum subit, præ ejus valore medio quasi evanescant. Quare si valor medius excentricitatis q ponatur $= k$, differentia inter k

&

& q præ k ſeu fractio $\frac{k-q}{k}$ ſemper tanquam minima tuto ſpectari poterit.

§. LXII. Maximam autem in hac inveſtigatione moleſtiam nobis faceſſit valor quantitatis $z = \sqrt{(xx + yy - 2xy. \cos.(\varphi - \theta))}$ qui eo magis eſt variabilis, quo propius amborum planetarum orbitæ ad ſe invicem accedunt. In calculo quidem hic valor, uti eſt irrationalis, relinqui non poteſt, quia integrationes inſtituendæ nullo modo ſuccederent. Cum enim calculum aliter tractare non liceat, niſi ut omnes perturbationes ad ſinus coſinusve certorum angulorum revocentur, omnino neceſſe eſt, ut quantitates M & N, quæ hanc quantitatem z involvunt, in ejuſmodi ſeries evolvant z, quæ hujuſmodi ſinus vel coſinus ſimpliciter contineant. Hoc enim ſolo modo integratio ſuſcipi poſſe videtur, neque etiam ulla via patet, quemadmodum calculus ita expediri poſſit, ut valores integrales adhuc quantitatem z aliaſve independentes in ſe contemplectentur.

§. LXIII. Inſignem hic Analyſeos, quatenus quidem etiamnunc eſt exculta, defectum agnoſcere cogimur, quod aliter formularum inventarum integralia exhibere non valeamus, niſi per ſeries, quarum ſinguli termini ſimplices ſinus vel coſinus angulorum $\varphi - \theta$, u, v, $\varphi - \pi$, $\theta - \pi$, ex iiſque compoſitorum contineant. Fieri certe poſſet ut vera integralia vel quantitates ex his complexas neque in hujuſmodi ſerie commode reſolubiles continerent, vel etiam alios angulos veluti CVQ vel CQV qui utique ſi vis principalis ad planetam V tenderet, numeruſque n foret prægrandis, primarias partes in calculo eſſent obtenturi. Atque cum ab his angulis, ſi n eſſet numerus valde magnus, totus calculus maximam partem penderet, eo minus dubitare poſſumus, quin iidem etiam præſenti caſu, ſi calculum accurate expedire liceret, ſint ingreſſuri. Interim tamen plane non patet, quomodo iſti anguli per integrationem in calculum invehi queant. Quod si ergo ex hac parte fines analyseos extendere unquam contigerit, tum demum majores fructus pro Astronomia nobis polliceri poterimus.

§. LXIV. Eo igitur sumus redacti ut quantitatem surdam $z = \surd(xx + yy - 2\,xy\,cos.(\varphi - \theta))$ in seriem transformemus, ubi quidem eo potissimum est incumbendum, ut ista series quantum fieri potest reddatur convergens, atque secundum sinus vel cosinus certorum angulorum progrediatur. Et quoniam usus postulat convergentiam sive x sit majus, sive minus quam y, terminus tantum $2\,xy\,cos.(\varphi - \theta)$, qui modo affirmativus, modo in nihilum abire, modo negativus fieri potest, molestiam creat. Binomii ergo partem alteram constituo $xx + yy$, alteram vero $2\,xy\,cos.(\varphi - \theta)$, statuoque:

$$xx + yy = rr, \quad \& \quad \frac{2xy}{xx+yy} = s; \text{ ut sit}$$

$$z = \surd(rr - rrs\,cos.(\varphi - \theta)) = r\surd(1 - s\,cos.(\varphi - \theta)),$$

atque hic perspicuum est s semper esse unitate minus nisi sit $x = y$, & eo fieri minus, quo magis distantiæ x & y fuerint inter se inæquales: hinc ergo multo magis pars $s\,cos.(\varphi - \theta)$ minor erit parte 1, prout seriei convergentia postulat.

§. LXV. Quoniam angulus $\varphi - \theta$ tum frequenter occurret, ponamus ad abbreviandum $\varphi - \theta = \eta$, & cum sit $r = \surd(xx + yy)$ & $s = \frac{2xy}{xx+yy}$, erit $z = r\surd(1 - s\,cos.\eta)$, ideoque $\frac{1}{z^3} = \frac{1}{r^3}(1 - s\,cos.\eta)^{-\frac{3}{2}}$; unde formulam irrationalem $(1 - s\,cos.\eta)^{-\frac{3}{2}}$ in seriem evolvi opportet. Modo ergo communi adhibito reperiemus:

$$(1 + s\,cos.\eta)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}s\,cos.\eta + \frac{3.5}{2.4}ss\,cos.\eta^2 + \frac{3.5.7}{2.4.6}s^3cos.\eta^3 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} + s^4cos.\eta^4 \&c.$$

quæ series, dummodo $s\,cos.\eta$ fuerit unitate minus, uti quidem semper usu venit, certe convergit. Interim tamen nisi $s\ cos.\ \eta$ sit valde parvum nimis lente convergit, quam ut aliquot terminis colligendis ejus summa satis exacte obtineri queat. Verum hic quoque commode accidit, ut dum hæc series per sequentes integrationes tractatur, multo promtiorem convergentiam acquirat, quod nisi eveniret, non perspicerem quomodo quæstioni propositæ satisfieri posset; necessitas tunc cogeret investigationi mutationum horariarum unice adhærescere, illasque pro quantumvis magnis temporis intervallis in unam summam colligere.

§. LXVI. Verum cum potestates ipsius $cos.\ \eta$ in differentiale $d\eta$ ductæ integrari nequeant, nisi prius in cosinus angulorum multiplorum 2η, 3η, &c. convertantur, quoniam differentiale $d\eta$ ad nostrum commune differentiale $d\omega$ reducere licet, eadem conditio postulat, ut hujus $cos.\ \eta$ potestates in cosinus angulorum multiplorum resolvantur id quod ope noti lemmatis: $cos.\ \alpha.\ cos.\ \beta = \frac{1}{2}\ cos.\ (\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\ cos.\ (\alpha - \beta)$ facile præstatur, reperietur enim

$$cos.\ \eta = cos.\ \eta,$$
$$cos.\ \eta^2 = \tfrac{1}{2}\ cos.\ 2\eta + \tfrac{1}{2},$$
$$cos.\ \eta^3 = \tfrac{1}{4}\ cos\ 3\eta + \tfrac{3}{4}\ cos.\ \eta,$$
$$cos.\ \eta^4 = \tfrac{1}{8}\ cos.\ 4\eta + \tfrac{4}{8}\ cos.\ 2\eta + \tfrac{3}{8},$$
$$cos.\ \eta^5 = \tfrac{1}{16}\ cos.\ 5\eta + \tfrac{5}{16}\ cos.\ 3\eta + \tfrac{10}{16}\ cos.\ \eta,$$
$$cos.\ \eta^6 = \tfrac{1}{32}\ cos.\ 6\eta + \tfrac{6}{32}\ cos.\ 4\eta + \tfrac{15}{32}\ cos.\ 2\eta + \tfrac{10}{32},$$
$$cos.\ \eta^7 = \tfrac{1}{64}\ cos.\ 7\eta + \tfrac{7}{64}\ cos.\ 5\eta + \tfrac{21}{64}\ cos.\ 3\eta + \tfrac{35}{64}\ cos.\ \eta,$$
$$cos.\ \eta^8 = \tfrac{1}{128}\ cos.\ 8\eta + \tfrac{8}{128}\ cos.\ 6\eta + \tfrac{28}{128}\ cos.\ 4\eta + \tfrac{56}{128}\ cos.\ 2\eta + \tfrac{35}{128},\ \&c.$$

§. LXVII. Quodsi hi valores substituantur, obtinebitur $(1 - s\ cos.\ \eta)^{-\frac{3}{2}} =$

$$1 + \tfrac{3}{2}.\ s\ cos.\ \eta + \tfrac{3.5}{2.4}.\ \tfrac{1}{2}\ ss\ cos.\ 2\eta + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}.\ \tfrac{1}{4}\ s^3\ cos.\ 3\eta + \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\ \tfrac{1}{8}\ s^4\ cos.\ 4\eta,$$
$$+ \tfrac{3.5}{2.4}.\ \tfrac{1}{2}\ ss + \tfrac{3.5.7}{2.4.6}.\ \tfrac{3}{4}\ s^3\ cos.\ \eta + \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\ \tfrac{4}{8}\ s^4\ cos.\ 2\eta,$$
$$+ \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.\ \tfrac{3}{8}\ s^4,\ \&c.$$

Unde si ponamus $(1 - s\, cos.\, \eta)^{-\frac{3}{2}} = P + Q\, s\, cos.\, \eta + R\, s s\, cos.\, 2\eta + S\, s^3\, cos.\, 3\eta + T\, s^4\, cos.\, 4\eta +$, &c. hi coëfficientes assumti ita definientur ut sit:

$$P = 1 + \tfrac{3.5}{2.4} \cdot \tfrac{1}{2}\, ss + \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \tfrac{3}{8}\, s^4 + \tfrac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12} \cdot \tfrac{10}{32}\, s^6 + \&c.$$

$$Q = \tfrac{3}{2}\left(1 + \tfrac{5.7}{4.} \cdot \tfrac{3}{4}\, ss + \tfrac{5.7.9.11}{4.6.8.10} \cdot \tfrac{10}{16}\, s^4 + \tfrac{5.7.9.11.13.15}{4.6.8.10.12.14} \cdot \tfrac{35}{64}\, s^6 + \&c.\right)$$

$$R = \tfrac{3.5}{2.4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{7.9}{6.8} \cdot \tfrac{4}{8}\, ss + \tfrac{7.9.11.13}{6.8.10.12} \cdot \tfrac{15}{32}\, s^4 + \tfrac{7.9.11.13.15.17}{6.8.10.12.14.16} \cdot \tfrac{56}{128}\, s^6 + \&c.\right)$$

$$S = \tfrac{3.5.7}{2.4.6}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{9.11}{8.10} \cdot \tfrac{5}{16}\, ss + \tfrac{9.11.13.15}{8.10.12.14} \cdot \tfrac{21}{64}\, s^4 + \&c.\right)$$

$$T = \tfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{11.13}{10.12} \cdot \tfrac{6}{32}\, ss + \&c.\right)$$

$$V = \tfrac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}\left(\tfrac{1}{16} + \&c.\right)$$

§. LXVIII. Hinc igitur habebimus:

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{r^3}\left(P + Q\, s\, cos.\, \eta + R\, ss\, cos.\, 2\eta + S\, s^3\, cos.\, 3\eta + T\, s^4\, cos.\, 4\eta + \&c.\right)$$

atque series pro P, Q, R, S, &c., inventæ satis convergunt, ut hi valores per consuetas methodos approximando erui queant. Sequenti modo autem in alias formas transfundi possunt, quæ aptiores videntur

$$P = 1 + \tfrac{3.5}{4.4}\, ss + \tfrac{3.5.7.9}{4.4.8.8}\, s^4 + \tfrac{3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12}\, s^6 + \&c.$$

$$\tfrac{1}{2} Q = \tfrac{3}{4}\left(1 + \tfrac{5.7}{4.8}\, ss + \tfrac{5.7.9.11}{4.8.8.12} \cdot s^4 + \tfrac{5.7.9.11.13.15}{4.8.8.12.12.16}\, s^6 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2} R = \tfrac{3.5}{4.4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{7.9}{8.8} \cdot \tfrac{2}{3}\, ss + \tfrac{7.9.11.13}{8.8.12.12} \cdot \tfrac{3}{4}\, s^4 + \tfrac{7.9.11.13.15.17}{8.8.12.12.16.16} \cdot \tfrac{4}{5}\, s^6 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2} S = \tfrac{3.5.7}{4.4.8}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{9.11}{8.12} \cdot \tfrac{2}{4}\, ss + \tfrac{9.11.13.15}{8.12.12.16} \cdot \tfrac{3}{5}\, s^4 + \tfrac{9.11.13.15.17.19}{8.12.12.16.16.20} \cdot \tfrac{4}{6}\, s^6 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2} T = \tfrac{3.5.7.9}{4.4.8.8}\left(\tfrac{1.2}{3.4} + \tfrac{11.13}{12.12} \cdot \tfrac{2.3}{4.5}\, ss + \tfrac{11.13.15.17}{12.12.16.16} \cdot \tfrac{3.4}{5.6}\, s^4 + \tfrac{11.13.15.17.19.21}{12.12.16.16.20.20} \cdot \tfrac{4.5}{6.7}\, s^6 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2} V = \tfrac{3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12}\left(\tfrac{1.2}{4.5} + \tfrac{13.15}{12.16} \cdot \tfrac{2.3}{5.6} \cdot ss + \tfrac{13.15.17.19}{12.16.16.20} \cdot \tfrac{3.4}{6.7}\, s^4 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2} X = \tfrac{3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12}\left(\tfrac{1.2.3}{4.5.6} + \tfrac{15.17}{16.16} \cdot \tfrac{2.3.4}{5.6.7}\, ss + \tfrac{15.17.19.21}{16.16.20.20} \cdot \tfrac{3.4.5}{6.7.8}\, s^4 + \&c.\right)$$

§. LXIX. Nunc perspicuum est singulas has series in infinitum continuatas fieri geometricas, denominatore existente ss; quare eæ si per $1 - ss$ multiplicentur, multo magis convergentes reddentur. Hoc modo consequemur:

$$P(1-ss) = 1 - \frac{1.1}{4.4}ss - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8}s^4 - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12}s^6 - \&c.$$

$$\tfrac{1}{2}Q(1-ss) = \tfrac{3}{4}\left(1 + \frac{1.3}{4.8}ss + \frac{1.3.5.7}{4.8.8.12}s^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.8.8.12.12.16}s^6 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2}R(1-ss) = \tfrac{3.5}{4.4}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{3.5}{8.8}.\tfrac{2}{3}ss + \frac{3.5.7.9}{8.8.12.12}.\tfrac{3}{4}s^4 + \frac{3.5.7.9.11.13}{8.8.12.12.16.16}.\tfrac{4}{5}s^6 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2}S(1-ss) = \tfrac{3.5.7}{4.4.8}\left(\tfrac{1}{3} + \frac{5.7}{8.12}.\tfrac{2}{4}ss + \frac{5.7.9.11}{8.12.12.16}\tfrac{3}{5}s^4 + \frac{5.7.9.11.13.15}{8.12.12.16.16.20}.\tfrac{4}{6}s^6 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2}T(1-ss) = \tfrac{3.5.7.9}{4.4.8.8}\left(\tfrac{1.2}{3.4} + \frac{7.9}{12.12}.\tfrac{2.3}{4.5}ss + \frac{7.9.11.13}{12.12.16.16}.\tfrac{3.4}{5.6}s^4 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2}V(1-ss) = \tfrac{3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12}\left(\tfrac{1.2}{4.5} + \frac{9.11}{12.16}.\tfrac{2.3}{5.6}ss + \frac{9.11.13.15}{12.16.16.20}.\tfrac{3.4}{6.7}s^4 + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2}X(1-ss) = \tfrac{3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12}\left(\tfrac{1.2.3}{4.5.6} + \frac{11.13}{16.16}.\tfrac{2.3.4}{5.6.7}ss + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2}Y(1-ss) = \tfrac{3.5.7.9.11.13.15}{4.4.8.8.12.12.16}\left(\tfrac{1.2.3}{5.6.7} + \frac{13.15}{16.20}.\tfrac{2.3.4}{6.7.8}ss + \&c.\right)$$

$$\tfrac{1}{2}Z(1-ss) = \tfrac{3.5.7.9.11.13.15.17}{4.4.8.8.12.12.16.16}\left(\tfrac{1.2.3.4}{5.6.7.8} + \frac{15.17}{20.20}.\tfrac{2.3.4.5}{6.7.8.9}ss + \&c.\right)$$

&c.

§. LXX. At vero non opus eſt ut ſinguli iſti valores evolvantur, ſufficit enim duos priores collegiſſe, ex quibus reliqui per ſequentes formulas facile formari poterunt.

$$R = \frac{4Q - 3.2P}{ss};\quad S = \frac{8R - 5Q}{3ss};$$

$$T = \frac{12S - 7R}{5ss};\quad V = \frac{16T - 9S}{7ss},\ \&c.$$

Quin etiam ex prima derivari poteſt ſecunda, ſi integrationem in ſubſidium vocare velimus, eſt enim

$$Q = 2P - \tfrac{1}{ss}\int P s\,ds.$$

Sin autem quæratur valor primæ ſeriei, dico eum per integrationem inveniri poſſe, ſumendo s conſtans, & introducendo variabilem z foreque:

$$P(1-ss) = \frac{\int \frac{dz}{\sqrt{z}}\left(\frac{1-zz}{ss-zz}\right)^{\frac{1}{4}}}{\int \frac{dz}{\sqrt{z}}\left(\frac{1}{ss-zz}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Si poſt integrationem ponatur $z = s$; utrumque autem integrale ita capi ſumo, ut evaneſcat poſito $z = o$, quo caſu quidem fit denominator $\int \frac{dz}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{ss - zz}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, denotante hic π peripheriam, cujus diameter $= 1$.

§. LXXI. Si ergo esset $s = 1$, quo casu hæ series minime convergerent, foret ob numeratorem nostræ expressionis integralis $= \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{s} = 2$, prima series $P(1 - ss) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,9003162$, quæ summa per consuetas approximandi methodos non difficulter erueretur, unde patet ejus summam multo facilius obtineri si valor ipsius s uti semper evenit sit unitate minor. In genere autem erit

$$P(1 - ss) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} \left(\frac{1 - zz}{ss - zz}\right)^{\frac{1}{4}}$$

posito post integrationem $z = s$: quæ expressio eo magis est notatu digna, quod ejus veritas investiganti non tam cito occurrit. Interim tamen expediet quovis casu, quo valor ipsius s datur, aliquot terminis harum serierum actu addendis earum summas prope veras colligere, quod negotium eo promtius succedet quo minor fuerit numerus s. Hoc igitur modo inventis quantitatibus P, Q, R, S, &c. erit

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{r^3}(P + Qs\, cos.\, \eta + Rss\, cos.\, 2\eta + Ss^3\, cos.\, 3\eta + Ts^4\, cos.\, 4\eta + \&c)$$

brevitatis gratia autem posuimus:

$$r = \sqrt{(xx + yy)}, \; \& \; s = \frac{2xy}{xx + yy}.$$

§. LXXII. Pro faciliori autem quantitatum P, Q, R, S, &c. computo conveniet serierum illarum coëfficientes infractiones decimales transformari, unde obtinebitur, subscriptis logarithmis

$P(1-ss)$	$\frac{1}{2}Q(1-ss)$	$\frac{1}{2}R(1-ss)$	$\frac{1}{2}S(1-ss)$
$+1,000000$	$+0,750000$	$+0,468750$	$+0,273437$
$0,0000000$	$9,8750613$	$9,6709413$	$9,4368580$
$-0,062500.ss$	$+0,070313.ss$	$+0,146490.ss$	$+0,149536.ss$
$8,7958800$	$8,8470326$	$9,1657913$	$9,1747461$
$-0,014648.s^4$	$+0,025635.s^4$	$+0,072098.s^4$	$+0,092525.s^4$
$8,1657913$	$8,4088294$	$8,8579220$	$8,9662614$
$-0,006409.s^6$	$+0,013218.s^6$	$+0,044983.s^6$	$+0,062647.s^6$
$7,8067694$	$8,1211634$	$8,6530468$	$8,7969035$
$-0,003580.s^8$	$+0,008055.s^8$	$+0,028527.s^8$	$+0,045167.s^8$
$7,5538655$	$7,9060481$	$8,4552557$	$8,6548281$
$-0,002282.s^{10}$	$+0,005420.s^{10}$	$+0,020325.s^{10}$	$+0,034088.s^{10}$
$7,3583457$	$7,7340094$	$8,3080408$	$8,5325953$
$-0,001581.s^{12}$	$+0,003896.s^{12}$	$+0,015217.s^{12}$	$+0,026631.s^{12}$
$7,1988962$	$7,5905873$	$8,1823473$	$8,4253853$
$-0,001159.s^{14}$	$+0,002935.s^{14}$	$+0,011821.s^{14}$	
$7,0642480$	$7,4675831$	$8,0726486$	
$-0,000887.s^{16}$	$+0,002290.s^{16}$		
$6,9477098$	$7,3598899$		
$-0,000700.s^{18}$			
$6,8449800$			

SECTIO V.

Evolutio formularum differentialium in series secundum sinus cosinusve angulorum simpliciter progredientes.

§. LXXIII. QUONIAM defectus Analyseos necessitatem nobis imponit omnia integralia, quibus opus est, per series secundum sinus cosinusve angulorum simpliciter progredientes exprimendi, similem formam singulis formulis differentialibus induci opportet. Cum igitur primum pro planeta perturbante sit $y = \frac{c}{1 - e\, cos. u}$, erit terminos qui quadratum excentricitatis e altioresque potestates involvunt omittendo:

$$y = c\,(1 + e\, cos. u)\,; \;\; \& \;\; \frac{1}{y^2} = \frac{1}{cc}\,(1 - 2\, e\, cos. u).$$

Deinde cum sit $d\theta = du = \frac{a\, d\omega \sqrt{ac}}{yy}$, habebimus

$$d\theta = du = \frac{a\sqrt{a}}{c\sqrt{c}}\, d\omega\,(1 - 2\, e\, cos. u).$$

Quia enim hujus motus ratio tantum in perturbationes ingreditur non opus est has formulas accuratius evolvere.

§. LXXIV. Simili modo cum pro planeta perturbato sit $x = \frac{p}{1 - q\, cos. v}$, erit:

$$\frac{1}{xx} = \frac{1}{pp}\,(1 + \tfrac{1}{2}\, qq - 2\, q\, cos. v + \tfrac{1}{2}\, q\, q\, cos. 2\, v),$$

in qua nihil est neglectum. Hac igitur erit utendum, ubi non proprie quæstio circa perturbationes versatur, ex hac enim formula, etiamsi nulla contingeret perturbatio,

batio, motus planetæ regularis deduci deberet. Id quod evenit in definiendo elemento motus veri $d\varphi$, quod partim sequitur leges Kepplerianas, partim vero minimis inæqualitatibus perturbatur. Illo respectu verus ejus valor capi debebit, qui erit

$$d\varphi = \frac{a\sqrt{a}}{p\sqrt{p}} d\omega (1 + \tfrac{1}{2}qq - 2q\,cos.\,v + \tfrac{1}{2}qq\,cos.\,2v).$$

Quatenus vero idem valor $d\varphi$ ad solas perturbationes investigandas adhibetur, sufficiet tam pro semiparametro p quam pro excentricitate q valores medios constantes b & k usurpare, atque adeo quadratam ipsius k rejicere, ita ut pro hoc usu habeamus:

$$d\varphi = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} d\omega (1 - 2k\,cos.\,v).$$

§. LXXV. Quia formulæ $\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}$ & $\frac{a\sqrt{a}}{c\sqrt{c}}$ calculum maxime ingrediuntur ponamus brevitatis gratia:

$$\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = i, \ \& \ \frac{a\sqrt{a}}{c\sqrt{c}} = m;$$

sicque erit pro formulis perturbationes implicantibus:

$$d\theta = du = m\,d\omega (1 - 2e\,cos.\,u), \ \&$$
$$d\varphi = i\,d\omega (1 - 2k\,cos.\,v).$$

Unde cum angulus $\varphi - \theta$ nonnisi in hoc negotio occurrat, quoniam posuimus $\varphi - \theta = \eta$, & differentiale anguli η hinc ad differentiale $d\omega$ revocatur. Fiet enim

$$d\eta = (i - m)\,d\omega - 2ikd\omega\,cos.\,v + 2med\omega\,cos.\,u,$$

ubi notandum est esse:

$i:1$ ut motus medius planetæ perturbati ad motum medium Solis vel Terræ;

$m:1$ ut motus medius planetæ perturbantis ad motum medium Solis vel Terræ.

Quare si perturbationes in motu terræ investigentur erit $i = 1$. Verum pro toto motu planetæ perturbati erit:

$$d\varphi = \frac{b\surd b}{p\surd p} i\, d\omega (1 + \tfrac{1}{2} qq - 2q\, cos. v + \tfrac{1}{2} qq\, cos. 2v).$$

§. LXXVI. Nunc agrediamur valorem $\frac{1}{r^3}$, qui quoniam tantum in perturbationibus inest, minores ejus particulas negligere licebit. Quia igitur pro eo posuimus $\surd (xx + yy) = r$, erit $\frac{1}{r^3} = (xx + yy)^{-\frac{3}{2}} =$ $(bb(1 + 2k\, cos. v) + cc(1 + 2e\, cos. u))^{-\frac{3}{2}}$, ideoque

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(bb + cc)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3bbk\, cos. v - 3cce\, cos. u}{(bb + cc)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ponamus brevitatis gratia $\surd (bb + cc) = f$, ut sit:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3} - \frac{3bbk\, cos. v}{f^5} - \frac{3cce\, cos. u}{f^5}.$$

Deinde cum itidem posuerimus $s = \frac{2xy}{xx + yy}$; fiet per easdem positiones:

$$s = \frac{2bc(1 + k\, cos. v)(1 + e\, cos. u)}{ff + 2bbk\, cos. v + 2cce\, cos. u},$$

quæ expressio pari modo evoluta evadet:

$$s = \frac{2bc}{ff} + \frac{2bc(cc - bb)k\, cos. v}{f^4} - \frac{2bc(cc - bb)e\, cos. u}{f^4}.$$

§. LXXVII. Quo etiam hanc formulam commodiorem reddamus, statuamus:

$\frac{2bc}{ff} = \frac{2bc}{bb + cc} = \mu$ & $\frac{cc - bb}{ff} = \frac{cc - bb}{bb + cc} = \nu$, ut $\mu\mu + \nu\nu = 1$; erit $\frac{bb}{ff} = \frac{1 - \nu}{2}$ & $\frac{cc}{ff} = \frac{1 + \nu}{2}$. His autem valoribus introductis, habebimus

$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3}(1 - \frac{3}{2}(1 - \nu)k\, cos. v - \frac{3}{2}(1 + \nu)e\, cos. u)$, &

$s = \mu + \mu\nu k\, cos. v - \mu\nu e\, cos. u = \mu(1 + \nu k\, cos. v - \nu e\, cos. u)$,

unde pro litteris P, Q, R, &c. fit

$$s^2 = \mu^2\,(1 + 2\nu k\, cos.\, v - 2\nu e\, cos.\, u);$$
$$s^3 = \mu^3\,(1 + 3\nu k\, cos.\, v - 3\nu e\, cos.\, u);$$
$$s^4 = \mu^4\,(1 + 4\nu k\, cos.\, v - 4\nu e\, cos.\, u);$$
$$s^5 = \mu^5\,(1 + 5\nu k\, cos.\, v - 5\nu e\, cos.\, u);$$
&c.

tam vero porro:

$1 - ss = \nu\nu - 2\mu^2\nu k\, cos.\, v + 2\mu^2\nu e\, cos.\, u$, hincque

$$\frac{1}{1 - ss} = \frac{1}{\nu\nu} + \frac{2\mu^2 k\, cos.\, u}{\nu^3} - \frac{2\mu^2 e\, cos.\, u}{\nu^3}.$$

§. LXXVIII. Si his valoribus adhibitis formulas §. LXXII evolutas ad calculum revocemus, & quantitates P, Q, R, S, &c. investigemus, eæ sequenti modo expressæ reperientur:

$$\frac{P}{r^3} = \frac{1}{f^3}(g + h\, k\, cos.\, v + l\, e\, cos.\, u);$$
$$\frac{Qs}{r^3} = \frac{1}{f^3}(g' + h'\, k\, cos.\, v + l'\, e\, cos.\, u);$$
$$\frac{Rss}{r^3} = \frac{1}{f^3}(g'' + h''\, k\, cos.\, v + l''\, e\, cos.\, u);$$
$$\frac{Ss^3}{r^3} = \frac{1}{f^3}(g''' + h'''\, k\, cos.\, v + l'''\, e\, cos.\, u);$$
&c.

quovis enim casu valores idonei pro g, h, l, g', h', l', &c. per merum calculum numericum reperientur, quos ergo numeros tanquam cognitos spectare licebit. Hinc itaque elicimus $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3} \times$

$$\left\{\begin{array}{l}
+g \quad + g'\, cos.\, \eta \quad + g''\, cos.\, 2\eta \quad + g'''\, cos.\, 3\eta \\
+hk\, cos.\, v + \frac{1}{2}h'k\, cos.(\eta - v) + \frac{1}{2}h''k\, cos.(2\eta - v) + \frac{1}{2}h'''k\, cos.(3\eta - v), \\
\qquad\qquad + \frac{1}{2}h'k\, cos.(\eta + v) + \frac{1}{2}h''k\, cos.(2\eta + v) + \frac{1}{2}h'''k\, cos.(3\eta + v), \\
+le\, cos.\, u + \frac{1}{2}l'e\, cos.(\eta - u) + \frac{1}{2}l''e\, cos.(2\eta - u) + \frac{1}{2}l'''e\, cos.(3\eta - u), \\
\qquad\qquad + \frac{1}{2}l'e\, cos.(\eta + u) + \frac{1}{2}l''e\, cos.(2\eta + u) + \frac{1}{2}l'''e\, cos.(3\eta + u), \\
\qquad\qquad\qquad \&c.
\end{array}\right\}$$

§. LXXIX. Nunc paulatim ad valores litterarum M & N definiendos procedere possumus. Cum enim sit $M = \frac{y\,\sin.\eta}{z^3} - \frac{\sin.\eta}{yy}$, primo habebimus

$$\frac{y\,\sin.\eta}{z^3} = \frac{1}{cc}\left(\sin.\eta - e\,\sin.(\eta - u) - e\,\sin.(\eta + u)\right).$$

Deinde ob $y\,\sin.\eta = c\left(\sin.\eta + \frac{1}{2}e\,\sin.(\eta - u) + \frac{1}{2}e\,\sin.(\eta + u)\right)$, erit $\frac{y\,\sin.\eta}{z^3} = \frac{c}{f^3} \times$

$$\left\{\begin{array}{llll}
+ g\,\sin.\eta & + \frac{1}{2}g'\,\sin.2\eta & + \frac{1}{2}g''\,\sin.3\eta & + \frac{1}{2}g'''\,\sin.4\eta \\
+ \frac{1}{2}ge\,\sin.(\eta - u) & + \frac{1}{4}g'e\,\sin.(2\eta - u) & - \frac{1}{2}g''\,\sin.\eta & - \frac{1}{2}g'''\,\sin.2\eta \\
+ \frac{1}{2}ge\,\sin.(\eta + u) & + \frac{1}{4}g'e\,\sin.(2\eta + u) & - \frac{1}{4}g''e\,\sin.(\eta + u) & - \frac{1}{4}g'''e\,\sin.(2\eta + u) \\
+ \frac{1}{2}hk\,\sin.(\eta - v) & + \frac{1}{4}h'k\,\sin.(2\eta - v) & + \frac{1}{4}g''e\,\sin.(3\eta - u) & + \frac{1}{4}g'''e\,\sin.(4\eta - u) \\
+ \frac{1}{2}hk\,\sin.(\eta + v) & + \frac{1}{4}h'k\,\sin.(2\eta + v) & - \frac{1}{4}g''e\,\sin.(\eta - u) & - \frac{1}{4}g'''e\,\sin.(2\eta - u) \\
+ \frac{1}{2}le\,\sin.(\eta - u) & + \frac{1}{4}l'e\,\sin.(2\eta - u) & + \frac{1}{4}g''e\,\sin.(3\eta + u) & + \frac{1}{4}g'''e\,\sin.(4\eta + u) \\
+ \frac{1}{2}le\,\sin.(\eta + u) & + \frac{1}{4}l'e\,\sin.(2\eta + u) & - \frac{1}{4}h''k\,\sin.(\eta - v) & - \frac{1}{4}h'''k\,\sin.(2\eta - v) \\
 & & + \frac{1}{4}h''k\,\sin.(3\eta - v) & + \frac{1}{4}h'''k\,\sin.(4\eta - v) \\
 & & - \frac{1}{4}h''k\,\sin.(\eta + v) & - \frac{1}{4}h'''k\,\sin.(2\eta + v) \\
 & & + \frac{1}{4}h''k\,\sin.(3\eta + v) & + \frac{1}{4}h'''k\,\sin.(4\eta + v) \\
 & & - \frac{1}{4}l''e\,\sin.(\eta - u) & - \frac{1}{4}l'''e\,\sin.(2\eta - u) \\
 & & + \frac{1}{4}l''e\,\sin.(3\eta - u) & + \frac{1}{4}l'''e\,\sin.(4\eta - u) \\
 & & - \frac{1}{4}l''e\,\sin.(\eta + u) & - \frac{1}{4}l'''e\,\sin.(2\eta + u) \\
 & & + \frac{1}{4}l''e\,\sin.(3\eta + u) & + \frac{1}{4}l'''e\,\sin.(4\eta + u)
\end{array}\right\}$$

&c.

§. LXXX. Omittendis jam terminis, qui plusquam triplum anguli η involvunt colligemus valorem ipsius $M = + \frac{c}{f^3} \times$

$$\left\{\begin{array}{llll}
+ (g - \frac{1}{2}g'')\,\sin.\eta & + \frac{1}{2}e(g - \frac{1}{2}g'')\,\sin.(\eta - u) & + e(g' - g''')\,\sin.(2\eta - u) & + \frac{1}{4}e(g'' - g'''')\,\sin.(3\eta - u) \\
 & + \frac{1}{2}e(g - \frac{1}{2}g'')\,\sin.(\eta + u) & + e(g' - g''')\,\sin.(2\eta + u) & + \frac{1}{4}e(g'' - g'''')\,\sin.(3\eta + u) \\
+ \frac{1}{2}(g' - g''')\,\sin.2\eta & + \frac{1}{2}e(l - \frac{1}{2}l'')\,\sin.(\eta - u) & + e(l' - l''')\,\sin.(2\eta - u) & + \frac{1}{4}c(l'' - l'''')\,\sin.(3\eta - u) \\
 & + \frac{1}{2}e(l - \frac{1}{2}l'')\,\sin.(\eta + u) & + e(l' - l''')\,\sin.(2\eta + u) & + \frac{1}{4}e(l'' - l'''')\,\sin.(3\eta + u) \\
+ \frac{1}{2}(g'' - g'''')\,\sin.3\eta & + \frac{1}{2}k(h - \frac{1}{2}h'')\,\sin.(\eta - v) & + k(h' - h''')\,\sin.(2\eta - v) & + \frac{1}{4}k(h'' - h'''')\,\sin.(3\eta - v) \\
\&c. & + \frac{1}{2}k(h - \frac{1}{2}h'')\,\sin.(\eta + v) & + k(h' - h''')\,\sin.(2\eta - v) & + \frac{1}{4}k(h'' - h'''')\,\sin.(3\eta + v)
\end{array}\right\}$$

$$- \frac{1}{cc}\left(\sin.\eta - e\,\sin.(\eta - u) - e\,\sin.(\eta + u)\right).$$

&c.

In qua expressione lex est manifesta, cujus ope plures termini, si quis laborem suscipere velit, formari possunt. Si quidem numerus $\mu = \frac{2bc}{bb+cc}$ est valde parvus, quod evenit, si quantitates b & c multum à ratione æqualitatis recedunt, vix ultra litteras g, h, l una virgula notatas progredi est opus; etsi autem eæ quantitates propius ad æqualitatem accedunt, tamen calculum vix ultra binas virgulas continuari est opus, quia per integrationem hæ series admodum redduntur convergentes. Ob eandem causam multo magis terminos per ee, kk & ek affectos rejicere licuerat, prætterquam quod excentricitatem utramque e & k valde parvam assumimus.

§. LXXXI. Deinde cum sit $N = \frac{x - y \cos. n}{z^3} + \frac{\cos. n}{yy}$ habebimus primo

$$\frac{\cos. n}{yy} = \frac{1}{cc}\left(\cos. n - e\cos.(n-u) - e\cos.(n+u)\right),$$

porro vero, ob $x = b(1 + k\cos. v)$, &

$$y\cos. n = c\left(\cos. n + \tfrac{1}{2}e\cos.(n-u) + \tfrac{1}{2}e\cos.(n+u)\right),$$

erit valor ipsius $N = \frac{1}{cc}\left(\cos. n - e\cos.(n-u) - e\cos.(n+u)\right)$.

$$+\frac{b}{f^3}\left\{\begin{array}{lll}
+g & +g'\cos. n & +g''\cos. 2n \\
+k(g+h)\cos. v & +\tfrac{1}{2}k(g'+h')\cos.(n-v) & +\tfrac{1}{2}k(g''+h'')\cos.(2n-v) \\
+le\cos. u & +\tfrac{1}{2}k(g'+h')\cos.(n+v) & +\tfrac{1}{2}k(g''+h'')\cos.(2n+v) \\
 & +\tfrac{1}{2}l'e\cos.(n-u) & +\tfrac{1}{2}l''e\cos.(n-u) \\
 & +\tfrac{1}{2}l'e\cos.(n+u) & +\tfrac{1}{2}l''e\cos.(n+u)
\end{array}\right\}$$

$$-\frac{c}{f^3}\left\{\begin{array}{lll}
 & +(g+\tfrac{1}{2}g'')\cos. n & +\tfrac{1}{2}(g'+g''')\cos. 2n \\
+\tfrac{1}{2}g' & +\tfrac{1}{2}k(h+\tfrac{1}{2}h'')\cos.(n-v) & +\tfrac{1}{4}k(h'+h''')\cos.(2n-v) \\
 & +\tfrac{1}{2}k(h+\tfrac{1}{2}h'')\cos.(n+v) & +\tfrac{1}{4}k(h'+h''')\cos.(2n+v) \\
+\tfrac{1}{2}h'k\cos. v & +\tfrac{1}{2}e(g+\tfrac{1}{2}g'')\cos.(n-u) & +\tfrac{1}{4}e(g'+g''')\cos.(2n-u) \\
 & +\tfrac{1}{2}e(g+\tfrac{1}{2}g'')\cos.(n+u) & +\tfrac{1}{4}e(g'+g''')\cos.(2n+u) \\
+\tfrac{1}{2}e(g'+l')\cos. u & +\tfrac{1}{2}e(l+\tfrac{1}{2}l'')\cos.(n-u) & +\tfrac{1}{4}e(l'+l''')\cos.(2n-u) \\
 & +\tfrac{1}{2}e(l+\tfrac{1}{2}l'')\cos.(n+u) & +\tfrac{1}{4}e(l'+l''')\cos.(2n+u)
\end{array}\right\}$$

§. LXXXII. Excentricitas planetæ perturbantis e has formulas imprimis tantopere reddit prolixas, quæ si evanesceret, hi valores commodius & succinctius ita exprimerentur

$$M = -\frac{1}{ee}\, \sin. n + \frac{c}{f^3} \left\{ \begin{array}{l} +(g - \frac{1}{2} g'')\sin. n + \frac{1}{2} k (h - \frac{1}{2} h'').\ \left\{ \begin{array}{l} \sin.(n - v) \\ \sin.(n + v) \end{array} \right. \\ +\frac{1}{2}(g' - g''')\sin. 2n + \frac{1}{4} k (h' - h''').\ \left\{ \begin{array}{l} \sin(2n - v) \\ \sin.(2n + v) \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Deinde vero est:

$$N = \frac{1}{ee}\cos. n + \frac{b}{f^3} \left\{ \begin{array}{ll} +g & + k (g + h) \cos. v \\ + g' \cos. n & + \frac{1}{2} k (g' + h').\ \left\{ \begin{array}{l} \cos.(n - v) \\ \cos.(n + v) \end{array} \right. \\ + g'' \cos. 2n & + \frac{1}{2} k (g'' + h'').\ \left\{ \begin{array}{l} \cos.(2n - v) \\ \cos.(2n + v) \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$- \frac{c}{f^3} \left\{ \begin{array}{ll} + \frac{1}{2} g' & + \frac{1}{2} h' k \cos. v \\ + (g + \frac{1}{2} g'') \cos. n & + \frac{1}{2} k (h + \frac{1}{2} h'').\ \left\{ \begin{array}{l} \cos.(n - v) \\ \cos.(n + v) \end{array} \right. \\ + \frac{1}{2}(g + g''') \cos. 2n & + \frac{1}{4} k (h' + h''').\ \left\{ \begin{array}{l} \cos. 2n - v) \\ \cos. 2n + v) \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Attendenti autem mox patebit hanc excentricitatem e sine errore sensibili negligi posse, unde his postremis formulis utemur.

§. LXXXIII. His jam valoribus pro M & N inventis ipsa differentialia quibus perturbationes continentur ad formam desideratam reducere poterimus. Quod igitur primum ad variabilitatem semiparametri p attinet, quoniam invenimus $dp = -2nMaxd\omega\sqrt{ap}$ in hac expressione ob n minima loco p ejus valorem medium b & loco x valorem $b(1 + k\cos. v)$ scribere licebit, unde fit:

$$dp = -2nabd\omega.\ M(1 + k\cos. v)\sqrt{ab}, \text{ seu}$$
$$\frac{dp}{b} = -2na\sqrt{ab}.\ M(1 + k\cos. v)\, d\omega.$$

Cum autem posuerimus $a\sqrt{a} = ib\sqrt{b}$, erit $\frac{dp}{b} = -2nibbMd\omega(1 + k\cos. v)$; hincque pro M valorem inventum substituendo

$$\frac{dp}{b} = + \frac{2nibb}{cc} d\omega \left(\text{fin.}\, \eta + \tfrac{1}{2} k\, \text{fin.}\, (\eta - \nu) + \tfrac{1}{2} k\, \text{fin.}\, (\eta + \nu) \right);$$

$$- \frac{2nibbc}{f^3} d\omega. \begin{Bmatrix} + (g - \tfrac{3}{2} g'')\, \text{fin.}\, \eta + \tfrac{1}{2} k (g - \tfrac{1}{2} g'' + h - \tfrac{1}{2} h''). \begin{Bmatrix} \text{fin.}\, (\eta - \nu) \\ \text{fin.}\, (\eta + \nu) \end{Bmatrix} \\ + \tfrac{1}{2} (g' - g''')\, \text{fin.}\, 2\eta + \tfrac{1}{4} k (g' - g''' + h' - h'''). \begin{Bmatrix} \text{fin.}\, (2\eta - \nu) \\ \text{fin.}\, (2\eta + \nu) \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

ubi ex denominationibus factis est $\frac{bb}{ec} = \frac{m}{i} \sqrt[3]{\frac{m}{i}} = \frac{1-\nu}{1+\nu}$, & $\frac{2bc}{ff} = \mu$, hincque ob $\frac{b}{f} = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}$, erit $\frac{2bbc}{f^3} = \mu \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}$. Quare ex cognita ratione motuum mediorum habebitur

$$\mu = \frac{2 \sqrt[3]{iimm}}{\sqrt[3]{i^4} + \sqrt[3]{m^4}}; \quad \nu = \frac{\sqrt[3]{i^4} - \sqrt[3]{m^4}}{\sqrt[3]{i^4} + \sqrt[3]{m^4}}.$$

§. LXXXIV. Pro variabilitate autem excentricitatis q, quia ea quoque est minima, in ejus expressione ponamus itidem $p = b$ & $q = k$, & quoniam terminos qui quadratum kk continerent, negligimus erit ob $a \surd a = i b \surd b$; $dq = nibb\, d\omega (M (2\, \text{cof.}\, \nu - \tfrac{1}{2} k + \tfrac{1}{2} k\, \text{cof.}\, 2\nu) + N\, \text{fin.}\, \nu)$; unde pro M & N substitutis valoribus obtinebitur:

$$dq = \frac{-nibb}{cc} d\omega \Big(\tfrac{3}{2}\, \text{fin.}\, (\eta - \nu) + \tfrac{1}{2}\, \text{fin.}\, (\eta + \nu) - \tfrac{1}{2} k\, \text{fin.}\, \eta + \tfrac{1}{4} k\, \text{fin.}\, (\eta - 2\nu) + \tfrac{1}{4} k\, \text{fin.}\, (\eta + 2\nu) \Big)$$

$$+ \frac{nib^3}{f^3} d\omega \begin{Bmatrix} + g\, \text{fin.}\, \nu \begin{matrix} + \tfrac{1}{2} g'\, \text{fin.}\, (\eta + \nu) + \tfrac{1}{2} g''\, \text{fin.}\, (2\eta + \nu) \\ - \tfrac{1}{2} g'\, \text{fin.}\, (\eta - \nu) - \tfrac{1}{2} g''\, \text{fin.}\, (2\eta - \nu) \end{matrix} \\ + \tfrac{1}{2} k (g + h)\, \text{fin.}\, 2\nu \begin{matrix} + \tfrac{1}{4} k (g' + h')\, \text{fin.}\, (\eta + 2\nu) + \tfrac{1}{4} k (g'' + h'')\, \text{fin.}\, (2\eta + 2\nu) \\ - \tfrac{1}{4} k (g' + h')\, \text{fin.}\, (\eta - 2\nu) - \tfrac{1}{4} k (g'' + h'')\, \text{fin.}\, (2\eta - 2\nu) \end{matrix} \end{Bmatrix}$$

$$+\frac{nibc}{f^3}d\omega\left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{2}g'\sin.v & -\frac{1}{4}h'k\sin.2v+\frac{1}{4}k(4h-2h''-2g+g'')\sin.n \\ +(\frac{1}{2}g-\frac{1}{4}g'')\sin.(n-v) & +\frac{1}{8}k(6h-h''+2g-g'')\sin.(n-2v) \\ +(\frac{1}{2}g-\frac{3}{4}g'')\sin.(n+v) & +\frac{1}{8}k(2h-3h''+2g-g'')\sin.(n+2v) \\ +\frac{1}{4}(3g'-g''')\sin.(2n-v) & +\frac{1}{4}k(2h'-2h'''-g'+g''')\sin.2n \\ +\frac{1}{4}(g'-3g''')\sin.(2n+v) & +\frac{1}{8}k(3h'-h'''+g'-g''')\sin.(2n-2v) \\ & +\frac{1}{8}k(h-3h'''+g-g''')\sin.(2n+2v) \end{array}\right\}$$

§. LXXXV. Pro motu aphelii autem habebimus negligendis ſimili modo minimis terminis, & pro $a\sqrt{a}$ ſcribendo $ib\sqrt{b}$;

$$d\varphi-dv=\frac{nibbd\omega}{f^3k}(M(2\sin.v+\frac{1}{2}k\sin.2v)-N\cos.v));$$

quæ expreſſio, ſi loco M & N valores eruti ſubſtituantur, abibit in formam ſequentem

$$\frac{d\varphi-dv}{d\omega}=-\frac{nibb}{cck}\Big(\frac{3}{2}\cos.(n-v)-\frac{1}{2}\cos.(n+v)+\frac{1}{4}k\cos.(n-2v)-\frac{1}{4}k\cos.(n+2v)\Big)$$

$$-\frac{nib^3}{f^3k}\left\{\begin{array}{ll} +g\cos.v & +\frac{1}{2}k(g'+h')\cos.n \\ +\frac{1}{2}g'\cos.(n-v)+\frac{1}{2}k(g+h) & +\frac{1}{4}k(g'+h')\cos.(n-2v) \\ +\frac{1}{2}g'\cos.(n+v) & +\frac{1}{4}k(g'+h')\cos.(n+2v) \\ +\frac{1}{2}g''\cos.(2n-v)+\frac{1}{2}k(g+h)\cos.2v & +\frac{1}{2}k(g''+h'')\cos.2n \\ +\frac{1}{2}g''\cos.(2n+v) & +\frac{1}{4}k(g''+h'')\cos.(2n-2v) \\ & +\frac{1}{4}k(g''+h'')\cos.(2n+2v) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{nibbc}{f^3k}\left\{\begin{array}{ll} +\frac{1}{2}g'\cos.v & +\frac{1}{4}k(2h+h'')\cos.n \\ +\frac{1}{4}(6g-g')\cos.(n-v)+\frac{1}{4}h'k & +\frac{1}{8}k(6h-h''-2g-g'')\cos.(n-2v) \\ +\frac{1}{4}(2g-3g'')\cos.(n+v) & -\frac{1}{8}k(2h-3h'+2g-g'')\cos.(n+2v) \\ +\frac{1}{4}(3g'-g''')\cos.(2n-v)+\frac{1}{4}h'k\cos.2v & +\frac{1}{4}k(h'+h''')\cos.2n \\ -\frac{1}{4}(g-3g'')\cos.(2n+v) & +\frac{1}{8}k(3h'-h'''+g'-g''')\cos.2n-2v \\ & -\frac{1}{8}k(h(h'-3h'''+g'-g''')\cos.(2+2v) \end{array}\right\}$$

§. LXXXVI. Reſtat ut ſimili modo variationes, quibus cum longitudo lineæ nodorum π, tum inclinatio G ſunt obnoxiæ, exprimamus: Ac neglecta quidem excentricitate planetæ perturbantis e, ut ſit $y=c$ & $x=b(1+k\cos.v)$, erit $d\pi=-nibbcd\omega(1+k\cos.v)(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{c^3})\sin.(\varphi-\pi)\sin.(\theta-\pi)$;

d. l tang.

$d.\, l\, tang.\, \rho = -n\, i\, b\, b\, c\, d\omega\, (1 + k \cos.\, \nu) \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{c^3}\right)$ $\cos.\, (\varphi - \pi) \sin.\, (\theta - \pi)$; ubi valor ipsius $\frac{1}{z^3}$ debet substitui qui est posito $e = o$

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{f^3} \left\{ \begin{array}{l} + g + h k \cos.\, \nu \\ + g' \cos.\, \eta + \frac{1}{2} h' k \cos.\, (\eta - \nu) + \frac{1}{2} h'' k \cos.\, (2\eta - \nu) \\ + g'' \cos.\, 2\eta + \frac{1}{2} h' k \cos.\, (\eta + \nu) + \frac{1}{2} h'' k \cos.\, (2\eta + \nu) \end{array} \right\}$$

Tum vero ob $\varphi - \theta = \eta$ est

$$\sin.\, (\varphi - \pi) \sin.\, (\theta - \pi) = \frac{1}{2} \cos.\, \eta - \frac{1}{2} \cos.\, (\varphi + \theta - 2\pi)$$
$$\cos.\, (\varphi - \pi) \sin.\, (\theta - \pi) = -\frac{1}{2} \sin.\, \eta + \frac{1}{2} \sin.\, (\varphi + \theta - 2\pi).$$

§. LXXXVII. Introducamus ad has formulas aliquanto simpliciores reddendas, argumentum latitudinis $\varphi - \pi$, ponamusque $\varphi - \pi = \sigma$, eritque

$$d\pi = -nibbcd\omega \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{c^3}\right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos.\, \eta - \frac{1}{2} \cos.\, (\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta - \nu) - \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta + \nu) - \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

& substituto pro $\frac{1}{z^3}$ valore:

$$d\pi = + \frac{nibb}{cc} d\omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos.\, \eta - \frac{1}{2} \cos.\, (\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta - \nu) - \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta + \nu) - \frac{1}{4} k \cos.\, (\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

$$- \frac{nibbc}{f^3} d\omega \left\{ \begin{array}{ll} + \frac{1}{4} g' & + \frac{1}{8} k (2h + h'' + 2g + g'') \cos.\, (\eta - \nu) \\ + \frac{1}{4} (2g + g'') \cos.\, \eta & + \frac{1}{8} k (2h + h'' + 2g + g'') \cos.\, (\eta + \nu) \\ + \frac{1}{4} (g' + g''') \cos.\, 2\eta & + \frac{1}{4} k (h' + g') \cos.\, \nu \\ - \frac{1}{2} g \cos.\, (\eta - 2\sigma) & + \frac{1}{8} k (h' + h''' + g' + g''') \cos.\, (2\eta - \nu) \\ - \frac{1}{4} g' \cos.\, 2\sigma & + \frac{1}{8} k (h' + h''' + g' + g''') \cos.\, (2\eta + \nu) \\ - \frac{1}{4} g' \cos.\, (2\eta - 2\sigma) & - \frac{1}{8} k (2h + 2g) \cos.\, (\eta - 2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{4} g'' \cos.\, (\eta + 2\sigma) & - \frac{1}{8} k (2h + 2g) \cos.\, (\eta - 2\sigma + \nu) \\ & - \frac{1}{8} k (h'' + g'') \cos.\, (\eta + 2\sigma - \nu) \\ & - \frac{1}{8} k (h'' + g'') \cos.\, (\eta + 2\sigma + \nu) \\ & - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos.\, (2\sigma - \nu) \\ & - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos.\, (2\sigma + \nu) \\ & - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos.\, (2\eta - 2\sigma - \nu) \\ & - \frac{1}{8} k (h' + g') \cos.\, (2\eta - 2\sigma + \nu) \end{array} \right\}$$

§. LXXXVIII. Simili vero modo æquatio differentialis pro inclinationis variatione erit :

$$d.l\,tang.\rho = nibbc\,d\omega\left(\frac{1}{f^3}-\frac{1}{c^3}\right)\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,\mathrm{sin.}\,\eta + \frac{1}{2}\,\mathrm{sin.}\,(\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta - \nu) + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta + \nu) + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta - 2\sigma + \nu) \end{array}\right\}$$

hincque ob $d.\,l\,tang.\,\rho = \frac{d.\,tang.\,\rho}{tang.\,\rho}$ obtinebitur

$$\frac{d.\,tang\,\rho}{tang.\rho} = -\frac{nibb\,d\omega}{cc}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,\mathrm{sin.}\,\eta + \frac{1}{2}\,\mathrm{sin.}\,(\eta - 2\sigma) \\ + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta - \nu) + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta - 2\sigma - \nu) \\ + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta + \nu) + \frac{1}{4}k\,\mathrm{sin.}(\eta - 2\sigma + \nu) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{nibbc}{f^3}d\omega\left\{\begin{array}{ll} + \frac{1}{4}(2g - g'')\,\mathrm{sin.}\,\eta & + \frac{1}{8}k\,(2g + 2h - g'' - h'')\,\mathrm{sin.}(\eta - \nu) \\ + \frac{1}{4}\,(g' - g''')\,\mathrm{sin.}\,2\eta & + \frac{1}{8}k\,(2g + 2h - g'' - h'')\,\mathrm{sin.}(\eta + \nu) \\ + \frac{1}{2}\,g\,\mathrm{sin.}\,(\eta - 2\sigma) & + \frac{1}{8}k\,(g' + h' - g''' - h''')\,\mathrm{sin.}(2\eta - \nu) \\ - \frac{1}{4}g'\,\mathrm{sin.}\,2\sigma & + \frac{1}{8}k\,(g' + h' - g''' - h''')\,\mathrm{sin.}(2\eta + \nu) \\ + \frac{1}{4}g'\,\mathrm{sin.}\,(2\eta - 2\sigma) & + \frac{1}{4}k\,(g + h)\,\mathrm{sin.}\,(\eta - 2\sigma - \nu) \\ - \frac{1}{4}g''\,\mathrm{sin.}\,(\eta + 2\sigma) & + \frac{1}{4}k\,(g + h)\,\mathrm{sin.}\,(\eta - 2\sigma + \nu) \\ & - \frac{1}{8}k\,(g' + h')\,\mathrm{sin.}\,(2\sigma - \nu) \\ & - \frac{1}{8}k\,(g' + h')\,\mathrm{sin.}\,(2\sigma + \nu) \\ & + \frac{1}{8}k\,(g' + h')\,\mathrm{sin.}\,(2\eta - 2\sigma - \nu) \\ & + \frac{1}{8}k\,(g' + h')\,\mathrm{sin.}\,(2\eta - 2\sigma + \nu) \\ & - \frac{1}{8}k\,(g'' + h'')\,\mathrm{sin.}\,(\eta + 2\sigma - \nu) \\ & - \frac{1}{8}k\,(g'' + h'')\,\mathrm{sin.}\,(\eta + 2\sigma + \nu) \end{array}\right\}$$

Si quis vellet has formulas ad plures terminos continuare, lex eſt perſpicua, ſecundum quam hoc opus, quouſque libuerit perfici poſſet, verum pro noſtro inſtituto, ne his quidem terminis exhibitis omnibus indigebimus.

SECTIO VI.

Investigatio inæqualitatum quibus ipsa orbita cujusque Planetæ ab actione reliquorum Planetarum perturbatur.

§. LXXXIX. Quamvis igitur motus cujusque Planetæ ab actione reliquorum perturbetur, is nihilo minus secundum ellipsin, in cujus alterutro foco Sol versetur, fieri concipi potest, dummodo hæc ellipsis tanquam variabilis tam ratione magnitudinis & speciei quam ratione situs lineæ absidum consideretur. Atque ista perturbationum repræsentatio Astronomorum instituto maxime conveniens videtur, qui dum calculo elliptico jam sunt assueti, huic curvæ inhærere malunt, quam alias curvas magis perplexas in calculum Astronomicum admittere. Quod propositum cum adeo in luna sequi soleant, etiamsi ejus aberrationes à motu elliptico sint enormes, id multo magis in motu planetarum principalium retinebitur, quemadmodum etiam Astronomi eorum orbitas jam mobiles assumserunt contra indolem motus proprii Keppleriani.

§. XC. Ac primo quidem vidimus parametrum orbitæ cujusque planetæ ab actione reliquorum continuo immutari. Notari scilicet debet ejus valor quidam medius, à quo verus mox in excessu mox in defectu discrepet; ita valorem medium semiparametri orbitæ planetæ, de quo quæritur, hic littera b designamus, dum littera p pro quovis tempore ejus valorem verum denotat. Quantum igitur p ob actionem certi alicujus planetæ ab b discrepet, ex æquatione differentiali supra §. LXXXIII evoluta per integrationem definiri poterit, ac si isti effectus, quatenus ab unoquoque planeta in parametrum propositi redundant, seorsim computentur, atque in unam summam colligantur, cognoscetur inversa perturbatio, quæ parametro illi ab actione omnium reliquorum planetarum inducitur, cujus collectionis fundamentum in eo est situm, quod singulæ perturbationes sint quam minimæ.

§. XCI. Totum autem integrationis formulæ §. LXXXIII datæ negotium huc reducitur, ut sequentium formularum simplicium: $d\omega \sin.\eta$; $d\omega \sin.2\eta$; $d\omega \sin.3\eta$; $d\omega \sin.(\eta \mp \nu)$; $d\omega \sin.(2\eta \mp \nu)$ &c. integralia definiantur, quæ hac methodo investigo: Primo quia hic excentricitatem planetæ perturbantis negligimus, & motus anomaliæ veræ ν quam minime à motu longitudinis φ differt, si quidem motus aphelii certe est tardissimus, habebimus ex §. LXXV.

$$d\eta = (i - m)\, d\omega - 2\, i\, k\, d\omega \cos.\nu, \text{ \&}$$
$$d\nu = i\, d\omega - 2\, i\, k\, d\omega \cos.\nu.$$

Jam pro prima formula $d\omega \sin.\eta$, differentiale $d\omega$ ita ad $d\eta$ revoco ut sit

$$d\omega = \frac{d\eta}{i - m} + \frac{2\, i\, k\, d\omega}{i - m} \cos.\nu, \text{ unde conficitur:}$$

$$d\omega \sin.\eta = \frac{d\eta \sin.\eta}{i - m} + \frac{i\, k\, d\omega}{i - m} \sin.(\eta - \nu) + \frac{i\, k\, d\omega}{i - m} \sin.(\eta + \nu),$$

quo pacto primum membrum jam redditum est integrabile.

§. XCII. Si idem valor pro $d\omega$ etiam in formulis $d\omega \sin.2\eta$ & $d\omega \sin.3\eta$ substituatur, erit simili modo

$$d\,\omega\,\text{ſin.}\,2\,\eta = \frac{d\,\eta\,\text{ſin.}\,2\,\eta}{i-m} + \frac{i\,k\,d\,\omega}{i-m}\,\text{ſin.}\,(2\,\eta - \nu)$$
$$+ \frac{i\,k\,d\,\omega}{i-m}\,\text{ſin.}\,(2\,\eta + \nu);$$

$$d\,\omega\,\text{ſin.}\,3\,\eta = \frac{d\,\eta\,\text{ſin.}\,3\,\eta}{i-m} + \frac{i\,k\,d\,\omega}{i-m}\,\text{ſin.}\,(3\,\eta - \nu)$$
$$+ \frac{i\,k\,d\,\omega}{i-m}\,\text{ſin.}\,(3\,\eta + \nu).$$

Integratis ergo partibus prioribus, habebimus:

$$\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,\eta = \frac{-\,\text{coſ.}\,\eta}{i-m} + \frac{i\,k}{i-m}\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,(\eta - \nu)$$
$$+ \frac{i\,k}{i-m}\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,(\eta + \nu);$$

$$\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,2\,\eta = \frac{-\,\text{coſ.}\,2\,\eta}{2\,(i-m)} + \frac{i\,k}{i-m}\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,(2\,\eta - \nu)$$
$$+ \frac{i\,k}{i-m}\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,(2\,\eta + \nu);$$

$$\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,3\,\eta = \frac{-\,\text{coſ.}\,3\,\eta}{3\,(i-m)} + \frac{i\,k}{i-m}\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,(3\,\eta - \nu)$$
$$+ \frac{i\,k}{i-m}\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,(3\,\eta + \nu).$$

Sicque integrandæ reſtant reliquæ formulæ, quas noſtra expreſſio pro dp inventa combinet, hæ autem formulæ quia per excentricitatem k ſunt multiplicatæ, multo minores ſunt prioribus partibus jam integratis, ideoque niſi preciſio ultra neceſſitatem urgeri debeat, ſatis tuto omitti poſſent; ſi quidem jam ob ſimilem cauſam excentricitatem e negleximus.

§. XCIII. Interim tamen quo darius perſpiciatur, integrationem ex hac parte non impediri, atque pari facilitate perfici poſſe etiamſi nullos terminos rejeciſſemus, etiam horum integralia definiam: Pro $\int d\,\omega\,\text{ſin.}\,(\eta - \nu)$ igitur quæro primum

$d\eta - d\nu = -m\, d\omega$, ut sit $d\omega = \frac{-(d\eta - d\nu)}{m}$;

sicque erit $\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (\eta - \nu) = \frac{+\, \mathit{cof.}\, (\eta - \nu)}{m}$.

Deinde pro $\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (\eta + \nu)$ colligo

$d\eta + d\nu = (2i - m)\, d\omega - 4ik\, d\omega \, \mathit{cof.}\, \nu$;

unde erit $d\omega = \frac{d\eta + d\nu}{2i - m} + \frac{4ik\, d\omega\, \mathit{cof.}\, \nu}{2i - m}$, ideoque

$\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (\eta + \nu) = \frac{-\, \mathit{cof.}\, (\eta + \nu)}{2i - m} + \frac{4ik}{2i - m} \int d\omega \, \mathit{cof.}\, \nu \, \mathit{fin.}\, (\eta + \nu)$.

Sed quia in nostra formula $\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (\eta + \nu)$ jam per k est multiplicatum, posterius membrum, quod adhuc integrari deberet, omittimus, qui produceret quantitatem per kk affectam. Hac omissione pariter facta pro reliquis formulis, habebimus etiamnunc in differentialibus:

$2d\eta - d\nu = (i - 2m)\, d\omega$, & $2d\eta + d\nu = (3i - 2m)\, d\omega$,

ideoque $d\omega = \frac{2d\eta - d\nu}{i - 2m}$, & $d\omega = \frac{2d\eta + d\nu}{3i - 2m}$.

§. XCIV. His igitur valoribus adhibitis adipiscemur facile formulas integrales sequentes:

$$\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (\eta - \nu) = \frac{+\, \mathit{cof.}\, (\eta - \nu)}{m};$$

$$\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (\eta + \nu) = \frac{-\, \mathit{cof.}\, (\eta + \nu)}{2i - m};$$

$$\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (2\eta - \nu) = \frac{-\, \mathit{cof.}\, (2\eta - \nu)}{i - 2m};$$

$$\int d\omega \, \mathit{fin.}\, (2\eta - \nu) = \frac{-\, \mathit{cof.}\, (2\eta + \nu)}{3i - 2m};$$

atque ex his jam priora integralia completa reddentur:

$$\int d\omega \sin.\ \eta = -\frac{\cos.\eta}{i-m} + \frac{ik\cos.(\eta - v)}{(i-m)m} - \frac{ik\cos.(\eta + v)}{(i-m)(2i-m)},$$

$$\int d\omega \sin.2\eta = -\frac{\cos.2\eta}{2(i-m)} - \frac{ik\cos.(2\eta - v)}{(i-m)(i-2m)} - \frac{ik\cos.(2\eta + v)}{(i-m)(3i-2m)},$$

$$\int d\omega \sin.3\eta = -\frac{\cos.3\eta}{3(i-m)} - \frac{ik\cos.(3\eta - v)}{(i-m)(2i-3m)} - \frac{ik\cos.(3\eta + v)}{(i-m)(4i-3m)}.$$

&c.

Quæ integralia non ſolum ad valorem integralem ipſius p, ſed etiam ipſius q inveniendum inſerviunt.

§. XCV. Cum nimirum valor medius ipſius p debeat eſſe $= b$, in integratione circa adjectionem conſtantis nullum erit dubium; ſingulis igitur partibus integratis reperietur

$$\frac{p}{b} = 1 - \frac{2nibb}{cc}\left\{\frac{\cos.\eta}{i-m} - \frac{(3i-m)k\cos.(\eta - v)}{2(i-m)m} + \frac{(3i-m)k\cos(\eta + v)}{2(i-m)(2i-m)}\right\}$$

$$+ \frac{2nibbc}{f^3}\left\{\begin{aligned}
&+\frac{(2g-g'')\cos.\eta}{2(i-m)} + \frac{ik(2g-g'')\cos.(\eta - v)}{2(i-m)m} \\
&+\frac{(g'-g''')\cos 2\eta}{4(i-m)} + \frac{k(2g-g''+2h-h'')\cos.(\eta - v)}{4m} \\
&+\frac{(g''-g'''')\cos.3\eta}{6(i-m)} - \frac{ik(g'-g''')\cos.(2\eta - v)}{2(i-m)(i-2m)} \\
&- \frac{k(g'-g'''+h'-h''')\cos.(2\eta - v)}{4(i-2m)} \\
&- \frac{ik(2g-g'')\cos.(\eta + v)}{2(i-m)(2i-m)} \\
&- \frac{k(2g-g''+2h-h'')\cos.(\eta + v)}{4(2i-m)} \\
&- \frac{ik(g'-g''')\cos.(2\eta + v)}{2(i-m)(3i-2m)} \\
&- \frac{k(g'-g''+h'-h''')\cos.(2\eta + v)}{4(3i-2m)}
\end{aligned}\right\}$$

Ac si terminos per excentricitatem k affectos, ut pote præ reliquis valde parvos negligamus, erit succinctius:

$$\frac{p}{b} = 1 - \frac{2\,n\,i\,b\,b\,cos.\,n}{(i-m)\,c\,c} + \frac{n\,i\,b\,b\,c}{(i-m)f^3}\Big((2\,g - g'')\,cos.\,n$$
$$+\tfrac{1}{2}(g' - g''')\,cos.\,2\,n + \tfrac{1}{3}(g'' - g'''')\,cos.\,3\,n + \&c.\Big)$$

ubi notandum esse $\frac{b}{c} = \sqrt[3]{\frac{mm}{ii}}$, & $ff = bb + cc$.

§. XCVI. Ope earundem formularum simplicium integralium etiam vera excentricitas orbitæ q per integrationem differentialis (§. LXXXIV) evoluti assignari poterit; modo adjiciatur $\int d\omega\, sin.\, v = \int \frac{dv}{i} sin.\, v = \frac{-cos.\, v}{i}$, si quidem porro ex his expressionibus minimis terminos excentricitatem k involventes negligere pergamus. Hinc igitur posita excentricitate media $= k$, erit excentricitas vera:

$$q = k - \frac{n\,i\,b\,b}{c\,c}\left(\frac{3\,cos.\,(n-v)}{2\,m} - \frac{cos.\,(n+v)}{2\,(2\,i-m)}\right);$$

$$-\frac{n\,i\,b^3}{f^3}\left\{\begin{array}{l}\frac{g\,cos.\,v}{i} + \frac{g'\,cos.\,(n-v)}{2\,m} - \frac{g'\,cos.\,(n+v)}{2\,(2\,i-m)} \\ \qquad - \frac{g''\,cos.\,(2\,n-v)}{2\,(i-2\,m)} + \frac{g''\,cos.\,(2\,n+v)}{2\,(3\,i-2\,m)}\end{array}\ \&c.\right\}$$

$$+\frac{n\,i\,b\,b\,c}{f^3}\left\{\begin{array}{l}+\frac{g'\,cos.\,v}{2\,i} + \frac{(6\,g-g'')\,cos.\,(n-v)}{4\,m} - \frac{(2\,g-3\,g'')\,cos.\,(n+v)}{4\,(2\,i-m)} \\ \qquad - \frac{(3\,g'-g''')\,cos.\,(2\,n-v)}{4\,(i-2\,m)} - \frac{(g'-2\,g'')\,cos.\,(2\,n+v)}{4\,(3\,i-2\,m)}\end{array}\right\}$$
$$\&c.$$

Ubi quidem assumimus excentricitatem mediam k tantam esse, ut ejus respectu istæ inæqualitates longe sint minimæ; patet autem has inæqualitates non ab ipsa magnitudine media excentricitatis k pendere, sed easdem prodire sive k sit major sive minor. Quod secus accidit in variationibus lateris recti, quæ sunt proportionales ipsi magnitudini mediæ parametri.

§. XCVII.

§. XCVII. Cognito jam semiparametro p & excentricitate q, semiaxis transversus orbitæ facile definietur, cum sit $= \frac{p}{1 - qq}$. Erit igitur variabilis tam ob variabilitatem ipsius p, quam ipsius q, sed hæc posterior tantum terminos producit per k affectos, unde his neglectis variatio axis transversi potissimum pendebit à variatione parametri, hincque ergo erit

$$\text{Semiaxis transversus} = \frac{b}{1 - kk} - \frac{2nibb}{(i-m)c^2}.\ b\ cos.\ n;$$
$$+ \frac{nibbc}{(i-m)f^3}.\ b\left((2g - g'')\ cos.\ n + \tfrac{1}{2}(g' - g''')\ cos.\ 2n + \tfrac{1}{3}(g'' - g'''')\ cos.\ 3n + \&c.\right)$$

Quare tam parameter & axis transversus quam excentricitas, variationes tantum subeunt periodicas, quæ post certa temporis intervalla ad statum pristinum revertantur, neque perpetua sive incrementa sive decrementa capiunt; sed quantum certis temporibus fuerint aucta, tandundem aliis temporibus diminuentur. Ceterum ex hac applicatione ad axem transversum patet, valorem inventum pro q, etsi terminos tantum primi ordinis continet, tamen æque longe productum esse æstimandum atque valorem ipsius p in quo terminos primi & secundi ordinis evolvimus.

§. XCVIII. Denique definiendus occurrit motus aphelii, in quo præcipuus effectus actionis mutuæ planetarum, quem quidem observationes evidenter manifestarint, cernitur; is autem per integrationem formulæ (§. LXXXV) datæ determinabitur. Aliæ autem hic adsunt formulæ simplices integrandæ, quarum integrationem quoque ad secundum ordinem continuari oportet, uti circa parametrum fecimus, non quo termini secundi ordinis præ primo minus negligi queant, sed quia secundus ordo continet partes omnino constantes, unde per integrationem hujusmodi termini $\alpha\,\omega$ nascuntur, qui quantumvis coëfficiens α fuerit parvus, tamen cum tempore continuo crescunt. Quia enim angulus ω est tempori proportionalis, hi termini motum medium aphelii declarabunt; in quorum idcirco investigatione vel minima particula perperam negligitur. At terminis hujus formæ exceptis, reliqui ad secundum ordinem pertinentes, quia periodicas inæqualitates continent, & præ primo ordine valde sunt parvi sine errore omitti poterunt; cum etiam levis error in loco aphelii commissus nullius sit momenti.

§. XCIX. Simili igitur modo integrationem instituendo, ante omnia sequentes formulas expendere oportet

$$dv = i\,d\omega - 2\,i\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v;$$

$$d\eta - dv = -m\,d\omega - o;$$

$$d\eta + dv = (2\,i - m)\,d\omega - 4\,i\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v;$$

$$2\,d\eta - dv = (i - 2\,m)\,d\omega - 2\,i\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v;$$

$$2\,d\eta + dv = (3i - 2\,m)\,d\omega - 6\,i\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v;$$

$$d\omega = \frac{dv}{i} + 2\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v;$$

$$d\omega = \frac{-(d\eta - dv)}{m};$$

$$d\omega = \frac{d\eta + dv}{2\,i - m} + \frac{4\,i\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v}{2\,i - m};$$

$$d\omega = \frac{2\,d\eta - dv}{i - 2\,m} + \frac{2\,i\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v}{i - 2\,m};$$

$$d\omega = \frac{2\,d\eta + dv}{3\,i - 2\,m} + \frac{6\,i\,k\,d\omega\,\mathrm{cos}.\,v}{3\,i - 2\,m};$$

tum pro terminis secundi ordinis:

$$d\omega = \frac{dv}{i} = \frac{d\eta}{i - m} = \frac{-(d\eta - 2\,dv)}{i + m} = \frac{d\eta + 2\,dv}{3\,i - m}$$

$$= \frac{-(2\,d\eta - 2\,dv)}{2m} = \frac{2\,d\eta + 2\,dv}{2\,(2\,i - m)}$$

Hinc omittendis terminis ſecundi ordinis, qui non ſunt formæ $\alpha\,\omega$ fiet $\int d\,\omega\,\cos.\,\nu = \frac{\sin.\,\nu.}{i} + k \int d\,\omega\,(1 + \cos.\,2\,\nu) = \frac{\sin.\,\nu}{i} + k\,\omega$;

$$\int d\,\omega\,\cos.\,(\eta - \nu) = -\frac{\sin.\,(\eta - \nu)}{m},$$

$$\int d\,\omega\,\cos.\,(2\eta - \nu) = +\frac{\sin.\,(2\,\eta - \nu)}{i - 2\,m},$$

$$\int d\,\omega\,\cos.\,(\eta + \nu) = \frac{+\sin.\,(\eta + \nu)}{2\,i - m},$$

$$\int d\,\omega\,\cos.\,(2\,\eta + \nu) = \frac{+\sin.\,(2\,\eta + \nu)}{3\,i - 2\,m}.$$

quæ formulæ ad motum aphelii definiendum ſufficiunt.

§. C. Ex his igitur differentiale (§. LXXXV) integratum præbebit motum aphelii ſequenti modo expreſſum:

$$\varphi - \nu = Const. + \frac{n\,i\,b\,b}{c\,c\,k}\left(\frac{3\sin.\,(\eta - \nu)}{2\,m} + \frac{\sin.\,(\eta + \nu)}{2\,(2\,i - m)}\right)$$

$$- \frac{n\,i\,b^3}{f^3}\left\{\begin{array}{l} + \frac{g\,\sin.\,\nu}{i} - \frac{g'\sin.\,(\eta - \nu)}{2\,m} + \frac{g'\sin.\,(\eta + \nu)}{2\,(2\,i - m)} \\ + \frac{1}{2}k(3\,g + h)\,\omega + \frac{g''\sin.\,(2\,\eta - \nu)}{2\,(i - 2\,m)} + \frac{g''\sin.\,(2\,\eta + \nu)}{2\,(3\,i - 2\,m)} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{n\,i\,b\,b\,c}{f^3\,k}\left\{\begin{array}{l} + \frac{g'\sin.\,\nu}{2\,i} - \frac{(6\,g - g'')\sin.\,(\eta - \nu)}{4\,m} + \frac{(2g' - g''')\sin\,(2\,\eta - \nu)}{4\,(i - 2\,m)} \\ + \frac{1}{4}k(2g' + h')\,\omega - \frac{(2\,g - 3\,g''\ \sin.\,(\eta + \nu)}{4\,(2\,i - m)} - \frac{(g' - 3\,g'''\ \sin.\,(2\,\eta + \nu}{4\,(3\,i - 2\,m)} \end{array}\right\}$$

Hujus expreſſionis pars præcipua formæ $\alpha\,\omega$ motum medium aphelii præbet, qui ergo uti perſpicuum eſt non à quantitate excentricitatis pendet. Tempore ſcilicet quo ſol ſecundum motum medium percurrit angulum $= \omega$ aphelium planetæ proferetur per angulum $\frac{nibbc}{4f^3}$ $(2g' + h')\,\omega - \frac{nib^3}{2f^3}(3g + h)\,\omega$ reliqui vero termini inæqualitates periodicas aphelii complectuntur, quæ eo evadunt majores quo minor fuerit excentricitas orbitæ.

§. CI. Præter hunc autem motum uniformem, quo aphelium profertur, ejus locus ad quodvis tempus corrigi debet per inæqualitates periodicas, quæ ſinibus angulorum $\nu, \eta \mp \nu, 2\eta \mp \nu$, &c. ſunt proportionales: atque in hunc finem longitudo aphelii ita exprimetur:

$$\varphi - \nu = Conſt. + \frac{nibbc}{4f^3}(2g' + h')\,\omega - \frac{nib^3}{2f^3}(3g + h)\,\omega;$$

$$+ \frac{nibb}{2cck}\left(\frac{(3\,ſin.(\eta - \nu)}{m} + \frac{ſin.(\eta + \nu)}{2i - m}\right);$$

$$- \frac{nib^3}{4f^3k}\left\{\begin{array}{l}\frac{2g\,ſin.\,\nu}{i} - \frac{g'\,ſin.(\eta - \nu)}{m} + \frac{g'\,ſin.(\eta + \nu)}{2i - m}\\ \qquad + \frac{g''\,ſin.(2\eta - \nu)}{i - 2m} + \frac{g''\,ſin.(2\eta + \nu)}{3i - 2m}\end{array}\right\}$$

$$+ \frac{nibbc}{4f^3k}\left\{\begin{array}{l}\frac{2g'\,ſin.\,\nu}{i} - \frac{(6g - g'')\,ſin.(\eta - \nu)}{m} - \frac{(2g - 3g'')\,ſin.(\eta + \nu)}{2i - m}\\ \qquad + \frac{(3g' - g''')\,ſin.(2\eta - \nu)}{i - 2m} - \frac{(g' - 3g''')\,ſin.(2\eta + \nu)}{3i - 2m}\end{array}\right\}$$

Cujus expreſſionis pars prima exhibet longitudinem mediam aphelii ad quodvis tempus, cui porro ſi applicentur inæqualitates reliqua parte contentæ, impetrabitur locus aphelii verus. Quodſi ponatur $\omega = 360$, ex prima parte innoteſcet motus aphelii annuus reſpectu ſtellarum fixarum.

§. CII. Quia in motu Lunæ inveſtigatio motus ejus apogei tantam diligentiam ac ſagacitatem, totque calculos intricatos exigebat, dubium hic oriri poteſt, an hoc modo verus motus apheliorum eliciatur? Quodsi enim idem calculus ad Lunam transferretur, formula inventa semissem tantum veri motus apogei prope modum esset ostensura. Verum in hac applicatione ad Lunam numerus n seu potius termini hunc numerum continentes incomparabiliter prodeunt majores, quam nostro casu, atque termini quadratum numeri n involventes demum veram motus apogei quantitatem complent. Hic autem ob valores terminorum numero n affectorum minimos, nullum est dubium, quin terminos, qui ejus quadratum complecterentur, sine ullius erroris sensibilis metu prætermittere queamus. Deinde etiam ex formulis generalioribus evidens est, excentricitatem planetæ perturbantis e nihil ad motum aphelii conferre.

SECTIO VII.

Investigatio Anomaliæ veræ quatenus ea ad quodvis tempus ab actione Planetarum mutua perturbatur.

§. CIII. IN superiori sectione formulas eruimus, quibus ad quodvis tempus veri valores cum parametri & excentricitatis orbitæ, tum etiam vera longitudo aphelii definiuntur; in has autem formulas præter angulum n potissimum ingreditur angulus v qui planetæ anomaliam veram designat. Præcipuum opus igitur adhuc perficiendum in hoc consistit, ut methodum tradamus ad quodvis tempus anomaliam veram inveniendi; quæ cum, si nullæ adsint perturbationes ex anomalia media colligi soleat; hic quoque anomaliam planetæ mediam in computum introduci conveniet, quæ quoniam uniformiter cum tempore crescit, ad quodvis tempus tempore crescit, ad quodvis tempus expedite assignatur; sive quod eodem redit anomalia media reperitur, si à planetæ longitudine media, aphelii locus medius subtrahatur. Quæstio ergo hac sectione enodanda determinationem anomaliæ veræ v ex data anomalia media postulat.

§. CIV. Si nullæ adessent vires turbantes, foret $d\phi = dv$, atque anomalia vera v ex hac æquatione $d\phi = dv = \frac{a\,d\omega \sqrt{ap}}{xx}$, seu $d\omega = \frac{p\sqrt{p}}{a\sqrt{a}} \cdot \frac{dv}{(1 - q\,cos.\,v)^2}$ definiri deberet; essent enim p & q quantitates constantes, & $d\omega$ incremento anomaliæ mediæ proportionale. In nostro autem casu neque quantitates p & q sunt conſtantes, neque $d\varphi = dv$, unde manifeſtum eſt relationem inter anomalias mediam & veram quoque ab actione planetarum mutua perturbari. Interim tamen hæc relatio erit petenda ex æquatione $d\varphi = \frac{a\,d\omega\sqrt{ap}}{xx}$, ſeu hæc $d\omega = \frac{p\sqrt{p}}{a\sqrt{a}} \cdot \frac{d\varphi}{(1 - q\,coſ.\,v)^2}$ ſubſtituendo pro $d\varphi$ valorem, qui ipſi ex æquatione differentiali motus aphelii convenit; hæcque æquatio in §. LXXXV habetur evoluta vi cujus cum non ſit $d\varphi - dv = 0$; ponamus brevitatis gratia loco hujus æquationis differentialis $d\varphi - dv = n\,V\,d\omega$, eritque

$$d\omega = \frac{p\sqrt{p}}{a\sqrt{a}} \cdot \frac{dv}{(1 - q\,coſ.\,v)^2} + \frac{p\sqrt{p}}{a\sqrt{a}} \cdot \frac{n\,V\,d\omega}{(1 - q\,coſ.\,v)^2}.$$

§. C V. Cum jam p & q non ſint quantitates conſtantes, eorumque valores in ſuperiori ſectione ſint definiti, ponamus quoque brevitatis gratia

$$p = b(1 + n\,P), \quad \& \quad q = k + n\,Q;$$

ita ut $n\,P$, $n\,Q$, & $n\,V$ ſint effectus perturbationis, eritque ob numerum n minimum $p\sqrt{p} = b^{\frac{3}{2}}(1 + \frac{3}{2}n\,P)$, & quia poſuimus $\frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = i$ habebimus

$$\frac{p\sqrt{p}}{a\sqrt{a}} = \frac{1}{i}(1 + \frac{3}{2}n\,P).$$

Deinde fractio $\frac{1}{(1 - q\,coſ.\,v)^2}$ in ſeriem converſa dat proxime

$$(1 - qq)^{-\frac{3}{2}}(1 + 2q\,coſ.\,v + \tfrac{3}{2}qq\,coſ.\,2v + q^3\,coſ.\,3v \text{ \&c.})$$

quæ ponendo $k + n\,Q$ loco q, & negligendo terminos per nn & nkk affectos abit in hanc:

$$(1 - kk)^{-\frac{3}{2}}(1 + 2k\,coſ.\,v + \tfrac{3}{2}kk\,coſ.\,2v + k^3\,coſ.\,3v)$$
$$+ 2n\,Q\,coſ.\,v + 3n\,k\,Q\,coſ.\,2v + 3n\,k\,Q.$$

Hinque erit

$$\frac{p\sqrt{p}}{a\sqrt{a}} \cdot \frac{dv}{(1 - q\,coſ.\,v)^2} = \frac{dv(1 + 2k\,coſ.\,v + \frac{3}{2}kk\,coſ\,2v + k^3\,coſ.\,3v)}{i(1 - kk)\sqrt{(1 - kk)}}$$

$+\frac{n\,d\,v}{i}(2\,Q\,cos.\,v+\frac{3}{2}P+3k\,P\,cos.\,v+3k\,Q+3k\,Q\,cos.\,2v).$

§. CVI. In parte altera autem formulæ integrandæ tam p quam q pro constantibus haberi possunt, eritque ergo ea pari

$$\frac{n}{i}\,d\,\omega\,(V+2\,k\,V\,cos.\,v),$$

& quia in his particulis minimis est $d\,v = i\,d\,\omega\,(1-2k\,cos.\,v)$ obtinebimus æquationem sequentem:

$$d\,\omega = \frac{d\,v\,(1+2\,k\,cos.\,v+\frac{3}{2}\,k\,k\,cos.\,2\,v+k^3\,cos.\,3\,v)}{i\,(1-k\,k)\,\sqrt{(1-k\,k)}};$$

$$+\,n\,d\,\omega\,(2\,Q\,cos.\,v+k\,Q+k\,Q\,cos.\,2\,v+\frac{3}{2}\,P)$$
$$+\,\frac{n\,d\,\omega}{i}\,(V+2\,k\,V\,cos.\,v);$$

cujus pars principalis integrata deducet ad hanc æquationem integralem:

$$\omega = \frac{v+2\,k\,sin.\,v+\frac{3}{4}\,k\,k\,sin.\,2\,v+\frac{1}{3}\,k^3\,sin.\,3\,v}{i\,(1-k\,k)\,\sqrt{(1-k\,k)}};$$

$$+\,n\int d\,\omega\Big(\frac{3}{2}\,P+2\,Q\,cos.\,v+k\,Q+k\,Q\,cos.\,2\,v$$
$$+\,\frac{1}{i}\,V+\frac{2}{i}\,k\,V\,cos.\,v\Big);$$

cujus postremæ partis non amplius erit difficile integrale eruere.

§. CVII. Pro integratione hujus postremæ formulæ notandum est partem $n\int V\,d\,\omega$ exprimere motum aphelii, cujus ergo integrale jam supra §. CI est inventum. Reliquas partes tantisper indicemus signo summatorio, ac pro anomalia vera quæsita sequentem nanciscemur æquationem:

$$v = i(1-kk)^{\frac{3}{2}}\,\omega - 2k\,sin.\,v - \frac{3}{4}\,kk\,sin.\,2v - \frac{1}{3}\,k^3\,sin.\,3v - n\int V\,d\omega;$$
$$-\,i\,n\int d\,\omega\,(\frac{3}{2}\,P+2\,Q\,cos.\,v+\frac{2}{i}\,k\,V\,cos.\,v);$$

in hac enim ultima parte perspicuum est terminos $k\,Q$ & $k\,Q\,cos.\,v$ præ P & Q posse rejici, at vero $k\,V\,cos.\,v$ iisdem

iisdem esse quasi homogeneum unde tantum opus est valores supra pro P, Q, & V inventos substituere. Hic autem primo observo terminum $i\,(1-kk)^{\frac{3}{2}}\omega$ cum partibus formæ $\alpha\, d\omega$, quas posteriora membra integralia forte continent, designare anomaliam mediam, quæ ad quodvis tempus facile colligitur. Si ergo anomaliam mediam ponamus $=\aleph$, habemus hic æquationem inter $\aleph$ & v, per cujus resolutionem non difficulter pro quavis anomalia media ejus respondens anomalia vera elicietur.

§. CVIII. Statuamus ad abbreviandum:

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2}P + 2\,Q\,cos.\,v &= A + B\,cos.\,2\,v + C\,cos.\,\eta\\ + \tfrac{2}{i}\,k\,V\,cos.\,v &\quad + D\,cos.\,2\,\eta + E\,cos.\,(\eta-2\,v)\\ &\quad + F\,cos.\,(\eta+2\,v) + G\,cos.\,(2\,\eta-2\,v)\\ &\quad + H\,cos.\,(2\,\eta+2\,v)\end{aligned}$$

atque horum coëfficientium valores ex superioribus formulis colliguntur:

$$A = \frac{bbc}{f^3}\cdot g' - \frac{2\,b^3}{f^3}\,g; \quad B = \frac{bbc}{f^3}\cdot g' - \frac{2\,b^3}{f^3}\,g;$$

$$C = \left\{\begin{aligned} &-\frac{ibb}{cc}\left(\frac{3}{i-m} + \frac{3}{2\,m} - \frac{1}{2\,(2\,i-m)} + \frac{1}{i}\right) - \frac{i\,b^3}{2\,f^3}\\ &\qquad\left(\frac{2\,g'}{i} + \frac{g'}{m} + \frac{g'}{2\,i-m}\right)\\ &+\frac{ibbc}{4\,f^3}\left(\frac{6\,(2\,g-g'')}{i-m} + \frac{(6\,g-g'')}{m} + \frac{(6\,g-g'')}{i}\right.\\ &\qquad\left. - \frac{(2\,g-3\,g'')}{2\,i-m} - \frac{(2\,g-3\,g'')}{i}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$D = \left\{\begin{aligned} &-\frac{i\,b^3}{2\,f^3}\left(\frac{-g''}{i-2\,m} + \frac{2\,g''}{i} + \frac{g''}{3\,i-2\,m}\right)\\ &+\frac{ibbc}{4\,f^3}\left(\frac{3\,(g'-g''')}{i-m} - \frac{(3\,g'-g''')}{i-2\,m} + \frac{(3\,g'-g''')}{i}\right.\\ &\qquad\left. - \frac{(g'-3\,g''')}{3\,i-2\,m} - \frac{(g'-3\,g''')}{i}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$E = \frac{-ibb}{2cc}\left(\frac{2}{m} + \frac{3}{i}\right) - \frac{ib^3}{2f^3}\left(\frac{g'}{m} + \frac{g'}{i}\right) + \frac{ibbc}{4f^3}\left(\frac{6g - g''}{m} + \frac{6g - g''}{i}\right)$$

$$F = \frac{-ibb}{2cc}\left(-\frac{1}{2i-m} - \frac{1}{i}\right) - \frac{ib^3}{2f^3}\left(\frac{g'}{2i-m} + \frac{g'}{i}\right) + \frac{ibbc}{4f^3}\left(-\frac{(2g-3g'')}{2i-m} - \frac{(2g-3g'')}{i}\right)$$

$$G = \frac{-ib^3}{2f^3}\left(-\frac{g''}{i-2m} + \frac{g''}{i}\right) + \frac{ibbc}{4f^3}\left(-\frac{(3g'-g''')}{i-2m} + \frac{(3g'-g''')}{i}\right)$$

$$H = \frac{-ib3}{2f^3}\left(\frac{+g''}{3i-2m} + \frac{g''}{i}\right) + \frac{ibbc}{4f^3}\left(-\frac{(g'-3g''')}{3i-2m} - \frac{(g'-3g''')}{i}\right)$$

§. CIX. Valoribus autem horum coëfficientum definitis facile erit ſingulorum terminorum integralia exhibere, quia ultra ordinem primum ea deducere non eſt opus: Erit itaque

$$\int d\omega\,(\tfrac{3}{2}P + 2Q\,cos.\,\nu + \tfrac{3}{2}k\,V\,cos.\,\nu) = A\omega + \frac{B}{2i}\,fin.\,2\nu + \frac{C}{i-m}\,fin.\,\eta + \frac{D}{2(i-m)}\,fin.\,2\eta - \frac{E}{i+m}\,fin.\,(\eta - 2\nu) + \frac{F}{3i-m}\,fin.\,(\eta + 2\nu) - \frac{G}{2m}\,fin.\,(2\eta - 2\nu) + \frac{H}{2(2i-m)}\,fin.\,(2\eta + 2\nu).$$

Deinde ſi ponamus ſimili modo ad abbreviandum

$$\int V\,d\omega = \Delta\omega + \frac{\alpha}{k}\,fin.\,\nu + \frac{\beta}{k}\,fin.\,(\eta - \nu) + \frac{\gamma}{k}\,fin.\,(\eta + \nu) + \frac{\delta}{k}\,fin.\,(2\eta - \nu) + \frac{\varepsilon}{k}\,fin.\,(2\eta + \nu);$$

erunt hi coëfficientes ex §. CI.

$$\Delta = \frac{ibbc}{4f^3}(2g' + h') - \frac{ib^3}{2f^3}(3g + h);$$

$$\alpha = \frac{bbc}{2f^3} \cdot g' - \frac{b^3}{f^3} \cdot g;$$

$$\beta = \frac{bb}{cc} \cdot \frac{3i}{2m} + \frac{b^3}{2f^3} \cdot \frac{ig'}{m} - \frac{bbc}{4f^3} \cdot \frac{(6g - g'')i}{m};$$

$$\gamma = \frac{bb}{2cc} \cdot \frac{i}{2i - m} - \frac{b^3}{2f^3} \cdot \frac{ig'}{2i - m} - \frac{bbc}{4f^3} \cdot \frac{(2g - 3g'')i}{2i - m};$$

$$\delta = -\frac{b^3}{2f^3} \cdot \frac{ig''}{i - 2m} + \frac{bbc}{4f^3} \cdot \frac{(3g' - g''')i}{i - 2m};$$

$$\varepsilon = -\frac{b^3}{2f^3} \cdot \frac{ig''}{3i - 2m} - \frac{bbc}{4f^3} \cdot \frac{(g - 3g''')i}{3i - 2m}.$$

§. CX. Si jam hos valores determinaverimus, habebimus primo anomaliam mediam:

$$\aleph = i(1 - kk)^{\frac{3}{2}}\omega - n\Delta\omega - inA\omega;$$

qua cognita anomalia vera v ita debet definiri ut sit:

$$v = \aleph - 2k\,\text{sin.}\,v - \tfrac{3}{4}kk\,\text{sin.}\,2v - \tfrac{1}{3}k^3\,\text{sin.}\,3v;$$

$$- \frac{n}{k}\Big(\alpha\,\text{sin.}\,v + \beta\,\text{sin.}\,(\eta - v) + \gamma\,\text{sin.}\,(\eta + v)$$
$$+ \delta\,\text{sin.}\,(2\eta - v) + \varepsilon\,\text{sin.}\,(2\eta + v)\Big);$$

$$-n\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}B\,\text{sin.}\,2v + \dfrac{Ci}{i - m}\,\text{sin.}\,\eta + \dfrac{Di}{2(i - m)}\,\text{sin.}\,2\eta \\ - \dfrac{Ei}{i + m}\,\text{sin}\,(\eta - 2v) + \dfrac{Fi}{3i - m}\,\text{sin.}\,(\eta + 2v) \\ - \dfrac{Gi}{2m}\,\text{sin.}\,(2\eta - 2v) + \dfrac{Hi}{2(2i - m)}\,\text{sin.}\,(2\eta + 2v) \end{array}\right\}$$

Si esset $n = 0$, nota est operatio, qua ex data anomalia media $\aleph$ elicitur vera v; cum igitur sit n fractio valde parva, per eandem operationem, omittendis primum terminis per n affectis quæratur anomalia vera v mediæ

$\aleph$ conveniens, eaque deinceps per terminos fractione n affectos corrigatur. Tum si eam accuratius definire velimus, valorem pro v modo inventum in expressione illa pro v reperta substituamus, ex eoque denuo v determinemus.

§. CXI. Facilius autem per consuetas tabulas anomaliarum totum hoc negotium expediri potest. Cum enim perturbationes sunt minimae, sufficiet pro iis anomaliam veram v proxime saltem nosse, ejusque ergo loco anomalia media ipsa $\aleph$ uti licebit, namque errores, qui hoc modo committentur, ad sequentem terminorum, quos negligimus, ordinem pertinerent. Tum valor horum terminorum minimorum ad anomaliam mediam $\aleph$ referatur, seu ex data anomalia media $\aleph$ quaeratur anomalia media correcta $\aleph'$ ut sit

$$\aleph' = \aleph - \tfrac{n}{k}\Big(\alpha\, \text{fin.}\, \aleph + \beta\, \text{fin.}\,(\eta - \aleph) + \gamma\, \text{fin.}\,(\eta + \aleph) + \delta\, \text{fin.}\,(2\eta - \aleph) + \varepsilon\, \text{fin.}\,(2\eta + \aleph)\Big);$$

ubi quidem partem posteriorem, utpote prae hac valde parvam omitto, atque jam pro data excentricitate k ex tabulis consuetis quaeratur anomalia vera quae huic anomaliae mediae correctae respondeat; hocque modo obtinebitur ipsa illa anomalia vera v, qua pro evolutione omnium formularum hactenus inventarum indigemus, erit scilicet

$$v = \aleph' - 2k\, \text{fin.}\, v - \tfrac{5}{4} kk\, \text{fin.}\, 2v - \tfrac{1}{3} k^3\, \text{fin.}\, 3v.$$

§. CXII. In Tabulis autem Astronomicis pro data quavis anomalia media non tam ei respondens anomalia vera, quam differentia, quae prostaphaeresis seu aequatio centri vocatur, exhiberi solet, neque etiam pro nostro scopo quicquam in hoc instituto immutari est opus. Ad manus igitur sit tabula more solito adornata, quae pro excentricitate k cuique anomaliae mediae respondentem aequationem centri exhibeat. Antequam autem hac tabula utamur, anomalia media planetæ γ ad datum tempus collecta, per inæqualitates supra expositas & tam ab ea ipsa quam ab angulo η, cujus valorem quoque ex motu medio utriusque planetæ collegisse sufficit, pendentes corrigatur, ut obtineatur anomalia media correcta γ'. Tum in dicta Tabula quæratur æquatio isti anomaliæ mediæ γ' conveniens, quæ sit $= \pm$ *Æ*, qua inventa statim habebitur anomalia vera quæsita $v = \gamma' \pm$ *Æ*, qua in determinatione & evolutione omnium formularum supra inventarum uti opportebit. Simul vero hæc æquatio $\pm$ *Æ* ex tabula desumta verum valorem formulæ $- 2\, k\, \mathit{fin.}\, v - \frac{3}{4}\, kk\, \mathit{fin.}\, 2\, v - \frac{1}{3}\, k^3\, \mathit{fin.}\, 3\, v$ exhibebit, id quod pro sequenti calculo probe notasse conducet.

§. CXIII. Ad Anomaliam mediam autem pro dato tempore colligendam motum aphelii medium duntaxat nosse opportet, qui membro primo formulæ §. CI erutæ continetur, ex quo habemus:

$$\text{Long. aphelii mediam} = \mathit{Const.} + \frac{nibbc}{4f^3} (2g' + h')\,\omega - \frac{nib^3}{2f^3} (3g + h)\,\omega,$$

seu abbreviationem ante introductum adhibendo erit:

$$\text{Long. aphelii media} = \mathit{Const.} + n\,\Delta\,\omega.$$

Quoniam autem omnes planetæ ad motum medium aphelii aliquid conferunt, singulorum effectus exquiri debet, ut inde ad quodvis tempus propositum longitudo aphelii media rite obtineatur. Vel cum ex collatione recentiorum observationum cum antiquis motus medius aphelii cujusque planetæ satis accurate jam sit exploratus, eo potius uti conveniet. Quare cum hinc ad tempus propositum longitudo media aphelii sit definita, ea à longitudine media ipsius planetæ subtracta præbebit ejus anomaliam mediam γ pro eodem tempore proposito, quæ etiam in nonnullis tabulis immediate exprimi solet.

§. CXIV. Deinde si perturbationes, quæ ab actione certi cujusdam planetæ proficiscuntur, indagare velimus, primum ex collatione semi parametri ejus orbitæ c, cum semi parametro b planetæ examinandi ope formularum §. LXXII & LXXVIII datarum computentur valores litterarum g, g', g'', &c. ex hisque porro per rationem mediorum motuum i & m valores litterarum α, β, γ, δ, ε, itemque A, B, C, D, E, F, G, H, qui omnes in meris numeris expressi prodibunt. Tum etiam massa Planetæ per massam Solis divisa dabit fractionem n. Quibus inventis ad tempus propositum colligatur longitudo media planetæ perturbati & perturbantis, quia posteriori à priori ablata remanebit angulus, quo loco η uti licebit in indagatione correctionum anomaliæ mediæ (§. CXI). Vel quod expediet, utriusque planetæ longitudo per tabulas ordinarias definiatur, ac differentia pro angulo η assumatur, quandoquidem hic valor à vero nonnisi in minutiis discrepabit.

SECTIO VIII.

Expositio Universi Calculi quo verus Planetæ locus in orbita ob actionem reliquorum planetarum perturbatus assignatur.

§. CXV. PRIMA operatio in hoc consistet, ut pro quolibet planeta, à cujus actione motus planetæ propositi perturbatur, ope formularum §. LXXII & LXXVIII expositarum primo valores litterarum g, g', g'', &c. (litteris enim reliquis h, h' l, l', &c. ibidem adhibitis carere possumus), tum vero ex his porro valores litterarum A, B, C, D, &c. ex §. CVIII, & litterarum quoque Δ, α, β, γ, δ, &c. ex §. CIX per calculum evolvantur: pro quo calculo recordari debemus, fractionem n obtineri, si massa planetæ perturbantis per massam solis dividatur: deinde si motus diurnus medius solis unitate exponatur, exprimet littera i motum diurnum medium planetæ perturbati, & m planetæ perturbantis. Calculus quidem pro valoribus illarum litterarum instituendus admodum est molestus, verumtamen per subsidia indicata satis exacte absolvi poterit.

§. CXVI. Statim autem ex valore Δ cognoscetur, quantum aphelium ab actione cujusdam planetæ promoveatur; si enim pro angulo ω ponamus $360°$ terminus $n\,\Delta\,\omega$ dabit motum aphelii annuum, ac si hunc valorem ab actione cujuslibet planetæ deducamus, omnes conjunctim ostendent verum motum annuum planetæ respectu stellarum fixarum, qui vix quicquam ab eo, quem per obſervationes cognovimus, diſcrepare deprehendetur. Cognito autem tam aphelii quam ipſius, planetæ motu medio ad quodvis tempus propoſitum tam hujus planetæ longitudo media quam anomalia media facile aſſignabitur. Statuamus ergo ejus longitudinem mediam $= \zeta$ & anomaliam mediam $= \upsilon$; tum vero excentricitas media ſit $= k$.

§. CXVII. Deinde hæc anomalia media υ ex tabulis mediorum motuum deſumta corrigi debet per formulam §. CXI allatam, ut obtineatur anomalia media correcta υ'. Vel ſi tabulæ mediorum motuum loco anomaliæ mediæ exhibeant locum aphelii medium, eædem correctiones ſignis verſis ad aphelium applicari debebunt: hoc autem modo reperietur ipſa longitudo aphelii vera, unde hæc correctio magis eſt naturalis priori anomaliæ illata. Quare ex longitudine aphelii media quæratur longitudo ejus vera per hanc formulam

$$\text{Longitudo Aphelii vera} = \text{Longitudini Aphelii mediæ} + \tfrac{n}{k}\Big(\alpha\, \textit{ſin.}\, \upsilon + \beta\, \textit{ſin.}\, (\eta - \upsilon) + \gamma\, \textit{ſin.}\, (\eta + \upsilon) + \delta\, \textit{ſin.}\, (2\eta - \upsilon) + \varepsilon\, \textit{ſin.}\, (2\eta + \upsilon)\Big);$$

quæ correctio, quia per excentricitatem k eſt diviſa ſatis notabilis eſſe poteſt. Tum iſta Longitudo aphelii vera ſubtrahatur à longitudine planetæ media ζ, ut obtineatur anomalia media ejus correcta υ'.

§. CVXIII. Tertio in promtu eſto tabula æquationum centri more ſolito ad excentricitatem k computata, ex qua pro anomalia media υ' excerpatur æquatio centri reſpondens quæ ſit $\pm Æ$, atque hinc reperietur Anomalia vera $= \upsilon' \pm Æ$ quæ ob duplicem cauſam ab anomalia vera, quæ more ſolito ex tabulis æquationum colligitur nullo reſpectu ad perturbationes habito; diſcrepat, primo enim etſi ex eadem tabula deſumta eſt, tamen alii anomaliæ mediæ ac vulgo reſpondet, ideoque

que tantumdem discrepat; deinde quia alii anomaliæ mediæ respondet, etiam æquatio $\pm$ *Æ* erit diversa. Manifestum autem est hoc posterius discrimen multo fore minus priore; cum hoc adeo eo majus evadat, quo minor fuerit excentricitas k, tum vero æquatio $\pm$ *Æ* diminuatur. Etsi ergo in calculo perturbationum non adeo accurate nosse opus est anomaliam veram v, tamen correctio anomaliæ mediæ seu loci aphelii neutiquam negligi potest.

§. CXIX. Definita hoc modo anomalia vera v statim locum planetæ in orbita assignare poterimus, ita ut non opus habeamus ante variationem parametri & excentricitatis exquirere: quantum enim hæ variationes ad locum planetæ in orbita perturbandum conferunt, id jam sumus complexi in expressione pro loco aphelii vero supra §. CI inventa. Nam quia jam valorem ipsius v exacte expressum habemus, erit longitudo vera

$$\varphi = v + n \int V\, d\omega + Const.$$

Si ergo pro $\int V\, d\omega$ valorem § CIX positum & pro v valorem §. CX assignatum substituamus, consequemur

$$\varphi = Const. + i(1 - kk)^{\frac{3}{2}}\omega - inA\omega - 2k\,\text{fin.}\,v - \tfrac{3}{4}kk\,\text{fin.}\,2v - \tfrac{1}{3}k^3\,\text{fin.}\,3v - \frac{nB}{2}\,\text{fin.}\,2v - \frac{nCi}{i-m}\,\text{fin.}\,\eta - \frac{nDi}{2(i-m)}\,\text{fin.}\,2\eta + \frac{nEi}{i+m}\,\text{fin.}\,(\eta - 2v) - \frac{nFi}{3i-m}\,\text{fin.}\,(\eta + 2v) + \frac{nGi}{2m}\,\text{fin.}\,(2\eta - 2v) - \frac{nHi}{2(2i-m)}\,\text{fin.}\,(2\eta + 2v)$$

neque igitur hic amplius inæqualitates illæ majores in forma $n \int V\, d\omega$ contenta aliter ingrediuntur, nisi quatenus illis ipsa anomalia vera v jam est immutata.

§. CXX. Prima portio hujus expressionis $i\omega\,((1 - kk)^{\frac{3}{2}} - nA)$ motum medium hujus planetæ exponit, quem ergo etiam ab actione planetarum aliquantillum perturbari manifestum est; hinc si longitudo planetæ media ponatur $= \zeta$, erit $\zeta = Const. + i(1 - kk)^{\frac{3}{2}}\omega - inA\omega$. Deinde vidimus portionem $-2k\,sin.\,v - \frac{3}{4}kk\,sin.\,2v - \frac{1}{3}k^3\,sin.\,3v$ designare æquationem centri $\pm Æ$ quæ in tabulis ordinariis anomaliæ mediæ correctæ $\aleph'$ respondet, dummodo hæ tabulæ excentricitati k sint justo calculo superstructæ. Cum igitur tam longitudo media ζ quam ista æquatio $\pm Æ$ constet, habebitur longitudo vera planetæ in sua orbita:

$$\varphi = \zeta \pm Æ - \frac{nB}{2}\,sin.\,2v - \frac{nCi}{i-m}\,sin.\,\eta - \frac{nDi}{2(i-m)}\,sin.\,2\eta$$

$$+ \frac{nEi}{i+m}\,sin.\,(\eta - 2v) - \frac{nFi}{3i-m}\,sin.\,(\eta + 2v)$$

$$+ \frac{nGi}{2m}\,sin.\,(2\eta - 2v) - \frac{nHi}{2(2i-m)}\,sin.\,(2\eta + 2v)$$

ubi portio $\zeta \pm Æ$ exhibet longitudinem modo ordinario inventam, nisi quatenus anomalia media hic est correcta, tum vero reliqui termini continent ceteras inæqualitates ab actione planetæ perturbantis profectas, quarum quidem portio quædam jam in ipsa æquatione centri $\pm Æ$ ob anomaliam mediam correctam comprehenditur.

§ CXXI. Actionum ergo planetæ perturbantis ad duplicem effectum perduximus, dum altero longitudo aphelii seu anomalia media, altero vero ipsa longitudo perturbatur. Quia vero & priori effectus valde est parvus, uterque commode ad unum revocari poterit. Cum enim anomalia vera tantumdem immutetur quantum anomalia media, si v denotet eam ipsam anomaliam veram, quæ anomaliæ mediæ non correctæ seu naturali $\aleph$ respondet, in expressione pro vero planetæ loco inventa, loco v scribi opportet $v - \frac{n}{k}\big(\alpha\,sin.\,v + \beta\,sin.$

$(\eta - \nu) + \gamma\, \mathit{fin.}\,(\eta + \nu) + \delta\, \mathit{fin.}\,(2\eta - \nu) + \varepsilon\, \mathit{fin.}\,(2\eta + \nu)\big)$ quæ mutatio quidem in terminis minimis nullam variationem ſenſibilem gignit. At ſi jam $\pm Æ$ denotet æquationem centri ipſi anomaliæ mediæ $\aleph$ convenientem, quia eſt $\pm Æ = -2k\, \mathit{fin.}\,\nu - \frac{5}{4}kk\, \mathit{fin.}\,2\nu - \frac{1}{3}k^3\, \mathit{fin.}\,3\nu$, in primo termino mutatio ſenſibilis orietur, ideoque loco $\pm Æ$ ſcribi debebit

$$\pm Æ + n\Big(\alpha\, \mathit{fin}\,2\nu + (\mathfrak{G} + \gamma)\, \mathit{fin.}\,\eta + (\delta + \varepsilon)\, \mathit{fin.}\,2\eta + \mathfrak{G}\, \mathit{fin.}\,(\eta - 2\nu) + \gamma\, \mathit{fin.}\,(\eta + 2\nu) + \delta\, \mathit{fin.}\,(2\eta - 2\nu) + \varepsilon\, \mathit{fin.}\,(2\eta + 2\nu)\Big);$$

ſicque jam $\pm Æ$ denotabit æquationem centri anomaliæ mediæ naturali $\aleph$ reſpondentem, & anomalia vera ν erit etiam ea quæ more ſolito ſumitur ſcilicet $\nu = \aleph \pm Æ$.

§. CXXII. Hinc igitur faciliorem modum adipiſcimur effectum perturbationis in loco planetæ determinandi. More ſcilicet ſolito ad datum tempus colligatur anomalia media $\aleph$, eique ex tabula ordinaria capiatur reſpondens æquatio centri $\pm Æ$, indeque formetur anomalia vera $\nu = \aleph \pm Æ$. Qua ſtabilita, ſi longitudo planetæ media fuerit $= \zeta$ & η deſignet angulum, qui relinquitur ſi à longitudine planetæ perturbati longitudo planetæ perturbantis ſubtrahatur, habebitur longitudo planetæ perturbati vera.

$$\varphi = \zeta \pm Æ + n\Big\{\Big(\alpha - \frac{B}{2}\Big)\mathit{fin.}\,2\nu + \Big(\mathfrak{G} + \gamma - \frac{Ci}{i-m}\Big)\mathit{fin.}\,\eta + \Big(\delta + \varepsilon - \frac{Di}{2(i-m)}\Big)\mathit{fin.}\,2\eta$$
$$+ \Big(\mathfrak{G} + \frac{Ei}{i+m}\Big)\mathit{fin.}(\eta - 2\nu) + \Big(\gamma - \frac{Fi}{3i-m}\Big)\mathit{fin.}\,(\eta + 2\nu)$$
$$+ \Big(\delta + \frac{Gi}{2m}\Big)\mathit{fin.}\,(2\eta - 2\nu) + \Big(\varepsilon - \frac{Hi}{2(2i-m)}\Big)\mathit{fin.}(2\eta + 2\nu)\Big\}.$$

ubi $\zeta + Æ$ exprimit longitudinem planetæ, quam tabulæ ordinariæ præbent, totaque perturbatio jam in terminis annexis continetur.

§. CXXIII. Hic ſtatim obſervo fieri $\alpha - \frac{B}{2} = o$, unde ſi ad reliquos terminos contrahendos ponatur:

$$\begin{aligned}\varphi = \zeta \pm Æ + n B' \textit{ſin.}\, \eta + n C' \textit{ſin.}\, 2\eta + n D' \textit{ſin.}\, (\eta - 2\nu) \\ + n E' \textit{ſin.}\, (\eta + 2\nu) + n F' \textit{ſin.}\, (2\eta - 2\nu) \\ + n G' \textit{ſin.}\, (2\eta + 2\nu) + \&c.\end{aligned}$$

per valores ſupra exhibitos reperiemus

$$B' = \left\{ \begin{aligned} &\frac{bb}{cc}\left(\frac{3i^3}{m(i-m)^2} - \frac{ii}{(i-m)(2i-m)}\right) + \frac{b^3}{f^3}.\frac{2i^3g'}{m(i-m)(2i-m)} \\ &-\frac{bbc}{2f^3}\left(\frac{3(2g-g'')ii}{(i-m)^2} + \frac{(6g-g'')ii}{m(i-m)} - \frac{(2g-3g'')ii}{(i-m)(2i-m)}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$C' = \left\{ \begin{aligned} &-\frac{b^3}{f^3}.\frac{i^3g''}{(i-m)(i-2m)(3i-2m)} \\ &-\frac{bbc}{4f^3}\left(\frac{3(g'-g''')ii}{2(i-m)^2} - \frac{(3g'-g''')ii}{(i-m)(i-2m)} - \frac{(g'-3g''')ii}{(i-m)(3i-2m)}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$D' = o;\quad E' = o;\quad F' = o;\quad \&\quad G' = o.$$

Hanc ob rem tota correctio ita contrahitur, ut tantum duobus terminis conſtet; ſitque $\varphi = \zeta \pm Æ + n B' \textit{ſin.}\, \eta + n C' \textit{ſin.}\, 2\eta$; ſiquidem in perturbationibus excentricitatem k rejicimus.

§. CXXIV. Diſtantia vera planetæ à ſole x nunc quoque facile definiri poterit; cum enim ſit $x = \frac{p}{1 - q\,\textit{coſ.}\,\nu}$ ſi ponamus ut ſupra $p = b(1 + nP)$ & $q = k + nQ$, erit ob nP & nQ minima:

$$x = \frac{b}{1 - k\,\textit{coſ.}\,\nu} + nb(P + Q\,\textit{coſ.}\,\nu).$$

Supra autem jam valores quantitatum P & Q aſſignavimus, hic vero pro ν capi debet ea anomalia vera, quæ anomaliæ mediæ cerrectæ ϑ' respondet: sin autem anomalia vera tabulari uti velimus, eamque littera ν indicemus, pro ν in ista formula scribere debemus

$$\nu - \tfrac{n}{k}\Big(\alpha \,\text{sin.}\, \nu + \beta \,\text{sin.}\, (\eta - \nu) + \gamma \,\text{sin.}\, (\eta + \nu) + \delta \,\text{sin.}\, (2\eta - \nu) + \varepsilon \,\text{sin.}\, (2\eta + \nu)\Big);$$

ideoque pro $k \,\text{cos.}\, \nu$ scribi opportebit:

$$k \,\text{cos.}\, \nu + \tfrac{n}{2}\Big(\alpha - \alpha \,\text{cos.}\, 2\nu - (\beta - \gamma) \,\text{cos.}\, \eta + \beta \,\text{cos.}\, (\eta - 2\nu) + \gamma \,\text{cos.}\, (\eta + 2\nu) - (\delta - \varepsilon) \,\text{cos.}\, 2\eta + \delta \,\text{cos.}\, (2\eta - 2\nu) - \varepsilon \,\text{cos.}\, (2\eta + 2\nu)\Big).$$

Hinc si ponamus $k \,\text{cos.}\, \nu = k \,\text{cos.}\, \nu + n R$, erit $x = \frac{b}{1 - k \,\text{cos.}\, \nu} + n b (P + Q \,\text{cos.}\, \nu + R)$, ubi $\frac{b}{1 - k \,\text{cos.}\, \nu}$ distantiam ex tabulis more solito erutam exprimit; neque vero plerumque operæ est pretium pro distantia hanc correctionem adhibere.

SECTIO IX.

Evolutio Inæqualitatum quibus cum linea nodorum tum inclinatio ab actione Planetarum afficitur.

§. CXXV. SUPRA in §. LXXXVII & LXXXVIII formulas exhibuimus differentiales, quibus mutatio momentanea tam in situ lineæ nodorum quam in inclinatione orbitæ planetæ perturbati ad orbitam perturbantis, quam tanquam fixam considero exprimitur. Productæ autem sunt istæ formulæ usque ad terminos excentricitate simplici k affectos, omissis iis, qui vel per quadratum altioremve potestatem ejusdem excentricitatis k, vel per excentricitatem orbitæ planetæ perturbantis e sunt multiplicati, quos autem si quis laborem suscipere velit eidem methodo insistendo non esset difficile insuper adjicere: neque etiam tum istarum formularum integratio majori premeretur difficultate. Verum quia actio planetarum est minima, hic adeo terminos excentricitatem k involventes rejicere licebit, sicque expressiones integrales & facilius invenientur, & multo fient simpliciores.

§. CXXVI. Quod igitur primum ad longitudinem nodi attinet, quam respectu stellarum fixarum littera π indicavimus, in ejus differentiale ingreditur angulus σ, qui denotat argumentum latitudinis $\varphi - \pi$. Cum ergo hoc calculo negligamus, & differentiale ipsius $d\pi$ præ $d\varphi$ sit minimum, tuto assumere licet $d\sigma = d\varphi = i\,d\omega$, & quia porro est $d\eta = (i - m)\ d\omega$, integrando obtinebimus pro longitudine lineæ nodorum :

$$\pi = Const. - \frac{nbbc}{4f^3} \cdot g' i \omega + \frac{nibb}{cc}\left(\frac{sin.\, \nu}{2(i-m)} + \frac{sin.\,(\nu - 2\sigma)}{2(i+m)}\right)$$

$$- \frac{nibbc}{4f^3}\left\{\begin{array}{l} \frac{(2g+g'')\, sin.\, \nu}{i-m} + \frac{(g'+g''')\, sin.\, 2\nu}{2(i-m)} + \frac{2g\, sin.\,(\nu-2\sigma)}{i+m} \\ - \frac{g'\, sin.\, 2\sigma}{2i} + \frac{g'\, sin.\,(2\nu - 2\sigma)}{2m} - \frac{g''\, sin.\,(\nu+2\sigma)}{3i-m} \end{array}\right\}$$

Hinc ergo erit longitudo media nodi $= Const. - \frac{nbbc}{4f^3} \cdot g' i \omega$, & quia g' semper est quantitas positiva, patet lineam nodorum semper regredi, & quidem singulis annis per angulum $= \frac{90^\circ\, nbbc}{f^3} \cdot i g'$ graduum, ponendo $= 360^\circ$.

§. CXXVII. Formulam pro differentiali $\frac{d.tang.\, G}{tang.\, G}$ inventam, quia etiam est valde parva, loco *tang.* G poterimus per tangentem inclinationis mediæ multiplicare, sit igitur inclinatio media $= \lambda$, denotante G inclinationem veram, atque integrando obtinebimus

$$\frac{tang.\, G}{tang.\, \lambda} = 1 + \frac{nibb}{2cc}\left(\frac{cos.\, \nu}{i-m} - \frac{cos.\,(\nu - 2\sigma)}{2+m}\right)$$

$$- \frac{nibbc}{4f^3}\left\{\begin{array}{l} \frac{(2g-g'')\, cos.\, \nu}{i-m} + \frac{(g'-g''')\, cos.\, 2\nu}{2(i-m)} - \frac{2g\, cos.\,(\nu-2\sigma)}{i+m} \\ + \frac{g'\, cos.\, 2\sigma}{2i} - \frac{g'\, cos.\,(2\nu - 2\sigma)}{2m} - \frac{g''\, cos.\,(\nu+2\sigma)}{3i-m} \end{array}\right\}$$

Cum igitur inclinatio vera G minime discrepet à media λ, ponamus $G = \lambda + d\lambda$, eritque $tang.\, G = tang.\, \lambda + \frac{d\lambda}{cos.\, \lambda^2}$, & $\frac{tang.\, G}{tang.\, \lambda} = 1 + \frac{d\lambda}{sin.\, \lambda\, cos.\, \lambda} = 1 + \frac{2 d\lambda}{sin\, 2\lambda}$; qua formula cum illa expressione collata eliciemus valorem ipsius $d\lambda$, quo substituto reperietur

$$G = \lambda + \frac{nibb\,\text{ſin.}\,2\lambda}{4cc}\left(\frac{\text{coſ.}\,\nu}{i-m} - \frac{\text{coſ.}\,(\nu - 2\sigma)}{i+m}\right)$$

$$-\frac{nibbc\,\text{ſin.}\,2\lambda}{8f^3}\left\{\begin{array}{l} +\frac{(2g-g'')\,\text{coſ.}\,\nu}{i-m} - \frac{2g\,\text{coſ.}\,(\nu-2\sigma)}{i+m} - \frac{g'\,\text{coſ.}\,(2\nu-2\sigma)}{2m} \\ +\frac{(g'-g''')\,\text{coſ.}\,2\nu}{2(i-m)} - \frac{g'\,\text{coſ.}\,2\sigma}{2i} - \frac{g''\,\text{coſ.}\,(\nu+2\sigma)}{3i-m} \end{array}\right\}$$

§. CXXVIII. Inæqualitates igitur iſtæ non ſolum ob fractionem minimam n ſed etiam ob $\text{ſin.}\ 2\lambda$ erunt tam exiguæ, ut nullo modo obſervari queant: atque etiam inæqualitates periodicæ in linea nodorum vix unquam in ſenſus occurrant, unde in uſu aſtronomico tuto negligi poterunt. Tantum ergo notaſſe ſufficiet motum lineæ nodorum medium, qui continetur hac formula:

$$\pi = \text{Conſt.} - \frac{nbbc}{4f^3} g' i \omega;$$

unde conſtat lineam nodorum motu uniformi contra ſignorum ſeriem recedere. Etſi enim hic motus ſingulis annis ſit tardiſſimus ut percipi nequeat, tamen ſucceſſione plurium annorum, quia continuo accumulatur, maxime ſenſibilis evadere poteſt. Effectus autem qui inde in phænomena Aſtronomica redundat, in hoc potiſſimum cernetur, quod ſi pro planeta perturbato terra accipiatur, latitudo ſtellarum fixarum aliquantillum immutetur, qui effectus propterea imprimis meretur, ut accuratius evolvatur.

§. CXXIX. Iſta autem latitudinis mutatio pendebit à longitudine cujuſque ſtellæ fixæ ratione nodorum: Poſita enim longitudine nodi aſcendentis terræ ſuper orbita planetæ perturbantis $= \pi$, quæ convenit cum longitudine nodi deſcendentis ejuſdem planetæ ſuper ecliptica, ſi longitudo cujuſpiam ſtellæ fixæ fuerit $= \pi$, ejus latitudo ſi fuerit borealis poſt tempus, quo ſol arcum ω abſolvit, diminuetur particula

$= \frac{nbbc}{4f^3}$

$= \frac{nbbc}{4f^3} g' i \omega \, \mathit{sin.} \, \lambda$, ſin autem latitudo fuerit auſtralis tantumdem augebitur. Contrarium eveniet ſi longitudo ſtellæ fuerit $180^\circ + \pi$, tum enim eodem tempore, cui ſolis motus ω reſpondet, ejus latitudo ſi fuerit borealis augebitur particula $\frac{nbbc}{4f^3} g'. i \omega \, \mathit{sin.} \, \lambda$, ſin autem ſit auſtralis tantumdem diminuetur. At ſi longitudo ſtellæ 90° diſtet à nodis tum ejus latitudo nullam patietur mutationem. In genere autem ſi longitudo ſtellæ fixæ fuerit $= \xi$, eodem tempore ejus latitudo ſi fuerit borealis diminuetur particula $= \frac{nbbc}{4f^3} g' i \omega \, \mathit{sin.} \, \lambda \, \mathit{cos.} \, (\xi - \pi)$ ſin autrem latitudo ſit auſtralis tantumdem augebitur.

§. CXXX. Maxime igitur notabiles effectus, qui ab actione planetarum in terram exercentur, ſunt primo iſta exigua mutatio in latitudine ſtellarum fixarum, quæ autem cum obſervationibus vetuſtis circa latitudinem ſtellarum fixarum inſtitutis minus fidere liceat, utrum veritati ſit conformis ? non tam facile explorari poteſt. Interim tamen ſtudioſa collatio veterum obſervationum cum recentioribus vix dubitare ſinit, quin in quibus ſtellis fixis latitudo parumper ſit immutata, quod phænomenum ſine dubio actioni planetarum eſt tribuendum. Deinde maxime conſpicuus effectus cernitur in motu aphelii, cujus conſenſus cum veritate facillime explorari poteſt, quandoquidem ex obſervationibus certum eſt, aphelium terræ quotannis per ſpatiolum $11''$ circiter promoveri; ſimilique modo motus apheliorum in reliquis planetis ab eorum actione mutua oriundus cum obſervationibus comparari poterit. Reliqui effectus in pleriſque planetis minus perceptibiles conſiſtunt in mutatione excentricitatis, in inæqualitatibus periodicis loci apheliorum, unde anomalia media afficitur ac denique in variatione parametri orbitarum; quibus cognitis, loca planetarum per præcepta vulgaria Aſtronomica facile aſſignari poterunt.

PARS ALTERA

Continens Applicationem Theoriæ ad motum Terræ ejusque perturbationes ab actione reliquorum Planetarum oriundas.

1. IN parte superiori Theoriam actionis planetarum mutuæ ita in genere constitui, ut ex ea inæqualitates cujusque planetæ, quæ ejus motui ab actione reliquorum planetarum inducuntur, definiri atque assignari queant. Quas inæqualitates ita ad commodum calculi astronomici traduxi, ut pateat, quantum primo latus rectum seu parameter orbitæ, tum vero excentricitas, tertio locus aphelii, & quarto positio plani, quod orbita in cœlo occupat, quovis tempore immutetur. Cognitis enim his variationibus, manifesto apparebit, quantum motus planetæ quovis tempore à regulis Keplerianis recedere, & quales correctiones Tabulis consuetis adhiberi debeant, ut ad quodvis tempus verus planetæ locus in cœlo assignari queat.

2. Labor autem foret nimis operosus, limitesque huic dissertationi præfixos longe excederet, si hanc Théoriam ad singulos planetas accommodare vellem. Ipsa quoque Illustrissima Academia Regia tam prolixum opus non requirit, dum postquam Theoria perturbationum solide fuerit stabilita ejus applicationem tantum ad motum Terræ exigit: cujus præcepto morem gesturus

cunctas perturbationes, quibus terra in motu suo ob actionem reliquorum planetarum est obnoxia, data opera determinabo. Ex hac autem applicatione facile perspicietur, quomodo per eandem Theoriam & reliquorum planetarum omnium perturbationes, quas sibi mutuo induunt, definiri oporteat.

3. Ad motum autem terræ perturbandum reliqui planetæ omnes concurrunt, singulorumque effectus secundum præcepta superiora seorsim investigari conveniet, quod opus pro singulis simili calculo absolvetur. Quoniam igitur terram in locum planetæ perturbati constituimus, littera i perpetuo unitatem denotabit: atque ex tabulis solaribus pro ejus excentricitate media assumemus $k = 0,0168$. Quanquam enim cunctis inæqualitatibus rite determinatis demum verum valorem excentricitatis mediæ k definire licet, tamen in ipsa harum inæqualitatum investigatione valore ipsius k proxime vero tuto uti poterimus, quandoquidem hic minimas aberrationes merito negligimus. Interim valor $k = 0,0168$ tam prope ad veritatem accedere videtur, ut error nullius certe sit momenti. Habebimus igitur constanter $i = 1$ & $k = 0,0168$, neque quicquam præterea ex terræ theoria repeti est necesse, propterea quod non tam quantitas absoluta ejus parametri quam ejus ratio ad parametrum cujusque alterius planetæ in computum ingreditur.

4. Quicunque planetarum pro perturbante assumitur, ejus primum vim absolutam, seu rationem ejus massæ ad massam Solis nosse opportet, quam rationem littera n indicavimus. Ex phænomenis quidem Satellitum Newtonus conclusit, si Saturnus sit planeta perturbans fore $n = \frac{1}{3021}$, sin autem sit Jupiter esse $n = \frac{1}{1067}$; pro reliquis autem planetis, quoniam Satellitibus destituuntur, valor fractionis n ex phænomenis determinari ne-

quit. Etsi autem Mars & Venus ratione voluminis terræ sunt minores, fortasse ob majorem densitatem ratione massæ non multum discrepant, foretque ergo pro illis $n = \frac{1}{170000}$, pro Marte tamen hanc fractionem ob celeb. Monnierii observationes notabiliter imminuere vellem, ut esset quasi $n = \frac{1}{2000000}$, nullumque est dubium, quin pro Mercurio hæc fractio multo minor sit accipienda forsitan $n = \frac{1}{100000000}$. Verum ex ipsa quantitate effectuum forte hæc accuratius definire licebit.

5. Porro pro quovis planeta nosse oportet motum medium seu rationem anguli, dato tempore circa solem descripti ad motum medium solis pro eodem tempore. Hanc rationem littera m indicavimus, unde tabulas astronomicas consulentes reperiemus

pro Saturno	$m = \frac{2}{59} = 0,0339$
pro Jove	$m = \frac{7}{83} = 0,0843$
pro Marte	$m = \frac{42}{79} = 0,5316$
pro Venere	$m = \frac{13}{8} = 1,6250$
pro Mercurio	$m = \frac{137}{33} = 4,1515$

Excentricitate horum planetarum littera e indicata non erit opus, siquidem vidimus perturbationes inde pendentes tam prodire exiguas, ut præ reliquis facile rejici queant. Saltem in hac applicatione ejus rationem non habebimus, etiamsi in Theoria non sit neglecta; propterea quod ad motum apogei medium nihil plane confert.

6. Cum igitur sit $m\frac{a\sqrt{a}}{c\sqrt{c}} = \frac{b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}$ ob $a = b$, hinc reliquas expressiones, quæ in calculum ingrediuntur, determinare poterimus.

Sic erit $\frac{bb}{cc} = \sqrt[3]{m^4}$; $\frac{bb}{ff} = \frac{\sqrt[3]{m^4}}{1+\sqrt[3]{m^4}}$; $\frac{cc}{ff} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{m^4}}$;

hincque $\frac{b^3}{f^3} = \frac{mm}{(1+\sqrt[3]{m^4})^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{bbc}{f^3} = \frac{\sqrt[3]{m^4}}{(1+\sqrt[3]{m^4})^{\frac{3}{2}}}$.

Tum etiam hinc elicientur valores numerorum μ & ν supra (§. LXXVII) introductorum, eritque:

$$\mu = \frac{2bc}{ff} = \frac{2\sqrt[3]{mm}}{1+\sqrt[3]{m^4}}; \text{ \&}$$

$$\nu = \frac{cc-bb}{ff} = \frac{1-\sqrt[3]{m^4}}{1+\sqrt[3]{m^4}}.$$

Ex his autem neglecta excentricitate e habemus:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3}(1-\tfrac{3}{2}(1-\nu)k\,cos.\,v) = \frac{1}{f^3}\left(1-\frac{3\sqrt[3]{m^4}}{1+\sqrt[3]{m^4}}k\,cos.\,v\right)$$

$s = \mu(1+\nu k\,cos.\,v)$; $ss = \mu^2(1+2\nu k\,cos.\,v)$;
$s^3 = \mu^3(1+3\nu k\,cos.\,v)$ &c.

atque $1-ss = \nu\nu - 2\mu\mu\nu k\,cos.\,v$, &

$$\frac{1}{1-ss} = \frac{1}{\nu^2} + \frac{2\mu\mu k\,cos.\,v}{\nu^3}.$$

7. Jam præcipuus labor in computo litterarum g, h, g', h', &c. consistet, pro quibus primum ex §. LXXII valores expressionum

$P(1-ss)$; $\frac{1}{2}Q(1-ss)$; $\frac{1}{2}R(1-ss)$; $\frac{1}{2}S(1-ss)$ &c.

hincque ipsæ hæ litteræ P, Q, R, S, &c. colligi debent. Quæ singulæ cum habituræ sint formam $A+B\,k\,cos.\,v$, erit porro

$$g + h\,k\,cos.\,v = P\,(1-\tfrac{3}{2}(1-\nu)k\,cos.\,v)$$
$$g' + h'\,k\,cos.\,v = Qs\,(1-\tfrac{3}{2}(1-\nu)k\,cos.\,v)$$
$$g'' + h''\,k\,cos.\,v = Rs^2(1-\tfrac{3}{2}(1-\nu)k\,cos.\,v)$$
$$g''' + h'''\,k\,cos.\,v = Ss^3(1-\tfrac{3}{2}(1-\nu)k\,cos.\,v)$$

&c.

quoniam excentricitatem e, ac proinde numeros inde pendentes l, l', l'', &c. negligimus. Negligimus vero etiam terminos quadratum k^2 ejusque altiores potestates involventes, unde calculus in numeris satis expedite absolvi poterit. Atque hoc modo omnia elementa, quæ ad perturbationes motus in orbita inveniendas spectant, erunt cognita.

8. Denique vero quod ad variationem plani orbitæ attinet id pro quovis planeta perturbante ad planum ejus orbitæ, quæ saltem ad tempus ut fixa spectatur, est relatum. Ex tabulis autem Astronomicis colligimus pro An. 1750.

Si orbita terræ referatur ad	Esse longitudinem nodi ascendentis	Inclinationem orbitæ
Orbitam Saturni	$9^s, 21^\circ, 20', 6''$	$2^\circ, 30', 10''$
Orbitam Jovis	9, 8, 15, 50,	1, 19, 10
Orbitam Martis	7, 17, 56, 22,	1, 51, 0
Orbitam Veneris	8, 14, 23, 43,	3, 23, 20
Orbitam Mercurii	7, 18, 29, 0,	6, 59, 20

His igitur notatis perturbationes, quas quilibet planeta in motu terra producit, per calculum numericum investigemus, unde quantum Theoria cum veritate consentiat, facile erit judicare.

I.

Investigatio inæqualitatum motus Terræ ab actione Saturni oriundarum.

9. PRIMUM igitur Saturnus locum teneat planetæ perturbantis, atque ut vidimus pro eo habemus

$$n = \frac{1}{3021} \; \& \; m = 0,0339,$$

& quantitates hinc derivatas cum suis logarithmis:

$\frac{bb}{cc} = 0,01097 \qquad l\frac{bb}{cc} = 8,040266$

$\frac{b^3}{f^3} = 0,00114 \qquad l\frac{b^3}{f^3} = 7,055293$

$\frac{bbc}{f^3} = 0,01079 \qquad l\frac{bbc}{f^3} = 8,033159$

$\mu = 0,2072;$	$l\mu = 9,316425;$	$\mu\nu = 0,2027$
$\mu^2 = 0,0429;$	$l\mu^2 = 8,632850;$	$\mu^2\nu = 0,0420$
$\mu^3 = 0,0089;$	$l\mu^3 = 7,949275;$	$\mu^3\nu = 0,0087$
$\mu^4 = 0,0018;$	$l\mu^4 = 7,265700;$	$\mu^4\nu = 0,0018$
$\nu = 0,9783;$	$l\nu = 9,990465;$	$1-\nu = 0,0217$
$\frac{1}{\nu\nu} = 1,0449;$	$l\frac{1}{\nu\nu} = 0,019070;$	$\frac{\mu\mu}{\nu^3} = 0,0459$

10. Ex his valoribus formabimus sequentes

$$\frac{f^3}{r^3} = 1 - \tfrac{3}{2}(1-\nu)\,k\,cos.\,v = 1 - 0,0326\,k\,cos.\,v$$

$$s = 0,2072 + 0,2027\,k\,cos.\,v$$

$$s^2 = 0,0429 + 0,0840\,k\,cos.\,v$$

$$s^3 = 0,0089 + 0,0261\,k\,cos.\,v$$

$$s^4 = 0,0018 + 0,0071\,k\,cos.\,v$$

$$s^5 = 0,0003 + 0,0017\,k\,cos.\,v$$

$$s^6 = 0,0001 + 0,0003\,k\,cos.\,v$$

Tum

Tum vero $\frac{1}{1-ss} = 1,0449 + 0,0918\,k\,cos.\,v$, unde valores $P(1-ss)$; $\frac{1}{2}Q(1-ss)$; $\frac{1}{2}R(1-ss)$, &c. colliguntur

$$P(1-ss) = 0,99729 - 0,00535\,k\,cos.\,v$$
$$\tfrac{1}{2}Q(1-ss) = 0,75307 + 0,00609\,k\,cos.\,v$$
$$\tfrac{1}{2}R(1-ss) = 0,47518 + 0,01283\,k\,cos.\,v$$
$$\tfrac{1}{2}S(1-ss) = 0,28004 + 0,01326\,k\,cos.\,v$$

11. Ex his deducitur:

$P = 1,0421 + 0,0859\,k\,cos.\,v$; hinc
$Q = 1,5746 + 0,1512\,k\,cos.\,v$; $Qs = 0,3257 + 0,3500\,k\,cos.\,v$
$R = 0,9930 + 0,1140\,k\,cos.\,v$; $Rs^2 = 0,0425 + 0,0877\,k\,cos.\,v$
$S = 0,5852 + 0,0790\,k\,cos.\,v$; $Ss^3 = 0,0052 + 0,0161\,k\,cos.\,v$

multiplicentur jam hæ formulæ per $1 - 0,0326\,k\,cos.\,v$, indeque pro litteris g, h, g', h', g'', h'', &c. sequentes obtinebuntur valores:

$g = 1,0421$; $h = 0,0519$
$g' = 0,3257$; $h' = 0,3394$
$g'' = 0,0425$; $h'' = 0,0863$
$g''' = 0,0052$; $h''' = 0,0159$
&c.

qui per se tantopere decrescunt, ut circa convergentiam seriei in quam supra terminum $\frac{1}{z^3}$ transformavimus nullum dubium superesse possit.

12. His valoribus inventis inquiramus primo in motum aphelii terræ, quatenus ab actione Saturni afficitur, & quoniam per (101) tempore quo Sol motu medio conficit angulum ω, aphelium terræ respectu stellarum fixarum promovetur per spatiolum

$$\frac{nbbc}{4f^3}(2g' + h')\,\omega - \frac{nb^3}{2f^3}(3g + h)\,\omega, \text{ ob}$$

$\frac{bhc}{4f^3} = 0,002698;\quad 2g' + h' = 0,9908$, erit

$\frac{bhc}{4f^3}(2g' + h') = 0,002673;$

$\frac{b^3}{2f^3} = 0,000570;\quad 3g + h = 3,1782$, erit

$\frac{b^3}{2f^3}(3g + h) = 0,001811.$

Hinc isto tempore aphelium proferetur per spatium

$$0,000862\, n\omega = \frac{0,000862\,\omega}{3021},\ \text{ob}\ n = \frac{1}{3021}.$$

Tempore ergo unius anni, quo $\omega = 360^\circ = 1296000''$, aphelium terræ à Saturno propellitur per spatium $= 0,370'' = 22'''$, ideoque tempore 100 annorum per spatium $= 37''$, si ergo terra tantum à Saturno perturbaretur, aphelium respectu stellarum fixarum promoveretur:

Tempore unius anni per spatium $22'''$,
Tempore 100 annorum per spatium $37''$.

13. Hinc ad quodvis tempus longitudo media aphelii terræ innotescit, quæ autem porro per inæqualitates periodicas corrigi debet. Pendent autem eæ à duobus angulis η & ν, quorum ille η habetur si longitudo Saturni θ à longitudine terræ φ subtrahatur, hic vero ν denotat anomaliam terræ veram. Cum igitur sit $\frac{bh}{2cc} = 0,00548$ 5; & $m = 0,0339$, hinc $2i - m = 1,9661$; $i - 2m = 0,9322$, & $3i - 2m = 2,9322$, ob $n = \frac{1}{3021}$ & k 0,0168, formula pro motu aphelii (§. CI) inventa ad angulos reducta dabit:

$$\text{Longitudo Aphelii vera} = \text{Longitudini aphelii mediæ}$$
$$+ 1973''\,\textit{sin.}\,(\eta - \nu) + 11''\,\textit{sin.}\,(\eta + \nu)$$
$$- 5''\,\textit{sin.}\,\nu + \quad 22\ \textit{sin.}\,(\eta - \nu) - \tfrac{1}{2}\ \textit{sin.}\,(\eta + \nu)$$

$$+ 7\ \mathit{fin.}\, \nu - 2010\ \mathit{fin.}\, (\eta - \nu) - 11\ \mathit{fin.}\, (\eta + \nu)$$
$$+ \ 12''\ \mathit{fin.}\, (2\eta - \nu) - 1''\ \mathit{fin.}\, (2\eta + \nu);$$

unde patet has inæqualitates tantum non se mutuo destruere dum eæ reducuntur ad

$$+ 2''\ \mathit{fin.}\, \nu - 15''\ \mathit{fin.}\, (\eta - \nu) + 12''\ \mathit{fin.}\, (2\eta - \nu)$$

quare dum nunquam ad dimidium minutum assurgunt, tuto negligi possunt; ita ut sufficiat effectum in motu aphelii medio notasse.

14. Variationes, quæ ab actione Saturni excentricitati & parametro inducuntur, tam sunt exiguæ ut omnino sentiri nequeant. Neque vero etiam has inæqualitates evolvisse est opus, cum quoniam sunt minimæ, supra (§. CXXIII) effectum inde in locum terræ redundantem expresserimus, sumta scilicet æquatione, quæ secundum tabulas ordinarias anomaliæ mediæ convenit, quæ sit $= \pm Æ$, & posita longitudine terræ media $= \zeta$, vidimus fore longitudinem ejus veram

$$\varphi = \zeta \pm Æ + n\, B'\ \mathit{fin.}\, \eta + n\, C'\ \mathit{fin.}\, 2\,\eta.$$

Ibidem autem valores litterarum B' & C' dedimus, ex quibus hos coëfficientes in minutis secundis colligimus:

$$n\, B' = -\tfrac{1}{2}'', \ \&\ n\, C' = o;$$

unde patet longitudinem terræ regulis ordinariis computatam nullam sensibilem alterationem ab actione Saturni pati, cum ea vix dimidio minuto secundo mutari possit. Pro orbita igitur terræ nil aliud relinquitur, nisi exigua illa aphelii terræ promotio, cujus effectus post integrum seculum demum ad 37'' exsurgit.

15. Tantum ergo superest, ut in mutationem plani, in quo orbita terræ versatur, inquiramus; à Saturno autem linea nodorum, seu intersectio orbitarum terræ & Saturni contra signorum ordinem removebitur tem-

pore quo sol motu medio angulum ω absolvit per spatiolum $= \frac{nbbc}{4f^3} \cdot g' \omega = \frac{\omega}{3438000}$. Hinc ergo singulis annis linea nodorum super orbita Saturni regredietur per $0,377''$, seu $22'''$, sæculo autem elapso hic motus erit quasi $38''$. Inæqualitates periodicas, quibus locus nodi afficitur, quia nullius plane sunt momenti, hic non evolvo, multoque minus eas, quibus in genere inclinatio turbari est inventa: illæ enim nunquam ad minutum secundum, hæ vero ne ad tertium quidem assurgere reperientur. Si ergo terra à solo Saturno perturbantur, linea nodorum terræ super orbita Saturni retromoveretur

Tempore unius anni per spatium $22'''$,
Tempore unius seculi per spatium $38''$,

qui ergo motus motui aphelii proxime est æqualis.

16. Phænomena, quæ hinc in latitudinem stellarum fixarum fluunt, ita se habebunt. Cum sit inclinatio orbitæ terræ ad orbitam Saturni $\lambda = 2^\circ, 30', 10''$, erit pro tempore unius anni $\frac{nbbc}{4f^3} g' . \omega \, \text{fin.} \, \lambda = 0,0164''$: Hinc stellarum fixarum, quarum longitudo est $9^s, 21^\circ$, vel $3^s, 21^\circ$, latitudo tempore unius anni mutabitur fere uno minuto tertio. Seculo autem elapso, mutatio latitudinis ita se habebit:

Si longitudo stellæ sit $9^s, 21^\circ$ circiter

ejus latitudo $\left\{ \begin{matrix} \text{decrescit} \\ \text{crescit} \end{matrix} \right\}$ $1'', 38'''$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{matrix} \text{borealis} \\ \text{australis} \end{matrix} \right\}$

At si longitudo stellæ sit $3^s, 21^\circ$ circiter

ejus latitudo $\left\{ \begin{matrix} \text{crescit} \\ \text{decrescit} \end{matrix} \right\}$ $1'', 38'''$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{matrix} \text{borealis} \\ \text{australis} \end{matrix} \right\}$

Hujusmodi ergo stellarum fixarum latitudo intervallo decem seculorum mutari potuit $16'', 24'''$, idque ob solam actionem Saturni.

II.

Investigatio inæqualitatum Terræ ab actione Jovis oriundarum.

17. COLLOCATO jam Jove in locum planetæ perturbantis habebimus

$$n = \frac{1}{1067}, \ \& \ m = 0,0843;$$

indeque quantitates derivatas cum logarithmis subscriptis

$$\frac{bb}{cc} = 0,036964; \quad \frac{b^3}{f^3} = 0,006730; \quad \frac{bbc}{f^3} = 0,035004$$
$$8,567770; \quad 7,828010; \quad 8,544124$$

Porro erit $\mu = 0,37081$ & $\nu = 0,97871$, hincque

$$s = 0,37081 + 0,34437 \ k \cos. v;$$
$$9,569151 \quad 9,537029$$
$$s^2 = 0,13750 + 0,25539 \ k \cos. v;$$
$$6,138302 \quad 9,407210$$
$$s^3 = 0,05099 + 0,14206 \ k \cos. v;$$
$$8,707453 \quad 9,152452$$
$$s^4 = 0,01891 + 0,07023 \ k \cos. v;$$
$$8,276604 \quad 8,846542$$
$$s^5 = 0,00701 + 0,03255 \ k \cos. v;$$
$$7,845755 \quad 8,512603$$
$$s^6 = 0,00260 + 0,01449 \ k \cos. v;$$
$$7,414906 \quad 8,160935$$
$$s^7 = 0,00096 + 0,00627 \ k \cos. v;$$
$$6,985057 \quad 7,797033$$

$s^8 = 0,00036 + 0,00266\ k\ cos.\ v;$
$\quad 6,553208 \quad 7,424176$

$s^9 = 0,00013 + 0,00111\ k\ cos.\ v;$
$\quad 6,122359 \quad 7,044479$

$s^{10} = 0,00005 + 0,00046\ k\ cos.\ v;$
$\quad 5,691510 \quad 6,659388$

$\frac{1}{1-ss} = 1,15943 + 0,34332\ k\ cos.\ v;$
$\quad 0,064244 \quad 9,535698$

$\frac{f^3}{r^3} = 1 - 0,10694\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,029140$

18. Ex his jam calculo secundum (§. LXXII) subducto invenitur

$P\ (1-ss) = 0,991111 - 0,017094\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,996122 \quad 8,232844$

$Qs(1-ss) = 0,563774 + 0,538394\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,751105 \quad 9,731100$

$Rs^2(1-ss) = 0,134856 + 0,262368\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,129870 \quad 9,418910$

$Ss^3(1-ss) = 0,030176 + 0,088736\ k\ cos.\ v;$
$\quad 8,479518 \quad 8,948100$

hasque formulas primum per $\frac{1}{1-ss}$ deinde per $\frac{f^3}{r^3}$ multiplicari oportet, hoc est conjunctim per

$1,15943 + 0,21933\ k\ cos.\ v;$
$0,064244 \quad 9,341098$

unde prodeant formæ $g + h\ k\ cos.\ v$. Facta igitur multiplicatione reperietur:

$g = 1,14912; \quad h = 0,19756;$
$g' = 0,65366; \quad h' = 0,74788;$
$g'' = 0,15636; \quad h'' = 0,33378;$
$g''' = 0,03498; \quad h''' = 0,10950;$

19. Hinc pro motu aphelii terræ medio erit

$2g' + h' = 2,05520$; $3g + h = 3,64492$

$\frac{bhc}{4f^3}(2g' + h') = 0,017985$; $\frac{h^3}{2f^3}(3g + h) = 0,012265$;

unde tempore, quo ſol motu medio angulum ω conficit, aphelium terræ promovetur per ſpatium

$$0,005720\, n\omega = \frac{\omega}{186538}, \text{ ob } n = \frac{1}{1067}.$$

Ponamus jam $\omega = 360° = 1296000''$, ut obtineamus aphelii motum annuum, qui prodibit $= 6'', 95 = 6'', 57'''$; & motus ſeculalaris $= 695'' = 11', 35''$. Quare ſi terra tantum à Jove perturbaretur, aphelium ejus reſpectu ſtellarum fixarum promoveretur

Tempore unius anni per ſpatium $6'', 57'''$,
Tempore centum annorum per ſpatium $11', 35''$,

Saturnus igitur & Jupiter conjunctim imprimunt aphelio terræ motum annuum $7'', 19'''$. Revera autem quotannis promoveri obſervatur per ſpatium $11''$ circiter.

20. Omiſſis mutationibus, quæ excentricitatem & parametrum afficiunt, quæramus ſtatim correctionem, quam locus terræ in orbita exigit, ac pro coëfficientibus B' & C' (§. CXXIII) obtinemus valores ſequentes:

$$B' = -0,03650;\quad C' = +0,01381.$$

Quare ſi η jam denotet angulum, qui oritur, ſi longitudo Jovis à longitudine terræ ſubtrahatur, longitudo terræ per tabulas ſolito more computatas ſequentem correctionem recipere debet:

$$-7'', 06\, \textit{ſin.}\, \eta + 2'', 67\, \textit{ſin.}\, 2\eta;$$

quæ ergo nunquam ad decem minuta ſecunda exſurgere poteſt. Verumtamen hæ correctiones maximi ſunt momenti, quandoquidem Theoria motus ſolis jam ad tantam perfectionem eſt perducta, ut in calculo vix unum minutum ſecundum negligere fas ſit. Deinde cum Luna fore tantumdem motum terræ perturbare sit inventa, neuter effectus per observationes rite comprobari potest, nisi utriusque vera quantitas per Theoriam sit explorata.

21. Motus lineæ nodorum motui aphelii tam exacte æqualis deprehenditur, ut differentia vix ad partes millionesimas ascendat, discrimen autem in hoc versatur, quod aphelium secundum signorum ordinem progreditur, dum nodi motum retrogradum tenent. Motus igitur hujus lineæ nodorum ita est comparatus ut retrogrediatur

Tempore unius anni per spatium $6''$, $57'''$,
Tempore 100 annorum per spatium $11'$, $35''$.

Vicissim ergo linea nodorum orbitæ Jovis ad eclipticam relatæ tanto motu retrogredietur, quatenus ipsa terra actioni Jovis est subjecta: qui effectus probe distingui debet ab eo, quem reliqui planetæ actione sua immediate in Jovem exerunt, unde peculiaris lineæ nodorum Jovis motus oritur non pendens à mobilitate plani eclipticæ. Ex quo intelligitur motum observatum nodorum cujusque planetæ esse effectum mixtum partim ex mobilitate ejus propriæ orbitæ partim vero ex mobilitate ipsius eclipticæ oriundum, qui propterea modo magis rationalis definietur, si orbitæ planetarum non cum plano eclipticæ, utpote mobili, verum cum plano respectu stellarum fixo, veluti forsitan cum plano æquatoris solis comparentur.

22. Seorsim autem hæc mobilitas orbitæ terræ ab actione Jovis profecta sentiri debet in latitudine stellarum fixarum, quæ inde variabilis reddetur. Maximam vero mutationem subibunt eæ stellæ fixæ, quarum longitudo in nodos orbitæ Jovis incidit, & quæ est vel 9^s, 8°, vel 3^s, 8°; hæcque maxima mutatio ob inclinationem orbitæ Jovis $= 1^\circ$, $19'$ $10''$ singulis annis valebit

$0''$,

$0''$, $16 = 9'''$, ſinguliſque ſeculis $16''$; quæ propterea elapſo quovis ſeculo ita ſe habebit:

Si longitudo ſtellæ ſit $9^s, 8^\circ$

ejus latitudo $\left\{\begin{matrix}\text{decreſcit}\\ \text{creſcit}\end{matrix}\right\}$ $16''$ ſi latitudo fuerit $\left\{\begin{matrix}\text{borealis}\\ \text{auſtralis}\end{matrix}\right\}$

At ſi longitudo ſtellæ ſit $3^s, 8^\circ$

ejus latitudo $\left\{\begin{matrix}\text{creſcit}\\ \text{decreſcit}\end{matrix}\right\}$ $16''$ ſi latitudo fuerit $\left\{\begin{matrix}\text{borealis}\\ \text{auſtralis}\end{matrix}\right\}$

pro reliquis ſtellis fixis hæc mutatio ſecularis in latitudine diminui debet in ratione ſinus totius ad coſinum differentiæ longitudinis ſtellæ ab his duobus limitibus.

III.

Investigatio inæqualitatum Terræ ab actione Martis oriundarum.

23. Si massa Martis æqualis esset massæ terræ haberemus $n = \frac{1}{170000}$ cum autem secundum celeb. Monnierii observationes volumen Martis sit quasi quadragies minus volumine terræ, si massa in eadem ratione esset minuenda haberemus $n = \frac{1}{6800000}$: Nihil autem impedit quominus statuamus $n = \frac{1}{2000000}$, si enim aliunde constiterit hanc fractionem n esse sive majorem sive minorem, inæqualitates, quas reperiemus in eadem ratione erunt sive augendæ sive diminuendæ. Ob hunc autem tantillum valorem ipsius n facile intelligitur inæqualitates, ab actione Martis oriundas multo fore minores, quam quæ ab actione Jovis oriri sunt inventæ, neque hanc parvitatem ab vicinitate compensari posse statuamus ergo pro his inæqualitatibus inveniendis:

$$n = \frac{1}{2000000}, \ \& \ m = 0,0,5316.$$

24. Ex valore ipsius m deducuntur sequentes valores:

$$\frac{bb}{cc} = 0,43064 \ ; \ \frac{f^3}{b^3} = 0,16515 \ ; \ \frac{bbc}{f^3} = 0,25166$$
$$9,634114 \qquad 9,217875 \qquad 9,400819.$$

Deinde est:

$$\mu = 0,91740 \ ; \quad \nu = 0,39797$$
$$9,962557 \qquad 9,599857$$

unde porro colligitur fore:

$s = 0,91740 + 0,36510\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,962557 \quad 9,562414$

$s^2 = 0,84162 + 0,66989\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,925114 \quad 9,826001$

$s^3 = 0,77210 + 0,92183\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,887671 \quad 9,964649$

$s^4 = 0,70832 + 1,12757\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,850228 \quad 0,052145$

$s^5 = 0,64981 + 1,29304\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,812785 \quad 0,111612$

$s^6 = 0,59613 + 1,42348\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,775342 \quad 0,153350$

$s^7 = 0,54689 + 1,52354\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,737899 \quad 0,182854$

$s^8 = 0,50171 + 1,59736\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,700456 \quad 0,203403$

$s^9 = 0,46027 + 1,64859\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,663013 \quad 0,217113$

$s^{10} = 0,42225 + 1,68045\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,625570 \quad 0,225427$

$s^{11} = 0,38737 + 1,69581\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,588127 \quad 0,229377$

$s^{12} = 0,35537 + 1,69716\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,550684 \quad 0,229722$

$s^{13} = 0,32601 + 1,68671\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,513241 \quad 0,227041$

$s^{14} = 0,29909 + 1,66642\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,475798 \quad 0,221783$

$s^{15} = 0,27438 + 1,63796\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,438355 \quad 0,214303$

$s^{16} = 0,25172 + 1,60284\ k\ cos.\ v;$
$\quad 9,400912 \quad 0,204889$

25. Poteſtates has ipſius s ulterius continuare opus erat, quam pro Saturno ſeu Jove, quoniam ſeries pro litteris P, Q, R, &c. multo minus convergunt: cujus rei ratio eſt quod orbitæ Martis & terræ longe minus à ſe invicem magnitudine diſcrepant. Quam ob rem illarum ſerierum pro P, Q, R, &c. inventarum plures terminos actu colligi oportet, antequam de illarum veris valoribus certi eſſe queamus. Præterea vero ex valoribus μ & ν habebimus:

$$\begin{array}{rlll} \frac{1}{1-ss} = & 6,31373 & + \, 26,70380 & k \cos. v \\ & 0,800286 & \quad 1,426573 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} \& \, \frac{f^3}{r^3} = & 1 & - \, 0,90305 & k \cos. v \\ & & \quad 9,955712 & \end{array}$$

Quoniam igitur deinceps per harum duarum quantitatum productum eſt multiplicandum, iſtud productum reperitur.

$$\begin{array}{rlll} \frac{f^3}{r^3} \cdot \frac{1}{1-ss} = & 6,31373 & + \, 21,00219 & k \cos. v \\ & 0,800286 & \quad 1,322265 & \end{array}$$

26. Seriebus igitur illis ſummatis, quæ (§. LXXII) ſunt exhibitæ, primum valores $P(1-ss)$, $Qs(1-ss)$, $Rs^2(1-ss)$, &c. reperientur, tum vero ex iis, dum per $\frac{f^3}{r^3} \cdot \frac{1}{1-ss}$ multiplicantur, litteræ g, h, g', h', &c. eliciuntur, ut ſequuntur:

$$\begin{array}{rllll} P(1-ss) = & 0,92886 & - \, 0,08705 & k \cos. v; & g = 5,86464 \\ & 9,967955 & \quad 8,939784 & & h = 18,95868 \\ Qs(1-ss) = & 1,55082 & + \, 0,87719 & k \cos. v; & g' = 9,79134 \\ & 0,190556 & \quad 9,943094 & & h' = 38,10857 \\ Rs^2(1-ss) = & 1,19171 & + \, 1,67272 & k \cos. v; & g'' = 7,52407 \\ & 0,076167 & \quad 0,223418 & & h'' = 35,58930 \\ Ss^3(1-ss) = & 0,87773 & + \, 2,04009 & k \cos. v; & g''' = 5,54175 \\ & 9,943361 & \quad 0,309651 & & h''' = 31,31489 \end{array}$$

Ex his valoribus ſtatim elicitur

$$\frac{bbc}{4f^3}(2g'+h')-\frac{b^3}{2f^3}(3g+h)=0,61137,$$

unde ſi $n=\frac{1}{2000000}$, tempore unius anni, quo, $\omega=1296000''$, erit $n\omega=\frac{1296''}{2000}=0'',648$. Hinc ergo aphelium terræ à Marte quotannis promovebitur per ſpatium $0'',396=23'''$. At ſi maſſam Martis maſſæ terræ æqualem poſuiſſem, iſte motus annuus proditurus fuiſſet $=\frac{200}{17}.\ 23'''=4'',40'''$.

27. Quæramus ſimili modo correctiones longitudinis terræ ab actione Martis oriundas, atque ex valoribus numericis inventis obtinebimus coëfficientes B' & C' ita expreſſos:

$$B'=-3,90293,\ \&\ C'=-31,33048.$$

Hinc ſi ſtatuamus $n=\frac{1}{2000000}$, correctio loci terræ ex tabulis ordinariis computati erit in minutis ſecundis

$$-0'',403\,\mathit{ſin.}\,\eta-3'',231\,\mathit{ſin.}\,2\eta$$

ſin autem ſtatueremus $n=\frac{1}{170000}$, foret iſta correctio

$$-4'',735\,\mathit{ſin.}\,\eta-37'',964\,\mathit{ſin.}\,2\eta.$$

Ubi η prodit ſi longitudo Martis à longitudine terræ ſubtrahatur. Hinc ſtatim apparet, maſſam Martis certe eſſe minorem maſſa terræ, propterea quod tantæ inæqualitates in motu terræ non deprehenduntur; atque etiam motus aphelii à tribus planetis ſuperioribus genitus jam veritatem excederet.

28. Motus nodorum ſuper orbita Martis iterum præciſe æqualis deprehenditur motui aphelii, quod quidem quoties n eſt fractio minima ſemper evenire debet. Nodi ergo hi poſita $n=\frac{1}{2000000}$ quotannis regredientur per ſpatium $23'''$ at vero per ſpatium $4'',40'''$, ſi poneremus $n=\frac{1}{170000}$. In hac ultima hypotheſi, qua maſſa

Martis maſſæ telluris æqualis ſumitur erit motus ſecularis $= 456''$, hincque ob inclinationem $1^\circ\ 51'$, maxima mutatio ſecularis in ſtellarum fixarum latitudine prodit $15''$, quam eæ ſtellæ fixæ patiuntur, quarum longitudo eſt vel 7^s, 17°, vel 1^s, 17°, illæ ſcilicet tantum à polo eclipticæ boreali removebuntur, hæ vero tantumdem eo admovebuntur quovis ſeculo elapſo. At hic effectus toties eſt minor, quoties maſſa Martis minor fuerit maſſa telluris. Antequam autem effectum à Venere oriundum definiverimus, nihil certi hic ſtatuere licebit; actionem autem Mercurii cum ob parvitatem, tum ob ſolis vicinitatem tuto negligere poterimus.

IV.

Investigatio inæqualitatum Terræ ab actione Veneris oriundarum.

29. ANTE celeb. Monnierium Venus tellure major est credita, nunc autem ejus volumen quasi triplo esse minus certum est, ejus tamen massa pro ratione fortasse est major, quoniam Newtonus observavit, quo quisque planeta soli fuerit propior ejus densitatem esse majorem. Haud multum ergo fallemur si massam Veneris massæ terrestri æqualem assumamus, quoniam deinceps conferendis phænomenis cum calculo certius judicium circa massam tam Veneris quam Martis ferre licebit. Habemus itaque pro calculo nostro ad actionem Veneris traducendo

$$n = \frac{1}{170000}, \ \& \ m = 1,6250;$$

Unde cum m sit unitate majus, calculus multo aliter se habebit ac pro planetis superioribus, interim tamen ex iisdem formulis erit petendus.

30. Ex hoc valore ipsius m primo deducuntur sequentes valores.

$$\frac{bb}{cc} = 1,91046; \quad \frac{b^3}{fi} = 0,53182; \quad \frac{bbc}{fi} = 0,38477;$$
$$0,281138 \qquad\qquad 9,725765 \qquad\qquad 9,585197$$

$$\mu = 0,94981; \quad \nu = -0,30571;$$
$$9,977638 \qquad\qquad 9,485300$$

unde colligitur fore

$s = 0,94981 - 0,29036\ k\ cos.\ v;$
9,977638   9,462938

$s^2 = 0,90215 - 0,55158\ k\ cos.\ v;$
9,955276   9,741606

$s^3 = 0,85687 - 0,78947\ k\ cos.\ v;$
9,932914   9,897335

$s^4 = 0,81386 - 0,99520\ k\ cos.\ v;$
9,910552   9,997912

$s^5 = 0,77302 - 1,18157\ k\ cos.\ v;$
9,888190   0,072460

$s^6 = 0,73422 - 1,34673\ k\ cos.\ v;$
9,865828   0,129279

$s^7 = 0,69737 - 1,49233\ k\ cos.\ v;$
9,843466   0,173864

$s^8 = 0,66237 - 1,61992\ k\ cos.\ v;$
9,821104   0,209494

$s^9 = 0,62913 - 1,73095\ k\ cos.\ v;$
9,798742   0,238285

$s^{10} = 0,59750 - 1,82676\ k\ cos.\ v;$
9,776380   0,261680

$s^{11} = 0,56757 - 1,90858\ k\ cos.\ v;$
9,754018   0,280711

$s^{12} = 0,53908 - 1,97759\ k\ cos.\ v;$
9,731656   0,296137

$s^{13} = 0,51203 - 2,03487\ k\ cos.\ v;$
9,709294   0,308537

$s^{14} = 0,48633 - 2,08142\ k\ cos.\ v;$
9,686932   0,318360

$s^{15} = 0,46192 - 2,11827\ k\ cos.\ v;$
9,664570   0,325961

$$s^{16} = 0,43874 - 2,14599\ k\ cos.\ v;$$
$$\phantom{s^{16} =} 9,642208 \quad 0,331628$$

$$s^{17} = 0,41672 - 2,16568\ k\ cos.\ v;$$
$$\phantom{s^{17} =} 9,619846 \quad 0,335595$$

$$s^{18} = 0,39581 - 2,17800\ k\ cos.\ v;$$
$$\phantom{s^{18} =} 9,597484 \quad 0,338057$$

31. Quoniam hic valor ipſius μ propius ad unitatem accedit quam pro Marte, ſeries pro inveniendis litteris P, Q, R, &c. minus convergunt, unde plures terminos actu addere eſt opus, inſuperque neceſſe eſt regulas paſſim expoſitas pro ſummandis ſeriebus minus convergentibus in ſubſidium vocare. Hæ ſcilicet ſeries comparentur cum progreſſionibus geometricis, & cum exponentes continuo varientur, medius quidam, cum jam plures termini actu fuerint ſummati, eligatur, quo pacto iſtæ ſummæ facile proxime ſaltem obtinebuntur. Tum vero ex valoribus pro μ & ν inventis eliciemus.

$$\frac{1}{1-ss} = 10,70040 - 63,15470\ k\ cos.\ v,$$
$$\phantom{\frac{1}{1-ss} =} 1,029400 \quad 1,800406$$

$$\& \ \frac{f^3}{r^3} = 1 - 1,95857\ k\ cos.\ v;$$

quarum duarum formularum productum eſt

$$\frac{f^3}{r^3}\cdot\frac{1}{1-ss} = 10,70040 - 84,11220\ k\ cos.\ v.$$
$$\phantom{\frac{f^3}{r^3}\cdot\frac{1}{1-ss} =} 1,019400 \quad 1,924859$$

32. Colligamus igitur ſummas ſerierum, quæ ſupra (§. LXXII) ſunt propoſitæ, & cum invenerimus valores pro $P(1-ss)$; $Qs(1-ss)$; $Rs^2(1-ss)$; $Ss^3(1-ss)$; eos ſtatim per $\frac{f^3}{r^3}\cdot\frac{1}{1-ss}$ multiplicemus, ut eadem opera valores g, h, g', h', &c. nanciſcamur,

$$P\,(1-ss) = 0,92034 + 0,08475\,k\,\text{cof.}\,v; \qquad g = 9,84800$$
$$9,963948 \qquad 8,928140 \qquad h = -76,50484$$

$$Qs\,(1-ss) = 1,63454 - 0,78298\,k\,\text{cof.}\,v; \qquad g' = 17,49020$$
$$0,213394 \qquad 9,893751 \qquad h' = -138,32232$$

$$Rs^2(1-ss) = 1,35681 - 1,70112\,k\,\text{cof.}\,v; \qquad g'' = 14,51830$$
$$0,132516 \qquad 0,230730 \qquad h'' = -132,32640$$

$$Ss^3(1-ss) = 1,09228 - 2,35350\,k\,\text{cof.}\,v; \qquad g''' = 11,68800$$
$$0,038340 \qquad 0,371714 \qquad h''' = -117,05800$$

Ex his valoribus ſtatim pro motu aphelii invenitur

$$\frac{bbc}{4f^3}(2g'+h') - \frac{b^3}{2f^3}(3g+h) = 2,5466,$$

Cum autem in prægrandibus illis numeris error facile irrepſerit qui etſi ipſos parum afficit, tamen in differentiis notabilis evadit, & aliunde conſtet hunc valorem convenire cum $\frac{bbc}{4f^3}g'$. hujus valor eſt 1, 6746, quo ſi utamur poſito $n = \frac{1}{170000}$ tempore unius anni aphelium promovebitur per ſpatium 12, 7'', ſeu 12'', 42'''.

33. Si ergo maſſa Veneris æqualis eſſet maſſæ terræ, ab ejus actione Aphelium Terræ ſingulis annis promoveretur per ſpatium 12'', 42''', & quidem reſpectu ſtellarum fixarum, cum tamen conſtet totum ejus motum annuum vix 12'' ſuperare. Quare cum certum ſit, actionem Saturni & Jovis jam ipſi imprimere motum 7'', 19''' quotannis, qui à Marte aliquantillum augetur, evidens eſt pro Venere vix 5'' relinqui. Multo igitur minor ſit Veneris maſſa quam maſſa telluris neceſſe eſt, & quia ejus volumen jam triplo minus eſt, maſſa quoque in eadem ratione diminui debet; unde ſi pro Venere ponamus $n = \frac{1}{510000}$; ejus effectus in aphelio terræ promovendo erit quotannis 4'', 14'''. Verumtamen ſi ordinem, quo planetæ Soli propiores ſimul denſiores obſervantur, ſecuti denſitatem Veneris aliquan-

tum augeamus, effectus aliquantillum major prodibit. Pro Marte autem, cujus volumen fere quadragies minus est terra, ob densitatem minorem ejus massa plusquam quadragies minor massa terræ statui deberet. Unde cum Marti parem cum terra massam tribuentes, ejus effectum annuum in motu aphelii invenerimus 4'', 40''', hic effectus revera minor erit quam 5''', ideoque penitus rejici poterit.

34. Si conjecturis aliquid tribuere licet; quia Newtonus statuit densitates Saturni, Jovis & Terræ ut 67, 95 & 400, videntur eæ proportionales esse radici quadratæ motuum mediorum, quos littera *m* indicavimus. Hanc igitur regulam si simul ad reliquos planetas transferamus, eorumque volumina secundum celeb. Monnierium conjungamus, poterimus eorum massas colligere ut sequitur

	Volumen	Densitas	Massa
Saturnus	132	0, 184	24, 288
Jupiter	270	0, 292	78, 840
Mars	$\frac{1}{42}$	0, 730	0, 018
Terra	1	1,	1,
Venus	$\frac{1}{3}$	1, 27	0, 420
Mercurius	$\frac{1}{50}$	2, 04	0, 040

Massam vero Terræ ad Massam Solis statuit Newtonus ut 1 ad 170000 circiter, quæ ratio paralaxi Solis 10'' nititur, quæ, si esset major minorve, fractio $\frac{1}{170000}$ in ratione duplicata parallaxeos deberet augeri minuive.

35. Quia ergo Martis effectus in motu aphelii est nullus & Veneris effectus ex hypothesi $n = \frac{1}{170000}$ inventus est $= 12'', 42'''$, hic per 0, 42 multiplicari debet, ut prodeat verus effectus annuus qui ergo erit

$= 5'$, 20. Cum ergo ab actione Saturni & Jovis conjunctim sit $7''$, $19'''$, ob actionem omnium planetarum aphelium terræ respectu stellarum fixarum quotannis promovebitur per spatium $12''$, $39'''$ & si ob Martem addamus circiter $4'''$, habebimus $12''$, $43'''$, id quod satis convenit cum observationibus; cum enim præcessio media æquinoctiorum sit singulis annis $50''$, $18'''$, erit respectu æquinoctii motus aphelii annuus $63''$ & unum $'''$ quæ determinatio tantum tertio major est quam motus $63''$, qui aphelio in novissimis tabulis assignatur. Videtur ergo determinatio massæ Veneris veritati maxime conformis, ac proinde pro Venere erit valor $n = \frac{1,42}{170000} = \frac{1}{404762}$, qui cum rationi maxime sit conformis, nescio an gravius argumentum proferri possit, pro evincenda planetarum actione mutua, quandoquidem motus aphelii terræ exactissime inde deducitur.

36. Cognito itaque vero valore ipsius $n = \frac{1}{404762}$ qualitates in loco terræ inde oriundæ certius definiri poterunt: colligantur autem valores:

$$B' = -11,2886; \quad C' = +11,7993.$$

Quodsi jam longitudo Veneris à longitudine terræ subtrahatur & angulus residuus vocetur $= \eta$, tum longitudinis terræ more consueto computatæ correctio ab actione Veneris profecta erit

$$-5'',75\ \mathit{fin.}\ \eta + 6'',02\ \mathit{fin.}\ 2\eta,$$

quæ correctio, quando fit maxima, usque ad $10\frac{1}{2}$ minuta secunda increscere potest, id quod evenit, quando angulus η est

$$\text{vel } \eta = 4^s, 7^0, \text{ vel } \eta = 10^s, 7^0,$$

illo casu $10\frac{1}{2}''$ à longitudine terræ subtrahi hoc vero addi debent. A Marte autem talis correctio vix sensibilis oritur, quoniam enim ea, quæ ex hypotheſi $n = \frac{1}{170000}$ eſt inventa, pluſquam quadragies minor accipi debet, ea ſemper infra minutum ſecundum ſubſiſtet, ideoque niſi ſumma preciſio deſideretur, ſine errore negligi poterit.

37. Motui aphelii æqualis eſt motus nodi retrogradus, unde linea nodorum orbitæ terræ ſuper orbita Veneris quotannis per ſpatium $5''$, $20'''$ regredietur; quæ præceſſio integro ſæculo valebit 533 minuta ſecunda. Cum igitur inclinatio orbitarum harum ſit $3^\circ, 23', 20''$, maxima mutatio ſecularis, quæ hinc in latitudinem ſtellarum fixarum redundat erit $31\frac{1}{2}''$, qui effectus certe notabilis poſt plura ſecula eſſe debet. Quoniam longitudo lineæ nodorum terræ ſuper orbita Veneris cadit in 8^s, 14°, erit latitudinis variatio ſecularis ut ſequitur

Pro ſtellis quarum longitudo eſt $8^s, 14^\circ$

$$\text{Latitudo} \left\{ \begin{array}{l} \text{diminuitur} \\ \text{augetur} \end{array} \right\} 31\tfrac{1}{2}'' \text{ ſi latitudo fuerit} \left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auſtralis} \end{array} \right\}$$

At pro ſtellis quarum longitudo eſt $2^s, 14^\circ$

$$\text{Latitudo} \left\{ \begin{array}{l} \text{augetur} \\ \text{diminuitur} \end{array} \right\} 31\tfrac{1}{2}'' \text{ ſi latitudo fuerit} \left\{ \begin{array}{l} \text{borealis} \\ \text{auſtralis} \end{array} \right\}$$

CONCLUSIO,

Continens distinctam expositionem omnium inæqualitatum quibus motus telluris ab actione omnium Planetarum conjunctim perturbatur.

Ex iis quæ hactenus singulatim circa effectum cujuslibet Planetæ in motum terræ per calculum sunt eruta, perspicuum est, omnes perturbationes, quibus motus terræ afficitur, ad tria genera reduci posse. Primum scilicet genus spectat ad promotionem aphelii terræ, sive apogei orbitæ Solis, prouti in Tabulis exhiberi solet. Ad secundum genus refero correctiones, quibus locus terræ sive solis secundum consueta Tabularum Astronomicarum præcepta computatus ad veritatem perduci debet. Tertium vero genus respicit latitudinem stellarum fixarum, quæ, quia ab actione planetarum planum eclipticæ paulatim immutatur, variabilis est deprehensa. Hos igitur ternos actionis planetarum effectus in motum Telluris exertos hic breviter complexurus distincte proponam: quo tam eximius Theoriæ cum veritate consensus clarius perspiciatur, quam ipsa Theoria motus solis ad majorem perfectionis gradum evehatur.

I.

De effectu Planetarum in Aphelio Terræ seu Apogeo Solis promovendo.

Quilibet Planeta aliquid ad aphelium terræ respectu stellarum fixarum promovendum confert. Ac Saturni quidem & Jovis effectus nulli dubio est subjectus, quoniam horum duorum planetarum massa seu vis absoluta ex motu satellitum satis exacte concludi potest. Si enim massam solis unitate designemus; ex temporibus periodicis Satellitum novimus esse massam Saturni $= \frac{1}{3021}$ & Jovis $= \frac{1}{1067}$. Hinc igitur inveni ab actione Saturni aphelium Terræ singulis annis promoveri debere per spatium $0'', 22'''$, ab actione Jovis autem per spatium $6'', 57'''$, ideoque ab ambobus conjunctim per spatium $7'', 19'''$. Pro Marte secutus sum recentissimas conclusiones celeb. Monnierii, qui ejus volumen 42 vicibus minus statuit quam volumen terræ, unde cum ejus massa ob minorem densitatem ad minimum quinquagies minor sit putanda, ejus effectus in motu aphelii terræ promovendo per annum $5'''$ superare nequit. Eidem auctoritati innixus volumen Veneris triplo minus assumsi volumine terræ & quia ejus densitas probabiliter aliquanto est major, ejus massam sumsi $\frac{42}{100}$ massæ terræ, unde pro Venere prodierat valor ipsius $n = \frac{1}{404762}$, hinc vero pro aphelio telluris adeptus sum motum annuum $5'', 20'''$. Mercurii plane nullam habui rationem, cum ob summam ejus parvitatem, tum quod ingens discrimen inter ejus orbitam & orbitam Terræ effectum diminuit; unde calculo subducto aphelium Terræ vix per $1'''$ quotannis promoveri reperitur.

Ex his igitur effectibus particularibus colligendis adipiscemur universum aphelii terræ motum annuum, ut sequitur:

	Promotio annua Aphelii Terræ	
à vi Saturni	0″,	22‴
à vi Jovis	6,	57
à vi Martis	0,	5
à vi Veneris	5,	20
à vi Mercurii	0,	1
Motus totalis annuus	12″,	44‴

Per tantum ergo ſpatium aphelium terræ ſeu apogeum Solis quotannis reſpectu ſtellarum fixarum promoveri debet, reſpectu æquinoctiorum autem, quorum præceſſio media annua ſtatuitur ab Aſtronomis 50″, 18‴, hæc aphelii terræ promotio erit 63″, 2‴.

Convenit autem hæc determinatio tam accurate cum veritate, ut certe ne uno quidem minuto ſecundo diſcrepet. Atque hic quidem primo pulcherrimus conſenſus Theoriæ, qua cuncta corpora cœleſtia ſe mutuo in ratione reciproca duplicata diſtantiarum attrahere aſſumuntur, cum veritate luculentiſſime agnoſcitur, ita ut nefas eſſet iſtam Theoriam amplius in dubium vocare. Deinde vero imprimis notari velim, me in conſtituendis maſſis Martis & Veneris exquiſitiſſimas celeb. Monnierii determinationes eſſe ſecutum, quæ propterea & Theoriam confirmant & ab ea viciſſim confirmantur. Quodſi enim vulgarem Aſtronomorum opinionem eſſem ſecutus, qui Martem tantillum minorem terra, Venerem vero adeo majorem ſunt arbitrati, ab his ſolis duobus planetis aphelium Terræ quotannis per ſpatium fere 17″ promotum fuiſſet, ſicque ab omnibus planetis conjunctim tota progreſſio annua ad 24″ aſcendiſſet, qui enormis error hanc opinionem ſufficienter refutat. Cum igitur jam ſatis audacter affirmare poſſimus, poſita maſſa Solis $= 1$, eſſe maſſas Saturni $= \frac{1}{3021}$;

Jovis

Jovis $= \frac{1}{1067}$; Martis $= \frac{1}{8500000}$; Veneris $= \frac{1}{404762}$ quandoquidem his valoribus verus motus aphelii terræ obtinetur; ipsius terræ massa hic plane non concurrit, etsi eam cum Newtono assumseram $= \frac{1}{170000}$; hæc enim à parallaxi horizontali Solis, quam $10''$ posuit, pendet, atque ea mutata in ratione cuborum immutari debet, manentibus illis reliquorum planetarum massis. Si ergo Solis parallaxis horizontalis esset $12\frac{1}{2}''$, ista massa assumta per $(\frac{12,5}{10})^3 = 1,95$ multiplicari deberet, sicque prodiret $= \frac{1}{87000}$. Hinc igitur massa Veneris foret $4\frac{2}{3}$ vicibus minor massa terræ; & quia volumen tantum triplo est minus, densitas multo minor esset statuenda; quod etsi nullo jure inficiari possumus, tamen prior hypothesis Newtoni $10''$ elegantius cum ordine, quo densitas planetarum ad solem accedendo crescere videtur, consisteret. Verum cum hæc conjectura nimis debili nitatur fundamento, hinc minime argumentum contra parallaxin $12\frac{1}{2}''$ petendum esse censeo.

II.

De Effectu Planetarum in longitudine terræ vel Solis alteranda.

Supra vidimus effectum Saturni nimis esse parvum quam ut in loco terræ solisve perceptibilem mutationem generare valeat, quod idem de Marte & Mercurio est tenendum, omnis ergo perturbatio, quæ quidem ab actione planetarum in locum terræ redundare potest, tantum à Jove & Venere oritur, qua fit, ut etsi locus solis secundum tabulas ordinarias veris elementis rite instructas fuerit computatus, is tamen ad plura minuta ſecunda à veritate diſcrepare poſſit. Requirit itaque accurata loci terræ ſolisve determinatio duplicem correctionem, alteram à loco Jovis alteram à loco Veneris oriundam, quæ utraque adhiberi debebit ad locum ex tabulis ordinariis ſupputatum, quas quidem tam ratione motuum mediorum quam excentricitatis recte conſtitutas eſſe poſtulo.

Primum igitur ad tempus propoſitum quæratur longitudo Jovis heliocentrica, eaque à longitudine terræ, (quæ à longitudine ſolis 6 ſignis diſtat) ſubtrahatur, ac reſiduo per η indicato, erit correctio à Jove orta:

$$-7'', \sin. \eta + 2\tfrac{2}{3}'', \sin. 2\eta.$$

Deinde ſimili modo ad tempus propoſitum colligatur Longitudo Veneris heliocentrica, quæ à longitudine terræ ſubtracta, relinquat angulum littera η indicandum, ex quo habebitur correctio à Venere

$$-5\tfrac{3}{4}'' \sin. \eta + 6'' \sin. 2\eta.$$

Atque hac duplici correctione adhibita verus locus terræ vel Solis obtinebitur, quatenus is quidem ab actione planetarum principalium turbatur. Nam ſatis certum videtur locum terræ etiam ab actione lunæ aliquantillum alterari, qui effectus ad 10'' uſque exſurgere poſſe videtur; & ſi adhuc non ſatis diſtincte eſt animadverſus, ignoratis illarum duarum inæqualitatum Jovialis & Venereæ in cauſa fuiſſe eſt credenda.

Nullum autem eſt dubium, quin adhibendis his correctionibus locus ſolis exactiſſime definiri poſſit, dum eæ ex iiſdem fontibus promanant, unde illa egregia motus aphelii determinatio eſt deducta. Aſtronomi quidem etiamnunc conqueri ſolent loca ſolis ex optimis tabulis deducta quandoque ultra ſemiminutum primum ab obſervationibus diſſentire, etiam ſi eædem tabulæ pluribus aliis obſervationibus exacte reſpondeant: nunc autem facile perſpicimus inæqualitates à Jove & Venere profectas, si lunarem adjiciamus interdum fere ad 30″ assurgere posse. Verum tabularum summa cura instructarum error etiam major evadere potest, propterea quod his correctionibus ignoratis neque excentricitas neque aphelium neque loca media exactissime constitui potuerint. Quando autem plures accuratissimæ solis observationes præsto fuerint, ex quibus ejus longitudo ad aliquot minuta secunda vere definiri possit, non solum consensus harum correctionum cum veritate facile explorabitur, sed etiam vulgaria elementa quibus tabulæ sunt superstructæ, exactissime emendari poterunt.

III.

De effectu Planetarum in Latitudine stellarum fixarum mutanda.

Quatenus planetæ vi sua planum eclipticæ de situ pellunt, eatenus nobis stellæ fixæ latitudinem mutare videntur. Hic quidem effectus à Marte & Mercurio oriundus rejici potest, cum à priori integro seculo variatio nodi $\frac{1}{4}''$ assurgat; qui autem à Saturno oritur, quia lineæ nodorum Saturni & Jovis tantum 13° differunt, ejus effectus utpote valde parvus sine errore cum effectu Jovis conjungi atque ad lineam nodorum Jovis referri poterit quorsum est exiguum effectum Martis conjicere licebit. Variatio igitur secularis maxima, quæ à Saturno, Jove & Marte simul in latitudine stellarum fixarum generatur ita se habebit:

Pro stellis fixis, quarum longitudo est $9^s, 8°$ (A. 1750)

Latitudo $\left\{ \begin{matrix} \text{decrescit} \\ \text{crescit} \end{matrix} \right\}$ $17''\frac{1}{6}$ si latitudo fuerit $\left\{ \begin{matrix} \text{borealis} \\ \text{australis} \end{matrix} \right\}$

Pro ſtellis fixis, quarum longitudo eſt $3^s, 8^\circ$

$$\text{Latitudo} \left\{ \begin{array}{c} \text{creſcit} \\ \text{decreſcit} \end{array} \right\} 17''\tfrac{5}{6} \text{ ſi latitudo fuerit } \left\{ \begin{array}{c} \text{borealis} \\ \text{auſtralis} \end{array} \right\}$$

Major autem effectus à Venere editur, quia ejus orbita magis ad eclipticam eſt inclinata: atque variatio ſecularis ita ſe habere inventa eſt:

Pro ſtellis quarum longitudo eſt $8^s, 14^\circ$ (A. 1750)

$$\text{Latitudo} \left\{ \begin{array}{c} \text{decreſcit} \\ \text{creſcit} \end{array} \right\} 31''\tfrac{1}{2} \text{ ſi latitudo fuerit } \left\{ \begin{array}{c} \text{borealis} \\ \text{auſtralis} \end{array} \right\}$$

Pro ſtellis quarum longitudo eſt $2^s, 14^\circ$

$$\text{Latitudo} \left\{ \begin{array}{c} \text{creſcit} \\ \text{decreſcit} \end{array} \right\} 31\tfrac{1}{2}'', \text{ ſi latitudo fuerit } \left\{ \begin{array}{c} \text{borealis} \\ \text{auſtralis} \end{array} \right\}$$

Hæc ſcilicet valent pro ſtellis quarum longitudo nunc eſt vel $8^s, 14^\circ$, vel $2^s, 14^\circ$. Etſi enim labentibus ſeculis longitudo ſtellarum fixarum notabiliter mutetur, tamen earum diſtantia à nodis planetarum multo minorem mutationem patitur, unde quarum ſtellarum longitudo nunc eſt $8^s, 14^\circ$, vel $2^s, 14^\circ$, eæ etiam ante plura ſecula nodis Veneris tam fuerunt propinquæ, ut in variatione ſeculari nulla ſenſibilis mutatio oriri queat. Atque ob hanc cauſam iſtæ expoſitæ variationes ad plura ſecula retro & in poſterum ſine ſenſibili errore extendi poterunt.

Quantum autem hæc cum experientia conveniant tam facile non patet, dum plures Aſtronomi omnino negant latitudinem ſtellarum fixarum ulli variationi eſſe obnoxiam; quæ ſententia ſi veritati eſſet conſentanea, certe ingens detrimentum pateretur. Verum ejus falſitas argumento maxime obvio luculenter oſtendi poteſt. Qui enim ſtatuere velit latitudinem ſtellarum fixarum eſſe invariabilem, quia orbitæ planetarum ſitum ſuum reſpectu eclipticæ continuo mutant, is concedere cogitur, distantias stellarum fixarum ab orbitis planetarum esse variabiles, eorumque incolas mutationem quandam in stellarum latitudine ipsis visa percipere debere. Cum igitur omnium planetarum incolæ variationem in latitudine stellarum fixarum observent, ridiculum foret hoc de incolis Terræ negare velle.

Verum non dico, omnes stellas in latitudine parem variationem pati, quin potius dantur stellæ, quippe quarum longitudo vel intra hos limites $0^s, 8^o$, & $11^s, 14^o$, vel intra hos $6^s, 8^o$, & $5^s, 14^o$ continetur, quæ nullam fere mutationem in latitudine subeunt. Ac fortasse tales stellæ fixæ Astronomos seduxerunt; ut crederent latitudinem nulli mutationi esse obnoxiam. Ad hoc accedit, quod veteres observationes plerumque nimis sunt crassæ, quam ut ulla mutatio ex earum cum hodiernis comparatione tuto concludi queat, præcipue si ejusmodi stellæ fixæ examini subjiciantur, in quibus non satis notabilis variatio latitudinis evenire debuit. Verum si examinaretur stella cujus longitudo hodie est circiter vel 3^s vel 9^s, ejus latitudo tempore Ptolemei ad $13'$ diversas esse debuit ab ea quæ hodie observatur.

Interim tamen in catalogo Ptolemei plerumque multo majus discrimen latitudinis deprehenditur, quam Theoria postulat, & quam hic errori observationum haud parum est tribuendum, tamen inde istam variationem satis manifestam reddi posse mihi quidem videtur, præcipue si ad stellas principaliores respiciamus. Ita à Landsbergio ad initium Æræ Christianæ assignatur

Oculi Tauri latitudo $5^o, 44'$ A quæ hodie est $5^o, 30'$ A;
Cordis Scorpii latitudo $4, 12$ A quæ hodie est $4^o, 31'\frac{1}{2}$ A.

At hodie oculi Tauri longitudo est $2^s, 5^o, 52'$
& Cordis Scorpii . . . . $8, 5, 19$;

Secundum noſtram ergo Theoriam latitudo oculi Tauri à A. 0 ad A. 1750 decreſcere debent $17\frac{1}{2} \times 48'' = 14'$, id quod exactiſſime cum decremento à $5°, 44'$ ad $5°, 30'$ convenit. Deinde latitudo Cordis Scorpii ab A. 0 ad A. 1750, quia eſt auſtralis & longitudo fere $8^s\ 14°$, creſcere debuit incremento $17\frac{1}{2} \cdot 48'' = 14'$; cum ergo nunc latitudo ſit $4°, 31\frac{1}{2}''$, tempore A. 0 erat $4°, 17'$ quæ à Landsbergio aſſignatur $4°, 12'$, ubi error $5'$ incuriæ obſervationum adſcribi debet. Quæ duo exempla mihi quidem ad variationem per Theoriam ſtabilitam confirmandam ſufficere videntur, neque dubito quin indidem plura hujuſmodi argumenta peti queant.

Quo autem clarius appareat quomodo cujuſque ſtellæ fixæ variatio latitudinis ſecularis definiri queat, ponamus ſtellæ fixæ longitudinem A. 1750 eſſe $= l$, atque ejus latitudo ſi fuerit borealis labente quoque ſeculo creſcet particula

$$17\tfrac{5}{6}''\ cos.\ (l - 3^s, 8°) + 31\tfrac{1}{2}''\ cos.\ (l - 2^s, 14°)$$

ſin autem latitudo fuerit auſtralis, ea ſingulis ſeculis tantumdem decreſcet.

Hæc autem formula ſimplicius ita exhiberi poteſt, ut ſit

$$47\tfrac{4}{5}''\ ſin.\ l + 6\tfrac{1}{5}''\ cos.\ l;$$

unde ſequens tabula pro variatione ſeculari ſtellarum fixarum eſt ſupputata.

TABULA INDICANS

Quantum latitudo cujusque stellæ fixæ si fuerit borealis elapso quoque seculo varietur.

ARGUMENTUM.

Longitudo stellæ ad An. 1750 sumta.

Grad.	♈ 0 S	♉ I S	♊ II S	♋ III S	♌ IV S	♍ V S
0	+ 6″,2	+29″,3	+44″,5	+47″,8	+38″,3	+18″,5
5	+10,3	+32,5	+45,9	+47,1	+35,6	+14,6
10	+14,4	+35,5	+47,0	+46,0	+32,6	+10,5
15	+18,4	+38,2	+47,8	+44,6	+29,4	+ 6,3
20	+22,2	+40,6	+48,2	+42,8	+26,0	+ 2,2
25	+25,8	+42,7	+48,2	+40,7	+22,3	− 2,0
30	+29,3	+44,5	+47,8	+38,3	+18,5	− 6,2

Grad.	♎ VI S	♏ VII S	♐ VIII S	♑ IX S	♒ X S	♓ XI S
0	− 6″,2	−29″,3	−44″,5	−47″,8	−38″,3	−18″,5
5	−10,3	−32,5	−45,9	−47,1	−35,6	−14,6
10	−14,4	−35,5	−47,0	−46,0	−32,6	−10,5
15	−18,4	−38,2	−47,8	−44,6	−29,4	− 6,3
20	−22,2	−40,6	−48,2	−42,8	−26,0	− 2,2
25	−25,8	−42,7	−48,2	−40,7	−22,3	+ 2,0
30	−29,3	−44,5	−47,8	−38,3	−18,5	+ 6,2

Si stellæ latitudo fuerit australis, tum signa hæc versa sunt intelligenda.

Veluti si quæratur latitudo Sirii tempore Ptolemei seu A. 150 quæ nunc est 39°, 32′, 8″ A. quia ejus longitudo nunc eſt 3^s, 10°, $14'$, ejus latitudo ſingulis ſeculis labentibus minuitur $46''$, ergo A. 150 major fuerit quam nunc $16 \times 46''$, hoc eſt $12'$, $16''$, erat ergo

Latitudo Sirii A. 150. . . . . 39°, $19'$, $52''$ A.

Similique modo ope hujus tabulæ latitudo omnium ſtellarum fixarum ad quodvis tempus definiri poterit.

Quodſi Catalogos Fixarum Ptolemæi & Tychonis, quos Flamſtedius cum ſuo proprio edidit conſulamus, manifeſto inde ſequentes quatuor obſervationis colligemus.

I. Quod fixarum borealium, quarum longitudo eſt ♊ vel ♋, latitudo olim fuerit minor, quam nunc.

II. Quod fixarum auſtralium, quarum longitudo eſt ♊ vel ♋, latitudo olim fuerit major, quam nunc.

III. Quod fixarum borealium, quarum longitudo eſt ♐ vel ♑, latitudo olim fuerit major, quam nunc.

IV. Quod fixarum auſtralium, quarum longitudo eſt ♐ vel ♑, latitudo olim fuerit minor, quam nunc.

Etſi enim ex comparatione horum catalogorum ob notabiles errores in antiquis obſervationibus commiſſos, de vera differentia nihil certe ſtatuere valeamus, tamen inſignis conſenſus nullum dubium circa veritatem harum 4 regularum relinquit. Hac igitur ratione noſtra Theoria, quæ jam ex motu aphelii orbitæ terræ egregie eſt confirmata, novum firmamentum acquirit, ſimulque quæſtionem maximi momenti de variabilitate latitudinis ſtellarum fixarum, circa quam omnes Aſtronomi adhuc ancipiter hæſere, ita dilucide decidit, ut etiam cujuſque ſtellæ fixæ ad quodvis tempus veram latitudinem aſſignare valeamus.

IV.

De effectu Planetarum in obliquitate Eccliptica immutanda.

Tametsi jam satis constat, ab actione planetarum nullum effectum in axem terræ redundare posse, unde ejus situs immutetur, tamen quoniam positio plani eccliptica variatur, dum planum æquatoris neuticam afficitur, manifestum est hinc mutationem in horum duorum planorum mutua inclinatione oriri debere. Ad quam dilucide definiendum, ne effectus à mutatione axis terræ oriundos, qui in præcessione æquinoctiorum & mutatione quadam periodica obliquitatis eccliptica consumuntur, cum hoc effectu actioni planetarum debito confundamus, quia uterque est valde parvus, alterum sine altero in hoc negotio considerare licebit: Animum ergo prorsus à nutatione axis terræ abstrahamus; ita ut neque æquinoctiorum præcessio, neque mutabilitas illa in obliquitate eccliptica locum habeat, & quoniam planum æquatoris respectu spatii absoluti nulli mutationi esset obnoxium, omnium stellarum fixarum declinatio esset immutabilis.

Consideremus ergo stellam fixam, cujus ascensio recta sit 90°, ejusque propterea longitudo in initio caniri, cujus declinatio sit $= d$ constantis magnitudinis; latitudo vero præsenti tempore sit $= l$, eaque borealis; atque nunc quidem erit obliquitas eccliptica $= d - l$. Verum postquam seculum fuerit elapsum, declinatio etiamnunc erit eadem $= d$, latitudo vero tum ex nostra tabula erit $= l + 47''$, 8, ideoque post seculum obliquitas eclipticæ erit $d - l - 47''$, 8, hincque fero $48''$ minor quam nunc. Quod ratiocinium cum ad plurima secula elapsa accommodari queat, evidens est obliquitatem eclipticæ singulis seculis 48″ diminui. Cum igitur hic idem effectus ad phænomena ab axis terræ nutatione oriunda accedat, per Theoriam certum est, mediam obliquitatem eclipticæ singulis seculis 48″ minorem fieri; quare cum nunc ea observetur 23°, 28′, 30″ ea ante seculum seu A. 1650 fuerit 23°, 29′, 18″ necesse est, at A. 1550, 23°, 30′, 6″; tempore autem Ptolemæi seu A. 150, obliquitas eclipticæ fuit 23°, 41, 18″.

Verum si veteres observationes examinemus, nullum plane dubium relinquitur, quin quo magis regrediamur, obliquitas eclipticæ major fuerit, quam hodie unde denuo quæstio maximi momenti in Astronomia deciditur, & quod adhuc in summa dubitatione erat constitutum, ad insignem lucem revocatur; quo ipso veritas Theoriæ hic expositæ ad summum certitudinis gradum evehitur.

FINIS.

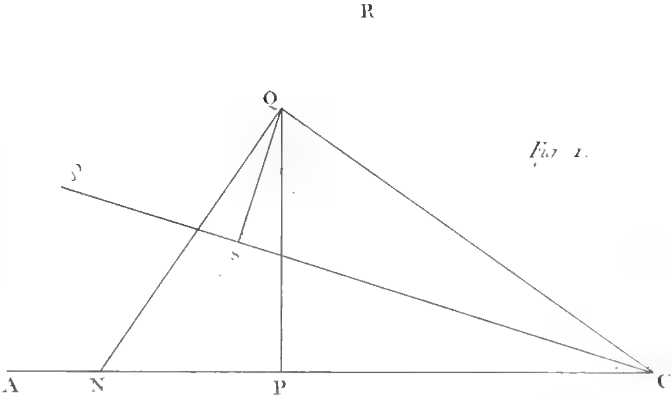


Fig. 1.

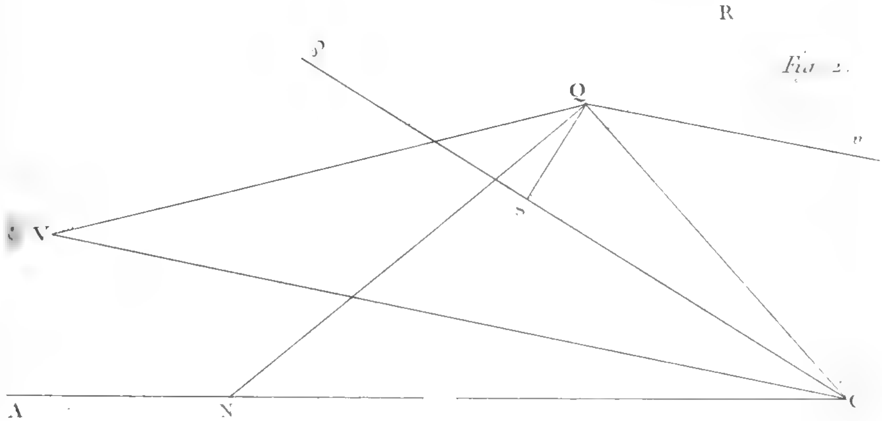


Fig. 2.

de la Gardette Sculp.

3

PRINCIPES HYDROSTATIQUES ET MÉCHANIQUES,

Sur la question proposée pour la seconde fois par l'Académie Royale des Sciences :

Quelle est la meilleure maniere de diminuer le Roulis & le Tangage d'un Navire, sans qu'il perde sensiblement par cette diminution aucune des bonnes qualités que sa construction doit lui donner.

Piece qui a remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences en 1757.

Par M. DANIEL BERNOULLI, Associé Etranger de l'Académie Royale des Sciences, Membre des Académies de Berlin, de Petersbourg, de Bologne, &c.

Qui dubiis ausus committere flatibus alnum
Quas natura negat, præbuit arte vias.

MÉMOIRE

Sur la maniere de diminuer le Roulis & le Tangage d'un navire, ſans qu'il perde ſenſiblement, par cette diminution, aucune des bonnes qualités que ſa conſtruction doit lui donner.

§. I. QUOIQUE l'Académie Royale des Sciences ait adjugé le prix de l'année 1755 à M. Chauchot, très-ſavant & très-habile Conſtructeur de Vaiſſeaux, elle n'a pas laiſſé de propoſer une ſeconde fois la même queſtion pour le Prix de 1757. Ce ſujet étoit, *La maniere de diminuer le plus qu'il eſt poſſible le Roulis & le Tangage d'un navire, ſans qu'il perde ſenſiblement, par cette diminution, aucune des bonnes qualités que ſa conſtruction doit lui donner.*

L'Académie donne en même tems à connoître la raiſon qui l'a engagée à ce nouveau procédé: Elle a voulu couronner l'excellence & la beauté de la piece de M. Chauchot; mais en même tems, elle a eu égard à l'importance d'un ſujet qu'elle juge *ſuſceptible de recherches plus profondes.* Ces recherches plus profondes ne peuvent conſiſter ſans doute que dans un examen exact & précis de tout ce qu'une bonne Méchanique & Hydroſtatique peuvent nous dicter ſur ce ſujet.

§. II. De toutes les recherches qu'on peut faire ſur notre queſtion, la plus eſſentielle eſt celle qui concerne la ſtabilité des navires. C'eſt auſſi ce qui a engagé M. Bouguer, cet illuſtre Géometre, & l'homme du monde le plus entendu dans tout ce qui regarde la navigation & la conſtruction des vaiſſeaux, à traiter cette queſtion avec une ſcrupuleuſe attention & toute la ſagacité poſſible, dans ſon *Traité du Navire, de ſa conſtruction & de ſes mouvemens.* M. Chauchot, à ſon exemple, n'a pas manqué de citer là-deſſus quelques formules, & d'y ajoûter quelques réflexions, mais ſans cette préciſion & ce détail que l'importance de la queſtion exige. Je ne ſaurois donc me diſpenſer de reprendre tout de nouveau cette matiere, mais toujours dans la vue d'appliquer mes recherches à notre ſujet principal, & comme depuis très longtems j'ai tâché de me la rendre familiere, j'oſe me flatter de n'en rien dire dans ce Mémoire de ſuperflu ou d'étranger à la queſtion de l'Académie.

CHAPITRE PREMIER.

Sur la ſtabilité des corps flottans.

§. III. TOUT corps flottant dans des eaux calmes, affectera une certaine poſition déterminée ; il n'y a que les corps ſphériques, dont le centre de gravité ſe trouve placé au centre même des corps, qui ſoient abſolument indifférens à toute poſition. La moindre force peut faire quitter à ces corps leur premiere poſition, & ils ne la reprendront point, quoique la force ceſſe d'agir. Dans les corps cylindriques ou ſphéroïdiques, qui auroient leur centre de gravité placé dans l'axe, il n'y auroit que l'axe même qui prendroit toujours une certaine poſition déterminée ; mais rien ne détermineroit leur poſition autour de leur axe. Tous les autres corps flottans prennent une certaine poſition déterminée en tous ſens. Il eſt vrai que la moindre force leur fait encore quitter cette poſition ; mais la force ceſſant d'agir, les corps reprennent toujours leur poſition d'équilibre. C'eſt cet effort de ſe rapprocher de ſa poſition d'équilibre qui forme la ſtabilité des corps flottans, comparable en tout à celle d'un corps arrondi poſé ſur un plan horizontal, qui auroit le centre de gravité au deſſous du centre de la courbure pour le point d'attouchement & pour le plan vertical, dans lequel on rouleroit le corps. Ordinairement la force réquiſe pour éloigner les corps plongés, de leur poſition naturelle, eſt d'autant plus grande que les corps s'en éloignent davantage, cependant cette augmentation de force ne va que juſqu'à un certain degré. Cette force dépend encore de pluſieurs autres circonſtances, ce qui fait que les corps plongés ont plus ou moins de ſtabilité, quoique rapportée au même plan & à une inclinaiſon égale. Je me propoſe donc, avant toutes choſes, d'examiner les circonſtances qui déterminent la ſtabilité des corps plongés; & comme les navires ſont fort ſujets à s'éloigner extrêmement de leur poſition droite, je pouſſerai à cet égard mes recherches plus loin qu'on ne fait ordinairement; je conſidererai des inclinaiſons finies quelconques. Il faut conſidérer d'abord deux points dans les corps plongés; l'un eſt le centre de gravité du corps, & l'autre, le centre de gravité de ſa partie ſubmergée, conſidérée comme homogene; on regardera enſuite la peſanteur de tout le corps comme concentrée dans le premier de ces deux points; de-là il réſulte une force égale au poids du corps appliquée à ſon centre de gravité, agiſſant verticalement de haut en bas. Dans l'autre point on ſuppoſera une force égale qui agit verticalement de bas en haut; cette ſeconde force provient de la pouſſée de l'eau qui ſoutient le corps. Lorſque le corps plongé ſe trouve dans ſa poſition naturelle, les deux dits centres de gravité ſe trouveront néceſſairement dans une même ligne verticale; mais ſuppoſons le corps, par des forces purement horizontales, arrêté dans une autre poſition, il faudra alors, par les deux dits centres de gravité, tirer des verticales, & la diſtance entre ces verticales marquera le levier, ſur l'extrêmité duquel le poids du corps agit & fait effort pour remettre le corps dans ſa poſition naturelle. Je paſſe légerement ſur ce principe comme clair par lui-même. Si on nomme donc P le poids du corps & r la diſtance entre les deux dites verticales, le produit Pr marquera le *momentum* de la force, qui tend à rapprocher le corps plongé de ſa poſition naturelle, & qui fera ſon effet auſſitôt que les forces horizontales étrangeres ceſſeront d'agir. Ainſi notre queſtion ſe trouve réduite à celle de déterminer la quantité r pour chaque poſition du corps, dont le volume ſubmergé eſt ſuppoſé conſtamment égal. Je remarquerai cependant ici, que cette ſuppoſition ne trouve plus lieu auſſitôt que le corps eſt abandonné à lui-même & qu'il commence à balancer, & que ce corps tirera alternativement plus & moins d'eau.

§. IV. Commençons par une ſimple tranche uniformement épaiſſe, plongée verticalement dans l'eau, & perpendiculaire à l'axe de rotation. Suppoſons la tranche d'une figure quelconque, telle que ace, qui peut repréſenter la plus grande ſection verticale d'un navire perpendiculaire à ſa longueur. Suppoſons auſſi que dans la poſition naturelle de la tranche la ligne ae ſoit horizontale, & que de cette poſition naturelle la tranche ſoit parvenue dans la poſition oblique ace: ſoit alors bd la ligne d'eau, & bcd la partie ſubmergée. De cette maniere l'angle entre les prolongées ea & db ſera l'angle de rotation, que j'appellerai σ, & que je meſurerai par un arc de cercle qui a l'unité pour rayon. Il eſt queſtion de trouver une équation entre la différentielle $d\sigma$ & l'incrément de force correſpondant. Soit donc pour la poſition infiniment proche de la précédente la ligne d'eau mn, & comme la partie ſubmergée eſt ſuppoſée conſtamment égale, il faut que le triangle élémentaire bxm ſoit égal au triangle oppoſé dxn, ce qui fait $bx = dx$; le petit angle bxm ou dxn ſera exprimé par $d\sigma$. Soit le centre de gravité de la tranche ace au point s, les centres de gravité de la partie ſubmergée homogene pour les lignes d'eau bd & mn aux points f & g. Si après cela on tire des points s & f, les lignes sr & fo perpendiculaires à la ligne d'eau bd, l'interceptée ro ſera, en vertu du §. III, la longueur du levier ſur lequel le poids de la tranche fait effort pour rapprocher cette tranche de ſa poſition naturelle relativement à la ligne d'eau bd; & ſi pareillement on tire des points s & g, les lignes st & gy perpendi- *Fig. I.*

culaires à la ligne d'eau mn, l'interceptée ty ſera dans le même ſens le levier relativement à la ligne d'eau mn; ainſi la différence entre ty & ro, marquera l'incrément du levier pendant que le poids appliqué à ces leviers reſte conſtamment le même. Il s'agit donc de déterminer la différentielle $ty - ro$: or tirant encore la ligne fo perpendiculaire à bd, on aura $ty - ro = yq - op + ut$; & comme la petite ligne gf eſt néceſſairement parallele au niveau d'eau mn, on aura $yq = gf$, & par conſéquent $ty - ro = gf - op + ut$: nous allons maintenant déterminer analytiquement ces trois élémens. Soit $bd = q$, la ſurface $bcd = M$, on trouvera par les premiers principes de la Statique $gf = \frac{q^3 d\sigma}{12 M}$. Conſidérant enſuite l'égalité des angles bxm, ofp & ust, & dénotant la verticale fo par y, la verticale sr par z, on aura $op = y d\sigma$ & $ut = z d\sigma$, & enfin la quantité cherchée $gf - op + ut = \left(\frac{q^3}{12 M} - y + z\right) d\sigma$. Si on indique par s la hauteur verticale du centre de gravité de la tranche par-deſſus le centre de gravité de la partie ſubmergée homogene, ladite quantité devient $\left(\frac{q^3}{12 M} - s\right) d\sigma$. Voilà pour chaque rotation élémentaire $d\sigma$ l'accroiſſement du levier; & ſi on multiplie cette quantité par le poids de la tranche, on aura l'accroiſſement du *momentum* de la force. Soit donc l'épaiſſeur de la tranche $= \alpha$ & la quantité $M\alpha$ exprimera la quantité d'eau déplacée, au poids de laquelle le poids de la tranche eſt égal. Ainſi nous exprimerons ce poids par $M\alpha$, & de cette maniere nous aurons ledit accroiſſement du *momentum* de la force $= (\frac{q^3}{12} - Ms)$ $\alpha d\sigma$, & le *momentum* total ſera exprimé par l'intégrale de ladite quantité ou par $\int (\frac{1}{12} q^3 - Ms)\, \alpha d\sigma$.

§. V. La

§. V. La ſolution que nous venons de donner de notre problême, s'étend à tous les corps priſmatiques, l'épaiſſeur de la tranche indiquée par α pouvant être quelconque ; mais s'il étoit queſtion d'autres corps, il faudroit prendre des abſciſſes x dans une ligne perpendiculaire au plan $a\,c\,e$, enſuite ſubſtituer dx pour α, & faire une ſeconde intégration, puiſqu'il eſt clair que le *momentum* total ſera exprimé par $\int dx \int (\frac{1}{12} q^3 - M s)\, d\sigma$. Cette derniere expreſſion eſt à la vérité générale & comprend abſolument tout ce qu'on peut deſirer ſur cette matiere ; mais comme il n'y a aucune loi de continuité, qui puiſſe exprimer la valeur de s pour chaque tranche d'un navire, verticale & parallele à la tranche principale, la formule devient tout-à-fait inutile pour cet uſage, & il faudra avoir recours à d'autres expédiens ; mais avant que d'entrer dans ces diſcuſſions, nous examinerons d'abord les corps priſmatiques, & il eſt indifférent que toutes les tranches de ces corps ſoient uniformément chargées de matiere ou non, pourvu que ces tranches demeurent dans des plans verticaux.

§. VI. Pour trouver la valeur de $\int (\frac{1}{12} q^3 - M s)\, \alpha\, d\sigma$, il faut connoître pour chaque angle σ les quantités q & s, & il ſeroit extrêmement difficile de déterminer une relation entre ces quantités, ſi on ne vouloit demeurer dans des ſuppoſitions bien ſimples touchant les configurations des ſections $a\,c\,e$.

Je ſuppoſerai premierement la figure $a\,c\,e$ former un grand ſegment de cercle : c'eſt la ſuppoſition la plus ſimple, & en même tems celle qui approche le plus de la ſection principale d'un navire. Dans ce cas la quantité q devient conſtante ; mais pour trouver la quantité s, conſidérons la tranche dans ſa poſition naturelle, & ſuppoſons alors la hauteur du centre de la figure par deſſus le centre de gravité $= f$, & puis la hauteur de ce dernier centre par deſſus le centre de gravité la la partie ſubmergée $= g$: ſi après cela la tranche a pris une autre ſituation quelconque, on voit facilement qu'on aura toujours la hauteur verticale du centre par-deſſus le centre de gravité $= f\, cos.\, \sigma$, pendant que la hauteur du centre par-deſſus le centre de gravité de la partie ſubmergée eſt conſtamment $f + g$; d'où l'on tire $s = f + g - f\, cos.\, \sigma$; ainſi nous aurons $\int (\frac{1}{12} q^3 - Ms)$ $\alpha\, d\sigma = \int (\frac{1}{12} q^3 - Mf - Mg + Mf\, cos.\, \sigma)\, \alpha\, d\sigma =$ $(\frac{1}{12} q^3 - Mf - Mg)\, \alpha\sigma + Mf\alpha\, sin.\, \sigma$; mais la nature du cercle eſt telle, que la quantité $\frac{1}{12} q^3 - Mf - Mg$ eſt toujours $= o$; donc toute la quantité qui exprime le *momentum* de la force devient ſimplement $= Mf\alpha\, sin.\, \sigma$. Cette formule nous montre que ladite force eſt proportionnelle au ſinus de l'angle d'inclinaiſon. Elle augmente donc continuellement juſqu'à une inclinaiſon de 90 degrés; mais les augmentations deviennent continuellement plus petites. Cette remarque mérite quelque attention, parce que les roulis d'un navire ne ſauroient manquer d'être à-peu-près pareils à ceux qu'auroient les corps que nous conſidérons ici. Or les vaiſſeaux ſont ſouvent fort inclinés par un vent de côté permanent, & alors c'eſt cette poſition, quoi qu'oblique, qui doit être regardée comme naturelle; en ce ſens on peut dire que la ſtabilité devient d'autant plus petite, que la poſition naturelle eſt plus oblique. Il me ſemble cependant qu'il faudroit tâcher de donner d'autant plus de ſtabilité aux navires, qu'ils ſont plus inclinés par quelque cauſe uniforme, parce qu'alors un nouveau degré d'inclinaiſon peut être dangereux. Il ſuit auſſi de-là que les balancemens d'un navire conſidérablement incliné dans ſa poſition moyenne, ſeront plus lents que ceux d'un navire dont la poſition moyenne eſt droite: ces derniers balancemens differeront encore entre eux en ce qu'ils ſeront d'autant plus lents qu'ils ſeront plus grands. Notre expreſſion marque auſſi que la ſtabilité de ces corps eſt proportionnelle à la quantité f, c'eſt-à-dire, à la plus grande hauteur du centre par deſſus le centre de gravité, ſans que la hauteur du centre de gravité de la partie submergée y entre pour rien pour ces corps figurés en segmens de cylindres. Enfin, la stabilité est encore proportionnelle à la quantité d'eau déplacée par le corps: le corps aura donc d'autant plus de stabilité, qu'il tirera plus d'eau, pourvu que son centre de gravité ne change pas. En considérant donc la figure *a c e* comme un grand segment de cercle creux, s'il est question de quelle maniere il faut le charger de matiere pour lui donner la plus grande stabilité, je répons qu'il faut tâcher de faire la quantité Mf la plus grande qu'il est possible. Si donc par exemple la hauteur du centre par dessus le centre de gravité étoit de cinq piés, toute la charge qu'on ajoûtera au-dessus de ces cinq piés diminuera la stabilité, & l'augmentera si c'est au dessous. De-là on peut conclurre qu'en pompant les eaux d'un navire, on diminuera le plus souvent sa stabilité. Mais d'un autre côté le mouvement des eaux qui coulent du même côté que le navire s'incline, diminue pareillement la stabilité.

§. VII. La matiere qui nous occupe est si essentielle à notre sujet principal, qu'elle mérite toute notre attention; examinons donc encore l'effet de quelques autres figures. Voici une observation fort importante: Soit *a b c d e f* (Fig. 2) la section du corps prismatique plongée dans l'eau jusqu'en *b e*; supposons que les bords *a c* & *f d* soient des arcs d'un même cercle, & que jamais les inclinaisons ne soient assez grandes pour que l'une des extrêmités *c* ou *d* sorte hors de l'eau: je dis que l'on pourra facilement déterminer la stabilité, quelle que soit la figure de la base *c d*, en joignant les deux bords circulaires par l'arc intermédiaire *c g d*, de maniere que tout l'arc *a c g d f* soit un arc circulaire. Comme l'eau n'exerce aucun effort dans l'eau, il est clair que pourvu que le plan *c g d c* soit d'eau, le plan proposé *a c d f* aura la même stabilité qu'auroit tout le plan *a c g d f*, si la partie supérieure *a c d f* restant chargée comme elle l'eſt, la partie inférieure $c g d$ étoit toute d'eau. Soit donc le centre commun des arcs $a b c$, $c g d$ & $d a f$ au point o, le centre de gravité de tout le plan $a c g d f$, chargé comme nous l'avons dit, au point m; ces deux points o & m ſont dans une même ligne verticale pour la poſition naturelle; qu'on ſuppoſe $o m = \varphi$ & l'eſpace $b c g d e = \mu$; on aura, en vertu du §. VI, la ſtabilité pour la figure plongée $a c d f$ égale à la quantité $\mu \varphi \alpha\, \mathit{ſin.}\, \sigma$.

Cette formule nous fait voir que pour une même quantité ſubmergée, la ſtabilité eſt ici beaucoup plus grande qu'elle n'eſt dans les hypotheſes du précédent article, le rapport des deux ſtabilités étant celui de $\mu \varphi$ à $M f$; or puiſque M n'eſt qu'une partie de μ, de même que f de φ, la quantité $M f$ doit être beaucoup plus petite que la quantité $\mu \varphi$, lorſque les arcs $b c$ ou $c d$ ſont petits, & par conſéquent la largeur $b c$ aſſez grande pour que l'eſpace $b c d e$ ſoit $= M$. La quantité $\mu \varphi$ croit en raiſon des cubes de $b e$, ou en raiſon réciproque des cubes de $b c$, ou du tirant d'eau. Ainſi de deux navires qui ont la ſolidité de la carene égale, celui qui aura le moindre creux aura la plus grande ſtabilité. Je ne m'arrêterai pas à tirer de notre formule tous les corollaires qu'elle offre; remarquons ſeulement que la force requiſe pour incliner ces corps priſmatiques, dont la ſection eſt repréſentée par $a c d f$, en ſuppoſant $c d$ droite ou courbe: que dis-je, cette force eſt encore proportionnelle au ſinus d'inclinaiſon ou à $\mathit{ſin.}\, \sigma$.

De tout ce que nous venons de dire, il s'en ſuit que le creux d'un navire ne ſauroit augmenter ou diminuer fort ſenſiblement ſa ſtabilité. Il me paroît important d'examiner l'effet que le plus ou moins de creux doit faire dans un navire; voici cet effet:

Suppoſons la baſe $c d$ s'éloigner de la ligne d'eau $b e$, ce qui augmente le creux: Pour ſavoir ſi cette augmentation du creux augmente ou diminue la ſtabilité, il n'y a qu'à examiner ſi le ſurcroît du creux ſurvenu eſt rempli d'une matiere plus ou moins peſante que l'eau: dans le premier cas, la ſtabilité eſt augmentée; & dans l'autre, diminuée. Mais un autre effet plus ſenſible conſiſtera dans la retardation ou l'accélération des balancemens: plus le tirant d'eau eſt grand, plus les balancemens ſont retardés; & dans les balancemens, il ne faut pas ſeulement avoir égard aux excurſions, on doit encore conſidérer la durée de chaque balancement. Il faut également tâcher de diminuer & de retarder les balancemens des navires lorſque la choſe eſt poſſible.

§. VIII. La maniere ſinguliere dont je me ſuis ſervi dans le précédent article pour déterminer la ſtabilité dans le cas que les deux bords ac & fd ſont des arcs d'un même cercle, quelle que ſoit au reſte la figure du fonds cd, & l'expreſſion $\mu \varphi \alpha\, \mathit{ſin.}\, \sigma$. m'engagent à faire ici encore une remarque qui marquera en même tems la juſteſſe de nos méthodes & répandra quelque nouveau jour ſur nos formules. Voici cette remarque.

Soit la hauteur bc ou ed de la partie ſubmergée $bcdeb$ très-petite; alors le centre de gravité de tout le ſyſtême que nous avons ſuppoſé au point m, ſera le même que le centre de gravité du ſegment homogene $bcgde$; en prenant donc le point m en ce ſens, la Géométrie & la Méchanique nous apprennent que la quantité $\mu \varphi$ (c'eſt-à-dire l'eſpace $bcgde$ multiplié par la diſtance du point m au centre o) eſt toujours égale à $\frac{1}{12}\, cub.\, be$. Cette propriété convient admirablement bien avec la formule générale marquée à la fin du §. IV $\int (\frac{1}{12} q^3 - Ms)\, \alpha\, d\sigma$, puiſque dans ce préſent cas q eſt conſtant & $s = 0$, & que cette intégrale devient $= \frac{1}{12} q^3 \alpha \sigma$; mais à cauſe de la petiteſſe de bc, les inclinaiſons doivent toujours être très-petites; on peut donc cenſer $\sigma = \mathit{ſin.}\, \sigma$. Ainſi $\frac{1}{12} q^3 \alpha \sigma = \mu \varphi \alpha\, \mathit{ſin.}\, \sigma$.

§. IX. Après avoir déterminé généralement la ſtabilité, pourvu que les bords ac & fd ſoient circulaires, je mettrai encore ici le calcul en ſuppoſant les bords ac & fd droits & verticaux. La différence des réſultats ne ſauroit manquer de répandre quelques nouvelles lumieres ſur cette matiere ; mais quoique nous ayons donné à la fin du §. IV la formule générale pour déterminer la ſtabilité, il faut pourtant avouer que chaque nouvelle figure demande un nouveau calcul ; la méthode cependant eſt toujours la même ; je ne ferai que mettre ici le réſultat pour le nouvel exemple.

Soit donc $ABCD$ (Fig. 3) la ſection verticale du priſme flottant ; que dans la poſition naturelle du parallelepipede, AB & DC ſoient verticales, BC horizontales & GH la ligne d'eau ; ſoit enſuite $GH = 2a$, GB ou $HC = c$, la hauteur du centre de gravité du navire par-deſſus le centre de gravité de la partie ſubmergée $= d$. Qu'on ſuppoſe à préſent la ſection AB CD inclinée de maniere que que gh ſoit la ligne d'eau ; l'angle GLg ſera l'angle d'inclinaiſon σ ; mais dans ce cas il vaut mieux de déterminer l'obliquité de la poſition par Gg, & nous ſuppoſerons $Gg = x$. Sur ces dénominations, on trouvera le *momentum* $=$

$$\left(\frac{aa}{3c} - d + \frac{xx}{2c}\right) \times \frac{x}{\sqrt{aa + xx}} \times M\alpha.$$

Afin d'approcher la formule de celles des §§. VI & VII, nous remarquerons que $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}$ eſt $= \mathit{ſin.}\,\sigma$. En ſubſtituant cette valeur, on pourra donner à la force de ſtabilité, cette expreſſion $M \times \left(\frac{aa}{3c} - d + \frac{xx}{2c}\right) \alpha\, \mathit{ſin.}\,\sigma$.

§. X. Comme cette formule n'a plus rien qui puiſſe demander quelque explication, je ne m'arrêterai pas à marquer ce qu'il convient de faire pour rendre ces parallelepipedes flottans plus ſtables. Je ne ne m'attacherai qu'à une ſeule circonſtance, de laquelle j'ai fait mention au milieu du §. VI ; c'eſt qu'ici la ſtabilité n'eſt plus proportionnelle au ſinus de l'inclinaiſon, comme lorſque les bords ſont des arcs circulaires d'un même cercle ; elle augmente en plus grande raiſon que ledit ſinus. Plus le corps eſt incliné ici, plus il réſiſte pour être incliné davantage ; les augmentations de force pour produire toujours un nouveau degré d'inclinaiſon, croiſſent ici en beaucoup plus grande raiſon que dans la précédente hypotheſe. On obtiendra facilement ici que le corps ne s'incline jamais au-delà d'un certain degré, bien loin de courrir riſque de renverſer ; & cette ſeule qualité rend l'hypotheſe du parallelepipede infiniment recommandable. Si on faiſoit $d = \frac{aa}{3c}$, on auroit le point que M. Bouguer, mon illuſtre guide, appelle *métacentre ;* ſi $a = 25$ & $c = 10$, la hauteur du métacentre devient $= 20\frac{5}{6}$ comme M. Bouguer le détermine pour l'arche de Noë. Mais qu'arriveroit-il alors ? l'arche renverſeroit-elle ? Voilà ce que l'on pourroit croire, quand on ne calcule la ſtabilité que pour des inclinaiſons infiniment petites ; mais nous voyons tout le contraire par notre méthode. La ſtabilité ſeroit exprimée par $M \frac{xx}{2c} \alpha$ *ſin.* σ. Elle ſeroit nulle en faiſant $x = o$ & $\sigma = o$; mais elle commence à devenir réelle avec la moindre inclinaiſon.

Je mettrai ici pour les deux hypotheſes, ſçavoir, pour celle des bords circulaires & des bords droits & verticaux, les ſtabilités pour des inclinaiſons égales, en ſuppoſant de part & d'autre la même quantité M, comme auſſi la même ſtabilité initielle ; c'eſt-à-dire, en faiſant $\mu = M$ & $\varphi = \frac{aa}{3c} - d$. De cette maniere, les ſtabilités pour les deux hypotheſes ſeront en raiſon de $(\frac{aa}{3c} - d)$ *ſin.* σ, & $(\frac{aa}{3c} - d + \frac{xx}{2c})$ *ſin* σ. Pour ne pas nous éloigner de la nature, nous ferons $c = a$, & $d = \frac{1}{4}a$; & comme nous voulons prendre a pour le ſinus total, nous ferons $a = 1000$ & $d = 250$; un tel exemple donnera les ſtabilités ou les forces réquiſes pour produire de certaines inclinaiſons en raiſon de $\frac{250}{3}$ ſin. σ à $(\frac{250}{3} + \frac{xx}{2000})$ ſin. σ, en entendant par x la tengente de l'inclinaiſon pour le ſinus total 1000. Voici à préſent une petite table de 5 en 5 degrés juſqu'à l'inclinaiſon de 45 degrés. La premiere colonne marque les inclinaiſons, la ſeconde les forces pour les bords circulaires, & la troiſieme pour les bords droits & verticaux.

INCLINAISONS.	Forces pour les bords circulaires.	Forces pour les bords droits & verticaux.
0 degrés.	0, 00	0, 00
1	1, 45	1, 45
2	2, 90	2, 92
3	4, 35	4, 42
4	5, 81	5, 98
5	7, 26	7, 59
10	14, 47	17, 17
15	21, 57	30, 86
20	28, 50	51, 15
25	35, 22	81, 17
30	41, 33	124, 66
35	47, 80	188, 40
40	53, 56	274, 70
45	58, 93	412, 48

Nous voyons par cette Table combien il y a à gagner pour la ſtabilité en approchant la coupe principale verticale & perpendiculaire à la longueur, de la figure rectangulaire; mais ſurtout près de la ſurface d'eau: car les parties qui reſtent toujours ſubmergées, ne ſauroient changer la ſtabilité qu'en tant qu'elles changent la hauteur

teur du centre de gravité, par-dessus le centre de gravité de la partie submergée, ce qui le plus souvent n'est pas de grande importance.

§. XI. Venons à présent aux corps plongés, & ne nous arrêtons plus à une seule section de ces corps. Lorsque toutes les sections paralleles de ces corps sont les mêmes & égales en tous sens, la solution pour ces corps prismatiques, ou cylindriques, ne demande rien de nouveau; il n'y a qu'à entendre par α la longueur de ces corps, & nos formules serviront encore pour ces corps; il n'est pas même nécessaire que le centre de gravité de chaque coupe soit pareillement placé, ni que le poids soit égal pour toutes les tranches également épaisses; car le poids entier du corps pourra toujours être considéré comme concentré dans une seule & même coupe, & le centre de gravité du corps comme placé dans la même coupe à une pareille hauteur. Il est vrai que les navires different considérablement de ces corps; cependant on voit déja que la principale coupe en largeur d'un navire reglera presque entierement la stabilité d'un bord à l'autre. Cette stabilité pourra faire comme les deux tiers ou les trois quarts de la stabilité qu'auroit le corps cylindrique de la même longueur: la section principale en longueur du navire reglera pareillement sa stabilité dans le sens de la proue à la pouppe. Je ne laisserai pas d'examiner cette matiere avec plus de précision dans le dessein de chercher toutes les circonstances qui peuvent contribuer à la stabilité d'un navire, tant à l'égard des roulis que des tangages. Mais pour ne nous point engager dans des difficultés inutiles, je ne considererai que des corps semblables en quelque façon aux navires; & dans ces corps je ne ferai attention qu'aux inclinaisons qui se font faites, soit en largeur, soit en longueur, sans entrer dans les recherches sur les inclinaisons intermédiaires, qui ne font qu'un mouvement composé des deux autres mouvemens.

§. XII. Ceux qui auront lu avec quelque attention nos remarques ſur cette matiere, verront d'abord que la ſtabilité de tous les corps flottans dépend uniquement de deux choſes : la premiere eſt la ſection horizontale du corps faite au niveau des eaux, & la ſeconde eſt la hauteur du centre de gravité du corps par-deſſus le centre de gravité de la partie ſubmergée, conſidérée comme homogene, laquelle hauteur doit être multipliée par tout le poids du corps plongé, ou par tout le poids de l'eau déplacée. Examinons chacun de ces deux points à part.

Nous avons vu, au §. V, que la ſtabilité des corps eſt $= \int dx \int (\frac{1}{12} q^3 - Ms)\, d\sigma = \int dx \int \frac{1}{12} q^3 d\sigma - \int dx \int Ms\, d\sigma$. Quant au premier membre, on remarquera qu'il peut arriver que les mêmes coupes pourront tirer dans les différentes inclinaiſons tantôt plus, tantôt moins d'eau, & en ce cas la quantité $\int dx \int \frac{1}{12} q^3 d\sigma$ ne ſeroit plus exactement vraie, puiſqu'elle eſt fondée ſur ce que chaque tranche déplace continuellement la même quantité d'eau. Il peut cependant arriver qu'un navire différemment incliné tire plus ou moins d'eau par le milieu, & qu'il arrive le contraire vers les extrêmités. En ce cas, il faudroit une autre ſolution de notre problême ; il faudroit conſidérer la figure de la ſection du corps au niveau de l'eau. Dans cette figure on tireroit une ligne parallele à l'axe de la rotation élémentaire. Cette ligne doit partager ladite ſection de maniere que les deux coins ſolides formés par la rotation ſoient égaux. Voici, après cela, comme il faudroit procéder. Soit la ſurface plane du coin d'un côté $= S$, & de l'autre $= S'$, la diſtance du centre de gravité de cette ſurface juſqu'à la ligne qui partage la ſection du corps faite au niveau de l'eau, d'un côté $= q$, & de l'autre $= q'$; l'angle élémentaire de rotation $= d\sigma$. On ſait que le ſolide du coin ſera d'un côté $= S q\, d\sigma$ & de l'autre $= S' q' d\sigma$, & ces deux quantités doivent être égales. Soit après cela la diſtance du centre de gravité du coin à ladite ligne qui partage la ſection entiere $=p$, d'un côté, & de l'autre $=p'$; je dis qu'on aura la ſtabilité du corps, entant qu'elle eſt formée par la ſection du corps avec le niveau de l'eau $=\int S\,p\,q\,d\sigma + \int S'\,p'\,q'\,d\sigma = \int(p+p')\,S\,q\,d\sigma$. Dans cette expreſſion, on ſuppoſe toutes les quantités p, p', S & q déterminées par l'inclinaiſon σ, & elle a cet avantage qu'elle ne demande qu'une ſeule intégration. On voit aſſez que la quantité $\int S\,p\,q\,d\sigma$ marque le *momentum* du coin d'eau élémentaire qui ſurvient d'un côté, & $\int S'\,p'\,q'\,d\sigma$ celui du coin oppoſé & retranché du contrepoids. Quant à l'autre membre de la formule, qui exprime la ſtabilité d'un corps plongé quelconque, on peut, au lieu de conſidérer le double centre de gravité de chaque coupe, examiner tout d'un coup la place du centre de gravité de tout le corps, comme auſſi celle du centre de gravité de la partie ſubmergée homogene. Si on nomme enſuite encore s la hauteur verticale du premier par-deſſus le ſecond, & P tout le poids du corps plongé, ou de l'eau déplacée, on aura $\int P\,s\,d\sigma$ pour l'expreſſion de l'autre membre qu'il faut retrancher du premier membre, ou l'y ajoûter, ſuivant que le centre de gravité du corps eſt plus haut ou plus bas que le centre de gravité de la partie ſubmergée.

La relation entre les deux membres de la formule qui exprime la ſtabilité des corps eſt telle, que dans les corps qui tirent peu d'eau & qui forment une grande ſection au niveau de l'eau, le premier membre l'emporte ordinairement beaucoup ſur l'autre; & que c'eſt tout le contraire lorſque cette ſection eſt très-petite.

§. XIII. Toutes les réflexions que je viens de faire ſeroient trop abſtraites, ſi elles n'étoient éclaircies par quelques exemples applicables à notre ſujet: il convient donc de deſcendre à quelques exemples. Celui qui répand le plus de jour ſur cette matiere, eſt de ſuppoſer l'inclinaiſon aſſez petite pour que les quantités finies n'en reçoivent aucun changement conſidérable.

Dans cette reſtriction nous pourrons nous ſervir de la formule du §. V, $\int dx \int (\frac{1}{12} q^3 - M s)\, d\sigma$, qui devient $= \int \frac{1}{12} q^3 \sigma\, dx - \int M s \sigma\, dx$. Ici l'élément dx marque l'épaiſſeur de chaque tranche, q la largeur variable, M la ſurface plane de chaque tranche variable, & s la hauteur verticale du centre de gravité de la tranche par deſſus le centre de gravité de ſa partie ſubmergée, & enfin σ la petite inclinaiſon commune à toutes les tranches. Quant au dernier membre, on ſait par la théorie ſur le centre de gravité, qu'il eſt égal à $P\, d\, \sigma$, en entendant par P, le poids de tout le corps, que nous meſurons par la quantité d'eau déplacée, & par d la hauteur du centre de gravité de tout le corps par-deſſus le centre de gravité de la partie ſubmergée ; mais le premier membre $\int \frac{1}{12} q^3 \sigma\, dx$ ou bien $\frac{\sigma}{12} \int q^3 dx$ dépend uniquement de la figure de la ſection horizontale du corps au niveau de l'eau. Si donc cette ſection étoit un parallelogramme rectangle, dont la longueur fût égale à b, on auroit ſimplement $\int \frac{1}{12} q^3 \sigma\, dx = \frac{1}{12} q^3 b \sigma$. Mais comme dans les vaiſſeaux ladite ſection approche beaucoup d'une ellipſe, il eſt bon de faire le calcul de cette intégrale, en ſuppoſant la ſection une élipſe dont le petit axe ſoit $= a$, & le grand axe $= b$. Si on prend les abſciſſes x depuis le centre de l'élipſe ſur le grand axe, on aura $q = \frac{2a}{b} \sqrt{(\frac{1}{4} bb - xx)}$, & $q^3 = \frac{8a^3}{b^3}$ $(\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{3}{2}}$, & par conſéquent $\frac{\sigma}{12} \int q^3 dx = \frac{\sigma}{12} \times \frac{8a^3}{b^3} \times$ $\int (\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{3}{2}} dx$. Les regles connues du calcul intégral donnent cette quantité :

$$= \frac{a^3 \sigma}{6 b^3} [x (\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} bb \int dx (\frac{1}{4} bb - xx)^{\frac{1}{2}}].$$

En faiſant $x = \frac{1}{2} b$, ladite quantité devient

$$= \frac{a^3 \sigma}{8 b} \int dx \sqrt{(\frac{1}{4} bb - xx)};$$

dont le facteur sommatoire exprime le quart de cercle qui a la ligne $\frac{1}{2} b$ pour rayon. Nous substituerons donc à ce facteur $\frac{11}{14} \cdot \frac{1}{4} bb$, ou bien $\frac{11}{56} bb$, & par-là nous aurons $\frac{11}{448} a^3 b \sigma$, qui fait la quantité cherchée pour la demi-section elliptique ; prenant donc le double, nous aurons la quantité entiere $= \frac{11}{224} a^3 b \sigma$.

Comparons à présent cette quantité avec celle qui convient à la figure rectangulaire, savoir avec $\frac{1}{12} q^3 b \sigma$, ou (en donnant la même largeur aux deux figures) avec $\frac{1}{12} a^3 b \sigma$; le rapport sera comme $\frac{11}{224}$ à $\frac{1}{12}$ ou comme 132 à 224, ou environ comme 3 à 5. Nous voyons par cet exemple, que la simple figure de la section du vaisseau faite par la surface de l'eau, peut contribuer considérablement à la stabilité, sans qu'on ait changé la longueur, la largeur ni la profondeur, ni même la solidité, ou le volume de la partie submergée.

Pour avoir une idée plus exacte de la stabilité entiere d'un navire, dont la section à fleur d'eau est supposée elliptique, nous évaluerons aussi le second membre $P d \sigma$; P marque la solidité de la carene, elle est à-peu-près égale à la moitié (ou plus exactement à $\frac{11}{21}$, lorsque la carene est formée par la demi-révolution d'une ellipse sur son axe) du parallelepipede circonscrit ; si nous nommons donc c la la profondeur de la carene, nous aurons sa solidité P à-peu-près $= \frac{1}{2} a b c$. Quant à la hauteur du centre de gravité du vaisseau par-dessus celui de la carene, que nous avons nommée d, il est difficile de la déterminer avec beaucoup de précision; le centre de gravité de la carene sera environ $\frac{1}{3} c$ au-dessous de la surface d'eau, ou un peu davantage ; le centre de gravité de tout le navire sera peut-être de $\frac{1}{5}$ ou de $\frac{1}{6}$ de la profondeur C au-dessous de l'eau, suivant le lest, la charge, leur pesanteur spécifique, & leur arrangement ; enfin je supposerai $d = \frac{1}{6} c$. Dans cette supposition nous aurons $P d \sigma = \frac{1}{12} a b c c \sigma$, & la stabilité entiere du navire, en supposant sa section à fleur d'eau elliptique, sera $= (\frac{11}{224} a^3 b - \frac{1}{12} abcc)\sigma$.

Si la plus grande longueur de la carene est supposée de 140 piés, sa plus grande largeur à fleur d'eau de 40 piés, & la profondeur de 18 piés, la stabilité du vaisseau pour les petites inclinaisons d'un bord à l'autre sera environ $= (440000 - 151200)\sigma$. Ainsi le premier membre est presque trois fois plus grand que le second, & de-là on voit que la stabilité dépend beaucoup plus de la section du vaisseau à fleur d'eau que de tout le reste. La stabilité entiere sera donc en ce cas $= 288800\,\sigma$. Dans les grandes inclinaisons moyennes les navires s'inclinent de côté d'environ 15 degrés; ce qui donne σ environ $= \frac{1}{4}$. Si on considere cette inclinaison assez petite pour induire peu d'erreur dans nos formules, la stabilité sera $= 72200$; c'est-à-dire que le *momentum* de la force pour tenir le vaisseau incliné de 15 degrés, sera égal au poids de 72200 piés cubes d'eau, agissant sur un levier d'un pié de longueur. Mais si nous supposons un levier égal à la demi-largeur du vaisseau, le poids agissant sur ce levier, sera celui de 3610 piés cubes d'eau, ou de 129 tonneaux, en prenant 28 piés cubes d'eau pour le poids d'un tonneau; ce qui fait environ la quatorzieme partie de tout le poids du vaisseau. Si la section à fleur d'eau étoit supposée faire un rectangle, la stabilité absolue en deviendroit double; car nous avons vu que le premier membre de la formule, qui exprime la stabilité, en seroit augmenté en raison de 3 à 5, pendant que le second membre n'en est presque point changé; & ce second membre, faisant environ le tiers du premier, les stabilités pour la section elliptique & pour la section rectangulaire, seroient comme 3 — 1 à 5 — 1, ou comme 2 à 4.

§. XIV. Nous venons de donner, dans le précédent article, des mesures absolues pour les stabilités relatives aux roulis; considérons en deux mots celles qui regardent les tangages. Il n'y a, pour cet effet, qu'à convertir les quantités a & b pour le premier membre des formules ; car le ſecond membre reſtera le même pour le roulis & pour le tangage. Cette ſeule conſidération nous marque que le premier membre augmente en raiſon quarrée de la largeur du vaiſſeau à ſa longueur, qui eſt ordinairement comme 2 à 7 ; de ſorte que le premier membre augmente en raiſon de 4 à 49 : & comme le ſecond membre, pour la ſection du vaiſſeau à fleur d'eau elliptique, n'eſt qu'environ le tiers du premier membre à l'égard du roulis, il n'en ſera plus qu'environ la trente-ſeptieme partie à l'égard des tangages. Delà nous voyons qu'on peut, pour les tangages, négliger abſolument le ſecond membre ; & que la ſtabilité du vaiſſeau pour les inclinaiſons de la proue à la poupe, dépend preſque uniquement de la ſection du vaiſſeau à fleur d'eau. Si donc cette ſection eſt une ellipſe, la ſtabilité de la proue à la poupe ſera ſimplement exprimée, pour les petites inclinaiſons, par $\frac{11}{224} a b^3 \sigma$; & ſi la ſection étoit un rectangle, elle ſeroit exprimée par $\frac{55}{672} a b^3 \sigma$. La formule pour la ſection elliptique donne pour l'exemple du vaiſſeau rapporté dans le précédent article, en faiſant $P = \frac{1}{2} a b c$, la ſtabilité telle que s'il y avoit attaché à la proue ou à la poupe un poids qui fût égal à $\frac{556}{36} P$. Il faudroit donc appliquer à la proue un poids qui fût environ la huitieme partie du poids de tout le vaiſſeau, pour ne l'incliner que de 5 degrés. Je trouve que le vent le plus impétueux ne pourra jamais faire la dixieme partie de cet effet, ni par conſéquent incliner le vaiſſeau de la poupe à la proue au-delà d'un $\frac{1}{2}$ degré.

§. XV. J'ajoûterai encore quelques théorêmes ſur les corps plongés qui ſeroient formés par la rotation d'une figure quelconque autour d'un axe horizontal. Toutes les ſections perpendiculaires à l'axe de rotation, ſont alors des arcs de cercle ; & ſi l'inclinaiſon d'un tel corps plongé ſe fait autour d'un axe parallele audit axe de rotation, chaque arc de cercle demeurera constamment le même, quelle que soit l'inclinaison du corps. Voici maintenant une propriété remarquable sur notre sujet.

Si on multiplie un segment de cercle quelconque par la distance du centre de gravité du segment au centre du cercle, le produit sera toujours égal à la douzieme partie du cube de la corde du segment. Si nous nommons donc q la corde du segment submergé, nous voyons que l'expression $\int \frac{1}{12} q^3 dx$ (*voyez* §. V), n'est autre chose pour ces corps que le volume constant de la partie submergée de tout le corps multiplié par la distance du centre de gravité du même volume à l'axe de rotation de la figure génératrice. Soit donc le poids de tout le corps, ou celui du volume d'eau déplacée $= P$, la distance du centre de gravité de la partie submergée homogene à l'axe de rotation de la figure génératrice $= f$, nous aurons $\int \frac{1}{12} q^3 dx = Pf$. Ces facteurs P & f demeurent constamment les mêmes pour toutes les inclinaisons du corps plongé; & le premier membre de la formule générale pour la stabilité des corps plongés, deviendra ici $Pf\sigma$, quelle que soit la figure génératrice.

Examinons maintenant le second membre de cette formule. Nous avons vu que ce second membre est toujours égal à $\int P\, s\, d\sigma$, en entendant par s la hauteur du centre de gravité de tout le corps par-dessus le centre de gravité de la partie submergée homogene; & il est clair que dans les corps formés par la rotation d'une figure autour d'un axe horizontal, la hauteur verticale s est $= f - g \cos. \sigma$, en entendant par g la distance du centre de gravité du corps à l'axe de rotation de la figure génératrice. Nous avons donc $\int P\, s\, d\sigma = \int P f\, d\sigma - \int P g\, d\sigma \cos. \sigma = P f \sigma - P g \sin. \sigma$; & cette derniere expression fait le second membre de la formule générale sur la stabilité des corps plongés, qu'il faut retrancher du premier membre, qui est pour les corps en question toujours $= P f \sigma$. Ainsi la formule générale

générale pour la ſtabilité des corps en queſtion devien ſimplement $P\,g\,\mathit{ſin}.\,\sigma$.

§. XVI. Voilà une propriété bien remarquable ſur la ſtabilité des corps formés par la rotation d'une figure quelconque autour d'un axe horizontal. Cette ſtabilité eſt la même que ſi le corps étoit ſuſpendu en l'air par ledit axe horizontal, & qu'il fût incliné d'un angle σ; car le poids P ſeroit le même; ſon action ſeroit concentrée au centre de gravité, & il agiroit ſur un levier $g\,\mathit{ſin}.\,\sigma$; & enfin ſon *momentum* ſeroit auſſi $P\,g\,\mathit{ſin}.\,\sigma$. Ici le centre de gravité de la partie ſubmergée homogene n'entre plus en conſidération; toutes les inclinaiſons, grandes ou petites, font les *momenta* des forces réquiſes, pour tenir les corps inclinés, proportionnels aux ſinus des inclinaiſons. Si la partie ſubmergée fait la moitié du corps formé par la révolution entiere de la figure génératrice, l'axe de rotation ſera à fleur d'eau. Ce cas ne s'éloigne pas beaucoup de l'exemple des navires; & comme le métacentre ne peut être que fort proche de la ſurface d'eau, étant pour ces corps dans l'axe de rotation, le centre de gravité du vaiſſeau tout chargé doit être placé plus bas que la ſurface d'eau, pour que le navire obtienne une ſtabilité tant ſoit peu conſidérable. Mais comme la hauteur des mâts, des voiles, l'accaſtillage, & tout ce qui eſt au-deſſus de l'eau, ne permet pas de donner une profondeur conſidérable audit centre de gravité, on pourra augmenter la ſtabilité du navire en hauſſant l'axe de rotation; c'eſt-à-dire, en faiſant enſorte que la carene faſſe une plus petite portion que la moitié du ſolide formé par la révolution entiere. La ſtabilité dans le ſens de la longueur du navire n'eſt ſi grande, que parce que la carene ne forme que comme une très-petite portion du ſolide entier, en conſidérant la carene comme formée par la révolution d'un demi-cercle autour d'un axe fort éloigné horizontal & perpendiculaire à la quille. Une carene ainſi formée, auroit l'axe de rotation élevé par-dessus la surface de l'eau de 127 piés, en donnant 18 piés de profondeur à la carene, & 140 piés de longueur.

§. XVII. Voilà ce que j'avois de plus essentiel à dire sur la stabilité des corps plongés. La matiere est très-riche, & j'ai supprimé bien des choses pour n'être pas trop long; je n'ai fait que choisir ce que j'ai cru avoir le plus de rapport à notre sujet principal.

Pour mettre à profit la théorie que je viens d'établir, je vais examiner la relation qu'il y a entre les deux especes de stabilités, & les roulis & les tangages; après quoi j'exposerai tont ce qu'on peut faire pour augmenter l'une & l'autre stabilité.

CHAPITRE II.

Examen de ce que la ſtabilité des vaiſſeaux peut contribuer pour diminuer leur roulis & leur tangage.

§. XVIII. UNE force quelconque, qui agit ſur un vaiſſeau, ſi elle eſt entierement uniforme & permanente, ne ſauroit faire d'autre effet, que celui de plier le vaiſſeau juſqu'à un certain degré, & ce degré dépend uniquement de la ſtabilité du vaiſſeau : plus la ſtabilité eſt grande, moins le vaiſſeau ſera incliné par la force qui agit ſur lui. Pour la conſtruction ordinaire des vaiſſeaux, les ſinus d'inclinaiſon ſeront à-peu-près en raiſon réciproque des forces qui les produiſent. A cet égard la ſtabilité renforcée eſt déja d'une grande utilité; car il eſt bon de conſerver la poſition droite du vaiſſeau, tant qu'il eſt poſſible. Un vaiſſeau qui, dans les routes obliques, plie ſous ſes voiles, pourra, par la force du vent, être quelquefois incliné juſqu'à quinze, & même, ſi on ne diminuoit alors l'étendue des voiles, juſqu'à 20 degrés. Un vaiſſeau, ainſi incliné, ſera encore ſujet aux mêmes balancemens, que dans ſa poſition droite ; & il eſt évident que la mâture ſera beaucoup plus fatiguée, par ces balancemens, lorſque la poſition moyenne eſt fort oblique, qu'elle n'eſt lorſque cette poſition moyenne eſt droite. Car ſi ces balancemens étoient par exemple de vingt degrés de chaque côté, & ſi l'inclinaiſon moyenne étoit pareillement de vingt degrés, le vaiſſeau dans l'une des extrêmités ſeroit incliné juſqu'à quarante degrés, & la mâture ſouffriroit beaucoup par le poids des mâts & des voiles. D'ailleurs, le vaiſſeau ſeroit déja dans un péril d'être renverſé ; le moindre accident pourroit être funeſte, d'autant plus que les forces qui tendent à relever le vaiſſeau, ne croiſſent à-peu-près qu'en raiſon des ſinus des inclinaiſons ; de ſorte qu'un nouveau degré de force qui fait balancer le vaiſſeau, fait d'autant plus d'effet, que le vaiſſeau eſt déja incliné. Telle force qui feroit incliner le navire depuis ſa poſition droite juſqu'au vingtieme degré, pourra le faire incliner depuis vingt degrés juſqu'à quarante-trois degrés dix minutes ; & une petite force, qui dans le premier cas le feroit incliner d'un degré, ajoûtera à un vaiſſeau déja incliné de quarante degrés, une inclinaiſon d'un degré dix-neuf minutes.

Ces réflexions prouvent déja qu'il ne ſauroit y avoir que de l'avantage à augmenter la ſtabilité des vaiſſeaux, tant qu'il eſt poſſible de le faire ſans nuire à ſes autres qualités réquiſes, puiſque l'inclinaiſon moyenne, d'autant plus nuiſible qu'elle eſt plus grande, en ſera ſûrement diminuée.

§. XIX. Examinons à préſent les balancemens par eux-mêmes. Ils ne ſauroient être produits que par des cauſes variables ; ces cauſes, quelles qu'elles ſoient, ſont néceſſairement périodiques ; elles augmenteront & diminueront alternativement. Un ſeul accès de ces forces motrices ne ſauroit ébranler conſidérablement la maſſe énorme d'un vaiſſeau, pour le faire rouler ; ce n'eſt qu'après un certain nombre de nouveaux accès répliqués coup ſur coup, que le vaiſſeau roulera avec force. Je trouve que les roulis dépendent en partie de la force de chaque accès, & en partie de l'intervalle de tems entre deux accès conſécutifs. Quant à la force, chacun voit, que plus elle eſt grande, plus elle doit faire d'effet ; mais il n'eſt pas également facile à déterminer comment les intervalles d'un accès à l'autre concourent pour former les roulis. C'eſt ici une queſtion qu'on n'a pas encore traitée, & que je vais tâcher de réduire aux loix de la méchanique.

§. XX. Les accès de force motrice ſont, ou tout-à-fait irréguliers, ou uniformément périodiques. Cette derniere eſpece peut encore être ſous-diviſée par les durées de chaque accès : cette durée eſt ou plus petite, ou égale, ou plus grande que la durée d'un balancement naturel du vaiſſeau ; car tout vaiſſeau incliné, & puis entierement abandonné à lui-même, fait des allées & venues à-peu-près iſochrones, que je nomme *balancemens naturels*.

Lorſque les accès de force motrice ſont irréguliers, ils agiteront le navire : mais ces agitations ſeront aſſez petites ; car ces forces accéléreront tantôt un balancement déja imprimé au vaiſſeau, & tantôt le retarderont, en agiſſant dans un ſens contraire à ſon balancement ; & quand même le hazard feroit que trois, quatre, ou cinq coups de ſuite conſpiraſſent à augmenter les balancemens du vaiſſeau, ceux-ci ne pourront pas encore devenir exceſſifs, à moins que la force de chaque accès ne ſoit exceſſivement grande. Dans tous les cas, la ſtabilité du vaiſſeau ſera un vrai remede qu'on peut oppoſer à ces efforts : plus la ſtabilité ſera grande, plus les balancemens provenans de ces efforts ſeront petits. Cette réflexion nous conduit donc encore pour ces cas à la concluſion d'augmenter la ſtabilité des navires, tant que les autres circonſtances le permettent.

§. XXI. Conſidérons à préſent les accès de force motrice, lorſqu'ils ſont réguliers & uniformément périodiques ; je ne doute pas qu'ils ne ſoient à-peu-près tels aſſez ſouvent ; car lorſque le vent n'eſt pas variable, qu'il eſt parvenu à agiter les eaux de la mer avec toute la force qu'il peut leur imprimer, & que la mer eſt libre & bien profonde juſqu'à une grande étendue, il eſt certain que les agitations des eaux ne ſauroient manquer d'être régulieres. Alors ces agitations conſiſteront à faire des allées & venues conformes aux balancemens d'un pendule simple; & il est question d'examiner l'effet que ces agitations des eaux, devenues régulieres, pourront faire sur le navire.

Je prens ici d'abord pour principe, que dans tout systême de corps qui agissent les uns sur les autres, si ces corps font des mouvemens réciproques, réguliers & permanens, ils feront toujours des balancemens harmonieux & synchrones, qui commenceront & finiront tous dans les mêmes instans. C'est-là une vérité que j'ai reconnue avec une évidence entiere, toutes les fois qu'il m'est arrivé d'examiner de pareils mouvemens réciproques composés; & cela m'est arrivé très souvent. Le systême que nous avons ici devant nous, sont le navire & les eaux qui l'environnent, car je suppose un vent fait & uniforme à tous égards. Or le navire, quelques balancemens qu'il fasse, ne sauroit changer les mouvemens réciproques des eaux agitées. Ceux ci maîtriseront donc entierement le navire, qui par conséquent fera dans ces cas ses balancemens harmonieusement avec ceux des eaux agitées; de sorte que la durée de chaque balancement soit égale à celle de chaque accès moteur.

§. XXII. La propriété que nous venons d'indiquer sur la durée de chaque balancement nous fournit une maniere de déterminer en quelque façon l'étendue de chaque balancement, & d'indiquer les circonstances dont cette étendue dépend, & dont elle dépendroit, quand même un navire balanceroit sans trouver aucune résistance. Nous comparerons les balancemens d'un navire avec ceux d'un pendule simple, & nous les supposerons isochrones les grands avec les petits: nous supposerons aussi que les accès de force motrice résultante de l'action des eaux, agissent sur le vaisseau indépendamment de ses inclinaisons; ce qui sera d'autant plus vrai, que les balancemens sont petits.

Pour expliquer à préſent mes idées ſur cette matiere avec plus de clarté, je conſidererai un pendule ſimple, long d'un peu plus de douze piés, & qui batte à chaque coup deux ſecondes. Suppoſons une force qui oblige ce pendule à battre à chaque ſeconde, il faudra que la force accélératrice entiere devienne dans chaque point quatre fois plus grande; & comme la force de la peſanteur qui agit ſur le corps du pendule reſte la même, il faut que la force étrangere qui eſt ſurvenue, & qui oblige le pendule de doubler ſes battemens, ſoit trois fois plus grande que celle qui anime le pendule par ſa peſanteur : il n'y a donc plus qu'à conſidérer l'intenſité de ladite force étrangere. Suppoſons-la, par exemple, telle qu'elle ſoit, égale à la force de la peſanteur qui anime le pendule, lorſque celui-ci ſe trouve à douze degrés de diſtance avec la verticale qui paſſe par le point de ſuſpenſion. Je dis que dans ce cas le pendule fera des excurſions de quatre degrés de chaque côté, puiſqu'alors la force étrangere eſt trois fois plus grande que la force de la peſanteur qui anime le pendule, & qu'elle demeure telle durant tout le balancement; car nous ſuppoſons la force étrangere être de la nature de celles qui produiſent des mouvemens iſochrones, & agir également ſur le pendule incliné de 12 d. & de 4 d. Si le pendule faiſoit toute autre excurſion, ſes balancemens ne pourroient jamais ſe faire harmoniquement avec les accès de la force qui l'agite. Dans ce cas les accès de la force qui agite le pendule, conſpirent avec la force de la peſanteur qui anime le pendule; mais lorſque leſdits accès ſe ſuivent avec moins de rapidité que ne feroient les balancemens naturels du pendule, il arrive néceſſairement le contraire, c'eſt-à-dire que la force qui agite le pendule, doit toujours agir d'une maniere oppoſée à la peſanteur du corps du pendule; c'eſt ce que je vais expliquer par un autre exemple.

Suppoſons que la force étrangere oblige notre pendule à faire chaque vibration en quatre ſecondes de tems. En ce cas, la force entiere qui anime le pendule, ne doit plus faire que le quart de la ſimple force de la peſanteur. Il faut donc que la force étrangere ôte les trois quarts à la force naturelle de la peſanteur du corps. De-là nous connoiſſons que le pendule doit faire des excurſions de 16 d. de chaque côté ; car puiſqu'à 12 d. d'inclinaiſon la force de la peſanteur eſt ſuppoſée égale à la force qui l'agite, il s'enſuit qu'à 16 d. d'inclinaiſon, la force de la peſanteur ſera à la force étrangere, comme 4 à 3 ; & que par conſéquent celle-ci faſſe les trois quarts de la premiere. Ce n'eſt qu'avec ces excurſions de 16 d. de chaque côté, que les balancemens du pendule peuvent devenir réguliers & prendre un état de permanence. Mais ici la force étrangere feroit toujours oppoſée à la force de la peſanteur ; c'eſt-à-dire, que le corps du pendule ſera ſecondé par la force étrangere pendant tout le tems qu'il emploie à monter ; & qu'au contraire, cette force étrangere s'oppoſera au mouvement du corps pendant tout le tems qu'il emploie à deſcendre.

§. XXIII. Par les deux exemples que j'ai examinés dans le précédent article, on comprend aiſément la ſolution générale ſur la queſtion de l'excurſion du pendule animé en même tems par la peſanteur & par une force étrangere qui ſoit de la nature des forces qui produiſent des balancemens iſochrones. Soit donc à préſent l'intenſité de la force étrangere telle, que dans le moment qu'elle eſt la plus grande, elle ſoit égale à la force de la peſanteur du corps du pendule ſous un angle s. Soit le tems d'un balancement naturel du pendule t, & que ce pendule ſoit obligé par la force étrangere à faire chaque vibration dans un tems $\frac{1}{n}t$, je dis que le pendule fera de chaque côté des excurſions, dont l'angle avec la verticale ſera $= \frac{s}{nn-1}$.

Il ſuit de cette formule, que plus les accès de la force

force étrangere se succedent rapidement, plus les excursions du pendule seront petites; mais lorsque les intervalles entre deux accès sont à-peu-près égaux à la durée d'un balancement naturel du pendule, ce pendule fera des excursions excessives. C'est ici une propriété à laquelle je souhaite qu'on fasse attention. Enfin, lorsque lesdits intervalles surpassent la durée d'un balancement naturel du pendule, il arrive que la force étrangere & la force qui résulte de la pesanteur des corps agissent d'un sens contraire, parce que l'angle de l'excursion réelle devient négatif; & alors l'excursion elle-même devient d'autant plus petite, que les accès de la force étrangere se succedent plus lentement.

Tout cela sera éclairci par l'expérience physique qui suit. Qu'on prenne par exemple un pendule simple à secondes, & qu'on le tienne suspendu entre deux doigts; qu'on fasse avec la main des mouvemens réciproques horizontaux, en imitant le plus qu'il est possible ceux d'un pendule d'une longueur quelconque; on verra que suivant la rapidité de la main, qu'on pourra supposer faire toujours les mêmes excursions, le pendule s'accommodera aux mêmes durées de vibrations de la main, & que les excursions du pendule pourront ou se faire du même côté que celles de la main, ou du côté opposé; mais on remarquera surtout, que lorsque chaque allée & venue de la main se fait précisément dans une seconde de tems, alors les plus petits mouvemens de la main feront faire au pendule des excursions excessives, qui même ne sont limitées que par la résistance de l'air & par l'imparfaite flexibilité du fil.

§. XXIV. Les propriétés remarquables que nous venons d'indiquer sur l'étendue des balancemens d'un pendule, peuvent toutes être appliquées aux roulis d'un navire, puisqu'il est clair qu'on peut substituer au corps du pendule tout autre corps soutenu d'une façon à pouvoir faire des balancemens. Les hypotheses que nous avons faites ne répondent pas à la nature de la chose avec une précision entiere ; ce que je ne dissimulerai pas. Les roulis *naturels* d'un vaisseau ne sauroient être parfaitement isochrones entre eux : les accès de la force qui agite le navire auront aussi rarement des intervalles de tems parfaitement égaux ; cette force n'agira pas précisément avec cette loi que demande l'isochronisme, & elle n'agira pas tout-à-fait également sur le navire plus ou moins incliné dans les momens où ces inclinaisons sont grandes ; mais tout cela ne doit pas nous empêcher d'avoir de l'indulgence pour nos principes, puisqu'il est certain que les roulis auront toujours quelque penchant marqué pour cet état que notre théorie exige, pendant tout le tems que les agitations des eaux sont fort régulieres & permanentes ; ce qui fait le cas dont nous parlons. J'appliquerai donc les balancemens du pendule, que j'ai expliqués & que j'ai pris pour exemple uniquement pour être intelligible, aux balancemens d'un navire.

§. XXV. Nous avons vu au §. XXIII, que l'étendue des balancemens de chaque côté est exprimée par $\frac{s}{nn - 1}$. Voyons d'abord quel sens il faut attacher à cette formule lorsqu'il est question des roulis d'un navire. Pour cet effet, il faut premierement considérer la force qui agite le vaisseau dans le moment qu'elle est la plus grande ; j'appellerai cette force φ. Ensuite il faut examiner quelle inclinaison le navire prendroit si ladite force φ demeuroit constamment la même, sans augmenter ni diminuer. L'angle de cette inclinaison est exprimé dans notre formule par s. On voit bien que cet angle s sera d'autant plus petit que la stabilité du navire est plus grande ; & que, pour les petits angles, l'un est réciproquement proportionnel à l'autre. Nous avons vu que dans les petites inclinaisons la formule qui exprime la stabilité des corps plongés, peut toujours être réduite à $\pi\sigma$; ainſi la ſtabilité pour l'angle s ſera πs, & de-là nous aurons $\varphi = \pi s$ ou $s = \frac{\varphi}{\pi}$. Subſtituons cette valeur dans la formule $\frac{s}{nn-1}$, & nous aurons $\frac{\varphi}{(nn-1)\pi}$. Soit après cela, comme au §. XXIII, le tems d'un *balancement naturel* du vaiſſeau $= t$, & le tems entre deux accès de force qui agitent le vaiſſeau $= \theta$, nous aurons $\theta = \frac{1}{n} t$, & par conſéquent $n = \frac{t}{\theta}$, ou $nn - 1 = \frac{tt - \theta\theta}{\theta\theta}$; & ſi nous ſubſtituons encore cette valeur dans notre formule $\frac{\varphi}{(nn-1)\pi}$, nous aurons enfin $\frac{\theta\theta\varphi}{(tt-\theta\theta)\pi}$.

§. XXVI. Voilà la formule qui exprimera toujours à-peu-près l'étendue des balancemens du navire permanens & cauſés par des efforts réguliers. Elle nous apprend donc que la quantité des roulis dépend de la force qui agite le navire, de la ſtabilité du navire, & du rapport qu'il y a entre les tems t & θ, c'eſt-à-dire, entre la durée d'un *balancement naturel* du navire, & la durée de chaque accès de la force qui agite le navire. Nous voyons auſſi que les cas les plus à craindre ſont ceux où les balancemens des eaux qui cauſent les roulis ſont à-peu-près de la même durée avec les *balancemens naturels* du navire. Je n'examinerai pas encore toutes les conſéquences qu'on peut tirer de cette formule. On voit généralement que plus la quantité π, qui eſt proportionnelle à l'intenſité de la ſtabilité, eſt grande, plus l'étendue des roulis ſera petite. Il eſt vrai que le tems t dépend le plus ſouvent de la ſtabilité, puiſque ſi la ſtabilité eſt plus grande, les balancemens naturels du navire en doivent être accélérés. On peut dire que tout le reſte étant égal, le tems t eſt à-peu-près réciproquement proportionnel à la racine quarrée de la ſtabilité; mais on remarquera qu'on peut changer le tems t, ſans rien changer du côté de la ſtabilité, en éloignant ou en approchant la matiere, qui fait toute la charge du vaiſſeau, de l'axe de rotation. La relation qu'il y a entre les quantités π, t & θ, pourroit faire, dans de certains cas, qu'en augmentant la ſtabilité, on rendît les agitations du navire plus grandes. C'eſt donc une queſtion bien importante, s'il convient d'augmenter la ſtabilité du navire. Là-deſſus on peut faire les réflexions ſuivantes. Comme le tems θ eſt incertain, puiſqu'il dépend de la nature des agitations des eaux de la mer, & par conſéquent des mers même où l'on ſe trouve, & de pluſieurs circonſtances accidentelles; il arrivera toujours, quel que ſoit le tems t, ou que θ ſoit plus grand que t, ou qu'il ſoit plus petit, ou qu'il lui ſoit égal. Si θ eſt plus grand que t, il eſt clair que la quantité $\frac{\theta\theta\varphi}{(tt-\theta\theta)\pi}$, devient d'autant plus petite, que l'intenſité de la ſtabilité π eſt plus grande, puiſqu'on peut ſuppoſer la quantité $tt\pi$ à-peu-près conſtante; & on remarquera qu'il eſt indifférent que la valeur du dénominateur ſoit affirmative ou négative pour la quantité de l'excurſion, & que cette différence marque ſimplement ſi les forces φ & π agiſſent du même côté ou du côté oppoſé; mais ſi θ eſt plus petit que t, on augmentera au contraire les roulis en augmentant la ſtabilité, parce que le dénominateur devient plus petit, en ſuppoſant toujours la quantité $tt\pi$ conſtante. On ſera peut-être ſurpris d'entendre qu'il peut y avoir des cas où une augmentation de ſtabilité cauſe une augmentation de roulis. Je réponds à cela, que la ſtabilité diminue à la vérité toujours l'inclinaiſon cauſée par une force uniforme & permanente; mais que l'excurſion des roulis cauſée par des accès de force, ne ſe regle pas toujours ſur ladite inclinaiſon. Si θ étoit infiniment plus grand que t, l'étendue des roulis ſeroit exprimée par $\frac{\varphi}{\pi}$, & on diminueroit les roulis à meſure qu'on augmenteroit la ſtabilité. Si au contraire θ étoit infiniment plus petit que t, la même étendue de roulis ſeroit exprimée par $\frac{\theta\theta\tau}{tt\pi}$, & la ſtabilité ne changeroit preſque pas l'étendue des roulis; d'ailleurs les balancemens ſeroient en ce cas très-petits par eux-mêmes, à cauſe de la petiteſſe ſuppoſée de $\frac{\theta\theta}{tt}$. Le premier cas mérite donc plus d'attention que le ſecond; outre cela, il ſemble que le premier cas ſera beaucoup plus fréquent que l'autre; car lorſque les accès, qui font rouler le vaiſſeau, ſont réguliers, je ne doute pas que ces accès ne ſoient iſochrones avec les mouvemens réciproques des lames, & ceux-ci ſont le plus ſouvent beaucoup plus tardifs que ne ſont les balancemens naturels d'un navire. Après tout, il n'y a que le ſeul cas à craindre où les tems t & θ ſont à-peu-près égaux; & comme on ne ſait pas lequel prévaudra ſur l'autre, c'eſt ſans doute prendre le parti le plus ſûr que d'augmenter la ſtabilité tant qu'il eſt poſſible, puiſque pour la même quantité $tt - \theta\theta$, les roulis en ſont certainement diminués. Je ferai voir ci-deſſous de quelle façon particuliere on pourra ſe précautionner contre ce cas, qui eſt le plus fâcheux. Au reſte, on voit aſſez que nos principes ſont toujours les mêmes, quelle que ſoit la ſource des forces qui agitent le navire. Après avoir examiné tous les cas qui peuvent arriver, & après avoir fait voir, que le meilleur parti & le plus ſûr pour diminuer les balancemens d'un navire, eſt toujours d'augmenter ſa ſtabilité, il eſt tems de conſidérer ce dernier article avec tout le détail réquis.

CHAPITRE III.

Expoſition des moyens qu'on peut employer pour dimiuuer le roulis & le tangage des navires fondés ſur leur ſtabilité.

§. XXVII. Il s'agit, dans ce Chapitre, d'examiner quels ſont les moyens convenables d'augmenter la ſtabilité du navire, & de diminuer par-là ſes balancemens. Je ne parle pas de cette augmentation de ſtabilité qu'on obtiendroit en augmentant les dimenſions principales du navire. Tout le monde ſait qu'un grand vaiſſeau a plus de ſtabilité qu'un petit. Nos formules montrent à cet égard que la ſtabilité croit en raiſon biquarrée des dimenſions homologues pour les vaiſſeaux ſemblables, ſuivant toutes les circonſtances. Mais l'inertie de toute la matiere rélative aux balancemens du vaiſſeau, croit comme la cinquieme puiſſance des dimenſions homologues. D'où il ſuit que la longueur du pendule ſimple iſochrone avec les *balancemens naturels* du navire, ſuit la raiſon des dimenſions homologues; & la durée de chaque balancement, la raiſon ſous-doublée des dimenſions homologues. Ainſi un grand vaiſſeau pliera moins ſous les voiles, dans les routes obliques, qu'un petit, en raiſon réciproque des dimenſions homologues; parce que le *momentum* de l'effort du vent pour faire plier le vaiſſeau, en ſuppoſant la mâture & les voiles garder la même proportion en tout ſens, ne ſuit que la raiſon de la troiſieme puiſſance des dimenſions homologues, pendant que la ſtabilité croit en raiſon de la quatrieme puiſſance. On pourroit donc employer plus de voiles à proportion ſur un grand vaiſſeau que ſur un petit. Mais auſſi, d'un autre côté, le centre de gravité du navire eſt à proportion plus haut dans les grands navires que dans les petits, tant à cauſe de la charge & de l'artillerie, que parce que la ſtructure n'eſt pas entierement ſemblable; & cette circonſtance diminue la ſtabilité des grands vaiſſeaux, ſurtout celle qui eſt rélative aux roulis, car la ſtabilité dans le ſens de la longueur ne ſera pas ſenſiblement diminuée par cette circonſtance. Quant à la proportion des forces, qui agiſſent ſur des navires de différente grandeur pour les faire balancer, & dont nous avons ſuppoſé, au §. XXV, l'intenſité $= \varphi$, on voit, pour peu qu'on y faſſe attention, que c'eſt un problême abſolument indéterminé que d'indiquer cette proportion. Ces forces pourront conſiſter quelquefois dans l'action d'une petite maſſe d'eau, qui exercera tout ſon pouvoir tant ſur le petit que ſur le grand navire, de maniere que ces forces ſeroient égales; d'autres fois ce ſeront de grandes maſſes d'eau, qui agiſſent ſur toute la carene, ou ſur une grande partie de la carene; outre cela la direction moyenne des efforts paſſera tantôt plus loin, tantôt plus près de l'axe de rotation du navire, &c. C'eſt donc là une queſtion ſur laquelle on ne peut rien affirmer de poſitif.

Mais voyons auſſi quelle ſera la proportion entre les balancemens des deux navires, lorſqu'ils ſe trouvent en même tems, dans les mêmes circonſtances proches l'un de l'autre. Car quoique la théorie ſur l'étendue des balancemens devenus tout-à-fait réguliers, que j'ai expoſé depuis le §. XXI juſqu'à la fin du chapitre, ne ſauroit jamais convenir aux balancemens des navires avec une préciſion entiere, parce qu'il y aura toujours un reſte d'irrégularité dans les circonſtances, il n'eſt pourtant pas douteux que ces balancemens ne ſuivent plus ou moins les loix de cette théorie, ſuivant le plus ou le moins de régularité dans leurs cauſes.

Suppoſons donc deux navires de grandeur différente, mais entierement ſemblables en toutes choſes. Soit la longueur de l'un à la longueur de l'autre, comme 1 à n, & que l'étendue des balancemens ſoit exprimée, pour le petit navire, par $\frac{\theta\theta\varphi}{(tt-\theta\theta)\pi}$, qui eſt la formule que nous avons trouvée à la fin du §. XXV. Il s'agit d'examiner comment cette formule ſera changée pour le grand vaiſſeau. Pour cet effet, on remarquera que le tems θ eſt le même pour l'un & l'autre navire; que le tems t doit être, en vertu de ce que nous avons marqué au commencement de ce §, changé en $t\sqrt{n}$, & π en $n^4\pi$; & enfin qu'on ne peut rien affirmer de poſitif ſur le changement de la force φ. J'appellerai donc φ' cette force pour le grand vaiſſeau, quelle qu'elle puiſſe être. De cette façon, l'étendue des balancemens du grand navire ſera exprimée par $\frac{\theta\theta\varphi'}{(ntt-\theta\theta)n^4\pi}$. Ainſi les balancemens pour le petit & pour le grand navire ſeront comme $\frac{\theta\theta\varphi}{(tt-\theta\theta)\pi}$ à $\frac{\theta\theta\varphi'}{(ntt-\theta\theta)n^4\pi}$, ou comme $\frac{\varphi}{tt-\theta\theta}$ à $\frac{\varphi'}{n^5tt-n^4\theta\theta}$. On voit aſſez, par ce rapport, que les balancemens du grand vaiſſeau doivent naturellement être plus petits que ceux du petit navire, parce que le plus ſouvent le dénominateur $tt-\theta\theta$ ſera beaucoup plus petit que l'autre dénominateur $n^5tt-n^4\theta\theta$. Si on veut ſuppoſer t beaucoup plus petit que θ, & je crois qu'on ſe trouve ſouvent dans le cas à le pouvoir faire, ces balancemens ſeront en raiſon de $n^4\varphi$ à φ'. Je crois auſſi que pour l'action des grandes lames régulieres on peut ſuppoſer à-peu-près $\varphi'=n^3\varphi$, parce que les forces agiſſent ſur la ſurface de la carene proportionnelle à nn, & ſur des leviers qui ſont naturellement proportionnels à n. Dans cette ſeconde ſuppoſition, les balancemenr ſeront en raiſon de n à 1, c'eſt-à-dire, en raiſon réciproque des dimenſions homologues. Mais je vois auſſi qu'on pourroit ſe trouver, par

un

un concours de hazards, dans des circonſtances que le grand navire fît de plus grands balancemens que l'autre ; cela pourroit arriver lorſque la quantité ntt ſeroit à-peu-près égale à la quantité $\theta\theta$. C'eſt aux Marins entendus & accoutumés aux obſervations, à juger d'un tel paradoxe ; du moins ſuis-je bien aſſuré que ſouvent les grands navires feront d'auſſi grands balancemens que d'autres navires conſidérablement plus petits, & que particulierement les grandes lames régulieres & uniformes doivent faire cet effet.

§. XXVIII. Voyons maintenant ce qu'on peut faire pour augmenter la ſtabilité du navire, & pour diminuer par-là ſes balancemens, ſans changer aucune de ſes dimenſions principales. Nous avons démontré dans le chapitre ſur la ſtabilité des corps flottans, que cette ſtabilité dépend uniquement de deux choſes ; ſavoir, de la ſection horizontale du corps à fleur d'eau, & de la hauteur verticale du centre de gravité du corps par-deſſus le centre de gravité de la partie homogene ſubmergée. Conſidérons donc ces deux choſes l'une après l'autre ; car en les confondant, on obtient ſouvent des quantités qui ſe détruiſent, & les deux ſources de la ſtabilité ne ſont plus reconnoiſſables par la formule qui exprime la ſtabilité abſolue. La ſection horizontale du navire à fleur d'eau fait à-peu-près une ellipſe. La ſtabilité qui en réſulte dans le ſens de la largeur du navire, eſt en raiſon compoſée du cube du petit axe de l'ellipſe & du grand axe ; & la ſtabilité dans le ſens de la longueur, eſt au contraire en raiſon compoſée du cube du grand axe & du petit axe (§. XIII). De-là on voit combien il y auroit à gagner à augmenter la largeur du navire pour diminuer les roulis, & la longueur pour diminuer les tangages. Si cependant on veut conſerver la plus grande largeur, de même que la plus grande longueur dans la ſection du navire à fleur d'eau, il y aura encore un autre moyen d'augmenter la ſtabilité ;

c'eſt de diminuer moins la largeur de ladite ſection vers la proue & vers la pouppe : plus la ſection approchera du rectangle circonſcrit, plus la ſtabilité du navire augmentera, & cela nonſeulement par rapport aux roulis, mais encore par rapport au tangage. J'ai démontré au milieu du dit §. XIII, qu'en changeant l'ellipſe en ſon rectangle circonſcrit, chacune des deux ſtabilités, entant qu'elles réſultent de la coupe du vaiſſeau à fleur d'eau, eſt augmentée en raiſon de 3 à 5. Voilà tout d'un coup une grande augmentation de ſtabilité, mais qui devient encore plus grande du côté des roulis, en conſidérant la ſtabilité abſolue, c'eſt-à-dire, en conſidérant les deux termes qui l'expriment enſemble, puiſque j'ai fait voir, à la fin du §. XIII, que la ſtabilité entiere & abſolue ſeroit doublée, par ce changement, pour les roulis, quoiqu'elle ne ſoit pas ſenſiblement augmentée au-delà de la proportion de 3 à 5 pour les tangages.

On devroit, au lieu de conſidérer la coupe horizontale du vaiſſeau à fleur d'eau comme une ellipſe, la regarder plutôt comme compoſée de deux demi-ellipſes ſur un petit axe commun, & dont les demi-grands axes ſeroient comme 5 à 7, parce qu'on ne fait pas le fort du vaiſſeau préciſément au milieu, mais environ à $\frac{5}{12}$ de toute la longueur, depuis la proue, & $\frac{7}{12}$ depuis la pouppe. J'avoue cependant que je ne vois pas ce qui a pu engager les conſtructeurs de vaiſſeau à ſuivre cette maxime, qui ne fait qu'augmenter la réſiſtance des eaux contre la proue : c'eſt peut-être pour donner aux vaiſſeaux plus de ſoutien vers la proue que vers la pouppe, & pour occaſionner par-là cette pente de la quille dans le ſens de la proue vers la pouppe, que l'expérience a montré être utile, & que pluſieurs raiſons me font enviſager comme telle. Mais on peut obtenir une telle pente par la ſimple diſpoſition de la charge. M. Bouguer fait voir pourtant que le navire en gouverne mieux.

Quoiqu'il en ſoit, & quelque parti qu'on prenne là-deſſus, l'augmentation de la ſtabilité que nous conſeillons, eſt la même pour les deux demi-ellipſes & pour la ſimple ellipſe entiere.

§. XXIX. Il me ſemble que dans la conſtruction des vaiſſeaux, on ne dirige pas aſſez directement ſes vues du côté de la figure que prendra la coupe du vaiſſeau à fleur d'eau, qui fait cependant un des points les plus eſſentiels, puiſque la charge qu'on peut mettre ſur le vaiſſeau, auſſi-bien que la ſtabilité de celui-ci, dépendent preſque uniquement de cette ſection. Par-là il arrive qu'une différence aſſez légere dans la conformation de la carene, jette une diverſité aſſez conſidérable ſur la figure de ladite coupe. Ayant examiné quelques exemples ſur ces figures, j'ai remarqué qu'elles n'étoient aſſujetties à aucune loi fixe. J'ai vu ſeulement que la figure étoit toujours plus large vers la proue que vers la pouppe, quoique tantôt plus tantôt moins. Je ne ſaurois approuver cette maxime; car quand même l'expérience auroit entierement démontré qu'il faut rendre la proue plus groſſe que la pouppe, & renfler la carene vers l'avant, rien n'empêche de ſe relâcher ſur cette maxime, peut-être mal fondée, aux environs de la flottaiſon. Je ne veux pas qu'on retréciſſe l'avant de la figure, mais qu'on en élargiſſe l'arriere. En un mot, il me ſemble que cette figure devroit approcher de la figure d'un rectangle arrondi par les quatre coins.

Si on conſidere la dite coupe comme compoſée de deux demi-ellipſes, faites ſur un petit axe commun, quelle que ſoit la proportion entre les deux demi grands axes, l'aire de la figure ſera toujours égale à $\frac{11}{14}$ du produit de la longueur par la largeur. Si donc la coupe a 120 piés de longueur ſur 29 piés de largeur, (c'eſt un exemple que M. Bouguer donne dans ſon *Traité du Navire*, p. 242), l'aire de la coupe devroit être de 2734 piés quarrés. Cependant M. Bouguer, par une regle qu'il cite, ne la trouve que de 2655 piés quarrés. La section étoit donc encore plus petite que n'est l'aire des deux demi ellipses. Il est vrai que la regle alléguée par M. Bouguer, pèche toujours en défaut à cause du grand nombre de petits segmens curvilignes qu'on néglige; & je suis sûr que pour la construction ordinaire des vaisseaux, on trouvera l'aire de la section pour le moins avec une précision égale, en multipliant simplement la plus grande largeur par la plus grande longueur, & en prenant les $\frac{11}{14}$ du produit.

§. XXX. J'ai déja indiqué, que par le moyen que nous venons d'exposer, on augmentera également la stabilité dans le sens d'un bord à l'autre, & dans celui de la proue à la pouppe; & qu'ainsi on diminuera également le roulis & le tangage. Celui que je vais ajoûter est à-peu-pres de la même nature, quoiqu'il paroisse ne regarder que la diminution des roulis. Cet autre moyen consiste à faire les flancs du vaisseau, aux environs de la flottaison, plus droits & verticaux, qu'on n'a coutume de faire. Entrons, sur cet article, dans le détail qu'il mérite. Dans les routes obliques, le vaisseau incline considérablement, par la force du vent sur les voiles. Il faut alors considérer le vaisseau, ainsi incliné, comme dans sa position naturelle, que j'appellerai oblique. Le vaisseau ne sera pas moins sujet aux balancemens, dans cette position forcée, qu'il l'étoit dans sa position droite. Les balancemens fatigueront davantage la mâture, & seront plus à craindre par le péril de renverser. La stabilité est donc plus nécessaire pour les positions naturelles obliques que pour les droites. Mais lorsque la position naturelle est droite, si le vaisseau est balancé, il faut absolument que la force qui le repousse vers sa position naturelle, augmente à chaque nouvel incrément élémentaire d'inclinaison, sans quoi le navire seroit bientôt renversé. On conviendra sans doute, qu'il est bon de donner auxdites augmentations de force élémentaire le plus d'étendue qu'il est possible. Plus un vaisseau incliné trouve d'obstacle à s'incliner davantage, plus ses balancemens seront diminués. On peut entendre par le mot de *stabilité momentanée* le surcroit de la force requise pour ajoûter au vaisseau déja incliné un nouveau petit degré d'inclinaison constant, que nous avons exprimé ci-dessus par $d\sigma$. Dans ce sens on peut dire, qu'il résulte de la construction ordinaire du navire, que sa *stabilité momentanée* diminue à mesure que l'inclinaison du navire augmente; car, suivant cette construction, on se trouve assez dans le cas du §. XV, pour lequel le calcul nous a conduit au beau théorême marqué à la fin dudit §. XV, qui donne la stabilité (ce mot y est pris dans un autre sens, & il y exprime le *momentum* de la force qui repousse le corps vers sa position naturelle, lorsque l'angle de son inclinaison est $= \sigma$) égale à $P g$ $\sin. \sigma$, en entendant par P le poids du corps, & par g la hauteur de l'axe de la figure génératrice par-dessus le centre de gravité. Comme donc les quantités P & g sont constantes, la différentielle de ladite quantité devient $= P g d\sigma \cos. \sigma$; & cette formule nous apprend que la *stabilité momentanée* du navire diminue à mesure que l'inclinaison augmente, puisqu'elle est proportionnelle au cosinus de l'inclinaison actuelle. Cette diminution de stabilité peut sans doute occasionner de grands roulis. Il faut donc faire tout son possible pour que cette nouvelle espece de stabilité devienne, au lieu de diminuer, d'autant plus grande que le navire sera plus incliné. Les roulis vont souvent jusqu'à 35 degrés; un leger accident pourroit alors achever de renverser le vaisseau, s'il n'est retenu par une grande stabilité; d'ailleurs, le navire ne fera ces roulis énormes & les inclinaisons moyennes excessives, qu'à cause même de ladite diminution de stabilité, qu'on ne sauroit prendre trop de soin de prévenir.

§. XXXI. Examinons la cause qui fait que la stabilité en queſtion diminue; c'eſt que la ſection du navire à fleur d'eau demeure à-peu-près toujours la même, pendant que la hauteur verticale du centre de gravité du navire par-deſſus le centre de gravité de la carene homogene augmente. Cette derniere circonſtance, qu'on ne ſauroit prévenir, à moins qu'on ne vienne à bout de placer le premier centre de gravité plus bas que le ſecond, fait que la quantité à retrancher pour avoir la ſtabilité abſolue, devient d'autant plus grande, que le vaiſſeau eſt incliné davantage, & par conſéquent que la ſtabilité abſolue devient plus petite. Le moyen pour prévenir cette diminution de ſtabilité, ſera de faire enſorte que la ſection horizontale du vaiſſeau à fleur d'eau augmente à meſure que le vaiſſeau incline. C'eſt dans cette vue que je conſeille d'élever verticalement les flancs du vaiſſeau, tant au-deſſus qu'au-deſſous de la flottaiſon, puiſque de cette façon la coupe en queſtion augmente comme les ſecantes des inclinaiſons, & que la ſtabilité provenante de cette ſection augmente comme les cubes de ces ſecantes (§. IV). Si les conſtructeurs de vaiſſeau trouvent un tel changement exceſſif, ils pourront du moins diminuer la rentrée des vaiſſeaux, & conſerver un peu au-deſſous de la flottaiſon toute la largeur des coupes verticales perpendiculaires à la longueur. C'eſt pour faire voir le grand ſuccès qu'on peut ſe promettre d'un tel changement, que j'ai donné, au §. X, la petite table qui montre aſſez la grande différence entre les ſtabilités, lorſque les inclinaiſons commencent à devenir ſenſibles. On voit, par cette table, que la premiere eſpece de ſtabilité eſt pour une inclinaiſon de 20 degrés, augmentée par ce changement, en raiſon de 28, 50 à 51, 15; & que la ſeconde eſpece de ſtabilité, depuis 20^{d}. juſqu'à 25^{d}., eſt augmentée en raiſon de 35, 22 — 28, 50 à 81, 17 — 51, 15 ou en raiſon de 7, 72 à 30, 02. On remarquera, dans cette table, que les différences des nombres de la ſeconde & de la troiſieme colonne marquent les *ſtabilités momentanées*. Ces différences diminuent dans la ſeconde colonne, comme les coſinus des inclinaiſons ; mais elles augmentent conſidérablement, au lieu de diminuer, dans la troiſieme colonne. Je ne doute donc nullement qu'un tel changement, aſſez leger, ne diminue très-conſidérablement le roulis. La ſtabilité latérale étant augmentée, la longitudinale le ſera auſſi, puiſque celle-ci eſt proportionnelle à la largeur du vaiſſeau (§. IV). De là il ſuit que plus les roulis ſont grands, plus les tangages ſeront petits (car ces deux ſortes de balancemens peuvent fort bien coéxiſter en même tems), parce que les roulis augmenteront la ſtabilité longitudinale.

§. XXXII. Tant qu'on conſidere à part les deux membres de la formule qui exprime la ſtabilité, on voit facilement que nous avons indiqué actuellement tout ce qu'il eſt poſſible de faire pour augmenter la ſtabilité, rélativement au premier membre ; car toutes les parties du navire qui ne plongent jamais dans l'eau, de même que celles qui n'en ſortent jamais, n'ont aucune relation avec la ſtabilité qui réſulte de la valeur du premier membre. Ce n'eſt qu'en tant qu'elles font varier les deux centres de gravité, qu'elles pourront augmenter ou diminuer la ſtabilité, comme le ſecond membre de la formule l'indique. La ſtabilité rélative à ce ſecond membre, eſt exprimée par $\int P\,s\,d\sigma$, en entendant par P le poids du navire, ou le volume de la carene, & par s la hauteur du centre de gravité du navire par-deſſus le centre de gravité de la carene homogene ; & la *ſtabilité momentanée* eſt ſimplement exprimée par Ps. Ce ſecond membre doit toujours être retranché du premier, tant que le premier centre de gravité eſt plus haut que le ſecond ; & il faudroit trop s'écarter des principes uſités, pour qu'il fût plus bas. Ainſi, pour rendre la ſtabilité abſolue plus grande, il faut diminuer la quantité Ps. C'eſt ce précepte général qu'il ne faut jamais perdre de vue en construisant le vaisseau. Il faut donc baisser le centre de gravité du navire tout chargé qu'il est, & hausser le centre de gravité de la carene tant qu'il est possible. Le centre de gravité du navire est ordinairement autour d'un cinquieme du tirant d'eau plus bas que la surface d'eau. Sur ces préliminaires, voici les maximes qu'on pourra suivre.

(*a*) Il faut ménager également la hauteur & la matiere dans toutes les parties qui sont au-dessus de la surface d'eau, autant que les circonstances peuvent le permettre. J'entens ici les mâts, les vergues, les voiles, les cordages, les châteaux, &c. Il semble que la hauteur des mâts n'est dictée que par la hardiesse de l'homme, trop souvent funeste au genre humain.

(*b*) Le lest doit servir en quelque façon de contrepoids à toutes ces parties indiquées dans la remarque précédente : il faut le proportionner en partie à la hauteur des mâts. S'il y avoit donc quelque chose à gagner au sujet de la remarque (*a*), on gagneroit en même tems sur le lest requis ; le navire enfonceroit moins ; la résistance des eaux contre le sillage en deviendroit plus petite : on seroit dédommagé, en partie, de ce qu'on se relâcheroit sur la hauteur des mâts.

(*c*) En se mettant dans les circonstances qui demandent moins de lest, le poids P diminue, & la quantité Ps en devient d'autant plus petite, comme nous le souhaitions.

(*d*) Il faut prendre du bon lest, pour pouvoir placer plus bas son centre de gravité pour le même poids. Enfin on se conformera aux principes connus de la Statique, dans l'arrimage & dans l'arrangement de la charge.

§. XXXIII. Il ne nous reste qu'à examiner la figure la plus convenable de la carene, en supposant sa surface horizontale donnée, comme ayant déja été déterminée. Plus on l'élargira vers la flottaison, & plus on la rétrécira vers

vers la quille, plus on élevera le centre de gravité de la carene homogene. Plus aussi le navire tirera d'eau sans changer le volume de la carene, plus on augmentera le *momentum* du lest. Voilà les deux considérations principales à faire sur la carene, ou du moins sur cette partie de la carene qui, pendant les plus grands roulis, reste constamment submergée, puisque cette partie ne peut avoir aucun rapport avec le premier membre de la formule qui exprime la stabilité. Il résulte de ces considérations, que depuis la flottaison on doit conserver aux navires toutes leurs largeurs jusqu'à une certaine profondeur. Cette premiere réflexion s'accorde heureusement avec le conseil que j'ai donné au commencement du §. XXX, de faire les flancs du vaisseau, tant au-dessous qu'au-dessus de la flottaison, droits & verticaux. A une certaine profondeur, on commencera à retrécir sensiblement les coupes verticales & perpendiculaires à la longueur du navire. Vers les deux tiers de la profondeur, on les retrécira brusquement. On pourra enfin donner à la courbure un point d'inflexion contraire, & faire diminuer très-peu jusqu'à la quille ces petites largeurs destinées à recevoir un bon lest. Je dirai ci-dessous un autre avantage essentiel qu'on donnera à la carene par une telle construction, les loix de la Théorie ne laissant pas douter du bon succès d'une telle construction à l'égard de notre sujet; mais je ne prétens pas qu'on les suive aux dépens des Loix de l'Architecture Navale absolument constatées, me contentant d'indiquer tous les principes qui méritent l'attention du constructeur. Voici quelques réflexions générales sur la figure de la carene. Si on partage la carene toute chargée, en tranches horizontales, les tranches inférieures seront plus pesantes qu'un volume égal d'eau, & les supérieures seront plus légeres, parce qu'on doit arranger, suivant l'ordre de la pesanteur, tout ce qui doit être mis sur le vaisseau, en tant qu'on est libre sur ce point. Il y aura donc une tranche moyenne qui fera égale en poids au volume d'eau égal. Cependant il faut considérer le volume de la carene comme donné, parce qu'il n'eſt queſtion que de la figure de la carene. Il me ſemble qu'il convient d'eſtimer ladite place de la tranche moyenne, de conſerver aux vaiſſeaux preſque toute leur largeur, juſqu'aux environs de ladite tranche; mais après cela on diminuera ſubitement les largeurs, pour ne plus employer le reſte du volume de la carene qu'en profondeur. Plus on voudra accorder de profondeur à la carene, plus on pourra donner de ſtabilité au navire, tout le reſte demeurant égal. C'eſt pourquoi il faut plus de leſt aux navires qui ſont plats de varangues, qu'aux autres, qui ſont bien taillés, & dont les fonds ſont fins. On ne doit applatir les navires par leur fond, que lorſqu'on eſt dans la néceſſité de donner au navire peu de tirant d'eau. Je voudrois même, lorſqu'on ſe trouve dans cette néceſſité, qu'on augmentât un peu au-delà des regles ordinaires la largeur du navire, pour pouvoir lui donner plus de façon, ſans changer la ſolidité de la carene, d'autant plus que le navire en recevra pluſieurs autres avantages. En un mot, on prendra pour maxime de jetter beaucoup de volume vers le haut, & beaucoup de poids vers le bas; mais comme on s'écarteroit infiniment des loix de l'Architecture Navale, ſi on ne vouloit ſuivre que ce ſeul principe pour déterminer la figure de la carene, & que cependant on a la liberté de l'obſerver juſqu'à un certain point, je me contenterai de l'avoir indiqué, en recommandant la profondeur de la carene, pour augmenter par-là l'effet du leſt, comme auſſi de ne commencer les rétréciſſemens que vers la région deſtinée à contenir les choſes peſantes. J'ai déja remarqué que le dernier conſeil s'accorde heureuſement avec ce que j'ai dit, de faire les flancs du vaiſſeau, tant au-deſſous qu'au-deſſus de la flottaiſon, droits & verticaux; & comme la coupe horizontale du navire à fleur d'eau doit auſſi, en vertu du §. XXVIII, approcher de la figure rectangulaire, il en réſulte que près de la flottaiſon le corps du navire doit former à-peu-près un parallelepipede convenablement arrondi par les coins. J'excepte cependant de cette regle la proue & la pouppe, ſur leſquelles je me réſerve quelques petites réflexions particulieres, que j'expoſerai vers la fin de ce Mémoire.

CHAPITRE IV.

Remarques ſur l'axe de rotation autour duquel ſe font les balancemens du navire, avec quelques autres moyens de diminuer ces balancemens.

§. XXXIV. UN navire incliné ſe rapproche de ſa poſition droite par un mouvement de rotation, & nous devons tâcher de connoître l'axe de cette rotation, c'eſt-à-dire la ligne qui, durant les balancemens, n'a aucun mouvement horizontal. Les Auteurs ne conviennent pas ſur la poſition de cet axe, & il me ſemble que c'eſt pour n'avoir pas diſtingué les cas qui peuvent arriver. Quelques-uns le font paſſer par le centre de gravité du navire, & d'autres le placent autrement. Qu'on me permette de traiter en peu de mots cette queſtion.

On peut conſidérer, dans cette queſtion, toute la matiere du corps comme concentrée dans un ſeul & même plan vertical, que je ſuppoſe être le plan de rotation. Pour les roulis, on pourra choiſir la premiere coupe verticale du vaiſſeau perpendiculaire à la longueur. Pour connoître ſur quel point ce plan, venant à faire des balancemens, tournera; je dis qu'il faut diſtinguer les balancemens & leurs cauſes. Suppoſons d'abord ledit plan détourné de ſa poſition droite & naturelle dans des eaux parfaitement calmes, & que tout d'un coup les cauſes qui ont détourné le plan viennent à ceſſer; en ce cas le plan fera des balancemens que je considere se faire avec une liberté entiere, & que j'appellerai par conséquent balancemens *libres*. Je dis que dans ces balancemens le centre de rotation sera nécessairement le centre de gravité, & voici comme je le prouve.

Durant les balancemens *libres*, il n'y a absolument que la force de la pesanteur qui agisse sur les parties. Une telle force agissant verticalement, ne sauroit produire aucun mouvement horizontal absolu; il faut donc que la quantité de mouvement horizontal de droite à gauche soit précisément égale à celle qui se fait de gauche à droite: il faut, en un mot, que le centre de gravité n'ait aucun mouvement horizontal; donc le centre de gravité sera le centre de rotation.

On pourroit objecter ici que quand même le centre de gravité du plan auroit un mouvement horizontal, il ne s'en suivroit pas qu'il y eût dans le sistême une quantité de mouvement horizontal absolu, parce que le centre de gravité commun au plan & à l'eau qui l'environne, ne laisse pas de demeurer entierement en repos par rapport au mouvement horizontal. Mais on voit assez qu'il ne s'agit pas ici dudit centre de gravité commun, puisque pour donner un mouvement horizontal à un corps flottant, il faudra toujours employer une force horizontale; & que rien ne peut occasionner ici une telle force, tant qu'on fait abstraction de la résistance des eaux.

Voici un autre principe, qui mene à la même conclusion. Le *momentum* de la force qui agit sur le plan durant ses balancemens, est le même, sur quel point que ce plan se tourne, puisque l'expression de ce *momentum* est indépendante du centre de rotation. Il est donc clair que le centre de rotation se placera de lui-même là où le plan aura la moindre inertie pour recevoir le même degré de vitesse angulaire (je considere la vitesse angulaire, parce que l'amplitude angulaire des balancemens doit être la même, quel que soit le centre de rotation); & il n'est pas difficile de démontrer que c'est le centre de gravité qui a cette propriété réquise. Tout corps qui doit être tourné sur un certain axe par une force donnée, agissant sur un levier donné, ou bien appliquée à une même distance, depuis l'axe de rotation, aura la moindre inertie angulaire, & recevra dans un tems donné la plus grande vitesse angulaire, lorsqu'on fait passer l'axe de rotation par le centre de gravité du corps. Je n'ajoûte pas la démonstration de cette proposition méchanique, parce que, quoiqu'assez facile, elle ne laisse pas de demander plusieurs éclaircissemens, qui pourroient nous écarter trop de notre sujet principal.

§. XXXV. Mais il n'arrivera pas toujours, ou pour mieux dire, il arrivera rarement que le vaisseau fasse des balancemens *libres*. Les eaux ne sont point calmes; elles sont agitées, & n'agissent pas simplement par le principe de la pesanteur sur le navire; elles pourront agir d'une infinité d'autres manieres. En ces cas, il faut considérer la direction moyenne de toutes les impressions de l'eau contre le navire. Si cette direction moyenne prolongée passe au-dessous du centre de gravité du navire, le centre de rotation momentanée sera au-dessus, & réciproquement. On peut appliquer ici toute la théorie de la percussion excentrique, exposée dans le IX^e Tome des Mémoires de l'Académie de Petersbourg, servant pour l'année 1737, p. 189. Le théorême principal de cette théorie est, que si un corps, dont on ne considere que l'inertie, est animé par une puissance dont la direction ne passe pas par le centre de gravité du corps, il faut tirer une ligne par le centre de gravité du corps perpendiculaire à la ligne qui marque la direction de la puissance; que par le point d'intersection de ces deux lignes, il faut tirer une ligne perpendiculaire au plan de rotation; considérer ensuite le corps comme suspendu par cette derniere ligne horizontale, comme par un axe ; du corps ainsi suspendu, il faut prendre le centre d'oscillation ; & c'est ce point autour duquel le corps tournera, ou plutôt autour de la ligne parallele à l'axe de suspension, & qui passe par ledit centre d'oscillation. Quelques Auteurs ont ensuite nommé le centre sur lequel le corps animé par la puissance excentrique tourne, le centre de rotation spontanée.

C'est donc ce point sur lequel le navire tournera, entant qu'il est agité par l'impulsion des eaux. Or on sait, par les théorêmes du grand Huguens, que la distance du centre de gravité à l'axe horizontal de suspension, & la distance du même centre au centre d'oscillation, sont réciproquement proportionnelles. Plus donc la direction de l'impulsion moyenne passe près du centre de gravité, plus l'axe de rotation *spontanée* sera éloignée du centre de gravité, & réciproquement ; & si la premiere distance est nulle, l'autre sera infinie. La vérité de cette conclusion est bien palpable ; car lorsque l'impulsion moyenne des eaux passe par le centre de gravité du navire, son effet ne peut être que celui d'emporter horizontalement le navire, sans lui faire faire aucune rotation ; ce qui marque que la distance du centre de rotation est infinie. Lorsque la direction de l'impulsion moyenne est à une grande distance du centre de gravité, le centre de rotation sera très-près du centre de gravité ; l'impulsion ne causera presque aucun mouvement progressif, & son effet sera tout employé à faire tourner le navire. Tel est l'effet d'un coup de vent sur les voiles, parce que l'impulsion moyenne est extrêmement éloignée du centre de gravité du navire ; c'est pourquoi ces coups de vent sont fort dangereux ; aussi ne manque-t-on pas de caler vitement les voiles quand on les appréhende. Dans l'instant que les impulsions contre les navires cessent, celui-ci ne tournera plus que sur son centre de gravité ; mais cependant le mouvement horizontal, que le centre de gravité aura acquis, continuera jusqu'à ce que des impulsions contraires commencent à agir contre le navire (car ces impulsions ne sauroient manquer d'être réciproques); à arrêter son mouvement horizontal; & enfin à lui imprimer un mouvement contraire. On voit par-là que le navire, outre les balancemens de rotation, fera toujours des allées & venues horizontales. Ce sont sans doute ces mouvemens horizontaux & réciproques, qui, mêlés avec le sillage moyen, occasionnent ces élans qu'on remarque; les allées & venues horizontales seront d'autant plus grandes, que la direction de l'impulsion moyenne passera plus près du centre de gravité, & les balancemens de rotation en seront d'autant plus petits.

§. XXXVI. Il résulte de ces principes, qu'outre les balancemens *libres* qui se font autour du centre de gravité, il y a une autre espece de balancemens, que j'appellerai *forcés*, qui se font autour du centre de rotation *spontanée*. Ce dernier centre sera extrêmement variable, à cause de la variabilité des forces momentanées, qui causent les balancemens *forcés*.

Une remarque essentielle à faire sur les balancemens *forcés*, est qu'ils ne font à chaque instant qu'un mouvement composé d'un mouvement de rotation autour du centre de gravité, & d'un mouvement parallele. Soit pd (Fig. IV) la direction de la force moyenne qui agit sur la carene; soit le centre de gravité du vaisseau en c, & que par ce point c on tire une ligne ae perpendiculaire à pd. Si on fait abstraction de l'action de la pesanteur, & si on considere simplement l'inertie de la matiere, la force pd fera prendre à la ligne ae, après un petit tems donné, la position fh; le point d'intersection b sera le centre de rotation spontanée. On voit d'abord que le mouvement, par lequel la ligne ae prend la situation fh,

peut

peut être résolu en deux mouvemens, par le premier desquels la ligne ae garde le parallelisme, & prend la situation ln, en jettant le centre de gravité de c en g; pendant que par le second, la ligne ae tourne autour du centre de gravité c, de maniere que ln, par cette rotation, prenne la situation fh. Ainsi cg mesurera la vitesse du mouvement parallele, & l'angle fgl mesurera la vitesse angulaire de la rotation. La proportion de ces vitesses sera la même pour la même direction pd; mais plus la force moyenne est grande ou petite, plus l'une & l'autre vitesse seront grandes ou petites. Pour déterminer le point b, je dis que ce point b est le centre d'oscillation, si le navire étoit suspendu par le point d. Soit m une ligne constante, & $cd = x$; on aura, par la nature du centre d'oscillation, $bc = \frac{mm}{x}$. Soit aussi cg, qui exprime la vitesse du centre de gravité, $= c$; on voit que la même cg, rapportée au rayon bc, ou bien bm rapportée au rayon gm, exprime la vitesse angulaire. Mais comme la ligne bc se regle sur la ligne cd, que je regarde comme variable, il sera bon de rapporter les vitesses angulaires à un rayon constant a, par cette analogie, $bc : cg :: a : \frac{cg}{bc} \times a = \frac{ax}{mm} c$. Ainsi la vitesse du centre de gravité étant $= c$, la vitesse angulaire ou rotatoire autour du centre de gravité, sera toujours exprimée par $\frac{ax}{mm} c$.

§. XXXVII. Nous voyons par-là que les balancemens du navire autour du centre de gravité, produits par les impressions des eaux agitées, sont proportionnels à la distance x, ou à la distance du centre de gravité depuis la direction de la force moyenne; & que si depuis le centre de gravité on prend une distance a, la vitesse de la rotation sera pour cette distance $= \frac{ax}{mm} c$. Ici il convient d'expliquer encore ce que c'est que la conſtante m que nous avons introduite ; c'eſt la moyenne proportionnelle ente $b\,c$ & $c\,d$. Soit donc $o\,c$ égale à cette moyenne proportionnelle, ce point o aura pour tous les corps deux propriétés remarquables; la premiere eſt que ſi on ſuſpend le corps par un axe perpendiculaire au plan de la figure paſſant par le point o (ou par un point quelconque pris dans la circonférence du cercle décrit autour du centre c par le rayon $c\,o$), il fera ſes balancemens brachyſtochrones, c'eſt-à-dire, de moindre durée que s'il étoit ſuſpendu par tout axe parallele. La ſeconde propriété du point o eſt, qu'il eſt en même tems le centre des forces vives, lorſque le corps tourne autour d'un axe paſſant par le centre de gravité c; c'eſt-à-dire, que ſi toute la matiere étoit concentrée au point o, la force vive ſeroit la même que celle du corps. De cette derniere propriété on voit, que plus les extrêmités du corps, tournant autour du centre de gravité, ſont chargées de matiere, plus le point o ſera éloigné du point c, & plus par conſéquent la ligne m devient grande. Tâchons à préſent de mettre à profit la théorie que nous venons d'expoſer.

§. XXXVIII. Nous avons dit que l'effet des impulſions réciproques des eaux contre la carene, eſt en partie de lui faire faire des allées & venues par un mouvement parallele, & en partie à faire tourner le navire autour du centre de gravité; le premier effet n'a abſolument aucun inconvénient, & le ſecond eſt le ſeul qu'on prétend de diminuer. Mais nous avons vu, dans le précédent article, que le mouvement de rotation réſultant de l'impulſion des eaux, eſt exprimé par $\frac{a\,x}{m\,m}\,c$; pour faire que ce mouvement ait le moins de rapport à l'effet total, il faut que la quantité $\frac{x}{m\,m}$ ſoit la plus petite qu'il eſt poſſible; & de-là nous tirerons ces deux maximes, premierement d'augmenter la ligne m, & en ſecond lieu de diminuer la ligne x, ſi l'on voit quelque moyen à cela. La premiere maxime demande d'éloigner la matiere du centre de gravité le plus qu'on peut; c'est ce que j'ai démontré dans le précédent article. Effectivement, si toute la matiere du navire étoit concentrée au centre de gravité, tout l'effet de l'impulsion tant soit peu excentrique consisteroit à faire tourner le navire sur son centre de gravité. En suivant cette maxime, on augmente en même tems l'inertie de la matiere; l'effet de chaque impulsion sera diminué, outre que les balancemens libres en seront rallentis. Mais y auroit-il aussi quelque moyen de diminuer la quantité x, c'est-à-dire, de faire passer la direction de l'impulsion moyenne près du centre de gravité du navire? On peut remarquer sur cela que si la carene étoit une portion de sphere dont le centre fût en même tems le centre de gravité du navire, non-seulement la direction de l'impulsion moyenne passeroit par le centre de gravité, mais même la direction de chaque petite impulsion; parce que toute impulsion se fait perpendiculairement à la surface. Mais on voit aussi qu'un tel corps n'auroit plus aucune force de stabilité. Un autre principe se oit de faire ensorte que le *momentum* de toutes les impulsions dont les directions passeroient au dessus du centre de gravité, devint plus égal au *momentum* de toutes les impulsions dont les directions passeroient au-dessous. S'il y a quelque profit à espérer de ce principe, ce ne sera que sur un grand nombre d'observations & d'expériences faites, par des gens entendus, sur la nature des agitations de l'eau: la place du centre de gravité, la profondeur ou le creux de la carene, & sa figure, ne sont pas assez déterminés par les autres considérations, qu'on n'y puisse avoir égard au principe de rapprocher les deux *momentum* que je viens d'indiquer. Si les impulsions de l'eau sont tout-à-fait irrégulieres, elles ne pourront jamais causer de grands balancemens; & si elles sont régulieres & assujetties à de certaines loix, il faudroit tâcher d'en connoître la nature, ſavoir à quelle profondeur elles ont le plus de force, & comment elles diminuent vers la quille & vers la ſurface de l'eau; comment elles peuvent différer entre elles d'un tems à l'autre & d'une mer à l'autre, ſuivant que les agitations des eaux ſont plus ou moins fortes, & les lames plus ou moins grandes. Si on étoit un peu inſtruit ſur ces points, & ſur quelques autres d'une même nature, je ne doute pas qu'on n'en pût profiter, rélativement à notre derniere remarque. Je reprendrai cette matiere dans le chapitre ſuivant.

Un autre moyen pour diminuer les balancemens des navires, eſt celui de la réſiſtance des eaux. M. Chauchot l'a expoſé dans ſon Mémoire couronné. Ce nouveau principe me paroît fort convenable, à cauſe de la nature de la réſiſtance des fluides, qui agit à fort peu près en raiſon quarrée des viteſſes; elle ne ſauroit donc mettre aucun obſtacle au navire à ſe relever, après avoir achevé ſon excurſion, parce qu'alors la viteſſe eſt nulle; au contraire, lorſque le vaiſſeau eſt près de ſa poſition naturelle, les eaux s'oppoſent avec le plus de force pour l'empêcher d'outrepaſſer cette poſition, & s'efforcent à l'y retenir. La réſiſtance des eaux n'agit jamais qu'avec avantage, & il faut ſurtout en profiter à l'égard des roulis. Ceux-ci ſe font preſque avec une liberté entiere, à cauſe de la figure arrondie de la carene, & du peu d'éloignement qu'il y a depuis l'axe de la carene, conſidérée comme ſphéroïdique, à l'axe de rotation qui paſſe par le centre de gravité du navire parallele à l'axe de la figure. Auſſi voit-on que les roulis ſe font avec tant de liberté, qu'ils ſe continuent d'eux-mêmes pendant aſſez longtems, pendant que la ſeule réſiſtance des eaux arrête tout d'un coup le tangage, qui ne ſauroit ſe renouveller ſans une nouvelle attaque.

§. XXXIX. Pour mettre ce moyen, fondé ſur la réſiſtance des eaux, à profit contre les roulis, il faut ſaire attention à la configuration de la carene & à la poſition de l'axe de rotation, qui doit paſſer par le centre de gravité du vaiſſeau; & alors on verra facilement ſur quelle partie les eaux portent le plus de réſiſtance. Je rrouve en général, que c'eſt la hauteur de la quille, & les acculemens qu'on donne aux varangues, qui produiſent la plus grande réſiſtance des eaux dans les roulis. La maitreſſe varangue n'a que très-peu d'acculement, mais ces acculemens augmentent à meſure que les varangues avancent vers la proue & vers la pouppe. Par cette conſtruction, il provient comme une bande des façons, ſoutenue verticalement par la quille, dont les deux côtés ſont comme deux plans verticaux. Cette bande des façons échancrée, choque directement les eaux pendant les roulis, conjointement avec les côtés verticaux de la quille.

On augmentera donc la réſiſtance des eaux contre les roulis, en augmentant les acculemens, les hauteurs des façons, & la hauteur de la quille; par-là on diminuera en même tems la dérive dans les routes obliques. Le reſte de la carene eſt trop arrondi, & l'axe de rotation trop près de l'axe de l'arrondiſſement, pour en attendre une grande réſiſtance. En examinant la dite bande des façons, il paroît que les deux parties, depuis la maitreſſe varangue juſqu'aux deux extrêmités, ſont aſſez inégales; celle de l'arriere étant plus longue & plus haute que celle d'avant, ne ſauroit manquer de trouver plus de réſiſtance. Il me ſemble que cette inégalité doit cauſer un mouvement de nutation horizontale dans les navires, lorſqu'ils roulent conſidérablement, & que cette nutation doit être nuiſible au ſillage. Je voudrois que les conſtructeurs examinaſſent ſcrupuleuſement, ſi les raiſons qu'ils alléguent pour donner une pente à la quille de la proue vers la pouppe, pour mettre la maitreſſe varangue plus près de la proue que de la pouppe, & pour donner plus d'acculement aux varangues de l'arriere qu'à celle de l'avant, sont bien réelles & suffisantes pour l'emporter sur les raisons contraires. Si la quille étoit horizontale, & que les deux parties fussent égales & semblables, la barde des façons d'avant en seroit augmentée, les deux demi-bandes deviendroient égales, & on éviteroit ladite nutation. Je dirai encore, à l'occasion de cette résistance, que celle de l'air contre les voiles peut faire le même effet. Les Marins assurent que le navire roule plus avec un vent arriere, & qu'il tangue plus au plus près. C'est apparemment parce que l'air, dans le premier cas, s'oppose moins aux voiles pendant que le vaisseau roule, que pendant qu'il tangue; & que dans le second cas, c'est le contraire. Si cela est vrai, on peut encore se servir souvent des voiles pour modérer les balancemens du navire, surtout dans les calmes, pendant lesquels le navire roule quelquefois excessivement.

§. XL. Un remede bien sûr pour diminuer le roulis, est d'appliquer aux flancs du vaisseau deux ou trois bandes saillantes & horizontales un peu au-dessus de la flottaison. De telles bandes agiront par deux principes à la fois; car lorsque, pendant le roulis, elles atteignent les eaux, elles les frappent d'abord par leur saillant, & puis forment cette résistance dont je viens de parler; & aussitôt qu'elles sont submergées, il survient un nouvel accroissement de poussée d'eau de bas en-haut, qui n'agissant que d'un côté, emploie tout son effet à relever le navire. Je suis persuadé qu'avec une telle bande de chaque côté, dont la saillie & la hauteur fût un peu considérable, on pourra parvenir à borner les roulis dans de certaines limites. Un navire, dans ses roulis excessifs, fait quelquefois jusqu'à 35 ^{d}. d'excursion de chaque côté, & alors ces roulis sont certainement dangereux. Je crois qu'avec tous les moyens que j'ai exposés, on diminuera aisément jusqu'à 25 ^{d}. les plus grands roulis, & ainsi la plus haute bande (si on en veut employer plus d'une) sera placée au-dessus de la flottaison, tout au plus de la hauteur de la cinquieme partie de la largeur, sans quoi elle pourroit devenir inutile à l'égard des roulis; c'est aussi jusqu'à cette hauteur, du moins, que je conseille de ne donner aucune rentrée aux coupes verticales du vaisseau faites perpendiculairement à la longueur.

§. XLI. Les bandes saillantes, dont je viens de parler, ne sauroient manquer d'être en même tems d'un grand secours contre le tangage, si on les prolonge jusqu'aux extrêmités des flancs, surtout si on vouloit augmenter leur largeur ou leur saillie à mesure qu'elles approcheroient de la proue & de la pouppe; ce qu'on obtiendroit si on faisoit leurs côtés opposés aux flancs entierement droits, puisque les côtés appliqués aux flancs auront toujours quelque concavité, malgré le conseil que j'ai donné ci-dessus d'approcher la section horizontale du vaisseau à fleur d'eau de la figure rectangulaire. Ces bandes ou ces aîles seroient naturellement hors de l'eau, & ne seroient par conséquent en aucune façon nuisibles aux autres qualités du navire, pendant que par leurs extrêmités élargies, elles s'opposeroient efficacément au tangage, aussitôt qu'elles atteindroient aux eaux, & cela par le double principe que j'ai exposé dans le précédent article. Je prie donc les Constructeurs de faire quelque attention à ce moyen, & de juger par eux-mêmes jusqu'à quel degré on peut l'embrasser, sans tomber dans des inconvéniens. C'est toujours avec cette réserve que je propose mes moyens.

§. XLII. Considérons enfin ces cas fâcheux dont j'ai parlé au §. XXIII & les suivans, jusqu'à la fin du chapitre, où j'ai fait voir que les roulis ne sauroient manquer d'être extraordinairement forts, lorsque le tems θ est à peu-près égal au tems t; c'est-à-dire lorsque les *roulis forcés* sont à-peu-près de même durée avec les *roulis libres*. J'espere qu'on ne voudra pas traiter mes théorêmes ſur cette matiere de ſpéculations purement hypotétiques, ou du moins mal appliqués à notre ſujet. L'expérience phyſique, alléguée à la fin du §. XXIII, en prouve aſſez la réalité. D'ailleurs, perſonne n'ignore qu'un ſon fort met en vibrations très-ſenſibles une corde tendue à l'uniſſon, pendant que toute autre corde ne fait aucune vibration ſenſible. C'eſt ici abſolument notre cas. Le ſon forme des ondulations de l'air, comparables aux ondes de la mer. Ces ondulations de l'air mettent la corde dans des vibrations, parce que les allées & venues de la corde ſont iſochrones avec les mêmes ondulations, & que la force motrice conſpire toujours avec le mouvement de la corde. Les ondes de la mer feront le même effet ſur un navire mis à l'iſochroniſme avec le mouvement réciproque des ondes, comme il l'eſt lorſque ſes balancemens *libres* ſont de même durée que les balancemens des eaux, ou bien que les balancemens *forcés* du navire. Auſſi a-t-on remarqué ſouvent, qu'un navire rouloit extraordinairement lorſqu'on ne voyoit rien d'extraordinaire ni dans la force du vent, ni dans les agitations des eaux. N'auroit-on jamais remarqué que de deux vaiſſeaux inégaux l'un rouloit quelquefois plus extraordinairement que l'autre, quoiqu'ils fuſſent l'un & l'autre dans les mêmes circonſtances ? Je vois bien que ces roulis extraordinaires & exceſſifs doivent être rares, parce qu'il faut que non-ſeulement les balancemens des eaux ſoient ſynchrones avec les balancemens *libres* du navire, mais encore que les forces motrices ſoient pendant quelque tems uniformes & permanentes. Cependant tout cela peut arriver ; & comme notre ſujet demande de remédier aux roulis exceſſifs, nous devons examiner s'il n'y a abſolument aucun moyen particulier pour cela.

§. XLIII. Remarquons dabord que les moyens que nous avons déja donnés, ne manqueront pas de modérer auſſi ces roulis extraordinaires ; mais je ſuis perſuadé que

que si on pouvoit mettre quelque achronisme entre les deux especes de balancemens, ou du moins troubler cette harmonie qu'il y a entre les accès des forces motrices & les balancemens du vaisseau, ceux-ci en seroient aussitôt considérablement diminués. Je crois qu'on y arrivera en remuant habilement & à propos le gouvernail, tantôt à droite, tantôt à gauche; c'est une manœuvre qu'on devroit étudier, si elle peut être utile; sur quoi je m'en rapporte aux experts. Je crois aussi qu'il sera toujours bon de connoître exactement pour chaque vaisseau la durée d'un balancement entierement libre; il en faudroit faire l'essai dans le port même. deux bandes d'hommes opposées pourront, moyennant deux longues cordes attachées au mât, ébranler assez sensiblement le navire, par des efforts duement appliqués, pour distinguer les roulis; alors je voudrois qu'on en comptât le nombre pour trois ou quatre minutes de tems. Si on pouvoit parvenir à exciter de grands roulis, on pourroit alors reconnoître l'achronisme qu'il y auroit entre les grands roulis & les petits. Ensuite de quoi on pourra toujours, dans l'occasion, comparer les balancemens actuels ou *forcés* avec les balancemens *libres*, en comptant les premiers pour une ou deux minutes de tems.

Si le navire est irrégulierement balotté, ces agitations, à mon avis, ne pourront pas être fort grandes, & elles ne sont pas dans le cas dont nous parlons; mais lorsque les roulis sont réguliers & uniformes en durée & en grandeur, on saura s'ils avancent ou retardent sur les roulis libres; & je présume que l'un & l'autre peut arriver. S'ils avancent, il faudra tâcher de retarder davantage les roulis *libres*; & s'ils retardent, il conviendra d'accélérer ces roulis: une très-petite accélération ou retardation des roulis libres, pourra faire ici quelque effet. On remarquera à ce sujet, qu'on retardera les roulis *libres*, tant en diminuant la stabilité, qu'en augmentant l'inertie du navire roulant. Quant à la ſtabilité, on ne pourra pas la faire changer autrement qu'en changeant la hauteur du centre de gravité par-deſſus le centre de la carene homogene; ſi on augmente cette hauteur, on diminue la ſtabilité, & réciproquement. On peut hauſſer le centre de gravité par-deſſus le centre de la carene, en plaçant plus haut tout ce qui eſt mobile, & qu'on pourra remuer commodément; & comme dans ces cas la grandeur des roulis n'eſt pas cauſée par aucun défaut de ſtabilité, un tel changement pourra ſe faire ici ſans tomber dans de nouveaux inconvéniens. S'il s'agiſſoit d'accélérer les roulis libres, il faudroit faire tout le contraire.

Quant à l'inertie du navire roulant, on l'augmentera en éloignant tout ce qui eſt mobile de l'axe de rotation, qui paſſe par le centre de gravité; & comme l'inertie des parties augmente en raiſon quarrée de leurs diſtances à l'axe de rotation, un tel éloignement en fera d'autant plus d'effet. On hauſſe encore le centre de gravité en hauſſant les vergues & les voiles, auſſi-bien qu'en mouillant ou *empeſant* les voiles. La ſtabilité diminue & l'inertie augmente.

§. XLIV. Voyons enfin ce qui doit arriver, quand on augmente ou diminue la charge du vaiſſeau. Soit la coupe horizontale du navire à fleur d'eau $= S$, & conſidérons-la comme demeurant la même, pendant qu'on augmente ou diminue la charge, conformément au conſeil que j'ai donné de faire les flancs droits & verticaux. Soit la ſolidité de la carene $= aS$, & que dans cet état la diſtance du centre de gravité à la ſurface de l'eau ſoit $= b$ (je ſuppoſe ce point plus bas que la ſurface de l'eau), & la diſtance du centre de gravité de la carene homogene depuis la ſurface de l'eau $= c$. Qu'on augmente enſuite la charge juſqu'à rendre la ſolidité de la carene $= aS + \alpha S$. Pour connoître l'effet que fera la nouvelle charge ſur le navire, il faut ſavoir l'endroit où l'on placera cette nouvelle charge, ou plutôt son centre de gravité; supposons cet endroit plus bas que n'étoit auparavant le centre de gravité du navire, de la hauteur β. Sur cela les regles de la Statique donnent la hauteur de la surface d'eau par-dessus le centre de gravité, après l'augmentation de la charge, $= b + \alpha + \frac{\alpha}{a + \alpha}\beta$, & la hauteur de la surface de l'eau par-dessus le centre de gravité de la carene homogene, $= c + \alpha - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha}{a + \alpha}$. Ainsi la hauteur du centre de gravité du navire par-dessus le centre de gravité de la carene, est avant l'augmentation de la charge $= c - b$, & après l'augmentation, $= c - b - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \beta\alpha}{a + \alpha}$. Ainsi cette hauteur devient plus petite par l'augmentation de la charge tant que β est affirmatif. En considérant la quantité α comme fort petite, il faudroit que β fût $= - c$ pour que la distance entre les deux centres de gravité fût la même avant & après l'augmentation de la charge; c'est-à-dire, qu'en plaçant la nouvelle charge autant au dessus du centre de gravité du navire, que la surface de l'eau étoit élevée par-dessus le centre de gravité de la carene. On voit ici le grand effet du lest pour approcher le centre de gravité du navire du centre de gravité de la carene. Car supposons un navire avec toute sa charge & non lesté, & qu'on ait dans cet état $a = 10$ piés, $c = 6$ piés: qu'on leste ensuite le navire, & que la quantité du lest fasse la cinquieme partie du poids de tout le reste du navire chargé; on aura $\alpha = 2$ p.; & comme ce lest est placé au fond de cale, on pourra supposer $\beta = 14$ p. Ces suppositions, qui ne sont pas incongrues, font la quantité $\frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \beta\alpha}{a + \alpha} = 3\frac{1}{2}$ p.

De forte que le centre de gravité du navire s'approche de celui de la carene de trois piés & demi par le left. Voilà le changement qui arrive à l'égard de la diftance mutuelle des deux centres de gravité en queftion ; mais comme le fecond membre de la formule qui exprime la ftabilité eft proportionnel à la folidité de la carene multipliée par la haureur entre les deux dits centres, il faut, pour voir fi la ftabilité croît ou décroît par l'augmentation de la charge, multiplier $c - b$ par aS, & $c - b - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \beta\alpha}{a + \alpha}$ par $aS + \alpha S$; le premier produit eft $caS - baS$, & le fecond produit eft $caS - baS - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \beta\alpha}{a + \alpha} aS + c\alpha S - b\alpha S - \frac{c\alpha + \frac{1}{2}\alpha\alpha + \beta\alpha}{a + \alpha} \alpha S$. Le premier produit eft plus grand que le fecond, de la quantité $\frac{\frac{1}{2}a\alpha\alpha + a\beta\alpha + ba\alpha + b\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha^3 + \beta\alpha\alpha}{a + \alpha} S$.

Et comme ces produits doivent être retranchés de la valeur du premier membre de la formule, il s'en fuit que l'augmentation de la charge augmente toujours la ftabilité abfolue, tant que β n'eft pas négatif. Ainfi les eaux qui font à fond de cale augmentent la ftabilité ; mais elles font plonger davantage le navire, & le fillage en eft retardé. Si la quantité α eft très petite, on peut cenfer le gain qu'on fait fur la ftabilité, par l'augmentation de la charge, $= (b + \beta)\alpha S$. Lorfqu'on diminue la charge, il faut prendre négativement la valeur de α ; & fi l'endroit d'où l'on ôte la charge eft plus haut que le centre de gravité, il faut auffi prendre négativement la valeur de β. Par cette double négation, on gagne confidérablement fur la ftabilité, en coupant les mâts, à caufe de leurs hauteurs. Si on donne beaucoup de profondeur à la carene, fi on emploie du bon left & en quantité, & fi la charge eft bien arrangée & pefante par elle-même, on pourra faire descendre le centre de gravité du navire jusqu'à celui de la carene, & peut-être plus bas ; on pourra alors se relâcher sur le premier membre de la formule qui exprime la stabilité, & diminuer la largeur du vaisseau, lorsque d'autres raisons, étrangeres à notre sujet, le demandent.

CHAPITRE V.

Explication de la cause principale des roulis & des tangages, & de la meilleure maniere de les diminuer, relative à cette cause, avec quelques réflexions sur la nature des lames.

§. XLV. NOUS avons considéré jusqu'ici la surface des eaux comme horizontale; ou plutôt, nous n'avons pas encore fait attention à la figure ondoyante des lames. C'est cependant dans cette figure ondoyante & variable que consiste la principale cause des agitations du navire. L'équilibre des corps qui nagent au milieu de ces ondes, est tout différent de celui qui convient aux eaux dont la surface est unie & horizontale; quand le navire ne feroit que suivre constamment sa position d'équilibre, il seroit obligé de faire des balancemens très-considérables, que j'appellerai *balancemens d'équilibre;* & les balancemens absolus seront toujours plus grands que les simples balancemens d'équilibre. C'est ici un nouveau sujet de réflexion fort essentiel & très-important; mais ce sujet nous meneroit extrêmement loin, si nous voulions le traiter avec toute l'exactitude dont il est susceptible. Les loix hydrodynamiques connues l'éclairciroient suffisamment, moyennant des hypothèses physiques bien choisies & telles qui ne peuvent nous écarter sensiblement de la vérité. Mais il nous faudroit examiner la figure des lames, le mouvement des eaux, tant près la surface qu'à des profondeurs données, quelle est à chaque instant & à chaque profondeur la compression des eaux, qui n'eſt plus exactement proportionnelle à la colonne verticale terminée par la ſurface des eaux. C'eſt cette compreſſion qui marque la pouſſée de l'eau contre chaque élément de la carene, & elle ne ſauroit être déterminée ſans connoître les accélérations & retardations du mouvement des eaux, ni par conſéquent la vraie poſition d'équilibre du navire. Toutes ces recherches demandent un Traité à part, & je dois me contenir dans les bornes d'un Mémoire, que j'ai peut-être déja paſſée. Je n'expoſerai donc que le plus précis de mes idées ſur cette matiere, & je ſimplifierai les hypothèſes autant qu'on peut le faire, ſans tomber dans des erreurs ſenſibles.

§. XLVI. Si nous ſuppoſons que le vent ſouffle conſtamment avec la même force, & ſous la même direction; que la mer eſt à une très-grande étendue fort profonde & libre, & que le fond de la mer eſt uni & horizontal, il n'y a aucun doute que les lames excitées par un tel vent, & ſous de telles circonſtances, ne ſoient extrêmement uniformes & régulieres. C'eſt ſous cette forme que nous allons le conſidérer.

Soit donc AB (Fig. V.) la ſurface horizontale de la mer, ou plutôt une ligne de cette ſurface priſe parallelement à la direction du vent; & ſuppoſons que pendant les agitations des eaux, cette ligne ſe change en $acdefgb$. Toute cette ligne continuée de part & d'autre, formera une courbe continue qui pourra être exprimée par une ſeule & même équation; & pour peu qu'on faſſe attention à toutes les propriétés que cette courbe doit avoir manifeſtement, on voit aſſez qu'elle ne ſauroit s'éloigner beaucoup de la nature de celle que prend une longue corde tendue, lorſqu'elle fait des vibrations, en formant pluſieurs nœuds, tels que ſont ici les points c, e, g, &c. Ainſi, pour exprimer la nature de notre courbe ondoyante, je me ſervirai de l'équation $y = a\ \mathit{ſin.}\ \mathit{Arc.}\ \frac{x}{a}\pi$, en entendant par x une abſciſſe quelconque cl, par y l'appliquée lm, par α la plus grande appliquée hd priſe au milieu de la lame, par a toute la largeur de la lame ce, & enfin par π le demi-cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité. Suivant cette idée, toute la ligne $acdefgb$ prend au même inſtant la poſition du niveau AB; les nœuds, tels que c, e, g, reſtant immobiles; chaque onde, telle que cde, fait des balancemens alternativement au-deſſus & au-deſſous la droite che; à meſure qu'elle s'éleve ou ſe baiſſe, celle qui lui eſt voiſine ſe baiſſe ou s'éleve. En différentiant notre équation, on trouve $dy = \frac{\pi\alpha}{a} dx \, cof.\ Arc.\ \frac{x}{a}\pi$. Cette équation différentielle marque qu'aux points de la plus grande élévation & de la plus grande dépreſſion, tels que d, f, la ſurface eſt conſtamment horizontale, & que c'eſt dans les nœuds que la ſurface des eaux prend la plus grande pente. La tangente de chaque angle deh ſera $\frac{\pi\alpha}{a}$. Si donc on ſuppoſe, par exemple, la plus grande hauteur d'une lame par-deſſus la ſurface horizontale de la mer faire la ſixieme partie de la largeur de la lame; c'eſt-à-dire, ſi $dh = \frac{1}{6} ce$, on aura l'angle $deh = 27° \, 40'$.

Je n'ai rien trouvé dans aucun Auteur qui détermine ni la largeur ni la plus grande hauteur d'une lame; il y a cependant apparence qu'en général les lames ſont d'autant plus grandes, que le vent eſt plus fort, & que la mer eſt plus profonde. Je remarquerai ſeulement qu'on ſait dans la Phyſique que la moindre circonſtance ou la plus petite cauſe imaginable ſuffit pour fixer les nœuds dans ces ſortes de ſyſtêmes, & que la nature recherche avec un ſoin ſans bornes le ſynchroniſme dans les variations périodiques combinées. Ces raiſons me font ſoupçonner, que dans la mer profonde la lame fera préciſément un balancement entier dans le tems que le vent emploie pour parcourir la largeur de la lame; & qu'à qu'à mesure que la profondeur de la mer diminue, le nombre des balancemens augmentera, pour le même vent en raison des nombres ou naturels impairs ; & j'ai plus de penchant pour la derniere opinion. Il en est comme des tons qu'on tire en variant l'embouchure d'un seul & même tuyau simple, & qui dans les tuyaux ouverts vont comme les nombres 1, 2, 3, &c.; & dans les tuyaux bouchés, comme les nombres 1, 3, 5, &c. Si donc un vent produit dans l'Océan des lames de 300 piés de largeur, ce même vent pourra produire dans d'autres mers moins libres & moins profondes des lames de 100 piés de largeur. Voici une expérience qui éclaircit ce sujet: une corde tendue sera ébranlée en pinçant une autre corde mise à l'unisson; partagez la premiere en trois parties égales, dont chacune donne la douzieme, & chaque partie sera encore ébranlée. Les grandes lames de l'Océan répondent aux sons fondamentaux; & les petites, excitées par le même vent, aux sons accessoires, qu'on remarque dans chaque corde pincée. Quant à la durée de chaque lame, on ne sauroit la déterminer précisément; mais il est assez avéré que ces durées sont pour les lames semblables en raison sous-doublée des largeurs des lames.

§. XLVII. M. Newton, pour expliquer la nature des lames, suppose, en prenant par-tout $eo = cl$, un tuyau uniformément large, qui descende verticalement de chaque point l jusqu'à une certaine profondeur, qui se replie ensuite horizontalement, & qui enfin remonte verticalement jusqu'au point o; après quoi il considere le mouvement des lames comme formé par des balancemens de l'eau dans toute cette suite infinie de tuyaux communicans, & il démontre qu'en supposant la longueur de chacun de ces tuyaux $= L$, les balancemens deviennent isochrones avec ceux d'un pendule simple de la longueur $\frac{1}{2} L$. De cette maniere, les balancemens des lames dépendent, quant à leur durée, de la profondeur des eaux agitées ; & cette profondeur peut être ſuppoſée proportionnelle à la largeur de chaque lame. Suppoſons donc la largeur d'une lame $= x$, & la profondeur à laquelle les eaux ſont agitées $= mx$; ſuppoſons auſſi que le vent parcoure 12 piés dans une ſeconde, & donnons ſimplement 3 piés à la longueur du pendule ſimple à ſecondes. Dans ces ſuppoſitions, le tems que le vent emploie pour parcourir la largeur de la lame, ſera $= \frac{x}{n}$ ſecondes, & le tems d'un balancement entier de la lame ſera $= \sqrt{\frac{2mx + x}{6}}$ ſecondes, & ſi on fait $\frac{x}{n} = \sqrt{\frac{2mx + x}{6}}$, on obtient $x = \frac{2mnn + nn}{6}$ piés. Soit, par exemple, $n = 30$, & $m = 6$, la largeur de la lame ſera $= 1950$ piés ; mais dans les mers peu profondes, cette largeur peut, à mon avis, ſe réduire au tiers, ou à la cinquieme, ou à la ſeptieme partie, &c.

Il eſt vrai cependant que cette maniere d'enviſager les balancemens des lames, ſouffre beaucoup de difficultés ; car tous ces tuyaux devroient ſe croiſer ; ce qui bleſſe abſolument l'imagination. Outre cela, on voit que rien ne ſauroit empêcher les eaux dans la partie *def* de rouler vers l'endroit le plus bas ; de ſorte que le mouvement alternatif des eaux doit être manifeſtement en partie horizontal & en partie vertical ; les balancemens horizontaux ſeront les plus rapides vers les nœuds, parce que la pente y eſt la plus grande ; & ils ſeront nuls au milieu, entre deux nœuds, parce que les eaux n'y ont point de pente. Les balancemens horizontaux doivent retarder les balancemens verticaux, parce que l'action de la peſanteur eſt partagée ; & comme cependant tous les balancemens doivent être abſolument iſochrones & ſynchrones, il s'enſuit que les tuyaux communiquans ne ſauroient être partout d'une longueur égale. Je conſidere donc plutôt chaque deux demi-lames *de* & *fe* comme composées de canaux ou tuyaux emboîtés les uns dans les autres, & que toutes ces paires de demi-lames alternatives forment chacune un systême à part, sans se troubler les unes les autres & sans jamais mêler leurs eaux. Les extrêmités de chacun de ces tuyaux sont également éloignées du point e; près des points d & f, le mouvement des eaux sera presque purement vertical, pendant que près du point e, ce mouvement est pour la plus grande partie horizontal. On voit donc que les extrêmités de chaque tuyau sont d'autant plus inclinées, qu'elles sont plus proches du point e, & que ces tuyaux sont plus courts; & c'est-là précisément la source de l'isochronisme commun à tous les tuyaux. Car si d'un côté les balancemens sont accélérés par la diminution de la longueur du tuyau, ils sont d'un autre côté retardés par l'inclinaison des extrêmités du même tuyau. Soit la longueur du tuyau uniformément large $= \lambda$ & le sinus de l'angle que le tuyau fait avec l'horison vers ses extrêmités $= s$; on aura la longueur du pendule simple isochrone avec les balancemens des eaux dans ce tuyau $= \frac{\lambda}{2s}$. Il arrivera donc, suivant ces idées, que s soit partout proportionnel à λ, pourvu qu'on suppose les tuyaux d'une même largeur dans toute leur longueur.

§. XLVIII. Il nous reste à examiner les loix hydrostatiques, suivant lesquelles se fait la poussée de l'eau, dont la surface n'est pas horizontale, pour soutenir les corps flottans. C'est ici la question la plus essentielle. Voici un problême dont la solution pourra éclaircir en quelque maniere notre question.

Soit $a\,c\,d\,e$ (Fig. VI) un canal uniformement large & recourbé, dont la partie $b\,g\,d$ soit remplie d'eau qui se meut dans le sens $b\,c\,d$; il est question de déterminer la compression dans chaque point g.

Qu'on tire les horizontales $f\,d$ & $b\,q$, & les verticales

bf & ghl. Soit $bf = x$, $gh = y$; la longueur $bcd = l$; la longueur $gd = z$, & qu'on nomme π la hauteur verticale de la colonne qui indique la compreſſion cherchée pour le point g : on aura la force accélératrice qui anime la partie $bcg = \frac{x + y - \pi}{l - z}$, & celle qui anime la partie $gd = \frac{\pi - y}{z}$; & il eſt clair que ces deux forces accélératrices doivent être égales entre elles, puiſque les viteſſes de l'une & de l'autre partie ſont, durant tout le mouvement, égales entre elles. Nous avons donc $\frac{x + y - \pi}{l - z} = \frac{\pi - y}{z}$, ce qui donne $\pi = y + \frac{z}{l} x$. Cette valeur nous fournit beaucoup de corollaires.

(a) Pour un tuyau ſimple & droit, la compreſſion eſt partout nulle, de quelque façon qu'on l'incline; parce que $x = nl$, & $y = -nz$.

(b) La formule indique, comme il doit arriver, que la compreſſion eſt nulle tant au point b qu'au point d, puiſque pour le point b, il faut faire $y = -x$ & $z = l$; & que pour le point d, il faut ſuppoſer $y = o$ & $z = o$.

(c) Au moment que les points b & d ſont de niveau, la compreſſion eſt la même que dans les eaux calmes.

(d) La formule ſatisfait auſſi à la converſibilité des extrêmités b & d; car ſi on veut rapporter à l'extrêmité d, ce que j'ai dit par rapport à l'extrêmité b, on voit bien qu'il faut ſubſtituer $-x$ à la place de x, $l - z$ à la place de z, & $y + x$ à la place de y. Si l'on ſubſtitue donc ces valeurs, on trouve, à la place de $y + \frac{z}{l} x$, la quantité $y + x - \frac{l - z}{l} x$; ce qui fait, comme auparavant, $y + \frac{z}{l} x$.

(e) Lorſque le point g eſt fort près du point b, &

qu'on nomme cette petite diſtance α, on aura $l - z = \alpha$ & $y = - x + \beta$, en entendant par β la petite hauteur verticale du point b par-deſſus le point g, pris fort près de l'autre ; ſubſtituant donc ces valeurs, on trouve la compreſſion $= \beta - \frac{x}{l} \alpha$. Cette compreſſion eſt donc plus petite que ſuivant les loix de l'Hydroſtatique ordinaires.

(f) Si au contraire, le point g eſt fort près de l'autre extrêmité, ſavoir du point d ; & ſi on ſuppoſe la petite diſtance $gd = \alpha$: on aura $z = \alpha$ & $y = \beta$, en entendant par β la petite hauteur verticale du point d par-deſſus le point g ; ſur cela la compreſſion de l'eau devient $= \beta + \frac{x}{l} \alpha$, qui eſt par conſéquent plus grande que ſuivant les loix hydroſtatiques ordinaires.

§. XLIX. Pour appliquer, ce que nous venons de trouver, aux lames, il faut examiner quel peut être le tuyau qui paſſe par le point, pour lequel on cherche la compreſſion ; & quoiqu'on ne puiſſe rien déterminer de précis là-deſſus, on voit cependant que toutes les eaux élevées par-deſſus le niveau de la mer calme, ſont moins comprimées que ſuivant les regles communes. La différence peut être ſenſible près la ſurface des eaux, comme on voit par les corollaires (e) & (f) ; car en ſuppoſant les deux branches verticales près la ſurface de l'eau, ce qui fait $\alpha = \beta$, la compreſſion pourra différer en raiſon de 1 à $1 \pm \frac{x}{l}$; & comme $\frac{x}{l}$ pourroit fort bien faire $\frac{1}{6}$, il s'enſuit que ladite différence pourroit bien s'étendre juſqu'à un ſixieme de la compreſſion ordinaire. Cependant il n'en faut pas conclurre que le navire plonge plus ou moins qu'à l'ordinaire, lorſqu'il ſe trouve au-deſſus ou au-deſſous du niveau moyen de la mer, parce que le navire aura lui-même à-peu-près le même mouvement qu'auroit l'eau qu'il déplace. Les réſultats de notre problême ſont à la vérité fort utiles pour connoître à-peu-près ce qui doit arriver dans différens cas ; mais ils n'admettent pas un calcul exact. Il faut surtout faire attention à la largeur des lames, & la comparer avec les dimensions du navire, puisqu'il est tout simple que les lames fort courtes doivent faire sur le navire un tout autre effet, que les grandes lames de l'Océan, sur lesquelles le navire ne représentera qu'un assez petit corps. C'est surtout ce dernier cas que nous devons examiner avec plus d'attention.

§. L. On voit bien que chaque point de la carene peut être considéré comme étant fort près de l'extrêmité du tuyau, qui passe par ce point ; on voit aussi que lorsque le navire est censé occuper une petite étendue, chaque point de la carene est soutenu par une colonne d'eau, dont la hauteur verticale est, en vertu des corollaires (e) & (f) du précédent §., $= \beta \pm \frac{x}{l}\alpha$, en entendant par β la hauteur verticale depuis le point en question jusqu'à la surface de la lame, par α la position du tuyau intercepté entre la surface de la lame & le même point en question, par l la longueur entiere du tuyau, & par x la hauteur verticale entre les deux extrêmités du tuyau. Remarquons ici que α doit être à-peu-près proportionnelle à β, parce que la petite portion de tuyau peut être considérée comme une ligne droite inclinée, & tous les points de la carene répondront à-peu-près à des tuyaux dont les extrêmités seront également inclinées. La quantité ou le rapport de $\frac{x}{l}$ peut aussi être censé le même pour tous les tuyaux qui répondent aux différens points de la carene, tant à cause de la petite étendue de la carene par rapport à la grande largeur de la lame, que parce que la quantité x ne sauroit manquer d'être à-peu-près proportionnelle à l pour des tuyaux peu éloignés entre eux. Toutes ces considérations nous menent à la conclusion, qu'on peut suppoſer pour chaque point de la carene la quantité $\frac{x}{l}\alpha$ proportionnelle à β; de ſorte que la quantité $\beta \pm \frac{x}{l}\alpha$ peut être cenſée $= n\beta$, en entendant par n un nombre un peu plus grand ou un peu plus petit que l'unité, ſuivant que le vaiſſeau ſe trouve au-deſſous ou au-deſſus du niveau de la mer calme. Nous voyons de-là que chaque point de la carene eſt ſoutenu à peu-près par une force proportionnelle à la hauteur verticale priſe depuis le point en queſtion & terminée par la ſurface des eaux ondoyantes; & c'eſt ici la propriété principale que je prétendois établir.

§. LI. Il ſuit de la dite propriété, que quelque courbée & inclinée que ſoit la ſurface de l'eau, la pouſſée de l'eau qui ſoutient un corps flottant, peut toujours être conſidérée comme concentrée dans le centre de gravité de la partie ſubmergée cenſée homogene, tout comme dans les eaux calmes, ſans tomber dans aucune erreur ſenſible, pendant que la peſanteur du corps doit être conſidérée comme concentrée dans ſon centre de gravité. L'équilibre pour chaque moment demande encore que les deux dits centres de gravité ſe trouvent dans une ſeule & même verticale; mais nous allons voir qu'un tel équilibre doit néceſſairement faire incliner le corps lorſque la ſurface de l'eau eſt inclinée, & nous ne pouvons nous diſpenſer de rechercher quelle ſera la relation entre l'inclinaiſon de la ſurface d'eau, & celle du corps ſuppoſé en équilibre. Pour faciliter cette nouvelle recherche, nous ſuppoſerons l'inclinaiſon de la ſurface d'eau très-petite, & la ſurface d'eau, pour la petite étendue que le corps occupe, être plane. Ces ſuppoſitions ne pourront nous écarter ſenſiblement de la vérité, & les théorêmes qui réſulteront ſeront également utiles. Outre ces ſuppoſitions, nous conſidérerons ſimplement un plan verticalement plongé dans les eaux, & parallelement au plan de la cinquieme figure. Nous simplifions ainsi la question, afin de pouvoir exprimer, par des formules analytiques, la stabilité ordinaire, sans employer aucun signe sommatoire.

§. LII. Soit donc à présent *AD* (Fig. VII) la surface horizontale des eaux calmes, & que *BC* marque l'intersection du plan vertical flottant avec ladite surface d'eau; soit le centre de gravité du plan flottant en *F*, & le centre de gravité de sa partie submergée censée homogene en *G*; qu'on tire par les deux points *F* & *G* la ligne *EFG*, qui, pour l'équilibre que nous supposons, sera verticale. Il est question de déterminer la position d'équilibre du même plan, lorsqu'on suppose la surface d'eau inclinée comme *ad*, ou de déterminer l'angle *BEb*, en supposant la ligne *BC* prendre la position *bc*.

Considérons dabord le plan flottant comme ayant pris la même inclinaison que la surface des eaux, desorte que *BC* soit parvenu dans la position *mn*, & que la ligne *EFg* ait pris la position *Efg* perpendiculaire à la ligne *mn*; l'angle *GEg* sera égal à l'angle *AEa*, le point *g* sera encore le centre de gravité de la partie submergée considérée comme homogene, puisque cette partie est la même qu'elle étoit avant l'inclinaison de la surface d'eau, & le point *f* sera le centre de gravité du plan. Mais cette position du plan ne sauroit être celle de l'équilibre, puisque la ligne *fg* n'est plus verticale; il faut donc que la ligne *BC*, après avoir pris la position *mn*, subisse un second changement, & qu'elle prenne la position *bc*, qui remette les points *f* & *g* dans la même verticale; & on remarquera à cet égard, que dans tous les corps qui ont naturellement un certain degré de stabilité, la ligne *fg* se rapproche de la verticale en augmentant l'angle *BEm*. Supposons maintenant l'angle cherché $mEb = \sigma$; l'angle donné $BEm = S$; $BC = q$; FG ou $fg = s$; la partie submergée

ſubmergée du plan $= M$; qu'on tire du centre E les petits arcs de cercle fF & Gg, avec la verticale fh, il y aura entre l'angle mEb & l'angle gfh la même relation que nous avons trouvée dans le premier chapitre, puiſque, par la petite inclinaiſon de la ligne ad, cette relation ne ſauroit être changée; or en appliquant nos formules générales aux angles extrêmement petits, on trouve $gh = \left(\frac{q^3}{12\,M} - s\right)\sigma$, ce qui donne le petit angle $gfh = \left(\frac{q^3}{12\,Ms} - 1\right)\sigma$, & ce même angle étant auſſi égal à l'angle BEm, ou $= S$, nous aurons $\left(\frac{q^3}{12\,Ms} - 1\right)\sigma = S$, & par conſéquent l'angle mEb, ou $\sigma = \frac{12\,Ms}{q^3 - 12\,Ms}S$. Si on ajoûte à l'angle mEb, l'angle BEm, on aura l'angle $BEb = \frac{q^3}{q^3 - 12\,Ms}S$.

§. LIII. Les réſultats que nous venons de trouver, méritent toute notre attention. Nous voyons que l'angle BEb eſt toujours plus grand que l'angle BEm, tant que le centre de gravité du corps plongé eſt plus haut que le centre de gravité de la partie ſubmergée homogene. Il eſt vrai que nous n'avons conſidéré qu'un plan plongé verticalement; mais on n'a qu'à ſuppoſer le navire être un priſme conſtruit ſur un tel plan, pour pouvoir appliquer nos formules aux navires; remarquons d'ailleurs, que le dénominateur ſera pour tous les vaiſſeaux, quelque figure qu'ils aient, proportionnel à la ſtabilité naturelle du vaiſſeau, & que cette ſtabilité eſt toujours compoſée de deux parties, dont l'une dépend uniquement de la ſection du vaiſſeau à fleur d'eau, & l'autre de la hauteur verticale du centre de gravité du vaiſſeau par-deſſus le centre de gravité de la carene. Si nous dénotons donc généralement la premiere partie par P, & l'autre par Q, nous aurons généralement l'angle $m\ E\ b = \frac{Q}{P - Q}\ S$, & l'angle $B\ e\ b = \frac{P}{P - Q}\ S$.

Suivant la conſtruction des navires, leur charge & le leſt qu'on emploie, le rapport de P à Q eſt tantôt plus grand, tantôt plus petit ; mais il eſt certain que ſouvent la quantité Q va juſqu'à la moitié, & peut-être même juſqu'aux deux tiers de la quantité P. Suppoſons, par exemple, $Q = \frac{1}{2}\ P$: dans cet exemple l'angle $B\,E\,b$ ſera le double de l'angle $B\,E\,m$; c'eſt-à-dire, que l'inclinaiſon du navire ſera deux fois auſſi grande que l'inclinaiſon de la ſurface des eaux. Si donc les eaux étoient inclinées de 15 ou 20 degrés, le navire pourroit s'incliner de 30 ou 40 degrés, en faiſant abſtraction de l'erreur que la grandeur de tels angles peut jetter ſur nos formules, & il eſt à remarquer que les vaiſſeaux ſeront quelquefois obligés de prendre de telles inclinaiſons uniquement pour ſe mettre à l'équilibre ; & ſi l'on fait attention qu'ils pourront s'élancer par l'impreſſion reçue au-delà de l'équilibre, on doit être effrayé de ces énormes agitations qui peuvent arriver, ſurtout aux roulis ; car par rapport au tangage, la quantité P eſt toujours beaucoup plus grande que Q. Il pourroit même y avoir des corps qui auroient un certain degré de ſtabilité dans les eaux calmes, & qui ſeroient renverſés par une petite inclinaiſon des eaux.

§. LIV. Ce ſont les angles $B\,E\,b$ qui forment les *balancemens d'équilibres* dont j'ai fait mention au commencement de ce chapitre, & qui pourroient devenir exceſſifs, ſi on n'y apportoit aucun remede. Ces balancemens ſeront iſochrones & ſynchrones avec les balancemens des eaux, qui par bonheur ſe font beaucoup plus lentement dans les grandes lames que les *balance-*

mens naturels du navire, ſans quoi l'inclinaiſon BEb ſeroit encore extrêmement augmentée par les élancemens qui ſurviendroient, à cauſe de la viteſſe des *balancemens d'équilibre*, & cela en raiſon de $\theta\theta$ à $\theta\theta - tt$, en entendant par θ le tems d'un balancement entier des lames, & par t le tems d'un *balancement naturel* du navire (§§. XXV & XXVI). Comme cependant ces *balancemens d'équilibre* dépendent de la proportion qu'on met entre les quantités P & Q, & qu'on eſt le maître de donner de grands changemens à cette proportion, il ne ſera pas difficile d'y remédier après en avoir découvert la nature. On voit qu'une planche qui nageroit ſur les eaux, formeroit ſes balancemens d'équilibre parfaitement égaux aux balancemens des eaux, & que l'angle mEb deviendroit nul; on voit auſſi qu'une très-longue poutre, chargée de plomb par une de ſes extrémités, conſerveroit ſa poſition verticale malgré les balancemens des eaux (car je fais abſtraction des impulſions de l'eau, ne conſidérant ici que l'effet du principe de la peſanteur); de ſorte que les angles BEb ſeroient entierement anéantis. Auſſi l'un & l'autre cas ſont-ils parfaitement bien indiqués par notre théorie; car dans le premier cas on peut ſuppoſer $Q = 0$, comme étant proportionnel à la hauteur verticale entre le centre de gravité de la planche & celui de ſa partie ſubmergée, laquelle hauteur peut être cenſée nulle; deſorte que l'angle $mEb \left(= \frac{Q}{P - Q} S\right)$ devient nul; & dans le ſecond cas, c'eſt P qui peut être cenſé nul, à cauſe de la petiteſſe de la ſection de la poutre par la ſurface des eaux, ce qui donne l'angle $BEb \left(= \frac{P}{P - Q} S\right) = 0$.

§. LV. Mais quel eſt le but qu'on doit ſe propoſer à l'égard de ces balancemens? Doit-on tâcher d'imiter l'exemple de la planche, ou celui de la poutre, ou quelqu'autre état moyen ? Il me ſemble que c'eſt abſolument celui de la planche. Car ſi on vouloit anéantir les balancemens d'équilibre, ou les diminuer trop, il arriveroit toujours qu'une moitié du navire ſeroit comme noyée, & que l'autre ſortiroit trop des eaux; & comme le navire eſt toujours ſujet à d'autres balancemens, ceux-ci pourroient devenir dangereux aux navires déja fortement noyés par un côté ou par une moitié. Je ſuis donc d'avis qu'on doit ſe propoſer d'anéantir ſimplement l'angle mEB, & de rendre les *balancemens d'équilibre* égaux aux balancemens des eaux; c'eſt ce que les Marins appellent *obéir à la lame*. M. Chauchot dit, à la fin de la page 38, *qu'il ne faut pas que le navire obéiſſe trop à la lame;* mais je ne doute pas qu'il ne ſoit de mon avis, quant aux lames que j'appelle régulieres; car quant aux lames irrégulieres, qui agiſſent bruſquement & ſans ordre ni régularité, l'inertie de la matiere du navire l'empêchera bien d'obéir entierement à cette eſpece de lames. Il eſt de conſéquence de diſtinguer les lames & d'en examiner les différens effets, auſſi bien que de diſtinguer les balancemens du navire, tels que les *balancemens naturels*, les *balancemens forcés* & les *balancemens d'équilibre*.

§. LVI. Après avoir bien établi la maxime qu'on doit ſe propoſer à l'égard des *balancemens d'équilibre*, il eſt queſtion d'examiner ce qu'on peut faire pour y ſatisfaire. J'ai déja dit qu'il faut faire $Q = 0$, & par conſéquent $S = 0$, c'eſt-à-dire, qu'il faut, pour la poſition droite du navire, faire deſcendre le centre de gravité du navire juſqu'au centre de gravité de la carene cenſée homogene, & faire tomber préciſément l'un ſur l'autre. Je crois cet article ſi eſſentiel à tous égards, que je voudrois qu'on y mît toute l'attention réquiſe. Ordinairement le centre de gravité du navire eſt plus haut que celui de la carene, & il ſera difficile de faire tomber ces deux points l'un ſur l'autre, ſi on ne veut donner beaucoup de creux au navire, employer du bon leſt & en quantité ſuffiſante, arranger avec ſoin tout ce qui doit être mis ſur le vaiſſeau, élargir le navire vers la flottaiſon afin de hauſſer le ſecond centre, ménager la matiere en tout ce qui eſt hors de l'eau, & prodiguer en quelque façon le fer vers le fond du navire. Il eſt ſûr qu'avec toutes ces attentions on pourra déprimer le centre de gravité du navire chargé juſqu'au centre de gravité de la carene, & encore plus bas ſi on le vouloit.

Après qu'on ſera parvenu à mettre les deux centres de gravité dans un ſeul & même point, la ſtabilité du navire pour les petites inclinaiſons ne dépendra plus que de la ſection du navire par la ſurface horizontale de l'eau, & ſi on appelle q la largeur de cette ſection, pour une abſciſſe x, priſe dans la longueur, la ſtabilité ſera ſimplement $= \sigma \int \frac{1}{12} q^3 \, dx$, en entendant par σ le petit angle d'inclinaiſon (§. XIII). Cette ſimple formule ſervira à reconnoître par une expérience facile à faire, ſi l'on aura bien réuſſi à mettre les deux centres de gravité à la même hauteur. Si ladite ſection étoit irréguliere, on pourroit trouver la quantité $\int \frac{1}{12} q^3 dx$ par parties, comme M. Bouguer le fait en pluſieurs occaſions. Si cette ſection étoit un rectangle, qui eût pour largeur a, & pour longueur b, la ſtabilité en largeur deviendroit $= \frac{1}{12} a^3 b \sigma$; & j'ai conſeillé de la rendre à-peu-près telle, & de ne s'en écarter qu'autant que l'arrondiſſement des angles le demande; mais pour la conſtruction ordinaire des navires, on peut ſuppoſer la ſection formée par deux demi-ellipſes, ſans tomber dans aucune erreur ſenſible; & j'ai démontré, au milieu du §. XIII, qu'alors la ſtabilité en largeur devient $= \frac{11}{224} a^3 b \sigma$, en entendant par a & par b la plus grande largeur & la plus grande longueur de la ſection. Si l'on exprime en piés les quantités a & b, la formule donnera un certain nombre de piés cubes d'eau agiſſant ſur un levier pris à volonté; & si on divise la formule par 28, on aura, au lieu de piés cubes d'eau, des tonneaux à raison de 2000 liv. chacun; le *momentum* de la stabilité sera donc, en tonneaux pour le poids, & en piés pour le levier, $\frac{a^3 b \sigma}{570}$. Après avoir calculé cette quantité, on pourra appliquer horizontalement & perpendiculairement à la longueur du navire un certain nombre de leviers qui débordent le navire, & suspendre par les extrêmités de ces leviers des poids assez forts pour faire pancher le navire de côté d'un angle d'environ deux degrés; on mesurera cet angle avec beaucoup de précision, par le moyen d'un bon instrument, & on prendra la somme de tous les *momentum* des forces appliquées pour faire pancher le navire. Si on trouve cette somme égale à $\frac{a^3 b \sigma}{570}$, ce sera une marque que les deux centres de gravité sont réunis dans un même point; si elle est plus petite ou plus grande, le centre de gravité du navire sera plus haut ou plus bas que le centre de gravité de la carene; & si on connoît la solidité de la carene, on pourra exactement déterminer de combien le premier centre est plus haut ou plus bas que l'autre; car si la somme des *momentum* en question est à la quantité $\frac{a^3 b \sigma}{570}$ comme n à m, on aura $P : P - Q = m : n$, & par conséquent $Q = \frac{m-n}{m} P$, & comme $Q = m s \sigma$, en entendant par M la solidité de la carene, on aura $M s \sigma = \frac{m-n}{m} P = \frac{m-n}{m} \times \frac{a^3 b \sigma}{570}$, & par conséquent $s = \frac{m-n}{m} \times \frac{a^3 b}{570 \times M}$; & dans cette formule, il faudra exprimer la ſolidité de la carene pareillement en tonneaux de 2000 livres. Une telle expérience demande que les eaux ſoient entierement calmes. Voici un exemple qui éclaircira ces regles.

Soit $a = 30$ piés; $b = 100$ piés; la ſolidité de la carene $= 750$ tonneaux; $\sigma = 0,03$ qui répond à une inclinaiſon de 1 d. 43 m., on aura $\frac{a^3 b \sigma}{570} = 142 \frac{2}{19}$; qu'on applique cinq leviers, chacun de 30 piés de longueur, depuis le milieu du tillac; ſi l'on avoit chargé l'extrêmité de chaque levier de $\frac{18}{19}$ de tonneau, on en conclurra, que le centre de gravité du navire eſt préciſément au centre de gravité de la carene; mais ſi dans l'expérience on n'y avoit ſuſpendu que $\frac{15}{19}$ de tonneau, on auroit $m = 6$ & $n = 5$, ce qui donneroit $s = \frac{20}{19}$ p. & d'où il faudroit inférer que le centre de gravité du navire eſt élevé par-deſſus le centre de gravité de la carene d'un pié $7 \frac{11}{19}$ lignes. En ce cas, je conſeillerois de leſter davantage le navire, quand même ce ſeroit au préjudice de la charge, à moins qu'on ne puiſſe faire deſcendre un peu le centre de gravité par un arrangement plus convenable de la charge; mais quand même on ne voudroit rien changer, il ſeroit toujours bon de faire cette ſorte d'expérience pour chaque navire, car un Pilote entendu doit être exactement informé de l'état de ſon vaiſſeau. Si on ne trouvoit pas néceſſaire de déprimer le centre de gravité du navire tout-à-fait juſqu'au centre de gravité de la carene, il faudroit du moins fixer à quelle hauteur on doit mettre le premier par-deſſus l'autre, & cette hauteur doit toujours faire une partie aliquote de la plus grande largeur de la ſection du navire par la ſurface de la mer, comme ſa vingtieme, ſa vingt-cinquieme, ou ſa trentieme partie, & par-là on ſe mettra en même tems en état de fixer le leſt, qu'on ne détermine que d'une maniere fort vague;

il ne faut donner au hazazard que le moins qu'il est possible.

§. LVII. Nous avons considéré jusqu'ici le vaisseau comme beaucoup plus petit, tant en longueur qu'en largeur, que n'est toute la largeur d'une lame. Je ne m'arrêterai pas à détailler tous les autres cas qui peuvent arriver; ils sont en trop grand nombre. Il faudroit avoir égard à la largeur des lames, à la longueur & à la largeur du navire, à l'angle que le navire forme avec le plan de la cinquieme figure, à la vitesse du navire, à la durée de chaque balancement des lames, &c. & si on vouloit combiner toutes ces variations, il en résulteroit des questions infinies, que j'aime mieux abandonner à l'intelligence de mon lecteur; je me contenterai de remarquer qu'aux points d & f l'inclinaison des eaux est nulle; que cette inclinaison est la plus grande dans les nœuds; que les eaux sont d'autant moins comprimées qu'elles sont plus élevées, & d'autant plus comprimées qu'elles sont plus basses; que lorsque le vaisseau se trouve sur la convexité des eaux, il doit être soutenu plus par le milieu que par les extrêmités; & que sur la concavité il arrive le contraire; que les inclinaisons des eaux sont tantôt affirmatives, tantôt négatives, à la même distance des nœuds; & qu'au milieu de chaque balancement la surface des eaux devient tout-à-fait plane. Je ne fais pas ces réflexions comme devant nous servir à trouver quelques nouvelles corrections, quant à la construction du navire; mais plutôt comme tendantes à expliquer la nature du roulis & du tangage, & leur variations suivant les différentes circonstances où le navire se trouve à chaque moment, & même à diminuer ces balancemens par quelques autres attentions; comme, par exemple, de tâcher de tenir le milieu entre deux nœuds, lorsque les lames prennent par le travers; de franchir les nœuds, lorsque la lame est prête à se mettre de niveau; de couper la lame sous un un angle plus ou moins grand, ſuivant qu'on craint davantage le tangage ou le roulis; de faire force de voiles, lorſqu'on n'appréhende pas le vent, d'autant qu'un vaiſſeau cinglant ſera toujours moins agité qu'un vaiſſeau flottant; de faire à pluſieurs repriſes de fauſſes routes, mais bien entendues, &c. L'art de bien gouverner ne ſera pas ſans ſuccès dans ces occaſions; & quoique les lames ne ſoient jamais auſſi régulieres que je les ai ſuppoſées dans ce chapitre, nos réflexions n'en ſeront pas moins utiles. La maxime principale que j'ai prétendu établir, eſt celle de réunir, s'il eſt poſſible, les deux centres de gravité dans un ſeul & même point.

CHAPITRE VI.

Quelques réflexions particulieres ſur le Tangage.

§. LVIII. DANS tout le cours de ce Mémoire, j'ai traité également du Roulis & du Tangage; & je n'ai pas manqué, toutes les fois que l'occaſion le demandoit, de conſidérer en particulier l'une ou l'autre eſpece de balancemens.

J'ajoûterai cependant encore quelques réflexions particulieres ſur le Tangage. La ſtabilité eſt beaucoup plus grande pour le tangage que pour le roulis, ſi on prend des inclinaiſons égales de part & d'autre. En ſuppoſant les centres de gravité du navire & de la carene à la même hauteur, en conſidérant la ſection horizontale du navire à fleur d'eau comme elliptique ou formée par deux demi-ellipſes, & en ne conſidérant que de petites inclinaiſons, les deux ſtabilités ſeront entre elles comme le quarré de la longueur au quarré de la largeur. Cette raiſon, jointe à la grande réſiſtance de l'eau, fait que le mouvement angulaire du tangage eſt beaucoup plus petit que celui du roulis; mais la grande diſtance de la proue & de la pouppe, depuis l'axe de rotation, fait auſſi que leur mouvement abſolu ne laiſſe pas de ſurpaſſer ſouvent celui des flancs dans les roulis; auſſi exhauſſe-t-on les bords vers la proue & la pouppe pour prévenir les ſuites funeſtes de ce mouvement abſolu. Le mouvement du tangage eſt ordinairement arrêté bruſquement par la grande réſiſtance de l'eau, qui ne ſauroit être déplacée aſſez vite, & qui eſt frappée dans une très-grande ſurface. Il eſt ſûr que la matiere & le corps du navire ſont fort fatigués par ces rudes coups; mais comme ils arrivent dans un tems où l'une des deux extrêmités peut-être déja extrêmement baiſſée, pendant qu'il lui reſte encore beaucoup de mouvement, on peut dire que ce ſont préciſément ces violens & ſubits efforts qui ſauvent le navire. Le tangage ne ſauroit répondre à la nature des *balancemens libres*, parce que la grande réſiſtance des eaux arrêteroit auſſitôt ces balancemens. Le *tangage d'équilibre* ſera auſſi tel qu'il doit être ſur les grandes lames régulieres, parce que la partie de la ſtabilité qui dépend de la ſection du navire à fleur d'eau, eſt ici comme infiniment plus grande que celle qui dépend de la hauteur verticale entre les deux centres de gravité; je veux dire que le navire obéira aſſez bien à la lame par ſa longueur, lorſque la lame eſt grande & réguliere. Il n'y a donc que le tangage *forcé* & formé par des cauſes irrégulieres, qui puiſſe mériter notre attention. L'inégalité du vent ne ſauroit faire ici aucun effort ſenſible à cauſe de la grande ſtabilité; le mouvement horizontal des eaux contre le navire ne ſauroit faire non-plus un grand effet pour le faire tanguer. En un mot, le tangage exceſſif ne ſauroit être produit que par un mouvement ſubit & violent des eaux du bas en-haut, ou parce que l'eau cessera subitement de soutenir le navire dans toutes les parties de la carene. Les brisants d'eau peuvent occasionner ces deux causes; car lorsque deux lames viennent à se choquer, les eaux du milieu sont extrêmement comprimées, & cette compression lance les eaux en-haut avec beaucoup de force, après quoi les eaux des deux lames brisées se retirent avec un mouvement contraire & laissent un vuide au milieu. La partie du navire qui se trouve au milieu de ces eaux comprimées, sera lancée pareillement en-haut; & puis le poids de cette partie, faute d'être soutenu, causera un mouvement contraire également violent, jusqu'à ce que le navire retrouve les pleines eaux & en soit soutenu dans toute la carene; après quoi ce mouvement sera arrêté assez promptement.

§. LIX. Ces agitations irrégulieres du navire seront toujours composées de deux mouvemens; savoir, d'un mouvement de rotation autour de l'axe qui passe par le centre de gravité, & d'un autre par lequel tout le corps du navire montera ou descendra un peu avec précipitation; le mouvement absolu se fait sur l'axe de rotation spontanée; mais comme le second mouvement allégué n'entre pas ici en compte, il faut, dans le tangage, toujours considérer la ligne qui passe par le centre de gravité comme l'axe de rotation.

Si donc cette ligne est plus proche de la proue que de la pouppe, le mouvement sera plus grand vers la pouppe que vers la proue, & cela arrive en plaçant le fort du navire plus près de la proue que de la pouppe; car le centre de gravité de la carene étant par-là approché de la proue, le centre de gravité du navire doit l'être pareillement. Je conseillerois donc de placer le fort du navire au milieu de la carene, à moins qu'on ne prétende exprès de jetter dans le tangage plus de mouvement sur la pouppe que sur la proue; il est sûr que le navire n'en silleroit que mieux, quoique quelques-uns prétendent le contraire. L'autorité de M. Bouguer devroit suffire à ceux-ci pour se désabuser de ce faux préjugé. Il est vrai, & ce même illustre Auteur l'a fort bien démontré, qu'en bien des cas le navire gouverne mieux, tant par les voiles que par le gouvernail, lorsqu'il est renflé vers la proue; mais je doute que cela soit généralement vrai. Je crois aussi que lorsqu'on ne réussit pas à bien gouverner le navire, c'est le plus souvent plutôt par la faute d'une manœuvre bien entendue, que par aucune mauvaise construction du navire; une manœuvre réussira quelquefois, & manquera une autrefois, simplement parce que la vitesse du navire est un peu plus grande. Je suis d'avis qu'il faudroit plutôt s'appliquer à perfectionner la manœuvre pour toutes les circonstances où l'on peut se trouver, qu'à gagner un peu plus de facilité à gouverner par une construction nuisible aux qualités les plus essentielles du navire; peut-être aussi qu'on ne feroit pas mal d'ajoûter à l'usage du gouvernail celui de longues rames, simplement mobiles dans le plan vertical, qui doit être aussi celui des pales, & perpendiculaires à la longueur du navire. Il est sûr qu'en plongeant ces pales dans l'eau, elles feroient plus d'effet que le gouvernail, pour peu qu'on leur donnât de surface, & qu'on en multipliât le nombre; un gouvernail de moyenne grandeur n'a qu'environ 50 piés quarrés de surface, & il faut, à cause de l'obliquité, lors même qu'elle est la plus avantageuse, en retrancher presque les deux tiers, & enfin le corps de la carene empêche encore l'eau d'agir de toute sa force sur le gouvernail; d'où l'on voit assez que l'effet des pales ne sauroit manquer d'être considérable, surtout si on fait duement incliner leurs plans verticaux à l'égard de celles qui ne seroient pas appliquées au milieu du navire. De pareilles rames pourront encore être employées utilement dans plusieurs autres occasions & avec un maniement convenable & bien exécuté ; elles pourront même ſervir à modérer un peu les agitations du navire.

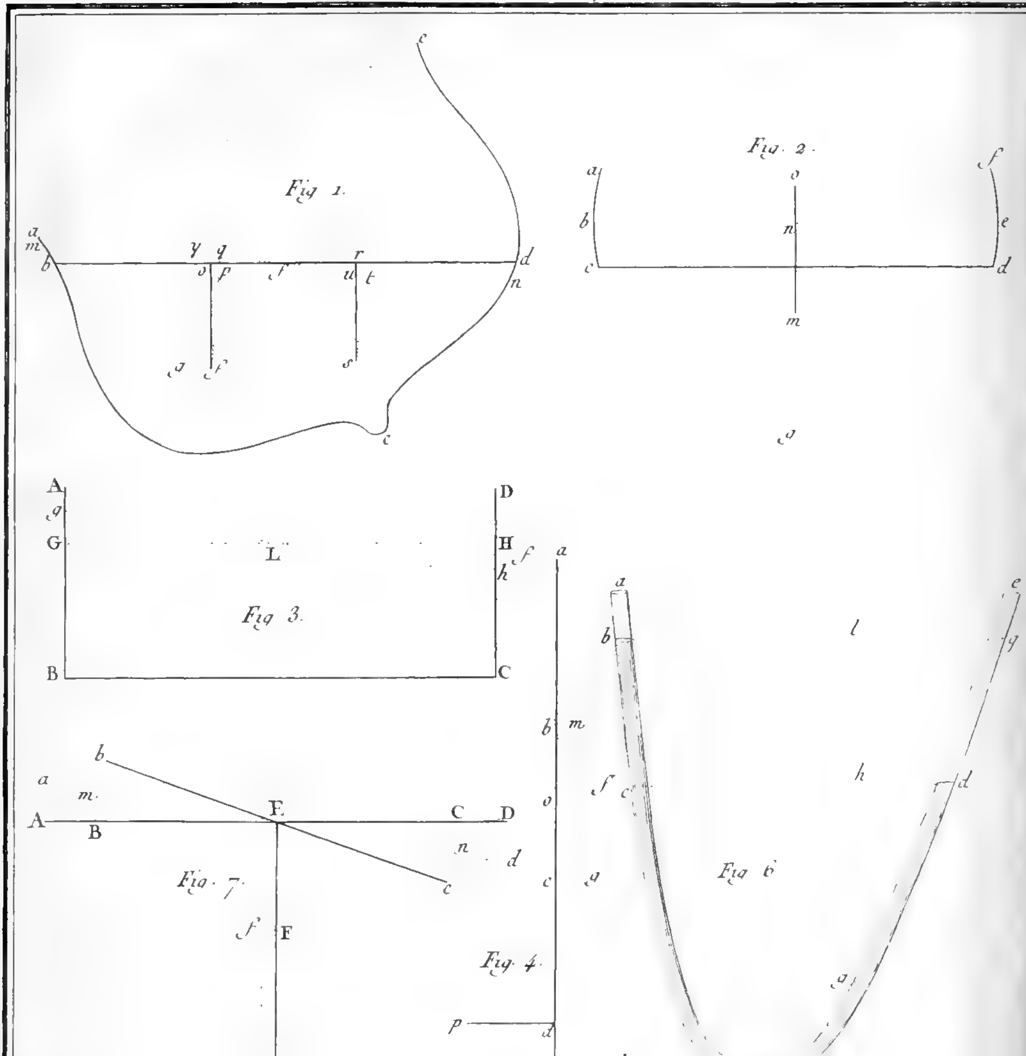
§. LX. C'eſt à-peu-près ſur le même principe qu'on doit déterminer la *quête de l'eſtambot*, de laquelle les conſtructeurs ne conviennent pas. Je voudrois que l'inclinaiſon de l'eſtambot, qui eſt une piece droite, fût égale à l'inclinaiſon de la tangente de l'eſtrave à l'endroit qui eſt à fleur d'eau ; on ſait que cette eſtrave eſt une piece courbe faiſant un arc de cercle de 70 degrés, & par conſéquent inégalement inclinée dans toute ſa longueur. L'élancement de l'eſtrave eſt ſans doute très-néceſſaire ; & ſi on pouvoit l'augmenter ſans nuire à la force de l'aſſemblage des pieces qui forment l'éperon, ou ſans tomber dans d'autres inconvéniens, on devroit le faire à mon avis ; on diminueroit la réſiſtance de l'eau dans le ſillage, & on augmenteroit la ſtabilité du navire contre le tangage, parce qu'on augmenteroit la ſection du navire à fleur d'eau ; on éleveroit un peu le centre de gravité de la carene, & il ſeroit d'autant plus facile de le réunir avec celui du navire. Ces mêmes raiſons, excepté la premiere, concourent pour faire augmenter la quête de l'eſtambot ; d'ailleurs, il ſera utile de rendre égales & ſemblables les deux moitiés de l'avant & de l'arriere de la ſection horizontale du navire à fleur d'eau, afin de diſtribuer également ſur la proue & ſur la pouppe le mouvement du tangage. En ſuivant ma regle ſur la quête de l'eſtambot, cette égalité ſubſiſtera même dans le navire lorſqu'il ſera un peu incliné, au lieu que ſi on vouloit élever l'eſtambot tout droit, & que la proue s'élevât par-deſſus la ſurface de la mer, il arriveroit que ladite ſection ſeroit conſidérablement raccourcie, & que les deux moitiés en deviendroient d'autant plus diſſemblables. M. Chauchot n'a pas manqué de conſeiller pareillement de rendre la proue ſemblable à la pouppe un peu au-deſſus & au-deſſous de la ligne de flottaiſon.

§. LXI. Il eſt naturel de dire, qu'on diminuera encore le tangage en augmentant la longueur du navire. Ce qu'il y a de ſûr, eſt que la ſtabilité en ſeroit conſidérablement augmentée. Cependant comme la quille n'eſt déja que trop ſujette à s'arquer, il eſt à craindre qu'on n'augmente ce mal en augmentant trop la longueur de la quille; car quand même on pourroit diſtribuer la charge d'une maniere que le poids de chaque tranche verticale du navire perpendiculaire à ſa longueur fût égale au poids de l'eau déplacée par cette tranche, ce qui ſeroit apparemment le meilleur moyen pour empêcher la quille de s'arquer, on voit aſſez que cet équilibre ne ſubſiſteroit plus pendant les agitations de la mer & du navire, qui ſont preſque continuelles. Il ſe peut d'ailleurs qu'il y ait une certaine proportion entre les dimenſions du navire & celles de la maſſe d'eau qui tend à agiter le navire, qu'on doive craindre davantage; & eſt-il bien ſûr qu'on s'éloigne le plus communément de cette proportion en augmentant la longueur du navire? Je crois bien qu'on diminuera preſque toujours par-là le mouvement angulaire du tangage, & que par conſéquent la mâture en ſera moins fatiguée; mais il n'eſt pas ſûr qu'on diminue généralement parlant le mouvement abſolu de la proue & de la pouppe. Il ne faut pas non plus que le navire ſe refuſe trop à l'impreſſion des lames, ce qu'il pourroit faire à cauſe de ſa grande maſſe, ſurtout à l'égard des lames irrégulieres, qui agiſſent avec promptitude, & qui ne répliquent pas leurs efforts. Un navire qui conſerveroit ſa poſition droite à l'égard de l'horizon, & qui par conſéquent n'auroit ni roulis ni tangage, ſeroit continuellement noyé ſoit par la proue ſoit par la pouppe, & courroit riſque de ſe remplir d'eau & de couler à fond. Il y a tels articles ſur leſquels il faut conſulter l'expérience plutôt que la ſimple théorie.

§. LXII. On aidera le navire à obéir à la lame en le chargeant & le lestant beaucoup plus vers le milieu que vers les extrêmités ; car de cette maniere la matiere du navire oppose moins d'inertie aux efforts de la lame. Si au contraire on remarquoit au navire trop de promptitude à obéir aux efforts des eaux agitées, il faudroit jetter plus de charge vers les extrêmités, & soulager le milieu. Les *balancemens libres*, s'ils trouvoient lieu dans le tangage, se feroient plus rapidement dans le premier cas que dans le second. Cette réflexion ne doit pas nous prévenir contre la maxime de surcharger le milieu du navire, parce que les balancemens du tangage appartiennent presque uniquement à la classe des *balancemens forcés*, dont les durées dépendent simplement des agitations de l'eau. Je dirai à cette occasion que les *balancemens libres* du tangage ne sauroient manquer de s'achever beaucoup plus rapidement que ceux du roulis. Je trouve même qu'ils ne dépendent presque point de la longueur du navire, & que leur durée est pour la plus grande partie déterminée par la simple hauteur du tirant d'eau ; le pendule isochrone sera tout au plus égal à cette hauteur ; mais je ne l'estime pas si long, parce qu'il y a plus de matiere vers le milieu du navire, que vers les extrêmités, qui ont le plus de mouvement. Un parallelipipede, dont la longueur seroit beaucoup plus grande que sa largeur & sa hauteur, s'il étoit uniformement pesant dans toute sa longueur, feroit ses balancemens, dans le sens de longueur, isochrones avec un pendule simple, dont la longueur seroit égale à la hauteur de son tirant d'eau ; & cette remarque suffit pour voir la vérité de ce que je viens de dire. Ainsi un navire qui a 18 piés de tirant d'eau, fera ses *balancemens libres* du tangage en moins de $2\frac{1}{3}$ secondes. Ceux du roulis sont plus lents par plusieurs raisons, dont la principale est à mon avis la hauteur qu'on donne ordinairement au centre de gravité du navire par-dessus le centre de gravité de la carene, laquelle hauteur diminue trop ſenſiblement la ſtabilité du navire dans le ſens de ſa largeur, & par conſéquent la force qui tend à redreſſer le navire. En réuniſſant les deux centres de gravité, comme j'ai conſeillé de faire, autant qu'il eſt poſſible, les *roulis libres* ſe feront plus rapidement. Ce ſeroit là un inconvénient, ſi les roulis actuels n'étoient preſque toujours des *roulis forcés* & non des *roulis libres*. Les roulis forcés, je le répete, ſont iſochrones avec le balancemens des lames, qui le plus ſouvent ſont beaucoup plus lents que les *roulis libres* du navire. On gagnera donc par l'accélération des *roulis libres*, parce qu'on évitera preſque toujours ce cas fâcheux duquel j'ai parlé aux §§. XXIII, XXVI & XLII, qui arrive lorſque les accès de forces qui agitent le navire ſont iſochrones avec les *balancemens libres* du navire.

§. LXIII. Voilà les principes que j'ai cru pouvoir ſervir à la ſolution de notre queſtion; j'eſpere qu'ils ſeront de quelque utilité, tant aux Pilotes qu'aux Conſtructeurs de Vaiſſeaux. C'eſt à eux que je laiſſe le ſoin d'en faire uſage avec les précautions néceſſaires, ſuivant leurs connoiſſances acquiſes, les priant ſeulement de les écouter ſans ce préjugé qui retarde ſi ſouvent la perfection des arts & des ſciences. Ils ſuppléeront facilement à ce que j'ai pu omettre, & ſauront employer ces principes avec beaucoup plus de ſuccès que je n'ai pu faire dans les circonſtances où je me trouve.

FIN.



De La Gardette Sculp.

EXAMEN

Des efforts qu'ont à ſoutenir toutes les parties d'un Vaiſſeau dans le Roulis & dans le Tangage.

OU

RECHERCHES

SUR LA DIMINUTION DE CES MOUVEMENS.

Piece qui a partagé le Prix de l'Académie en 1759.

Par M. L. EULER, Directeur de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe.

Inſequitur clamorque virûm ſtridorque rudentum.

AVANT-PROPOS.

QUAND on ſe propoſe de diminuer les mouvemens de Roulis & de Tangage des navires, il ne s'agit pas tant de rendre ces mouvemens réguliers & conformes à ceux d'une pendule, que d'empêcher les funeſtes effets que leur impétuoſité pourroit cauſer.

M. Chauchot, qui a remporté le premier prix ſur cette queſtion, a très-judicieuſement remarqué, que l'intention de l'Académie Royale des Sciences de Paris étoit de prévenir les riſques auxquels ſont expoſés la mâture & l'aſſemblage des parties d'un navire, & les incommodités que les Marins éprouvent lorſque les agitations, d'où réſultent les mouvemens de roulis & de tangage, deviennent trop violentes.

Cependant ce même Auteur ne ſemble pas s'être exprimé aſſez exactement, quand il dit que la trop grande viteſſe de ces mouvemens cauſe les inconvéniens qu'il faut tâcher d'éviter : car quelque rapide que ſoit un mouvement, dès que toutes les parties d'un vaiſſeau en ſont également portées, leur aſſemblage n'en ſauroit plus ſouffrir, que ſi elles ſe trouvoient dans un repos parfait. Tant qu'un corps ſe meut d'un mouvement uniforme, qui ſoit le même dans toutes ſes parties, leur liaiſon mutuelle n'en éprouve aucun effort, quelque rapide que ſoit le mouvement.

Ce n'eſt donc pas la viteſſe même, quelque grande qu'elle ſoit, d'où réſultent les inconvéniens dont il eſt queſtion; mais leur véritable ſource doit être cherchée dans l'accélération ou retardation du mouvement : & c'eſt de-là que naiſſent les efforts que les diverſes parties d'un vaiſſeau éprouvent, pour changer le mouvement qu'elles ont actuellement, & pour ſuivre celui dont le vaiſſeau tout entier eſt porté.

Un corps ne s'oppoſe au mouvement, qu'entant qu'il eſt différent de celui qu'il a déja, & par cette raiſon auſſi les parties d'un vaiſſeau n'éprouvent des efforts qu'entant qu'elles ſont obligées de changer leur état ſoit de repos ou de mouvement.

C'eſt donc de ce principe que je me propoſe de rechercher les efforts auxquels les parties d'un vaiſſeau ſont aſſujetties, pendant qu'il eſt agité d'une maniere quelconque ; & cette même recherche découvrira enſuite les moyens de déterminer & de diminuer ces efforts, autant que les autres circonſtances le permettent.

EXAMEN

Des efforts qu'ont à ſoutenir toutes les parties d'un vaiſſeau dans le Roulis & dans le Tangage.

PREMIERE PARTIE.

Des efforts que l'aſſemblage des membres éprouve des forces quelconques dont le navire eſt ſollicité.

I.

TANT qu'un corps n'eſt ſollicité par aucun force, s'il n'eſt pas en repos, il ſe mouvra uniformement ſelon la même direction, ou il tournera ſur ſoi-même autour d'un axe, qui paſſe par ſon centre de gravité.

Dans le premier cas, la liaiſon des parties du corps ne ſouffre rien du tout, & chacune ſuit d'elle-même le mouvement du corps entier.

Mais ſi le corps tourne autour d'un axe, les parties en acquerrent une force centrifuge, par laquelle elles s'éloigneroient actuellement de l'axe de rotation, ſi elles n'étoient pas aſſez fortement liées enſemble.

Dans ce cas donc, quoique le mouvement ſoit uniforme, & qu'aucune force n'agiſſe ſur le corps, la liaiſon des parties éprouve des efforts auxquels elle doit réſiſter, & qui ſont égaux aux forces centrifuges de chaque partie.

Or on connoît tant la quantité de ces forces que leur direction, qui eſt toujours perpendiculaire à l'axe de rotation.

II.

Un tel mouvement de rotation ſe trouve dans le roulis & le tangage, & quoiqu'il ne ſoit pas uniforme, on peut néanmoins déterminer par la même regle la force centrifuge de chaque partie du vaiſſeau, en ſachant, pour chaque inſtant la viteſſe de rotation.

FIG. 1. Soit G le centre de gravité d'un vaiſſeau par lequel paſſe l'axe, autour duquel ſe fait le roulis ou le tangage, & qu'on conçoive cet axe perpendiculaire au plan de la figure.

Qu'à l'inſtant préſent le mouvement de rotation ſoit tel, qu'à la diſtance $= d$ de l'axe la viteſſe ſoit dûe à la hauteur $= u$.

Qu'on conſidere maintenant une partie quelconque du vaiſſeau M, dont la maſſe ſoit $= m$, & la diſtance à l'axe de rotation $MG = z$.

La viteſſe de rotation de cette maſſe ſera donc dûe à la hauteur $\frac{zzu}{dd}$, & partant ſa force centrifuge $\frac{2mzu}{dd}$, dont la masse sera sollicitée selon la direction MP opposée à MG.

Il faut donc que la connexion de cette partie avec le corps du vaisseau soit assez forte pour soutenir cet effort.

III.

Cet effort est le résultat du seul mouvement de rotation, & ne dépend point des forces à l'action desquelles le vaisseau est assujetti.

Je m'en vais donc aussi déterminer les efforts que les diverses parties d'un vaisseau éprouvent de la part des forces actuelles dont le vaisseau est sollicité, afin que connoissant toutes les forces qui y agissent, on soit en état de déterminer les efforts que chaque partie en soutient.

Alors on n'aura qu'à ajoûter ensemble tous ces efforts, pour connoître la force totale dont l'assemblage de chaque partie est sollicité ; & de-là on jugera aisément si l'assemblage est suffisant pour soutenir ces forces.

Ensuite, quand on verra comment ces efforts qu'éprouvent toutes les parties d'un vaisseau dépendent des forces auxquelles le vaisseau entier est assujetti, & quelles circonstances contribuent à les augmenter ou diminuer, il ne sera plus difficile de découvrir tous les moyens possibles pour adoucir les fâcheux effets qu'on a à craindre.

IV.

Pour déterminer les efforts que l'assemblage des membres d'un vaisseau éprouve de la part des forces quelconques qui le sollicitent, je commencerai par le cas où toutes les parties sont sollicitées par des forces particulieres, qui soient proportionnelles aux masses de chaque partie, & qui agissent selon la même direction.

Dans ce cas, il est évident que toutes les parties recevront le même mouvement, ſoit qu'elles ſoient liées enſemble, ou non; & partant leur aſſemblage n'éprouvera aucun effort.

Puiſque la gravité agit ſelon cette loi également ſur toutes les parties, l'aſſemblage des parties d'un vaiſſeau n'en ſouffre rien: d'où l'on voit, qu'à l'égard des autres forces, la liaiſon des parties n'eſt miſe en action qu'en tant que les forces qui ſollicitent ſéparément chaque partie, ne ſont pas proportionnelles à leurs maſſes, ou qu'elles n'agiſſent pas ſelon la même direction.

V.

Fig. 2. Conſidérons deux corps A & B, liés enſemble par la corde ab; & dont l'un A ſoit ſollicité ſelon la direction fg par une force $= P$, qui ne ſauroit être mis en mouvement ſans que l'autre B fût auſſi entraîné par l'action de la corde ab, dont il s'agit de déterminer la force ou la tenſion.

Soit cette tenſion $= T$, laquelle tirant le corps A en arriere, celui-ci ne ſera ſollicité que par la force $P - T$, pendant que l'autre B eſt entraîné par la force T.

Donc, puiſque ces deux corps doivent recevoir le même mouvement, il faut que les forces $P - T$ ſoient proportionnelles aux maſſes A & B; ou qu'il ſoit $P : A + B = T : B$; d'ou l'on trouve la tenſion cherchée $T = \frac{B}{A+B} \cdot P$, qui eſt égale à la force, que la liaiſon de ces deux corps A & B, ou la corde ab doit ſoutenir.

S'il y avoit pluſieurs corps liés enſemble, on détermineroit de la même maniere les efforts que chaque liaiſon éprouve.

VI.

De la même maniere, ſi l'on conſidere pluſieurs parties dans les corps, on pourra déterminer les forces dont

dont chacune ſera ſollicitée. Mais cela ſe trouve plus aiſément par la théorie de l'accélération qu'une force ſollicitante produit dans chaque partie du corps ; dans cette recherche, il faut diſtinguer deux cas, ſelon que la direction de la force paſſe par le centre de gravité du corps, ou non.

Pour le premier cas, ſoit $ABCD$ un vaiſſeau ou un autre corps quelconque, dont la maſſe entiere ſoit $= M$; & que ce corps ſoit ſollicité par la force $FP = P$, dont la direction paſſe par le centre de gravité G du corps. *Fig. 3*

Cela poſé, on ſait, par les principes de la Méchanique, qu'une telle force tend à imprimer à toutes les parties du corps une égale viteſſe, ſelon la direction de la force FP, & que l'accélération eſt exprimée par $\frac{P}{M}$, en ſuppoſant le corps roide, de ſorte que les intervalles entre toutes ſes parties ſoient inaltérables.

VII.

Concevons maintenant une partie quelconque M de ce corps, dont la maſſe ſoit $= m$; & puiſqu'elle reçoit une accélération $\frac{P}{M}$, ſelon la direction Mp parallele à FP, elle ſera miſe également en mouvement, que ſi elle étoit détachée du corps entier, & qu'elle fût ſollicitée à part par une force $Mp = p$; enſorte que $\frac{p}{m} = \frac{P}{M}$, & partant $p = \frac{mP}{M}$.

Il faut donc que l'aſſemblage qui affermit cette partie au corps entier, faſſe cette fonction, & qu'elle en ſoit entraînée par la force trouvée $Mp = \frac{mP}{M}$.

Par conſéquent, dès qu'on ſait la maniere dont cette partie eſt liée avec le corps entier, ſoit par des cordages ou autrement, il ſera aiſé de déterminer les efforts que la liaiſon doit ſoutenir, pour en juger ſi elle eſt aſſez forte pour cet effet.

Il en eſt de même de toutes les parties dont le corps $ABDC$ eſt compoſé, & par conſéquent on eſt en état d'aſſigner tous les efforts que l'aſſemblage tout entier ſoutient à cauſe de l'action de la force $FP = P$.

VIII.

Pour ſe former une idée plus juſte de ces efforts, on peut tranſporter l'accélération ſelon un ſens contraire ſur tout le vaiſſeau, pour pouvoir ſe repréſenter le vaiſſeau comme étant & demeurant en repos. D'où l'on conclud que la force FP produit le même effet ſur la partie M que ſi le vaiſſeau demeurant en repos, cette partie étoit ſollicitée ſelon la direction contraire $M\pi$ par une force $\frac{mP}{M}$.

En effet, ſi cette partie n'étoit pas attachée, elle ſeroit *quaſi* pouſſée en arriere ſelon la direction $M\pi$, relativement au vaiſſeau.

Cette maniere de ſe repréſenter la choſe eſt auſſi la plus propre pour nous faire connoître l'effort que l'aſſemblage éprouve: car cet effort, par rapport à la partie $M = m$, eſt le même que s'il y avoit effectivement une force $M\pi = \frac{mP}{M}$, qui tendroit à arracher cette partie du corps du vaiſſeau; & dès qu'une telle force FP commence à agir ſur le vaiſſeau, toutes les parties s'en reſſentent de la maniere que je viens d'indiquer.

IX.

Tel eſt l'effet d'une force dont la direction paſſe par le centre de la gravité du vaiſſeau; mais ſi la direction de la force $FP = P$ ne passe pas par le centre de gravité G, l'effet que chaque membre en ressent est composé de deux parties.

La premiere partie est la même que si la direction de la force passoit par le centre de la gravité. Donc, si nous considérons un membre quelconque M, dont la masse soit $= m$, celle du vaisseau entier étant $= M$, ce membre sera sollicité par une force $Mp = \frac{mP}{M}$, dont la direction Mp est parallele à FP. *Fig. 4.*

Ou bien l'assemblage qui tient ce membre uni au vaisseau, éprouvera le même effort que s'il y avoit appliqué au membre M une force contraire & égale $M\pi = \frac{mP}{M}$, qui tendît à l'arracher du vaisseau.

Mais ce n'est qu'une partie de l'effort que ce membre M soutient à cause de la force $FP = P$.

X.

L'autre partie doit être déduite du mouvement de rotation que cette force tend à imprimer au corps.

Pour cet effet, il faut tirer du centre de gravité G une perpendiculaire GN, sur la direction FP, & le produit $P.GN$ donne le moment de cette force, qui tend à faire tourner le corps autour d'un axe, qui passe par G, & qui est perpendiculaire au plan GFP.

Maintenant, par rapport à cette axe, il faut chercher le moment d'inertie du corps, lequel se trouve en multipliant tous les élémens de matiere par le quarré de leurs distance à l'axe de rotation, & en assemblant tous ces produits dans une somme.

Ce moment d'inertie sera donc exprimé par une telle formule, Mkk, par laquelle, si l'on divise le moment de force PGN, ou aura l'accélération absolue $\frac{P.GN}{Mkk}$.

Qu'on tire du membre M, que nous considérons comme une masse très-petite à l'axe de rotation, la perpendiculaire GM, & l'accélération rotatoire sur ce membre M sera $\frac{P.\,GM.\,GN}{Mkk}$.

Ce membre sera donc emporté par une force $m.\frac{P.\,GM.\,GN}{Mkk}$, dans le sens Mr; ayant tiré la droite Mr perpendiculaire à MG, selon la direction du mouvement de rotation que l'action de la force FP doit produire.

XI.

Donc, puisque le membre M, dont nous supposons la masse $= m$, éprouve, à cause du mouvement de rotation, une force $m.\frac{P.\,GM.\,GN}{Mkk}$, selon la direction Mr, c'est en vertu de sa connexion avec le corps du vaisseau qu'il est emporté par cette force égale & contraire.

L'effet donc qui en résulte sur l'assemblage, sera le même que s'il y avoit une égale force $m.\frac{P.\,GM.\,GN}{Mkk}$, actuellement appliquée au membre M, selon la direction MG, opposée à Mr, qui tâcheroit de l'arracher du corps du vaisseau; de sorte que si l'assemblage étoit anéanti, ce membre seroit effectivement emporté par cette force.

Or cela doit s'entendre de son état respectif par rapport au vaisseau; car puisque le vaisseau obéit à l'action de la force FP, le membre M n'en étant point entraîné, il en sera de même que si le vaisseau demeurant en repos, le membre M étoit sollicité par ladite force.

XII.

Donc le vaisseau étant sollicité par une force quelconque $FP = P$, tous les membres en reffentent des efforts pour rompre leur union mutuelle qu'on connoîtra, en prenant enfemble les deux forces $M\pi$ & MG, que nous venons de trouver.

Ainfi un membre quelconque M dont la maffe foit $= m$ exerce fur l'affemblage une force compofée de ces deux forces ; l'une felon $M\pi = m.\frac{P}{M}$, & l'autre felon $MG = m.\frac{P.GM.GN}{Mkk}$, où la direction $M\pi$ eft parallele à FP & MG perpendiculaire à MG.

Enfuite GN eft tirée du centre de gravité G perpendiculairement fur FP, ayant mené par G l'axe de rotation, qui eft perpendiculaire au plan GFP. Auffi eft-il bon de remarquer que la droite MG eft tirée de M, non au point G, mais perpendiculairement à l'axe de rotation.

Il faut encore remarquer que la direction MG perpendiculaire à MG doit être tirée dans un plan parallele au plan GFP. Enfin je confidere ici la grandeur du membre M, comme extrêmement petite, ou prefque comme un point.

XIII.

Si le membre M étoit d'une grandeur confidérable, la premiere des deux forces trouvées $M\pi = m.\frac{P}{M}$, demeureroit bien la même, mais l'autre doit être trouvée par la voie d'intégration.

On concevra le membre entier M partagé dans fes élémens infiniment petits, & on cherchera pour chacun la force MG, qui lui convient tant par rapport à la quantité qu'à la direction, & on déterminera par le calcul intégral la force équivalente à toutes ces forces élémentaires, qui fera celle qu'on doit joindre à la premiere MG.

Mais ſi le membre M eſt aſſez petit par rapport au vaiſſeau entier, on pourra bien l'enviſager comme réuni dans ſon centre de gravité, & cela avec d'autant plus de raiſon, puiſque les recherches dont il s'agit ici ne ſont pas ſuſceptibles, par leur nature, d'un plus haut degré de préciſion.

XIV.

Si le vaiſſeau eſt en même tems ſollicité par pluſieurs forces, ou on cherchera l'effet de chacune ſur les divers membres, pour en conclure l'effet total que chaque membre en doit reſſentir, ou on réduira toutes les forces ſollicitantes à une ſeule.

Et c'eſt par ce moyen qu'on connoîtra les efforts que l'aſſemblage de toutes les parties a à ſoutenir, le vaiſſeau étant ſollicité par des forces quelconques.

Mais cela doit s'entendre ſeulement des parties qui ne ſont pas elles-mêmes ſollicitées par aucune force, étant uniquement emportées par leur union avec le corps du vaiſſeau.

Si la queſtion regarde la partie qui ſoutient immédiatement l'action de la force externe, il faut encore ajoûter cette même force à celles que nous venons de trouver ci deſſus.

Ainſi l'aſſemblage, dont chaque partie tient au corps du vaiſſeau, ſoutient premierement les forces qui ſont appliquées immédiatement à cette partie, & enſuite encore les forces $M\pi$ & MG qui réſultent, ſelon les regles données de l'action, de toutes les forces qui agiſſent ſur le vaiſſeau.

XV.

D'abord, toutes les parties d'un vaiſſeau étant animées par la gravité, j'ai déja remarqué que puiſque la gravité ſuit la raiſon des maſſes, l'aſſemblage ne ſouffre rien de ce côté.

En effet, ſi le vaiſſeau n'étoit pas ſoutenu par la preſſion de l'eau, & qu'il pût librement tomber en-bas, il n'en réſulteroit aucune force pour altérer la liaiſon des membres.

Mais le vaiſſeau étant ſoutenu par la force de l'eau, l'aſſemblage ſent bien la force de la peſanteur; or c'eſt à cauſe de la force même dont le vaiſſeau eſt ſoutenu; & cet effet eſt très-conforme aux formules trouvées.

Car ſoit FP la force de l'eau, & elle ſera égale au poids du vaiſſeau, ou $P = M$, & la direction FP ſera verticale, paſſant par le centre de gravité G; d'où $GN = 0$, & la force $MG = 0$. Donc le membre M agira de même ſur l'aſſemblage que s'il étoit ſollicité verticalement en bas par la force $M\pi = m$, qui eſt égale à ſon propre poids.

XVI.

Ainſi tant que le vaiſſeau eſt en repos, l'aſſemblage des parties ne ſoutient d'autres efforts que ceux de leur gravité, à l'exception de la ſurface de la carene, qui eſt pouſſée par la preſſion de l'eau.

De-là on pourra déterminer quelle doit être la force de l'aſſemblage des membres du vaiſſeau, afin qu'il ſoit ſuffiſant pour réſiſter à ces efforts, & que la figure du vaiſſeau n'en ſoit point altérée.

C'eſt au défaut d'une ſuffiſante force de l'aſſemblage, que les vaiſſeaux changent ſouvent de figure, & que la quille s'arque. Comme c'eſt un grand inconvénient, quoiqu'il ne regarde pas directement la queſtion propoſée, il ne ſera pas hors de propos de chercher la force que la quille d'un vaiſſeau a à ſoutenir; puiſque nos principes y conduiſent naturellement, & que quelques Auteurs qui ont traité cette matiere, n'ont pas fait réflexion à toutes les circonſtances auxquelles il faut avoir égard dans cette recherche.

XVII.

Fig. 5. Concevons un vaiſſeau $ABCD$, coupé en EF par une ſection verticale ou perpendiculaire à la quille CD, & examinons toutes les forces qui agiſſent ſur la partie $BEFD$ pour la ſéparer, ou rompre ſon union du reſte $AEFC$, que je conſidere comme immobile.

Cette partie $BEFD$ eſt d'abord ſollicitée en-bas par ſa gravité, dont la direction paſſe par le centre de gravité g de cette partie : donc ſi nous poſons le poids de cette partie $=p$, la verticale gxp ſera la direction de cette force.

Enſuite, pour avoir la force qui réſulte des preſſions de l'eau ſur cette partie, concevons cette partie comme ſéparée & fermée dans la ſection EF par un plan ; & alors la force de l'eau la pouſſera verticalement en-haut, étant égale au poids d'un volume d'eau, qui eſt égal à la partie ſubmergée.

Soit donc cette force $=q$, & ſa direction paſſera par le centre de gravité o, du volume ſubmergé de cette partie. Donc ſi cette partie $BEFD$ étoit ſéparée du vaiſſeau, elle ſeroit ſollicitée par les deux forces $gp=p$ & $oq=q$, dont celle-là tireroit en-bas & celle-ci en-haut.

XVIII.

Mais puiſque cette partie n'eſt pas ſéparée du reſte du vaiſſeau, & qu'elle ne ſoutient aucune preſſion par la ſection EF, il en faut retrancher ou appliquer ſous une direction contraire la force que la ſection EF éprouveroit de la preſſion de l'eau.

Soit donc e le centre des preſſions de l'eau ſur la ſection EF de la carene ; ſi elle étoit fermée par un plan, & que la preſſion totale ſur ce plan fût $=r$, dont la direction ſeroit horizontale, l'aſſemblage en EF ſoutiendroit

tiendroit le même effort que si la partie $BEFD$ étoit tirée par ces trois forces :

$$1^o.\ gp = p;\quad 2^o.\ oq = q;\quad \&\ 3^o.\ er = r.$$

Par conséquent la quille soutient en F ces mêmes forces qui tendront à la courber ou rompre en F, entant que l'assemblage des parties supérieures n'en soutient pas une partie.

Donc le moment de ces trois forces sur le point F est $p.Fx - q.Fy - r.Fe$; & partant, si cette expression évanouissoit, la quille n'éprouveroit aucun effort, & il n'y auroit point à craindre qu'elle s'arquât.

XIX.

Concevons la section EF faite par le milieu du vaisseau, puisque c'est ordinairement là que la quille risque le plus d'être courbée; & dans ce cas on pourra supposer $q = p$. de sorte que le moment en question est alors $p.xy - r.Fe$.

Or les extrêmités du vaisseau étant ordinairement les plus pesantes, tandis que la carene est vers ces endroits très-mince, la force gp est beaucoup plus éloignée du milieu que la force oq: par conséquent le terme $p.xy$ fournit un grand moment pour arquer la quille par le milieu F en-haut.

Quelque inévitable que paroisse cet inconvénient, on le pourra pourtant éviter ou diminuer.

Pour cet effet on n'a qu'à faire la section du milieu fort spatieuse, & beaucoup plus large par en-haut qu'enbas; le premier servant à aggrandir la force r, & l'autre à augmenter l'intervalle Fe. Cependant les autres circonstances ne permettent pas de changer beaucoup à cet égard.

SECONDE PARTIE.

Des efforts que l'aſſemblage des membres éprouve pendant que le vaiſſeau marche, ſans être aſſujetti aux mouvemens de roulis & de tangage.

XX.

AVANT que de chercher les efforts dont l'aſſemblage des membres d'un vaiſſeau eſt agité pendant les oſcillations compriſes ſous les noms de roulis & de tangage, il ſera bon de déterminer ceux qu'il éprouve pendant que le vaiſſeau marche uniformément, & que la force dont il eſt pouſſé demeure toujours la même, comme auſſi la force de la réſiſtance de l'eau; de ſorte que le vaiſſeau ne ſoit porté que d'un mouvement progreſſif.

On diſtingue ici deux cas, ſelon que le vaiſſeau marche directement ou obliquement : or dans l'un & l'autre il n'y a que deux forces à conſidérer, ſavoir la force mouvante & celle qui réſiſte. Ces deux forces ſe tiennent en équilibre, tandis que le vaiſſeau marche uniformément; mais ſi l'une ſurpaſſe l'autre, le mouvement ſera ou accéléré ou retardé.

XXI.

Tant que le vaiſſeau marche uniformement, puiſque les forces d'impulſion & de réſiſtance ſe détruiſent, les membres du vaiſſeau auxquels ces forces ne ſont pas immédiatement appliquées, n'en ſentent aucun effet; & par conſéquent ils n'agiſſent ſur l'aſſemblage que par leur propre poids.

Mais pour les membres qui reçoivent immédiatement le choc ou de l'impulſion ou de la réſiſtance, leur aſſemblage ſoutient encore ce choc outre leur poids; d'où il eſt aiſé de déterminer les efforts auxquels l'aſſemblage de tous les membres du vaiſſeau eſt aſſujetti.

Pour les efforts qui tendent à arquer la quille, le mouvement, quoiqu'il ſoit uniforme, y cauſe quelque changement, d'où leur effet eſt pour la plupart diminué; car puiſque la réſiſtance augmente la preſſion de l'eau ſur la proue, ſi nous conſidérons la partie $BEFD$ (fig. 5.) comme la proue, la force oq devenant plus grande, il en réſultera un moindre moment pour courber la quille; & de-là vient ſans doute que les vaiſſeaux étant en mer ſont moins aſſujettis à ſe courber que quand ils ſont en repos.

XXII.

Quand le mouvement du vaiſſeau n'eſt pas uniforme, ce qui arrive lorſque les forces d'impulſion & de réſiſtance ne ſont pas en équilibre, il ſuffira d'examiner deux cas principaux; l'un, où le vaiſſeau, étant encore en repos, reçoit ſubitement une impulſion; & l'autre, où le vaiſſeau ayant juſqu'ici marché uniformément, l'impulſion vient ſubitement à manquer.

Dans le premier cas, la force d'impulſion n'étant pas encore contrebalancée par la réſiſtance, tous les membres du vaiſſeau s'en reſſentiront, conformément aux principes que j'ai établis ci-deſſus; & la même choſe doit arriver dans l'autre cas, où la réſiſtance, puiſque le vaiſſeau continue encore ſon mouvement, n'étant plus balancée par la force d'impulsion, produit un semblable effet sur toutes les parties du vaisseau.

Il est vrai que cet effet sera de peu de durée, & qu'il diminuera assez promptement, parce que le vaisseau approche fort vîte de l'état d'équilibre; mais un effort bien court peut souvent produire des effets fâcheux; & il sera bon de connoître aussi ces effets, puisqu'ils se mêlent souvent à ceux du roulis & du tangage, & les rendent plus redoutables.

XXIII.

Supposons donc que la force d'impulsion vienne subitement à manquer; & puisque, du moins au premier instant, le vaisseau continue encore son mouvement, il éprouvera encore la même résistance, qui sera d'autant plus grande, que sa vîtesse aura été plus rapide.

FIG. 4. Que la ligne FP (*fig.* 4) exprime donc la force de la résistance, qui soit $= R$, dont la direction tend en arriere & est élevée au-dessus de l'horizon.

Soit G le centre de gravité du vaisseau, d'où l'on tire sur FP la perpendiculaire GN, & qu'on conçoive mené par G un axe perpendiculaire au plan GFP, par rapport auquel le moment d'inertie du vaisseau soit $= Mkk$, sa masse étant $= M$.

Maintenant si l'on considere une partie quelconque du vaisseau en M, dont la masse soit $= m$, on n'a qu'à tirer d'abord la droite $M\pi$ parallele à FP, & en sens contraire; & ayant mené à l'axe de rotation de M la perpendiculaire MG, qu'on tire ensuite la droite Mg perpendiculaire à MG & parallele au plan GFP, de sorte qu'une force selon Mg produiroit un mouvement de rotation contraire à la force FP.

Cela posé, l'assemblage qui affermit la partie M au corps du vaisseau, éprouvera les deux forces suivantes:

1°. Une force selon $M\pi = m. \frac{R}{M}$,

2°. Une force selon $Mg = m. \frac{R. GN. GM}{Mkk}$;

auxquelles il faut encore ajoûter la pesanteur de la partie M, qui est $= m$.

XXIV.

Posons que la proue éprouve la même résistance horizontale qu'un plan $= ff$, qui se mouvroit directement dans l'eau avec la même vitesse, & que la vitesse du vaisseau soit dûe à la hauteur $= v$; alors la résistance horizontale seroit ffv.

Donc si l'élévation de la droite FP au-dessus de l'horizon est θ, la force entiere de l'eau sur la proue sera $\frac{ffv}{cos. \theta} = R$; posons aussi le poids du vaisseau entier égal à celui d'un volume d'eau $= ffh$, pour avoir $M = ffh$; & dans les vaisseaux semblables la quantité h sera proportionnelle à f.

De-là nous aurons, pour la partie M, la force $M\pi = m. \frac{v}{h\ cos. \theta}$; d'où il est clair, que la vitesse étant la même, cette force est plus petite dans les grands vaisseaux.

Il en est de même de l'autre force $Mg = m. \frac{R. GN. GM}{Mkk}$;

car quoiqu'en supposant toutes les choses semblables, les lignes GN & GM soient en raison des côtés homologues, la quantité k suit aussi la même raison.

D'où il est clair, que supposant la vîtesse la même, les secousses que les membres d'un vaisseau éprouvent dans le cas présent, sont moindres dans les grands vaisseaux que dans les petits, par conséquent dans ceux-là l'équipage en est moins fatigué.

XXV.

Il eſt auſſi clair que plus la direction de la réſiſtance FP s'éleve au-deſſus de l'horizon, plus la force R devient grande, & conſéquemment auſſi les ſecouſſes qu'en reſſent la partie M; mais ſurtout l'effort ſelon $M\pi$ doit devenir beaucoup plus violent.

Car ſi la direction FP étoit horizontale, & qu'elle paſſât par le centre de gravité, la force Mg évanouiroit tout-à-fait; mais étant inclinée à l'horizon, tirons à elle l'horizontale GR qui ſoit $= a$, & à cauſe de l'angle $GRN = \theta$, nous aurons $GN = a\, ſin.\, \theta$, donc $R.GN = a ff v\, tang.\, \theta$; d'où l'on voit que le reſte étant égal, l'effort Mg (Fig. 4) croît en raiſon de la tangente de l'angle d'élévation $GRN = \theta$.

Cependant cette raiſon n'eſt pas ſuffiſante, pour qu'on doive tâcher de diminuer l'angle GRN; car il y a d'autres raiſons beaucoup plus importantes, qui demandent le contraire; & d'ailleurs l'inconvénient rapporté n'eſt d'aucune conſéquence, puiſque le vaiſſeau doit être capable d'eſſuyer des ſecouſſes beaucoup plus violentes.

XXVI.

Si, au lieu de la réſiſtance de l'eau, nous ſuppoſons que le vaiſſeau heurte contre un écueil, les formules trouvées marqueront les ſecouſſes que tous les membres en doivent reſſentir.

Alors on n'a qu'à ſubſtituer pour R la force que le vaiſſeau éprouve par le choc, qui dépend premierement de la maſſe du vaiſſeau, enſuite de ſa viteſſe, & en troiſieme lieu de la dureté tant du vaiſſeau que du rocher à l'endroit où ſe fait le choc.

Si les deux corps, qui ſe choquent, étoient parfaitement, ou ce qui revient au même, infiniment durs, de ſorte qu'ils ne ſoient point du tout ſuſceptibles du moindre enfoncement, leur mouvement devroit ſubir dans un inſtant un changement fini, dont la production demande une force infiniment grande.

Dans ce cas donc la force R ſeroit infinie, & tous les aſſemblages dont les membres du vaiſſeau ſont affermis enſemble, quelques forts qu'ils puiſſent être, ſe devroient briſer ſubitement. Mais le vaiſſeau étant réduit en repos par ce choc dans un inſtant, ces ſecouſſes infiniment violentes ne ſauroient durer qu'un moment.

XXVII.

Il eſt auſſi évident que le choc ſera d'autant plus doux, que les deux corps qui ſe choquent ſeront plus mous & plus ſuſceptibles d'enfoncement; d'où l'on voit, que pour connoître la violence d'un choc, il ne ſuffit pas qu'on ſache les maſſes & les vîteſſes des corps choquans, comme on pourroit le croire en conſultant les idées communes des forces des corps, mais qu'il faut auſſi faire attention à leur dureté.

Mais le degré de dureté ſe détermine par l'enfoncement que deux corps preſſés l'un contre l'autre par une force donnée reçoivent; & l'enfoncement ſe meſure par l'eſpace dont les deux corps ſe pénetrent, ou dont leurs centres de gravité ſe rapprochent au-delà de leur diſtance dans le contact ſimple.

Pour tenir compte de cet effet dans le calcul, nous pourrons conſidérer un reſſort comme tu entre les corps choquans, dont l'un ſoit le vaiſſeau $ACDB$, & l'autre l'écueil V. Soit donc i la longueur naturelle de ce reſſort, qu'il a au premier inſtant du choc, & ſuppoſons qu'elle ſe réduiroit à $i-\alpha$, ſi le vaiſſeau étoit ſimplement preſſé contre l'écueil par une force donnée A, de ſorte que α meſure l'enfoncement produit par la force A.

XXVIII.

De-là on comprend que plus les corps ſont durs ; & plus petit ſera l'enfoncement α produit par la force donnée A ; & ſi les corps étoient infiniment durs, l'enfoncement α évanouiroit tout-à-fait.

Mais ſachant l'enfoncement α qui répond à la force A, une force plus grande en produira auſſi un plus grand ; ce qui dépend de la nature des corps ; cependant quand les enfoncemens ſont très-petits, il ſera permis de les ſuppoſer proportionnels aux forces comprimantes ; de ſorte que pour produire un enfoncement z, la force doit être $\frac{Az}{\alpha}$.

Or z exprime en même tems l'eſpace dont le vaiſſeau ſera avancé à l'écueil depuis le premier contact : poſant donc la vîteſſe du vaiſſeau, avant que de rencontrer l'écueil, dûe à la hauteur c (Fig. 5), & celle qu'il aura après s'être enfoncé par l'eſpace z, dûe à la hauteur v ; on aura $dv = \frac{-Az\,dz}{M\alpha}$, par conſéquent $v = c - \frac{Azz}{2M\alpha}$, ou $c - v = \frac{Azz}{2M\alpha}$.

De-là on connoîtra pour chaque degré de vîteſſe que le vaiſſeau aura pendant le choc, l'enfoncement $z = \sqrt{\frac{2M\alpha(c-v)}{A}}$; & de-là auſſi la force dont le vaiſſeau ſera alors repouſſé $\frac{Az}{\alpha} = \sqrt{\frac{2AM(c-v)}{\alpha}}$.

XXIX.

Cette force ſera donc la plus grande, lorſque le mouvement du vaiſſeau ſera tout-à-fait détruit, ou

$v = 0$,

$v = o$, & c'eſt de ce point d'où il faut eſtimer la force du choc.

Poſons donc $v = o$, & la force que le vaiſſeau eſſuiera par ce choc ſera $\sqrt{\frac{2AMc}{\alpha}}$, d'où l'on voit qu'elle ſeroit infinie, ſi la dureté étoit infinie ou $\alpha = o$, & qu'en général elle dépend principalement du degré de dureté, & qu'elle eſt réciproquement comme la racine quarrée de l'enfoncement α cauſé par une preſſion donnée A.

Mais la dureté demeurant la même, cette force eſt comme $\sqrt{Mc}$, c'eſt-à-dire comme la racine quarrée de la force vive Mc (Fig. 6) du corps chocquant, le corps chocqué ou l'écueil étant immobile. *FIG. 6.*

On n'a donc qu'à ſubſtituer cette expreſſion $\sqrt{\frac{2AMc}{\alpha}}$ au lieu de R, pour connoître les efforts que tous les membres du navire reſſentent d'un tel choc.

XXX.

Paſſons maintenant à l'autre cas, & ſuppoſons que le vaiſſeau étant encore en repos, ſoit frappé ſubitement par la force $FP = P$, dont la direction ſoit horizontale ; pour toute autre direction quelconque, la recherche n'en deviendroit pas plus difficile.

Qu'on y tire du centre de gravité G la perpendiculaire GN, & l'axe de rotation ſera perpendiculaire au plan GNP, enſuite conſidérant une partie quelconque M, dont la maſſe ſoit m, on tirera d'abord la droite $M\pi$ parallele à FP, mais en ſens contraire ; & après avoir mené de M à l'axe de rotation la perpendiculaire Mg, on y fera Mg perpendiculaire dans un plan parallele au plan GFP ; enſorte qu'une force Mg auroit un moment contraire au moment de la force FP.

Maintenant la maſſe du vaiſſeau entier étant M, & ſon moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Mkk, l'aſſemblage qui tient la partie M ſoutiendra ces deux forces :

1°. Une force ſelon $M\pi = m. \frac{P}{M}$.

2°. Une force ſelon $Mg = m. \frac{P. GN. GM}{Mkk}$;

& cela à cauſe de l'action de la force FP : car outre ces deux forces la partie M agit encore par ſon propre poids ſur l'aſſemblage, comme je l'ai remarqué ci-deſſus.

XXXI.

Donc auſſitôt qu'un vaiſſeau, qui a été juſqu'ici en repos, eſt pouſſé par la force FP en avant, tous les membres s'en reſſentent, étant d'abord pouſſés en arriere ſelon $M\pi$ par des forces proportionnelles à leurs maſſes.

Mais outre cela, entant que la force FP ne paſſe pas par le centre de gravité G, chaque membre ſe trouve encore ſollicité par une force ſelon Mg, qui eſt $m. \frac{P. GN. GM}{Mkk}$, par laquelle il s'oppoſe à l'inclinaiſon du vaiſſeau en avant, que la force FP tend à produire; & cet effort Mg ſera d'autant plus grand, que les deux diſtances GM & GN ſeront plus grandes; mais réciproquement un grand moment d'inertie du vaiſſeau diminue cet effort.

Comme ces efforts ſont aſſez ordinaires, il ne ſuffit pas que l'aſſemblage ſoit aſſez fort pour les ſoutenir; c'eſt à des ſecouſſes plus rudes qui ſe trouvent dans les mouvemens de roulis & de tangage, qu'il faut tâcher de remédier.

TROISIEME PARTIE.

Des efforts que les membres d'un navire éprouvent des mouvemens de Roulis.

XXXII.

QUAND il s'agit de déterminer les efforts que l'assemblage des membres d'un vaisseau éprouve par les mouvemens de roulis, il faut distinguer deux especes de forces ; l'une qui imprime au vaisseau un tel mouvement, & l'autre dont ce mouvement, tant qu'il dure, est accompagné.

Toute force qui fait incliner le vaisseau de côté autour de l'axe longitudinal, quand elle cesse d'agir, lui imprime un mouvement réciproque, ou un balancement, qu'on nomme roulis. Ce mouvement est ordinairement produit ou par un choc contre les flancs du vaisseau, ou parce que la surface de la mer se trouve plus élevée d'un côté que de l'autre.

Dans l'un & l'autre cas le vaisseau doit s'incliner vers un côté ; & connoissant la force qui produit cet effet, il sera aisé, par les principes que je viens d'établir, de déterminer les efforts que l'assemblage soutient.

XXXIII.

Si ce n'est que le choc d'une lame par le côté que le vaisseau reçoit, la surface de l'eau demeurant horizontale, l'effet n'en ſauroit être fort conſidérable par rapport à l'inclinaiſon. Car ſi le contour des gabaris EDF étoit circulaire, & que l'axe longitudinal paſſât par le centre G, la direction d'un choc quelconque en P paſſeroit par le centre G, & n'auroit, par conſéquent, aucun moment pour incliner le vaiſſeau.

La même choſe arriveroit, ſi la figure du gabaris étoit un polygone inſcrit dans ce cercle. Mais quoique la figure des gabaris n'ait point cette propriété, elle n'en differe pas aſſez énormément pour qu'il en puiſſe naître une grande inclinaiſon ; & il ne vaut pas la peine de tirer de là une regle pour la conſtruction des gabaris, qui doit être reglée ſur des maximes beaucoup plus importantes.

XXXIV.

Fig. 7. Mais ſi la ſurface de la mer n'eſt pas horizontale, & que d'un côté la partie Ee (Fig 7) au-deſſus de l'horizon EF ſoit enveloppée dans les flots, pendant que de l'autre côté une partie Ff en eſt dégagée, deſorte que la ligne $\varepsilon e f \zeta$ repréſente la ſurface de la mer ; le vaiſſeau ne ſauroit plus être en équilibre, & doit ſubir quelque inclinaiſon, ſon poids n'étant plus balancé par la preſſion de l'eau.

Pour ce qui regarde la détermination mathématique de la preſſion que le vaiſſeau éprouve dans cet état, il faut avouer que les principes de l'Hydroſtatique ne ſont pas encore développés pour en pouvoir déterminer les preſſions d'un fluide agité, ou dont la ſurface n'eſt pas horizontale.

Cependant, quelle que ſoit cette force, ce n'eſt pas ici le lieu de s'en embarraſſer beaucoup, puiſque cette force ne ſauroit jamais devenir ſi grande, qu'il y faille faire attention, quand il s'agit de délivrer les vaiſſeaux des effets fâcheux que peuvent cauſer les mouvemens de roulis & de tangage.

XXXV.

De ce que j'ai expliqué dans l'article précédent, il eſt aſſez clair que ce ne ſont pas tant les forces mêmes qui ſont les plus dangereuſes, que leurs momens par rapport à un axe de rotation. Car quelque grande que ſoit une force (je ne parle ici que des forces qui ſe trouvent dans les agitations ordinaires), ſi ſa direction paſſoit par le centre de gravité du vaiſſeau, les efforts des membres ſur l'aſſemblage ne ſeroient gueres à craindre; mais ſi ſa direction paſſe fort loin au-delà du centre de gravité, la force en acquiert un grand moment, & pourra bien cauſer un mauvais effet, quand même la force ne ſeroit pas fort grande.

On comprend aiſément que quoique nous ne puiſſions pas déterminer la preſſion d'une eau agitée, ou dont la ſurface n'eſt pas horizontale, ſa direction ne ſauroit être fort éloignée de l'axe de rotation, ni ſon moment très-grand. Par conſéquent, puiſque l'aſſemblage doit réſiſter à des momens beaucoup plus grands, comme nous verrons bientôt, il n'y a rien à craindre des forces dont je parle ici.

XXXVI.

Le vaiſſeau ayant été incliné par quelque force que ce ſoit, dès que la force ceſſe d'agir, il ſe remettra en équilibre, & paſſant encore au-delà, recevra un mouvement d'oſcillation qui durera juſqu'à ce qu'il ſoit éteint par la réſiſtance de l'eau, ou quelque autre cauſe.

S'il n'y a que la réſiſtance de l'eau qui s'oppoſe au mouvement de roulis, il ſe perpétue aſſez longtems, parce que la réſiſtance, dans ce cas, n'eſt pas conſidérable. Car ſi tous les gabaris étoient des cercles, dont les centres ſe trouvaſſent dans l'axe de rotation, le mouvement de roulis ſe pourroit continuer ſans aucun déplacement d'eau, & conſéquemment la réſiſtance évanouiroit : donc puiſque la véritable figure des gabaris ne differe pas tant de la dite figure circulaire, qu'il en puiſſe naître une réſiſtance aſſez conſidérable, le mouvement de roulis ne ſera pas ſitôt éteint, à moins qu'une autre force étrangere ne ſurvienne.

Mais il n'en eſt pas de même du mouvement de tangage, qui doit être bientôt éteint par la réſiſtance de l'eau.

XXXVII.

Suppoſons que le vaiſſeau ait acquis une inclinaiſon autour de l'axe longitudinal, & qu'il ſoit relâché préſentement, n'étant plus aſſujetti à l'action d'aucune force étrangere, & que la mer ſoit auſſi parfaitement calme.

Le vaiſſeau fera donc des oſcillations ſemblables à celles d'un pendule, pourvu que l'inclinaiſon ne ſoit pas trop grande, & qu'on faſſe abſtraction du mouvement du centre de gravité, entant qu'il monte & deſcend alternativement ; car ce mouvement étant fort petit, n'eſt d'aucune conſéquence dans la recherche pré ente.

Ces oſcillations feront par conſéquent iſochrones à celles d'un pendule ſimple, dont la longueur ſe détermine par cette regle bien ſimple :

Soit St la ſtabilité du vaiſſeau par rapport à l'axe longitudinal, & Mkk le moment d'inertie par rapport au même axe ; cela poſé cette expreſſion $\frac{Mkk}{St}$ donne la longueur du pendule ſimple, iſochrone au mouvement oſcillatoire du vaiſſeau, tant qu'il dure.

XXXVIII.

Ces oſcillations ſeront donc d'autant plus vives, que la quantité $\frac{Mkk}{St}$ ſera plus petite, & ſi l'on veut ralentir leur mouvement, on n'a qu'à procurer une grande valeur à l'expreſſion $\frac{Mkk}{St}$ pour rendre ces oſcillations iſochrones à celles d'un pendule fort long.

Pour cet effet il faut tâcher d'augmenter d'un côté le moment d'inertie Mkk autant qu'il eſt poſſible, & de diminuer de l'autre côté la ſtabilité St; mais ce dernier remede eſt directement oppoſé aux autres bonnes qualités qu'un vaiſſeau doit avoir.

Auſſi à l'égard des oſcillations il faut remarquer que la diminution de la ſtabilité ne ſauroit produire un bon effet; car alors le vaiſſeau ſouffriroit par l'action de la même force une plus grande inclinaiſon, & puiſque les oſcillations deviendroient par-là plus grandes, elles ſeroient auſſi incommodes que ſi elles étoient plus promtes, mais plus petites en même tems.

Par cette raiſon, il ſera toujours bon de laiſſer à la ſtabilité ſa juſte valeur, mais d'augmenter le moment d'inertie Mkk autant qu'il eſt poſſible; ce qu'on obtiendra en éloignant les fardeaux le plus qu'on peut de l'axe longitudinal du vaiſſeau.

XXXIX.

Pour s'éclaircir tout-à-fait ſur cette matiere, il faut conſidérer les efforts que l'aſſemblage des membres a à ſoutenir dans le mouvement de roulis. Que le vaiſſeau ſe trouve incliné de ſon état naturel par l'angle φ, le moment de force pour ſe remettre en équilibre ſera

$S t \varphi$; le vaiſſeau entier eſt donc ſollicité à un mouvement de rotation autour de l'axe longitudinal par le dit moment de force, ſans qu'il y ait une force qui agiſſe ſur le centre de gravité même.

De-là naîtra dans chaque membre du vaiſſeau un effort ſur l'aſſemblage, que nous connoîtrons par la formule expliquée ci-deſſus, $m. \frac{P. GN\ GM}{Mkk}$; ſi nous y ſubſtituons, au lieu de $P.GN$, le moment $S t \varphi$, qui a lieu dans cet état d'inclinaiſon.

Par conſéquent, l'effort dont chaque membre agit ſur l'aſſemblage, ſera exprimé par cette formule $m. \frac{S t \varphi. GM}{Mkk}$.

XL.

Pour rendre cela plus clair, conſidérons un membre quolconque M du vaiſſeau, par lequel on faſſe paſſer une ſection verticale EDF, perpendiculaire à l'axe longitudinal qui paſſe par le point G de la ſection.

Soit ef la ligne horizontale, & l'angle d'inclinaiſon $ECe = \varphi$; ſuppoſant que la droite EF ſoit horizontale dans l'état naturel du vaiſſeau. La ſtabilité St fera donc tourner le vaiſſeau autour du point G dans le ſens EDF, & par conſéquent l'aſſemblage du membre M, dont la maſſe ſoit m, ſoutiendra un effort ſelon la direction $M\rho$, perpendiculaire à la droite MG; & cet effort ſera $m. \frac{S t \varphi. GM}{Mkk}$, qui auroit un mouvement contraire à celui de la ſtabilité.

FIG. 8. Dans cet état donc, l'aſſemblage qui tient le membre M (Fig. 8) attaché au corps du vaiſſeau, ſera ſollicité, ſuivant la direction $M\rho$, par la force $m. \frac{S t \varphi. GM}{Mkk}$, d'où l'on voit, que plus le membre M

eſt

eſt éloigné du point G, plus auſſi ſera grand l'effort qu'il exerce ſur l'aſſemblage.

XLI.

De-là on pourra, à chaque inſtant du roulis, déterminer l'effort que ſoutient l'aſſemblage de tous les membres du vaiſſeau; & par conſéquent juger ſi l'aſſemblage eſt aſſez fort pour réſiſter. Mais il eſt évident que ces efforts ſont en raiſon de l'angle ϕ, de ſorte qu'ils évanouiſſent tout-à-fait quand le vaiſſeau paſſe à ſon état naturel, ou cet angle $ECe = \phi$ eſt $= o$; quoiqu'alors la viteſſe du mouvement de roulis ſoit la plus grande.

Au contraire, les efforts ſur l'aſſemblage ſeront les plus grands dans les plus grandes inclinaiſons où le mouvement de roulis évanouit; & puiſqu'alors $S\iota\phi$ eſt égal au moment de forces qui a d'abord imprimé au vaiſſeau la premiere inclinaiſon, ſi nous poſons ce moment, Pp, le plus grand effort dont le mouvement de roulis ſera accompagné ſe trouve $m. \frac{Pp. GM}{Mkk}$.

Donc, pour diminuer cet effort par la conſtruction du vaiſſeau, il ne reſte d'autre moyen que d'augmenter le moment d'inertie Mkk autant qu'il eſt poſſible.

XLII.

On voit donc que la ſtabilité elle-même n'entre point ici en compte, puiſque les ſecouſſes qui produiſent le mouvement de roulis étant données, l'expreſſion $S\iota\phi$ obtient la même valeur, ſoit que la ſtabilité $S\iota$ ſoit plus grande ou plus petite; par conſéquent cette condition ne s'oppoſe pas à la maxime générale, qui exige une auſſi grande ſtabilité qu'il eſt poſſible.

Comme il n'eſt pas dans notre pouvoir de modérer les ſecouſſes, il s'agit de diminuer l'expreſſion $\frac{m.\ G\ M.}{M\,k\,k}$; donc outre l'augmentation du mouvement d'inertie, on en peut tirer encore ces regles : 1°. *Qu'on n'éloigne pas trop les parties d'un vaiſſeau de l'axe longitudinal.* 2°. *Qu'on rende les parties les plus éloignées auſſi légeres qu'il eſt poſſible.*

Il eſt bien vrai que par un tel arrangement on diminueroit auſſi le moment d'inertie. Mais ſi l'on conſidere une des parties les plus éloignées, on voit bien que la diminution de ſa maſſe diminue la valeur $\frac{m.\ G\ M}{M\,k\,k}$ nonobſtant que le dénominateur Mkk en ſouffre auſſi quelque diminution.

XLIII.

Ce que je viens de dire ſuppoſe qu'après avoir reçu la ſecouſſe, la mer ſoit calme, & que le vaiſſeau ne ſoit plus aſſujetti à aucune force étrangere. Cependant on comprend aiſément que quoique le vaiſſeau marche directement ſelon ſa longueur, ce mouvement ne ſauroit troubler le roulis ; donc puiſque le roulis ſe continue aiſément, à cauſe du peu de réſiſtance qu'il rencontre, lorſque le vaiſſeau va vent arriere, il roulera à-peu-près autant que s'il demeuroit en repos, la force d'impulſion n'influant point ſur le mouvement de roulis.

Mais il n'en eſt pas de même lorſque le vaiſſeau va obliquement, ou qu'il court au plus près, car alors la force du vent inclinant le vaiſſeau à côté, concourt tout entiere avec les forces dont dépend le roulis ; & on obſerve effectivement que dans ce cas le mouvement de roulis eſt d'abord éteint.

XLIV.

Ce phénomene paroît dabord aiſé à expliquer ; car puiſque le vaiſſeau, lorſqu'il court au plus près, ſe trouve incliné à un côté par la force du vent, cette force, dit-on, doit modérer le roulis & empêcher qu'il ne ſe perpétue.

Mais quelque ſatisfaiſante que ſemble cette explication au premier coup d'œil, elle perd toute ſa force dès qu'on l'examine plus exactement. Car conſidérons d'abord le vaiſſeau incliné à un côté par la force du vent *VH*, que j'enviſage comme venant du côté oppoſé, en faiſant abſtraction du mouvement progreſſif, & le vaiſſeau ſera incliné juſques-là, ou la ſtabilité tiendra en équilibre la force inclinante.

Dans cet état, il y aura donc un vrai équilibre, lequel étant troublé par quelque cauſe que ce ſoit, il ſemble qu'il en devroit réſulter un moment oſcillatoire autour de l'état d'équilibre, en faiſant des excurſions de part & d'autre, tout comme dans le mouvement d'un pendule ; & juſqu'ici il ne paroît rien qui puiſſe arrêter la continuation d'un tel mouvement réciproque.

XLV.

Soit *GH* (Fig. 9) un mât dont les voiles reçoivent l'impulſion du vent *VH*, la droite *GJ* étant verticale, & par conſéquent l'angle *JGH* la meſure de l'inclinaiſon où le vaiſſeau ſe trouve en équilibre. *FIG. 9.*

Concevons que le vaiſſeau ait acquis quelque mouvement dans le ſens *HS*, par lequel l'inclinaiſon ſoit d'abord augmentée ; & puiſque le moment de la ſtabilité croît avec l'inclinaiſon, le mouvement ſera retardé juſqu'à ce qu'il ſoit éteint ; & enſuite le vaiſſeau retournera vers l'état d'équilibre *GH* par un mouvement accéléré, & sera porté au-delà; & ainsi il en résulteroit un mouvement oscillatoire assez régulier, puisque la résistance n'y met pas d'obstacle sensible. Et il n'y a aucun doute que ce mouvement se continueroit presque aussi facilement que dans le cas précédent, pourvu que la force du vent sur le mât demeurât toujours la même pendant le mouvement de roulis.

XLVI.

Mais dès que le mât *G H* acquiert un mouvement vers *G S*, l'impulsion du vent devient plus petite que s'il demeuroit en repos, & par conséquent le moment qui tend à rétablir le vaisseau sera plus grand. Donc le mouvement qui aura été imprimé au mât vers *H S* souffrira une plus forte retardation, & sera par cette raison une moindre excursion que si le mât demeuroit en repos, & que l'impulsion du vent fût la même.

Ensuite, quand le mât retournera de la situation plus inclinée *G S* vers *G H*, puisque son mouvement est dirigé contre le vent, il en recevra une plus forte impulsion, qui s'oppose au moment de la stabilité, d'où la force restituante deviendra plus petite que si l'impulsion du vent demeuroit la même que dans l'état de repos. Le mouvement de retour du mât sera donc moins accéléré, & quand il parviendra en *H*, il aura une beaucoup plus petite vitesse que celle dont il s'est éloigné, puisque les deux raisons alléguées concourent à produire cet effet.

XLVII.

Dans les oscillations ordinaires, le corps retourne à l'état naturel, avec la même vîtesse avec laquelle il en est parti; mais ici le mât étant sorti de la position *G H* avec une vitesse quelconque, il y reviendra avec une vitesse beaucoup plus petite; sa digression suivante vers *J* ſera encore moindre : & puiſqu'auſſi dans cette digreſſion la retardation eſt plus grande, & enſuite l'accélération plus petite, au ſecond retour en *H* ſa viteſſe ſe trouvera encore davantage diminuée ; d'où il eſt évident que dans ce cas le mouvement de roulis ne ſauroit ſe conſerver longtems.

Il peut même arriver que la ſeconde digreſſion vers *J* n'ait point lieu, & qu'au retour de la premiere, le mouvement ſoit déja éteint. Car puiſque dans le mouvement par *S, H* (Fig. 9) l'accélération eſt moindre que dans les oſcillations ordinaires, & que dans celles-ci l'accélération à l'arrivée en *H* évanouit, elle deviendra même négative dans le mouvement du mât par *S H* ; de ſorte que le mouvement en ſoit enfin retardé, &, ſelon la force de l'impulſion du vent, tout-à fait éteint ; ce qui eſt la véritable raiſon pourquoi dans ces cas le roulis n'eſt pas continué.

QUATRIEME PARTIE.

Des efforts que les membres d'un navire éprouvent des mouvemens de Tangage.

XLVIII.

CE que je viens de dire du mouvement de roulis, s'applique aisément à celui de tangage; & la derniere remarque nous découvre aussi la raison pourquoi les vaisseaux qui courent vent arriere, ne sont presque point susceptibles de tangage, parce que la force qui pousse le vaisseau en avant, détruit bientôt ce mouvement.

Un vaisseau n'est donc assujetti au tangage, que quand il est en repos, ou quand il court au plus près. Or toutes les forces qui sont capables d'incliner le vaisseau, ou par la proue, ou par la pouppe, le font aussi tanguer. Ce sont donc les chocs que le vaisseau reçoit par avant ou par derriere, qui lui impriment un tel mouvement, entant qu'il en résulte un moment par rapport à l'axe latitudinal du vaisseau; & outre cela l'agitation de la surface de la mer peut produire un semblable effet.

XLIX.

Concevons le vaisseau dans une situation inclinée autour de l'axe qui traverse le vaisseau selon sa largeur

FIG. 10. par le centre de gravité G (Fig. 10), & soit l'angle de l'inclinaison $CDc = \varphi$.

Que St marque ici la ſtabilité du vaiſſeau par rapport à l'axe latitudinal, & le moment de force par lequel le vaiſſeau tend à ſe rétablir en vertu de ſa ſtabilité ſera $St\varphi$, auquel eſt égal le moment d'une force externe qui ſeroit capable de produire cette inclinaiſon.

Soit enſuite Mkk le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport au même axe latitudinal.

Cela poſé, ſi nous voulons définir les efforts qu'une partie quelconque M exerce ſur l'aſſemblage dans cet état incliné, ſoit la maſſe de cette partie m, & qu'on en tire à l'axe d'inclinaiſon la perpendiculaire Mg, alors la force, que l'aſſemblage ſoutient, ſera $m.\frac{St\varphi.GM}{Mkk}$ & agira ſelon la direction Mg perpendiculaire à MG, & oppoſée à celle de la ſtabilité.

Cet effort ſera donc d'autant plus grand, que le membre M ſera plus éloigné de l'axe latitudinal, & qu'il ſera plus peſant lui-même.

L.

Le moment d'inertie Mkk étant beaucoup plus grand dans le cas du tangage que dans celui du roulis, on pourroit conclure de notre formule, que le tangage ne ſeroit pas ſi dangereux que le roulis. Mais quoique les chocs qui cauſent le tangage ſoient ſouvent plus rudes que ceux qui produiſent le roulis, d'où le numérateur eſt auſſi augmenté, cette ſeule force ne ſeroit jamais fort à craindre, & il faut chercher ailleurs la cauſe des funeſtes effets auxquels les vaiſſeaux ſont quelques fois expoſés par le tangage.

M. Chauchot croit avoir trouvé cette cauſe dans l'inégalité des deux extrêmités d'un vaiſſeau, & lorſque les fonds ſont trop taillés par rapport à la ligne d'eau en charge, parce qu'en ce cas tout le ſoutien du navire ſe trouvant à la flottaiſon, pour peu que la lame s'échappe ſoit à l'avant, ſoit à l'arriere, le navire doit tanguer d'une force prodigieuſe.

Il n'y a aucun doute que cette raiſon ne ſoit très-bien fondée, mais il faut la ramener aux premiers principes, qui contiennent la cauſe immédiate des effets en queſtion.

LI.

M. Chauchot a ici principalement en vue les carenes qui ſe retréciſſent ſubitement ſous la ligne d'eau, tant avant que derriere; car alors dès que le vaiſſeau s'incline, ſa ſection faite à fleur d'eau devient ſubitement fort mince vers ce côté, d'où ſon aire étant plus petite dans l'inclinaiſon, la ſtabilité en ſera diminuée; par conſéquent la même force pourra produire une plus grande inclinaiſon: ce qui contribuera beaucoup à l'augmentation du tangage.

Pour remédier à ce défaut, on n'a qu'à donner à la carene une telle figure, que lorſque le vaiſſeau s'incline ou vers la proue ou vers la pouppe, ſa ſection faite alors à fleur d'eau ne ſoit pas plus petite que celle qui convient à l'état d'équilibre; car on ſait que la ſtnbilité dépend beaucoup de l'aire de la ſection faite à fleur d'eau.

Il faut donc éviter une telle ſtructure, qui rendroit cette ſection plus petite dans l'état incliné que dans celui d'équilibre; & il ne paroît pas qu'un égal rétréciſſement vers la proue & vers la pouppe puiſſe remédier à ce défaut, l'un & l'autre étant également dangereux.

LII.

Cette circonſtance mérite bien d'être examinée plus ſoigneuſement.

Soit AB (Fig. 11) la ligne d'eau pour l'état d'équilibre; & que pour les plus grandes inclinaiſons, tant en arriere

arriere qu'en avant, les lignes aJb & $\alpha J\mathcal{C}$ qui se trouvent à fleur d'eau, représentent en même tems les sections du navire faites à la surface de la mer.

Il faut donc que les sections aJb & $\alpha J\mathcal{C}$ ne soient pas moindres que la section AJB; par conséquent, en considérant deux gabaris, πPpR & $qQ\xi S$, l'un vers la proue & l'autre vers la pouppe, si le vaisseau est plus large en P qu'en p, il faut qu'il soit plus large en q qu'en Q; & pareillement, si la largeur est plus grande en Q qu'en ξ, il faut qu'elle soit aussi plus grande en π qu'en P. Les gabaris πR & qS doivent donc être les plus larges en π & en q, pendant que celui du milieu, ou le maître gabaris JK, peut avoir sa plus grande largeur en J. Les plus grandes largeurs de tous les gabaris se doivent par conséquent trouver dans une ligne courbe $\alpha\pi Jqb$ qui s'éleve vers la proue & vers la pouppe.

LIII.

Il faudroit même que les sections aJb & $\alpha J\mathcal{C}$ fussent plus grandes que la section AJB, puisque ce n'est pas tant leur aire qui entre dans la détermination de la stabilité, que le moment d'inertie, qui leur conviendroit, si on leur concevoit une épaisseur infiniment mince; ce moment d'inertie devant être pris par rapport à l'axe latitudinal tiré par leur centre de gravité.

Donc puisque la section aJb est plus large vers b que vers a, son centre de gravité sera plus proche de b que de a; par conséquent, quoique la largeur vers b fût plus grande que vers a, le moment d'inertie pourroit être plus petit: de-là il s'ensuit que les aires des sections aJb & $\alpha J\mathcal{C}$ doivent être non-seulement égales, mais aussi plus grandes que l'aire de la section AJB, afin que leurs momens d'inertie ne soient pas plus petits.

Il seroit bon si l'on pouvoit rendre ces momens encore plus grands que celui de la section AJB.

LIV.

Par ce moyen on obtient l'avantage, que la stabilité du vaisseau croît avec l'inclinaison, ce qui doit diminuer les inclinaisons produites par la même force.

Mais la divergence des gabaris de la proue & de la pouppe au-dessus de la surface de la mer procure encore aux vaisseaux un autre avantage, qui est que les vaisseaux courrans au plus près s'inclinent moins à côté, ce qui les rend propres à porter plus de voiles. Car si dans ce mouvement oblique la seule stabilité s'opposoit à l'inclinaison, la force ne seroit que très-médiocre: il est donc fort important de donner aux navires une telle figure, que la résistance que les côtés éprouvent dans les routes obliques, produise aussi un moment qui tende à diminuer l'inclinaison.

Cet effet ne sauroit presque manquer, si les gabaris πR & $q S$ sont plus larges en π & q qu'en P & Q, puisqu'alors la direction de la résistance s'éleve davantage au-dessus de l'horizon, & quand on forme les gabaris ensorte que leurs élargissemens au-dessus de la section horizontale AB (Fig. 11) surpassent leurs rétrécissemens au-dessous, cet effet deviendra encore plus considérable.

LV.

Mais les plus funestes effets du tangage ne sont pas causés uniquement par la force de la stabilité qui s'oppose à l'inclinaison, la résistance que le vaisseau éprouve dans ce mouvement, y a ordinairement la plus grande part.

C'est aussi à l'égard de la résistance, que le tangage differe principalement du roulis; car au lieu que dans le roulis on peut presque entierement négliger la résistance de l'eau, ce qui est la raison que ces mouvemens se conservent longtems; il n'en est pas de même du tangage, où le vaisseau, en s'inclinant ou par la proue ou par la pouppe, déplace une si grande quantité d'eau, qu'il en doit naître une très-grande résistance, qui sera d'autant plus grande que le mouvement est plus rapide; & c'est aussi la raison pourquoi le tangage est bientôt détruit, à moins que les forces externes qui le produisent, ne soient répétées.

LVI.

Pour tenir compte de l'effet de la résistance dans le tangage, il faut distinguer deux tems, l'un où le navire s'éloigne de l'état d'équilibre AB (Fig. 10), en allant à la plus grande inclinaison, & l'autre où le vaisseau revient à son état d'équilibre; dans le premier tems la stabilité s'oppose au mouvement, & dans l'autre elle le favorise : dans l'un & l'autre la résistance s'oppose au mouvement.

Soit donc la résistance R, & son moment par rapport à l'axe de rotation Rr, la stabilité étant comme ci-dessus St.

Dans le premier tems, où le vaisseau s'éloigne de l'état d'équilibre, son inclinaison étant φ, la force qu'un membre quelconque M exerce sur l'assemblage sera $m . \frac{(St\varphi + Rr) . GM}{Mkk}$.

Or dans l'autre tems où le vaisseau retourne à l'état d'équilibre à la même inclinaison φ, cette force sera $m . \frac{(St\varphi - Rr) . GM}{Mkk}$.

LVII.

De-là il est clair que c'est le premier tems du tangage où le vaiſſeau s'éloigne de l'état d'équilibre, qui eſt le plus dangereux à l'aſſemblage, puiſqu'alors les deux forces de la ſtabilité & de la réſiſtance ſe joignent enſemble. Or la force totale étant compoſée de deux parties, la premiere $St\varphi$, qui vient de la ſtabilité, eſt nulle au commencement du premier tems, ou $\varphi = o$, & croît enſuite avec l'inclinaiſon; mais l'autre partie Rr qui vient de la réſiſtance, eſt au commencement de ce tems la plus grande, puiſque la vîteſſe du mouvement eſt alors la plus grande, & enſuite elle va en diminuant, à cauſe de la diminution de la vîteſſe; à moins qu'une nouvelle partie très-conſidérable ne vienne ſubitement ſe plonger dans l'eau, d'où pourroit bien réſulter une plus grande réſiſtance, quoique la vîteſſe ſoit moindre.

LVIII.

Il y a apparence que tous les effets fâcheux du tangage tirent leur origine d'une telle cauſe : car concevons un vaiſſeau dont la proue CA (Fig. 12) ſoit étendue au-deſſus de l'eau dans un grand volume AX, qui pendant que la proue ſe baiſſe, vienne ſe plonger ſubitement dans l'eau, en la frappant d'une grande vîteſſe; il eſt clair que le moment Rr pourroit acquérir une très-grande valeur.

Quand cela n'arrive que lorſque le vaiſſeau a déja acquis une médiocre inclinaiſon φ, l'effet eſt d'autant plus violent; effet qui ſera encore augmenté, ſi ce corps AX ſe précipite avec une grande vîteſſe dans l'eau, & qu'il la frappe perpendiculairement.

Enſuite ce corps ſe trouvant à l'extrêmité du vaiſſeau, il doit réſulter de ce choc un très-grand moment par rapport au centre de gravité G, d'où le moment de toute la réſiſtance Rr pourra devenir très-conſidérable.

LIX.

Ce cas a principalement lieu dans la pouppe qui porte l'accaſtillage, car lorſque la pouppe entre dans l'eau juſqu'à ſon fort, & cela avec une grande vîteſſe, tout le mouvement eſt preſque ſubitement arrêté, & de-là doit naître une prodigieuſe réſiſtance, qui augmentera d'autant plus les efforts ſur l'aſſemblage, que la vîteſſe ſera plus grande.

Si la vîteſſe, avant que d'entrer juſqu'à ſon fort, a été petite, la vîteſſe de ce choc ſera plus grande, d'où il peut arriver que l'effort $m. \frac{(St\varphi + Rr). GM}{Mkk}$ devienne plus foible, ſi le moment d'inertie Mkk eſt plus petit. Car alors l'effet de la ſeule ſtabilité, ou la partie $m. \frac{St\varphi. GM}{Mkk}$ étant plus grande, le vaiſſeau, avant que de ſe plonger juſqu'à ſon fort, perdra plus de ſon mouvement, & ſa vîteſſe à l'entrée du fort ſera moindre; d'où le moment de la réſiſtance Rr étant plus petit, l'expreſſion entiere $m. \frac{(St\varphi + Rr). GM}{Mkk}$ pourra avoir une moindre valeur, quoique le dénominateur Mkk ſoit plus petit.

C'eſt auſſi l'expédient que M. Chauchot propoſe pour diminuer dans ce cas le danger du tangage.

LX.

Je ne ſais pas ſi l'on peut toujours recourir ſûrement à cet expédient, en diminuant le moment d'inertie Mkk; car il faudroit être bien aſſuré que le numérateur de cette fraction $\frac{St\varphi + Rr}{Mkk}$ fût par ce moyen diminué dans une plus grande raiſon que le dénominateur; ce qui dépend de quantité d'autres circonſtances ; & ſi cela n'arrivoit pas on courroit encore de plus grands riſques.

CONCLUSION.

IL ſemble donc plus convenable qu'en procurant au moment d'inertie la plus grande valeur, on tâche de diminuer par d'autres moyens le moment de réſiſtance Rr; ce qui ſe pourroit faire en donnant au navire une telle figure, qu'avant de s'enfoncer juſqu'à ſon fort, il éprouve déja une grande réſiſtance, qui ſoit capable de diminuer aſſez ſa vîteſſe.

Mais enſuite le fond de l'accaſtillage ne devroit pas être plan, mais terminé obliquement, afin que l'enfoncement ſe faſſe peu-à-peu, & que la direction du choc ne ſoit pas verticale, mais inclinée à l'horizon autant qu'il ſe peut.

Comme le tangage eſt le plus dangereux, lorſque la force qui s'oppoſe à ſon mouvement eſt extrêmement grande, la même choſe doit avoir lieu dans le mouvement de roulis, où la réſiſtance de l'eau, que j'ai négligée ci-deſſus, doit auſſi augmenter les efforts des membres ſur l'aſſemblage.

Mais le plus grand danger doit ſe trouver dans le roulis, lorſque le vaiſſeau court au plus près, & cela par la même raiſon qui éteint ſitôt le mouvement. Car puiſque la force du vent ſur les voiles concourt avec la ſtabilité, pour s'oppoſer à une inclinaiſon ultérieure, les efforts des membres ſur l'aſſemblage en ſont auſſi augmentés, & ils ſeront d'autant plus violens, que la continuation du mouvement trouvera plus d'obſtacles. Et c'eſt préciſément le cas où le mouvement de roulis eſt capable de démâter les vaiſſeaux : or connoiſſant la véritable cauſe de ces effets, il ne ſera plus difficile de découvrir des moyens propres à les éviter.

FIN.

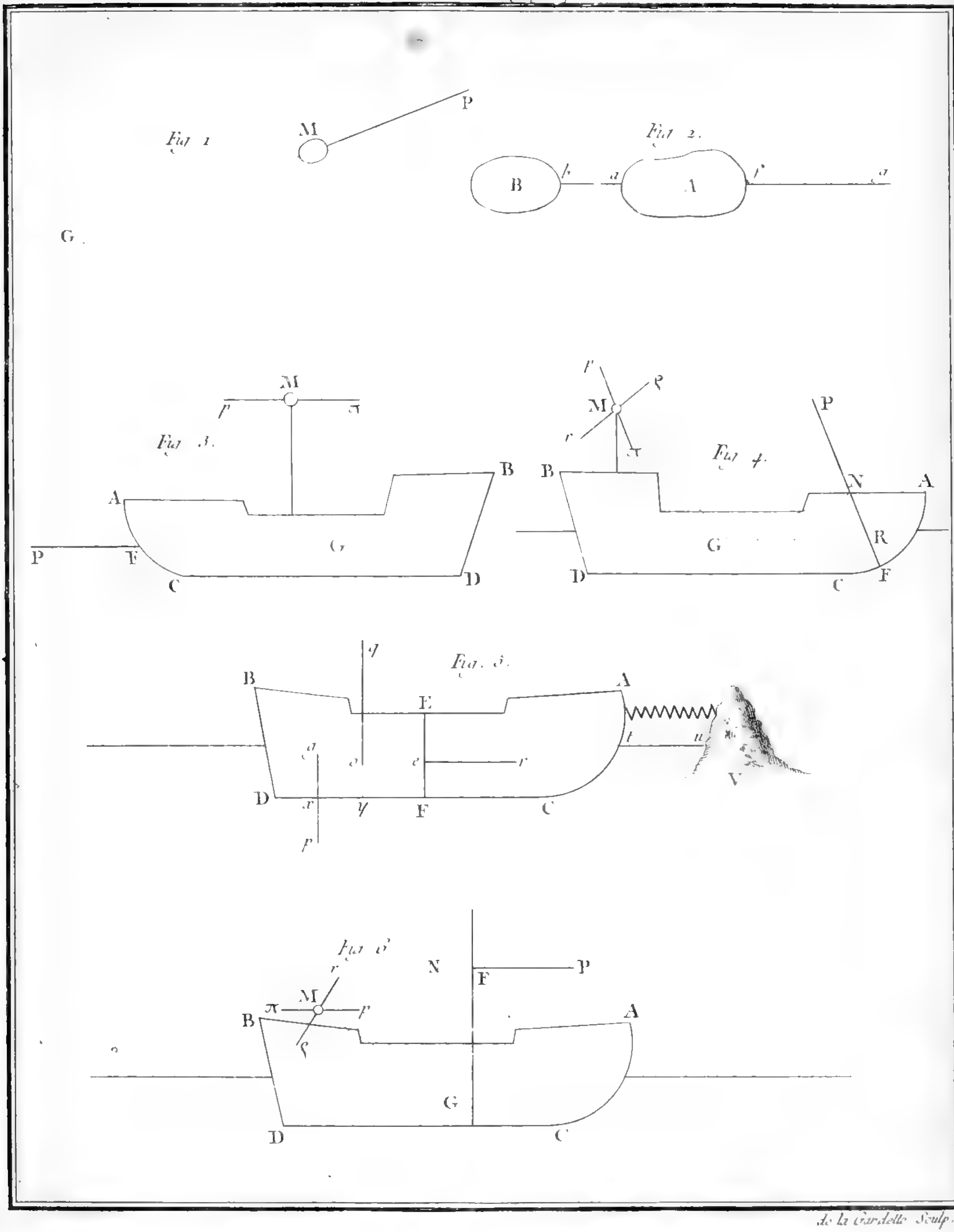


Fig. 1
M
P
Fig. 2.
B
A
Fig. 3.
M
A
B
G
P
F
C
D
Fig. 4.
M
P
B
N
A
G
R
D
C
F
Fig. 5.
B
E
A
D
F
C
V
Fig. 6.
N
P
F
M
B
A
G
D
C

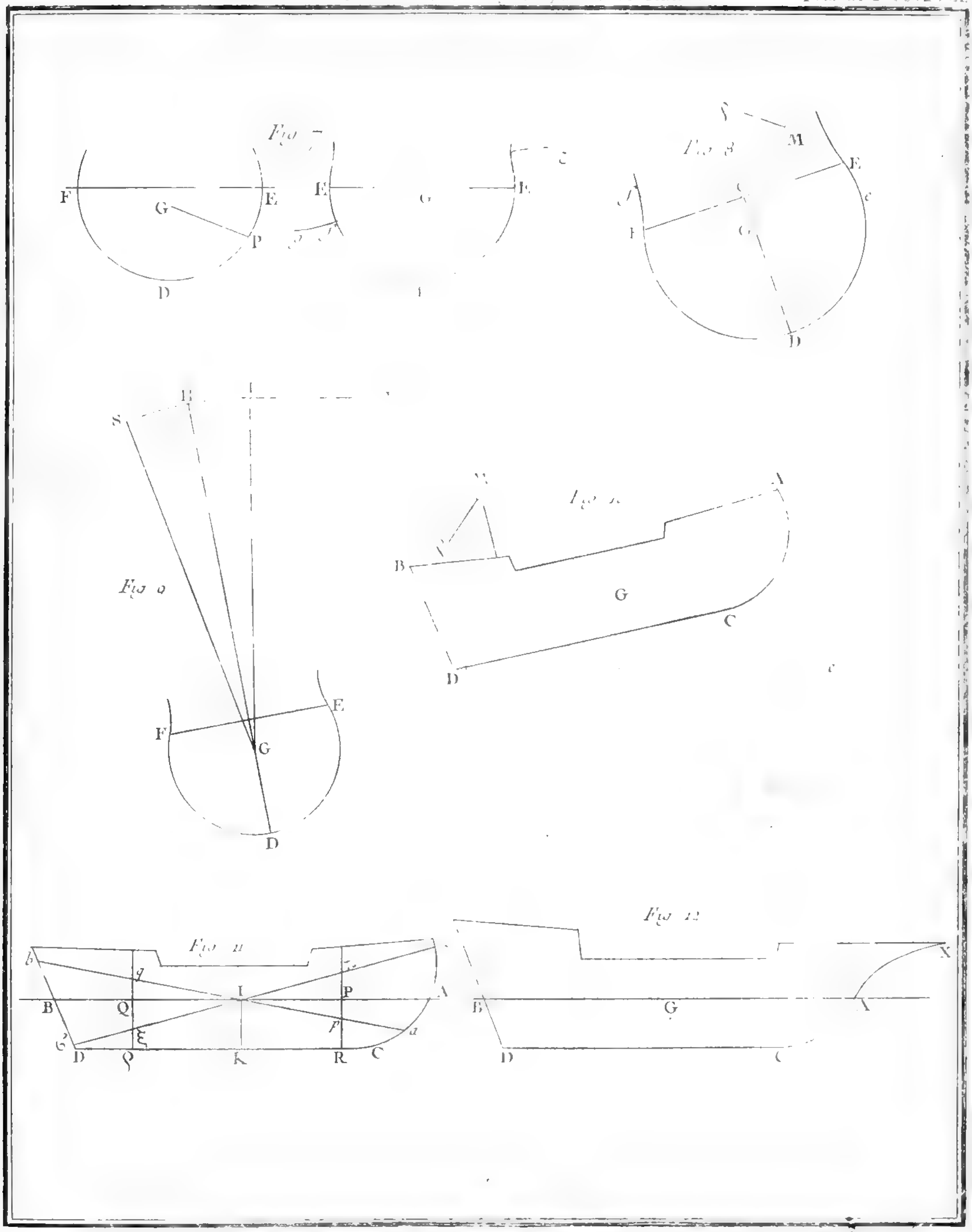


Fig. 7
F
E
G
P
D
E
G
E
Fig. 8
M
E
F
G
D
S
Fig. 9
F
E
G
D
Fig. 10
A
B
G
C
D
Fig. 11
b
q
I
P
A
B
Q
ξ
a
D
K
R
C
Fig. 12
X
B
G
A
D
C

MEDITATIONES
IN QUÆSTIONEM

Utrum motus medius Planetarum ſemper maneat æque velox, an ſucceſſu temporis quampiam mutationem patiatur? & quænam ſit ejus cauſa?

Ipſe Pater ſtatuit, quævis cœli aſtra moveret.

A CAROLO EULER, LEONARDI Filio.

Præmio donatæ anno M. DCC. LX.

MEDITATIONES

IN QUÆSTIONEM

Utrum motus medius planetarum semper maneat æque velox, an successu temporis quampiam mutationem patiatur? & quæ sit ejus causa?

I.

PLANETARUM motus medius, utrum perpetuo eandem celeritatem conservet, an cuipiam variationi labente tempore sit obnoxius? quæstio est eo magis ardua, quod ei in Astronomia ne locus quidem relinqui videtur. Cum enim ab Astronomis cujusque planetæ motus medius ex collatione antiquissimarum observationum cum novissimis definiri soleat, dum spatium interea confectum in partes tempori proportionales dispertiunt, hoc modo omnis inæqualitas à motu medio excluditur: neque motus medius cujusquam planetæ. Recte assignatus putatur, nisi cum vetustissimis observationibus æque conveniat atque cum iis, qua hodie instituuntur. Hoc quoque modo anni quantitas recte determinari existimatur, si ad tempora Hipparchi remota æquinoctiis ab eo observatis satisfaciat: similisque est ratio reliquorum planetarum, quorum motus medius per cujusque tempus periodicum determinatur.

II.

Ob errores autem observationum Astronomi coacti fuere ad tempora maxime remota confugere, ut errores inde in motum medium redundantes quam minimi redderentur, quod remedium potissimum circa instaurationem Astronomiæ aliquot abhinc seculis necessarium erat. Postquam autem observationes majori cura institui sunt captæ, pari atque meliori successu motus planetarum medios ex comparatione recentissimarum observationum cum aliis non ita pridem institutis definire licuit. Quo in negotio aliquod discrimen à conclusionibus superioribus est animadversum, quod utrum ab erroribus observationum proficiscatur, an revera cuipiam perturbationi in motu planetarum factæ sit tribuendum? incertum videri debebat antequam Theoria adjuti pleniorem motuum cœlestium cognitionem essemus adepti.

III.

Notabile imprimis est discrimen quod in quantitate anni solaris diversomodo determinata cernitur. Comparatio enim observationum Hipparchi cum Ptolemæi aliquot minutis annum majorem præbet quam si Ptolemæi obſervationes cum recentioribus comparentur. Quæ differentia ſive in obſervationum errores ſit rejicienda, ſive inde oriatur quod reductio temporum à Ptolomæo notatorum ad calendarium Julianum minus ſit certa, nulla cauſa ſatis firma reperitur, cur anni quantitatem perpetuo eandem fuiſſe ſtatuamus. De Luna quidem vix jam dubitare licet, quin ejus motus medius nunc aliquanto ſit incitatior quam olim: tum vero etiam in Saturni & Jovis motu medio quædam mutatio agnoſci debet quemadmodum ſollertiſſimus motuum cœleſtium ſcrutator Le Monnier evicit. Ex quo opinio de perpetua horum motuum conſtantia nunc quidem penitus profligata eſt cenſenda.

IV.

Quodſi hæ inæqualitates ob parvitatem à pertinacibus veteris opinionis propugnatoribus adhuc in dubium vocentur iis profecto Cometa initio hujus anni viſus omnem defenſionem adimere debet. Cum enim hic Cometa idem ſit qui A. 1682 apparuit, ejus tempus periodicum, in quo jam inſigne diſcrimen ex præcedentibus apparitionibus erat animadverſum, non ſolum fere ad biennium eſt protractum, ſed etiam hæc retardatio à ſagaciſſimo Viro Clairaut jam ante eſt prædicta & exacte definita ita ut nullum amplius dubium ſupereſſe queat quin hic Cometa idem plane ſit, qui jam aliquoties eſt conſpectus etiamſi in temporibus periodicis haud exiguum diſcrimen eſſet deprehenſum. Cum igitur hic Cometa tantam variationem in motu ſuo medio ſit perpeſſus, eo minus ſimilem variationem in planetis negare poterimus, quod cauſæ utrinque ſimiles exiſtunt, quæ hujuſmodi effectum producere valeant.

V.

Ac causæ quidem istæ non amplius sunt ignotæ postquam principium gravitationis universalis tot tam feliciter explicatis phænomenis abunde est confirmatum ita ut nunc quidem vix ullum scientiæ naturalis principium ad tantum certitudinis gradum evectum videatur quam omnia corpora cœlestia perinde moveri, ac si se mutuo attraherent in ratione directa massarum & reciproca duplicata distantiarum. Neque adeo ad summam Astronomiæ perfectionem quicquam desideratur, nisi ut motus huic principio consentanei per calculum determinentur, quod opus à sola analysi est expectandum. Quo in genere plurima præclarissima specimina edita sunt ab iis, qui cum in determinatione motuum lunarium, tum perturbationum Jovis ac Saturni, tum vacillationis axis ipsius terræ tum vero nuperrime in retardatione Cometæ operam suam collocarunt.

VI.

Quæ cum ita sint, fontes, unde resolutio quæstionis propositæ est haurienda sunt detecti, totumque negotium huc revocatur, ut ostendatur; utrum ex gravitatione mutua corporum cœlestium ulla mutatio in motu eorum medio nascatur nec ne? Cum autem idea motus medii per se non satis sit fixa, neque etiam tempus periodicum commode ejus loco introduci possit. Quippe quod per inæqualitates periodicas sæpe haud mediocriter turbatur veluti in luna est perspicuum, quæstio nostra optime ad axem transversum cujusque orbitæ adstringi videtur. Quomodo cunque enim motus cujuspiam planeta vel cometa perturbatur, is semper ita concipi potest, quasi in sectione conica fieret, cujus tam positio quam species & quantitas continuo varietur: motu cæteroquin manente regulis Keplerianis conformi.

VII.

Quare si hoc modo motus cœlestes per sectiones conicas variabiles repræsententur, hoc negotium nobis erit impositum, ut investigemus utrum axis transversus cujuspiam orbitæ planetariæ vel cometariæ aliquam mutationem patiatur nec ne? ubi quidem notari convenit, si axis transversus post singulas revolutiones ad eandem magnitudinem revertatur quantumvis interea fuerit variatus hinc tamen nullam inæqualitatem in motum medium transferri. At si per plures revolutiones continuo vel crescat vel decrescat, etiamsi forsitan deinceps aliquando in magnitudinem pristinam restituatur: talis variatio in motum medium commode conjicitur. Imprimis autem si axis transversus ab actione cujuspiam cometæ, cujus adventus quasi ex improviso accidit, neque prævideri potest, incrementum vel decrementum patitur, hunc effectum aliter nisi per motus medii retardationem vel accelerationem repræsentare non licet.

VIII.

Quandoquidem perturbationes motus sunt ingentes; quemadmodum fit in luna, præter axem transversum etiam reliquorum elementorum mutationes ad tempus periodicum hincque ad motum medium constituendum concurrunt. Quando autem motus proxime regulas Keplerianas sequitur, uti fit in planetis primariis & cometis mutatio axis transversi, cujus quippe cubo quadratum temporis periodici est proportionale, sola motum medium afficere est censenda. Ita si axis transversus orbitæ telluris hodie major minorve esset, quam tempore Ptolemæi, motus ejus medius hodie lentior vel incitatior esset statuendus quam illo tempore. Ac si cometa hujus anni, dum haud adeo procul à terra prætervolavit, actione sua axem orbis magni, uti videtur aliquantillum, auxit, in posterum annus solaris major, motusque medius solis tardior esset futurus: cujus effectus quantitatem autem ob massam cometæ incognitam non nisi ex observationibus deinceps instituendis definire licebit.

IX.

Quo igitur quæstioni ab Illustrissima Academia propositæ satisfaciam, quantum motus sive planetæ sive cometæ ab actione alius planetæ sive cometæ, cujus quidem motus ut cognitus spectatur, perturbatur, primum quidem in genere investigabo, tum vero quia omnes inæqualitates neque ad hoc institutum sunt necessariæ, neque quæruntur, ad axis transversi variationes omnem curam intendam; facile autem intelligitur antequam universa mutatio dato tempore in axe transverso producta definiri queat, mutationem ejus momentaneam determinari opportere. Unde hoc commode consequemur, ut si forte non licuerit per integrationes ad scopum pervenire, ex formula differentiali pro partibus temporis satis exiguis mutationes axis seorsim desineantur, tumque in unam summam colligantur. Hæc methodus usum habebit, quando actio notabilis corporis attrahentis non diu durat uti in transitu cometæ fere fit, ac deinceps ob insignem distantiam quasi prorsus in nihilum abit.

X.

I. Fig. Sit igitur sol in A, & planeta vel cometa cujus attractione motus alterius perturbatur moveatur in plano tabula repræsentato in quo EQ sit ejus orbita AE vero linea recta fixa à qua longitudines computemus.

Alter

Alter vero planeta, cujus perturbationes motus inveſtigamus, moveatur in alio plano, quod nunc quidem illud planum ſecet ſecundum rectam A ☊, quæ eſt linea nodorum, ſitque FZ ejus orbita ab F in ſublime aſcendens. Nunc autem ille planeta ſeu cometa verſetur in Q hic vero in Z ductiſque rectis QA, ZA & QZ, ex Z in planum tabulæ demittatur perpendiculum ZY tum vero ex Q & Y ad AE normales QP & YX. Porro ex Y quoque ad lineam nodorum A ☊ normaliter ducatur YR ut juncta ZR angulus YRZ exhibeat inclinationem binarum orbitarum. Denique ex R tam ad AE quam XY ducantur perpendiculares RT & RV. Hæcque fere ſunt, quibus Geometrica quæſtionis continetur.

XI.

Jam faciamus ſequentes denominationes ſitque

1°. Longitudo lineæ nodorum $E A$ ☊ $= \psi$;

2°. Inclinatio orbitarum mutua ſeu $YRZ = \omega$;

3°. Longitudo planetæ Q ſeu angulus $EAQ = \theta$;

4°. Ejus diſtantia à ſole ſeu recta $AQ = u$;

5°. Planetæ Z diſtantia à ſole $AZ = v$;

6°. Ejus argumentum latitudinis ſeu ☊ $AZ = \xi$.

Hinc reliquæ lineæ ita definientur.

$AP = u \cos. \theta$; $AR = v \cos. \xi$; $YR = v \sin. \xi \cos. \omega$;

$PQ = u \sin. \theta$; $ZR = v \sin. \xi$; $YZ = v \sin. \xi \sin. \omega$;

Porro cum angulus RYV æquetur angulo EA ☊ $= \psi$ erit

$AT = v \cos. \xi \cos. \psi$; $VY \sin. \xi \cos. \omega \cos. \psi$;

$TR = v \cos. \xi \cos. \psi$; $RV \sin. \xi \cos. \omega \sin. \psi$.

Quare si pro puncto sublimi Z ternas coordinatas vocemus

$$AX = X;\quad XY = Y;\quad \& \quad YZ = Z$$

habebimus

$$X = AT - RV = v\, cos.\, \xi\, cos.\, \psi - v\, sin.\, \xi\, cos.\, \omega\, sin.\, \psi;$$

$$Y = TR + VY = v\, cos.\, \xi\, sin.\, \psi + v\, sin.\, \xi\, cos.\, \omega\, cos.\, \psi;$$

$$\& \quad Z = v\, sin.\, \xi\, sin.\, \omega.$$

XII.

Ex his denique etiam definitur distantia planetarum QZ quæ brevitatis gratia statuatur

$$QZ = \tau.$$

Cum enim sit

$$PX = AP - AX = u\, cos.\, \theta - X, \quad \&$$

$$PQ - XY = u\, sin.\, \theta - Y, \quad \text{erit}$$

$$QY^2 = uu - 2u\,(X\, cos.\, \theta + Y\, sin.\, \theta) + XX + YY;$$

cui quadratum $YZ^2 = Z^2$ additum dabit

$$QZ^2 = \tau^2 = uu - 2u\,(X\, cos.\, \theta + Y\, sin.\, \theta) + XX + YY + ZZ.$$

At est $XX + YY + ZZ = vv$, ideoque

$$\tau^2 = uu - 2u\,(X\, cos.\, \theta + Y\, sin.\, \theta) + vv.$$

Verum ob $cos.\, \theta\, cos.\, \psi + sin.\, \theta\, sin.\, \psi = cos.\,(\theta - \psi)$, &

$$sin.\, \theta\, cos.\, \psi - cos.\, \theta\, sin.\, \psi = sin.\,(\theta - \psi);$$

ubi notetur $\theta - \psi = EAQ - EA☊$ exprimere angulum $☊AQ$, seu longitudinem planetæ Q à linea nodorum sumtam.

erit $X\ cos.\ \theta + Y\ sin.\ \theta = v\ cos.\ \xi\ cos.\ (\theta - \psi) + v\ sin.\ \xi\ cos.\ \omega\ sin.\ (\theta - \psi)$;

ita ut sit

$$\tau = \sqrt{\left(u\,u - 2\,u\,v\left(cos.\ \xi\ cos.\ (\theta - \psi) + sin.\ \xi\ cos.\ \omega\ sin.\ (\theta - \psi)\right) + v\,v\right)};$$

unde perspicuum est formulam $cos.\ \xi\ cos.\ (\theta - \psi) + sin.\ \xi\ cos.\ \omega\ sin.\ (\theta - \psi)$ exprimere cosinum anguli QAZ, qui est distantia planetarum *e* sole visa.

XIII.

Quomodo cunque ab actione planetæ Q planum orbitæ alterius planetæ Z immutatur, ita ut momento temporis tam positio lineæ nodorum A ☊ quam inclinatio mutua utriusque orbitæ variationem patiatur, certa quædam relatio inter has variationes intercedat. Si enim puncto temporis planeta ex Z in z succedat, ut angulus elementaris ZAz sit $= d\phi$ punctum z æque ad positionem orbitæ præcedentem angulis ψ & ω determinatam atque ad positionem sequentem angulis $\psi + d\psi$, & $\omega + d\omega$ contentam referri oportet. Ex quo differentialia dX, dY & dZ eadem prodire debent, sive anguli ψ & ω constantes sumantur, & pro anguli ☊ $AZ = \xi$ differentiali scribatur $d\phi$ quippe qui hoc elemento augetur; sive iidem anguli ψ & ω etiam pro variabilibus habeantur, angulusque ξ vero suo differentiali $d\xi$ augeri statuatur, quod ob mutationem in linea nodorum & inclinatione factam non amplius angulo elementari $d\phi$ æquale est æstimandum. Ex hac autem duplici differentiatione gemina relatio inter angulos elementares $d\phi$, $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ concludetur.

XIV.

Prima differentiatio, qua anguli ψ & ω constantes & $d\xi = d\phi$ sumuntur præbet:

$$dX = \frac{X\,dv}{v} - v\,d\phi\,(\sin.\xi\cos.\psi + \cos.\xi\cos.\omega\sin.\psi);$$

$$dY = \frac{Y\,dv}{v} - v\,d\phi\,(\sin.\xi\sin.\psi - \cos.\xi\cos.\omega\cos.\psi);$$

$$dZ = \frac{Z\,dv}{v} + v\,d\phi\cos.\xi\sin.\omega.$$

Altera autem differentiatio hos suppeditat valores

$$dX = \frac{X\,dv}{v} - v\,d\xi\,(\sin.\xi\cos.\psi + \cos.\xi\cos.\omega\sin.\psi) - v\,d\psi\,(\cos.\xi\sin.\psi + \sin.\xi\cos.\omega\cos.\psi) + v\,d\omega\sin.\xi\sin.\omega\sin.\psi;$$

$$dY = \frac{Y\,dv}{v} - v\,d\xi\,(\sin.\xi\sin.\psi - \cos.\xi\cos.\omega\cos.\psi) - v\,d\psi\,(\cos.\xi\cos.\psi - \sin.\xi\cos.\omega\sin.\psi) - v\,d\omega\sin.\xi\sin.\omega\cos.\psi;$$

$$dZ = \frac{Z\,dv}{v} + v\,d\xi\cos.\xi\sin.\omega + v\,d\omega\sin.\xi\cos.\omega.$$

Hinc æquatis postremis formulis pro dZ inventis colligitur.

$$d\phi = d\xi + \frac{d\omega\sin.\xi\cos.\omega}{\cos.\xi\sin.\omega}.$$

XV.

Quo facilius relatio ex prioribus oriunda eliciatur, consideremus has formulas inde derivatas

Ex priori differentiatione

$$d\,X\,cos.\,\psi + d\,Y\,sin.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\,cos.\,\psi + Y\,sin.\,\psi) - v\,d\,\varphi\,sin.\,\xi;$$

$$d\,X\,sin.\,\psi - d\,Y\,cos.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\,sin.\,\psi - Y\,cos.\,\psi) - v\,d\,\varphi\,cos.\,\xi\,cos.\,\omega;$$

Ex posteriori differentiatione

$$d\,X\,cos.\,\psi + d\,Y\,sin.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\,cos.\,\psi + Y\,sin.\,\psi) - v\,d\,\xi\,sin.\,\xi - v\,d\,\psi\,sin.\,\xi\,cos.\,\omega;$$

$$d\,X\,sin.\,\psi - d\,Y\,cos.\,\psi = \frac{dv}{v}(X\,sin.\,\psi - Y\,cos.\,\psi) - v\,d\xi\,cos.\,\xi\,cos.\,\omega - v\,d\psi\,cos.\,\xi + v\,d\,\omega\,sin.\,\xi\,sin.\,\omega;$$

quarum æqualitas dat

$$d\,\varphi = d\,\xi + d\,\psi\,cos.\,\omega, \text{ \&}$$

$$d\,\varphi = d\,\xi + \frac{d\,\psi}{cos.\,\omega} - \frac{d\,\omega\,sin.\,\xi\,sin.\,\omega}{cos.\,\xi\,cos.\,\omega};$$

ex quibus conjunctis sequitur

$$d\,\psi\,\frac{(1 - cos.\,\omega^2)}{cos.\,\omega} = \frac{d\,\omega\,sin.\,\xi\,sin.\,\omega}{cos.\,\xi\,cos.\,\omega}, \text{ seu } d\,\psi = \frac{d\,\omega\,sin.\,\xi}{cos.\,\xi\,sin.\,\omega}.$$

XVI.

Semper ergo variationes in linea nodorum & inclinatione à se invicem pendent, ut sit

$$d\,\psi = \frac{d\,\omega\,sin.\,\xi}{cos.\,\xi\,sin.\,\omega}, \text{ seu } d\,\omega = \frac{d\,\psi\,cos.\,\xi\,sin.\,\omega}{sin.\,\xi}, \text{ seu } \frac{d\,\varphi}{tang\,\xi} = \frac{d\,\omega}{s.n.\,\omega}.$$

Tum vero angulus elementaris $Z\,A\,z = d\,\varphi$ per quem corpus Z revera progreditur tempusculo infinite parvo dum variationes $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ gignuntur, ita definitur ut sit

$$\text{vel } d\varphi = d\xi + \frac{d\omega\, \mathit{sin.}\,\xi\, \mathit{cos.}\,\omega}{\mathit{cos.}\,\xi\, \mathit{sin.}\,\omega}$$

$$\text{vel } d\varphi = d\xi + d\psi\, \mathit{cos.}\,\omega;$$

quarum æqualitas jam insuperiori continetur, ita ut hinc duæ tantum relationes inter quaterna elementa $d\varphi$, $d\xi$, $d\psi$ & $d\omega$ constituantur, quas in sequentibus, ubi effectus virium sollicitantium sumus investigaturi, probe meminisse juvabit.

XVII.

Antequām ad partem mechanicam hujus quæstionis progrediar haud abs re erit quasdam relationes observare, quæ in sequentibus insignem usum sunt habituræ. Scilicet cum differentialibus dX, dY & dZ ex priori differentiatione natis uti liceat. Ad quæ quippe altera jam sunt perducta, inde deducimus

$$YdX - XdY = -v\,d\varphi\big(Y(\mathit{sin.}\,\xi\, \mathit{cos.}\,\psi + \mathit{cos.}\,\omega\, \mathit{cos.}\,\xi\, \mathit{sin.}\,\psi) - X(\mathit{sin.}\,\xi\, \mathit{sin.}\,\psi - \mathit{cos.}\,\xi\, \mathit{cos.}\,\omega\, \mathit{cos.}\,\psi)\big);$$

seu $$YdX - XdY = -v\,d\varphi\big((Y\,\mathit{cos.}\,\psi - X\,\mathit{sin.}\,\psi)\,\mathit{sin.}\,\xi + (Y\,\mathit{sin.}\,\psi + X\,\mathit{cos.}\,\psi)\,\mathit{cos.}\,\xi\,\mathit{cos.}\,\omega\big).$$

At est

$$Y\,\mathit{cos.}\,\psi - X\,\mathit{sin.}\,\psi = v\,\mathit{sin.}\,\xi\,\mathit{cos.}\,\omega, \text{ \&}$$

$$Y\,\mathit{sin.}\,\psi + X\,\mathit{cos.}\,\psi = v\,\mathit{cos.}\,\xi;$$

quibus valoribus substitutis fit

$$YdX - XdY = -vv\,d\varphi\,(\mathit{sin.}\,\xi^2\,\mathit{cos.}\,\omega + \mathit{cos.}\,\xi^2\,\mathit{cos.}\,\omega);$$

ita ut sit

$$Y\,dX - X\,dY = -\nu\nu\, d\varphi\, cos.\,\omega, \text{ seu}$$
$$X\,dY - Y\,dX = \nu\nu\, d\varphi\, cos.\,\omega.$$

XVIII.

Simili modo habebimus

$$X\,dZ - Z\,dX = \nu\, d\varphi\, \big(X\, cos.\,\xi\, sin.\,\omega + Z\, (sin.\,\xi\, cos.\,\psi + cos.\,\xi\, cos.\,\omega\, sin.\,\psi)\big),$$

& pro X & Z in membro posteriori substitutis valoribus

$$XdZ - ZdX = \nu\nu\, d\varphi\, sin.\,\omega\big(cos.\,\xi(cos.\,\xi\, cos.\,\psi - sin.\,\xi\, cos.\,\omega\, sin.\,\psi) + sin.\,\xi\,(sin.\,\xi\, cos.\,\psi + cos.\,\xi\, cos.\,\omega\, sin.\,\psi)\big);$$

quæ manifesto in hanc simplicem contrahitur,

$$X\,dZ - Z\,dX = \nu\nu\, d\varphi\, sin.\,\omega\, cos.\,\psi.$$

Denique eodem vestigio insistentes colligimus:

$$Y\,dZ - Z\,dY = \nu\, d\varphi\, \big(Y\, cos.\,\xi\, sin.\,\omega + Z\, (sin.\,\xi\, sin.\,\psi - cos.\,\xi\, cos\,\omega\, cos.\,\psi)\big);$$

& pro Y & Z & valoribus substitutis

$$YdZ - ZdY = \nu\nu d\varphi\, sin.\,\omega\big(cos.\,\xi\,(cos.\,\xi\, sin.\,\psi + sin.\,\xi\, cos.\,\omega\, cos.\,\psi) + sin.\,\xi\,(sin.\,\xi\, sin.\,\psi - cos.\,\xi\, cos.\,\omega\, cos.\,\psi)\big);$$

quæ sponte in hanc simplicem formulam abit:

$$Y\,dZ - Z\,dY = \nu\nu\, d\varphi\, sin.\,\omega\, sin.\,\psi.$$

XIX.

Denique cum ex elementis dX, dY & dZ sit elementum revera descriptum $Zz = \sqrt{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)}$ ob $AZ = \nu$ & $Az = \nu + d\nu$ si centro A arculus $Z\nu$ describatur erit $z\nu = d\nu$ & cum positus sit angulus elementaris $ZA\zeta = d\phi$, erit $Z\nu = \nu\, d\phi$, hincque $Z\zeta^2 = d\nu^2 + \nu\nu\, d\phi^2$. Ex quibus evidens eſt fore

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\nu^2 + \nu\nu\, d\phi^2;$$

quam æqualitatem etiam ex formulis pro differentialibus dX, dY & dZ ante inventis, ſed per plures ambages deducere licuiſſet. Atque hæc fere ſunt, quæ Geometria & Analyſis pro ſolutione quæſtionis propoſita ſubminiſtrant, quibus inſtructi facilius partem mechanicam, qua totum negotium continetur, agredi poterimus. Hæc autem ſeorſim exponere viſum eſt, ne relationes circa lineæ nodorum & inclinationis mutationes momentanea principiis mechanicis inniti videantur.

XX.

Sit igitur maſſa Solis $= A$, Planetæ in $Z = B$, & Planetæ Cometæve perturbantis in $Q = C$: ac primo planeta in Z primo ad ſolem urgetur ſecundum ZA vi acceleratrice $= \frac{A}{\nu\nu}$, unde pro directionibus fixis coordinatarum naſcuntur vires

$$\text{ſeu } XA = \frac{(A+B)X}{\nu^3};$$

$$\text{ſeu } YX = \frac{(A+B)Y}{\nu^3};$$

$$\text{ſeu } ZY = \frac{(A+B)Z}{\nu^3}.$$

Deinde verſus Q urgetur ſecundum directionem ZQ vi acceleratrice $= \frac{C}{\tau\tau}$, unde per ſimilem reſolutionem naſcuntur vires hæ

ſeu

secundum $AX = \frac{C(u\,cos.\,\theta - X)}{\tau^3}$;

sec. $AY = \frac{C(u\,sin.\,\theta - Y)}{\tau^3}$;

sec. $ZY = \frac{CZ}{\tau^3}$.

Denique cum etiam sol ad Q sollicitetur vi acceleratrice $\frac{C}{uu}$ hæc contrarie secundum directionem ZS ipsi QA parallelam in planetam Z applicata est concipienda, unde oriuntur hæ duæ vires:

sec. $XA = \frac{C\,cos.\,\theta}{uu}$, & sec. $YX = \frac{C\,sin.\,\theta}{uu}$.

XXI.

His jam viribus novimus accelerationes corporis in Z secundum easdem directiones esse proportionales: unde si elementum temporis statuamus $= dt$ idque constans sumamus, habebimus tres sequentes æquationes:

$$ddX = -\alpha\,dt^2\left(\frac{(A+B)X}{v^3} - \frac{C(u\,cos.\,\theta - X)}{\tau^3} + \frac{C\,cos.\,\theta}{uu}\right)$$

$$ddY = -\alpha\,dt^2\left(\frac{(A+B)Y}{v^3} - \frac{C(u\,sin.\,\theta - Y)}{\tau^3} + \frac{C\,sin.\,\theta}{uu}\right)$$

$$ddZ = -\alpha\,dt^2\left(\frac{(A+B)Y}{v^3} + \frac{CZ}{\tau^3}\right)$$

ubi α certam constantem qua proportionaliter determinatur, designat, quam deinceps ex motu quodam cognito veluti motu terræ medio, qui nunc quidem locum habet, definiri conveniet. Quo pacto simul loco elementi temporis vagi in se dt spatium motu terræ medio interea descriptum in calculum introducetur.

Ceterum hic notetur, maſſam ſolis A tantopere maſſas planetarum & cometarum excedere, ut pro $A+B$ tuto ſcribere liceat A. quantitaſque $\frac{C}{A+B}$ pro fractione minima haberi poſſit.

XXII.

Omnes nunc vires Analyſeos in hoc intendi oportet, ut iſtas tres æquationes differentio-differentiales reſolvamus, hoc eſt vel integremus, vel ad commodam approximationem perducamus. Ac primo quidem binis conjugendis ſimpliciores formas adipiſcemur

$$XddY - YddX = \alpha dt^2 \left(-\frac{Cu(Y\,cof.\,\theta - X\,fin.\,\theta)}{r^3} + \frac{C(Y\,cof.\,\theta - X\,fin.\,\theta)}{uu} \right);$$

ſeu $XddY - YddX = \alpha C dt^2 (X\,fin.\,\theta - Y\,cof.\,\theta)\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right).$

Deinde ſimili modo colligimus

$$XddZ - ZddX = \alpha dt^2 \left(\frac{-CZu\,cof.\,\theta}{r^3} + \frac{CZ\,cof.\,\theta}{uu} \right) = -\alpha CZ dt^2\,cof.\,\theta \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

$$YddZ - ZddY = \alpha dt^2 \left(\frac{CZu\,fin.\,\theta}{r^3} + \frac{CZ\,fin.\,\theta}{uu} \right) = -\alpha CZ dt^2\,fin.\,\theta \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

ubi autem manifeſtum eſt harum trium æquationum binas jam tertiam in ſe complecti.

XXIII.

Hic primo obſervetur formulas $XddY - YddX$, $XddZ - ZddX$, $YddZ - ZddY$ eſſe differentialiæ formularum $XdY - YdX$, $XdZ - ZdX$, $YdZ - ZdY$, quarum valores ſupra (§. XVII, XVIII) aſſignavimus. Deinde cum ſit $Z = v \, \text{ſin.}\, \xi \, \text{ſin.}\, \omega$, &

$$X \, \text{ſin.}\, \theta - Y \, \text{coſ}\, \theta = v \, \text{coſ.}\, \xi \, \text{ſin.}\, (\theta - \psi) - v \, \text{ſin.}\, \xi \, \text{coſ.}\, \omega \, \text{coſ.}\, (\theta - \psi);$$

ſuperiores tres æquationes has induent formas:

$$d.\, (v v d \varphi \, \text{coſ.}\, \omega) = \alpha C v d t^2 \left(\text{coſ.}\, \xi \, \text{ſin.}\, (\theta - \psi) - \text{ſin.}\, \xi \, \text{coſ.}\, \omega \, \text{coſ.}\, (\theta - \psi)\right) \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

$$d.\, (v v d \varphi \, \text{ſin.}\, \omega \, \text{ſin.}\, \psi) = - \alpha C v d t^2 \, \text{coſ.}\, \theta \, \text{ſin.}\, \xi \, \text{ſin.}\, \omega \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

$$d.\, (v v d \varphi \, \text{ſin.}\, \omega \, \text{ſin.}\, \psi) = - \alpha C v d t^2 \, \text{ſin.}\, \theta \, \text{ſin.}\, \xi \, \text{ſin.}\, \omega \left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quarum binæ etſi jam continent tertiam, tamen quia nulla eſt ratio, cur unam præ reliquis omittamus, conveniet omnes tres retineri, quo inde facilius formulas deinceps uſum habituras, eliciamus.

XXIV.

Cum igitur binæ poſteriores, ſi ex parte evolvantur, præbeant:

$$cos.\,\psi\, d.\,(\nu\nu\, d\phi\, sin.\,\omega) - \nu\nu\, d\phi\, sin.\,\omega.\, d\psi\, sin.\,\psi = - \alpha\, C\nu\, dt^2\, cos.\,\theta\, sin.\,\xi\, sin.\,\omega \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

$$sin.\,\psi\, d.\,(\nu\nu\, d\phi\, sin.\,\omega) + \nu\nu\, d\phi\, sin.\,\omega.\, d\psi\, cos.\,\psi = - \alpha\, C\nu\, dt^2\, sin.\,\theta\, sin.\,\xi\, sin.\,\omega \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

illa per $sin.\,\psi$ hæc vero per $-\,cos.\,\psi$ multiplicata conjuncte producent

$$-\,\nu\nu\, d\phi\, d\psi\, sin.\,\omega = \alpha\, C\,\nu\, dt^2\, sin.\,\xi\, sin.\,\omega\, sin.\,(\theta - \psi)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quæ per $-\,\nu\, sin.\,\omega$ dat

$$\nu\, d\phi\, d\psi = -\,\alpha\, C\, dt^2\, sin.\,\xi\, sin.\,(\theta - \psi)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

ita ut hinc elementum $d\psi$ pro temporis elemento dt determinetur

$$d\psi = -\,\frac{\alpha\, C\, dt^2\, sin.\,\xi\, sin.\,(\theta - \psi)}{\nu\, d\phi}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

unde simul colligitur $d\xi = d\phi - d\psi\, cos.\,\omega$, atque

$$d\omega = \frac{d\psi\, cos.\,\xi\, sin.\,\omega}{sin.\,\xi} = -\,\frac{\alpha\, C\, dt^2\, cos.\,\xi\, sin.\,\omega\, sin.\,(\theta - \psi)}{\nu\, d\phi}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

XXV.

Sin autem earumdem binarum æquationum prior per $cos.\,\psi$ & posterier per $sin.\,\psi$ multiplicetur junctim prodit :

$$d\,(\nu\nu\, d\phi\, sin.\,\omega) = -\,\alpha\, C\,\nu\, dt^2\, sin.\,\xi\, sin.\,\omega\, cos.\,(\theta - \psi)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right),$$

quæ ex parte evoluta fit

$$\sin.\omega\, d(vv\,d\phi) + vv\,d\phi\, d\omega \cos.\omega = -\alpha C v\, dt^2 \sin.\xi \sin.\omega \cos.(\theta - \psi)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Prima autem simili modo ex parte evoluta dat

$$\cos.\omega\, d.(vv\,d\phi) - vv\,d\phi\,d\omega \sin.\omega = -\alpha C v\, dt^2 (\sin.\xi \cos.\omega \cos.(\theta - \psi) - \cos.\xi \sin.(\theta - \psi))\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Nunc igitur illa per $\cos.\omega$ hæc vero per $-\sin.\omega$ multiplicata conjunctim producent:

$$vv\,d\phi\,d\omega = -\alpha C v\,dt^2 \cos.\xi \sin.\omega \sin.(\theta - \psi)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right),$$

quæ cum modo ante inventa congruit. Quod eo minus est mirandum, quod uti jam observavimus, nostræ ternæ æquationes nonnisi pro duabus sunt habendæ, neque propterea plures duabus conclusiones suppeditant.

XXVI.

Multiplicemus autem binarum postremarum æquationum illam per $\sin.\omega$ hanc vero per $\cos.\omega$, atque earum aggregatum præbebit:

$$d(vv\,d\phi) = -\alpha C v\,dt^2 (\sin.\xi \cos.(\theta - \psi) - \cos.\xi \cos.\omega \sin.(\theta - \psi))\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

quæ ad sequentem usum maxime accomodabitur si per $2vv\,d\phi$ multiplicetur, & integretur. Quia enim elementum dt constans assumitur, integrale hoc modo representabitur:

$$v^4 d\phi^2 = -2\alpha C dt^2 \int v^3 d\phi (\sin.\xi \cos.(\theta - \psi) - \cos.\xi \cos.\omega \sin.(\theta - \psi))\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right),$$

ac videbimus totum negotium potiſſimum ad inventionem hujus integralis revocari. Hæ ergo ſunt illæ duæ concluſiones, quas externis noſtris æquationibus derivatis deducere licet, quarum altera valorem ipſius $v^4 d\phi^2$ altera vero ipſius $d\psi$ vel $d\omega$ oſtendit.

XXVII.

Cum igitur vis noſtrarum trium æquationum principalium (§. XXI) nondum ſit exhauſta ſequenti combinatione novam inde æquationem formemus. Multiplicentur ſcilicet prima per $2dX$, ſecunda per $2dY$, ac tertia per $2dZ$, ut hoc modo ſummæ prius membrum fiat integrabile, & cum ſit $XdX + YdY + ZdZ = vdv$ obtinebimus

$$2dXddX + 2dYddY + 2dZddZ = -2\alpha dt^2 \left(\frac{(A+B)dv)}{vv} + \frac{Cvdv}{r^3} - C(dX cof.\theta + dY fin.\theta)\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)\right)$$

ex formulis autem differentialibus (§. XIV) colligimus

$$dX cof.\theta + dY fin.\theta = \frac{dv}{v}(X cof.\theta + Y fin.\theta) - vd\phi \left(fin.\xi\, cof.(\theta-\psi) - cof.\xi\, cof.\omega\, fin.(\theta-\psi)\right),$$

quæ ob

$$X cof.\theta + Y fin.\theta = v\left(cof.\xi\, cof.(\theta-\psi) + fin.\xi\, cof.\omega\, fin.(\theta-\psi)\right),$$

tandem præbet

$$2dXddX + 2dYddY + 2dZddZ = -2\alpha dt^2 \left(\frac{(A+B)dv}{vv} + \frac{Cvdv}{r^3}\right)$$

$$+ 2\alpha C dt^2 \left(dv\left(cof.\xi\, cof.(\theta-\psi) + fin.\xi\, cof.\omega\, fin.(\theta-\psi)\right) - vd\phi\left(fin.\xi\, cof.(\theta-\psi) - cof.\xi\, cof.\omega\, fin.(\theta-\psi)\right)\right)\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$$

XXVIII.

Jam partis prioris integrale est

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dv^2 + vv\,d\varphi^2$$

pro parte autem posteriori ponamus brevitatis gratia

$cos.\,\xi\,cos.\,(\theta - \psi) + sin.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta - \psi) = cos.\,\rho$, &

$sin.\,\xi\,cos.\,(\theta - \psi) - cos.\,\xi\,cos.\,\omega\,sin.\,(\theta - \psi) = sin.\,\sigma$,

ut sit $\rho =$ angulo QAZ & propterea

$$\tau = \surd\,(uu - 2uv\,cos.\,\rho + vv).$$

Hincque æquatio nostra integralis ita se habebit

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2\alpha\,(A + B)\,dt^2\left(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f}\right) - 2\alpha\,C\,dt^2 \int \tfrac{v\,dv}{\tau^3}$$

$$+ 2\alpha\,C\,dt^2 \int (dv\,cos.\,\rho - v\,d\varphi\,sin.\,\sigma)\left(\tfrac{u}{\tau^3} - \tfrac{1}{uu}\right).$$

Tum vero ex supra inventis habemus:

$$v^4\,d\varphi^2 = -2\alpha\,C\,dt^2 \int v^3\,d\varphi\,sin.\,\sigma\left(\tfrac{u}{\tau^3} - \tfrac{1}{uu}\right)$$

quibus duabus æquationibus solutio problematis potissimum continetur.

XXIX.

Ponamus præterea ad has formulas contrahendas:

$$\int v^3\,d\varphi\,sin.\,\sigma\left(\tfrac{u}{\tau^3} - \tfrac{1}{uu}\right) = P;$$

$$\int \tfrac{v\,dv}{\tau^3} = Q;$$

$$\int (dv\,cos.\,\rho - v\,d\varphi\,sin.\,\sigma)\left(\tfrac{u}{\tau^3} - \tfrac{1}{uu}\right) = R;$$

quas quantitates, quia in terminis valde parvis tantum insunt, tantisper tanquam cognitas spectemus: & nostræ æquationes erunt

$$v^4\, d\varphi^2 = 2\,\alpha\, dt^2\,((A+B)\,G - CP);$$
$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = 2\,\alpha\,dt^2\,((A+B)(\tfrac{1}{v}-\tfrac{1}{f}) - CQ + CR);$$
ubi ut parvitas maſſæ C præ $A+B$ clarius in oculos incurrat ponamus $\frac{C}{A+B} = n$, ita ut n ſit fractio quam minima: induentque noſtræ æquationes has formas:

$$v^4\, d\varphi^2 = 2\,\alpha\,(A+B)\,dt^2\,(G - nP);$$
$$dv^2 + vv\,d\varphi = 2\,\alpha\,(A+B)\,dt^2\,(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} - nQ + nR).$$

XXX.

Hinc jam commode exui poteſt conſideratio tempuſculi dt, fietque

$$(G - nP)\,(dv^2 + vv\,d\varphi^2) = v^4\,d\varphi^2\,(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} + n(R-Q));$$
unde colligitur
$$dv^2(G - nP) = v^4\,d\varphi^2\,(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} + n(R-Q) - \tfrac{(G-nP)}{vv});$$
hincque porro
$$\tfrac{dv}{vv}\sqrt{(G - nP)} = d\varphi\,\sqrt{(\tfrac{1}{v} - \tfrac{1}{f} + n(R-Q) - \tfrac{(G-nP)}{vv})};$$
qua æquatione relatio inter differentialia dv & $d\varphi$ exprimitur, reliqua autem jam ſupra ad $d\varphi$ ſunt reducta: tum vero nunc etiam tempuſculum dt eodem revocatur ope æquationis
$$vv\,d\varphi = dt\sqrt{2\,\alpha\,(A+B)\,(G - nP)};$$
ſi fractio n plane evaneſceret, hinc cognitæ regulæ Keplerianæ deduci ſolent.

XXXI.

Quo nunc motus determinationem ad ſimilitudinem regularum Keplerianarum perducamus, diſtantiæ $AZ = v$

$AZ = v$ formam ſimilem ei, quæ in ſectionibus conicis occurrit, tribuamus, ſitque $v = \frac{p}{1 + q\,coſ.\,x}$, ubi p denotat ſemiparametrum ſectionis conicæ, q excentricitatem, ex x eum angulum qui anomalia vera appellatur. Cum autem vulgo anomalia vera ab aphelio computari ſoleat, liceat hic mihi ab hoc more recedere, eamque à perihelio computare, quo ſimul in cometarum orbitis locum inveniri queat. In motu regulari quantitates p & q eſſent conſtantes, nunc autem eas ut variabiles tractemus, ut quemadmodum initio obſervavi, motus perturbatio in variatione elementorum ſectionis conicæ comprehendatur. Dum autem ſemiparameter eſt $= p$, & excentricitas $= q$ erit ſemiaxis tranſverſus $= \frac{p}{1 - qq}$, quem vocemus $= r$, in cujus variatione definienda tota quæſtio verſatur.

XXXII.

Cum igitur hoc modo loco unius variabilis v tres novæ variabiles p, q, & x in computum ingerantur, binas pro lubitu definire licet, in quo quidem ratio abſidum eſt habenda, qua hæ duæ conditiones præſcribuntur, ut caſibus quibus fit vel $coſ.\,x = 1$, vel $coſ.\,x = -1$ differentiale dv ideoque & formula irrationalis $\sqrt{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{f} + n(R - Q) - \frac{G - nP}{vv}\right)}$ evaneſcat: ſit brevitatis ergo $\frac{1}{f} - n(R - Q) = M$ & $G - nP = N$, ut habetur

$$\frac{dv}{vv}\sqrt{N} = d\phi\sqrt{\left(-M + \frac{1}{v} - \frac{N}{vv}\right)};$$

& binæ conditiones præſcriptæ præbent:

$$-M + \frac{1+q}{q} - \frac{N(1+q)^2}{pp} = 0 \;\&\; -M + \frac{1-q}{p} - \frac{N(1-q)^2}{pp} = 0;$$

quarum differentia dat $\frac{2q}{p} = \frac{4Nq}{pp}$, seu $p = 2N$;
unde fit $M = \frac{1+q}{p} - \frac{(1+q)^2}{2p} = \frac{1-qq}{2p}$;
ideoque $2M = \frac{1}{r}$, ob $r = \frac{p}{1-qq}$;
erit ergo $p = 2(g - nP)$, & $\frac{1}{r} = \frac{2}{f} - 2n(R-Q)$.

XXXIII.

His jam determinationibus pro M & N iventis formula nostra irrationalis fit:

$$V\left(-M+\frac{1}{v}-\frac{N}{vv}\right) = V\left(-\frac{(1-qq)}{2p}+\frac{1+q\,cos.\,x}{p}\right.$$
$$\left.-\frac{(1+q\,cos.\,x)^2}{2p}\right) = \frac{q\,sin.\,x}{V\,2p};$$

unde ob $N = \frac{p}{2}$ colligitur

$$\frac{dv}{vv}V\frac{p}{2} = \frac{q\,d\varphi\,sin.\,x}{V\,2p}, \text{ seu } \frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\varphi\,sin.\,x}{p}.$$

Cum autem sit $\frac{1}{v} = \frac{1+q\,cos.\,x}{p}$ erit

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp}{pp}(1+q\,cos.\,x) - \frac{dq\,cos.\,x}{p} + \frac{q\,dx\,sin.\,x}{p} = \frac{q\,d\varphi\,sin.\,x}{p},$$

unde sequitur fore pro anomalia vera

$$dx = d\varphi - \frac{dp(1+q\,cos.\,x)}{pq\,sin.\,x} + \frac{dq\,cos.\,x}{q\,sin.\,x}.$$

At ob $1 - qq = \frac{p}{r}$ est $q\,dq = \frac{p\,dr - r\,dp}{2rr}$, sicque fit

$$dx = d\varphi - \frac{dp(1+q\,cos.\,x)}{pq\,sin.\,x} - \frac{dp\,cos.\,x}{2qqr\,sin.\,x} + \frac{p\,dr\,cos.\,x}{2qqrr\,sin.\,x},$$

$$\text{seu } dx = d\varphi - \frac{dp(2q+(1+qq)\,cos.\,x)}{2pqq\,sin.\,x} + \frac{dr}{rr}\cdot\frac{p\,cos.\,x}{2qq\,sin.\,x},$$

ubi cum sit $dp = -2n\,dP$, & $\frac{dr}{rr} = -2n(dQ - dR)$, erit . . . .

$$dx = d\varphi + \frac{n\,dP(2q + (1+qq)\cos. x)}{pqq\sin. x} - \frac{np\,(dQ - dR)\cos. x}{qq\sin. x}.$$

XXXIV.

Jam vero cum ſit $dP = v^3\,d\varphi\,\sin.\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right)$, erit primo variatio in ſemi-parametro p producta:

$$dp = -2nv^3\,d\varphi\,\sin.\sigma\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Deinde ob $dv = \frac{qvv\,d\varphi\,\sin. x}{p}$,

erit $dQ = \frac{qv^3\,d\varphi\,\sin. x}{p\tau^3}$, &

$$dR = \left(\frac{quv\,d\varphi\,\sin. x\cos.\rho}{p} - v\,d\varphi\,\sin.\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

unde pro variatione ſemi-axis tranſverſi r peperitur:

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3\,d\varphi\,\sin. x}{p\tau^3} + 2nv\,d\varphi\left(\frac{qv\sin. x\cos.\rho}{p} - \sin.\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

Tum vero relatio inter $d\varphi$ & dx prodit:

$$dx = d\varphi + \frac{nv^3\,d\varphi(2q + (1+qq)\cos. x)\sin.\sigma}{pqq\sin. x}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) - \frac{nv^3\,d\varphi}{q\tau^3} - \frac{npv\,d\varphi\cos. x\sin.\sigma}{qq\sin. x}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right) + \frac{nvv\,d\varphi\cos. x\cos.\rho}{q}\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

ubi meminiſſe oportet eſſe $v = \frac{p}{1 + q\cos. x}$.

XXXV.

In hac postrema formula termini per $\sin.\sigma$ affecti commode in unum colligi possunt: si enim posterior per $\frac{vv(1+q\cos.x)^2}{pp}=1$ multiplicetur ambo conjunctim erunt

$$+\frac{nv^3 d\varphi \sin.\sigma}{pqq\sin.x}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right)\left(\begin{array}{c}\cos.x+2q+qq\cos.x\\ -\cos.x-2q\cos.x^2-qq\cos.x^3\end{array}\right),$$

qui ergo in hunc evalescunt

$$\frac{nv^3 d\varphi \sin.x\sin.\sigma}{pq}(2+q\cos.x)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

hincque ergo habebimus

$$dx=d\varphi-\frac{nv^3 d\varphi}{q\tau^3}+\frac{nvvd\varphi\cos.x\cos.\rho}{q}\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right),$$
$$+\frac{nv^3 d\varphi\sin.x\sin.\sigma}{pq}(2+q\cos.x)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

quæ forma etiam hoc modo exprimi potest:

$$dx=d\varphi-\frac{nv^3 d\varphi}{q\tau^3}+\frac{nvvd\varphi}{q}\left(\cos.x\cos.\rho+\frac{2+q\cos.x}{1+q\cos.x}\sin.x\sin.\sigma\right)\left(\frac{u}{\tau^3}-\frac{1}{uu}\right);$$

ubi notandum est $d\varphi-dx$ definire progressionem momentaneam lineæ absidum.

XXXVI.

Consideremus nunc etiam relationem, quæ inter angulum elementarem $d\varphi$ & tempusculum dt intercedit, & cum sit $G-nP=\frac{1}{2}p$, erit $vvd\varphi=dt\sqrt{\alpha}(A+B)p$. Quod si jam loco tempusculi dt angulum à terra motu medio interea confectum introducere velimus, ut constans vaga α eliminetur, ponamus à terra secundum motum medium, quoquidem nunc gaudet, tempusculo dt absolvi angulum elementarem dT: & formula ista ad motum terræ accommodata, quæ pro motu medio tanquam circulus spectari debet, cujus radius seu distantia media à sole sit $= a$ fiet $v = p = a$ & $d\phi = dT$, ita ut sit

$$a u\, dT = dt \sqrt{\alpha (A + B) a}, \text{ seu}$$
$$\alpha (A + B)\, dt^2 = a^3\, dT^2;$$

ubi quidem B massam terræ denotat; sed ob insignem massæ solis magnitudinem pro omnibus planetis quantitas $A + B$ pro eadem haberi potest. Tempusculo ergo, quo terra motu medio angulum dT absolvit erit pro nostro planeta

$$vv\, d\phi = a\, dT \sqrt{ap}. \text{ ideoque } dT = \frac{vv\, d\phi}{a \sqrt{ap}}.$$

XXXVII.

Cum nunc sit $\alpha\, dt^2 = \frac{v^4\, d\phi^2}{(A + B) p}$, erit hoc valore in superioribus formulis (§. XXIV) substituto ob $\frac{C}{A+B} = n$

$$d\psi = - \frac{n v^3\, d\phi\, \sin.\xi \sin.(\theta - \psi)}{p} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

hincque porro pro variatione inclinationis

$$d\omega = - \frac{n v^3\, d\phi\, \cos.\xi \sin.\omega \sin.(\theta - \psi)}{p} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

ac pro variatione argumenti latitudinis seu anguli ☊ $AZ = \xi$

$$d\xi = d\phi + \frac{n v^3\, d\phi\, \sin.\xi \cos.\omega \sin.(\theta - \psi)}{p} \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

ubi $d\phi - d\xi$ exprimit promotionem lineæ nodorum in orbita planetæ, quem in Z consideramus. Atque hoc modo omnes mutationes momentaneas ab actione planetæ cometæve in Q versantis profectas per angulum elementarem $d\phi$ ideoque etiam per angulum motu medio terræ vel solis confectum dt expressas dedimus.

XXXVIII.

Si hæ formulæ integrari possent, non solum quæstioni ab Illustrissima Academia Regia Scient. perfecte satisfieret, sed etiam omnes perturbationes, quas planetæ vel cometæ mutua actione in motu suo patiuntur, ita exacte definiri possent, ut vix quicquam amplius in Theoria Astronomiæ esset desiderandum, quod autem antequam Analysis insignibus incrementis locupletetur, nec sperare quidem licet. Quamdiu autem his subsidiis caremus, tutissima via videtur his ipsis formulis differentialibus ita utendi ut mutationes intervallo singulorum dierum productæ tanquam differentialia spectentur sicque valor ipsius dT statuatur $= 59', 8''$. Tum enim pro singulis temporis intervallis ex ipsis formulis differentialibus valores variationum dp, dr, $d\psi$ & $d\omega$ colligi, indeque pro tempore quantumvis magno eædem mutationes satis exacte æstimari poterunt. Hæc methodus præcipue usum habebit si perturbationes à cometa oriantur cujus effectus cum per modicum tempus duret, non nimis prolixos calculos postulabit. Periculum igitur feci in perturbatione motus terræ à nupero cometa orta æstimanda.

De effectu nuperi Cometæ in motu Telluris perturbando.

XXXIX.

Cum hujus Cometæ nondum ejusmodi observationes ad me pervenerint, ex quibus elementa motus, quem nunc tenuit, definire potuissem, iis usus sum elementis, quæ pro ejus apparatione A. 1682 sunt stabilita; atque quantum ex observationibus crassioribus colligere licuit assumsi hanc cometam ad diem 14 Martii hujus anni per Perihelium transiisse. Quamvis autem verisimile sit elementa motus perinde ac tempus periodicum à precedente apparatione mutationem esse passa, tamen loca cometæ visa satis cum superioribus elementis convenire, sunt deprehensa, ut hinc nullus enormis error sit metuendus. Erat ergo hic cometa terræ proximus circa diem 27 Aprilis, ejusque distantia ad distantiam solis fere se habebat ut 2 ad 17. De massa autem ejus nihil suspicari licet, quam ad massam Solis rationem tenere pono ut n ad 1, ita ut si cometæ massa æquaretur massæ terræ foret prope modum $n = \frac{1}{200000}$. At verum valorem fractionis n nonnisi ex effectu in posterum observando definire licebit.

XL.

Quoniam igitur actio cometæ in terram circa 27 Aprilis erat maxima, pro pluribus diebus ante & post hoc tempus variationes in orbita terræ productas ex formulis; ante datis computavi.

Intervallum temporis Aprilis.	Variatio ſemi-parametri. $d\,p$	Variatio ſemi-axis. $d\,r$	Variatio lineæ abſidum. $d\varphi - d.\varkappa$	Variatio lineæ nodorum. $d\,\psi$	Variatio inclinationis. $d\,\omega$
20—21	$+ 45310n$	$+ 44570n$	$- 4937560n''$	$+ 8903n''$	$+ 6717n''$
25—26	$+155650n$	$+154346n$	$-19059570n$	$+112880n$	$+111364n$
26—27	$+135314n$	$+135466n$	$-18445310n$	$+152436n$	$+159996n$
27—28	$+ 66010n$	$+ 67438n$	$-11593600n$	$+155398n$	$+173911n$
28—29	$- 3262n$	$- 2014n$	$- 3778470n$	$+119840n$	$+143550n$
29—30	$- 37860n$	$- 35616n$	$+ 878107n$	$+ 78234n$	$+100724n$
30—1 Maji	$- 46088n$	$- 44210n$	$+ 1799210n$	$+ 48305n$	$+ 67183n$
1 — 2	$- 43260n$	$- 41772n$	$+ 2959610n$	$+ 29734n$	$+ 44933n$
6 — 7	$+ 19031n$	$- 17736n$	$+ 1554230n$	$+ 3608n$	$+ 9506n$

poſito ſemi-axe ab actione cometæ immuni $r = 100000$.

XLI.

Hinc patet 1°. ſemi-parametrum p ad 28 Aprilis augeri, tum vero iterum minui, ita tamen ut incrementum multum ſuperet decrementum. Totum quidem augmentum exſurgere videtur ad $700000\,n$; ex quo cum ante adventum cometæ ſemi-parameter eſſet $= 97144$, is poſthac erit $= 97144 + 700000\,n$. Quare ſi maſſa cometæ ad maſſam terræ ſtatuatur ut m ad 1, erit nunc ſemi-parameter orbitæ terræ $= 97144 + \frac{7}{2}\,m$. 2°. Pares fere mutationes patitur ſemi-axis tranſverſus r, qui ab actione cometæ augmentum accepiſſe videtur $= 690000\,n$. unde iſquidem nunc erit $= 100000 + \frac{69}{20}\,m$. denotante perpetuo $m : 1$ rationem maſſæ cometæ ad terræ. 3°. Hinc ſequitur, cum excentricitas orbitæ terræ ante adventum cometæ eſſet $= 0,0169$, eam nunc aliquanto fore minorem $= 0,0169 - 0,000044\,m$. Quando vera elementa motus cometæ fuerint erecta, operæ pretium erit hunc calculum repetere & ad plures dies tam ante quam poſt perigæum extendere.

XLII.

XLII.

Cum ab actione cometæ axis orbitæ terræ certe sit auctus in posterum quantitatem anni solaris majorem fieri necesse est, idque in ratione 1 ad $(1 + \frac{69\,m}{2000000})^{\frac{3}{2}}$, seu 1 ad $1 + \frac{207\,m}{4000000}$. Quare cum ante adventum cometæ annus solaris fuisset $365^{d}, 5^{h}, 49' = 525949'$ incrementum anni in posterum hinc prodit $= 27\,m'$ quod sane admodum est notabile si enim massa cometæ æqualis esset massæ terræ, quantitas anni solaris posthac futura esset $365^{d}, 6^{h}, 16'$ unde non exigua mutatio in calendarium inferretur. Imprimis autem tabulæ astronomicæ omnes mediorum motuum, quatenus ad annos referentur; insigni correctione indigerent. Quin etiam si cometa tantum parti $\frac{1}{27}$ terræ æquaretur, incrementum unius minuti primi in annos mox sentiri deberet atque hinc massa cometæ accuratissime cognosci posse videtur.

XLIII.

Quia motus cometæ erat retrogradus, motusque lineæ absidum terræ ad ejus orbitam relatur, signum — quod in columna $d\phi - dx$ prævalet ostendit lineam absidum terræ promotam esse. Idque per spatium, quod haud minus quam $100000000\,n$ æstimari potest. Foret ergo nunc aphelium terræ magis promotum per spatium $500\,m''$ unde si cometa esset terræ æqualis nunc quidem locus aphelii, quem tabulæ ostendunt, augeri deberet $8', 20''$ quod incrementum mox ex accuratissimis observationibus solis post actionem cometæ instituendis percipi deberet. Denique ex binis ultimis columnis patet ambos angulos ψ & ω insigne augmentum capere debere. Quod utrinque haud minus quam $950000\,n''$ vel $47\frac{1}{2}\,m''$ æstimari potest, sunt enim ambo fere æqualia. Cujuſmodi autem phœnomena hinc oriantur, opera pretium erit accuratiſſime definire.

XLIV.

Fig. 2. Sit igitur in cœlo ☊ C via cometæ ex ſole viſa & ☊ ♎ ♋ eclipticæ ſitus ante cometæ adventum, erit ex elementis orbitæ cometæ angulus ☊ ♎ $C = 17^\circ\ 56' = \omega$ & arcus ☊ ♎ $= 57^\circ,\ 16'$. Jam per punctum ♎ tranſeat æquator $Æ$ ♎ Q ut ſit angulus $Æ$ ♎ ♋ $= 23^\circ,\ 28\frac{1}{2}'$. At poſtquam cometæ effectum ſuum produxit, ſit $\varepsilon\, o\, \lambda\, \omega$ ecliptica ſecans priori in o, erit ☊ $\omega = d\psi$, & $C\omega o = \omega + d\omega$. Ducatur arculus $\omega\, u$ ad ☊ o normalis, erit ☊ $u = d\psi\, coſ.\,\omega$ & $\omega\, u = d\psi\, ſin.\,\omega$. Hinc ob $d\omega = d\psi$ reperitur arcus ☊ $o = 17^\circ\ 7'$, & angulus minimus ad $o = 50\, m''$, ob $d\psi = d\omega = 47\frac{1}{2}\, m''$. Cum ergo ſit ♎ $o = -\, 34^\circ,\ 9'$ ecliptica motu aggratorio circa punctum o, quod cadit in ♏ $4^\circ,\ 9'$ converſa eſt angulo $50\, m''$ ſicque punctum ſolſtitiale ♋ magis ab æquatore removetur & obliquitas eclipticæ augetur. Ac ſi obliquitas eclipticæ augetur. Ac ſi obliquitas eclipticæ priſtina ponatur $= \varepsilon$. Preſens $= \varepsilon + d\varepsilon$, invenitur $d\varepsilon = 41\, m''$ & cum ſit $\mu\lambda = -\, 63\, m''$. Puncta æquinoctialia ſuper ecliptica promota erunt ſpatio $63\, m''$ ſuper æquatore autem ſpatio $70''\, m$. In latitudine igitur ſtellarum fixarum hic effectus potiſſimum ſpectabitur, & maxime quidem in iis quarum longitudo eſt vel ♌ $4^\circ,\ 9'$, vel ♒ $4^\circ,\ 9'$, quarum illæ ad polum eclipticæ borealem acceſſiſſe, hæ vero ab eo receſſiſſe videbuntur intervallo $50\, m''$.

Responsio ad Quæstionem.

XLV.

Cum ergo dubitari nequeat, quin axis orbitæ Telluris ab actione nuperi Cometæ augmentum acceperit, nisi forte quis vel sistema gravitationis universalis evertere, vel corpora cometarum omnes materia expertia statuere velit. Quorum alterum gravissimis argumentis, alterum natura corporum adversaretur, omnino agnoscere debemus, quantitatem anni solaris in posterum aliquantum majorem esse futuram, quam adhuc fuerat. etiamsi verum augmentum ob massam cometæ incognitam definire haud liceat. Ex quo necessario sequitur, motum medium solis aliquanto tardiorem fieri oportere. Cujusmodi mutatio cum nunc quidem in terra contigerit, omnino probabile est similem perturbationem jam antehac nonsolum in terra sed etiam in reliquis planetis esse factam, ita ut sine ulla dubitatione asseverare possimus, motus medias planetarum quandoque alterationibus esse obnoxios.

XLVI.

Hujusmodi alteratio toties evenire debet, quoties cometa cuipiam planetæ fit admodum vicinus, quodquin sæpius jam contigerit vix dubitare licet. Utinam Historia Cometarum majori cura ab Astronomiæ peritis omni tempore fuisset consignata! inde enim quinam cometæ ad quempiam planetam satis prope accesserint, cognosci eorumque effectus per similem calculum, quo hic sum usus, determinari posset; sed vetustiores relationes ita plerumque fabulis sunt refertæ. Ut parum fidei mereantur; quantus enim effectus oriri debuisset ab illis cometis quorum magnitudo apparens Lunam superasse perhibetur? Qui quin terræ multo viciniores fuissent quum hic postremus, dubitare non posset, cum támen observationes astronomicæ, vix ullam alterationem indicare videantur. Merito igitur hujusmodi cometarum, qui adeo in regiones sublunares descendisse ferantur relationes fabulis vulgi annumerantur.

XLVII.

Neque tamen omnino negare possumus, ante hoc tempus ullas hujusmodi perturbationes in motu terræ esse productas, etiamsi fortasse aliquot abhinc seculis, quibus Astronomica majori studio tractare est capta, nihil tale evenerit. Fieri enim posset, ut ob defectum idonearum observationum hujusmodi alteratio non esset animadversa, vel ut motus medius jam ita fuerit constitutus ut etiam cum illis satis prope conveniret. Suspicio hinc saltem nasci posset, quoniam Ptolemæi observationes, cum nostris collocatæ, anni quantitatem aliquanto minorem ostendunt, nisi error reductionis Calendarii Ægyptiaci ad Romanum in causa sit, intervallo temporis ab Hipparcho ad Ptolemæum elapsi cometam quendam annum contraxisse, deinde vero ab alio quopiam cometa annum iterum nonnihil fuisse protractum. Verum de his nihil præter conjecturas proferre licet, sufficiat igitur exemplo nuperi cometæ, ostendisse ab ejus actione utique alterationem in motu medio terræ oriri debuisse.

XLVIII.

At si ab ista cometa non solum terræ motus medius sed etiam positio & species ejus orbitæ quandam variationem eſt paſſa, fieri omnino nequit, quin Luna in motu ſuo multo majores perturbationes ſit paſſa, quas cum per Theoriam definire vix liceat, obſervationes poſthac inſtituenda declarabant. Ubi quidem non parum eſſet dolendum, cum jam poſt tot tantoſque labores Theoria Lunæ ad id perfectionis ſit perducta ut lunæ loca fere æque exacte ac ſolis definire valuerimus, ſi ingens hoc opus poſthac nulli uſui amplius eſſet futurum, plures enim anni novæ Theoriæ condendæ vix ſufficerent. Hoc autem eo magis eſt verendum, cum revera mutatio quædam in motu lunæ medio poſt tempora vetuſtiſſimarum obſervationum facta deprehendatur. Quæ quin effectui cujuſpiam cometæ ſit tribuenda, nunc quidem extra dubium poſitum videtur.

XLIX.

Atque hæ cauſæ perturbationum ab actione cometarum profectæ ita ſunt incertæ ut neque quæ antehac evenerunt ob defectum obſervationum aſſignari, neque futuræ prædici queant, niſi forte pro iis cometis, quorum reverſiones jam ſatis ſunt exploratæ, etiamſi perturbationes, quas ipſi in ſuo curſu à planetis patiuntur, haud levi ſint impedimento. Certiores autem eæ ſunt perturbationes, quæ ab actione mutua planetarum oriuntur, & ad quas definiendas ſupra expoſitæ formulæ ſimili modo adhibueri poſſunt, ita ut pro ſingulis diebus vel etiam minoribus majoribuſve temporis intervallis variationes ſingulorum elementorum per ipſas formulas differentiales definiantur, ac deinceps in unam ſummam colligantur. Qui calculus fortaſſe minori opera expedietur quam ſi integratio completa harum formularum in noſtra eſſet poteſtate; integralia enim, ſiquidem unquam ea eruere licebit, tantopere implicata fore videntur, ut nonniſi prolixiſſimis ac tædioſiſſimis calculis evolvi queant.

L.

Cum igitur quæstio proposita non omnes perturbationes requirat, sed ad variationem axis transversi sit adstricta eam sequenti formula exprimi supra vidimus:

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3 d\varphi \,\text{fin.}\, x}{p\tau^3} + 2nvd\varphi \left(\frac{qv \,\text{fin.}\, x \,\text{cof.}\, \rho}{p} - \text{fin.}\, \sigma\right) \left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quam aliquanto attentius considerari conveniet. Est autem n fractio tam parva ut nisi distantia τ admodum sit exigua, hæc expressio nullius sit momenti: tum vero patet eam proxime cubo distantiæ $QZ = \tau$ reciproce esse proportionalem ita ut dimidia distantia effectum octies majorem afferat. Deinde etiam distantia $AQ = u$ quando fit minima, hanc expressionem multum augere potest, tamen quia tantum ratio inversa duplicata distantiæ adest, hic effectus illo longe minor est censendus, nisi forte ingens cometa in perihelio suo solem fere attingat, uti A. 1681 evenisse constat: sed hæc vicinitas nimis cito transit, quam ut effectus inde notabilis oriri posse videatur.

LI.

Qui formulam non tam integrare quam ad commodam approximationem perducere voluerit, vehementer vereor ne oleum operamque perdiderit. Primo enim ipsa quantitas τ tali irrationalitate est implicata, ut ad hunc usum vix in seriem satis convergentem evolvi posse videatur: namque si casu quo τ est quantitas parva, fuerit convergens, id quod imprimis est opus, pro reliquis casibus plane erit inepta. Deinde tam in ea quam in reliquis formulæ partibus inest angulus ρ cum angulo σ, qui ipsi formulis nimis perplexis definiuntur, quam ut successum sperare valeamus. Cujus difficultatis ratio potissimum in inclinatione binarum orbitarum seu angulo τ est sita, qui cum in cometis quantumvis magnus esse possit, ne tentare quidem hujusmodi reductionem volui, præsertim cum omnino minus sit molestum, calculum ex ipsa formula differentiali repetere, quemadmodum pro cometa hujus anni feci, eademque methodo pro omnibus reliquis cometis uti mallem, à quorum actione motus cujuspiam planetæ turbari videatur.

LII.

Verum pro actione mutua planetarum, quoniam eorum orbitæ parum inter se inclinatur, nostra formula aliquanto simplicior reddi potest. Si enim inclinatio ω evanescat, uti pro planetis assumere licet, consideratio lineæ nodorum penitus exuitur ob $cof.\,\omega = 1$, erit $d\xi = d\phi - d\psi$ & $\xi = \phi - \psi$ hincque $cof.\,\rho = cof.\,(\phi - \theta)$ & $fin.\,\sigma = fin.\,(\phi - \theta)$ ita ut litteræ ρ & σ eundem angulum $\phi - \theta$ qui est distantia amborum planetarum ex sole visa, denotent. Quare hoc casu erit

$$\tau = \sqrt{(uu - 2uv\,cof.\,(\phi - \theta) + vv)}, \text{ \&}$$

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3\,d\phi\,fin.\,x}{p\tau^3} + 2nv\,d\phi\left(\frac{qv\,cof.\,(\phi-\theta)\,fin.\,x}{p} - fin.\,(\phi-\theta)\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right);$$

quæ ob $\frac{p}{v} = 1 + q\,cof.\,x$ transformatur in hanc

$$\frac{dr}{rr} = \frac{-2nqv^3\,d\phi\,fin.\,x}{p\tau^3} - \frac{2nvv\,d\phi}{p}\left(fin.\,(\phi - \theta) + q\,fin.\,(\phi - \theta - x)\right)\left(\frac{u}{\tau^3} - \frac{1}{uu}\right).$$

LIII.

In hac formula, quia per fractionem minimam n eſt multiplicata atque omnes perturbationes valde ſunt exiguæ, primo quantitates p & q pro conſtantibus haberi poſſunt. Tum vero ponere licet $dx = d\phi$ neglecta motu lineæ abſidum. Deinde quo tempore terra motu medio conficit angulum dT eodem erit $d\phi = \frac{a\,dT\sqrt{ap}}{vv}$, exiſtente $v = \frac{p}{1 + q\,cos.\,x}$. Ac ſi pro altero planeta perturbante in Q ſit ſemiparameter $= b$, excentricitas $= e$ & anomalia vera à perihelio computata $= y$ erit ſimili modo $u = \frac{b}{1 + e\,cos.\,y}$ & $d\theta = \frac{a\,dT\sqrt{ab}}{uu} = dy$, unde omnia differentialia ad idem dT reducuntur. Sed maxima difficultas etiamnum in formula irrationali τ reſidet. Quæ quomodo ſuperari queat, ita quidem ut noſtrum inſtitutum poſtulat, nondum perſpicio: immanes enim calculos evitare vellem quia inde parum ſubſidii ſuppetiturum prævideo.

LIV.

Simpliciſſimus eſt caſus, quo ambæ orbitæ ſtatuuntur circulares & excentricitas negligitur. Unde fit $v = p = r$: $u = b$. $d\phi = \frac{a\,dT\sqrt{ap}}{rr} = \frac{a\sqrt{a}}{r\sqrt{r}}\,dT$, & $d\theta = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}}\,d\tau$, tum vero $\tau = \sqrt{(bb + rr - 2br\,cos.\,(\phi - \theta))}$, & variatio quæſita $dr = -2nr^3\,d\phi\,ſin.\,(\phi - \theta).\left(\frac{b}{\tau^3} - \frac{1}{bb}\right)$; ubi quidem ipſa quantitas r ob mutabilitatem

litatem minimam ut conſtans ſpectari poteſt. Hic igitur obſervo quomodocunque formula $\frac{b}{r^3}$ in ſeriem convertatur, in eo tantum anguli $\varphi - \theta$ coſinum cum ſuis poteſtatibus occurrere quæ cum ad coſinus multiplorum ejuſdem anguli reducantur, ſi ponamus brevitatis gratia $\varphi - \theta = \eta$ factor $\frac{b}{r^3} - \frac{1}{bb}$ hujuſmodi formam induet $A + B\ cof.\ \eta + C\ cof.\ 2\eta + D\ cof.\ 3\eta$, &c. unde integrale ipſius dr, quia $d\varphi$ ad dy conſtantem habet rationem, ſimili quoque forma exprimetur, ita ut durante qualibet revolutione quantitas r variationes quidem patiatur, ſed poteſt quamlibet iterum eundem quantitatem recuperet: ex quo motus medius nullam alterationem pati cenſebitur.

L V.

Quamdiu ergo ambæ orbitæ excentricitate carent, à planetarum actione mutua nulla alteratio in eorum motu medio efficitur: quas enim mutationes axis tranſverſus per ſingulas revolutiones ſubit, eæ inter inæqualitates motus referri ſolent. Fieri autem poteſt ut ab eadem actione poſt longum demum tempus utrique orbitæ excentricitas quædam inducatur, quod cum evenerit, hæc ratio ceſſat atque in noſtro calculo excentricitatis ratio erit habenda. Tum autem perpendendum eſt, tam formulam $\frac{v^3}{r^3}$ quam $vv\left(\frac{u}{r^3} - \frac{1}{uu}\right)$ in hujuſmodi ſeriem evolvi.

$$A + B\ cof.\ \eta + C\ cof.\ x + D\ cof.\ y + \&c.$$

in qua occurrent coſinus omnium angulorum, qui ex combinatione horum trium oriri η, x & y poſſunt, unde dr æquabitur producto ex elemento $d\varphi$ in ſeriem ſinuum hujuſmodi angulorum

$$A\,fin.\,\eta + B\,fin.\,x + C\,f(\eta - x) + D\,f(\eta + x) + E\,f(\eta + y) + F\,f(\eta - y)\ \&c.$$

qui scilicet oriuntur, si illa forma vel per *sin.* x vel per *sin.* η vel per *sin.* $(\eta - x)$ multiplicetur.

L V I.

Tum vero ad integrationem absolvendam notetur esse, $d\phi = dx = dT(\alpha + \beta\, cos.\, x + \gamma\, cos.\, 2x$ &c.$)$, & $d\theta = dy = dT(\alpha' + \beta'\, cos.\, y + \gamma'\, cos.\, 2y$ &c.$)$. Unde cum hujusmodi formulæ integrandæ occurrant $d\phi\, sin.(\lambda y + \mu x + \nu y)$ tum $d\phi$ ita repræsentari potest, ut sit $d\phi = \frac{\alpha(\lambda d\eta + \mu dx + \nu dy)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'} + M\, dt\, cos.\, x + N\, dt\, cos.\, y +$ &c. cujus seriei primum membrum in integratione dat: $\frac{-\alpha\, cos.(\lambda\eta + \mu x + \nu y)}{\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha'}$; reliqua autem membra, quæ sunt multo minora, in formula differentiali novos præbent terminos similes integrandos, qui pari modo sunt tractandi. Sicque cum continuo ad terminos minores perveniatur, tandem hoc modo cujusque termini integrale satis exacte obtinebitur.

L V I I.

Cum autem hic non de omnibus inæqualitatibus axis transversi sit quæstio, sed iis tantum quæ per plures revolutiones continuo vel augentur vel diminuuntur: hic imprimis spectandi sunt ii differentialis termini in quibus sit $\lambda(\alpha - \alpha') + \mu\alpha + \nu\alpha' = o$, qui continent sinum anguli $\eta - x + y$ vel ejus multiplorum. Cum enim ob $\eta = \phi - \theta$ hic angulus sit $(\phi - x) - (\theta - y)$, ubi $\phi - x$ longitudinem perihelii planetæ Z & $\theta - y$ longitudinem parihelii planetæ Q designet, angulus $\eta - x + y$ exprimit distantiam utriusque perihelii, quæ cum constans haberi possit. Erit partis $d\phi\, sin.$ $(\eta - x + y)$ integrale $= \phi\, sin.\,(\eta - x + y)$, hincque axis transversus continuo vel crescet vel decrescet uniformiter, nisi quatenus post plurima secula distantia periheliorum mutatur. Quæ si tandem ad eundem valorem redierit iterum axem ad pristinum quidem statum reducit. Verum cum hoc quasi nunquam eventurum sit censendum quamdiu quidem Astronomia viguit & vigebit, axes transversi orbium planetarum continuo vel augebuntur vel diminuentur.

LVIII.

Evidens quoque est coëfficientem termini $\mathit{sin.}\,(\eta\text{-}x+y)$ utramque excentricitatem q & e in se compecti; unde ceteris paribus ista axis transversi mutatio eo major erit, quo majus fuerit productum excentricitatum eq; ac si alterutra saltem fuerit minima nisi altera sit maxima, hæc axis transversi ideoque & motus medii variatio vix erit sensibilis. Tum vero hæc variatio potissimum à distantia periheliorum pendet, qua si fuerit vel nulla vel sex signorum, nullam etiam variationem in motu medio gignit. Maxima autem evadet hæc variatio, si ambo perihelia tribus signis à se invicem distent. Præterea vero hic effectus potissimum à magnitudine planeta perturbantis ejusque vicinitate pendebit.

LIX.

Cum igitur hujusmodi terminus $d\varphi\,\mathit{sin.}\,(\eta - x + y)$ certo in variationem axis transversi ingrediatur, jam re perpensa ad quæstionem, Illustr. Academiæ Regiæ ita respondeo, ut dicam, motus medios planetarum non solum ab actione cometarum satis prope prætereuntium mutationibus esse obnoxios, sed etiam ab actione mutua eorum pro ratione excentricitatis positionisque periheliorum seu apheliorum ejusmodi mutationes pati, ut continuo fere æquabiliter vel accelerentur vel retardentur. Atque ex formulis inventis, si analysis sufficeret, & quispiam laborem suscipere vellet vera adeo quantitas hujus alterationis assignari posset, quæ cum ab Ill. Academia non expresse requiratur quæstioni equidem satisfecisse videor, interim quid de singulis planetis sit censendum, hic subjungam.

LX.

Primo igitur Mercurius, etsi excentricitatem habet maximam ab insignem reliquorum planetarum distantiam præ distantia solis vix ullam mutationem in motu medio patietur nisi forte à Jove, cujus aphelium ab aphelio Mercurii distat 64° effectus quidam exiguus oriatur. In Venere autem ob ejus excentricitatem fere evanescentem nulla mutatio producetur. Terræ autem motus medius à Jove imprimis affici debet, cum distantia apheliorum sit 88 quam autem parum sensibilem esse Observationes testantur. Mars tam à Jove qua Saturno pati debet, idque multo magis quam terra quia his planetis est propior simulque majori excentricitate præditus. Saturnus autem & Jupiter uti sunt à Sole remotissimi, & maximas massas continent, eo magis in se invicem agere debent, quod cum excentricitas in utroque satis est magna, tum vero eorum aphelia 79° à se invicem distant; unde in utroque motus medius haud exiguam variationem patitur, quæ adeo jam per observationes satis videtur confirmata.

FINIS.

Fig. 1

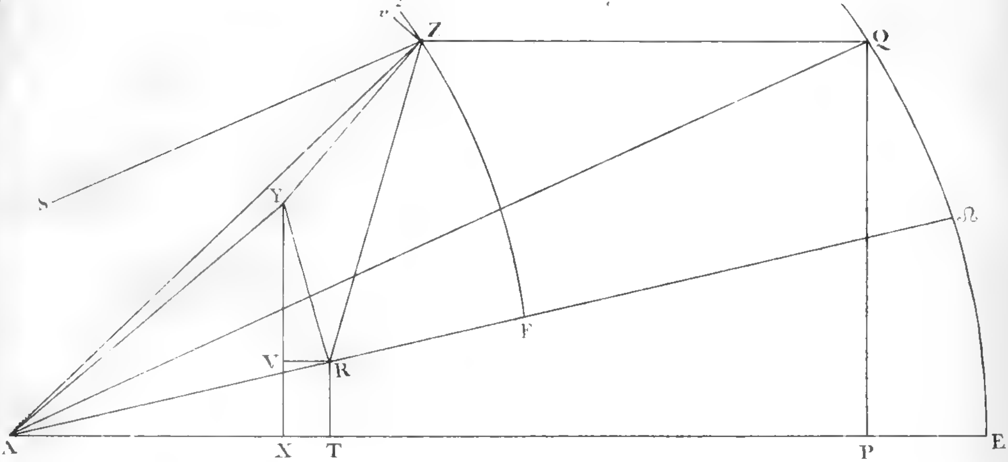
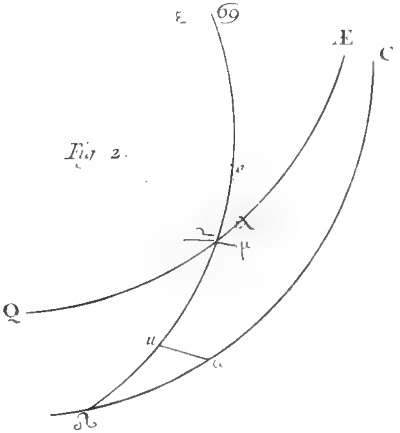


Fig. 2



... rdelle Sculp

RECHERCHES

Sur les altérations que la résistance de l'Ether peut produire dans le mouvement moyen des Planetes.

Piece qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences, en l'année M.DCC.LXII.

Par M. l'Abbé BOSSUT, ci-devant Correspondant de l'Académie Royale des Sciences, & Professeur Royal de Mathématiques aux Ecoles du Génie, aujourd'hui Membre de l'Académie Royale des Sciences, & Examinateur des Ingénieurs, &c.

MÉMOIRE

DANS LEQUEL ON EXAMINE

Si les Planetes ſe meuvent dans un milieu dont la réſiſtance produiſe quelque effet ſenſible ſur leur mouvement?

POUR répondre à cette queſtion, il y a trois choſes à examiner.

Premierement: Quelle eſt la nature du milieu dans lequel les Planetes ſe meuvent?

En ſecond lieu: Il faut rechercher ſi ce milieu eſt capable de cauſer quelque altération dans le mouvement des Planetes?

Et enfin: Il faut déterminer, par le calcul, tous les dérangemens qui ſont en effet cauſés par cette réſiſtance dans le mouvement des Planetes?

PREMIERE PARTIE.

Sur la nature du milieu dans lequel les Planetes ſe meuvent.

I.

D'ABORD, on ne ſauroit ſoutenir que l'eſpace dans lequel les planetes ſe meuvent ſoit un vuide parfait. Outre tant d'autres raiſons, la ſeule lumiere prouve ſuffiſamment, que tout l'eſpace du ciel eſt rempli de cette matiere ſubtile dont les rayons de lumiere ſont formés. Si les rayons de lumiere étoient des émanations actuelles des corps luiſans, lancées avec cette prodigieuſe vîteſſe qui leur fait parcourir l'eſpace immenſe du ſoleil juſqu'à nous en moins de huit minutes de tems, tout l'eſpace du ciel ſeroit rempli de ces émanations lumineuſes qui le traverſeroient preſque en tout ſens avec la même rapidité. Mais quoique le grand Newton ait ſoutenu ce ſentiment, il eſt aſſujetti à tant d'inconvéniens, qu'il me ſera permis de l'abandonner & d'embraſſer l'autre ſentiment, qui explique la propagation de la lumiere d'une maniere ſemblable à celle du ſon.

II.

Sans parler de l'épuiſement que les corps luiſans devroient ſouffrir, ſuivant le ſentiment de Newton, le ſeul phénomene, que pluſieurs rayons de lumiere paſſent ſans ſe troubler par le même point, le détruit tout-à-fait. Il eſt contre les principes les mieux établis de la Mécanique, que pluſieurs particules, quelques ſubtiles qu'on les conçoive, paſſent à la fois par le même point & en tout ſens avec une vîteſſe auſſi prodigieuſe que celle de la lumiere, ſans ſe choquer & troubler le mouvement les unes les autres. Or dans l'autre ſiſtême, nous ſavons non-ſeulement par l'expérience, que pluſieurs ſons traverſent le même point ſans ſe troubler; mais M. de la Grange a fait voir très-clairement, dans les Mémoires de la Société de Turin, que ce phénomene eſt parfaitement d'accord avec les principes de Mécanique, & qu'il en eſt même une ſuite néceſſaire.

III.

Il eſt donc certain, que la lumiere eſt produite par les corps luiſans de la même maniere que le ſon eſt produit par les corps ſonores, & que la propagation dans l'un & l'autre cas ſuit les mêmes loix. Il faut donc que tout l'eſpace des cieux ſoit rempli d'une matiere propre à tranſmettre les petites impulſions ou ébranlemens qui conſtituent la nature de la lumiere, tout comme nous ſavons à préſent, par les heureuſes recherches de M. de la Grange, que le ſon eſt tranſmis par l'air. De-là il s'enſuit que cette matiere céleſte doit être fluide & ſemblable à l'air, en joignant à un certain degré de denſité un certain degré d'élaſticité, pour produire à la propagation de la lumiere la même vîteſſe que l'expérience nous donne à connoître.

IV.

Or puiſque la vîteſſe de la lumiere eſt connue, étant environ ſix cent mille fois plus grande que celle du ſon, nous en pouvons conclure un beau rapport entre ce milieu du ciel & notre air. Sachant que la vîteſſe des ébranlemens tranſmis par un milieu élaſtique eſt comme la racine quarrée de l'élaſticité diviſée par la denſité, ſi nous poſons l'élaſticité du milieu des cieux m fois plus grande que celle de l'air, & ſa denſité n fois plus petite que celle de l'air, nous aurons $\sqrt{mn} = 600000$, ou bien $m\,n = 360\,000\,000\,000$. Et partant, ſi nous ſavions l'élaſticité de ce milieu, nous en pourrions conclure ſa denſité, & réciproquement; par exemple, ſi ſon élaſticité étoit 600 000 fois plus grande que celle de l'air, ſa denſité ſeroit préciſément d'autant de fois plus petite.

V.

Qu'il me ſoit permis de donner à ce milieu le nom d'*Ether*, qui eſt donc une matiere fluide & élaſtique ſemblable à l'air, mais qui en differe tant par ſa denſité que par ſon élaſticité; & quoique nous ne ſachions ni l'une ni l'autre ſéparément, nous connoiſſons que, poſant l'élaſticité de l'éther m fois plus grande & ſa denſité n fois plus petite que celle de l'air, le produit de ces deux nombres $m\,n$ doit être 360 000 000 000. Il n'y a donc aucun doute que l'un & l'autre de ces deux nombres ne ſoit très-grand. Puiſque l'air, en montant, devient de plus en plus rare, & qu'il ſe perd enfin dans l'éther, il faut bien que l'éther ſoit incomparablement plus rare que l'air, & ſi l'élaſticité de l'éther eſt la cauſe de la cohéſion, dureté & du reſſort des corps terreſtres, comme il paroît très-vraiſemblable, il faut bien que ſon élaſticité ſoit pour le moins 1000 fois plus grande que celle de l'air. Or, ſuppoſant $m = 1000$, la denſité de l'éther ſeroit 360 000 000 fois plus petite que celle de l'air; & ſi l'on ne ſuppoſpit l'élaſticité que 100 fois plus grande que celle de l'air, la densité de l'éther deviendroit encore dix fois plus petite.

VI.

Puisque nous sommes assurés que les planetes & cometes ne souffrent presque aucune résistance dans leur mouvement par l'éther, il faut absolument que cette matiere ou l'éther soit plusieurs mille fois plus rare que l'air, ce qui s'accorde parfaitement bien avec ce que la vîtesse de la lumiere nous vient de fournir. Donc un pied cubique d'éther renfermeroit plusieurs mille fois moins de matiere qu'un pied cubique d'air; & puisque l'air est 800 fois plus léger que l'eau, & celle-ci 19 fois plus légere que l'or, si nous supposons l'éther 360 000 000 fois plus rare que l'air, un pied cubique d'éther contiendra $19 \times 800 \times 360\,000\,000$ moins de matiere qu'un pied cubique d'or; ou bien, un pied cubique d'or contiendroit autant de matiere que 5 472 000 000 000 pieds cubiques d'éther; ou encore, qu'un cube d'éther dont le côté seroit de 17500 pieds, c'est-à-dire à-peu-près d'une lieue de France.

VII.

Ici il se présente d'abord une question très-importante: S'il seroit possible de diviser & subtiliser la matiere d'un pied cubique d'or, ensorte qu'elle remplisse tout l'espace d'une lieue cubique? Je sais bien que Keil a prétendu en avoir démontré la possibilité, ayant prouvé que les intervalles entre les particules pourroient devenir moindres qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle fût; mais l'élasticité semble absolument exiger que les moindres particules se touchent tout-à-fait, & qu'elles se trouvent dans une continuité dont il s'en faut beaucoup que Keil ait démontré la possibilité, à moins qu'on ne veuille donner aux particules une figure linéaire presque géométrique, qui ne se touchent que par les pointes; mais une telle structure seroit trop révoltante pour en parler sérieusement dans la Physique. Je crois plutôt qu'on peut hardiment nier qu'il soit possible de former une lieue cubique d'éther d'un pied cubique d'or, par la subtilisation, quoique la quantité de matiere soit de part & d'autre la même. Il y a ici un équivoque qui semble avoir trompé tous ceux qui ont écrit sur cette matiere.

VIII.

Pour mettre cette matiere dans tout son jour, je commence par une remarque générale, que dans tous les corps il faut bien distinguer *leur véritable étendue* de la *masse* ou *quantité de matiere* dont ils sont composés. Or je nomme *la véritable étendue* d'un corps le volume ou la solidité géométrique, qui resteroit, si l'on retranchoit de son volume apparent tous les pores dont il est rempli. On sait que l'or même est tout rempli de pores: donc la véritable étendue d'une masse d'or sera toujours beaucoup plus petite que son volume apparent. Cette véritable étendue de chaque corps est une quantité géométrique, & partant bien différente de la quantité de matiere ou de la masse, qui est une quantité mécanique, en vertu de laquelle les corps s'opposent au changement de leur état; c'est donc *l'inertie*, & ces termes, *quantité de matiere*, *masse* & *inertie* signifient la même chose.

IX.

Les expériences sur la gravité prouvent suffisamment, que le poids de chaque corps est proportionnel

à

à ſa maſſe ou à ſon inertie. Donc puiſque un pied cubique d'or eſt 19 fois plus peſant qu'un pied cubique d'eau, il eſt certain que celui-là contient 19 fois plus de matiere que celui-ci ; mais il ne s'enſuit pas que la véritable étendue de l'or ſoit 19 fois plus grande que la véritable étendue de l'eau ; ou bien qu'il ſeroit poſſible de réduire une maſſe d'eau en en ôtant tous les pores à un volume plus que 19 fois plus petit. Il n'eſt pas encore prouvé que deux corps, dont les maſſes ſont égales, aient auſſi la même véritable étendue ; & je ne vois nulle néceſſité pourquoi deux étendues égales de matiere devroient toujours avoir la même inertie ; ou bien, pourquoi la quantité mécanique devroit toujours ſuivre la quantité géométrique.

X.

Cependant, quand nous réfléchiſſons ſur la cauſe de la gravité, quoiqu'elle nous ſoit inconnue, il ſemble qu'on ne la ſauroit chercher que dans la preſſion d'un fluide extrêmement ſubtil, qui paſſe librement, même à travers les moindres pores des corps. Or une telle preſſion agit toujours en raiſon des volumes ; & cela poſé, le poids de chaque corps ſeroit toujours proportionnel à ſa véritable étendue. Donc puiſque le poids eſt auſſi proportionnel à l'inertie ou à la maſſe de chaque corps, il en ſuivroit que la véritable étendue fût toujours proportionnelle à l'inertie, comme preſque tous les Philoſophes ont cru juſqu'ici. Mais quelque fort que puiſſe paroître cet argument, il ne regarde que les corps terreſtres ſur leſquels la gravité agit, & par la même raiſon auſſi ſur tous les corps groſſiers dont les planetes ſont formées, parce qu'elles ſont ſoumiſes à la même loi de gravitation ; mais on n'en ſauroit encore rien conclure de certain à l'égard des matieres ſubtiles étendues partout le monde, qui apparemment ne ſont pas aſſujetties à la gravitation, & qui en contiennent plutôt la cauſe.

XI.

Il eſt pourtant fort remarquable, que quoique nous ne voyons aucune liaiſon entre l'inertie & la vraie étendue d'un corps, tous les corps groſſiers non-ſeulement de la terre mais auſſi de tous les corps céleſtes aient cette propriété, que dans tous l'inertie ſoit proportionnelle à la vraie étendue, en vertu de laquelle une certaine étendue de matiere ne ſauroit exiſter, ſans qu'elle ait une certaine inertie ou maſſe. De-là on peut ſoutenir que tous les corps groſſiers, quelques différens qu'ils ſoient en eux-mêmes, ſont compoſés d'une matiere homogene; en prenant, par exemple, des morceaux de toutes ſortes de matieres différentes, chacun d'une livre, ſi nous les concevons réduits à n'avoir plus de pores, tous auront la même étendue & auſſi la même inertie. Donc, n'ayant plus de pores, il ſeroit difficile de dire en quoi tous ces morceaux de matieres ſeroient différens entr'eux.

XII.

Mais quelque eſſentielle que puiſſe être cette liaiſon dans les corps groſſiers, rien n'empêche que les matieres ſubtiles ne ſoient d'une eſpece différente, & qu'une certaine étendue vraie de ces matieres ſubtiles ait beaucoup moins d'inertie qu'une égale étendue vraie des matieres groſſieres: ce ſeroit alors une autre eſpece de matiere; & peut-être y a-t-il encore plusieurs eſpeces dont chacune joint à la même étendue vraie une inertie plus petite que les précédentes. De-ſorte que le dernier degré, où à une étendue ne conviendroit aucune inertie, feroit une étendue purement géométrique & un vuide véritable. Mais fans admettre un tel vuide, pourvu qu'on accorde deux efpeces de matieres, dont l'une contienne fous la même étendue moins de maffe ou d'inertie que l'autre, on eft en état de lever toutes les difficultés qu'on fait ordinairement contre le *Syftême du plein.*

XIII.

Puifque dans les corps groffiers l'étendue vraie eft le plus étroitement liée avec l'inertie, & que l'inertie d'un corps ne fauroit être changée par quelque caufe que ce fût; il s'enfuit que la vraie étendue d'un corps groffier ne fouffre aucun changement dans fa quantité. Mais pour les matieres fubtiles, peut-être que leur nature eft tout-à-fait différente à cet égard. Il femble être bien néceffaire que la même quantité conferve toujours la même inertie; mais ne feroit-il pas poffible que la vraie étendue qui exclut tous les pores, devînt tantôt plus grande tantôt plus petite? Ne feroit-il pas encore poffible qu'une telle matiere foit douée d'une force de s'étendre continuellement davantage dans fa propre fubftance, fans y recevoir des pores ou des efpaces vuides? Cela ne feroit pas un agrandiffement réel; il eft bien vrai, l'inertie qui femble conftituer l'effence des matieres y demeurant la même, un tel aggrandiffement ne fauroit être admis fans un miracle; mais dans ce cas, ne feroit-on pas moins embarraffé de la caufe de l'élafticité de l'éther? Je n'ofe entrer dans ces fublimes recherches; la pénétration m'y manque, & le fujet préfent ne l'exige pas.

XIV.

Je me contente d'avoir prouvé la poffibilité que les espaces du ciel, par lesquels les planetes semblent se mouvoir librement, peuvent être remplis d'une matiere extrêmement subtile & très-élastique, sans les supposer presque vuides, comme on est obligé de faire quand on joint partout à la même inertie la même étendue vraie de matiere. Nonseulement un tel vuide choque notre esprit, mais il paroît encore très-incompatible avec cette grande élasticité qu'on est obligé d'attribuer à l'éther. Donc quand on dit que *l'éther est tant de mille fois plus rare que l'air*, il ne faut pas entendre que *l'étendue propre d'un certain volume d'éther soit autant de fois plus petite que l'étendue propre d'un égal volume d'air*, mais que *cette proportion regarde uniquement l'inertie renfermée en des volumes égaux.*

SECONDE PARTIE.

SUR LA RÉSISTANCE DE L'ÉTHER.

X V.

ICI il ſe préſente d'abord la queſtion : S'il ne ſeroit pas poſſible que les planetes ſe meuſſent par l'éther ſans ſouffrir la moindre réſiſtance ? Quoiqu'elles en ſoient pouſſées en arriere, ne ſeroit-il pas poſſible qu'elles en fuſſent pouſſées auſſi en avant avec une force égale ? car lorſqu'un corps ſe meut dans l'éther, il en déplace continuellement une partie ; & en lui imprimant un mouvement, il en perd bien autant ; & puiſque l'éther derriere le corps eſt pouſſé par ſon élaſticité dans les lieux que le corps quitte, il ſemble qu'il le pourroit accélérer autant qu'il aura été retardé en avant. Ce ſentiment a été ſoutenu par de grands Géometres, qui l'ont cru conforme à la conſervation des forces vives ; ils tombent bien d'accord que dès le premier inſtant le corps communique à l'éther une partie de ſa force vive, pour y produire le mouvement dont l'éther, chaſſé en avant, va ſuivre le corps par un détour ; mais dès que ce mouvement eſt une fois engendré, ils prétendent qu'il ſuffit pour accompagner le corps par tout ſon mouvement, ſans qu'il ait beſoin de ſouffrir une nouvelle perte. Ils regardent cette conſervation comme l'effet de la parfaite élaſticité de l'éther. Si les planètes, diſent-ils, perdoient continuellement de leur mouvement, cette force vive ou périroit tout-à-fait, ou s'accumuleroit dans l'éther. Or l'un & l'autre leur paroît également absurde.

XVI.

Mais quelque fondé que puisse paroître ce raisonnement, il est détruit par l'expérience. L'air étant un fluide assez parfaitement élastique, il devroit au moins participer de la même qualité, & causer une moindre résistance aux corps qui s'y meuvent, que s'il étoit destitué de toute élasticité. Or nous savons que tous les corps qui se meuvent dans l'air y souffrent une résistance très-considérable, & M. Luloffs prétend même avoir prouvé, par la force que le vent exerce sur les aîles de moulins à vent, que la résistance de l'air est encore plus grande que celle qu'on trouve par les regles ordinaires de Mécanique. Il est aussi incontestable, qu'un boulet de canon éprouve une plus grande résistance que selon ces regles, parce qu'il laisse derriere lui un espace vuide, que l'air ne sauroit remplir assez rapidement. D'où l'on peut conclure que quoique l'éther soit beaucoup plus élastique que l'air, cela n'empêche point qu'il n'oppose une résistance très-réelle au mouvement des planetes.

XVII.

Puisque les planetes se meuvent incomparablement plus vîte qu'un boulet de canon, on en pourroit conclure de même, qu'en arriere l'éther dût être plus rare qu'ailleurs, & en avant plus dense & plus accumulé, tout comme cela arrive dans l'air. En appliquant cela à la terre, on verra que la plus grande rareté de l'éther répond aux lieux qui voient le soleil dans le couchant, & la plus grande densité aux lieux auxquels le ſoleil ſe lève. Donc partout au ſoir l'atmoſphere ſera le moins chargée d'éther, & au matin le plus; & cette variation ne ſauroit manquer de produire des phénomenes bien ſinguliers. Si l'électricité eſt cauſée par un dérangement dans l'état d'équilibre de l'éther, & que l'électricité poſitive ait lieu où l'éther ſe trouve en trop grande abondance, & la négative où l'éther eſt trop rare, il s'enſuivroit que partout vers le ſoir il regne dans l'atmoſphere une électricité négative, & vers le matin une poſitive. Il s'agit donc de conſulter l'expérience, ſi une telle variation a lieu ou non? mon but ne me permet pas d'entrer dans cette diſcuſſion.

XVIII.

Cependant lorſqu'un corps ſe meut dans l'éther, on n'en peut pas déterminer la réſiſtance ſur le même pied que dans l'air ou dans l'eau, où toute la ſurface antérieure du corps reçoit l'impulſion du fluide. Comme l'éther eſt une matiere extrêmement ſubtile, il pénetre preſque librement tous les pores des corps; il en eſt preſque de même que ſi par exemple un crible ſe mouvoit dans l'eau ou dans l'air, qui ſans doute ſouffriroit une réſiſtance beaucoup plus petite qu'une ſurface ſolide. Les planetes ne rencontrent donc de réſiſtance dans l'éther qu'entant que leurs parties ſolides empêchent que l'éther ne paſſe tout à-fait librement à travers de leur maſſe. D'où l'on voit que la réſiſtance déterminée par la regle ordinaire doit être diminuée de la partie qui répond au libre paſſage de l'éther; ou bien il ne faut conſidérer qu'une certaine partie de la ſurface de la planete qui eſt expoſée à la réſiſtance, & qui, ſelon toutes les apparences, ſera très-petite à l'égard de toute la ſurface. D'ailleurs, l'obliquité dont les particules ſolides ſont choquées par l'éther, peut encore conſidérablement diminuer la réſiſtance.

XIX.

Concevons donc un corps ſphérique, dont la maſſe ſoit A, le rayon $= a$, & qui ſe meut avec une vîteſſe égale à celle qu'un corps peſant ſur la terre acquerreroit en tombant de la hauteur $= v$. Soit la denſité du corps n fois plus grande que celle de l'éther, & ſelon la regle commune la réſiſtance qu'éprouve le grand cercle eſt exprimé par le poids d'un cylindre d'éther, dont le rayon de la baſe $= a$ & la hauteur $= v$, & partant la ſolidité $= \pi a a v$. Or la ſolidité du globe étant $\frac{4}{3}\pi a^3$ & la maſſe $= A$, la maſſe de ce cylindre, s'il étoit de la même matiere, ſeroit $= \frac{3 A v}{4 a}$, donc la maſſe de ce cylindre d'éther $= \frac{3 A v}{4 n a}$, qui exprimeroit la réſiſtance d'un grand cercle du globe, réduiſant la maſſe au poids que ce même corps auroit ſur la terre. Mais la réſiſtance qu'éprouve le globe même eſt d'abord deux fois plus petite, ou $\frac{3 A v}{8 n a}$, & il la faudra encore diminuer, à cauſe de la pénétration de l'éther, & peut-être auſſi à cauſe d'une plus grande obliquité d'impulſion.

XX.

Comme nous devons nous contenter de ſavoir cette diminution en gros, & qu'il eſt impoſſible de la déterminer *à priori*, poſons la véritable réſiſtance $= \frac{3 A v}{8 \lambda n a}$ où, ſelon toutes les apparences, le nombre λ doit être aſſez conſidérable; or le nombre n eſt prodigieuſement grand; car ſi nous ſuppoſons la denſité de l'éther 360 000 000 fois plus petite que celle de l'air, & que la la denſité du corps ſoit égale à celle de l'eau, le nombre n ſera $= 800 \times 360\,000\,000 = 288\,000\,000\,000$. Enſuite la vraie étendue du corps étant pour le moins 19 fois plus petite que l'apparente, à cauſe de ſa nature criblée à l'égard de l'éther, le nombre λ pourroit bien ſurpaſſer 10; donc poſant pour abréger $\frac{3}{8\lambda n} = \mu$: la valeur de cette fraction ſeroit environ

$$\mu = 1 : 10\,000\,000\,000\,000,$$

laquelle demeureroit à-peu-près la même, ſi le corps étoit plus ou moins denſe. Or ſi nous ſuppoſons l'éther encore dix fois moins denſe, nous aurions pour μ une fraction encore dix fois plus petite; & comme il eſt poſſible que la valeur de λ ſoit conſidérablement plus grande que dix, la fraction μ pourroit être encore plus petite que $1 : 100\,000\,000\,000\,000$; & on verra par la ſuite que la réſiſtance qui en réſulte, pourra très-bien ſubſiſter avec les obſervations.

XXI.

Appliquons cela au mouvement d'une planete qui ſe meuve autour du ſoleil dans un cercle parfait, puiſque nous ſavons que l'effet de cette réſiſtance eſt extrêmement petit, & que le mouvement continuera de ſe faire dans un cercle pendant très-longtems, cherchons la diminution du mouvement pendant un tems quelconque. Soit la diſtance de la planete au ſoleil $= c$, ſa vîteſſe dûe à la hauteur $= v$, & l'attraction du ſoleil à cette diſtance $c = \frac{ff}{cc}$; prenant pour l'unité la gravité ſur la terre, & parce que le mouvement ſe fait dans un cercle, il faut que la force centrifuge ſoit $= \frac{2v}{c} = \frac{ff}{cc}$, & partant $v = \frac{ff}{2c}$; donc la réſiſtance de l'éther $\frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ff}{2ac}$, que nous pouvons regarder comme conſtante pour un très-long tems. De-là, pendant que la planete parcourre l'eſpace ds, nous aurons $dv = \frac{-\mu ff}{2ac} ds$, & par conſéquent

$$v = \frac{ff}{2c} - \frac{\mu ffs}{2ac}\left(1 - \frac{\mu s}{a}\right).$$

XXII.

Pour mieux connoître les élémens de cette expreſſion, ſoit le tems périodique de la planète $= \Theta$ ſecondes, pendant lequel elle parcourre toute la circonférence du cercle $= 2\pi c$; deſorte que dans une ſeconde elle parcourre l'eſpace $= \frac{2\pi c}{\Theta}$, ſa vîteſſe étant dûe à la hauteur $= v$. Or poſant g pour la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde, cet eſpace parcouru par la planete dans une ſeconde, eſt auſſi $= 2\sqrt{gv}$; donc $\sqrt{gv} = \frac{\pi c}{\Theta} = \sqrt{\frac{gff}{2c}}$: par conſéquent $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\Theta\Theta}$; d'où l'on connoîtra le rapport de la force accélératrice du ſoleil à chaque diſtance à la force accélératrice de la gravité naturelle ſur la terre.

XXIII.

Quoique le retardement du mouvement dérange d'abord le mouvement circulaire; avant que d'entreprendre les recherches réquiſes pour développer cette queſtion, je conſidererai ici la choſe comme ſi la planete ſe mouvoit dans un canal circulaire, qui l'empêchât d'en sortir. Ce cas, quoique imaginaire, nous fera connoître en gros après combien de tems l'effet de la résistance peut devenir sensible ; parce que pendant une révolution la planete parcourt l'espace $= 2\pi c$, & pendant ν révolutions ou dans le tems de $\nu\Theta$ secondes l'espace $= 2\nu\pi c$; posant cette valeur pour s, nous aurons pour la vitesse de la planete après ce tems

$$v = \frac{ff}{2c}\left(1 - \frac{2\mu\nu\pi c}{a}\right),$$

& la vitesse même

$$\sqrt{v} = \left(1 - \frac{\mu\nu\pi c}{a}\right)\sqrt{\frac{ff}{2c}};$$

d'où nous voyons que la diminution de la vitesse vaut la partie $\frac{\mu\nu\pi c}{a}$ de la vitesse initiale.

XXIV.

Faisons l'application de cette formule au mouvement de la terre, où l'on a environ $c = 18\,000\,a$ & $\Theta = 31\,556\,930''$, & cherchons après combien de tems la diminution de la vitesse pourroit devenir

$$\frac{\mu\nu\pi c}{a} = 18\,000\,\mu\nu\pi = \frac{1}{31\,556\,930},$$

puisqu'un changement d'une seconde dans le tems périodique de la terre seroit déja remarquable. Supposons que cela arrive après ν ans, & nous aurons

$$\nu = \frac{1}{18\,000 \times 31\,556\,930 . \mu\pi}.$$

Donnons à μ la valeur marquée ci-dessus (XX), & nous obtiendrons

$$\nu = \frac{10\,000\,000\,000\,000}{18\,000 \times 31\,556\,930 . \pi},$$

ou bien $\nu = \frac{100}{18}$ à-peu-près. C ij

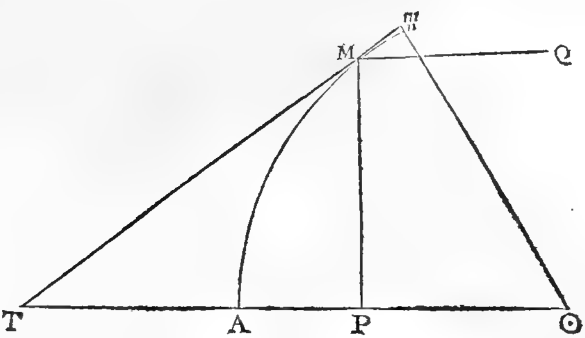
De-là il s'enſuivroit qu'un tel effet pourroit être produit en ſix ans. Or quand même la valeur de μ ſeroit encore plus petite, l'effet de la réſiſtance de l'éther ſur le mouvement des planetes, pourroit toutefois devenir très-ſenſible après un aſſez grand nombre d'années.

XXV.

Mais il ne ſuit pas de la diminution de la viteſſe, que le tems périodique doive devenir plus long; il en doit même réſulter un effet entierement contraire. La planete étant rallentie dans ſon mouvement, s'approchera plus du ſoleil, & décrira une orbite plus petite, à laquelle répond néceſſairement un tems périodique plus court. Par cette raiſon, il s'en faut beaucoup que la détermination précédente ſoit juſte, quand même le nombre μ ſeroit aſſez exact. Le véritable dérangement, que la réſiſtance de l'éther peut cauſer dans le mouvement des planetes, demande des recherches beaucoup plus profondes, & qui feront le ſujet de ma Troiſieme Partie.

TROISIEME PARTIE.

Sur le dérangement du mouvement des Planetes causé par la résistance de l'Éther.



XXVI.

Considérons donc une planete quelconque, dont la masse soit A, son rayon $= a$, & laquelle étant attirée vers le soleil en ☉ & assujettie à la résistance de l'éther, décrive la ligne courbe AM; que cette planete ait parcouru après un tems de t secondes l'arc AM, & soit l'angle au soleil $A\odot M = \varphi$. Soit ensuite la distance de la planete au soleil $\odot M = z$, & la force accélératrice du soleil étant posée $= \frac{ff}{zz}$, nous avons vu que si nous exprimons le tems périodique de la terre par ☉ secondes, sa distance moyenne au soleil par c & la hauteur par laquelle un corps grave tombe sur la terre dans une seconde par g, il sera $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\odot^2}$ où π marque la circonférence d'un cercle dont le diametre est $= 1$. Or la force accélératrice du soleil $\frac{ff}{zz}$ agit sur la planete selon la direction $M\odot$, & en la décomposant selon les directions fixes des coordonnées $\odot P = x$; $PM = y$; à cause de $x = z\, cos.\, \phi$ & $y = z\, sin.\, \phi$, nous aurons les forces selon $MP = \frac{ff}{zz} sin.\, \phi$ & selon $MQ = \frac{ff}{zz} cos.\, \phi$.

XXVII.

Maintenant pour connoître la vîtesse de la planete de laquelle dépend la résistance, soit Mm l'élément d'espace parcouru dans le tems dt & à cause de $Mn = z\, d\phi$ & $mn = dz$, nous aurons $Mm = \sqrt{(dz^2 + zz\, d\phi^2)}$ que je nommerai pour abréger $= ds$ & faisant la proportion $dt : ds = 1 : \frac{ds}{dt}$. Or prenant v pour la hauteur dûe à la vitesse de la planete, ce même espace parcouru par la planete dans une seconde est aussi $= 2\sqrt{gv}$, d'où nous tirons $v = \frac{ds^2}{4g\, dt^2}$, & partant la force accélératrice de la résistance, contraire au mouvement & agissant selon la tangente MT, sera suivant les principes établis ci-dessus $= \frac{\mu v}{a} = \frac{\mu\, ds^2}{4ga\, dt^2}$ où μ est une fraction extrêmement petite, que j'ai estimée ci-dessus (XX). Ensuite pour la décomposition de cette force qui est selon MT, ayant $MT : PT : MP = ds : -dx : dy$, nous trouvons la force selon $PT = \frac{-\mu\, dx\, ds}{4ga\, dt^2}$ & selon $MP = \frac{\mu\, dy\, ds}{4ga\, dt^2}$.

XXVIII.

Donc conjointement la planete en M est sollicitée par ces deux forces accélératrices :

L'une selon $MQ = \frac{ff\,cos.\,\varphi}{zz} + \frac{\mu\,dx\,ds}{4ga\,dt^2}$,

Et l'autre selon $MP = \frac{ff\,sin.\,\varphi}{zz} + \frac{\mu\,dy\,ds}{4ga\,dt^2}$.

De-là les principes de la Mécanique nous fournissent ces deux équations :

$$ddx = \frac{-2gff\,dt^2\,cos.\,\varphi}{zz} - \frac{\mu\,dx\,ds}{2a},$$

$$\&\ ddy = \frac{-2gff\,dt^2\,sin.\,\varphi}{zz} - \frac{\mu\,dy\,ds}{2a};$$

où il faut remarquer que l'on a $x = z\,cos.\,\varphi$; $y = z\,sin.\,\varphi$;
donc $dx = dz\,cos.\,\varphi - z\,d\varphi\,sin.\,\varphi$;
$dy = dz\,sin.\,\varphi + z\,d\varphi\,cos.\,\varphi$;
& $ddx = ddz\,cos.\,\varphi - 2\,dz\,d\varphi\,sin.\,\varphi - z\,d\varphi^2\,cos.\,\varphi - z\,dd\varphi\,sin.\,\varphi$;
$ddy = ddz\,sin.\,\varphi + 2\,dz\,d\varphi\,cos.\,\varphi - z\,sin.\,\varphi + d\varphi^2\,z\,dd\varphi\,cos.\,\varphi$;
ensuite $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dz^2 + zz\,d\varphi^2)}$;
d'où nous tirons aisément ces deux équations :

I. $ddx\,sin.\,\varphi - ddy\,cos.\,\varphi = -2\,dz\,d\varphi - z\,dd\varphi = +\frac{\mu z\,d\varphi\,ds}{2a}$;

II. $ddx\,cos.\,\varphi + ddy\,sin.\,\varphi = ddz - z\,d\varphi^2 = \frac{-2gff\,dt^2}{zz} - \frac{\mu\,dz\,ds}{2a}$;

où l'élément du tems dt eſt ſuppoſé conſtant, & $2gff = \frac{4\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}$, de ſorte que la quantité g ſort du calcul.

XXIX.

La premiere de ces deux équations étant diviſée par $z\,d\varphi$, donne

$$\frac{2\,dz}{z} + \frac{dd\varphi}{d\varphi} + \frac{\mu\,ds}{2a} = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$zz\,d\varphi.\,e^{\frac{\mu s}{2a}} = G\,dt,$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité, & G une quantité conſtante. Enſuite puiſque

$$ds\,dds = dz\,ddz + e\,dz\,d\varphi^2 + zz\,d\varphi\,dd\varphi,$$

ſi nous multiplions la premiere par $-z\,d\varphi$, & la ſeconde par dz, la ſomme en ſera

$$1.)\ ds\,dds = \frac{-2gff\,dt^2\,dz}{zz} - \frac{\mu\,ds^3}{2a};$$

or l'équation $zz\,d\varphi.\,e^{\frac{\mu s}{2a}} = G\,dt$,
à cauſe de $zz\,d\varphi^2 = ds^2 - dz^2$,
en éliminant $d\varphi$, donne

$$2.)\ e^{\frac{\mu s}{a}}\,zz\,(ds^2 - dz^2) = GG\,dt^2.$$

Deſorte que nous avons deux équations entre les trois variables z, s, t; ſi nous multiplions celle-là 1.) par $\frac{2}{dt^2}$, l'intégration fournira

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - \frac{\mu}{a}\int\frac{ds^3}{dt^2},$$

qui

qui à cauſe de μ preſque évanouiſſant ſe réduit à

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - \frac{4\mu gff}{a}\int ds\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right).$$

XXX.

Puiſque nous ſavons que l'effet de la réſiſtance eſt extrêmement petit, négligeons d'abord les termes affectés par μ; & ayant ces deux équations

$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)$ & $GGdt^2 = zz(ds^2 - dz^2)$,

en éliminant dt^2, nous trouvons

$$ds^2 = \frac{4gff}{GG}zz(ds^2 - dz^2)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right);$$

donc poſant, pour abréger,

$$\frac{4gff}{GG} = \frac{8\pi\pi c^3}{CC\Theta\Theta} = \frac{1}{h},$$

deſorte que

$$G = \frac{2\pi c}{\Theta}\sqrt{2ch}\ (\mathrm{XXVI.})$$

nous obtiendrons

$$ds = \frac{zdz\sqrt{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)}}{\sqrt{\left(zz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - h\right)}} \text{ ou } ds = \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{bh}{z(z+b)}\right)}}.$$

XXXI.

Cette valeur de ds ſuffit pour être introduite dans les petits termes de nos équations affectés par μ. Soit donc $\frac{dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{bh}{z(z+b)}\right)}} = d\sigma$, ou bien qu'on écrive dans tous les termes affectés par μ, au lieu de s, la lettre σ, & nous aurons les équations ſuivantes:

$$\text{I. } e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz(ds^2 - dz^2) = C\,dt^2 = \frac{8\pi\pi c^3 h}{\Theta\Theta} dt^2;$$

$$\text{II. } \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{8\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)\right);$$

$$\text{III. } e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zz\,d\varphi = \frac{2\pi c\sqrt{2ch}}{\Theta} dt;$$

où σ eſt une fonction de z. Donc éliminant dt^2 des deux premieres équations, nous obtiendrons:

$$e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz(ds^2 - dz^2)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)\right) = h\,ds^2;$$

& de-là

$$1)\ ds = \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} z\,dz\sqrt{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)\right)}}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)\right) - h\right)}}.$$

D'où l'on trouve plus exactement s par z. Enſuite on aura,

$$2)\ dt = \frac{\Theta}{2\pi c\sqrt{2c}} \cdot \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} z\,dz}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)\right) - h\right)}}$$

$$\&\ 3)\ d\varphi = \frac{dz\sqrt{h}}{z\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}} zz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)\right) - h\right)}}.$$

XXXII.

Pour profiter de ces équations, il faut tâcher d'en appliquer la ſolution à l'uſage de l'Aſtronomie. Pour cet effet, prenant $h = \frac{k}{2}$ & $b = \frac{-2k}{1-nn}$, on a pour le cas où la résistance évanouit $z = \frac{k}{1 + n \cos. \omega}$ & $d\varphi = d\omega$; desorte que k exprime le demi-parametre, n l'excentricité, & ω l'anomalie vraie de l'orbite comptée depuis le périhélie. Cette expression de z, comme très-approchante, étant introduite pour avoir la valeur de σ, on trouve,

$$d\sigma = \frac{k\,d\omega\,\sqrt{(1 + 2n \cos. \omega + nn)}}{(1 + n \cos. \omega)^2};$$

laquelle expression est assez exacte, pourvu qu'on ne suppose pas un tems assez long, pour que l'effet de la résistance devienne trop considérable. Or en n'étendant le calcul qu'à quelques siecles, pendant lesquels l'effet de la résistance demeure encore presque insensible, on peut ensuite répéter le même calcul pour les siecles suivans de la même maniere.

XXXIII.

Puisque dans le cas de nulle résistance on a

$$z = \frac{k}{1 + n \cos. \omega},$$

supposons, en tenant compte de la résistance

$$z = \frac{k}{1 + n \cos. \omega + \mu u},$$

& tâchons de déterminer u ensorte qu'il demeure $d\varphi = d\omega$. Pour cet effet, ayant

$$\frac{1}{z} = \frac{1 + n \cos. \omega + \mu u}{k},$$

la différentiation nous fournit

$$\frac{dz}{zz} = \frac{n\,d\omega\,\sin. \omega - \mu\,du}{k};$$

laquelle valeur doit être introduite dans la troisieme équation (XXXI), qui à cause de $d\varphi = d\omega$ & $e^{\frac{\mu\sigma}{a}} = 1 + \frac{\mu\sigma}{a}$ se réduit à cette forme :

$$d\omega = \frac{dz\sqrt{h}}{zz\sqrt{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) + \frac{\mu\sigma}{a}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - \frac{h}{zz}\right)}};$$

ou bien à cause de

$$-\int d\sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) + \sigma\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) = \int \sigma\, d.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) = -\int \frac{\sigma\, dz}{zz} = -\frac{n}{k}\int d\omega\, \text{sin.}\,\omega = -n\int d\omega\, \text{sin.}\,\omega \int \frac{d\omega\sqrt{(1 + 2n\,\text{cos.}\,\omega + nn)}}{(1 + n\,\text{cos.}\,\omega)^2}$$

à celle-ci :

$$d\omega = \frac{dz\sqrt{h}}{zz\sqrt{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{h}{zz} - \frac{\mu n}{a}\int d\omega\, \text{sin.}\,\omega \int \frac{d\omega\sqrt{(1+2n\,\text{cos.}\,\omega + nn)}}{(1 + n\,\text{cos.}\,\omega)^2}\right)}}$$

XXXIV.

Or $\frac{1}{b}$ étant $= \frac{-1+nn}{2k}$, nous aurons

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{b} = \frac{1 + 2n\,\text{cos.}\,\omega + nn + 2\mu u}{2k};$$

& puisque $h = \frac{k}{2}$ nous obtiendrons

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{b} - \frac{h}{zz} = \frac{nn\,\text{sin.}\,\omega^2 - 2\mu u.\, n\,\text{cos.}\,\omega}{2k};$$

Par conséquent

$$d\omega = \frac{n\,d\omega\,\text{sin.}\,\omega - \mu\,du}{\sqrt{(nn\,\text{sin.}\,\omega^2 - 2\mu n u\,\text{cos.}\,\omega - \frac{2\mu n}{a}\int \sigma\, d\omega\,\text{sin.}\,\omega)}}$$

d'où prenant les quarrés, on trouve, en négligeant les termes qui renfermeroient $\mu\mu$,

$$nn\,d\omega\,\text{sin.}\,\omega^2 - 2\mu n u\,d\omega\,\text{cos.}\,\omega - \frac{2\upsilon n}{a}\,d\omega\int \sigma\,d\omega\,\text{sin.}\,\omega$$
$$= nn\,d\omega\,\text{sin.}\,\omega^2 - 2n\mu\,du\,\text{sin.}\,\omega;$$

& partant, $du\,\text{sin.}\,\omega - u\,d\omega\,\text{cos.}\,\omega = \frac{d\omega}{a}\int \sigma\,d\omega\,\text{sin.}\,\omega$, qui étant divisée par $\textit{sin.}\ \omega^2$ & intégrée, donne

$$\frac{u}{\textit{sin.}\ \omega} = \frac{1}{a}\int\frac{d\omega}{\textit{sin.}\ \omega^2}\int\sigma\, d\omega\, \textit{sin.}\ \omega = \frac{-\textit{cos.}\ \omega}{a\ \textit{sin.}\ \omega}\int\sigma\, d\,\omega\ \textit{sin.}\ \omega$$
$$+ \frac{1}{a}\int\sigma\, d\,\omega\ \textit{cos.}\ \omega\,;$$

ou bien $u = \frac{1}{a}\left(\textit{sin.}\ \omega\int\sigma\, d\,\omega\, \textit{cos.}\ \omega - \textit{cos.}\ \omega\int\sigma\, d\,\omega\, \textit{sin.}\ \omega\right)$;

ayant $\sigma = k\int\frac{d\,\omega\sqrt{(1 + \omega\, 2\, n\ \textit{cos.}\ \omega + nn)}}{(1 + n\ \textit{cos.}\ \omega)^2}$.

XXXV.

Pourvu que l'excentricité soit moindre que l'unité ou $n < 1$, comme il arrive toujours dans les ellipses, l'arc σ se réduit à une telle expression:

$$\sigma = k\left(A\,\omega + B\, n\, \textit{sin.}\ \omega + C\, n^2\, \textit{sin.}\ 2\,\omega + D\, n^3\, \textit{sin.}\ 3\,\omega\right.$$
$$\left. + E\, n^3\, \textit{sin.}\ 4\,\omega + \&c.\right)$$

Or pour en trouver d'autant plus facilement la valeur de u, prenons la différentielle de l'équation trouvée ci-dessus, $d\,u\ \textit{sin.}\ \omega - u\, d\,\omega\ \textit{cos.}\ \omega = \frac{d\,\omega}{a}\int\sigma\, d\,\omega\ \textit{sin.}\ \omega$, qui est: $d\,d\,u\ \textit{sin.}\ \omega + u\, d\,\omega^2\, \textit{sin.}\ \omega = \frac{d\,\omega^2}{a}\,\sigma\ \textit{sin.}\ \omega$, ou bien $\frac{d\,d\,u}{d\,\omega^2} + u = \frac{\sigma}{a} = \frac{k}{a}\left(A\,\omega + B\, n\, \textit{sin.}\ \omega + C\, n^2\right.$ $\left.\textit{sin.}\ 2\,\omega + D\, n^3\, \textit{sin.}\ 3\,\omega + E\, n^4\, \textit{sin.}\ 4\,\omega + \&c.\right)$.

Posons maintenant $u = \alpha\,\omega + \beta\, \textit{sin.}\ \omega + \gamma\, \textit{sin.}\ 2\,\omega + \delta$ $\textit{sin.}\ 3\,\omega + \varepsilon\, \textit{sin.}\ 4\,\omega + \&c.$

& puisque $\frac{d\,u}{d\,\omega} = \alpha + \beta\ \textit{cos.}\ \omega + \Delta\ \textit{cos.}\ \omega - \Delta\,\omega\ \textit{sin.}\ \omega$
$+ 2\,\gamma\ \textit{cos.}\ 2\,\omega + 3\,\delta\ \textit{cos.}\ 3\,\omega + 4\,\varepsilon\ \textit{cos.}\ 4\,\omega + \&c.$

ensuite $\frac{d\,d\,u}{d\,\omega^2} = -\beta\ \textit{sin.}\ \omega - 2\,\Delta\ \textit{sin.}\ \omega - \Delta\,\omega\ \textit{cos.}\ \omega$
$- 4\,\gamma\ \textit{sin.}\ 2\,\omega - 9\,\delta\ \textit{sin.}\ 3\,\omega - 16\,\varepsilon\ \textit{sin.}\ 4\,\omega - \&c.$

donc $\frac{ddu}{d\omega^2} + u = \alpha\omega - 2\Delta\, fin.\, \omega - 3\gamma\, fin.\, 2\omega - 8\delta$ $fin.\, 3\,\omega - 15\,\varepsilon\, fin.\, 4\,\omega -$ &c.

d'où nous tirons $\alpha = \frac{Ak}{a}$; $\Delta = \frac{-Bnk}{2a}$; $\gamma = \frac{-Cn^2k}{3a}$; $\delta = \frac{-Dn^3k}{8a}$; $\varepsilon = \frac{-En^4k}{15a}$ &c.

& par conséquent $u = \frac{k}{a}\left(A\omega + \mathfrak{C}\, fin.\, \omega - \frac{Bn}{2}\,\omega\, cof.\,\omega - \frac{1}{3}Cn^2 fin.\, 2\,\omega - \frac{1}{8}Dn^3 fin.\, 3\,\omega - \frac{1}{15}En^4 fin.\, 4\,\omega - \text{\&c.}\right)$ où le coëfficient $\mathfrak{C}$ demeure indéterminé ; on le pourra donc prendre $= o$, car quelque valeur qu'on donneroit à $\mathfrak{C}$, on ne feroit que changer l'excentricité & le lieu de l'aphélie.

XXXVI.

Donc posant $\int \frac{d\omega \sqrt{(1 + 2n\, cof.\,\omega + nn)}}{(1 + n\, cof.\,\omega)^2} = A\omega + Bn\, fin.\,\omega$ $Cn^2\, fin.\, 2\,\omega + Dn^3\, fin.\, 3\,\omega + En^4\, fin.\, 4\,\omega +$ &c. nous aurons, après que la planete aura achevé l'angle $\phi = \omega$ pour sa distance au soleil :

$$z = \frac{k}{1 + n\, cof.\,\omega + \frac{\mu k}{a}(A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\, cof.\,\omega - \frac{1}{3}Cn^2 fin.\, 2\omega - \frac{1}{8}Dn^3 fin.\, 3\omega - \text{\&c.})}$$

Ensuite le tems t se trouvera déterminé par cette équation : $\frac{2\pi c\sqrt{ck}}{\Theta}\, t = \int \left(1 + \frac{\mu o}{2a}\right) z\, z\, d\,\omega$.

Or $z\,z = \frac{kk}{(1 + n\, cof.\,\omega)^2} - \frac{2\mu k^3}{a(1 + n\, cof.\,\omega)^3}\left(A\,\omega - \frac{1}{2}\,Bn\,\omega\, cof.\,\omega - \frac{1}{3}\,Cn\,2\, fin.\, 2\,\omega - \frac{1}{8}\,Dn^3\, fin.\, 3\,\omega - \text{\&c.}\right)$

& $1 + \frac{\mu o}{2a} = 1 + \frac{\mu k}{2a}(A\omega + Bn\, fin.\,\omega + Cn^2 fin.\, 2\omega + Dn^3 fin.\, 3\omega + \text{\&c.})$

$$\text{donc } \frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\, t = \int \frac{d\omega}{(1+n\,cos.\,\omega)^2} - \frac{2\mu k}{a}$$

$$\int \frac{d\omega\,(A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\,cos.\,\omega - \frac{1}{3}Cn^2\,sin.\,2\omega - \frac{1}{8}Dn^3\,sin.\,3\omega - \&c.)}{(1+n\,cos.\,\omega)^3}$$

$$+ \frac{\mu k}{2a}\int \frac{d\omega\,(A\omega + Bn\,sin.\,\omega + Cn^2\,sin.\,2\omega + Dn^3\,sin.\,3\omega + \&c)}{(1+n\,cos.\,\omega)^2}$$

XXXVII.

Ces formules suffisent pour déterminer tous les dérangemens que la résistance de l'éther peut causer dans le mouvement de toutes les planetes ; ce qui étant la question proposée par l'*Illustre Académie Royale des Sciences*, je m'en vais en developper tous les phénomenes qui doivent se trouver dans le mouvement des Planetes. On ne sera pas surpris que je fasse ici abstraction des dérangemens que les planetes se causent par leur action mutuelle, il est évident qu'elle n'influe point sur l'effet de la résistance. Je considererai donc trois cas, le premier où l'orbite de la planète n'a aucune excentricité, le second où l'excentricité est très-petite, & le troisieme où l'excentricité est médiocre.

I. L'Orbite de la Planete n'ayant aucune excentricité.

XXXVIII.

Dans ce cas $n = o$ on aura $\sigma = k\,\omega$ (§. XXXII) $A = 1$; $B = o$; $C = o$, &c. (XXXV) & partant nos formules seront :

$$z = \frac{k}{1+\frac{\mu k\omega}{a}} \;\&\; \frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\, t = \omega - \frac{3\mu k}{4a}\,\omega\omega \quad \text{(XXXVI)}$$

où k eſt le rayon de l'orbite au tems $t = o$, a le rayon du corps de la planete, & ω l'angle décrit autour du ſoleil dans un tems quelconque t. Là-deſſus je fais les réflexions ſuivantes :

1°. Après une révolution où $\omega = 2\pi$, la diſtance de la planete au ſoleil ſera $z = \frac{k}{1 + \frac{2\mu k}{a}\pi}$, & partant tant ſoit peu plus petite qu'au commencement.

2°. Après m révolutions où $\omega = 2\pi m$, la diſtance de la planete au ſoleil ſera $z = \frac{k}{1 + \frac{2\mu\pi m k}{a}}$. La planete s'approchera donc de plus en plus du ſoleil, mais ſi inſenſiblement, que pendant chaque révolution l'orbite ne differe point d'un cercle.

3°. Le tems pendant lequel la planete acheve m révolutions eſt $t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \Theta\, m\,(1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi m)$; or le tems pendant lequel elle acheve $m + 1$ révolutions, eſt $t' = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \Theta\,(m+1)\,(1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi(m+1))$.

4°. Donc après m périodes, le tems d'une révolution ſera $t' - t. = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \Theta\,(1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi(2m+1))$, d'où l'on voit que le tems périodique va en diminuant, le premier étant $= \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \Theta$.

5°. La réſiſtance ſe réduira donc à ces deux effets : le *premier*, que la diſtance au ſoleil diminue ; & le *ſecond*, que le tems périodique devient plus court. Or le mouvement demeure circulaire, ſans qu'il en réſulte une excentricité.

XXXIX.

XXXIX.

Pour le mouvement de la terre, si nous en négligeons l'excentricité, nous avons $k = c$ & $\Theta = 365^j, 6^h, 9', 36'' = 31\,558\,176''$, qui est le tems périodique par rapport aux étoiles fixes. Ensuite posant la parallele horizontale du soleil $= 12''$, nous avons $\frac{k}{a} = 17\,000$ & $\frac{3\tau k}{2a} = 77\,000$. Donc après m révolutions, la diminution du tems périodique sera de $77\,000 \times 31\,558\,176 \times \mu\,(2\,m + 1)$ secondes, ce qui fait, en mettant pour μ le nombre donné ci-dessus par estime $\mu = \frac{1}{10\,000\,000\,000\,000\,000}$ environ $0,\ 2429979552\ (2\,m + 1)''$, ou bien $\frac{243}{1000}\ (2\,m + 1)$ secondes. Après un siecle, la diminution de l'année solaire seroit donc $= \frac{201 \times 243''}{1000} = 49''$, laquelle étant très-sûrement trop grande, puisque la diminution séculaire est moindre que $5''$, il est clair que la fraction μ est au moins 10 fois plus petite qae je ne l'ai supposée ici. Il semble donc que le nombre λ employé ci-dessus (XX) doit surpasser 100, à moins qu'on ne veuille diminuer la densité de l'éther aux dépens de son élasticité; l'un & l'autre paroît également probable.

II. L'Orbite de la planete ayant une très-petite excentricité.

XL.

Soit donc la fraction n, qui exprime l'excentricité si petite, qu'on puisse négliger dans le calcul son quarré nn, & nous aurons, pour l'arc σ, cette expression:

$$\sigma = k\int d\omega\,(1 + n\,cos.\,\omega)(1 - 2\,n\,cos.\,\omega) = k\int d\omega\,(1 - n\,cos.\,\omega) = k\,(\omega - n\,sin.\,\omega)$$

(XXXII), & partant $A = 1$ & $B = -1$; de-là nous concluons la diſtance

$$z = \frac{k}{1 + n\,cos.\,\omega + \frac{\mu k}{a}(\omega + \frac{1}{2} n\,\omega\,cos.\,\omega)}.$$

Lorſque la planete aura parcouru dans ſon orbite l'angle ω, poſant le tems qu'elle y a employé $= t$, nous aurons $\frac{2\pi c \sqrt{c}}{\odot k \sqrt{k}} t = \int d\omega\,(1 - 2\,n\,cos.\,\omega) - \frac{2\mu k}{a}$
$\int d\omega\,(1 - 3\,n\,cos.\,\omega)\,(\omega + \frac{1}{2} n\,\omega\,cos.\,\omega) + \frac{\mu k}{2a}\int d\omega$
$(1 - 2\,n\,cos.\,\omega)\,(\omega - n\,ſin.\,\omega)$;

ou bien $\frac{2\pi c \sqrt{c}}{\odot k \sqrt{k}} t = \omega - 2\,n\,ſin.\,\omega - \frac{\mu k}{2a}\int d\omega$
$(3\,\omega - 8\,n\,\omega\,cos.\,\omega + n\,ſin.\,\omega)$;

& prenant toutes les intégrales: $\frac{2\pi c \sqrt{c}}{\odot k \sqrt{k}} t = \omega - 2\,n$
$ſin.\,\omega - \frac{\mu k}{2a}(\frac{3}{2}\omega^2 - 8\,n\,\omega\,ſin.\,\omega - 9\,n\,cos.\,\omega)$,
où k marque le demi-parametre, ou plutôt la diſtance moyenne de la planete au ſoleil.

XLI.

Examinons d'abord l'orbite de la planete après qu'elle aura achevé m révolutions; poſons pour cette fin $\omega = 2\pi m + \varphi$, deſorte que φ marque l'angle parcouru dans la révolution ſuivante, & la diſtance de la planete au ſoleil ſera exprimée de cette façon:

$$z = \frac{k}{1 + n\,cos.\,\varphi + \frac{\mu k}{a}(2\pi m + \varphi)(1 + \frac{1}{2} n\,cos.\,\varphi)}.$$

Ici je remarque que la plus petite diſtance n'eſt pas celle où $\varphi = o$, comme il arriveroit s'il n'y avoit point de résistance, mais celle où $\varphi = \frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n (a + \mu \pi m k)}$, de-sorte que pendant ce tems la ligne des absides est avancée de l'angle $\varphi = \frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n (a + \mu \pi m k)}$. Mais posant $m = o$, dès le premier mouvement la résistance fait que le périhélie réponde à l'angle $\frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n a}$, donc pendant m révolutions, il recule par $\frac{\mu \mu \pi m k k (1 + \frac{1}{2} n)}{n a (a + \mu \pi m k)} = \frac{\mu \mu \pi m}{n} \cdot \frac{k k}{a a}$, ce qui est absolument insensible; car si n est extrêmement petit, on ne peut plus distinguer le périhélie.

XLII.

Posons donc $\varphi = \frac{\mu k}{n a}$ pour trouver la plus petite distance de la planete au soleil, qui sera

$$z = \frac{k}{1 + n + \frac{\mu k}{a} . 2 \pi m (1 + \frac{1}{2} n)}.$$

Or posant $\varphi = \pi + \frac{\mu k}{n a}$, la plus grande résulte

$$z = \frac{k}{1 - n + \frac{\mu k}{a} . \pi (2 m + 1) (1 - \frac{1}{2} n)}.$$

Mais puisque l'excentricité est extrêmement petite, & que l'effet ne devient sensible que lorsque le nombre m est assez grand, nous aurons la plus petite distance

$$z = \frac{k}{1 + \frac{2 \pi \mu m k}{a} + n \left(1 + \frac{\pi \mu m k}{a}\right)},$$

& la plus grande distance

$$z = \frac{k}{1 + \frac{2 \pi \mu m k}{a} - n \left(1 + \frac{\pi \mu m k}{a}\right)}.$$

Donc après m révolutions de la planete, nous trouvons le demi-parametre de ſon orbite

$$= \frac{ak}{a + 2\pi\mu mk} = k\left(1 - \frac{2\pi\mu mk}{a}\right)$$

& l'excentricité

$$= n . \frac{a + \pi\mu mk}{a + 2\pi\mu mk} = n\left(1 - \frac{\pi\mu mk}{a}\right),$$

d'où nous voyons que la réſiſtance de l'éther diminue tant le parametre que l'excentricité.

XLIII.

Pour trouver le tems pendant lequel la planere acheve m révolutions autour du ſoleil, poſons $\omega = 2\pi m$, ce tems ſera

$$t = \frac{\odot k \sqrt{k}}{c \sqrt{c}}\left(m - \frac{3\pi\mu m^2 k}{2a} + \frac{9\mu nk}{4\pi a}\right);$$

Donc le tems de $m + 1$ révolutions étant

$$t = \frac{\odot k \sqrt{k}}{c \sqrt{c}}\left(m + 1 - \frac{3\pi\mu(m+1)^2 k}{2a} + \frac{9\mu nk}{4\pi a}\right)$$

après que la planete aura achevé m révolutions, ſon tems périodique ſera $= \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\odot\left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a}(2m+1)\right)$ tout comme nous l'avons trouvé dans le cas précédent. Ainſi une excentricité fort petite ne change rien dans la diminution du tems périodique, & le changement de l'excentricité même eſt ſi petit, qu'il ſera preſque impoſſible de s'en appercevoir, même après le plus grand nombre de révolutions. Car ſi pour la terre la valeur de $\frac{3\pi\mu k}{2a}\odot$ eſt $\frac{243}{10000}$ prenant μ dix fois plus petit que je l'avois d'abord eſtimé (XXXIX), nous aurons à-peu-près $\frac{3\pi\mu k}{2a} = \frac{1}{41 \times 31\,558\,176}$, & partant $\frac{\pi\mu k}{a} = \frac{1}{2\,000\,000\,000}$, donc l'excentricité après m révolutions $= (1 - \frac{m}{2\,000\,000\,000})$ d'où l'on voit que même après 100 000 révolutions, cette diminution ne deviendroit pas encore sensible. Or le demi-parametre de l'orbite de la terre, après m révolutions, sera encore $= c\,(1 - \frac{m}{1\,000\,000\,000})$.

III. L'Orbite de la Planete étant considérablement excentrique.

XLIV.

Je supposerai ici l'excentricité n plus grande qu'auparavant, mais pourtant plus petite que l'unité, puisque $n = 1$ donneroit déja une parabole pour l'orbite de la planete. Les puissances de n deviendront donc de plus en plus petites, desorte qu'on pourra négliger les puissances plus hautes que le cube n^3 ou le quarré-quarré n^4. Développons en premier lieu l'intégrale $\int \frac{d\omega \sqrt{(1 + 2n\,cos.\,\omega + nn)}}{(1 + n\,cos.\,\omega)^2}$ (§. XXXIV), & puisque la résolution en séries nous donne $\sqrt{1 + 2n\,cos.\,\omega + nn)}$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}nn - \tfrac{1}{8}n^4 + n(1 - \tfrac{1}{2}nn)\,cos.\,\omega - nn\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}nn)\,cos.\,\omega^2 + \tfrac{1}{2}n^3\,cos.\,\omega^3 - \tfrac{5}{8}n^4\,cos.\,\omega^4,$$

& $(1 + n\,cos.\,\omega)^{-2} = 1 - 2n\,cos.\,\omega + 3n^2\,cos.\,\omega^2 - 4n^3\,cos.\,\omega + 5n^4\,cos.\,\omega^4$;

nous en obtiendrons $\frac{\sqrt{(1 + 2n\,cos.\,\omega + nn)}}{(1 + n\,cos.\,\omega)^2} = 1 + \frac{1}{2}nn$

$$- \tfrac{1}{8}n^4 - n(1 + \tfrac{3}{2}nn)\,cos.\,\omega + nn\,(\tfrac{1}{2} + \tfrac{11}{4}nn)\,cos.\,\omega^2 + \tfrac{1}{2}n^3\,cos.\,\omega^3 - \tfrac{17}{8}n^4\,cos.\,\omega^4;$$

& à cause de $cos.\,\omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,cos.\,2\,\omega$;

$cos.\,\omega^3 = \frac{3}{4}\,cos.\,\omega + \frac{1}{4}\,cos.\,3\,\omega$;

$cos.\,\omega^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\,cos.\,2\,\omega + \frac{1}{8}\,cos.\,4\,\omega$;

cette expression se réduit à $1 + \frac{3}{4}\,n\,n + \frac{45}{64}\,n^4 - n\,(1 + \frac{9}{8}\,n\,n)\,cos.\,\omega + n\,n\,(\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\,n\,n)\,cos.\,2\,\omega + \frac{1}{8}\,n^3\,cos.\,3\,\omega - \frac{17}{64}\,n^4\,cos.\,4\,\omega$;

d'où nous tirons l'intégrale $\int \frac{d\,\omega.\,V\,(1 + 2\,n\,cos.\,\omega + n\,n)}{(1 + n\,cos.\,\omega)^2} = (1 + \frac{3}{4}\,n\,n + \frac{49}{64}\,n^4)\,\omega - n\,(1 + \frac{9}{8}\,n\,n)\,sin.\,\omega + \frac{1}{2}\,n\,n\,(\frac{1}{4} + \frac{9}{16}\,n\,n)\,sin\,2\,\omega + \frac{1}{24}\,n^3\,sin\,3\,\omega - \frac{17}{256}\,n^4\,sin\,4\,\omega$;

& partant, nous aurons $A = 1 + \frac{3}{4}\,n\,n + \frac{45}{64}\,n^4$; $B = -1 - \frac{9}{8}\,n\,n$; $C = \frac{1}{8} + \frac{9}{32}\,n\,n$; $D = \frac{1}{24}$ $E = \frac{-17}{256}$.

XLV.

De-là nous trouvons la distance de la planete au soleil, comme elle est représentée au §. XXXVI; c'est-à-dire, z égal à k divisé par

$$1 + n\,cos.\,\omega + \frac{\mu\,k}{a}\left(A\,\omega - \frac{1}{2}\,B\,n\,\omega\,cos.\,\omega - \frac{1}{3}\,C\,n^2\,sin.\,2\,\omega - \frac{1}{8}\,D\,n^3\,sin.\,3\,\omega - \frac{1}{15}\,E\,n^4\,sin.\,4\,\omega\right).$$

Ensuite, pour l'expression du tems, nous avons d'abord

$$\int \frac{d\,\omega}{(1 + n\,cos.\,\omega)^2} = (1 + \frac{3}{2}\,n\,n + \frac{15}{8}\,n^4)\,\omega - n\,(2 + 3\,n\,n)\,sin.\,\omega + n\,n\,(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\,n\,n)\,sin.\,2\,\omega - \frac{1}{3}\,n^3\,sin.\,3\,\omega + \frac{5}{32}\,n^4\,sin.\,4\,\omega;$$

& les deux autres formules ſe réuniſſent dans celle-ci:

$$\frac{\mu k}{2a}\int d\omega \begin{cases} -3\left(1+\frac{13}{4}nn+\frac{421}{64}n^4\right)\omega+\left(8n+\frac{93}{4}n^3\right)\omega\cos.\omega- \\ \left(\frac{15}{2}n^2+22n^4\right)\omega\cos.2\omega+6n^3\omega\cos.3\omega-\frac{35}{8}n^4\cos.4\omega \\ -\left(n+\frac{9}{4}n^3\right)\sin.\omega+\left(\frac{31}{24}nn+\frac{163}{48}n^4\right)\sin.2\omega-\frac{5}{16} \\ n^3\sin.3\omega+\frac{879}{1280}n^4\sin.4\omega \end{cases}$$

d'où, pour le tems t, on trouve:

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t=\begin{cases} \left(1-\frac{3}{2}n^2+\frac{15}{8}n^4\right)\omega-n\left(2+3n^2\right)\sin.\omega+nn \\ \left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}n^2\right)\sin.2\omega-\frac{1}{3}n^3\sin.3\omega+\frac{5}{32}n^4\sin.4\omega \\ +\frac{\mu k}{2a}\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}\left(1+\frac{13}{4}n^2+\frac{421}{64}n^4\right)\omega\omega+\left(8n+\frac{93}{4}n^3\right)\omega\sin.\omega \\ -\left(\frac{15}{4}n^2+11n^4\right)\omega\sin 2\omega+2n^3\omega\sin 3\omega+\frac{35}{32}n^4\omega\sin 4\omega \\ +\left(9n+\frac{51}{2}n^3\right)\cos.\omega-\left(\frac{121}{48}n^2+\frac{691}{96}n^4\right) \\ \cos.2\omega+\frac{37}{48}n^3\cos.3\omega-\frac{2279}{5120}n^4\cos.4\omega \end{array}\right\} \end{cases}$$

Et ſi nous nommons le demi-grand-axe $=h$, à cauſe de $h=\frac{k}{1-nn}$, nous aurons:

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta h\sqrt{h}}t=\begin{cases} \omega-2n\sin.\omega+nn\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}n^2\right)\sin.2\omega-\frac{1}{3}n^3 \\ \sin.3\omega+\frac{5}{32}n^4\sin.4\omega \\ -\frac{\mu k}{a}\left\{\begin{array}{l} +\frac{3}{4}\left(1+\frac{7}{4}n^2+\frac{133}{64}n^4\right)\omega^2-n\left(4+\frac{45}{8}n^2\right) \\ \omega\sin.\omega+n^2\left(\frac{15}{8}+\frac{43}{16}n^2\right)\omega\sin.2\omega \\ -n^3\sin.3\omega+\frac{35}{64}n^4\omega\sin.4\omega \\ -n\left(\frac{9}{2}+6n^2\right)\cos.\omega+n^2\left(\frac{121}{96}+\frac{41}{24}n^2\right) \\ \cos.2\omega-\frac{37}{96}n^3\cos.3\omega+\frac{2279}{10240}n^4\cos.4\omega \end{array}\right\} \end{cases}$$

XLVI.

Suppoſons que la planete ait déja achevé m révolutions, & pour celle qui ſuit poſons $\omega=2\pi m+\phi$, alors ſa diſtance au ſoleil ſera z égal à k diviſé par

$$1+n\cos.\phi+\frac{\mu k}{a}\left(2\pi Am+A\phi-\frac{1}{2}Bn(2\pi m+\phi)\cos.\phi-\frac{1}{3}Cn^2\sin.2\phi-\frac{1}{8}Dn^3\sin.3\phi-\frac{1}{15}En^4\sin.4\phi\right)$$

& il eſt clair que l'orbite aura ſouffert le même changement que dans le cas précédent, parce que les termes qui ne renferment point le nombre m sont évanouissans. L'orbite même se rétrécira un tant soit peu, & l'excentricité deviendra plus petite, mais si peu, qu'il est impossible de s'en appercevoir; de même le lieu de l'aphélie ou du périhélie n'en souffrira aussi aucun changement sensible. L'unique effet sensible que la résistance de l'éther est capable de produire, consiste dans la diminution du tems périodique, ce qu'il convient d'examiner plus soigneusement.

XLVII.

Pendant que la planete acheve m révolutions, il s'écoule un tems t, & en posant dans l'expression cidessus (XLV) $\omega = 2\pi m$, ce tems est

$$t = \frac{k\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(m - \frac{\mu k}{a}\left(\tfrac{3}{2}\left(1 + \tfrac{3}{4}n^2 + \tfrac{133}{64}n^4\right)\pi m m \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{9n}{4\pi} + \frac{121 n^2}{192\pi} - \frac{613 n^3}{192\pi} + \frac{59317 n^4}{61440\pi}\right)\right)$$

Le tems de $m+1$ révolutions se trouvant de la même maniere, après que la planete aura achevé m révolutions, le tems de la révolution suivante est

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a}\left(1 + \tfrac{3}{4}nn + \tfrac{133}{64}n^4\right)(2m+1)\right),$$

ou bien

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a}\left(1 - \tfrac{1}{4}nn + \tfrac{85}{64}n^4\right)(2m+1)\right).$$

Et alors le demi-parametre qui fut au commencement k, sera $= k\left(1 - \frac{2\pi\mu m k}{a}\right)$, l'excentricité $= n\left(1 - \frac{\pi\mu m k}{a}\right)$ & le demi-grand-axe $= \dfrac{k\left(1 - \frac{2\pi\mu m k}{a}\right)}{1 - nn\left(1 - \frac{2\pi\mu m k}{a}\right)} = h\left(1 - \frac{2\pi\mu m h}{a}\right)$

Que

Que le tems périodique de la planete ait été $= T$, s'il n'y avoit point de résistance ; & à cause de $T = \frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\odot$, si l'on néglige l'excentricité, le tems périodique après m révolutions sera encore

$$= T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}(2m+1)\right).$$

Or en tenant compte de la résistance, le premier tems périodique étoit $= T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}\right)$, donc après m révolutions la diminution du tems périodique sera $= \frac{3\pi\mu h}{a} m T$.

XLVIII.

Quelque petite que paroisse cette diminution, l'effet devient néanmoins très-sensible pendant plusieurs siecles. Supposons que le tems périodique d'une planete soit à-présent $= T$, le tems périodique de la Terre autour du Soleil étant aussi à-présent $= \odot$, & que pendant m révolutions le tems périodique de la planete diminue de la particule de tems $= m\theta$, nous aurons $\theta = \frac{3\pi\mu h}{a} T$, & partant $\frac{2\pi\mu h}{a} = \frac{\theta}{T}$. Maintenant qu'on calcule des tables du moyen mouvement de cette planete selon la maniere ordinaire, comme si le tems périodique T demeuroit toujours le même ; & parce qu'au tems T répond le moyen mouvement 2π, on aura pour un an ou pour le tems $\odot$ le moyen mouvement $\frac{2\pi\odot}{T}$, & pour le tems de N années le moyen mouvement sera $= \frac{2\pi N\odot}{T}$. Mais à cause de la résistance, le mouvement moyen de la planete pour le même tems de N années sera différent. Pour le trouver, nous n'avons qu'à poser $t = N\Theta$, & l'angle ω, en omettant les termes qui renferment le sinus ou cosinus, donnera son mouvement moyen actuel. Or puisque $\frac{c\sqrt{c}}{h\sqrt{h}} = \frac{\Theta}{T}$, nous avons cette équation :

$$\frac{2\pi N\Theta}{T} = \omega - \frac{3\mu k}{4a}\omega\omega = \omega - \frac{\theta\omega\omega}{4\pi T},$$

d'où nous trouvons le moyen mouvement actuel:

$$\omega = \frac{2\pi N\Theta}{T} + \frac{\theta\omega\omega}{4\pi T} = \frac{2\pi N\Theta}{T} + \frac{\pi NN\Theta\Theta\theta}{T^3}.$$

Il faut donc ajoûter au lieu moyen trouvé par les tables ordinaires du moyen mouvement la particule

$$\frac{\Theta\Theta\theta}{T^3}\pi NN = 180^\circ NN.\frac{\Theta\Theta\theta}{T^3}.$$

XLIX.

Cette même correction a lieu, soit que N marque un nombre positif ou negatif. Donc si les tables des moyens mouvemens ont été dressées sur le tems périodique T d'une certaine époque, qui après m révolutions diminue de la particule $m\theta$, alors pour N ans tant avant qu'après cette époque, il faudra ajoûter la particule $180^\circ.N^2.\frac{\Theta^2}{T^2}.\frac{\theta}{T}$ à la longitude moyenne qu'on aura tiré de ces moyens mouvemens. Si l'on fait $T:\theta = 360^\circ:\delta$, ce petit arc δ exprime le moyen mouvement de la planete qui répond au tems θ, & maintenant notre correction de la longitude moyenne sera $= \frac{1}{2}\delta N^2.\frac{\Theta^2}{T^2}.$ où Θ marque le tems d'une année. Donc si nous posons la distance moyenne du soleil à la terre $= c$ & à la planete $= h$, à cause de $\frac{\Theta^2}{T^2} = \frac{c^3}{h^3}$

notre correction sera $= \frac{1}{2} \delta . N^2 \frac{c^3}{b^3}$; or cette fraction $\frac{c^3}{b^3}$ se tire aisément des tables. Je remarque encore que cette correction est proportionnelle au quarré de l'intervalle du tems, & partant dans un intervalle de quelques milliers d'années elle doit devenir très-considérable, quelque petite que soit la diminution d'une révolution à la suivante, que je suppose ici $= \delta$.

L.

Donc tout l'effet de la résistance de l'éther sur le mouvement des planetes se réduit à la diminution de leurs tems périodiques, puisque nous avons vu que ni l'excentricité, ni leurs aphélies n'en souffrent aucun changement sensible. Or pour l'usage de l'Astronomie cet effet ne sauroit être représenté plus commodément que par une correction du mouvement moyen qui doit se faire ainsi. Ayant établi le mouvement moyen pour une certaine époque & en ayant déduit une table des longitudes moyennes pour tous les ans tant avant qu'après cette époque, la longitude moyenne ne sera juste que pour cette époque même; pour tout autre tems qui en differe de N' ans tant avant qu'après cette époque, il faudra ajoûter à la longitude moyenne tabulaire la particule $\frac{1}{2} \delta . N^2 . \frac{c^3}{b^3} = \frac{1}{2} \delta . N^2 . \frac{\Theta^2}{T^2}$. La correction d'un an sera donc $= \frac{1}{2} \delta . \frac{\Theta^2}{T^2}$, soit cette correction $= \alpha$, & puisque $\delta = 2 \alpha \frac{T^2}{\Theta^2}$, nous aurons $\theta = \frac{\alpha}{\pi} . \frac{T^3}{\Theta^2}$, & partant, $\frac{3 \pi \mu h}{a} = \frac{\alpha}{\pi} . \frac{T^2}{\Theta^2}$, ou bien $\alpha = \frac{3 \pi^2 \mu h}{a} . \frac{\Theta^2}{T^2} = 3 \pi^2 \mu . \frac{c^3}{a b b}$; de sorte que la correction pour un an soit réciproquement proportionnelle au quarré de la distance moyenne de la planete au soleil multiplié par le demi-diametre du corps de la planete.

L I.

Il suffit donc d'avoir déterminé cette correction pour une planete, & il sera aisé d'en déduire celles de toutes les autres planetes. Il n'y a aucun doute que les observations du soleil ne soient les plus propres pour nous fournir les éclaircissemens nécessaires sur cet important article, & si l'on peut parvenir à déterminer la correction d'un an α pour le soleil, on en déduira aisément la valeur de la fraction μ résultante de la résistance de l'éther, car à cause de $h = c$, on aura $\mu = \frac{\alpha a}{3 \pi \pi c}$. Mais quoique la correction d'un an α soit si petite, qu'elle échapperoit aux plus grands soins des Astronomes, elle devient très-sensible pour un grand nombre d'années, parce que pour un intervalle d'N années elle sera $= NN\alpha$, & partant pour un siecle $= 10\,000.\,\alpha$, & pour dix siecles $= 1\,000\,000.\,\alpha$. En consultant donc les plus anciennes observations, il ne sera plus difficile d'en conclure la véritable valeur de la correction annuelle α.

L I I.

Pour cet effet, il faudroit conclure la quantité d'une année solaire moyenne par les plus modernes observations faites tout au plus dans l'espace d'un demi-siecle; de-là on devroit dresser des tables du moyen mouvement & de la longitude moyenne du soleil pour des époques les plus reculées, où l'on trouve de bonnes observations. Alors pour une telle époque, qui précede la présente de N ans, on compareroit la longitude moyennes tirée de ces tables avec celle qui conviendroit aux observations anciennes, & si l'on trouvoit que celle-ci ſurpaſſoit celle-là de la quantité Q, on auroit $NN\alpha = Q$, & partant $\alpha = \frac{NN}{Q}$. Mais il faudroit être bien aſſuré que la terre n'eût pendant ce tems ſouffert aucune altération dans ſon mouvement par l'action de quelque comete. A l'égard de l'action des autres planetes, on en connoît aſſez l'effet, pour en tenir compte dans cette recherche; mais il eſt fort à craindre que les cometes ne la rendent tout-à-fait inutiles.

LIII.

La méthode dont les Aſtronomes ſe ſervent pour déterminer la quantité de l'année ſolaire, nous fournit encore un autre moyen de nous aſſurer de la correction annuelle α. Suppoſons qu'en comparant les obſervations préſentes avec des obſervations faites avant L ans, on conclue la quantité de l'année $= A$, & qu'en les comparant avec des obſervations faites avant M ans, on la trouve $= B$. Maintenant ſoit la quantité de l'année ſolaire $= \odot$, & la diminution annuelle $= \theta$; & le tems écoulé depuis L ans juſqu'à préſent ſera $= L\odot + LL\theta$, & le tems écoulé depuis M ans juſqu'à préſent $= M\odot + MM\theta$. De-là on aura $A = \odot + L\theta$, & $B = \odot + M\theta$, & partant $\theta = \frac{B-A}{M-L}$ & $\odot = A - L\theta$; d'où l'on connoîtra la véritable année ſolaire $\odot$, qui convient à l'époque d'à-préſent, & la diminution annuelle θ, & de-là on tirera $\alpha = \frac{\pi\theta}{\odot}$.

LIV.

Mais outre les cometes qui peuvent troubler cette détermination, on rencontre encore d'autres obſtacles preſque inſurmontables du côté des obſervations mêmes, qui ne ſont pas ſi exactes, au moins dans les ſiecles paſſés, que l'erreur dans la quantité de l'année ne puiſſe être de pluſieurs ſecondes. Or puiſque $B - A$ eſt un nombre de ſecondes fort peu conſidérable, l'erreur commiſe dans les quantités de l'année A & B le rend tout-à-fait incertain. Enſuite les plus anciennes obſervations ont non ſeulement le défaut qu'elles ſont peu exactes, mais il ſemble auſſi qu'on n'eſt pas trop ſûr du tems dans lequel elles ont été faites. Surtout la réduction de l'Almanac Egyptien au Romain, dont Ptolomée s'eſt ſervi, ne paroît pas aſſez conſtatée, à cauſe des déſordres auxquels l'Almanac Romain fut aſſujetti dans ce tems; & les corrections que Riccioli & d'autres Chronologues ont tâché d'y apporter, ſont ouvertement fondées ſur la quantité de l'année qu'ils ont ſuppoſée; ce qui eſt préciſément la queſtion. Il ſe pourroit donc bien faire que les momens des obſervations marqués par Ptolomée duſſent être reculés d'un ou de deux jours de plus qu'on les ſuppoſe dans le calcul; & alors les anciennes obſervations comparées aux modernes, donneroient inconteſtablement l'année plus longue que les Aſtronomes ne la ſuppoſent dans leurs tables.

LV.

En effet, feu M. Caſſini, après les plus ſcrupuleuſes recherches ſur la quantité de l'année ſolaire moyenne, en prenant un milieu entre tous ſes réſultats, conclut l'année ſolaire moyenne de 365 ^{j}, 5 ^{h}, 48′, 47″, qui convient avec celle qu'il a déduite de ſes propres obſervations. Cependant, dans ſes tables aſtronomiques, il la ſuppoſe de 365 ^{j}, 5 ^{h}, 48′, 53″, 24‴, & partant de 6″, 24‴ plus grande; ſans doute qu'il n'a fait ce changement que pour ſatisfaire aux anciennes obſervations; d'où il faut conclure que les anciennes obſervations demandent une année plus longue ; ce qui prouve l'effet de la réſiſtance de l'éther. Auſſi ne ſauroit-on douter que les obſervations de Hipparque, comparées avec celles de Ptolomée, ne donnaſſent l'année au moins de quelques minutes plus longue ; d'où il ſuit encore, que l'année ſolaire moyenne eſt à-préſent plus courte qu'autrefois.

LVI.

Si M. Caſſini, dans ſes Tables, avoit ſuppoſé l'année de $365^{j}, 5^{h}, 48', 47''$, le mouvement moyen pour cent années Juliennes ſeroit devenu $0^{s}, 0^{\circ}, 46', 3''$, qui eſt dans ſes Tables de $0^{s}, 0^{\circ}, 45'\, 42''$, la différence étant de $21''$. Donc pour 200 ans la différence ſeroit $42''$, & partant, ſi nous ſuppoſons que les Tables de Caſſini repréſentent bien la longitude du ſoleil juſqu'à 200 ans en arriere, des tables conſtruites ſur la quantité de l'année de $365^{j}, 5^{h}, 48', 47''$ demanderont, pour l'intervalle de deux ſiecles, la correction de $42''$, & pour l'intervalle d'un ſiecle $10\frac{1}{2}''$. Si nous ſuppoſions la véritable quantité de l'année de $365^{j}, 5^{h}, 48', 46''$, on trouveroit, pour l'intervalle d'un ſiecle, la correction $= 12''$, & partant $10000\,\alpha = 12''$, & $\alpha = \frac{1}{833}'' = \frac{\theta}{\Theta}$. $180^{\circ} = \frac{\theta.60 \times 60 \times 180}{31\,558\,176}$; d'où $\theta = \frac{31\,558 \times 176}{833 \times 60 \times 60 \times 180}'' = 0,058''$, ce qui eſt la diminution annuelle de l'année, & partant la diminution ſéculaire $= 5'', 48'''$.

LVII.

M. l'Abbé de la Caille ayant ſuppoſé l'année, dans ſes Tables, de $365^{j}, 5^{h}, 48', 49''$, qu'il a uniquement conclu des obſervations modernes, de maniere que ce doit être la juſte quantité de l'année pour le milieu de ce ſiecle, le mouvement moyen pour 100 années Juliennes eſt $0^s, 0°, 45', 55'' \frac{6}{10}$; donc ſi, pour ſatisfaire aux obſervations faites avant deux ſiecles, il falloit ſuppoſer le mouvement moyen ſéculaire de $0^s, 0°, 45', 42''$, il faudroit ajoûter à la longitude trouvée par les Tables de M. de la Caille $27 \frac{2}{10}'' = 40\,000\,\alpha$, & partant α feroit $= \frac{1}{1470}''$, d'où l'on trouveroit $\theta = 0,033$, & la diminution ſéculaire de l'année $= 3'', 18'''$, d'où il ſemble qu'on devroit ſuppoſer la fraction $\mu = \frac{1}{150\,000\,000\,000\,000\,000}$; ce qu'on pourroit encore aſſez bien accorder avec les principes établis ci-deſſus ſur la denſité de l'éther, & ſur la maniere dont il réſiſte au mouvement des corps.

LVIII.

Comme on ne ſauroit encore rien décider de précis là-deſſus, poſons la diminution ſéculaire de l'année $= \nu''$ & à cauſe de $\theta = \frac{\nu}{100}$, nous aurons :

$$\alpha = 180°. \frac{\nu}{100 \times 31\,558\,176} = 0,\ 000\ 205\ \nu'',$$

donc l'augmentation de la longitude moyenne pour l'intervalle d'un ſiecle ſera $= 2 \frac{1}{20}\,\nu$ ſecondes, & pour l'intervalle de 10 ſiecles ou de 1000 ans, elle ſera $= 205\,\nu$ ſecondes, & de-là $\mu = \frac{\nu}{536\,000\,000\,000\,000\,000}$.
De-là, en tenant compte du demi-diametre des autres planetes, on aura l'augmentation de leur longitude moyenne pour l'intervalle de 1000 ans,

Pour Saturne	$= 135\,\nu''$;	Pour la Terre	$= 205\,\nu''$;
Pour Jupiter	$= 62\,\nu''$;	Pour Vénus	$= 103\,\nu''$;
Pour Mars	$= 254\,\nu''$;	Pour Mercure	$= 135\,\nu''$;