



19  
77

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 gennaio 1917.

Volume XXVI.° — Fascicolo 1.°

1.° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETA DEL DOTT. PIO BEFANI

1917



ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# ATTI

DELLA

## REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

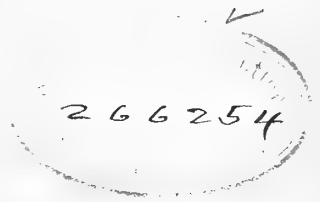
SERIE QUINTA

### RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

1° SEMESTRE.

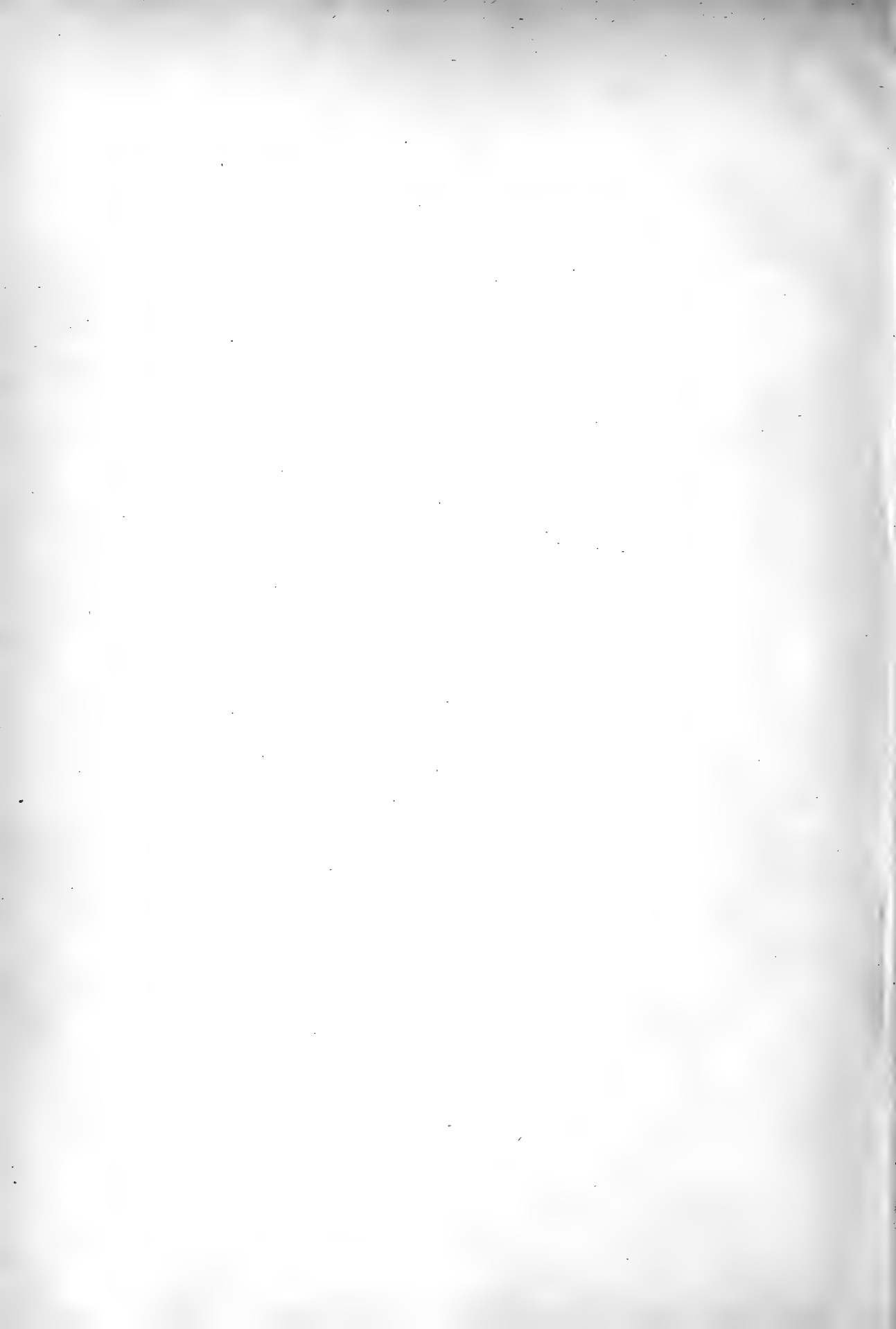


ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 7 gennaio 1917.*

A. RÒITI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Chimica vegetale. — Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante. Nota I del Socio G. CIAMICIAN e di C. RAVENNA.*

Le sostanze che costituiscono gli organismi vegetali possono essere distinte in due gruppi: l'uno comprende i composti organici indispensabili alla vita, come i grassi, gli zuccheri semplici e complessi e le proteine; l'altro tutte quelle sostanze che si sogliono chiamare accessorie, come i glucosidi, gli alcaloidi, le materie coloranti (oltre la clorofilla la di cui funzione è ben nota), le essenze, le resine ecc. Mentre sul significato chimico e biologico delle prime non esiste alcuna divergenza di vedute, essendo tutti concordi nel riconoscere la loro importanza per la vita organica, regna ancora grande incertezza intorno alla funzione delle seconde. La divergenza su questo argomento va anzi tanto oltre, che mentre alcuni autori considerano queste ultime come materiali di riserva, che le piante possono utilizzare in dati momenti del loro sviluppo, altri le riguardano come materiali escrementizi, di cui le piante non possono liberarsi, mancando esse di organi escretori.

Di questa opinione è segnatamente il Pictet, che espose le proprie idee su questo importante argomento in varie occasioni e segnatamente in un interessante discorso pronunciato alla Società elvetica di scienze naturali a Ginevra nel settembre 1915 <sup>(1)</sup>. In esso egli fa notare sopra tutto che le

<sup>(1)</sup> Amé Pictet, *La structure moléculaire et la vie*, in Archives des Sciences physiques et naturelles, IV, vol. 40, pag. 181.

sostanze accessorie appartengono ai composti ciclici, mentre in genere quelle fondamentali contengono catene aperte di atomi di carbonio, e trova in questa differente struttura la differenza fra le materie organiche della vita e quelle che ad essa non possono più prender parte. Egli conclude col dire che la pianta ideale, di queste ultime non dovrebbe contenerne affatto. Noi non vogliamo entrare qui in un particolareggiato esame delle obiezioni che si potrebbero muovere a queste vedute, ma non possiamo astenerci dall'affermare che la conclusione non ci sembra molto verisimile. Non può apparire probabile che le piante fabbrichino dai rifiuti del mirabile processo di sintesi organica che in esse si compie, sostanze così complesse come sono ad esempio molti alcaloidi per il solo scopo di renderle innocue al loro organismo, tanto più che queste cosiddette inutilità organiche vanno alle volte a deporsi nei semi, che non dovrebbero verosimilmente contenere sostanze inutili o dannose per lo sviluppo del nuovo organismo. Le piante del resto non sono del tutto sprovviste di mezzi escretori e possiedono poi sopra tutto un mezzo assai efficace per eliminare i rifiuti organici: quello dell'ossidazione. A proposito del significato biologico degli alcaloidi, noi abbiamo espresso altra volta la supposizione che questi corpi, e forse tutte le sostanze accessorie, potrebbero esercitare le funzioni di ormoni vegetali.

A questo scopo abbiamo iniziato una serie di esperienze e nella presente Nota descriviamo quelle compiute nella scorsa estate.

Le piante sono in genere organismi poco reattivi e però si prestano male per studiare l'effetto di interventi chimici. Noi abbiamo in proposito una larga esperienza perchè da parecchi anni ci occupiamo del contegno delle sostanze organiche nei vegetali. Finora abbiamo sempre osservato che l'introduzione di tali corpi sia per mezzo delle radici, che per inoculazione nel fusto, se la natura e la quantità delle sostanze sono tali da lasciare le piante in vita, esse non manifestano esteriormente nessuna alterazione facilmente apprezzabile. Le esperienze da noi fatte finora si riferiscono peraltro a piante adulte, che evidentemente devono essere poco sensibili a simili interventi. Era invece da sperarsi che operando durante la germinazione dei semi, oppure fino dai primordi del loro sviluppo, e continuando il trattamento durante tutta la crescita delle pianticelle, si sarebbe potuto notare qualche modificazione anche nell'aspetto esteriore della specie esaminata.

Noi abbiamo fatto alcune esperienze coi fagioli e col mais ed abbiamo ottenuto massime coi primi, impiegando il nitrile mandelico (cianidrina dell'aldeide benzoica), la nicotina, la stricnina, la caffeina e la morfina qualche risultato che ci sembra degno di menzione.

Le esperienze dell'anno scorso <sup>(1)</sup> ci avevano insegnato che le piantine germoglianti sul cotone idrofilo o sulla carta da filtro si abitano più facil-

(1) Vedi la nostra II Nota *Sulla formazione dei glucosidi per mezzo delle piante*, in questi Rendiconti, serie 5<sup>a</sup>, vol. 25, I, pag. 3.

mente a sopportare sostanze venefiche di quelle adulte e però abbiamo voluto vedere come si comportassero il mais e massime i fagioli col *nitrile mandelico*, che costituisce il principio aromatico dell'amigdalina. Da alcuni saggi fatti or sono alcuni anni sapevamo che questa sostanza è estremamente venefica anche per lo stesso lauroceraso, se inocolata sotto la corteccia, e così pure per le piante adulte di mais e di fagioli.

Noi abbiamo studiato l'intero sviluppo delle piantine incominciando dalla germinazione dei semi. Il nitrile mandelico impedisce quasi completamente la germinazione dei semi di fagioli e di mais quando questi vengano inaffiati con una soluzione all'1 ‰ in germinatoi su cotone idrofilo. Esperienze eseguite parallelamente con una soluzione di *amigdalina* al 5,5 ‰<sup>(1)</sup> dettero invece risultato positivo, perchè tutti i semi germinarono come quelli bagnati per confronto con acqua. Questi fatti hanno naturalmente la loro importanza in quanto che illustrano la ragione per cui i semi delle Prunoidee non contengono libero il nitrile mandelico, ma bensì in forma glucosidica.

Vista l'impossibilità di somministrare il nitrile mandelico fino dall'inizio della vita nel seme, abbiamo pensato di intervenire un po' più tardi, inaffiando con la soluzione all'1 ‰ i semi, alcuni giorni dopo l'avvenuta germinazione, abituando così le piantine a sopportare il veleno. Il risultato fu assai soddisfacente. Le piantine si mantennero in vita e, sebbene più lentamente di quelle coltivate per confronto, bagnate con la sola acqua oppure con la soluzione nutritizia ordinaria, si svilupparono fino a fioritura. Le pianticelle crebbero dunque alimentate col solo nitrile mandelico o con questo e la soluzione nutritizia, ma priva di composti azotati, il loro aspetto peraltro apparve sensibilmente mutato. Massime nei fagioli l'influenza del nitrile mandelico si manifestò in modo evidente: le pianticelle raggiunsero una minore altezza, ma in compenso apparvero più robuste, coi gambi più grossi e più pieni, con le foglie d'un verde assai carico e rotondeggianti, cioè meno allungate di quelle normali; le radici erano invece assai meno sviluppate. Con nostra grande meraviglia notammo infine che le pianticelle nutrite col nitrile resistettero all'avanzarsi della stagione invernale; alcuni esemplari di esse sono ancora in vita, mentre i campioni coltivati con la soluzione nutritizia completa ed anche con un eccesso di nitrati, sono disseccati fino dall'ottobre.

A differenza degli altri casi da noi studiati, con altre sostanze, non si riscontrarono nelle pianticelle cresciute fino a fioritura incipiente, preparando il consueto estratto, nè direttamente nè dopo l'aggiunta d'emulsina, nè l'acido cianidrico, nè l'aldeide benzoica. Si vede dunque che esse si sono nutrite a

(<sup>1</sup>) Corrispondente al tenore di 1 ‰ di nitrile mandelico.

spese dell'azoto dell'acido cianidrico del nitrile mandelico, e che l'aldeide benzoica venne ossidata o altrimenti trasformata.

Diremo infine che se si inaffiano le pianticelle normali, cresciute fino alla fioritura, e cioè non abituate al veleno, con la soluzione all'1 ‰ del nitrile mandelico, esse cadono, perchè il fusto si piega in prossimità della radice, e muoiono entro 24 ore, in conformità con quanto avevamo osservato altre volte con piante cresciute in vasi o in piena terra, come s'è detto più sopra.

Le piantine di fagioli nutrite col nitrile mandelico per lenta abitudine al veleno si modificano dunque in modo da apparire, per quanto ci è dato di dire per ora, così diverse dalla specie normale, come se rappresentassero una nuova varietà del *Phaseolus vulgaris*.

In seguito a questi risultati che presentano un certo interesse, abbiamo esaminato l'influenza di altre sostanze sia sulla germinazione che sull'ulteriore sviluppo delle piantine di mais e di fagioli, ed abbiamo sperimentato anzi tutto l'azione dell'acido cianidrico. Bagnando i semi con la soluzione all'1 ‰, si osserva un ritardo nella germinazione rispetto a quelli bagnati con l'acqua e non tutti, ma solo circa il 30 ‰ dei presenti, germinarono. Le piantine continuarono a crescere stentatamente per qualche tempo, ma finirono per seccarsi forse anche in seguito allo sviluppo di abbondanti muffe. L'acido cianidrico agisce dunque sui semi in modo abbastanza deleterio, ciò che prova un'altra volta l'utilità delle combinazioni glucosidiche; perchè è noto che il *Phaseolus lunatus*, ad esempio, contiene la cianidrina dell'acetone in forma di glucoside.

Riflettendo poi che i semi di alcune piante contengono *alcaloidi*, abbiamo creduto utile fare delle prove con la nicotina, la stricnina, la caffeina ed anche la morfina, impiegando in tutti questi casi la soluzione contenente l'1 ‰ dell'alcaloide in forma di tartarato ad eccezione della caffeina che venne adoperata allo stato libero.

La *nicotina* impedisce quasi completamente la germinazione dei fagioli perchè sopra 30 semi solo 4 svilupparono il germe; la crescita si arrestò anche per questi ai primi stadî. Abbiamo però, in vista dei risultati ottenuti col nitrile mandelico, cercato di abituare le piantine all'azione del veleno, somministrando la soluzione all'1 ‰ a germinazione già iniziata. Con questo artificio siamo realmente riusciti a mantenere per qualche tempo le piantine in vita, che si svilupparono con ritardo; anche esse assunsero un aspetto alquanto diverso dalle normali, coltivate colla soluzione nutritizia, per la forma ed il colore più carico delle foglie, che si mostrarono increspate ai bordi. Su di esse si svilupparono in seguito delle bollosità che ingrandendosi avrebbero condotto al disseccamento delle piante. Non disperiamo peraltro, modificando le condizioni di ambiente e con maggiori cure, di ottenere in seguito risultati più favorevoli. Prima che il disseccamento avvenisse com-



pletamente, abbiamo voluto accertare se le piantine contenevano l'alcaloide somministrato. Ne abbiamo fatto però l'estratto cloridrico e da questo abbiamo potuto ottenere col noto trattamento 1 gr. di cloroaurato di nicotina.

La *stricnina*, invece, non impedisce la germinazione dei semi di fagioli e di mais, nè la ritarda; anzi a volte ci parve avvenisse con qualche anticipo su quelli di controllo bagnati con l'acqua. Le piantine peraltro dopo alcuni giorni di vita normale dettero segni di sofferenza e si seccarono.

Si potrebbe dire che l'azione della stricnina è antitetica con quella del nitrile mandelico e della nicotina: queste ultime sostanze impediscono o ritardano molto la germinazione, ma ad esse le piante possono abituarsi modificando il loro aspetto esterno. In vista di questi fatti si è indotti a rilevare che, mentre nei semi di tabacco la nicotina è contenuta in quantità assai esigua — noi abbiamo trovato che da 1 chilogr. di semi si ottiene 0,2 gr. di cloridrato (1) — ed aumenta collo sviluppo della pianta, i semi della stricnina sono assai ricchi (1,5 %) di stricnina. Non ci sembra che queste osservazioni parlino in favore della supposizione, che gli alcaloidi non abbiano nessuna funzione organica nelle piante, e sieno da considerarsi esclusivamente come sostanze escrementizie.

La *caffeina* e la *morfina* hanno un'azione analoga alla stricnina, cioè non impediscono la germinazione dei semi delle due specie sperimentate, ma esercitano un'azione deleteria sulla crescita delle due piante. Tuttavia abbiamo notato, inaffiando con le soluzioni alcaloidiche le piantine già sviluppate, che la morfina è un po' meglio tollerata della caffeina.

Queste esperienze, che ci sembrano prometteci, devono naturalmente essere riprese e proseguite su più larga scala, estendendole ad altre sostanze oltre a quelle sperimentate finora, ciò che ci proponiamo di fare appena la stagione lo permetterà.

Infine porgiamo i nostri ringraziamenti alla signorina Angela Puricelli, che ci ha coadiuvato con intelligente assiduità in queste ricerche.

(1) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, serie VII, tomo I, pag. 345 (1913-14); Annales de Chimie, 9<sup>a</sup> serie, vol. III, pag. 19.

Fisica matematica. — *Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici* <sup>(1)</sup>. Nota I del Corrisp. O. TEDONE.

I. — INTRODUZIONE.

1. Prenderemo come punto di partenza la teoria elettromagnetica dei fenomeni luminosi. Quello che, però, diremo mirando ai fenomeni luminosi, potrà anche estendersi, facilmente, ad ogni campo elettromagnetico esistente nel mezzo cristallino, purchè questo mezzo si conservi uniassico anche per gli ultimi fenomeni. E ricordiamo che un mezzo cristallino perfettamente dielettrico al quale caso, nelle considerazioni che seguono, vogliamo limitarci, rispetto al complesso dei fenomeni elettromagnetici, è individuato dalla espressione dell'energia elettromagnetica elementare, allo stesso modo, p. es., con cui lo stesso mezzo cristallino è individuato dall'espressione del potenziale elastico elementare rispetto ai fenomeni elastici. Che, inoltre, si assume per espressione dell'energia elettromagnetica elementare la somma di una funzione omogenea di secondo grado delle componenti della forza elettrica (energia elettrica) e di una analoga funzione delle componenti della forza magnetica (energia magnetica). E che, infine, alla parte che rappresenta la energia magnetica, si suole assegnare la stessa forma isotropa che ad essa conviene nel vuoto, o nell'aria, ipotesi sicuramente accettabile, almeno, nel campo dei fenomeni luminosi.

Adottando queste ipotesi ed indicando con  $X, Y, Z$  le componenti della forza elettrica, con  $U, V, W$  quelle della forza magnetica, con  $f$  l'espres-

<sup>(1)</sup> Le prime ricerche d'indole generale nella teoria dei fenomeni luminosi in un mezzo cristallino, pare, siano dovute a Lamé (*Leçons sur la théorie math. de l'élast. ... Paris, 1852*) il quale parte dall'ipotesi che le vibrazioni luminose non sieno che vibrazioni elastiche di uno speciale corpo solido e che quindi esse debbano farsi dipendere dalle stesse equazioni delle vibrazioni di un corpo solido elastico. Basandosi sulle equazioni dell'ottica ch'egli, per questa via, costruisce, fa uno studio diffuso sulla possibilità e sulla determinazione di un unico centro luminoso. I risultati ottenuti da Lamé, in questo indirizzo, sono stati utilizzati, poi, dalla Kowalevsky (*Acta math.*, vol. VI, pag. 249) nelle ricerche da lei fatte sulla integrazione col metodo di Weierstrass delle equazioni dell'ottica di Lamé già citate. Però i risultati ottenuti da Lamé e quelli ottenuti dalla Kowalevsky sono stati, poi, assoggettati a critica ed in gran parte contestati dal Volterra (*Acta math.*, vol. XVI, pag. 153) le di cui considerazioni e procedimenti sono stati approfonditi dal Signorini in un ottimo lavoro (*Ann. della S. N. S. di Pisa*, vol. XII), nel caso particolare dei mezzi uniassici che il Volterra aveva determinatamente lasciato da parte. In esso si troveranno altre utili citazioni relative all'argomento. Si consulti anche il § IX delle *Lectures* tenute dal Volterra alla Clark University (pubbl. nel 1912).

sione dell'energia elettromagnetica elementare per unità di volume, assumendo come assi coordinati un sistemn di assi di simmetria elettrica, potremo scrivere

$$(1) \quad f = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2 + U^2 + V^2 + W^2).$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sono le così dette costanti dielettriche principali e l'espressione (1) di  $f$  conviene a qualunque mezzo cristallino perfettamente dielettrico. Se le tre costanti  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sono eguali, il mezzo è isotropo, o come tale si comporta rispetto ai fenomeni elettromagnetici; se soltanto due di queste tre costanti sono eguali, i corrispondenti cristalli si dicono *uniassici*; in caso diverso *biassici*.

I fenomeni elettromagnetici, all'interno del cristallo, hanno le stesse simmetrie della funzione  $f$ ; quindi, in ogni caso, un centro di simmetria e tre assi di simmetria binarii rispettivamente ortogonali. D'altra parte, un calcolo molto semplice dimostra che se l'asse  $z$ , p. es., è, per  $f$ , un asse di simmetria almeno ternario esso è anche un asse d'isotropia e, quindi, comunque si scelgano gli altri due assi  $x$  e  $y$ ,  $f$  ha sempre la forma (1) con  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , e il mezzo cristallino è uniassico. Ricordiamo poi che le relazioni fra le simmetrie dei fenomeni elettromagnetici in un mezzo cristallino e le simmetrie della sua costituzione molecolare dipendono dalla nota legge di fisica cristallografica che « tutte le simmetrie di costituzione del mezzo cristallino devono rimanere tali per  $f$ , come, del resto, per ogni altro fenomeno fisico che possa riscontrarsi nell'interno del cristallo ». Ne viene subito che i sistemi cristallini in cui si riscontra un asse ternario, quaternario, o senario, sono al più uniassici e l'esperienza dimostra che tali sono effettivamente, a meno che non si tratti del sistema regolare nel qual caso il cristallo, rispetto ai fenomeni elettromagnetici, si comporta come isotropo.

2. La spinta alle presenti ricerche m'è venuta dalla constatazione del fatto che, combinando, in modo opportuno, i metodi d'integrazione da me adoperati in precedenti Note <sup>(1)</sup>, si riesce ad integrare in modo completo anche le equazioni dell'ottica relative ai mezzi uniassici portando, quindi, così, la teoria generale dei fenomeni luminosi, per questi mezzi, allo stesso livello che l'indicata teoria ha raggiunto per i mezzi isotropi. Effettivamente, poi, le accennate equazioni s'integrano egualmente, basandosi sugli stessi metodi contenuti nelle citate Note, anche nel caso in cui l'energia magnetica non sia una funzione isotropa, purchè l'energia elettromagnetica elementare

<sup>(1)</sup> *Campi elettrom. dipendenti da una sola coordinata. Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell*, in Rend. della R. Acc. dei Lincei, sedute 19 dicembre 1915 e 16 aprile 1916. Colgo qui l'occasione, riparando ad una involontaria omissione, per aggiungere ai lavori citati nelle ultime Note: A. Tonolo, *Sull'integr. delle equaz. fondamentali dell'elettrodin.* Ann. di mat., tomo XVII.

totale continui ad avere un asse di isotropia. Le equazioni stesse s'integrerebbero anche se nel mezzo cristallino si debba tener conto, in certa misura, dei fenomeni di conduzione purchè l'asse d'isotropia della energia elettromagnetica elementare continui ad esser tale per gli ultimi fenomeni. Per non andare incontro a formole complicate, ci limiteremo, però, solo al caso in cui il mezzo è perfettamente dielettrico e la corrispondente energia elettromagnetica abbia la forma (1), ma supporremo che, nel mezzo, possano aver luogo correnti di convezione.

II. — SISTEMA DI EQUAZIONI AGGIUNTO E TEOREMA DI RECIPROCIITÀ.

3. Le equazioni che vogliamo assoggettare ai nostri studi si possono scrivere

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} = c \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 4\pi u, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} = c \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) - 4\pi v, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \quad \text{con } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} = c \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) - 4\pi w, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right). \end{array} \right.$$

nelle quali la costante  $c$  è, al solito, la velocità della luce nel vuoto ed  $u, v, w$  sono funzioni note di  $x, y, z, t$ . Poichè, poi, le cose che diremo in questa parte del nostro lavoro sono indipendenti dall'ipotesi particolare di  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , noi le esporremo come se la detta ipotesi non sussista.

Qualunque sieno  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , al sistema di equazioni

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = c \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right), \end{array} \right.$$

daremo il nome di sistema *aggiunto* del sistema (2). Se ora  $X, Y, \dots, W$  soddisfano al sistema (2) e  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_3$  al sistema (3), si trova subito che vale l'identità

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_1 X \psi_1 + \varepsilon_2 Y \psi_2 + \varepsilon_3 Z \psi_3 - (U \varphi_1 + V \varphi_2 + W \varphi_3)] = \\ & = c \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (V \psi_3 - W \psi_2 + Y \varphi_3 - Z \varphi_2) + \dots \right\} - 4\pi (u \psi_1 + v \psi_2 + w \psi_3) \end{aligned}$$

in cui i puntini, nella parentesi a secondo membro, indicano la somma di due termini che si deducono da quello scritto, nella stessa parentesi, con permutazioni circolari. Introducendo, quindi, come al solito, nelle nostre considerazioni lo spazio lineare a quattro dimensioni in cui  $x, y, z, t$  sono le coordinate di un punto, e dinotando con  $\sigma_3$  una varietà regolare, chiusa, a tre dimensioni di questo spazio, limitante una regione  $S_4$  all'interno della quale  $X, Y, \dots, W; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_3$  ed  $u, v, w$  sono funzioni regolari, potremo scrivere la formola

$$(4) \quad \int_{\sigma_3} [X \Psi_1 + Y \Psi_2 + Z \Psi_3 - (U \Phi_1 + V \Phi_2 + W \Phi_3)] d\sigma_3 - \\ - 4\pi \int_{S_4} (u\psi_1 + v\psi_2 + w\psi_3) dS_4 = 0$$

in cui

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \varphi_1 \cos nt + c(\psi_2 \cos nz - \psi_3 \cos ny), \\ \Psi_1 = \varepsilon_1 \psi_1 \cos nt - c(\varphi_2 \cos nz - \varphi_3 \cos ny), \end{cases}$$

$n$  essendo la normale a  $\sigma_3$  diretta verso l'interno di  $S_4$ , mentre  $\Phi_2, \Phi_3$  e  $\Psi_2, \Psi_3$  si deducono, rispettivamente, da  $\Phi_1$  e  $\Psi_1$  con permutazioni circolari di  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; x, y, z; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  e  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Alla formola (4) daremo il nome di *teorema di reciprocità* relativo ai due sistemi di equazioni (2) e (3) e continueremo a dare alle espressioni  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi_3$  il nome di *funzioni associate* a  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_3$ .

### III. — DETERMINAZIONE DI W E DI Z.

4. Sia adesso  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$  e chiamiamo, in questa parte del nostro lavoro, con  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  le coordinate correnti di un punto del nostro spazio a quattro dimensioni; con  $x, y, z, t$ , invece, le coordinate di un punto fisso dello stesso spazio. Nella ipotesi fatta, W e Z, ossia le componenti della forza magnetica e della forza elettrica secondo l'asse d'isotropia, si determinano ancora con procedimento perfettamente analogo a quello con cui abbiamo determinato tutte e sei le componenti dei due detti vettori nel caso dell'isotropia completa. Per mettere in luce questo fatto e costruire, contemporaneamente, le formole che ci daranno le due quantità W e Z, cominciamo con l'osservare che si soddisfa alle equazioni (3) ponendo

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_1 = -c \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta \partial \xi} & , & \varphi_2 = -c \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta \partial \zeta} & , & \varphi_3 = c \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right), \\ \psi_1 = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau \partial \eta} & , & \psi_2 = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau \partial \xi} & , & \psi_3 = 0 \end{cases}$$

$\Omega$  essendo una soluzione dell'equazione

$$(7) \quad C^2 \mathcal{A}^2 \Omega - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad C^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1} .$$

Introduciamo la varietà conica  $\Gamma$ , caratteristica rispetto alle nostre equazioni, col vertice nel punto  $(x, y, z, t)$  e di equazione

$$C^2 (t - \tau)^2 = r^2 = 0 \quad , \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} ;$$

fissiamo, quindi, nello spazio  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ , una varietà regolare a tre dimensioni, la quale sia incontrata in un punto solo da ogni parallela all'asse  $\tau$  che l'incontra, potendo, però, questa retta, come caso limite, in tutto, o in parte, appartenere alla varietà stessa, e supponiamo che il punto  $(x, y, z, t)$  sia in tale posizione, rispetto alla varietà precedente, che nella regione  $S_4$  limitata da  $\Gamma$  e dalla porzione  $\sigma_3$  della stessa varietà a tre dimensioni sia

$$t > \tau \quad , \quad t - \tau > r .$$

Assumendo, allora, per  $\Omega$ , l'espressione

$$(7') \quad \Omega = \frac{r}{C^2} \left[ \frac{C(t - \tau)}{r} - 1 \right]^2$$

ed applicando, poi, il teorema di reciprocità alla soluzione generica  $X, Y, \dots, W$  delle (2) ed alla soluzione (6) delle (3) costruita con l'espressione (7') di  $\Omega$ , nella regione limitata da  $\Gamma$ , da  $\sigma_3$  e dalla varietà  $\gamma$  di equazione  $r = d$ ,  $d$  essendo una costante, basterà andare al limite, per  $d = 0$ , per dedurre dal teorema di reciprocità, nel modo ricordato, la prima delle formole richieste:

$$(8) \quad W(x, y, z, t) = \left[ W - \frac{2}{3} c \frac{X \cos n\eta - Y \cos n\xi}{\cos n\tau} \right]_0 - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( F_2 - \frac{1}{c} \int_{S_4} \frac{v}{r} dS_4 \right) + \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( F_1 - \frac{1}{c} \int_{S_4} \frac{u}{r} dS_4 \right) + \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \right\} .$$

In questa formola è

$$(8') \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 X \cos n\tau + c(V \cos n\xi - W \cos n\eta)] \frac{d\sigma_3}{r} , \\ F_2 = \frac{1}{4\pi c} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 Y \cos n\tau + c(W \cos n\xi - U \cos n\zeta)] \frac{d\sigma_3}{r} ; \\ G_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [U \cos n\tau - c(Y \cos n\xi - Z \cos n\zeta)] \frac{d\sigma_3}{r} , \end{array} \right.$$

mentre  $G_2$  e  $G_3$  si deducono da  $G_1$  con semplici permutazioni circolari; inoltre,  $t_0$  è il valore di  $\tau$  nel punto d'incontro della retta  $r=0$  con  $\sigma_3$  e le quantità con l'indice zero indicano i valori di queste stesse quantità nel detto punto.

5. Per determinare  $Z$  le considerazioni che servono a determinare  $W$  hanno bisogno di essere soltanto leggermente modificate. La formola (8) che da  $W$  coincide perfettamente con la corrispondente del caso dell'isotropia completa salvo a sostituire  $\varepsilon_1$  al posto dell'unica costante dielettrica  $\varepsilon$ ; la formola, invece, che andiamo a costruire per  $Z$  differirà dalla corrispondente del caso citato in modo più rilevante. Per costruire la formola indicata si osservi, dapprima, che si soddisfa ancora alle equazioni (3) ponendo

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \eta} \quad , \quad \varphi_2 = - \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \xi} \quad , \quad \varphi_3 = 0, \\ \psi_1 = - \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi \partial \zeta} \quad , \quad \psi_2 = - \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta \partial \zeta} \quad , \quad \psi_3 = \frac{c}{\varepsilon_3} \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta^2} \right) \end{array} \right.$$

purchè  $\bar{\Omega}$  sia adesso soluzione dell'equazione

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau^2} = c^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_3} \left( \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \zeta^2} \right\}.$$

E prenderemo, per  $\bar{\Omega}$ , la funzione

$$(10') \quad \bar{\Omega} = \frac{\bar{r}}{c^2} \left[ \frac{c(t-\tau)}{\bar{r}} - 1 \right]^2, \quad \bar{r} = \sqrt{\varepsilon_3(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \varepsilon_1(z-\zeta)^2.$$

Al posto della varietà  $\Gamma$  del caso precedente, si considererà ora la varietà  $\bar{\Gamma}$  di equazione

$$(11) \quad c^2(t-\tau)^2 = \bar{r}^2$$

la quale è ancora una varietà conica col vertice nel punto  $(x, y, z, t)$ , caratteristica per le nostre equazioni; ed al posto della varietà  $\gamma$  si considererà, analogamente, la varietà cilindrica  $\bar{\gamma}$  di equazione

$$(12) \quad \bar{r} = d$$

$d$  essendo sempre una costante che, poi, faremo tendere a zero. Si osservi, quindi, che, scegliendo opportunamente il senso della normale sulle due falde di  $\bar{\Gamma}$ , è

$$\cos n\tau = - \frac{c}{K}, \quad \cos n\xi = - \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \quad \cos n\eta = - \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \quad \cos n\zeta = - \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}$$

con

$$K^2 = c^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}\right)^2$$

per cui i valori delle funzioni associate alle funzioni (9) costruite col valore (10') di  $\bar{\Omega}$ , sulla varietà  $\bar{F}$ , saranno dati dalle formole

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{c} \Phi_1 = \left\{ \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) + 2 \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right\} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \\ \frac{K}{c} \Phi_2 = - \left\{ \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) + 2 \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right\} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \\ \Phi_3 = 0, \\ \frac{K}{c} \Psi_1 = \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \\ \frac{K}{c} \Psi_2 = \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \\ \frac{K}{c} \Psi_3 = - \bar{r} \left( c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right)^2 \right] - 2 \frac{c \varepsilon_3}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}}. \end{array} \right.$$

E, poichè, come si verifica, immediatamente, l'operazione  $c \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial}{\partial \tau}$  è una operazione di derivata in una direzione normale ad  $n$  e, quindi, appartenente a  $\bar{F}$ , le funzioni  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi_3$  si annullano tutte su  $\bar{F}$ .

Notiamo pure che, scegliendo il senso positivo della normale a  $\bar{r}$  in modo che penetri nella regione in cui  $\bar{r}$  cresce e s'intenda che sia

$$k = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}\right)^2},$$

su  $\bar{r}$ , è

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{c} \Phi_1 = - \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}, \quad \frac{k}{c} \Phi_2 = \frac{c}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}, \quad \Phi_3 = 0 \\ \frac{k}{c} \Psi_1 = \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \quad \frac{k}{c} \Psi_2 = \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta}, \\ \frac{k}{c} \Psi_3 = - \frac{\partial^2 \bar{\Omega}}{\partial \tau \partial \bar{r}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right)^2 \right] \end{array} \right.$$

nelle quali formole è da porsi  $\bar{r} = d$ .

Ciò posto, chiamiamo  $\bar{\sigma}_3$  la porzione della varietà a tre dimensioni a cui appartiene  $\sigma_3$ , compresa in  $\bar{F}$ , ed  $\bar{S}_4$  la regione dello spazio a quattro



dimensioni solito limitata da  $\bar{\sigma}_3$  e da  $\bar{\Gamma}$ ; e indichiamo con  $\bar{\sigma}'_3$  ed  $\bar{S}'_4$  le porzioni di  $\bar{\sigma}_3$  ed  $\bar{S}_4$  esterne a  $\bar{\gamma}$ . Applichiamo, quindi, il teorema di reciprocità (4), nella regione  $\bar{S}'_4$ , alla stessa soluzione generica di prima (X, Y, ..., W) delle equazioni (2) ed alla soluzione (9) delle equazioni (3) costruita con la funzione  $\bar{\Omega}$  data dalla (10'). Tenendo conto, allora, che l'elemento  $d\bar{\gamma}$  della varietà  $\bar{\gamma}$  è dato dalla formola

$$d\bar{\gamma} = \frac{d^2}{\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1}} k d\omega d\tau$$

in cui  $d\omega$  dinota l'elemento della superficie sferica ordinaria di raggio uno, e che

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right)^2 d\omega = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_3, \dots, \int_{\omega} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \zeta} d\omega = 0, \dots,$$

basta andare al limite, per  $d=0$ , per trovare subito la formola

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \int_{t_0}^t (t - \tau) Z(x, y, z, \tau) d\tau = \\ & = \frac{4\pi c}{3\sqrt{\varepsilon_1}} \left[ (t - t_0)^2 Z_0 - \frac{4\pi}{\varepsilon_3} \int_{t_0}^t (t - \tau)^2 w(x, y, z, \tau) d\tau \right] + \\ & + \lim_{d=0} \left\{ \int_{\bar{\sigma}'_3} [X\Psi_1 + Y\Psi_2 + Z\Psi_3 - (U\Phi_1 + V\Phi_2 + W\Phi_3)] d\bar{\sigma}_3 - \right. \\ & \quad \left. - 4\pi \int_{\bar{S}'_4} (u\psi_1 + v\psi_2 + w\psi_3) d\bar{S}_4 \right\} \end{aligned}$$

in cui, naturalmente, le  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Psi_3$  sono le funzioni associate della soluzione particolare adoperata.

Da questa formola si eliminano gli integrali impropri, portando dei segni di derivazione fuori dei segni integrali, col metodo indicato nella seconda delle Note citate, e si trova, derivando, ancora, due volte rispetto a  $t$  e dividendo poi per  $8\pi$ ,

$$\begin{aligned} (15) \quad & \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z(x, y, z, t) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left[ Z_0 - \frac{4\pi}{\varepsilon_3} \int_{t_0}^t w(x, y, z, \tau) d\tau \right] + \\ & + \frac{2c^2}{3\varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1}} \left( \frac{U \cos n\eta - V \cos n\xi}{\cos n\tau} \right)_0 \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial t} - c \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{F}_1 - \int_{\bar{S}_4} \frac{u}{r} d\bar{S}_4 \right) - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{F}_3 - \int_{\bar{S}_4} \frac{w}{r} d\bar{S}_4 \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial t} - c \left[ \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{F}_3 - \int_{\bar{S}_4} \frac{w}{r} d\bar{S}_4 \right) - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{F}_2 - \int_{\bar{S}_4} \frac{v}{r} d\bar{S}_4 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

in cui

$$(15') \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [\varepsilon_1 X \cos n\tau + c(V \cos n\xi - W \cos n\eta)] \frac{d\bar{\sigma}_3}{r}, \dots \\ \bar{G}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_3} [U \cos n\tau - c(Y \cos n\xi - Z \cos n\eta)] \frac{d\bar{\sigma}_3}{r}, \dots \end{array} \right.$$

IV. — DETERMINAZIONE DELLE ALTRE DUE COPPIE DI QUANTITÀ  
X, V E Y, U.

6. Determinate W e Z, possiamo determinare la coppia di funzioni X, V dalle due equazioni

$$(16) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial z} = c \frac{\partial W}{\partial y} - 4\pi u, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial X}{\partial z} = c \frac{\partial Z}{\partial x}$$

e la coppia di funzioni Y, U dalle altre due

$$(16') \quad \varepsilon_1 \frac{\partial Y}{\partial t} - c \frac{\partial U}{\partial z} = -c \frac{\partial W}{\partial x} - 4\pi v, \quad \frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial Y}{\partial z} = -c \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

I due sistemi di equazioni (16) e (16'), astrazione fatta dal nome delle incognite e dai diversi valori dei termini noti, non sono sostanzialmente differenti e possiamo trattarli contemporaneamente introducendo un doppio segno.

Prenderemo, dunque, a studiare il sistema di equazioni

$$(17) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} \pm c \frac{\partial V}{\partial z} = M, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \pm c \frac{\partial X}{\partial z} = N$$

in cui indichiamo con M e N i termini noti, il quale, del resto, salvo l'introduzione dei termini noti ai secondi membri, non è che un caso particolare di quello studiato nella prima delle Note citate. Per ottenerne la integrazione, cominciamo col notare che, a e b essendo due costanti qualunque,

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1 X a + V b) \pm c \frac{\partial}{\partial z} (X b + V a) = M a + N b.$$

Consideriamo, quindi, nelle nostre equazioni, x e y come due parametri costanti e pensiamo, invece, t e z come le coordinate di un punto in un piano. Se supponiamo di aver scelti gli assi coordinati z e t in modo che l'asse z vada a coincidere con l'asse t dopo una rotazione positiva di  $\frac{\pi}{2}$ ; chiamiamo s un contorno chiuso, ordinariamente regolare, di questo piano, e  $\sigma$  l'area racchiusa dal contorno s, all'interno della quale le funzioni che compaiono nella (18) siano regolari; otteniamo subito, dalla (18),

$$(19) \quad \int_s \{(\varepsilon_1 X a + V b) dz \pm c(X b + V a) dt\} + \int_\sigma (M a + N b) d\sigma = 0$$

in cui il contorno s si deve intendere percorso nel solito modo.

7. Per opportunità di notazioni, converrà indicare, ora, con  $\tau$  e  $\zeta$  le coordinate di un punto corrente del nostro piano, e serbare i simboli  $t$  e  $z$  per indicare le coordinate di un determinato punto fisso del piano stesso. E, nel caso che sia necessario, o conveniente, ricordare, contemporaneamente, le coordinate  $\tau$  e  $\zeta$  che compaiono come variabili d'integrazione nelle espressioni di  $W$  e di  $Z$ , avanti costruite, si potranno introdurre, per queste ultime variabili, dei nuovi simboli. Ciò posto, chiamiamo, adesso,  $\sigma$  la regione del piano  $\tau \zeta$  limitata dalle due rette

$$C(t - \tau) - (z - \zeta) = 0 \quad , \quad C(t - \tau) + (z - \zeta) = 0$$

essendo sempre  $C = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ , uscenti dal punto  $(t, z)$ , e da una linea  $s$  aperta e ordinariamente regolare. Ci limiteremo a considerare il solo caso in cui  $\sigma$  sia attraversata dalla retta  $\zeta = z$  e supporremo che  $s$  sia, al solito, incontrata in un punto solo da ogni retta  $z = \text{cost}$  che l'incontri a meno che una parte di  $s$  stessa non appartenga a questa retta. Chiamiamo  $\sigma_I$  quella delle due parti in cui  $\sigma$  è divisa dalla retta  $\zeta = z$  che è adiacente alla retta  $C(t - \tau) - (z - \zeta) = 0$ ,  $\sigma_{II}$  l'altra parte; ed indichiamo, inoltre, con  $P, Q, R$  i punti d'incontro di  $s$  con le rette  $C(t - \tau) - (z - \zeta) = 0$ ,  $\zeta = z$ ,  $C(t - \tau) + (z - \zeta) = 0$ , successivamente. A questo punto applichiamo la (19) ad una soluzione generica e regolare delle (17), una volta nella regione  $\sigma_I$  dopo aver fatto  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ ,  $b = 1$ , il doppio segno, per  $a$ , corrispondendo al doppio segno nelle (17); un'altra volta in  $\sigma_{II}$  dopo aver fatto  $a = \mp \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ ,  $b = 1$ . Troviamo così le due formole

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \int_P^Q (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta - C d\tau) - C \int_T^t (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) d\tau + \\ \qquad \qquad \qquad + \int_{\sigma_I} (\pm M + N \sqrt{\varepsilon_1}) \frac{d\sigma}{\sqrt{\varepsilon_1}} = 0, \\ \int_Q^R (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta + C d\tau) - C \int_T^t (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) d\tau + \\ \qquad \qquad \qquad + \int_{\sigma_{II}} (\mp M + N \sqrt{\varepsilon_1}) \frac{d\sigma}{\sqrt{\varepsilon_1}} = 0, \end{array} \right.$$

in cui  $T$  è il valore di  $\tau$  corrispondente al punto  $Q$  e che, ordinariamente,

è una funzione di  $x$  e  $y$ . Sommando e sottraendo le (20) e, quindi, derivando rispetto a  $t$  ricaviamo le altre formole

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \pm 2cX(z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta - C dx) - \right. \\ &\quad \left. - \int_Q^R (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta + C dx) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\sigma_i} (\pm M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma - \int_{\sigma_{ii}} (\mp M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma \right\}, \\ 2cV(z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_P^Q (\pm \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta - C dx) + \right. \\ &\quad \left. + \int_Q^R (\mp \sqrt{\varepsilon_1} X + V) (d\zeta + C dx) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{\sigma_i} (\pm M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma + \int_{\sigma_{ii}} (\mp M + N \sqrt{\varepsilon_1}) d\sigma \right\} \end{aligned} \right.$$

nelle quali abbiamo trascurato di scrivere i due parametri  $x$  e  $y$  da cui  $X$  e  $V$  pure dipendono.

Con l'aiuto delle (21) si scrivono immediatamente le espressioni definitive delle altre quattro incognite della nostra quistione e cioè di  $X, V$  e di  $Y, U$ . Noi non vogliamo indugiarcì in questa trascrizione e ci proponiamo di farlo solo nel caso in cui il problema generale di Cauchy, risoluto colle formole precedenti, si riduce al caso più semplice del problema della Kowalevsky nel quale, per  $t=0$ , sono dati i valori delle incognite del nostro problema in funzione di  $x, y, z$ .

**Fisiologia.** — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* IX: *Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci* (parte 3<sup>a</sup>) (1). Nota del Corrisp. **FILIPPO BOTTAZZI.**

4. *Influenza del cambiamento del liquido di Ringer sul tono del preparato intestinale.* — Due fatti, già accennati in una mia precedente pubblicazione (2), e sui quali vale la pena di tornare un po' più diffusamente, perchè probabilmente hanno qualche relazione con gli effetti prodotti dalla sottrazione dell'ossigeno o dalla somministrazione di acido carbonico, sono quelli che riguardano il modo di comportarsi dei preparati intestinali, quando si cambia il liquido di Ringer in cui essi hanno per un tempo più o meno lungo funzionato, e quando al liquido di Ringer si aggiungono acidi o basi, sempre in quantità relativamente piccola.

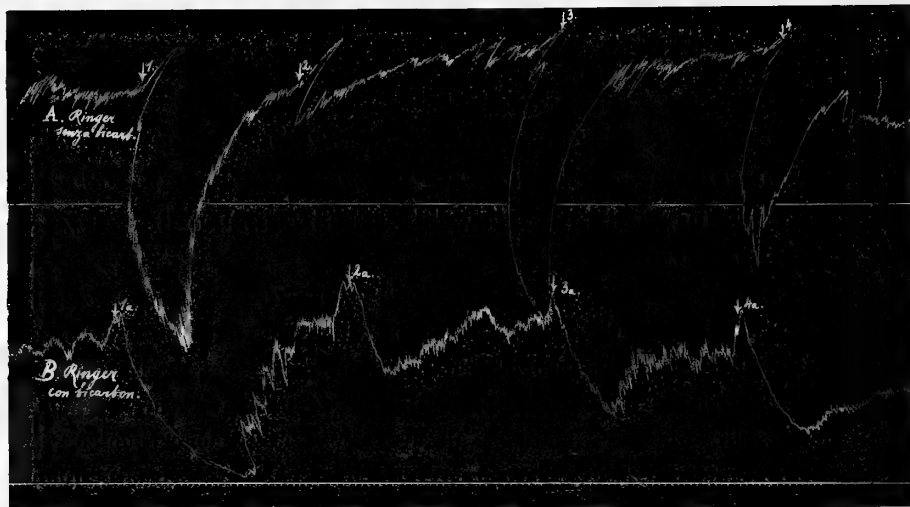
Il cambiamento del liquido di Ringer ossigenato con altro egualmente ossigenato e riscaldato alla stessa temperatura ha sempre per effetto una più o meno grande, ma sempre cospicua depressione del tono, che talora è accompagnata da diminuzione in altezza, e qualche volta anche da arresto delle contrazioni ritmiche automatiche. La depressione del tono dura generalmente pochi minuti; quindi il preparato torna gradatamente ad accorciarsi. Se si cambia di nuovo il liquido, dopo che il tono ha raggiunto il suo valore primitivo, si osserva un nuovo abbassamento del tono, e così per più volte consecutive, come dimostra il tracciato *B* della fig. 1.

Io credetti di spiegare in parte il fenomeno, ammettendo che il gorgogliamento prolungato dell'ossigeno per il liquido di Ringer spostasse l'acido carbonico dal bicarbonato sodico, rendendo il liquido più alcalino, e che il liquido nuovo agisse come una soluzione meno alcalina, o più acida del liquido vecchio. Infatti, come appresso vedremo, gli acidi abbassano, e gli alcali elevano il tono del preparato intestinale.

Per vedere se questa ipotesi abbia un solido fondamento, ho fatto ricerche comparative su due pezzi contigui di intestino tenue, immergendo l'uno in liquido di Ringer normale, cioè contenente carbonato sodico, e l'altro in liquido di Ringer privo di bicarbonato, e cambiando più volte di seguito questi liquidi. I tracciati *A* e *B* della fig. 1 dimostrano, che l'abbassamento del tono causato dal cambiamento del liquido avviene sia nell'uno come nell'altro liquido di Ringer, ossia che la presenza del bicarbonato, e quindi la

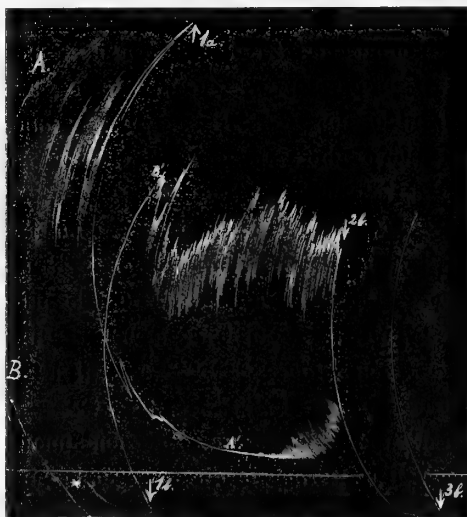
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Filippo Bottazzi, *Nuove ricerche ecc.* (II Memoria). Mem. d. R. Accad. d. Lincei, serie 5<sup>a</sup>, XI, fasc. II, pag. 45 segg., 1915.



(Riduzione a un terzo).

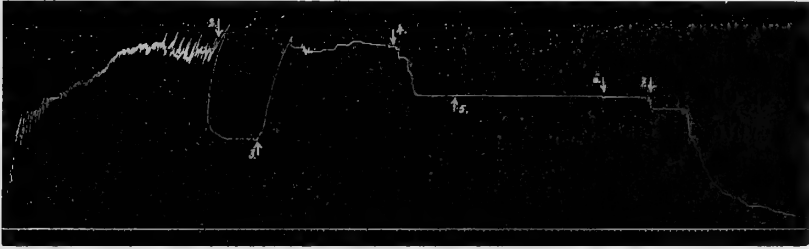
FIG. 1. — Due pezzi dello stesso intestino tenue, uno (A) in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer senza bicarbonato, l'altro (B) in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer normale (cioè contenente bicarbonato). Temper.: 36,5° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. In 1., 2., 3. e 4., si cambia il liquido di Ringer con altro egualmente privo di bicarbonato e riscaldato alla stessa temperatura. In 1a., 2a. 3a. e 4a. si cambia il liquido di Ringer normale con altro pure normale e riscaldato (9 dicembre 1916).



(Riduz. a un terzo).

FIG. 2. — Due preparati contigui d'intestino tenue di cane, immersi: A. in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer normale, cioè contenente bicarbonato sodico; B. in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 36° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. In \* il preparato B si era allungato tanto, che fu necessario risollevarlo la leva scrivente. In 1a. si sostituisce al liquido in cui era immerso il preparato A. un volume eguale di liquido di Ringer senza bicarbonato; e in 1b. si sostituisce al liquido in cui era immerso il preparato B. un volume eguale di liquido di Ringer con bicarbonato: il tono di A. si abbassa enormemente, e quello di B. si eleva. In 2b. si aggiunge al liquido in cui era immerso il preparato B (liquido di Ringer senza bicarbonato) 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di acido solforico; in 3b, 3 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di soda caustica. (7 dicembre 1916).

variazione dell'alcalinità dovuta allo spostamento dell'acido carbonico, è non la causa principale del fenomeno. Nell'esperimento, al quale si riferiscono i



(Riduz. a un terzo)

FIG. 3. — Intestino tenue di cagna, in 55 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer. Temp.: 37° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. Da 1. a 2. il preparato è immerso in liquido di Ringer normale, cioè contenente bicarbonato sodico; in 2. si sostituisce a questo un egual volume (55 cm<sup>3</sup>) di liquido di Ringer privo di bicarbonato; in 3. si sostituisce a questo, 55 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer normale, in cui poi il preparato rimane immerso per tutto il resto dell'esperimento. Da 1. a 4. per il liquido gorgoglia ossigeno. In 4. si sostituisce all'ossigeno l'acido carbonico; in 5. si fa passare di nuovo ossigeno. In 6. si aggiunge al liquido 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 n di HCl; in 7., 2 cm<sup>3</sup> della stessa soluzione. (21 novembre 1916).

tracciati della fig. 1, gli abbassamenti del tono del preparato immerso in



(Riduz. a un terzo).

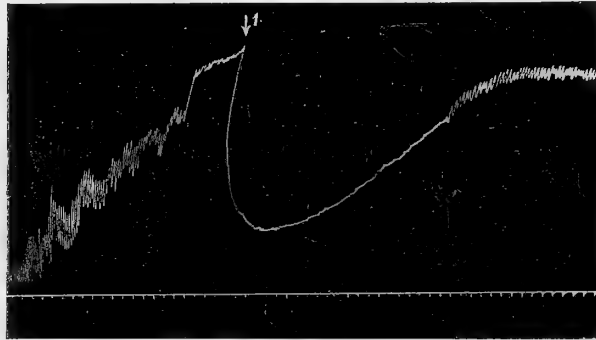
FIG. 4. — Intestino tenue di cagna, in 55 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer. Temper.: 37° C. Peso: gr. 10. tempo: 1'. Da 1. a 2. il preparato è immerso in liquido di Ringer senza bicarbonato sodico; in 2. si sostituisce a questo, un volume eguale di liquido di Ringer contenente bicarbonato sodico; in 3. di nuovo s'immerge il preparato in liquido di Ringer privo di bicarbonato, nel quale poi rimane per tutto il resto dell'esperimento. Da 1. a 4. per il liquido gorgoglia ossigeno; da 4. a 5., acido carbonico; da 5. in poi, ossigeno. In 6. si aggiunge al liquido 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 n di HCl; in 7., ancora 1 cm<sup>3</sup> della stessa soluzione. (21 novembre 1916).

liquido di Ringer privo di bicarbonato furono, anzi, più cospicui di quelli dell'altro preparato.

Da ciò non si deve dedurre, per altro, che la presenza del bicarbonato sodico, sia indifferente. Le figg. 2, 3 e 4 dimostrano, infatti, che i preparati

immersi in liquido di Ringer normale, cioè contenente bicarbonato, presentano sempre un tono più alto e talora contrazioni ritmiche più cospicue; e che, quando al liquido di Ringer normale si sostituisce liquido privo di bicarbonato, il tono si abbassa subito fortemente, mentre quando si sostituisce al liquido di Ringer privo di bicarbonato liquido normale, il tono subito si eleva. L'abbassamento del tono, nel primo caso, potrebbe anche esser dovuto, almeno in parte, al semplice cambiamento del liquido; ma nel secondo caso si ha invece elevazione del tono, che evidentemente è dovuto all'azione del bicarbonato. Una certa alcalinità del liquido è, dunque, necessaria perchè il preparato intestinale presenti un tono cospicuo.

A che cosa sia dovuto l'abbassamento del tono prodotto dal semplice cambiamento del liquido in cui è immerso il preparato, non è agevole dire. Esclusa,



(Riduz. a metà).

FIG. 5. — Intestino tenue di cagna, in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Temper.: 37° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. In 1. si aggiunge al liquido di Ringer cm<sup>3</sup> 0,5 di soluzione 0,05 n di HCl. (19 novembre 1916).

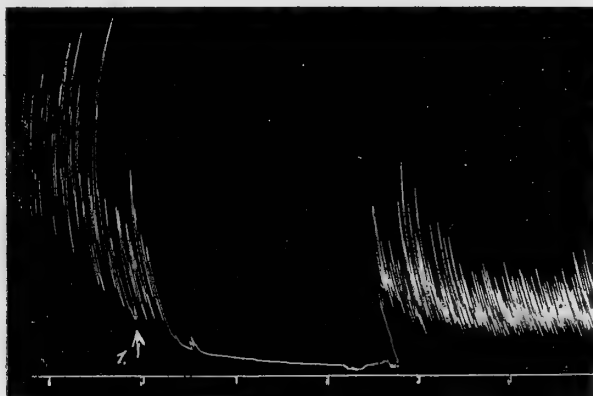
almeno in massima parte, l'influenza dell'ossigeno, che nei miei esperimenti gorgogliava incessantemente e sempre nella stessa quantità, e dell'acido carbonico; e tenendo conto dei risultati riferiti nella parte 2<sup>a</sup> di questa Nota; si potrebbe essere indotti a credere, che l'abbassamento del tono fosse dovuto a sottrazione di sostanze contratturanti contenute nel preparato, sostanze che verrebbero allontanate cambiando il liquido. Ma i tracciati della fig. 1 dimostrano, che l'abbassamento si ripete quattro volte di seguito e quasi allo stesso grado. Ora, se le sostanze attive fossero quelle stesse che, come abbiamo veduto, sono contenute nel siero del sangue; poichè il preparato fu tolto dall'animale dissanguato per decapitazione, e in esso non potevano essere rimaste che tracce di sangue, le quali avrebbero dovuto essere asportate completamente già al primo o al secondo cambiamento del liquido, la ripetizione dell'effetto al terzo, al quarto cambiamento (e forse anche in cambiamenti successivi, se fossero stati eseguiti) non si sarebbe dovuta osservare. Vien



fatto, quindi, di supporre che si tratti di sostanze elaborate dallo stesso intestino sopravvivate, sostanze che, allontanate a ogni cambiamento del liquido di Ringer, a mano a mano si rigenerano, determinando il nuovo progressivo ritorno del tono del preparato intestinale al suo valore primitivo. Per questa formazione *in situ* di sostanze capaci di tenere alto il tono muscolare la presenza del bicarbonato sodico non sarebbe necessaria, bensì, forse, la presenza di ossigeno. È questa una ipotesi che per ora mi limito ad enunciare, e che mi propongo di sottoporre subito a verifica sperimentale.

\* \* \*

5. *Influenza degli acidi e degli alcali sul preparato intestinale.* — Per quanto riguarda l'azione degli acidi e degli alcali, dai miei esperimenti



(Riduz. a metà).

FIG. 6. — Intestino tenue di cane, in 70 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 36° C. Peso: gr. 6. Tempo: 5'. In 1. si aggiunge al liquido di Ringer 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,1 n HCl.

risulta che i primi abbassano sempre, mentre i secondi elevano il tono del preparato intestinale.

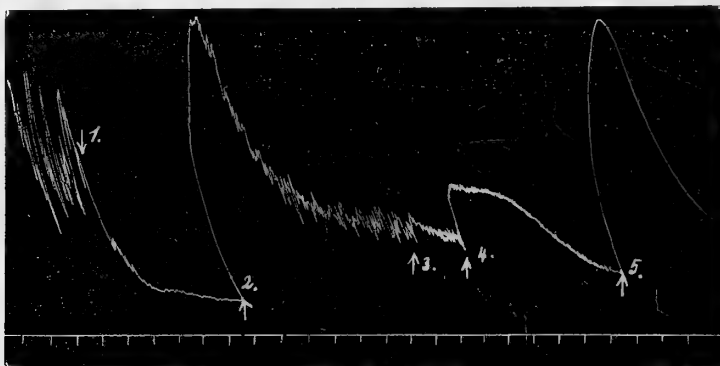
Già nel tracciato *B* della fig. 2 si vede l'effetto dell'aggiunta al liquido di Ringer di una piccola quantità di soluzione 0,2 n di acido solforico (in 2 *b*), e di una quantità un po' maggiore di soluzione 0,2 n di NaOH (in 3 *b*).

Similmente nelle figg. 2 e 3 si scorge l'azione deprimente di soluzioni molto diluite (0,05 n) di acido cloridrico su preparati intestinali che non eseguivano più contrazioni ritmiche, essendo stati precedentemente sottoposti ad altri trattamenti. Ma si osservino ancora i tracciati delle figg. 5, 6, 7 e 8. Essi dimostrano, che bastano concentrazioni piccolissime di acido per abbassare rapidamente il tono del preparato; mentre l'aggiunta di piccolissime quantità di alcali è sufficiente ad elevarlo di nuovo o a produrre primariamente una cospicua contrattura. Durante l'abbassamento del tono, per

lo più spariscono anche le contrazioni ritmiche, che però certe volte diminuiscono solamente di altezza.

Vi sono casi, per altro, nei quali l'aggiunta dell'acido non determina un forte abbassamento del tono, forse perchè questo era già depresso, o per altre cause che non saprei indicare.

Nei due esperimenti, ai quali si riferiscono i tracciati delle figg. 9 e 10, oltre a ciò ebbi anche ad osservare un fenomeno degno di nota, che cioè qualche tempo dopo l'aggiunta dell'acido (in piccolissime quantità), il preparato incominciò, e poi continuò per un pezzo a fare contrazioni ritmiche



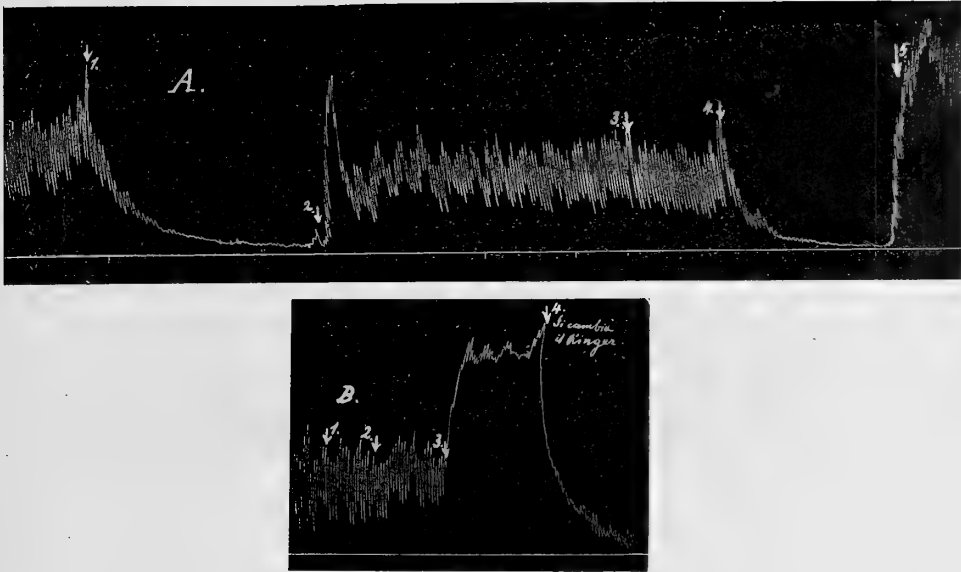
(Riduz. a metà).

FIG. 7. — Intestino tenue di cane, in 100 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 34° C. Peso: gr. 10. Tempo: 5'. (14 aprile 1913). In 1. si aggiungono al liquido di Ringer 0,2 cm<sup>3</sup> di soluzione HCl *n.* In 2. id. 0,3 cm<sup>3</sup> di soluz. NaOH *n.* In 3. id. 0,1 cm<sup>3</sup> di soluz. di NaOH *n.* In 4. id. 0,2 cm<sup>3</sup> di soluz. di NaOH *n.* In 5. id. 1,0 cm<sup>3</sup> di soluz. di NaOH *n.*

assai più alte di quelle che prima faceva, contrazioni che, nell'esperimento della fig. 10, raggiunsero altezze veramente straordinarie. Nell'uno e nell'altro caso, però, non appena la concentrazione dell'acido ebbe raggiunto, per successive dosi, un certo grado, le contrazioni ritmiche diminuirono di altezza fino a scomparire del tutto. In tutt'e due gli esperimenti, come negli altri, l'alcali produsse forte contrattura.

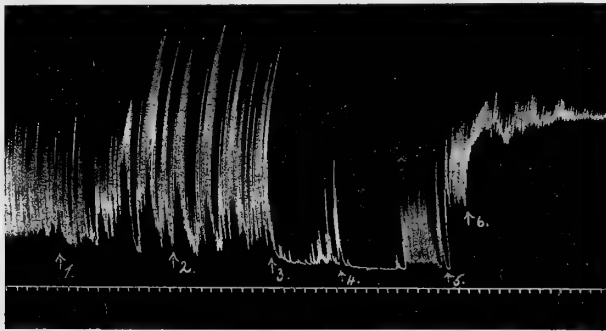
Si noti la concordanza fra i risultati ora descritti, non ostante che il preparato della fig. 9 fosse immerso in liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico, e quello della fig. 10 in liquido di Ringer normale.

Secondo alcuni (ved. parte 1<sup>a</sup> di questa Nota), l'abbassamento del tono che producono gli acidi sarebbe dovuto all'acido carbonico che essi spostano dal bicarbonato sodico del liquido di Ringer. Se così fosse, gli acidi non dovrebbero produrre lo stesso effetto su preparati immersi in liquido di Ringer privo di bicarbonato. Nel fare gli esperimenti relativi, però, bisogna tener conto di due fatti. Il primo è che, tenendo immerso il preparato in liquido



(Riduz. a metà).

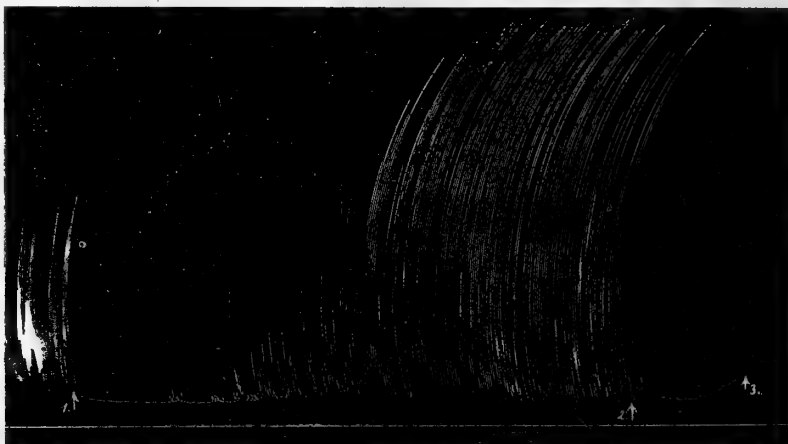
FIG. 8. — Intestino tenue di cane, in 100 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 31° C. Peso: gr. 8. Tempo: 5'. (21 marzo 1913). A. In 1. si aggiungono al liquido di Ringer 10 cm<sup>3</sup> soluzione 0,01 n HCl. In 2. si cambia il liquido di Ringer. In 3. si aggiungono al liquido 5 cm<sup>3</sup> soluz. 0,01 n HCl. In 4. id. 10 cm<sup>3</sup> soluz. 0,01 n HCl. In 5. id. 0,75 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 n NaOH. B. Dopo parecchi minuti, e mentre il preparato si contraeva normalmente: in 1. si aggiungono al liquido di Ringer 1 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 n NaOH; in 2. id. 1 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 n NaOH; in 3. id. 2 cm<sup>3</sup> soluz. 0,1 n NaOH; in 4. si cambia il liquido di Ringer.



(Riduz. a metà).

FIG. 9. — Intestino tenue di gatta, immerso in 6) cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 38° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. In 1. si aggiungono al liquido di Ringer 1 cm<sup>3</sup> di soluz. 0,01 n di HCl; in 2. 1 cm<sup>3</sup> della stessa soluzione; in 3. 1 cm<sup>3</sup> della stessa; in 4. 1 cm<sup>3</sup> della stessa; in 5. e in 6. rispettivamente 1 cm<sup>3</sup> di soluz. 0,1 n di NaOH. (16 novembre 1916).

di Ringer privo di bicarbonato, esso presenta già un tono depresso, onde



(Riduz. a un terzo).

FIG. 10. — Intestino tenue di gatto, in 50 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer ossigenato. Temperatura: 37° C. Peso gr. 10. Il cilindro fa un giro in 102'. (18 aprile 1913). In 1. si aggiungono al liquido di Ringer 0,1 cm<sup>3</sup> soluz. HCl *n*; in 2. id. 0,1 cm<sup>3</sup> soluzione HCl *n*; in 3. id. 0,2 cm<sup>3</sup> soluz. NaOH *n*. L'accorciamento del preparato, visibile già all'estremità destra di questa figura, si accentua enormemente in seguito (altro tracciato non riprodotto). Cambiato il liquido di Ringer, il preparato continua a fare ampie contrazioni ritmiche.



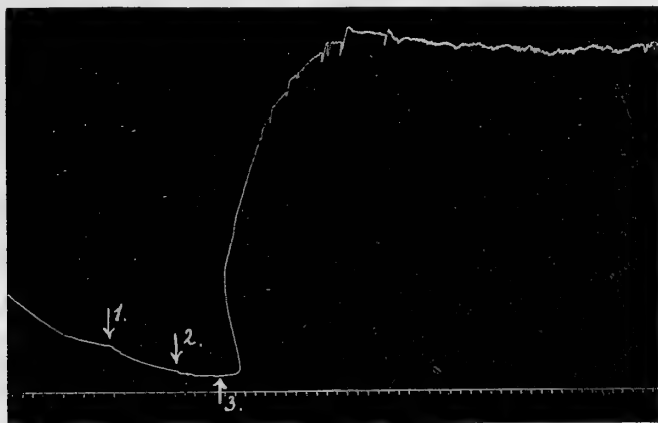
(Riduz. a un quarto).

FIG. 11. — Intestino tenue di cane, immerso in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 36° C. Peso: gr. 10. Tempo: 1'. Il preparato dapprima si allunga spontaneamente, senza fare contrazioni ritmiche; quindi spontaneamente si accorcia, e incomincia a contrarsi ritmicamente. In 1. si aggiunge al liquido 1 cm<sup>3</sup> di soluz. 0,05 *n* di HCl. Dopo molto tempo, il preparato si viene accorciando lentamente, per gradi. (18 dicembre 1916).

l'aggiunta dell'acido non potrà avere che efficacia relativamente minore. In secondo luogo, è impossibile evitare che, sotto l'azione dell'acido aggiunto,

si liberi un poco di acido carbonico dai carbonati contenuti nell'organo medesimo.

Comunque sia, io ho voluto vedere come reagisce agli acidi il preparato intestinale immerso fin dal principio in liquido di Ringer privo di carbonato. Dai tracciati delle figg. 11, 12 e 13 risulta chiaramente, che anche in queste condizioni gli acidi abbassano e gli alcali elevano il tono; onde si deve ammettere, che non ad acido carbonico messo in libertà, ma agli stessi acidi aggiunti è dovuta l'azione deprimente sul tono muscolare, cioè ai loro idrogenioni. Questi nuovi esperimenti confermano quello che sopra ho



(Riduz. a un terzo).

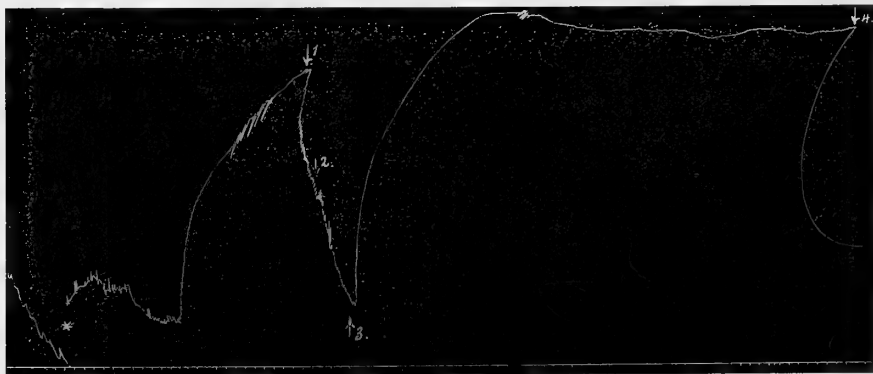
Fig. 12. — Intestino tenue di cane, immerso in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato<sup>e</sup> sodico. Ossigeno. Temper.: 36,5° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. In 1. e 2. si aggiunge al liquido 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 n di HCl; in 3., 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di NaOH. (21 dicembre 1916).

detto, che cioè in liquido di Ringer privo di bicarbonato, per un certo tempo, del resto variabile, il preparato intestinale rimane assai disteso e spesso senza contrarsi ritmicamente, o facendo contrazioni ritmiche piccolissime. Ma se si lascia passare qualche tempo, senza aggiunger nulla al liquido di Ringer (oltre all'ossigeno gorgogliante incessantemente), il tono dei preparati (come nelle figg. 11 e 13), si eleva spontaneamente, forse in seguito ad elaborazione da parte dei medesimi di sostanze contratturanti.

Naturalmente, se l'aggiunta dell'acido è fatta dopo tale elevazione spontanea del tono, l'effetto, cioè l'allungamento del preparato, si manifesta in maniera più evidente (figg. 11 e 13). Ma se si osserva bene il tracciato della fig. 12, si vede distintamente che un ulteriore allungamento si verificò anche in questo caso, in cui il preparato presentava ancora, al momento delle due aggiunte successive dell'acido, un tono assai basso.

Degna di nota è, in fine, la tendenza che presenta il preparato intestinale ad accorciarsi spontaneamente, in modo lento e graduale, dopo essersi molto allungato per azione dell'acido.

Abbiamo, dunque, finora potuto constatare l'esistenza di due fattori, che concorrono a mantenere un certo grado di tonicità nella parete intestinale:



(Riduz. a un quarto).

FIG. 13. — Intestino tenue di cane, immerso in 60 cm<sup>3</sup> di liquido di Ringer privo di bicarbonato sodico. Ossigeno. Temper.: 38° C. Peso gr. 10. Tempo: 1'. Da principio, il preparato si allunga tanto, che è necessario rialzare la leva scrivente (in \*). A un tratto, esso si accorcia spontaneamente. In 1. e in 2, si aggiunge al liquido 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,05 n di HCl; in 3., 0,5 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di NaOH; in 4., 1 cm<sup>3</sup> di soluzione 0,2 n di H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. (21 dicembre 1916).

un lieve grado di alcalinità del liquido che la bagna, e la presenza di speciali sostanze (contratturanti) nel siero del sangue.

Dobbiamo ora indagare se sostanze analoghe si trovano e si formano nella stessa parete intestinale sopravvivate; indagine, questa, che importa fare, perchè se essa desse risultati positivi, si potrebbe anche ammettere che la parete intestinale fosse una sorgente delle sostanze contratturanti esistenti nel sangue.

**Matematica.** — *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos.* Nota I di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI.

Le considerazioni delle mie due Note recentemente pubblicate in questi Rendiconti <sup>(1)</sup> si estendono ad uno spazio lineare  $S_r$  di  $r$  dimensioni (con  $r > 3$ ), quando si parta da una configurazione formata (con certe condizioni di cui dirò più innanzi), anzichè di piani e di rette, d'iperpiani e di spazi lineari  $S_{r-2}$  ad  $r - 2$  dimensioni. Negli iperspazi però la determinazione di tutte le possibili configurazioni del tipo a cui ho alluso si esaurisce per mezzo di un risultato, che è molto più semplice che non nello spazio ordinario, in quanto che — senza fare nessuna ipotesi preventiva sui numeri  $x, y, n, k$  che tra poco definirò — ne resta caratterizzata unicamente la varietà cubica con 10 punti doppi dell' $S_4$ .

Com'è noto <sup>(2)</sup>, i 10 punti doppi di una tale varietà si distribuiscono in 15 quaterne poste risp. sopra 15 piani, che sono i soli piani contenuti nella varietà; ed esistono 15 spazi (a tre dimensioni) di cui ciascuno contiene tre dei piani, mentre per ognuno dei piani stessi passano tre di quegli spazi. Oltre a ciò, ogni spazio contenente due dei piani ne contiene anche un terzo; e uno dei 15 piani, il quale non giaccia in uno dei 15 spazi, incontra questo spazio in una retta posta sopra uno dei tre piani contenuti nello spazio considerato.

Queste proprietà si invertono completamente col seguente teorema (n. 1):

*Nello spazio  $S_r$  (con  $r > 3$ ) si abbia una configurazione formata di  $x$  spazi  $S_{r-2}$  (tre qualunque dei quali non passanti per uno stesso  $S_{r-3}$ ) e di  $y$  iperpiani, tali che in ognuno degli iperpiani esistano  $n$  degli  $S_{r-2}$  e per ognuno degli  $S_{r-2}$  passino  $k$  degli iperpiani. Si suppongano inoltre soddisfatte queste due condizioni:*

<sup>(1)</sup> *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXV, sem. II, 1916, pag. 258; *Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terzo ordine*, id., pag. 367.

<sup>(2)</sup> Segre, *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXII (1887), pag. 791; *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*, ecc., Memorie della R. Accad. di Torino, serie II, vol. XXXIX (1889), pag. 3; Castelnuovo, *Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a 4 dimensioni*, Atti del R. Istituto Veneto, serie VI, vol. VI (1888), pag. 525. Cfr. pure Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa 1907, pag. 176.

(I) se due degli  $S_{r-2}$  si tagliano in un  $S_{r-3}$ , epperò giacciono in un iperpiano, questo appartenga alla configurazione, quindi contenga altri  $n - 2$  di quegli  $S_{r-2}$ ;

(II) se uno degli  $S_{r-2}$  e uno degli iperpiani non si appartengono, l' $S_{r-2}$  tagli l'iperpiano in un  $S_{r-3}$  situato in uno degli  $n$   $S_{r-2}$  contenuti nell'iperpiano.

Orbene, se, per escludere casi privi d'interesse, si suppone  $n \geq 3$ ,  $k \geq 3$  <sup>(1)</sup>, esiste una sola di siffatte configurazioni, ed è quella formata dai 15 piani di una varietà cubica con 10 punti doppi dell' $S_4$ , e dai 15 spazi (a tre dimensioni) che li contengono a tre a tre.

L'interpretazione di questo teorema nello spazio di quattro dimensioni formato dalle sfere dello spazio ordinario, conduce immediatamente (n. 2) alla notevole configurazione di 15 cerchi dello spazio, che fu per la prima volta studiata dal sig. Stephanos <sup>(2)</sup> e della quale sono così anche poste in evidenza delle proprietà semplici, e di natura interamente elementare, che servono a caratterizzarla.

Nel n. 3 si riprende l'anzidetta varietà cubica dell' $S_4$  allo scopo d'invertire alcune proprietà della configurazione formata dai suoi 10 punti doppi e dai suoi 15 piani.

1. Come nella mia prima Nota citata, i numeri  $x, y, n, k$  sono legati dalle relazioni

$$\begin{aligned} x &= n[(n-1)(k-1)+1], \\ y &= k[(n-1)(k-1)+1], \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Per  $k=1$  la configurazione si riduce ad un unico iperpiano e ad un numero qualunque di suoi  $S_{r-2}$ . Se  $k=2$ , essa è formata di due gruppi di  $n$  iperpiani ciascuno, e degli  $n^2$   $S_{r-2}$  in cui gl'iperpiani dell'un gruppo incontrano quelli dell'altro. Se  $n=1$ , la configurazione consta di un unico  $S_{r-2}$  e di un numero qualunque d'iperpiani passanti per esso. Per  $n=2$  si ha  $x=2k$ ,  $y=k^2$ , e i  $2k$   $S_{r-2}$  si distribuiscono in due gruppi  $A', A'', \dots, A^{(k)}$  e  $B', B'', \dots, B^{(k)}$ , di  $k$  spazi ciascuno, in modo che due spazi di uno stesso gruppo si tagliano in un  $S_{r-4}$ , mentre ogni spazio dell'un gruppo incontra ogni spazio dell'altro in un  $S_{r-2}$ . Ma allora le intersezioni, ad esempio, di  $A'$  e  $A''$  con  $B'$  debbono avere in comune l' $S_{r-4}$  in cui si secano  $A'$  e  $A''$ , epperò i  $2k$   $S_{r-2}$  passano tutti per un medesimo  $S_{r-4}$ . I due gruppi di  $k$   $S_{r-2}$  si ottengono dunque proiettando  $k$  generatrici di una schiera e  $k$  generatrici dell'altra schiera di una stessa quadrica a due dimensioni, da un  $S_{r-4}$  generico; mentre gli iperpiani della configurazione sono quelli che contengono, negli  $n^2$  modi possibili, due  $S_{r-2}$  dei due gruppi.

<sup>(2)</sup> *Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace*, Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. XCIII (1881), pag. 578; *Sur une configuration de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace*, id., pag. 633. Le proprietà soltanto enunciate dal sig. Stephanos furono poi dimostrate, con altre, dal signor Koenigs, *Contributions à la théorie du cercle dans l'espace*, Ann. de la Faculté des sciences de Toulouse. série I, t. II (1888), Mém. F, e dal sig. E. Cosserat, *Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace*, id., t. III (1889), Mém. E. Cfr. anche due Note del Cosserat nei Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. CVI (1888), p. 1467 e 1514, e il recentissimo libro del sig. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford 1916, p. 474 e seg.



epperò  $x > n^2$ . E, come là, si riconosce che, chiamando  $a_{ij}$  gli  $S_{r-2}$  della configurazione, si possono con essi formare il quadro

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ed i  $k-2$  quadri

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^{(i)} & a_{23}^{(i)} & \dots & a_{2n}^{(i)} \\ a_{31} & a_{32}^{(i)} & a_{33}^{(i)} & \dots & a_{3n}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(i)} & a_{n3}^{(i)} & \dots & a_{nn}^{(i)} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, k-2),$$

ciascuno dei quali ha le due proprietà: 1\*) gli  $S_{r-2}$  di ogni riga verticale, come pure quelli delle due prime orizzontali, giacciono in uno stesso iperpiano; 2\*) gli  $S_{r-2}$ , che nella terza, quarta, ...,  $n^{\text{ma}}$  orizzontale seguono risp.  $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{n1}$ , stanno risp. con questi in un iperpiano.

Si ottengono tutti gli  $S_{r-2}$  della configurazione aggiungendo ai precedenti quelli contenuti nei  $k-2$  iperpiani della configurazione che passano per  $a_{11}$  e sono diversi da  $a_{11} a_{12} \dots a_{1n}$ ,  $a_{11} a_{21} \dots a_{n1}$ .

*Gli  $S_{r-2}$  della configurazione appartengono tutti ad una (sola) ipersuperficie irriducibile d'ordine  $n$ .*

Generalizzando il ragionamento del n. 4 della detta Nota, cominciamo col dimostrare che per gli  $S_{r-2}$  del quadro (1) passa un fascio d'ipersuperficie  $F^n$  d'ordine  $n$ . Perchè una tale  $F^n$  contenga  $a_{11}$ , occorre che sia indeterminata la sua sezione con  $a_{11}$ , ciò che importa  $\binom{n+r-2}{r-2}$  condizioni lineari per  $F^n$ . Lo spazio  $a_{12}$  taglia  $a_{11}$  in un  $S_{r-3}$ ; perciò, se si richiede che  $F^n$  contenga pure  $a_{12}$ , dev'essere indeterminata l'ipersuperficie d'ordine  $n-1$  e di  $r-3$  dimensioni, residua intersezione di  $F^n$  con  $a_{12}$ , e ciò impone ad  $F^n$  (al più) altre  $\binom{n+r-3}{r-2}$  condizioni lineari. Così continuando, risulta che i successivi passaggi di  $F^n$  per  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  importano per  $F^n$  (al più)

$$\binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-3}{r-2} + \dots + \binom{r-1}{r-2} = \binom{n+r-1}{r-1} - 1$$

condizioni lineari. Similmente i successivi passaggi per  $a_{21}, a_{32}, \dots, a_{2n}$  danno (al più) altre

$$\binom{n+r-3}{r-2} + \binom{n+r-4}{r-2} + \dots + \binom{r-2}{r-2} = \binom{n+r-2}{r-1}$$

condizioni lineari; e i successivi passaggi per  $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{n1}$  (al più) altre

$$\binom{n+r-4}{r-2} + \binom{n+r-5}{r-2} + \dots + \binom{r-1}{r-2} = \binom{n+r-3}{r-1} - 1.$$

Tenendo poi conto che  $a_{3i}, a_{4i}, \dots, a_{ni}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) tagliano risp.  $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{n1}$  in un  $S_{r-3}$ , e inoltre che per  $i = 3, 4, \dots, n$  ciascuno di essi incontra in un  $S_{r-3}$  uno (solo) degli spazi  $a_{3j}, a_{4j}, \dots, a_{nj}$  ( $i \neq j$ ,  $j = 3, 4, \dots, n$ ), si conclude che i passaggi successivi per  $a_{32}, a_{42}, \dots, a_{n2}$ ; per  $a_{33}, a_{43}, \dots, a_{n3}$ ; ... impongono ad  $F^n$  altre condizioni lineari, il cui numero è al più

$$\begin{aligned} & \binom{n+r-5}{r-2} + \binom{n+r-6}{r-2} + \dots + \binom{r-2}{r-2} \\ & + \binom{n+r-6}{r-2} + \binom{n+r-7}{r-2} + \dots + \binom{r-2}{r-2} \\ & + \dots \\ & + \binom{r-1}{r-2} + \binom{r-2}{r-2} \\ & + \binom{r-2}{r-2}, \end{aligned}$$

ossia

$$\binom{n+r-4}{r-1} + \binom{n+r-5}{r-1} + \dots + \binom{r}{r-1} + \binom{r-1}{r-1}.$$

Ad  $F^n$  risultano così imposte complessivamente al più

$$\binom{n+r}{r} - 2$$

condizioni lineari. Ma il sistema lineare di tali  $F^n$  non può, evidentemente, aver dimensione superiore all'unità, quindi è un fascio.

Fissato ora un  $S_{r-2}$  qualunque della configurazione non compreso nel quadro (1), esso incontra  $n$  degli  $S_{r-2}$  del quadro in un  $S_{r-3}$ , e l'ipersuperficie del fascio passante per un punto generico di quell' $S_{r-2}$  contiene tutti gli  $S_{r-2}$  della configurazione, come subito risulta dalla considerazione dei quadri (1) e (2).

L'ipersuperficie è irriducibile, perchè, se si spezzasse in altre due  $F'$  ed  $F''$ , ad esempio  $a_{11}$  apparterebbe ad  $F'$  e non ad  $F''$ ; quindi anche  $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ , giacendo in uno stesso iperpiano con  $a_{11}$ , ma non con alcuno degli spazî  $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ , apparterebbero ad  $F'$ , il che è assurdo.

Sia  $F$  l'ipersuperficie così determinata. Se le equazioni di un suo  $S_{r-2}$  sono

$$L = 0 \quad , \quad M = 0 \quad ,$$

l'equazione di  $F$  sarà del tipo

$$L\varphi + M\psi = 0 \quad ,$$

dove  $\varphi$  e  $\psi$  sono forme di ordine  $n - 1$  nelle coordinate. Perciò ogni punto della varietà ad  $r - 4$  dimensioni e d'ordine  $(n - 1)^2$  in cui si tagliano  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$  sarà doppio per  $F$  <sup>(1)</sup>. Una tale varietà doppia di  $F$  esiste dunque in ogni  $S_{r-2}$  della configurazione. Ma, considerando un iperpiano qualunque di questa, le varietà doppie contenute ne' suoi  $n$  spazî  $S_{r-2}$  debbono appartenere agli  $S_{r-3}$  in cui gli stessi  $S_{r-2}$  si tagliano a due a due; per conseguenza ciascuna si spezza in  $n - 1$  varietà di ordine  $n - 1$ .

In conclusione, in ognuno degli iperpiani della configurazione l'ipersuperficie  $F$  possiede  $\frac{n(n-1)}{2}$  varietà doppie  $V$ , di dimensione  $r - 4$  e di ordine  $n - 1$ , situate negli  $S_{r-3}$  in cui a due a due s'incontrano gli  $n$   $S_{r-2}$  della configurazione contenuti nell'iperpiano.

Ma se per uno degli  $S_{r-2}$  della configurazione si conducono due iperpiani della medesima, una qualunque delle varietà  $V$  contenute nell' $S_{r-2}$  starà pure e in uno degli altri  $S_{r-2}$  del primo iperpiano e in uno degli altri  $S_{r-2}$  del secondo, cosicchè i tre  $S_{r-2}$  passeranno per un medesimo  $S_{r-3}$ , contrariamente ad una delle ipotesi ammesse.

L'assurdo cade soltanto supponendo  $r = 4$  e poi  $n = 3$ , il che conduce alla varietà cubica con 10 punti doppi dell' $S_4$ . Così il teorema enunciato in principio è dimostrato.

2. Il sig. Stephanos (loc. cit.) ha studiata una configurazione di 15 cerchi e 15 sfere (nello spazio ordinario), la quale presenta, tra le altre, le seguenti proprietà:

a) sopra ognuna delle sfere esistono tre dei cerchi, e per ognuno dei cerchi passano tre delle sfere;

b) se due dei cerchi stanno sopra una delle sfere, questa sfera è della configurazione, epperò contiene un terzo cerchio della medesima;

c) uno dei cerchi e una delle sfere, che non si appartengano, sono tali che il cerchio seca la sfera in due punti posti sopra uno dei tre cerchi tracciati sulla sfera.

(1) Cfr. la citata Memoria del sig. Segre, *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni*, n. 5.

Il teorema del numero precedente, applicato allo spazio di sfere, permette senz'altro di affermare che, *inversamente, la configurazione dello Stephanos è la sola composta di  $x$  cerchi (tre qualunque dei quali non passino per i medesimi due punti) e di  $y$  sfere, tali che:*

1) *su ognuna delle sfere stiano  $n$  dei cerchi, e per ognuno dei cerchi passino  $k$  delle sfere;*

2) *ogni sfera che passi per due dei cerchi appartenga alla configurazione, epperò contenga altri  $n-2$  cerchi di questa;*

3) *se uno dei cerchi e una delle sfere non si appartengono, il cerchio incontri la sfera in due punti situati sopra uno degli  $n$  cerchi esistenti su essa.*

Nell'identità che questa configurazione presenta con quella del n. 1 e con quella formata dalle 15 rette d'una superficie cubica estranee ad una bissestupla e dai 15 piani che le contengono a tre a tre, i sei sistemi di cinque cerchi ciascuno, che lo Stephanos ha chiamati *pentacicli*, corrispondono alle sei quintuple di *piani associati* considerate dal Segre e dal Castelnuovo <sup>(1)</sup>, ed ai sei sistemi di cinque rette sghembe che si possono formare con le 15 rette nominate di una superficie cubica. Si può così verificare, ad esempio, la elegante costruzione che lo Stephanos ha assegnata per il pentaciclo determinato da quattro cerchi dati <sup>(2)</sup>; ecc.

<sup>(1)</sup> Nella prima delle due Note dello Stephanos trovasi già, senza dimostrazione, il teorema relativo ai sistemi di cinque piani associati dell' $S_4$ , che fu poi stabilito, indipendentemente così da quell'autore come l'uno dall'altro, dal Segre e dal Castelnuovo nei citati lavori, e dal Segre anche nella Nota: *Alcune considerazioni elementari sulla incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*, Rend. del Circolo mat. di Palermo, t. II (1888), pag. 45.

<sup>(2)</sup> Questa costruzione si fonda sull'osservazione, dovuta al sig. Darboux [*Sur une nouvelle définition de la surface des ondes*, Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, t. XCII (1881), pag. 446], che, dati nello spazio tre cerchi  $A, B, C$ , esiste generalmente un cerchio  $K$ , ed uno solo, appoggiato in due punti a ciascuno di essi. Chiamando, col Darboux, *centro radicale* di due cerchi dello spazio il centro radicale di tutte le sfere passanti per i due cerchi, il piano di  $K$  è quello che contiene i tre centri radicali dei cerchi  $A, B, C$  presi a due a due. Il cerchio  $K$  è quindi indeterminato quando e soltanto quando i tre detti centri radicali coincidono, ossia quando e soltanto quando i tre dati cerchi sono ortogonali ad una medesima sfera.

Ora ricordiamo la costruzione data dal Segre e dal Castelnuovo per dedurre da quattro piani generici  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  di  $S_4$  il piano e ad essi associato. Si costruiscono i quattro piani  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  che secano in rette ordinatamente i piani delle terne  $\beta\gamma\delta, \alpha\gamma\delta, \alpha\beta\delta, \alpha\beta\gamma$ , e allora i quattro punti  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$  giacciono in un piano, che è appunto  $\varepsilon$ . In virtù di quanto precede, la proprietà di qui risultante per il cerchio  $E$ , che completa il pentaciclo determinato da quattro dati cerchi  $A, B, C, D$ , è dunque la seguente. Si considerano i quattro nuovi cerchi  $A', B', C', D'$  che incontrano in due punti risp. i cerchi delle quattro terne  $BCD, ACD, ABD, ABC$ , ed allora esiste un cerchio  $E$  tale che i cerchi di ciascuna delle terne  $AA'E, BB'E, CC'E, DD'E$  hanno lo stesso centro radicale. Questa proprietà trovasi enunciata nella seconda Nota dello Stephanos.

Matematica. — *Sopra una nuova definizione di terne ecc.*

Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Mi sono già occupato della definizione di *coppie, terne, ...* in altre due Note (questi Rendiconti, vol. XXV, ser. 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., pp. 405-413; 2<sup>o</sup> sem., pp. 206-207). Dò ora una nuova definizione di *terne, ...* assai più semplice della precedente, ferma restando la definizione di *coppia* quale risulta dalla seconda delle Note ora citate.

- (1)  $a, b, c \in \text{Elem} : \mathcal{O} : (a; b; c) = .$   
 $\iota [\text{Op}^* \circ f \circ \varepsilon \{ x \in \text{Elem} : \mathcal{O}_x \cdot f x = \iota((a; b) x) \cup \iota c \} ]$
- (2)  $a, b, c, d \in \text{Elem} : \mathcal{O} : (a; b; c; d) = .$   
 $\iota [\text{Op}^* \circ f \circ \varepsilon \{ x \in \text{Elem} : \mathcal{O}_x \cdot f x = \iota((a; b; c) x) \cup \iota d \} ]$
- (3) ecc.

La terna  $(a; b; c)$  è quell'operatore a sinistra che applicato ad un elemento arbitrario  $x$  produce la classe formata dai due soli elementi  $(a; b)x, c$ . Analogamente, mediante la nozione già acquisita di terna, per  $(a; b; c; d)$ . Ecc.

Dalle (1), (2), (3) risultano le ordinarie condizioni di identità:

- (1')  $(a; b; c) = (a'; b'; c') : = : a = a' . b = b' . c = c'$   
 (2')  $(a; b; c; d) = (a'; b'; c'; d') : = : a = a' . b = b' . c = c' . d = d'$   
 (3') ecc.

sottintesa l'ipotesi  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  sono elementi.

Dimostriamo, ad es., la (1'). Le due terne sono identiche *solamente quando*

$$(a; b; c)x = (a'; b'; c')x ,$$

ovvero per la (1)

$$\iota((a; b)x) \cup \iota c = \iota((a'; b')x) \cup \iota c'$$

qualunque sia l'elemento  $x$ . Ora questa, esprimendo l'identità di due classi contenenti ciascuna due soli individui, dà

(a)  $\iota((a; b)x) = \iota((a'; b')x) \quad \text{e} \quad \iota c = \iota c' ,$

ovvero

(b)  $\iota((a; b)x) = \iota c' \quad \text{e} \quad \iota((a'; b')x) = \iota c ;$

le (b) non possono essere soddisfatte per  $x$  arbitrario perchè  $\iota c'$  e  $\iota c$  sono indipendenti da  $x$ ; la (a) equivale ad

$$(a; b)x = (a'; b')x \quad \text{e} \quad c = c',$$

cioè, per la condizione già nota (cfr. loc. cit.) di identità di due coppie, ad

$$a = a' \quad \text{e} \quad b = b' \quad \text{e} \quad c = c'$$

come si era affermato.

Nelle definizioni (1), (2), ... compariscono *implicitamente* le potenze dell'operatore logico  $\iota$  che nella precedente forma di definizione (1) comparivano esplicitamente. Giova notare che con le (1), (2), ... gli enti  $(a; b; c)$ ,  $(a; b; c; d)$ , ... vengono definiti senza distinguere i casi che due o più degli elementi siano eguali, come è necessario fare per le coppie e come era stato fatto con la precedente definizione di *terna*, ... È ovvio che le due specie di definizioni danno ad  $(a; b; c)$ , ... significati diversi; sceltane una, l'altra non è ammissibile. Del resto la definizione ha come unico scopo di stabilire che *coppia*, *terna*, ... sono nomi di classi e che valgono le (1'), (2'), ...

Risulta che, ad es.,  $(a; b; c)$  è *funzione* della coppia  $((a; b); c)$  ma non è identica a tale coppia; l'identità non è ammissibile, la funzione si purchè sussista la (1').

**Fisica matematica.** — *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il Levi-Civita alcuni anni or sono si occupò<sup>(2)</sup> della attrazione newtoniana di un tubo sottile (nel quale cioè le sezioni trasversali hanno dimensioni piccole di fronte alla lunghezza del tubo), e riuscì ad assegnare, in forma notevolmente semplice, la risultante delle azioni newtoniane che una fetta elementare (porzione di tubo compresa tra due sezioni trasversali infinitamente vicine) subisce da parte di tutto il rimanente tubo, istituendo infine notevoli e varie applicazioni<sup>(3)</sup>.

(1) Nella pag. 206, 8ª linea dal basso della seconda Nota bisogna correggere un errore di stampa; ad  $\iota a \circ \iota b \circ \iota c$  si deve sostituire  $\iota a \circ \iota b \circ \iota c$ .

(2) *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile.* [Questi Rendiconti vol. XVII (1908), pp. 413-420, 535-551].

(3) *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, vol. XXXIII (1912), pp. 354-374]; *Sulle azioni meccaniche dovute ad un flusso filiforme di elettricità* [Questi Rendiconti, vol. XVIII (1909), pp. 41-50]; *Teoria asintotica delle radiazioni elettriche* [Questi Rendiconti, vol. XVIII (1909), pp. 83-93].

Le eleganti formole stabilite da Levi-Civita si prestano assai bene, e nel modo più spontaneo, alla risoluzione del problema elettrostatico che è titolo e oggetto della presente Nota.

La configurazione geometrica dell'anello si può immaginare determinata dal movimento di una sezione trasversale piana  $\tau$ , la quale pur variando (in modo continuo e mantenendosi piana) si conserva normale alla linea chiusa  $l$  descritta da un suo punto generico (p. es. il baricentro); la linea  $l$  definisce l'andamento longitudinale dell'anello.

La qualifica *sottile* sta a significare che le dimensioni di  $\tau$  sono ovunque piccole di fronte alle dimensioni longitudinali (con che si intende non solo rispetto alla lunghezza di  $l$ , ma anche rispetto al raggio di curvatura in un suo punto generico); p. es. se  $\tau$  è un cerchio di raggio costante  $a$  e la direttrice  $l$  è una circonferenza di raggio  $b$ , l'anello è un toro circolare, sottile se  $a$  è piccolo di fronte a  $b$ .

Ciò premesso, sieno:  $e$  la quantità di elettricità in equilibrio sull'anello conduttore, supposto isolato;  $\nu ds$  la quantità di elettricità contenuta sopra un pezzo, della superficie  $\sigma$  dell'anello, compresa tra due sezioni trasversali piane  $\tau$  e  $\tau'$  che limitano una fetta di spessore  $ds$  del conduttore. Allora  $\nu$  — densità elettrica corrispondente alla sezione  $\tau$  dell'anello — rimane definita dalla seguente formola

$$(I) \quad \nu = \frac{e}{\sqrt{k} \int_1 \frac{ds}{\sqrt{k}}},$$

dove

$$k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} d\tau \int_{\tau} d\tau_0 \log \frac{l}{PP_0},$$

denotando  $l$  la lunghezza della direttrice designata finora colla stessa lettera,  $P$  e  $P_0$  due generici punti di  $\tau$ ,  $d\tau$  e  $d\tau_0$  due elementi di  $\tau$  ad essi attigui. La quantità  $k$  è un puro numero, che dipende, per un assegnato anello, soltanto dalla sezione  $\tau$  cui si riferisce; essa è, in generale, variabile da sezione a sezione, cioè è funzione dell'arco  $s$  della direttrice  $l$ , contato a partire da un'origine arbitraria. In particolare, se si tratta di sezioni circolari di raggio  $a$ , è

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{l^2}{a^2} \quad (1).$$

La formola (I) mette in rilievo che la densità elettrica  $\nu$  è indipendente dai caratteri geometrici della direttrice. Influiscono invece questi sulla risultante delle forze elettriche di una generica sezione  $\tau$ : detto  $O$  il punto

(1) Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione ecc.*, loc. cit., pag. 362.

comune ad  $l$  e a  $\tau$ , si trova che detta risultante, diretta secondo la normale principale in  $O$  alla direttrice  $l$  (verso la concavità), ha un'intensità  $\Phi$  proporzionale alla curvatura  $c$  di  $l$  in  $O$  e precisamente

$$(II) \quad \Phi = \frac{e^2 c}{\left(\int_l \frac{ds}{\sqrt{k}}\right)^2}.$$

Se, in particolare, le sezioni trasversali  $\tau$  sono tutte eguali,  $k$  è costante e la (I) e la (II) divengono rispettivamente

$$v = \frac{e}{l}, \quad \Phi = \frac{k e^2 c}{l^2},$$

dalle quali si desume che l'elettricità è uniformemente distribuita tra le sezioni trasversali, mentre il valore della risultante delle forze elettriche varia da sezione a sezione colla curvatura della direttrice.

Va notato che queste conclusioni hanno un carattere « assintotico », cioè tendono a differire tanto meno dal carattere rigoroso quanto più sottile è l'anello conduttore.

1. La giustificazione delle conclusioni testè esposte è immediata.

Si consideri infatti per un momento l'anello costituito da masse quali si sieno. Sia  $\Phi ds$  la risultante delle azioni newtoniane subite da una fetta elementare di spessore  $ds$  (compresa tra una sezione  $\tau$  e una sezione vicinissima), da parte di tutto l'anello; se  $v ds$  è la quantità di materia localizzata nella fetta, e se  $\mathbf{t}$  è il vettore unitario diretto secondo la tangente in  $O$  a  $l$  (nel senso delle  $s$  crescenti), e  $\mathbf{n}$  quello diretto secondo la normale principale (nel verso della concavità) si ha <sup>(1)</sup>

$$(1) \quad \Phi = \frac{d(v^2 k)}{ds} \mathbf{t} + v^2 k c \mathbf{n}.$$

Si supponga trattarsi di masse elettriche; allora sono nulle le forze elettriche nei punti interni dell'anello, mentre sulla sua superficie  $\sigma$  — superficie di livello — le forze elettriche sono dirette normalmente ai singoli elementi superficiali ai quali si riferiscono; ne consegue

$$\Phi \times \mathbf{t} = 0.$$

Per questa dalla (1) scende

$$(2) \quad v^2 k = \text{costante},$$

(1) Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione*, ecc., loc. cit., pag. 364.



e la (1) stessa si cangia nella seguente

$$(3) \quad \Phi = v^2 k c n .$$

La costante che compare nel secondo membro della (2) va determinata in modo che la carica totale del conduttore risulti eguale a quella, che si suppone prefissata. Detta  $e$  tale carica, si deve avere

$$\int_i v ds = e ;$$

la quale condizione è soddisfatta se per la costante accennata si assume il quadrato di

$$\int_i \frac{e}{\sqrt{k}}$$

con che dalla (2) e dalla (3) si ha in definitiva

$$v = \frac{e}{\sqrt{k} \int_i \frac{ds}{\sqrt{k}}} , \quad \Phi = \frac{e^2 c}{\left( \int_i \frac{ds}{\sqrt{k}} \right)^2} n .$$

**Matematica.** — *Sulla probabilità come limite della frequenza.*

Nota di F. P. CANTELLI, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

1. Per accennare rapidamente allo scopo di questa Nota, comincio col ricorrere al solito schema dell'urna, contenente palline bianche e palline nere, che serve ad illustrare il noto teorema di Bernoulli.

Supponendo che estratta una pallina questa si rimetta nell'urna, dopo averne osservato il colore, conveniamo che, in *ogni prova*, sia costantemente eguale a  $p$  la probabilità di estrarre pallina bianca e quindi eguale a  $1 - p = q$  la probabilità di estrarre pallina nera.

Se si procede a delle estrazioni *successive* nel modo anzidetto, e se si indica con  $b_k$  il numero delle volte che, in  $k$  estrazioni, si sarà presentata pallina bianca, si realizzerà, in  $s$  prove, la successione di frequenze

$$(1) \quad \frac{b_1}{1} , \frac{b_2}{2} , \dots , \frac{b_s}{s} .$$

La questione qui studiata riguarda l'ammissione fatta da qualche autore (1), che la successione (1) al crescere di  $s$ , si comporta come se ten-

(1) Cfr. H. Bruns, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre* (B. Teubner, Leipzig und Berlin 1906), pp. 13, 14. R. de Montessus, *Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités* (Gauthier Villars, Paris 1908), pp. 1-7, 15-18. Tullio Bagni, *Teoria matematica dei fenomeni collettivi* (G. Barbera, Firenze 1915), pp. X-XII.

desse al limite  $p$ ; che, anzi, la probabilità  $p$  possa considerarsi come limite della successione (1), quando questa potesse suppersi indefinitamente prolungata.

Ora se, per precisare, si vuol ritenere che la tendenza di cui si parla sia la ordinaria tendenza ad un limite, sorge il dubbio che le fatte ammissioni possano condurre a contraddizioni nel calcolo delle probabilità. Tanto più che se si pensa, ad esempio, che la probabilità, pur supposta determinabile, della ordinaria tendenza della (1) verso  $p$  equivale, come è intuitivo e come si vedrà chiaramente in seguito, ad una probabilità relativa al verificarsi di una successione illimitata di *assegnati* eventi, viene legittimo il dubbio che essa possa riuscire infinitesima.

In questa Nota mi occupo appunto della ricerca della probabilità che la (1) tenda a  $p$ , col crescere indefinito di  $s$ ; mi pongo, anzi, da un punto di vista più generale di quello illustrato dal riportato *schema ad urna*.

2. In questo numero indico un teorema che si riferisce alla probabilità della coesistenza di una successione illimitata di eventi. Tale teorema assume, in questo scritto, importanza fondamentale per il collegamento che ne faccio con un altro teorema, che si trova dimostrato in un mio precedente lavoro <sup>(2)</sup> e che richiamo nel numero successivo; essi permetteranno di argomentare sulla probabilità ricercata.

Cominciamo dal considerare tre eventi compatibili  $i_1, i_2, i_3$  e gli eventi, rispettivamente contrari ai precedenti,  $e_1, e_2, e_3$ .

Indicando con  $p_\alpha$  la probabilità che si verifichi un evento  $\alpha$ , con  $p_{\alpha\beta\gamma}$  la probabilità che si verifichino insieme tre eventi  $\alpha, \beta, \gamma$ , si ha:

$$(2) \quad p_{i_1 e_2 e_3} + p_{i_2 e_1 e_3} + p_{i_3 e_1 e_2} + p_{e_1 i_2 i_3} + p_{e_2 i_1 i_3} + p_{e_3 i_1 i_2} + p_{i_1 i_2 i_3} + p_{e_1 e_2 e_3} = 1$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{e_1 i_2 i_3} + p_{e_1 i_2 e_3} + p_{e_1 e_2 i_3} + p_{e_1 e_2 e_3} = p_{e_1} \\ p_{e_2 i_1 i_3} + p_{e_2 i_1 e_3} + p_{e_2 e_1 i_3} + p_{e_2 e_1 e_3} = p_{e_2} \\ p_{e_3 i_1 i_2} + p_{e_3 i_1 e_2} + p_{e_3 e_1 i_2} + p_{e_3 e_1 e_2} = p_{e_3} \end{array} \right.$$

Ora, se si paragonano la (2) e le (3) si deduce, senza difficoltà,

$$(4) \quad p_{i_1 i_2 i_3} \geq 1 - (p_{e_1} + p_{e_2} + p_{e_3}).$$

In generale si dimostra che:

*La probabilità che si verifichino simultaneamente  $n$  eventi compatibili  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , non è inferiore all'unità diminuita della somma delle*

<sup>(2)</sup> Cfr. *Sulla legge dei grandi numeri*. Memorie della R. Accademia dei Lincei serie 5<sup>a</sup>, vol. XI (1916).

probabilità relative al verificarsi di ciascuno degli eventi, rispettivamente contrari ai precedenti,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  (3).

Si possono considerare delle successioni illimitate di eventi. Per una tal successione

$$(5) \quad i_1, i_2, \dots, i_n, \dots,$$

tenendo presente che si ha, per qualunque valore di  $k$ ,

$$(6) \quad p_{i_1 i_2 \dots i_k} \geq p_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}},$$

si deduce che la successione illimitata di numeri non crescenti

$$(7) \quad p_{i_1 i_2 \dots i_n}, p_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}, \dots, p_{i_1 i_2 \dots i_{n+k}}, \dots$$

tende ad un limite  $l$ .

Si è così condotti ad assumere questo limite  $l$  per la probabilità della coesistenza di tutti gli eventi della successione (5); ossia per la probabilità che non esista alcun evento, della successione (5), il quale non si verifichi.

Tale assunto non può portare ovviamente ad obiezioni teoriche e risponde al sentimento che la probabilità, empiricamente considerata, risveglia in noi.

Se ammettiamo ancora che la serie

$$(8) \quad p_{e_1} + p_{e_2} + \dots + p_{e_n} + \dots$$

sia convergente, risulta, per quanto è stato detto sopra,

$$(9) \quad l \geq 1 - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} p_{e_\alpha}.$$

3. Assumo come note (4) le definizioni di *variabile casuale*, di *valore medio di una variabile casuale* nonchè le più semplici operazioni che possono effettuarsi sulle menzionate variabili. Ciò posto, consideriamo una successione illimitata di variabili casuali *indipendenti*, nel senso del calcolo delle probabilità,

$$(10) \quad X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

e la successione di variabili casuali *dipendenti*

$$(11) \quad X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}, \dots$$

in cui è

$$(12) \quad X_{(n)} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

(3) Cfr. G. Boole, *An investigation of the laws of thought* (Macmillan and Co., London 1854), pag. 307.

(4) Loc. cit. (\*).

Ponendo, allora, quando E sia il simbolo di *valore medio*,

$$(13) \quad E(X_n) = M_n, \quad E(X_n - M_n)^2 = \sigma_{2,n}, \quad E(X_n - M_n)^4 = \sigma_{4,n},$$

è noto come si deduca:

$$(14) \quad \begin{cases} E[X_{(n)}] = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{n} = M_{(n)}, \\ E[X_{(n)} - M_{(n)}]^2 = \frac{\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2} + \dots + \sigma_{2,n}}{n^2} = \frac{\sigma_{2,(n)}}{n}, \\ E[X_{(n)} - M_{(n)}]^4 = \frac{1}{n^4} \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{4,i} + 3 \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} \sigma_{2,r} \cdot \sigma_{2,s} \right], \end{cases}$$

essendo, nell'ultima espressione,  $r \neq s$ .

L'ultima delle (14), quando si ponga

$$(15) \quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \sigma_{4,i}}{n} = \sigma_{4,(n)}, \quad \frac{\sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} \sigma_{2,r} \cdot \sigma_{2,s}}{n(n-1)} = \sigma'_{2,(n)},$$

può anche scriversi:

$$(16) \quad E[X_{(n)} - M_{(n)}]^4 = \frac{\sigma_{4,(n)}}{n^3} + 3 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{\sigma'_{2,(n)}}{n^2}.$$

Ciò premesso, supponendo che la successione  $M_{(s)}$ ,  $[s = 1, 2, \dots]$  tenda ad un limite  $M$  e posto

$$(17) \quad \lambda_n \cdot \sqrt[4]{E[X_{(n)} - M_{(n)}]^4} = \alpha_n,$$

essendo  $\lambda_n$  un numero positivo, richiamo il seguente caso particolare di un teorema già dimostrato (\*).

*Un confine superiore della probabilità che non sia*

$$(18) \quad -\alpha_n - |M_{(n)} - M| \leq M - X_{(n)} \leq \alpha_n + |M_{(n)} - M|$$

è

$$(19) \quad \frac{1}{\lambda_n^4}.$$

4. Si consideri la successione illimitata di inequaglianze:

$$(20) \quad \begin{cases} -\alpha_n - |M_{(n)} - M| \leq M - X_{(n)} \leq \alpha_n + |M_{(n)} - M| \\ \dots \\ -\alpha_{n+k} - |M_{(n+k)} - M| \leq M - X_{(n+k)} \leq \alpha_{n+k} + |M_{(n+k)} - M| \\ \dots \end{cases}$$

(\*) Loc. cit. (\*).

e si tengano presenti le formole (16), (17), (19), nonchè il teorema rappresentato dalla (9): Si deduce, senza difficoltà, che *un confine inferiore della probabilità*  $l_{(n)}$ , *relativa alla coesistenza delle ineguaglianze della successione illimitata* (20), è dato da

$$(21) \quad 1 - \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\sigma_{4,(n+i)}}{\alpha_{n+i}^4 \cdot (n+i)^3} - 3 \sum_{i=0}^{i=\infty} \left(1 - \frac{1}{n+i}\right) \frac{\sigma'_{2,(n+i)}}{\alpha_{n+i}^4 \cdot (n+i)^2}$$

se le serie rappresentate dai precedenti sommatore sono convergenti (\*).

Ora, se si suppone che  $\sigma_{4,(s)}$  e  $\sigma'_{2,(s)}$ , [ $s = 1, 2, \dots$ ] ammettano rispettivamente i limiti superiori finiti A e B e se si pone

$$(22) \quad \alpha_{n+s} = \frac{\delta}{(n+s)^{\frac{1}{s}(1-\xi)}},$$

essendo  $\delta$  e  $\xi$  due numeri positivi da determinare opportunamente, si deduce dalla (21):

$$(23) \quad l_{(n)} > 1 - \frac{A}{\delta^4} \left( \frac{1}{n^{2+\xi}} + \dots + \frac{1}{(n+k)^{2+\xi}} + \dots \right) - 3 \frac{B}{\delta^4} \left( \frac{1}{n^{1+\xi}} + \dots + \frac{1}{(n+k)^{1+\xi}} + \dots \right).$$

Perchè le serie che figurano nella (23) siano convergenti bisogna che sia  $\xi > 0$ , e se è  $\xi < 1$  sarà anche

$$(24) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_{n+s} = 0,$$

la quale condizione si renderà utile nel numero seguente.

Ancora, quando si tenga presente che si ha per  $s > 1$ , come è facile dimostrare,

$$(25) \quad \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} + \dots + \frac{1}{(n+k)^s} + \dots < \frac{2^{s-1}}{2^s - 1} \cdot \frac{1}{n^{s-1}}$$

si può scrivere, invece della (23),

$$(26) \quad l_{(n)} > 1 - \frac{A}{\delta^4} \frac{2^{1+\xi}}{2^{1+\xi} - 1} \frac{1}{n^{1+\xi}} - 3 \frac{B}{\delta^4} \frac{2^\xi}{2^\xi - 1} \frac{1}{n^\xi}.$$

5. Nelle ipotesi fatte, e quando sia pure  $0 < \xi < 1$ , è stato precedentemente dimostrato che si ha una probabilità fornita dalla (26) che le variabili casuali della successione illimitata

$$(27) \quad M - X_{(n)}, M - X_{(n+1)}, \dots, M - X_{(n+k)}, \dots,$$

(\*) È da osservare che la nota *legge dei grandi numeri* si deduce dalla probabilità relativa alla prima soltanto delle (20), prescindendo dalla *coesistenza* di quest'ultima con tutte le ineguaglianze successive.

simultaneamente considerate, assumano rispettivamente valori di intervalli la cui misura tende a zero.

E poichè si ha, per la (26) stessa,

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_{(n)} = 1$$

si può concludere, senza difficoltà, che è prossima all'unità quanto si vuole la probabilità che le variabili casuali della successione

$$(29) \quad X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}, \dots$$

assumano valori che tendano, nel senso ordinario, al limite  $M$  (\*).

6. Applico il teorema generale, precedentemente dimostrato, al caso particolare di cui al n. 1. In base ai simboli sin qui adoperati, questo caso equivale a supporre che la  $X_n$  sia una variabile casuale che possa assumere il valore 1 con probabilità  $p$  e il valore 0 con probabilità  $q = 1 - p$ , e si ha:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E(X_n) = p, & E[X_{(n)}] = p, \\ E(X_n - p)^2 = pq, & E[X_{(n)} - p]^2 = \frac{pq}{n}, \\ E(X_n - p)^4 = pq - 3p^2q^2, & E[X_{(n)} - p]^4 = 3\frac{p^2q^2}{n^2} + \frac{pq}{n^3} - \frac{6p^2q^2}{n^3}, \\ A = pq - 3p^2q^2, & B = p^2q^2. \end{array} \right.$$

Quando si faccia poi, ad es.,  $\xi = \frac{1}{2}$ , e quindi

$$(31) \quad \alpha_{n+s} = \frac{\delta}{(n+s)^{\frac{1}{8}}} = \left(\frac{n}{n+s}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \alpha_n,$$

(\*) Interessa osservare che, se invece di basare la ricerca sulle (18), (19) essa fosse stata basata sul noto teorema di Bienaymé-Tchebychef, oppure sull'espressione integrale della probabilità (Laplace) completata da un confine superiore dell'errore (A. Liapounoff), le serie da studiare sarebbero riuscite divergenti. D'altra parte può pervenirsi a confini inferiori della probabilità  $l_{(n)}$  più convenienti di quelli qui ottenuti, basandosi su teoremi che ho altrove dimostrato (6), confini dei quali qui non mi occupo per necessità di spazio. Nel caso particolare di cui mi occupo al numero seguente, pure con lo scopo di rilevare la portata della (26), può anche pervenirsi a risultati più convenienti usufruendo, insieme con le considerazioni di cui al n. 2, di teoremi, dovuti a De la Vallée-Poussin e a P. Mansion, dei quali sono date indicazioni nelle citate *Leçons* di R. de Montessus.

(6) *Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio* (Bollettino dell'Associazione degli Attuari, n. 24, Milano 1911).

risulta, in base alla (26), per la probabilità  $l_{(n)}$ , relativa alla coesistenza delle ineguaglianze della successione illimitata

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} p - \alpha_n \leq X_{(n)} \leq p + \alpha_n \\ \dots \dots \dots \\ p - \left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \alpha_n \leq X_{(n+k)} \leq p + \left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \alpha_n, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

che corrispondono alle (20),

$$(33) \quad l_{(n)} > 1 - \frac{pq}{\alpha_n^4 \cdot n} \left( 1,55 \frac{1 - 3pq}{n} + 10,26 pq \right).$$

Posto  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_n = 0,5$ ,  $n = 100$ , risulta  $l_{(n)} > 0,897$ ; posto  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_n = 0,01$ ,  $n = 1.000.000.000$ , risulta  $l_{(n)} > 0,993$ .

7. Con linguaggio fisico è lecito dire che la successione (1) del n. 1, al crescere di  $s$ , *tende* al limite  $p$ ; ma per scrivere, nel senso dell'analisi,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_s}{s} = p,$$

rimangono, dal punto di vista logico, delle lacune impossibili ad essere colmate, sulla qualcosa avrò occasione di ritornare.

Matematica. — *Sur la composition de 1<sup>ère</sup> espèce: Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition.* Nota I di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

§ 1. — INTRODUCTION.

La théorie de la composition et de la permutabilité de première espèce a d'abord été développée pour les fonctions d'ordre entier positif. Dans un récent Mémoire (1) qui étend considérablement le champ d'application de cette théorie, M.<sup>r</sup> Volterra envisage d'abord des fonctions d'ordre positif quelconque qui se composent comme des fonctions d'ordre entier. Il définit ensuite,  $f$  étant une fonction d'ordre positif, des symboles tels que  $f^{\circ}$  et  $f^{-1}$  qui peuvent être considérés comme fonctions d'ordre nul et négatif, et con-

(1) *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione.* Atti della R. Acc. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XI, fasc. IV.

sidère enfin des fractions de composition. Tous ces symboles  $\overset{*}{f}^0, \overset{*}{f}^{-1}$ , fractions de composition, sont entièrement formels, ainsi que les calculs de composition que l'on peut effectuer sur eux.

Cependant, dans une certaine mesure, ces calculs formels correspondent à des calculs effectués sur des fonctions ordinaires. C'est ainsi par exemple, que, d'après la définition même du symbole  $\overset{*}{f}^{-1}$ , dire que

$$\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\psi},$$

n'est pas autre chose que dire que  $\varphi$  est la solution de l'équation intégrale

$$(1) \quad \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\psi}.$$

Il n'en était pas moins intéressant, théoriquement, comme pratiquement, de réduire autant que possible la part de symbolisme dans la théorie des fonctions d'ordre quelconque.

J'y arrive ici, grâce à une extension très naturelle de la notion de composition. Je prouve ainsi qu'une fonction d'ordre négatif non entier est une fonction au sens ordinaire du mot, dont la composition (généralisée) avec d'autres fonctions, jouit des propriétés classiques. Dans la définition d'une fonction d'ordre nul ou entier négatif, reste forcément un élément formel; je l'ai réduit au minimum.

Comme application je résoud (§ 4) l'équation (1) quels que soient les ordres de  $f$  et de  $\psi$ , sans avoir à me préoccuper des restrictions relatives à ces ordres que l'on devait faire jusqu'à présent.

J'espère que ces recherches contribueront à montrer l'intérêt des symboles introduits, grâce à une analyse si élégante, par M.<sup>r</sup> V. Volterra.

## § 2. — LES FONCTIONS D'ORDRE RÉGULIER.

Une fonction de forme

$$f(x.y) = \frac{(y-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x.y)$$

$\alpha$  étant un nombre différent de zéro et d'un entier négatif et  $\varphi(x.x)$  étant différent de zéro <sup>(1)</sup> sera dite fonction de l'ordre régulier  $\alpha$ . Nous admettons, pour simplifier,  $\varphi(x.y)$  holomorphe dans un domaine autour d'un point de la droite  $x = y$ , domaine dans lequel nous nous maintiendrons <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Pour le moment, il suffit d'admettre que  $\varphi(x,x)$  n'est pas identiquement nul: C'est seulement pour la résolution d'une équation de forme (1), qu'il est utile de supposer  $\varphi(x,x)$  constamment différent de zéro.

<sup>(2)</sup> On peut remplacer, sans rien changer à ce qui suit, cette condition d'holomorphie de  $\varphi$  par l'existence d'un développement limité de Taylor poussé assez loin.



Soit une seconde fonction d'ordre régulier  $\beta$

$$g(x, y) = \frac{(y-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \gamma(x, y);$$

si de plus  $\alpha + \beta$  est également régulier <sup>(1)</sup>, le résultat de leur composition sera

$$\overset{\cdot}{f} \overset{\cdot}{g}(x, y) = \overline{\int_x^y f(x, \xi) g(\xi, y) d\xi}$$

la barre qui surmonte cette intégrale indiquant qu'il faut en prendre la *partie finie* <sup>(2)</sup>. L'intégrale précédente

$$\overline{\int_x^y \frac{(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x, \xi) \gamma(\xi, y) d\xi}$$

est donc égale à

$$\lim_{\substack{x_1=x \\ y_1=y}} \left\{ \int_{x_1}^{y_1} \frac{(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(x, \xi) \gamma(\xi, y) d\xi - \right. \\ \left. - A(x_1) (x_1-x)^\alpha - B(y_1) (y-y_1)^\beta \right\}$$

$x_1$  et  $y_1$  tendant indépendamment vers leur limite, A et B étant des fonctions de  $x_1$  et de  $y_1$  <sup>(3)</sup> respectivement holomorphes autour de  $x_1 = x$  et  $y_1 = y$  et choisies de façon que la limite existe; cette limite étant indépendante de choix des fonctions A et B <sup>(4)</sup>.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs la partie finie se réduit à l'intégrale ordinaire.

En s'appuyant sur le fait, facile à démontrer, que

$$\overline{\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt} = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  réguliers, et en suivant à peu près la même méthode

<sup>(1)</sup> Cette dernière hypothèse, qui n'est pas nécessaire pour que la partie finie ait un sens, est pourtant essentielle, comme on s'en rendra compte.

<sup>(2)</sup> Je renvoie, pour la définition et les propriétés de la *partie finie* aux travaux de M. Hadamard qui a introduit ce symbole (Annales de l'École Normale, 1905).

<sup>(3)</sup> On sait que l'on déduit de cette expression de la *partie finie* d'autres expressions, très commodes pour son calcul effectif.

<sup>(4)</sup> A et B dépendent aussi des variables  $x$  et  $y$ ; elles ne jouent aucun rôle, aussi ne les écrivons nous pas.

que pour les ordres positifs, on obtient les propriétés suivantes, bien connues si  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs:

I.  $\overset{*}{f}\overset{*}{g}$  est une fonction d'ordre régulier  $\alpha + \beta$ .

II. On a

$$D(\overset{*}{f}\overset{*}{g}) = D(\overset{*}{f}) \times D(\overset{*}{g})$$

en nommant  $D(\overset{*}{f})$ , diagonale de  $\overset{*}{f}$ , la fonction  $\varphi(x.x)$  (1).

III. Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont permutables on a

$$\frac{[D(\overset{*}{f})]^{1/\alpha}}{[D(\overset{*}{g})]^{1/\beta}} = \text{constante } (2).$$

Enfin on peut établir que la composition, ainsi généralisée, obéit encore aux règles de calcul de la multiplication ordinaire. On établit que

$$V. \quad \overset{*}{f}(\overset{*}{g} + \overset{*}{h}) = \overset{*}{f}\overset{*}{g} + \overset{*}{f}\overset{*}{h} \quad (3).$$

Il est un peu plus délicat d'établir que

$$VI. \quad \overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{h}$$

$\overset{*}{f}$ ,  $\overset{*}{g}$ ,  $\overset{*}{h}$  étant 3 fonctions d'ordres réguliers  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Il faut bien entendu, supposer aussi que tous les ordres des fonctions qu'il faut envisager pour effectuer les opérations indiquées dans VI sont réguliers: c'est-à-dire que  $\beta + \gamma$ ,  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha + \beta + \gamma$  sont aussi réguliers.

La proposition VI s'établit indirectement comme il suit: on l'établit d'abord dans les 3 cas particuliers suivants:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{*}{1}(\overset{*}{g}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{1}\overset{*}{g})\overset{*}{h} \\ (\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{1} = \overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{1}) \\ \overset{*}{f}(\overset{*}{1}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{f}\overset{*}{1})\overset{*}{h} \end{array} \right.$$

(1) M.<sup>r</sup> Volterra donne de  $D(f)$  une définition un peu différente, mais équivalente.

(2) Dans cette équation les puissances représentent des puissances ordinaires et non des puissances de composition. J'avais établi cette formule pour  $\alpha$  et  $\beta$  entiers positifs. M.<sup>r</sup> Volterra l'a récemment démontrée pour  $\alpha$  et  $\beta$  positifs quelconques.

(3) Pour que la fonction  $\overset{*}{g} + \overset{*}{h}$  soit de celles que nous avons définies au début du § 2, il faut que les ordres de  $g$  et  $h$  diffèrent d'un entier. Il y a lieu alors de démontrer V et c'est aisé. Si non la formule V sera la définition de  $\overset{*}{f}(\overset{*}{g} + \overset{*}{h})$ .

ce qui n'offre pas de difficultés grâce à des différentiations sous le signe intégrale et grâce à des intégrations par parties qui se font aisément malgré la présence des signes *partie finie*. On prouve ensuite que démontrer la formule (VI) revient à démontrer la suivante :

$$\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}(f(\overset{\cdot}{g}\overset{\cdot}{h})) = \overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}((\overset{\cdot}{f}\overset{\cdot}{g})\overset{\cdot}{h})$$

qui s'écrit, grâce à la première des formules (1)

$$(\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\overset{\cdot}{f})(\overset{\cdot}{g}\overset{\cdot}{h}) = ((\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\overset{\cdot}{f})\overset{\cdot}{g})\overset{\cdot}{h}$$

on a ainsi remplacé la fonction  $f$  par la fonction  $\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}f$  d'ordre  $\alpha + 1$ .

En continuant de même, on pourra se ramener au cas où la fonction  $f$  est d'ordre positif aussi grand que l'on veut. On pourra, par un procédé analogue, se ramener au cas où la fonction  $h$  est d'ordre positif. Mais la fonction  $f$  d'ordre grand peut toujours s'écrire  $f_1 \overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}$ ,  $f_1$  étant une nouvelle fonction d'ordre positif et la formule VI, grâce à la troisième des formules (1), s'écrit encore

$$f_1(\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\overset{\cdot}{g}\overset{\cdot}{h}) = (f_1(\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\overset{\cdot}{g}))\overset{\cdot}{h}$$

la fonction  $g$  est ainsi remplacée par la fonction  $\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}g$  d'ordre supérieur  $\beta + 1$ . On voit que finalement il suffit d'établir la propriété si  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sont d'ordres positifs; mais alors les signes *partie finie* disparaissent, il n'y a plus aucune difficulté.

En particulier M.<sup>r</sup> Volterra a montré (1) que, si  $\zeta$  est positif quelconque, on peut écrire

$$(2) \quad \overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\zeta = \frac{(y-x)^{\zeta-1}}{\Gamma(\zeta)}$$

avec les règles de calcul suivantes :

$$(3) \quad \overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\zeta \overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\zeta' = \overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\zeta + \zeta' \quad (\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\zeta)^n = \overset{\cdot}{\overset{\cdot}{\overset{\cdot}{I}}}\zeta^n.$$

Il n'y a aucune difficulté à étendre la définition (2) et les règles de calcul (3) si  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta + \zeta'$ ,  $\zeta^n$  sont réguliers quelconques.

Dans une prochaine Note nous définirons et étudierons les fonctions d'ordre nul ou entier négatif.

(1) Mémoire déjà cité, p. 23.

Storia della Matematica. — *Sur les nombres infinis de Fontenelle*. Nota del prof. BRANISLAV PETRONIEVICS, presentata dal Socio VERONESE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra un metodo generale per rendere selettive le stazioni radiotelegrafiche*. Nota di A. ARTOM, presentata dal Socio P. BLASERNA <sup>(1)</sup>.

I. Nei miei precedenti lavori <sup>(2)</sup> ho esposto diversi metodi per conferire alle stazioni radiotelegrafiche o radiotelefoniche ricevitrici la proprietà di essere selettive, cioè di poter ricevere chiaramente i radiotelegrammi eliminando quei disturbi che possono provenire dalla elettricità atmosferica, nonchè quelli cagionati dalle stazioni colle quali non si desidera di comunicare.

Poichè si tratta di una questione di grande interesse scientifico e tecnico, e poichè le applicazioni pratiche dei metodi da me indicati ne hanno dimostrata l'efficacia, credo utile esporre in questa Nota in qual modo alcuni dei metodi da me studiati possano coordinarsi assieme e farsi concorrere allo scopo di assicurare la indipendenza di funzionamento delle stazioni radiotelegrafiche riceventi.

Per conferire alle stazioni radiotelegrafiche un elevato grado di selettività, ho pensato fin dai primordi della radiotelegrafia (1896) di applicare oltre al concetto fisico derivante dalla teoria herziana, della sintonia od accordo elettromagnetico fra le diverse stazioni, altri concetti fisici allo scopo di fare ad esse assumere spiccate caratteristiche fisiche che meglio servano a distinguere l'una dalle altre. Ho quindi, a questo fine, tenuto presente le analogie esistenti fra i fenomeni dell'ottica e quelli delle radiazioni elettriche, ed ho basato le mie ricerche sperimentali sopra i seguenti principii fisici:

1) Il principio della dirigibilità delle onde elettriche, tanto alla trasmissione, quanto alla ricezione;

2) il principio della composizione vettoriale delle onde elettromagnetiche irradiate o ricevute;

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Politecnico di Torino, gennaio 1917.

<sup>(2)</sup> Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, A. Artom, 15 marzo 1903; 5 febbraio 1905; 17 giugno 1906; 3 gennaio 1915. Atti della Associazione Elettrotecnica 1908.

3) Il principio della composizione vettoriale dei flussi magnetici generati dalle correnti oscillatorie di trasmissione, oppure prodotti dalle correnti di ricezione.

Come corollario di questo terzo principio ho considerato il caso particolare nel quale i flussi magnetici generati dalle correnti di ricezione di due o più aerei dirigibili oppure non dirigibili, abbiano la stessa direzione ma verso contrario.

È questo il concetto che io ho applicato fin dal 1900, che ho denominato « metodo differenziale » e che la pratica ha dimostrato essere di capitale importanza per eliminare nelle ricezioni delle comunicazioni radiotelegrafiche i disturbi atmosferici e quelli provenienti dalle stazioni colle quali non si desidera comunicare.

Questi principii fisici, sopra i quali ho fondato le mie ricerche, hanno dato luogo ad importanti risultati tecnici ormai largamente consacrati nel dominio della pratica applicazione.

Credo interessante ricordare ancora come dal punto di vista matematico i concetti esposti permettano di estendere le leggi della teoria delle grandezze vettoriali ai fenomeni di trasmissione e di ricezione radiotelegrafica.

Così potrà attribuirsi alla radiazione emanante o raccolta da un aereo dirigibile una determinata direzione, ampiezza e fase e considerarla quindi come una grandezza vettoriale.

Per quanto concerne i flussi magnetici generali dalle correnti circolanti negli apparati di trasmissione o di ricezione, è ovvio che, come avviene nell'elettromagnetismo, essi possano rappresentarsi con delle grandezze vettoriali.

Altre grandezze vettoriali dovranno essere considerate per estendere la teoria dei campi vettoriali allo studio dei fenomeni radiotelegrafici e questo argomento formerà oggetto di ulteriori studi.

II. Per mettere in attuazione il primo dei concetti fisici esposti, quello della dirigibilità delle onde elettriche, ho ideato e sperimentato con successo diversi metodi che ho esposto nelle mie precedenti Note.

Di tali ricerche ricordo qui solamente che l'applicazione pratica del metodo della composizione delle onde irradiate per ottenere la dirigibilità mi ha condotto alla ideazione di forme particolari di aerei dirigibili costituiti da conduttori inclinati disposti fra loro secondo determinati angoli, perchè la composizione potesse aver luogo. — Di queste forme di aerei sono casi particolari le forme triangolari (fig. 1) e quadrangolari, la cui origine sta di per sé stessa a dimostrare la loro priorità sopra altre forme di antenne ed anche sopra quanto concerne altri concetti proposti da alcuni autori e che non sono stati seguiti da alcune notevoli pratiche applicazioni.

I risultati delle mie ricerche sperimentali sulla dirigibilità delle onde elettriche sono stati constatati col concorso della R. Marina Italiana, a

distanza di oltre cinquecento chilometri, e si è accertata la possibilità di far sì che invece di irradiare le onde elettriche sfericamente attorno all'antenna trasmittitrice, esse si irradino per contro secondo settori sferici limitati da piani verticali: alla stessa guisa di immensi proiettori di luce le stazioni dirigibili da me studiate, inviano le radiazioni elettriche a quelle stazioni radiotelegrafiche colle quali si vuol comunicare rimanendo escluse, cioè nella oscurità, quelle stazioni colle quali non si vuol comunicare.

Alla ricezione delle onde elettriche, gli stessi aerei dirigibili raccolgono esclusivamente quelle trasmissioni che provengono dalle direzioni comprese in settori che hanno per piano di simmetria il piano dell'aereo dirigibile ricevente.

Conseguenze sostanziali di queste proprietà del sistema dirigibile ricevente da me studiato, sono:

1) Un notevole grado di selettività perchè le stazioni dirigibili raccolgono in prevalenza le comunicazioni che provengono da quelle stazioni

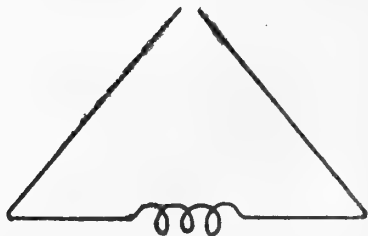


FIG. 1.

che si trovano nel settore che ha per piano di simmetria il piano dell'aereo dirigibile, escludendo le altre che non si trovino in tali condizioni di orientazione rispetto all'aereo ricevente;

2) La determinazione della posizione in cui si trova la stazione che trasmette i segnali <sup>(1)</sup>.

Queste proprietà del sistema dirigibile ricevente sono state in seguito utilizzate anche costruendo apparati fondati sul terzo principio enunciato <sup>(2)</sup> cioè sul principio della composizione dei flussi magnetici delle correnti di ricezione e sul caso particolare del metodo differenziale <sup>(3)</sup>.

III. Esposti così i criterî generali che mi guidarono nelle ricerche sperimentali, intendo nella presente Nota dimostrare come tali principî si applichino con grande vantaggio per conferire alle stazioni ricevitrice di radiotelegrafia o di radiotelefonìa un elevato grado di selettività.

<sup>(1)</sup> Lettera a S. E. Mirabello, ministro della Marina, in data 29 novembre 1905.

<sup>(2)</sup> Attestato di privativa 18 dicembre 1902 e completivi.

<sup>(3)</sup> Attestato di privativa 14 aprile 1905.

Perciò prendo come esempio una stazione ricevente dirigibile del tipo da me ideato nel quale sono disposti quattro aerei dirigibili orientati secondo diverse direzioni azimutali, e di cui le rette AA, BB, CC, DD, rappresentino le proiezioni orizzontali (fig. 3).

I circuiti di questi aerei sono anzitutto sintonizzati mediante le opportune variazioni di capacità ed induttanza, seguendo i procedimenti ordinari della tecnica radiotelegrafica. Quindi applico i principi fisici sopra esposti e precisamente quello relativo alla composizione dei flussi magnetici delle correnti di ricezione, accoppiato al caso particolare di esso, cioè al metodo differenziale.

Seguendo questi concetti ho ideato due classi di apparati: l'una per effettuare la composizione vettoriale dei flussi magnetici delle correnti di ricezione; l'altra per effettuare la composizione negativa o differenziale di essi.

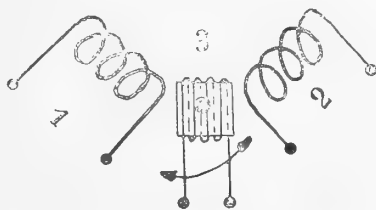


FIG. 2.

Per provocare la composizione dei flussi magnetici provenienti dagli aerei dirigibili, mi sono servito di due apparati.

Il primo rappresentato nella fig. 2 è costituito da tre rocchetti disposti angolarmente.

Il rocchetto centrale è collegato coll'apparato rivelatore di onde elettriche, ed è girevole attorno all'asse verticale di simmetria, allo scopo di riconoscere la direzione del flusso risultante dalla composizione dei flussi magnetici delle correnti circolanti in 1 e 2.

Questi avvolgimenti, sono come mostra la fig. 2, angolarmente disposti e percorsi dalle correnti provenienti dagli aerei dirigibili, pure essi facenti angolo fra loro.

Il secondo apparato da me scelto è a forma di toro <sup>(1)</sup>, o meglio di corona circolare di un disco piano (fig. 3).

Una spirale continua è avvolta sopra un nucleo a forma di toro costituito da sostanza isolante. Gli estremi degli aerei dirigibili penetrano nella spirale da punti diametralmente opposti, cosicchè i flussi delle correnti che giungono dagli aerei dirigibili occupano le due metà del toro e seguono

(<sup>1</sup>) Attestato di privativa 4 giugno 1906 e completivi.

approssimativamente le direzioni azimutali secondo le quali sono disposti gli aerei riceventi.

È evidente che se vi sono connessi due o più aerei dirigibili del tipo triangolare od analogo disposti secondo diverse direzioni azimutali ed i cui estremi siano collegati a questo avvolgimento continuo, i flussi magnetici dovuti alle correnti oscillanti raccolte dagli aerei avendo direzione, valore e fase diversa fra loro, si comporranno nell'interno del disco per dar luogo a dei flussi risultanti, orientati secondo particolari direzioni diametrali.

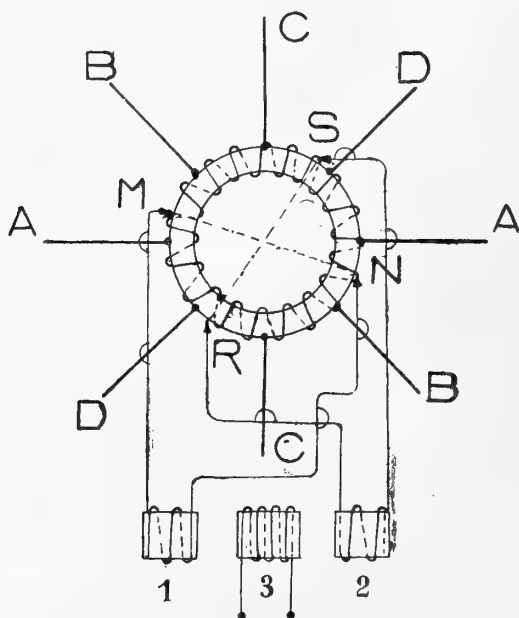


FIG. 3.

L'orientazione secondo la quale si disporranno questi flussi risultanti potrà rilevarsi facendo scorrere dei contatti metallici dentro ad una scanalatura concentrica al disco allo scopo di effettuare le comunicazioni elettriche colla spirale continua in posizioni variabili.

La direzione di un flusso risultante sarà indicata dalla posizione di quei punti opposti diametralmente pei quali la differenza di potenziale è massima, pei quali cioè è massima la corrente che da un circuito congiunto ai contatti mobili si può ricavare.

È stato dimostrato sperimentalmente e teoricamente che se si considerano due o più aerei dirigibili triangolari od analoghi collegati col toro e disposti in direzioni uniformemente distribuiti attorno all'asse verticale le



direzioni di questi piani diametrali le quali si possono individuare sulla spirale continua coincidono colla direzione da cui proviene il segnale <sup>(1)</sup>.

E così si individuerà quindi con esattezza, la direzione da cui provengono i segnali che si desidera raccogliere, e quella direzione oppure quelle direzioni dalle quali provengono i segnali disturbatori od intrusi.

Queste condizioni sperimentali corrispondono al caso pratico più generale che è quello per cui le correnti disturbatrici non provengono dalla stessa direzione, non hanno la stessa ampiezza e la stessa fase delle correnti che si desidera utilizzare per raccogliere le comunicazioni volute.

Si avrà così, per conseguenza, una prima ed efficace selezione dei segnali basata sull'impiego della dirigibilità, della sintonia e della composizione vettoriale dei flussi dovuti alle correnti di ricezione. Questa selezione si rende manifesta perchè si troveranno, movendo i contatti mobili sulla spirale torica, un piano diametrale, per esempio MN (fig. 3) pel quale si riceveranno in prevalenza le correnti che si desidera raccogliere e che si distingueranno anche per i segni convenzionali contenuti nella comunicazione che si ascolta.

Si ritroveranno inoltre, spostando una seconda coppia di contatti mobili sulla spirale torica, un piano diametrale, per esempio R S, od anche altri piani diametrali secondo i quali si riceveranno con maggiore intensità le correnti disturbatrici.

Ma tale selezione può non essere completa: essa però può essere perfezionata grandemente introducendo le correnti ricavabili dall'apparato sopra descritto per effettuare la composizione dei flussi delle correnti di ricezione, nell'apparato che realizza il metodo differenziale, come mostra la fig. 3.

Questo apparato differenziale è stato descritto nelle mie precedenti Note (3). Esso è costituito dai rocchetti 1 e 2 disposti sopra un nucleo isolante, spostabili e che portano due solenoidi di uguale oppure non uguale numero di spire, ma avvolti in senso contrario, e da un terzo avvolgimento 3 che riceve per induzione le correnti circolanti negli avvolgimenti 1 e 2.

Il rocchetto contrale 3 ha i suoi capi riuniti col circuito contenente il detector, ossia il rivelatore a gaz ionizzato od a cristalli, collegato col telefono. Questo circuito sarà pure sintonizzato colla lunghezza delle onde che si vuol ricevere.

Nel metodo che forma oggetto della presente Nota, gli estremi dell'avvolgimento 1 (fig. 3) dovranno essere collegati coi contatti mobili scorrenti sulla spirale torica e spostabili fino a ritrovare la posizione diametrale per la quale si raccolgono con maggiore intensità le comunicazioni che si desidera di ricevere.

Il rocchetto 2 è invece collegato coi contatti mobili destinati a ricevere le correnti perturbatrici.

(1) Attestato di privativa 11 aprile 1907.

Il modo di funzionare dell'apparato differenziale è chiaro.

Avvicinato, ad esempio, il rocchetto 1 al rocchetto 3, il circuito ricevitore sarà influenzato in prevalenza dalle correnti provenienti dalla stazione colla quale si desidera ricevere. Ma commiste a questa ricezione vi saranno pure, sebbene più deboli in intensità, le correnti disturbatrici.

Facendo allora agire il rocchetto 2 si indurranno nel rocchetto 3 delle forze elettromotrici dovute in prevalenza alle correnti disturbatrici, ma però dirette in senso contrario a quelle esistenti nel rocchetto 3 per l'induzione dovuta al rocchetto 1. Regolando le posizioni dei rocchetti 1 e 2 rispettivamente al rocchetto 3, si giunge — come l'esperienza ha pienamente provato — a sopprimere praticamente le correnti disturbatrici ed a ricevere invece nettamente le correnti che provengono dalla stazione colla quale si desidera comunicare.

Praticamente il rocchetto 3 è costituito da un maggior numero di spire che non i rocchetti 1 e 2, e questi ultimi sono calzati sopra di esso e completamente lo circondano per meglio assicurare il concatenamento delle linee di forza magnetica.

Nella fig. 2 sono indicati, come semplice esempio di forma costruttiva, gli apparati che possono servire alla attuazione del metodo. Ma tali apparati possono assumere forme pratiche molto diverse ed anche tali da far conseguire notevoli miglioramenti ai risultati sperimentali.

Se si considera ancora che i principi fisici sui quali si basa il metodo esposto sono di carattere generale e che in base a questi principi è possibile immaginare una grande quantità di perfezionamenti suggeriti da criteri teorici e sperimentali, è lecito ritenere che nel metodo esposto si abbia una soluzione completa della questione della eliminazione dei disturbi nelle comunicazioni radiotelegrafiche e radiotelefoniche.

Fisica. — *Sulla depolarizzazione della luce* <sup>(1)</sup>. Nota del prof. ERNESTO DRAGO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

I. Si ammette che la luce naturale sia dovuta a vibrazioni che si possono considerare come risultanti di due componenti *incoerenti* <sup>(2)</sup> polarizzate ad angolo retto e della stessa ampiezza, le quali non possono interferire perchè le loro fasi non sono eguali in ciascun istante, o almeno fra esse non si presenta una differenza di fase costante.

Nel caso di raggi polarizzati rettilineamente, che sostituiscano un raggio di luce naturale, essi hanno ampiezze continuamente variabili ed in gene-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

<sup>(2)</sup> Drude, *Précis d'optique*, Gauthier-Villars, Paris, 1911, tomo I, nota a pag. 194 e pag. 200 e tomo II, 1912, pag. 148.

rale ineguali a ciascun istante, ma i valori medî dei quadrati di tali ampiezze (intensità luminose) sono sempre eguali. Ed è perciò necessario osservare in proposito che sarebbe inesatto affermare, come in generale accade, che un raggio di luce naturale sia costituito da due raggi polarizzati ad angolo retto, perchè due tali raggi potrebbero essere costituiti da un solo raggio polarizzato rettilineamente sempre nel medesimo piano (1).

Sono note d'altra parte le condizioni alle quali devono soddisfare una serie di vibrazioni luminose successive in generale ellittiche per presentare all'osservazione i caratteri della luce naturale. Prima di tutto è necessario, come già si è detto, che le intensità *medie* delle due vibrazioni rettangolari componenti siano sempre eguali, poichè un fascio di luce naturale, indipendentemente dalla diminuzione di energia a causa della riflessione, dà in un cristallo birifrangente due fasci di raggi rifratti d'eguale intensità *media*.

Per una vibrazione, in particolare, le proiezioni su due assi rettangolari sono della forma

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \\ y = b \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \end{cases}$$

ove le lettere hanno i significati conosciuti (2). Se si considera una serie di vibrazioni dello stesso periodo, la media  $M$  delle intensità delle medesime durante un tempo brevissimo in valore assoluto, ma grandissimo relativamente al periodo, deve essere la stessa per le due componenti affinchè si abbia luce naturale e cioè:

$$M(a^2) = M(b^2),$$

e questa condizione deve essere indipendente dagli assi rettangolari predetti quando si verifica la nuova condizione:

$$M[a \cdot b \cos(\alpha - \beta)] = 0.$$

Infine, poichè i fasci luminosi  $M(a^2)$  ed  $M(b^2)$ , polarizzati ad angolo retto non devono interferire quando vengono ricondotti nel medesimo piano di polarizzazione, si deve avere la terza condizione:

$$M[a \cdot b \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] = 0.$$

Vi sono anche infiniti modi di concepire un sistema di vibrazioni successive che producono luce naturale, così nella maniera più semplice due vibrazioni rettilinee polarizzate ad angolo retto possono dare luce naturale quando le loro intensità sono in ragione inversa delle loro rispettive durate, ed analogamente due vibrazioni ellittiche possono dare anche luce naturale

(1) Chwolson, *Traité de physique*, 2ª ediz., tomo II, 4, pag. 696.

(2) Mascart, *Traité d'optique*, tomo I, 1889, pag. 541 seg.

quando sono *contrariamente polarizzate*, e risulta pure in questo caso che le loro intensità devono essere in ragione inversa delle loro rispettive durate.

Un insieme qualunque di coppie di vibrazioni *coniugate* (1) riproduce anche luce naturale, ma non è certamente necessario che le vibrazioni siano così aggruppate per coppie.

Se le vibrazioni fossero tutte rettilinee, si potrebbe supporre che si abbia sempre  $\alpha - \beta = 0$ , e le condizioni riferite si ridurrebbero allora ad

$$M(a^2) = M(b^2)$$

$$M(ab) = 0.$$

A questa combinazione si riattacca un'esperienza con la quale Dove mostra che se si fa rotare rapidamente un nicol polarizzatore illuminato da luce naturale; il fascio di luce emergente non presenta traccia di polarizzazione. Ma in proposito Airy fa notare che dal punto di vista di una teoria rigorosa l'esperienza di Dove è piuttosto un'imitazione che una riproduzione esatta della luce naturale, e conclude dalla discussione fatta in proposito che ogni raggio luminoso uscente dal polarizzatore anzidetto e creduto depolarizzato, è piuttosto dovuto ad una combinazione di due raggi polarizzati circolarmente in senso contrario e di lunghezza d'onda diversa, il periodo di rotazione del polarizzatore essendo troppo grande per rapporto al periodo delle vibrazioni luminose considerate, perchè questa specie particolare di dispersione sia facilmente apprezzabile. È noto anzi come Righi sia pervenuto a produrre un fenomeno analogo ai battimenti sonori mediante un tale raggio (2).

Ulteriori ricerche relative alla depolarizzazione della luce furono tentate da Provostaye e Desain (3), i quali nella Memoria sulla diffusione del calore riferiscono che facendo cadere normalmente ad una lamina coperta di cerussa o di zolfo bagnato un fascio di luce completamente polarizzato in un azimut qualunque, si trovano solo delle debolissime quantità di luce polarizzate nei raggi diffusi sotto gli angoli di 30° e 70°, e per conseguenza si può ammettere che con tali sostanze la depolarizzazione della luce avvenga in maniera completa o quasi completa in tutti i casi.

Umow (4), ricordando queste esperienze, asserisce che deve essere possibile una depolarizzazione cromatica della luce per diffusione, e discutendo ampiamente sulle proprietà dei corpi neri, bianchi e colorati crede di poter concludere che un corpo nero deve diffondere la luce naturale polarizzandola e la luce polarizzata senza depolarizzarla, mentre al contrario un corpo bianco deve depolarizzare la luce diffondendola, ed un corpo colorato si

(1) Mascart, loc. cit., pag. 213 e pag. 544.

(2) Cwolson, loc. cit., pag. 908.

(3) Ann. de Ch. et phys. (3), 34, 1852, pag. 220.

(4) Physikalische Zeitschrift, 1905, pag. 674.

deve comportare come un corpo nero rispetto alle radiazioni che assorbe e come un corpo bianco rispetto a quelle che riflette. Per lo scopo di verificare sperimentalmente quanto afferma, egli istituisce delle ricerche proiettando sulla superficie piana e matta delle diverse sostanze cimentate l'immagine del filamento incandescente di una lampada Nernst, e ponendo sul cammino dei raggi un nicol polarizzatore ed un prisma a visione diretta. In tal modo sulla superficie anzidetta si ottiene uno spettro la cui luce diffusa può attraversare <sup>(1)</sup> una pila di vetri ed un polariscopio di Savart, in modo che si osserva quali raggi colorati sono in tutto o in parte depolarizzati. Però, mentre la spiegazione di Umow relativa al fenomeno di depolarizzazione per diffusione non sembra abbastanza convincente, d'altra parte il metodo di ricerca non può essere certamente abbastanza sensibile, data la debolissima intensità che devono avere i colori dello spettro formato dalla luce della lampada Nernst, per cui forse non potrebbero mettersi in evidenza le frangie con il polariscopio di Savart quando queste si fossero formate.

Ulteriormente ancora Liesegang <sup>(2)</sup> afferma di riuscire a depolarizzare la luce nella maniera seguente.

Un fascio di luce polarizzata rettilineamente viene scomposto in due fasci di eguale intensità (uno riflesso, l'altro rifratto) per mezzo di una pila di vetri, che disposta a 45° sulla direzione del fascio predetto, lascia prendere al fascio riflesso un cammino parallelo a quello del raggio incidente mediante due specchi piani opportunamente disposti; e quindi passa senza alcuna perdita attraverso una seconda pila di vetri disposta sotto l'angolo di polarizzazione. Il fascio rifratto invece per mezzo di un terzo specchio piano va a riflettersi totalmente su di una faccia della seconda pila predetta, ed in tal maniera un analizzatore riceve due fasci di luce polarizzati in piani ortogonali e di eguale intensità media, i quali perciò si comportano componendosi come luce naturale.

Come si vede la presente depolarizzazione si ottiene con tre specchi piani e due pile di vetri, ma l'autore non dice se fa le esperienze con luce monocromatica e non adopera il polariscopio di Savart, ma un nicol analizzatore per esaminare se la luce è depolarizzata; per la qual cosa non si può giudicare fino a qual limite ed in che maniera la luce venga depolarizzata.

II. Le mie esperienze sulla depolarizzazione della luce mediante lamine di mica  $\frac{\lambda}{4}$  furono iniziate in occasione di alcune ricerche di elettroottica, e

<sup>(1)</sup> Un metodo spesso impiegato per determinare la percentuale della luce polarizzata consiste appunto nel compensarla completamente attraverso una pila di vetri opportunamente orientata. Vedi Wood, *Optique physique*, vol. I, 1913, pag. 360 e vol. II, 1914, pag. 22.

<sup>(2)</sup> Physik. Zeitschr., 1912, pag. 1055.

ne esposi i risultati preliminari al Congresso di Fisica che ebbe luogo a Roma <sup>(1)</sup> nello scorso marzo. Tali esperienze sono state ora continuate nel modo seguente. Un fascio di luce solare penetra in una camera oscura mediante un portalucente, passa attraverso una pila di tre vetri colorati in rosso <sup>(2)</sup>, poi attraverso un foro circolare di 9 mm. praticato in uno schermo di cartone nero matto, collocato a 27 cm. di distanza dal coperchio forato del portalucente. Il fascio di luce rossa, dopo avere attraversato quindi un nicol polarizzatore, situato a 13 cm. di distanza dal detto schermo ed avente il piano di vibrazione <sup>(3)</sup> disposto a 45° rispetto al piano dell'orizzonte; investe ancora la parte centrale di una lente biconvessa di 22 cm. di distanza focale, opportunamente diaframmata e collocata ad 80 cm. di distanza dal nicol. Così emergendo dalla lente, ed a 44 cm. di distanza dalla medesima, il fascio cade sopra una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$  <sup>(4)</sup> disposta verticalmente ed orientata nel suo piano in maniera che i suoi piani di vibrazione formino angoli di 45° con il piano di vibrazione della luce incidente. Il fascio di luce riflessa dalla lamina passa quindi attraverso la parte centrale di una seconda lente biconvessa di 22 cm. di distanza focale, anche essa convenientemente diaframmata, e può essere osservato mediante un nicol analizzatore ed una seconda mica  $\frac{\lambda}{4}$  (tabella <sup>(5)</sup> di E. Mach), o meglio ancora con un polariscopio di Savart che, come è noto, può svelare quasi 1 % di luce polarizzata. La prima lamina di mica circolare e di cm. 3,5 di diametro è collocata in un piccolo telaio d'ottone annerito che può essere posto in rotazione attorno ad un asse orizzontale lavorato in un sostegno metallico, convenientemente adattato nel centro di una bussola d'inclinazione nel posto dove ordinariamente sta sospeso l'ago magnetico. Dopo aver livellato tale apparecchio ed esaurito tutte le prove preliminari per avere i fasci incidente e riflesso nel piano orizzontale, si osserva il fascio riflesso dalla parte centrale della lamina di mica e si trova, che facendo variare l'angolo d'incidenza, tale fascio in generale è parzialmente polarizzato rettilineamente, ma la parte di luce polarizzata va gradatamente diminuendo con l'angolo d'incidenza

<sup>(1)</sup> Nuovo Cimento, marzo-aprile 1916, pag. VI.

<sup>(2)</sup> Tre vetri mi basarono per diminuire i fenomeni di abbagliamento. Furono esaminati allo spettroscopio e scelti in maniera tale che lasciassero passare soltanto i raggi rossi.

<sup>(3)</sup> A proposito della confusione che suole farsi tra piano di vibrazione e piano di polarizzazione, vedi Wood, loc. cit., vol. I, pag. 351.

<sup>(4)</sup> La lamina di mica fu scelta tra quelle che esistono nel Gabinetto di Fisica del Liceo Spedalieri di Catania. Il medio spessore di essa, misurato accuratamente con lo sferometro di Perrin, è di mm. 0,036.

<sup>(5)</sup> Chwolson, loc. cit., pag. 906.

finchè questo non abbia raggiunto un valore di  $8^\circ$  o meno, nel quale caso la luce è completamente depolarizzata, perchè non si osservano in nessun modo le frangie nel polariscopio. Facendo allora rotare la lamina di mica nel suo piano verticale, si trova che la *depolarizzazione massima ha luogo soltanto quattro volte in una rotazione completa*, e cioè quando, come già si è detto, i piani di vibrazione della lamina formano angolo di  $45^\circ$  con il piano di vibrazione della luce incidente, mentre negli altri casi si ha luce parzialmente polarizzata rettilineamente, e la parte polarizzata diviene massima quando l'uno o l'altro dei piani di vibrazione della luce nella mica coincide con il piano di vibrazione della luce incidente.

Io credo che del fenomeno descritto possa darsi spiegazione analoga a quella che si dà degli anelli di Newton.

Infatti, quando si fa cadere sopra una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$  un fascio di luce polarizzata rettilineamente con il piano di vibrazione a  $45^\circ$  sui piani di vibrazione della luce nella lamina, esso si scinde in due fasci, di cui uno si riflette sulla faccia stessa d'entrata della lamina, l'altro invece attraversando la medesima si polarizza circolarmente; e mentre una parte di esso viene trasmessa ed assorbita da un dischetto di carta nera matta posto dietro la lamina, un'altra parte riflettendosi sulla pagina interna della faccia d'uscita ritorna ad emergere dall'anzidetta faccia d'entrata. Ma poichè ciascuna vibrazione di quest'ultima parte di luce ha così subito quasi <sup>(1)</sup> una differenza di cammino  $\frac{\lambda}{2}$  rispetto a ciascuna vibrazione di ogni raggio del primo fascio luminoso riflesso, essa risulta costituita da luce polarizzata rettilineamente, ma con il piano di vibrazione a  $90^\circ$  rispetto al piano di vibrazione della luce riflessa soltanto dalla faccia d'entrata della lamina. Essendo intanto la sorgente luminosa abbastanza estesa, i fasci anzidetti di luce sono *incoerenti* <sup>(2)</sup>, e d'altra parte poichè il potere riflettente varia con l'angolo d'incidenza, è facile comprendere come a partire da un determinato valore di tale angolo i due fasci *incoerenti*, polarizzati in piani ortogonali, possano conseguire la stessa intensità *media*, ed in tal modo restino verificate tutte le condizioni, perchè essi si comportino insieme come luce naturale.

III. Esperienze analoghe a quelle già descritte sono state anche fatte per vedere se sia possibile ottenere, mediante la stessa lamina di mica, una depolarizzazione della luce polarizzata circolarmente.

Per tale scopo di seguito al nicol polarizzatore è disposta con ogni cura una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$  con l'asse verticale, in maniera che la luce rossa da

(1) Rigorosamente si avrebbe una differenza esatta  $\frac{\lambda}{2}$  per l'incidenza normale.

(2) Vedi Drude, loc. cit., tomo I, pag. 211, n. 17.

essa emergente sia polarizzata circolarmente. Analizzando quindi nella maniera già descritta la luce riflessa dalla lamina depolarizzatrice, si constata che quando l'angolo d'incidenza di essa è di circa  $8^\circ$  o meno, come precedentemente, la luce è quasi completamente depolarizzata, poichè le frangie o non si osservano, o in certe posizioni si vedono debolmente movendo il polariscopio avanti l'occhio. Però a differenza del caso precedente, in cui la luce incidente è polarizzata rettilineamente, *la depolarizzazione della luce polarizzata circolarmente ha luogo sempre comunque si faccia girare la lamina di mica nel suo piano verticale.*

Del modo, come avviene ora, la depolarizzazione di luce polarizzata circolarmente si può dare la seguente spiegazione. Il fascio incidente al solito si decompone in due nuovi fasci di cui uno viene riflesso dalla faccia d'entrata della lamina, mentre l'altro viene in parte trasmesso ed in parte riflesso dalla pagina interna della faccia d'uscita. Quest'ultima parte di luce riflessa, ritornando ad attraversare nuovamente la lamina emerge polarizzata circolarmente dalla suddetta faccia d'entrata, ma le sue vibrazioni hanno senso contrario a quelle che costituiscono la luce soltanto riflessa dalla faccia d'entrata della lamina. Ciò succede sempre <sup>(1)</sup> comunque si faccia rotare la lamina di mica depolarizzatrice nel suo piano verticale. E quindi nei raggi di luce totalmente rinvii dalla predetta lamina si hanno vibrazioni circolari di senso contrario e di egual periodo che componendosi dovrebbero dare vibrazioni risultanti rettilinee. Ma poichè tali raggi sono *incoerenti*, la differenza di fase tra di essi è variabile e cambia perciò continuamente l'azimut del movimento rettilineo risultante in maniera che la luce appare depolarizzata <sup>(2)</sup>.

Per ragioni facili a comprendersi è ovvio avvertire intanto che la realizzazione di questa esperienza richiede la massima cura, ogni piccolo spostamento accidentale di qualsiasi parte dell'apparecchio dando luogo ad osservazione di frangie nel polariscopio. Così pure l'asse orizzontale attorno al quale ruota la mica depolarizzatrice deve essere lavorato con precisione e disposto in maniera che la rotazione della lamina avvenga sempre nel medesimo piano verticale.

IV. Resta ancora a vedere se può aver luogo una depolarizzazione della luce polarizzata ellitticamente. E perciò di seguito al solito nicol polarizzatore si dispone una lamina di mica  $\frac{\lambda}{4}$ , il cui asse forma un angolo di circa  $20^\circ$  con il piano di vibrazione della luce nel nicol. Osservando in tal modo come precedentemente la luce riflessa dalla lamina di mica depola-

(1) Cwolson, loc. cit., pag. 905.

(2) Vedi in proposito: Bouasse, *Cours de physique*, quatrième partie: *Optique*, pag. 266 e seg. (Interférences des circulaires).



rizzatrice, si vede che essa risulta quasi completamente depolarizzata soltanto quando gli assi delle due lamine (polarizzatrice e depolarizzatrice) sono pressochè paralleli o perpendicolari e l'angolo d'incidenza ha il valore già riferito negli altri casi.

Facendo poi rotare la lamina di mica depolarizzatrice nel suo piano, nelle altre posizioni si osserva luce parzialmente polarizzata ellitticamente.

Del fenomeno può darsi la seguente spiegazione.

Il fascio di luce incidente polarizzato ellitticamente, cadendo sulla lamina di mica si scinde in due nuovi fasci, di cui uno si riflette in parte nella solita maniera sulla faccia d'entrata della lamina, i semiassi dell'ellisse essendo eguali alle ampiezze delle due vibrazioni rettilinee ortogonali che danno luogo alla vibrazione ellittica, perchè la lamina di mica ha lo spessore  $\frac{\lambda}{4}$ ; l'altro fascio invece attraversa la lamina e giungendo sulla pagina interna della faccia d'uscita in parte si riflette e ritorna ad attraversare la lamina, in parte esce e viene assorbito dalla carta nera posta dietro la lamina stessa. La parte anzidetta di luce che si riflette sulla pagina interna della faccia d'uscita riesce polarizzata rettilineamente soltanto quando i due azimut della lamina depolarizzatrice hanno le stesse direzioni di quelli della lamina polarizzatrice (1), ed allora ritornando ad attraversare la lamina  $\frac{\lambda}{4}$  viene di nuovo polarizzata ellitticamente; ma le vibrazioni ellittiche dei suoi raggi sono di senso contrario a quelle che costituiscono la luce già riflessa dalla faccia d'entrata della lamina (2). Per il valore dell'angolo d'incidenza non superiore ad 8° circa emergono quindi da quest'ultima faccia due fasci di raggi luminosi con eguali intensità medie e le cui vibrazioni ellittiche eguali, di senso contrario e ad assi paralleli sono perciò *contrariamente polarizzate* e si compongono in maniera da costituire luce naturale (3).

Si comprende chiaramente che se i due azimut delle lamine di mica predette invece non hanno le stesse direzioni, non è possibile ottenere le due vibrazioni *contrariamente polarizzate*, e perciò la luce rinviata dalla lamina depolarizzatrice è parzialmente polarizzata ellitticamente.

V. Da tutto quanto ho esposto appare evidentemente che il fenomeno della depolarizzazione della luce non deve essere soltanto presentato dalla mica, ma da qualunque lamina  $\frac{\lambda}{4}$  di sostanza birifrangente e che d'altra parte si devono avere risultati identici a quelli ottenuti adoperando lamine

(1) Cwolson, loc. cit., pag. 905.

(2) Con considerazioni elementari è facile convincersi che non alterano assolutamente i risultati di tutte le mie ricerche l'eventuale cambiamento di fase nella riflessione della luce ed il ritorno dei raggi. Vedi Mascart, loc. cit., pag. 244, n. 177.

(3) Mascart, loc. cit., pag. 236, n. 173; pp. 544 e 546, nn. 328 e 330.

di un numero dispari qualunque di quarti d'onda, mentre non si deve avere depolarizzazione con lamine di spessore diverso. Ciò mi vien confermato da esperienze fatte rispettivamente con due lamine di mica, di cui una ha lo spessore di  $\frac{19}{4}\lambda$ , mentre l'altra ha lo spessore superiore a  $\frac{\lambda}{4}$  (0,055 mm.). La prima soltanto depolarizza la luce (1).

I risultati delle mie ricerche danno conferma sperimentale della possibilità di depolarizzare la luce dovuta a vibrazioni di forma qualsiasi, esse saranno continuate appena potranno esser messi a mia disposizione nuovi mezzi di investigazione (2).

Geofisica. — *Rilevamenti di anomalie magnetiche nei dintorni di Roma. I: Osservazioni lungo la via Appia antica.* Nota di A. PALAGI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. — È noto che le regioni di costituzione vulcanica, che in Italia sono pur così numerose e vaste, presentano anomalie tanto complesse dal punto di vista del loro studio magnetico, da renderne spesso assai difficile o addirittura impossibile la rappresentazione grafica per curve isoanomale, soprattutto a causa della loro estrema variabilità e capricciosità. Studi teorici sviluppati di recente, specialmente dal Piltchikoff (3), dal Passalsky (4) e dal Carlheim-Gyllensköld (5) hanno infatti chiarito che in regioni fortemente anomale, come, p. es., quelle di Kursk e di Kriwoi-Rog in Russia, le variazioni nel tempo del vettore risultante dal campo terrestre normale e da quello anomalo possono assumere valori e forme nel loro andamento affatto diversi da quelli normali, e fortemente diversi tra loro per punti posti anche molto vicini. Inoltre le zone vulcaniche italiane hanno questo carattere, di presentarsi senza contorni netti, e diffuse in altri terreni quasi mai normali dal punto di vista magnetico; onde un rilevamento eseguito tutto all'intorno o non è possibile, o non ci dà indicazioni sufficienti per stabilire l'entità

(1) Furono eseguite anche esperienze con raggi luminosi di altri colori, i quali si ottenevano proiettando le diverse parti dello spettro solare sul foro dello schermo in maniera che nel nicol polarizzatore entrasse un fascio di luce monocromatica. Si osservava allora depolarizzazione completa con i raggi rossi. Come era da aspettarsi, anche esperienze fatte con luce bianca mostrarono un'imperfetta depolarizzazione.

(2) Un apparecchio per depolarizzare la luce sarà fatto costruire da me con ogni precisione quando sarà possibile trovare un tecnico disposto ad assumerne la costruzione, ciò che per il momento non è facile.

(3) M. N. Piltchikoff, *Sur les variations périodiques des éléments du magnétisme terrestre dans les regions anormales* (Congrès intern. de Météorol. à Paris, sept. 1900).

(4) P. T. Passalsky, *Sur l'étude de la distribution du magnétisme à la surface du globe terrestre* (Boll. Università imp. di Odessa, B. Weinberg, 1901, pp. 1-547).

(5) O. Carlheim-Gyllensköld, *De l'influence des minerais de fer dans l'écorce terrestre sur les perturbations magnétiques*, (Arkiv för Matematik, etc., Svenka Vetenskapsakademien, Bd. 11, 1916).

ed il carattere delle anomalie che trovansi nel loro ambito; mentre le serie di misure eseguite nel loro interno, o richiedono un tempo enorme se condotte minuziosamente, ovvero non hanno senso se prese in punti distanziati e slegati tra loro <sup>(1)</sup>. Soltanto in alcuni speciali casi di anomalie di poca entità, si è potuto arrivare al tracciamento delle cartine corrispondenti, come, p. es., nei dintorni di Torino e Sestola <sup>(2)</sup>. Per l'Agro Romano tuttavia risulta dagli studi del Keller e del Folgheraiter che le anomalie più forti sono prodotte solo da alcune specie di rocce eruttive, quali la lava, la pozzolana ed il tufo litoide; e che ad ogni modo l'influenza loro all'esterno va decrescendo molto rapidamente con la distanza e con l'altezza al di sopra del suolo; talchè, anche secondo la teoria, le variazioni nel tempo del vettore magnetico risultante non vi dovrebbero essere in generale tanto anomale, come nelle suddette località della Russia (ove esse sono bene spiegabili per la presenza nel sottosuolo di potenti giacimenti ferriferi); e quindi non dovrebbero opporre molto ostacolo ad un rilevamento che fosse tentato con altrettanta pazienza quanta ne impiegò il Passalsky intorno a Kriwoi-Rog, ovvero seguendo i criteri già esposti dal Palazzo, p. es., per le anomalie di Viterbo, Castel del Piano, Cori, Melfi ecc. <sup>(3)</sup>, ed adottando poi metodi e mezzi variamente opportuni a seconda del genere delle anomalie stesse.

2. — Nell'intento precisamente di vedere fino a quale grado di minutezza si avrebbe a spingere uno studio di questo genere per la regione Laziale, nell'inverno 1916 volli intraprendere una duplice serie di misure della intensità magnetica orizzontale in quei terreni dei dintorni di Roma, che sono da considerare gli uni tra i più, e gli altri tra i meno anomali, scegliendo (dopo un opportuno esame della modernissima carta geologica di Roma del Ten. gen. Verri, e della Guida itineraria delle principali rocce magnetiche laziali del Keller) tra i primi, quelli della zona della via Appia antica che sono intorno a Capo di Bove (tra il II ed il IV Km. della via stessa); e tra i secondi, quelli a NW di Roma, alla destra del Tevere intorno alla collina della Farnesina e della villa Crescimbene, già scelti da altri come stazioni normali per Roma. Dalla cortesia del direttore del R. Ufficio Meteorologico di Roma, prof. L. Palazzo, ebbi a disposizione per le mie misure alcuni magnetometri da campo, tra cui scelsi ed usai essenzialmente il variometro

<sup>(1)</sup> Un'idea delle difficoltà che presentano lavori siffatti, si può ricavare dagli studi seguenti: F. Keller e G. Folgheraiter, *Frammenti concernenti la Geofisica dei pressi di Roma* (Roma, 1895-1904); L. Palazzo, *Carte magnétique de la Sicilie* (Terr. Magn., June 1889, pag. 87); Oddone e Franchi, *Sul magnetismo di monte* (Ann. Uff. Centr. Meteor. e Geod., vol. XII, 1890, parte 1<sup>a</sup>, pag. 135, Roma, 1893).

<sup>(2)</sup> D. Boddaert, *Misure magnetiche nei dintorni di Torino* (Mem. R. Acc. Scienze di Torino, 1906-07 e 1909); D. Pacini, *Sulla variazione locale di H nei dintorni di Sestola (Modena)* (Ann. Uff. Centr. Met., vol. XXX, parte 1<sup>a</sup>, 1908).

<sup>(3)</sup> L. Palazzo, *Misure magnetiche eseguite in Italia nel 1891 e contribuzioni allo studio delle anomalie nei terreni vulcanici* (Rend. Acc. Lincei, 2<sup>o</sup> sem., 1899, pag. 22).

Kohlrausch a 4 magneti deviatori (già usato dal Pacini a Sestola) ed il magnetometro da viaggio del Palazzo stesso.

L'uno <sup>(1)</sup>, fondato come è noto, sul principio *delle deviazioni*, permette di avere le variazioni relative di H assai rapidamente da punto a punto, con l'applicazione della formola semplificata:

$$\frac{H_2 - H_1}{H_1} = \frac{\text{tg } \varphi}{4A} (n_2 - n_1) + a(t_1 - t_2),$$

ove  $n_2 - n_1$  = differenza di lettura in parti di scala fornita dall'apparecchio nelle due località corrispondenti ai valori  $H_2$  ed  $H_1$ , dell'intensità orizzontale;  $\frac{\text{tg } \varphi}{4A}$  = coefficiente costante di riduzione;  $t_2$  e  $t_1$  = temperature dei magneti deflettenti nelle relative misure; ed  $a$  = coefficiente termico dell'apparecchio. L'altro poi <sup>(2)</sup>, fondato sul principio *delle oscillazioni*, permette di avere le variazioni relative di H con la massima precisione, nelle stazioni ove le misure possano essere fatte con tutta tranquillità, applicando l'altra formola:

$$\frac{H_2}{H_1} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2 \left\{ 1 + (a + 2\alpha)(t_2 - t_1) \right\},$$

ove  $T_2$  e  $T_1$  = durate d'oscillazione del magnete collimatore nelle due località corrispondenti ad  $H_2$  ed  $H_1$ ;  $t_2$  e  $t_1$  sono le relative temperature del magnete;  $a$  il coefficiente termico del magnete stesso ed  $\alpha$  è il coefficiente di dilatazione termica dell'acciaio = 0,000012.

Con opportune misure preliminari eseguite di notte nel R. Ufficio Meteorologico, potei stabilire il valore dei coefficienti termici dei due apparecchi; essi mi risultarono rispettivamente eguali a 0,000724 e 0,00046. Mi portai quindi sulla via Appia antica e sulla Farnesina avendo ben cura di fissare i punti di osservazione in modo da poterli ritrovare con precisione, e di usare gli strumenti sempre allo stesso modo, cioè sullo stesso treppiede, e sempre all'incirca alla stessa altezza dal suolo, presa però abbastanza grande, sì da poter eliminare la maggior parte delle perturbazioni, prodotte dalle rocce più particolarmente dotate di punti distinti (altezza = m. 1,20-1,25 pel magnete rispetto al suolo). I risultati di queste mie misure saranno pubblicati per disteso, prossimamente in una Memoria degli Annali dell'Ufficio di Meteorologia; qui mi limito a riportarne le tabelle numeriche e le conclusioni principali <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> F. Kohlrausch, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. I, pag. 491 e segg.

<sup>(2)</sup> L. Palazzo, *Un piccolo magnetometro da viaggio per lo studio delle perturbazioni magnetiche locali* (Ann. Uff. centr. met., vol. XV, parte I, pag. 315, 1893).

<sup>(3)</sup> La Memoria che pubblicherò in seguito, è uno studio abbastanza completo sull'argomento, e perciò conterrà un breve resoconto di tutte le monografie ed articoli scritti finora sulle anomalie magnetiche italiane e specialmente laziali, un rapido riassunto delle teorie matematiche relative, un cenno critico sugli strumenti più atti per questo genere di studio, con particolari considerazioni sugli apparecchi da me usati, ed uno schema di classificazione dei tipi più importanti d'anomalie. Infine in due tavole verrà anche rappresentato graficamente il rilevamento delle zone della via Appia antica su cui ho fatto le misure.

TABELLA I.

Valori del rapporto  $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$  lungo la via Appia antica, dal II al IV km, in linea mediana [Apparecchio usato: variometro del Kohlrausch; lettura diretta =  $(n' - n)$  in decimi di mm.;  $H_2$  = intensità orizzontale nel punto indicato;  $H_1$  = intensità orizzontale alla Farnesina, assunta come normale per Roma].

N.º	$\frac{n' - n}{2}$	$\frac{H_2 - H_1}{H_1}$	POSIZIONE DELLE STAZIONI
1	-- 13	-- 0,0013	A 30 m. a sud dell'orlo nord del muro che parte dal bivio Pignatelli.
2	+ 308	+ 0,0297	A 10 m. a sud del punto precedente.
3	+ 107	+ 0,0103	" " " "
4	+ 20	+ 0,0019	" " " "
5	-- 39	-- 0,0038	" " " "
6	-- 103	-- 0,0099	" " " "
7	-- 240	-- 0,0232	Segue l'osteria n. 36.
8	-- 131	-- 0,0127	A 30 m. a sud del punto 6.
9	-- 62	-- 0,0060	A 10 m. " " precedente.
10	-- 328	-- 0,0317	" " " "
11	-- 301	-- 0,0291	" " " "
12	+ 33	+ 0,0032	A 40 m. a sud del braccio sud dell'ingresso al n. 37 (Vigna Ebrei).
13	-- 103	-- 0,0099	A 10 m. a sud del punto precedente.
14	+ 16	+ 0,0015	" " " "
15	-- 5	-- 0,0005	" " " "
16	-- 12	-- 0,0012	Segue villa n. 39.
17	+ 98	+ 0,0095	A 20 m. a nord del principio del selciato di S. Sebastiano.
18	+ 142	+ 0,0137	A 10 m. a sud del punto precedente.
19	+ 68	+ 0,0063	" " " "
20	+ 43	+ 0,0042	Segue piazzale S. Sebastiano.
21	+ 357	+ 0,0345	A 10 m. a sud dell'orlo sud del selciato di S. Sebastiano
22	+ 280	+ 0,0270	A 10 m. a sud del punto precedente.
23	+ 257	+ 0,0248	" " " "
24	+ 256	+ 0,0247	" " " "
25	+ 208	+ 0,0201	Segue vicolo della Basilica.
26	+ 137	+ 0,0132	A 20 m. a sud dell'orlo sud del cancello della casetta rossa.
27	+ 22	+ 0,0021	A 10 m. a sud del punto precedente.
28	+ 8	+ 0,0008	A 22 m. a sud dell'orlo sud del cancello della villa Grandi.
29	+ 13	+ 0,0013	A 10 m. a sud del punto precedente.
30	+ 1	+ 0,0001	" " " "
31	-- 7	-- 0,0007	" " " "
32	-- 59	-- 0,0057	" " " "
33	-- 35	-- 0,0034	" " " "
34	-- 15	-- 0,0014	" " " "
35	-- 91	-- 0,0088	" " " "
36	-- 141	-- 0,0136	" " " "
37	-- 65	-- 0,0063	Segue tabaccheria Costa e case.
			A 12 m. a sud del 1º pilastro della fila che sale alla tomba di Cecilia Metella.

(Segue TABELLA I).

N.º	$\frac{n' - n}{2}$	$\frac{H_2 - H_1}{H_1}$	POSIZIONE DELLE STAZIONI
38	- 110	- 0,0106	A 10 m. a sud del punto precedente.
39	- 174	- 0,0168	" " " "
40	- 116	- 0,0112	" " " "
41	- 81	- 0,0078	" " " "
42	- 154	- 0,0149	" " " "
43	- 76	- 0,0073	" " " "
44	- 31	- 0,0030	" " " "
45	- 126	- 0,0122	A 20 m. a sud del punto 44.
46	- 81	- 0,0078	A 10 m. " " precedente.
47	- 129	- 0,0125	" " " "
48	- 128	- 0,0124	" " " "
49	- 186	- 0,0180	" " " "
50	- 264	- 0,0255	" " " "
51	- 79	- 0,0076	" " " "
52	- 427	- 0,0412	" " " "
53	- 155	- 0,0150	" " " "
54	- 110	- 0,0106	" " " "
55	- 107	- 0,0103	A m. 31,75 a sud del bordo sud della III pietra chilometrica della via.
56	+ 255	+ 0,0246	A 10 m. a sud del punto precedente.
57	+ 6	+ 0,0006	" " " "
58	+ 123	+ 0,0119	" " " "
59	+ 108	+ 0,0104	" " " "
60	+ 13	+ 0,0013	" " " "
61	- 135	- 0,0130	A 30 m. a nord del palo telegrafico posto al termine del muro che viene dalla tomba di C. Metella.
62	- 50	- 0,0048	A 10 m. a sud del punto precedente.
63	- 75	- 0,0072	" " " "
64	- 142	- 0,0137	A 40 m. a nord del bordo nord del cancello della casa n. 56.
65	- 85	- 0,0082	A 10 m. a sud del punto precedente.
66	+ 182	+ 0,0176	" " " "
67	- 62	- 0,0060	" " " "
68	- 67	- 0,0065	A 90 m. a nord dell'orlo nord del rudero con la lapide Secchi.
69	- 38	- 0,0037	A 10 m a sud del punto precedente.
70	- 74	- 0,0072	" " " "
71	- 100	- 0,0097	" " " "
72	- 54	- 0,0052	" " " "
73	+ 110	+ 0,0115	" " " "
74	- 149	- 0,0144	" " " "
75	- 36	- 0,0035	" " " "
76	- 37	- 0,0036	A 70 m. a sud dell'orlo nord del rudero con la lapide Secchi.
77	- 52	- 0,0050	A 10 m. a sud del punto precedente.
78	+ 41	+ 0,0040	" " " "
79	- 16	- 0,0015	" " " "
80	- 92	- 0,0089	" " " "
81	+ 21	+ 0,0020	" " " "
82	+ 5	+ 0,0005	" " " "
83	- 23	- 0,0022	A 60 m. a sud del punto n. 82.
84	- 31	- 0,0030	A 15 m. a sud del punto precedente.
85	- 50	- 0,0048	" " " "
86	- 34	- 0,0033	" " " "
87	+ 53	+ 0,0051	A 40 m. a sud dell'orlo nord di finestra della casa colonica posta di fronte al pino alto.
88	+ 64	+ 0,0062	A 10 m. a sud del punto precedente.

(Segue TABELLA I).

N.º	$\frac{n' - n}{2}$	$\frac{H_2 - H_1}{H_1}$	POSIZIONE DELLE STAZIONI
89	+ 92	+ 0,0089	A 10 m. a sud del punto precedente.
90	- 14	- 0,0014	A 20 m. a sud del punto 89.
91	+ 18	+ 0,0017	" " " precedente.
92	+ 21	+ 0,0020	" " " "
93	+ 98	+ 0,0095	" " " "
94	+ 100	+ 0,0097	A 10 m. " " "
95	- 26	- 0,0025	A 20 m. a sud dell'orlo sud dell'ultimo resto di casa dopo il IV Km.
96	+ 80	+ 0,0073	A 10 m. a sud del punto precedente.
97	+ 14	+ 0,0014	" " " "
98	+ 24	+ 0,0023	" " " "
99	+ 69	+ 0,0067	" " " "
100	- 13	- 0,0013	" " " "
101	+ 56	+ 0,0054	" " " "
102	+ 127	+ 0,0123	" " " "
103	+ 149	+ 0,0144	" " " "
104	+ 171	+ 0,0165	" " " "

3. — Dai numeri riportati si vede subito quali oscillazioni si abbiano nelle variazioni della forza  $H$ , anche quando si proceda lungo una medesima linea, che nel caso mio era la linea mediana della Appia antica, e come fosse pertanto necessario scegliere molto piccola la distanza tra due stazioni successive, per metter le oscillazioni abbastanza bene in evidenza; distanza che nel caso mio era per lo più di 10 metri. Orbene si può riscontrare che tali oscillazioni sono di un ordine di grandezza molto inferiore a quello delle oscillazioni riscontrate a Kursk ed a Kriwoi-Rog; ed anzi, sul tratto della strada di S. Sebastiano che precede immediatamente la Appia antica, osservazioni ulteriori (per brevità non riportate in tabella) mostrano che tali oscillazioni sono piccolissime; e soltanto oltrepassando la zona di cotesti tufi e depositi alluvionali e passando sulla pozzolana e sul tufo litoide che costituiscono il sostegno della Appia antica, dal II al III Km. di essa, queste oscillazioni si fanno assai più nette e caratteristiche per raggiungere il loro massimo di fronte alla testata della colata di lava che comincia poco prima della tomba di Cecilia Metella. La interpretazione più naturale di ciò mi sembra essere quella già emessa dal Rücker e dal Thorpe <sup>(1)</sup> per le analoghe osservazioni da essi fatte sul suolo vulcanico dell'alta Inghilterra, che cioè si sia qui in presenza di una serie di nette *polarità sud*; in quantochè, passando da N a S su ciascun centro di perturbazione, il rapporto  $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$  tende,

(<sup>1</sup>) Rücker e Thorpe, *Survey of the British Isles for the epoch January 1886* (Phil. Trans. of the R. Soc. of London, 1890, vol. 181).

pur sempre oscillando, verso valori negativi sempre maggiori in valore assoluto, finchè al di là d'ogni centro risale bruscamente a valori positivi abbastanza alti, per decrescere poi rapidamente al susseguirsi di un altro centro simile, e così via (<sup>1</sup>). Tutte queste anomalie sembrano infine comporsi insieme e raggrupparsi intorno a due centri maggiori che corrispondono all'incirca alla sommità delle due collinette di S. Sebastiano e di Cecilia Metella. Oltrepassata poi la testata della colata di lava, e procedendo verso S, lungo di essa, il suddetto rapporto va via decrescendo d'ampiezza fino a tendere a zero presso alla villa Mora (poco prima della IV colonna chilometrica), per riprendere poi con carattere affatto diverso, cioè con valori positivi sempre più crescenti fino a poco più di un centinaio di metri oltre la IV colonna chilometrica; e ciò mi pare si possa spiegare con l'ipotesi di una nuova serie di *polarità nord* sovrapposta alla magnetizzazione verticale indotta nella lava dal campo terrestre, per la quale si dovrebbe per contro avere un polo sud in alto ed uno nord in basso. Dunque poichè, malgrado l'induzione terrestre, intorno al IV Km. della via Appia antica sussiste la prevalenza netta di un valore H maggiore del normale, ciò indica, a parer mio, l'esistenza di una ulteriore distribuzione di magnetismo, quale potrebbe essere quella di un *originario magnetismo longitudinale* della lunga colata di lava; pel quale insomma essa si presenterebbe magnetizzata come una sbarra di ferro dolce, che fosse stata arroventata prima, eppoi lasciata raffreddare in una direzione prossima a quella del meridiano magnetico (<sup>2</sup>).

(<sup>1</sup>) Analogo comportamento si ha poi lateralmente alla via, come ho potuto riscontrare con apposite misure, p. es., sul principio del vicolo che connette la via Appia antica con la Ardeatina prossima. È superfluo ripetere che per valore  $H_1$  era preso quello osservato sulla Farnesina, assunta come stazione di riferimento.

(<sup>2</sup>) In tale ipotesi infatti il polo nord della colata, che è lunga quasi dieci chilometri, dovrebbe trovarsi a circa  $\frac{1}{12}$  della sua lunghezza, a partire dalla sua estremità settentrionale (v. Kohlrausch und Hallock, Wied. Ann., Band XXII, 1884, s. 411). Orbene la detta successione di polarità nord verrebbe proprio a trovarsi nell'intorno del IV Km. della via Appia antica, essendo la testata della colata presso al III Km.



Chimica. — *Sulla isomeria degli acidi erucico, brassidinicò, isoerucico. (Risultati avuti col metodo criodratìco od eutettico)* <sup>(1)</sup>.  
Nota V di L. MASCARELLI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

L'esistenza di questi tre acidi può interpretarsi con fenomeni d'isomeria, di polimeria e di polimorfismo.

Nella Nota precedente <sup>(2)</sup> si cercava, con lo studio delle curve di saturazione dei varii sistemi binarii, di portare qualche contributo in favore dei fenomeni di isomeria o di polimorfismo, poichè già il fenomeno di polimeria era stato escluso mediante la determinazione della grandezza molecolare (Note II e III). Con la Nota IV rimane però insoluta la questione della esistenza dei due acidi a legame etilenico aventi configurazione *trans* (acido brassidinicò ed isoerucico).

Come già altra volta dicevamo, l'esistenza di acidi erucici in numero superiore a quello prevedibile dalla teoria ricorda molto il caso degli acidi cinnamici, che fu a lungo discusso e studiato, finchè, in base alle esperienze di Biilmann <sup>(3)</sup>, parve risoluto in senso favorevole ad un fenomeno di polimorfismo. Senonchè, le ricerche più accurate e sistematiche intraprese più tardi da Stobbe e Schönburg <sup>(4)</sup> tornarono a risollevar la questione: anzi, se si accettano le conclusioni di questi ricercatori, fondate su larga base sperimentale, si deve ammettere che i varii acidi cinnamici finora noti costituiscono un fenomeno di isomeria, che sino al presente non si sa interpretare con le nostre formule di struttura.

Noi abbiamo voluto ripetere sugli acidi erucici le esperienze di Biilmann, ponendoci in condizioni analoghe a quelle descritte da tale autore; però non ci è riuscito mai di osservare in alcun caso la trasformazione di uno degli acidi erucico, brassidinicò, isoerucico nell'altro. Ogni campione mostrò sempre inalterato il punto di fusione che aveva all'inizio delle esperienze.

Noi abbiamo anche intraprese esperienze analoghe a quelle di Stobbe e Schönburg (l. c.), ma siccome esse richieggono lungo tempo e la attuale mancanza di personale in laboratorio può ritardare di molto il compimento di queste, così vogliamo a questo proposito per ora solo rammentare che le conclusioni sicure a cui siamo giunti sono:

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Cagliari.

<sup>(2)</sup> Rendic. R. Accad. Lincei, 24, II, 91 (1915); e Gazz. ch. it., 45, II, 337 (1915).

<sup>(3)</sup> Ber. d. deut. Ch. Ges., 42, 182, 1444 (1909).

<sup>(4)</sup> Liebig's Annalen, 402, 187 (1914).

1°) I tre acidi: erucico, brassidnico ed isoerucico tenuti separatamente a sè per lungo tempo, mantengono invariato il loro punto di fusione (i cinnamici invece si trasformano allo stato solido e più facilmente a bassa temperatura). (Stobbe, Schönburg).

2°) Gli acidi erucici si ricuperano inalterati dai solventi ordinarii, mentre questo non succede per i cinnamici (id. id.).

Sappiamo, e ciò risulta ancora dalle esperienze di Stobbe, che alcune trasformazioni di certe sostanze richiedono tempo più o meno lungo; inoltre che per alcune altre sostanze polimorfe (es. benzofenone) occorre oltrepassare una certa percentuale dell'una forma rispetto all'altra, perchè compaia il punto di fusione di quest'altra forma (Schaum e Schaeling).

Appunto dell'influenza di tutte queste condizioni speciali sugli acidi erucici, ci stiamo ora occupando e ne parleremo a ricerca compiuta. Presentemente noi esponiamo i risultati avuti con lo studio dei punti eutettici.

Già fin dal 1910 Bruni (1) modificando un metodo anteriormente da lui proposto per decidere tra isomeria e polimorfismo, metodo che si basava sull'esame delle temperature di congelamento (2), suggeriva un secondo metodo, che teoricamente equivale al primitivo, ma che può essere più sensibile ed anche di esecuzione più rapida, il metodo criodratrico od eutettico. Recentemente Sidgwick (3), senza conoscere la proposta antecedente fatta da Bruni, espone un suo nuovo metodo per distinguere le sostanze tautomere e polimere dalle polimorfe, il quale è identico al metodo criodratrico od eutettico di Bruni (4).

I dati sperimentali con i quali Sidgwick accompagna la sua Nota servono vieppiù a conferire valore al metodo stesso.

Se adunque, per quanto già sopra abbiam detto, l'esistenza dei tre acidi: erucico, brassidnico, isoerucico può dipendere solo da fenomeno di isomeria o di polimorfismo, il metodo crioscopico od eutettico dovrebbe fornirci dati per scegliere in riguardo.

Le misure col metodo eutettico da noi ora compiute ci dicono che:

Tra l'acido *erucico* ed il *brassidnico* si tratta d'un vero caso di isomeria: ciò è una conferma dei risultati avuti nelle Note II, III e IV, risultati che alla loro volta sono pienamente concordanti col contegno reciproco dei due acidi e col loro modo di formazione l'un dall'altro, per cui debbono ritenersi isomeri del tipo *cis trans*, precisamente come l'acido oleico è l'isomero geometrico dell'acido elaidinico.

Tra acido *erucico* ed *isoerucico* si tratta d'un vero caso di isomeria:

(1) *Isomeria chimica e polimorfismo*, in Atti e Memorie della R. Accad. di Scienze, lettere ed arti di Padova, vol. XXVI, disp. IV, 357 (22 maggio 1910).

(2) *Gazz. ch. it.*, 32, I, 212 (1902).

(3) *Journ. Chem. Soc.*, 107, 673 (1915).

(4) *Cfr. Bruni, Gazz. ch. it.*, 46, I, 60 (1916).

ed anche questo sta in perfetto accordo con i risultati precedenti, con i quali si assegnava configurazione *cis* all'acido erucico e *trans* all'isoerucico.

Tra acido *brassidinico* ed *isoerucico* non pare trattarsi di isomeria vera: molto più probabilmente l'esistenza di questi due acidi appare dovuta ad un fenomeno di polimorfismo, per cui acquista verosimiglianza l'ipotesi che i due acidi siano da considerarsi come due forme di una stessa sostanza (dimorfismo).

#### PARTE SPERIMENTALE (1).

##### *Misure col solvente acido acetico.*

L'acido erucico mostra peso molecolare normale nell'acido acetico (tavola I): il punto eutettico è certamente oltre la concentrazione del 50 % con un abbassamento superiore a  $\Delta = 1.74$ .

L'acido brassidinico è pochissimo solubile a freddo: ha contegno normale (tavola II). Eutettico: concentrazione 0,7 %;  $\Delta = 0.08$ ;

La miscela eutettica di acido acetico e brassidinico subisce un abbassamento normale per aggiunta di acido erucico (tavola III). Ciò conferma che l'acido erucico ed il brassidinico sono due sostanze isomere nello stretto senso della parola.

La miscela eutettica acido acetico e brassidinico mostra abbassamento anormale per aggiunta di acido isoerucico (tavola IV).

L'acido isoerucico produce abbassamento normale in acido acetico (tavola V). L'eutettico è a 3,16 % di acido isoerucico, con  $\Delta = 0.365$ .

Se a questa miscela eutettica si aggiunge acido brassidinico, si nota un lieve innalzamento: se alla stessa miscela eutettica si aggiunge acido erucico, si ha abbassamento normale.

Dunque l'acido erucico ed isoerucico sono veri isomeri, mentre la cosa è molto dubbia per l'acido brassidinico e l'isoerucico. Sulla causa dell'innalzamento lieve, che si osserva in tal caso, è prematuro il pronunciarsi.

##### *Misure col solvente benzolo.*

L'acido erucico, come era da prevedersi trattandosi di sostanza carbosilata, dà abbassamenti più piccoli dei teorici (tavola VI). L'aggiunta di acido brassidinico alla miscela eutettica di benzolo e acido erucico ne abbassa lievissimamente il punto di congelamento, perchè l'acido brassidinico è praticamente insolubile in benzolo freddo. L'aggiunta di acido isoerucico alla stessa miscela eutettica ne abbassa considerevolmente il punto di solidificazione.

L'acido isoerucico produce in benzolo un abbassamento più piccolo del normale (tavola VII).

La miscela eutettica benzolo e acido isoerucico subisce un innalzamento per aggiunta di acido brassidinico. Anche in benzolo adunque si verificano i fenomeni osservati con l'acido acetico.

(1) Maggiori particolari verranno pubblicati in altro loco.

*Misure col solvente acido acetico*  
(acido erucico =  $C_{22}H_{42}O_2 = 338$ ).

	Numero d ordine	Solvente gr.	Sostanza sciolta gr.	Concentrazione in gr. per 100 gr. di solvente	Abbassamento <i>A</i>	Peso molecolare
I		ac. acetico	ac. erucico			( <i>k</i> = 39.0)
	1	11.15	0.0919	0.824	0.095	338.2
	2	—	0.1286	1.153	0.14	321.2
	3	—	0.2874	2.577	0.31	324.0
	4	11.38	0.1110	0.975	0.115	330.8
	5	—	0.2359	2.073	0.24	336.9
II	6	12.50	acido brassicinico 0.044	0.353	0.04	344.2
III	7	miscela eutettica: brassicinico- acetico 11.66	ac. erucico 0.1615	1.385	0.155	348.5
IV	8	miscela eutettica: id. id. 12.50	isoerucico 0.107	0.856	0.13	256.8
V	9	ac. acetico 9.05	isoerucico 0.1806	1.996	0.225	346

*Misure col solvente benzolo*  
(acido erucico =  $C_{22}H_{42}O_2 = 338$ ).

VI		benzolo	ac. erucico			( <i>k</i> = 51)
	10	8.47	0.0929	1.097	0.12	466
	11	—	0.2910	3.436	0.32	547
VII			isoerucico			
	12	10.40	0.1065	1.024	0.08	652
	13	—	0.2100	2.019	0.17	605

**Patologia vegetale.** — *Una nuova malattia del Cacao* (*Theobroma Cacao* L.) (1). Nota preliminare di MALUSIO TURCONI, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

Le foglie di alcune piante di Cacao (*Theobroma Cacao* L.) coltivate nelle serre dell'Orto Botanico di Pavia, vanno soggette da qualche tempo ad un'infezione crittogamica nuova fra le malattie del Cacao finora studiate dagli autori.

I primi sintomi del male si manifestano in forma di areole di color verde pallido, a contorno indefinito, meglio discernibili per trasparenza, che si fanno di mano in mano più appariscenti, gialliccie, ed infine danno luogo a macchie secche per ammortizzazione completa dei tessuti infetti. In questi l'esame microscopico rivela la presenza di numerosi fili micelici brunici, settati, dello spessore di 4-6  $\mu$ , ramificantisi in filamenti più sottili, più chiari o ialini, invadenti il mesofillo, che percorrono in tutti i sensi insinuandosi fra cellula e cellula e penetrando anche nelle cavità cellulari.

Le macchie che si formano nella parte interna della foglia sono rotondeggianti od ovali e grandi da uno a tre centimetri, quelle più frequenti, marginali, apicali o basali, hanno contorno irregolare e raggiungono dimensioni maggiori così da invadere gran parte del lembo. Nella pagina superiore sono di color nocciola chiaro o grigio cenere limitate da una zona rosso-bruna: nella pagina inferiore invece sono di un color castagno chiaro che si fa più scuro verso il margine.

In tali macchie, specie nella pagina superiore, appaiono in seguito numerosi puntini neri dovuti ad altrettanti periteci globosi od ovato-globosi del diametro di 100-150  $\mu$  immersi nel mesofillo, con parete pseudo-parenchimatosa piuttosto grossa (15-20  $\mu$ ), bruno nerastra ed un ostiolo di color più chiaro a forma di papilla conoidea erompente dall'epidermide. Contengono numerosi aschi, sorgenti dal fondo della cavità periteciale, clavati o cilindraceo-clavati, lunghi 40-60  $\mu$ , larghi 10-14  $\mu$ , frammisti a parafisi di pari lunghezza, filiformi, esilissime, con otto spore ciascuno disposte entro l'asco obliquamente in una sola serie o in due serie incomplete.

Le ascospore sono oblungo-ellissoidali arrotondate alle due estremità, finamente granulose, ialine e misurano 12-16  $\mu$  in lunghezza per 4-6  $\mu$  di larghezza.

Pei caratteri morfologici, ora esposti, questa forma ascofora va ascritta al genere *Physalospora* (fam. *Sphaeriaceae*, Sez. *Hyalosporae*). Essa non è

(1) La Memoria in esteso, illustrata con una tavola litografata, sarà pubblicata negli Atti dell'Istituto Botanico di Pavia, ove il lavoro fu eseguito.

per altro la sola forma fungina presente sulle foglie malate poichè vi si trovano quasi sempre anche due forme conidifere, una microconidica e l'altra macroconidica, ambedue con ife sterili interne invadenti i tessuti ed ife fertili uscenti all'esterno per rottura dell'epidermide o per le aperture stomatiche e formanti sulle macchie una specie di muffa esile e grigiastra. La prima, in prevalenza sulla pagina superiore e presente talora anche nella inferiore, mostra dei conidiofori per lo più sparsi, isolati, più di rado riuniti in numero di due a quattro in cespuglietto, eretti, settati, cilindracei, un po' ingrossati alla base e leggermente assottigliantisi verso l'alto, ove sono ramificati con rami opposti o verticillati.

La lunghezza dei conidiofori varia da 100 a 400  $\mu$ ; il loro colore decisamente bruno dalla base sino a due terzi circa d'altezza, dove incomincia la ramificazione, va poi sfumando gradatamente fino a divenire perfettamente jalino verso l'estremità superiore che termina in un apice appuntito.

I rami, per lo più disposti a verticilli in numero di tre a cinque, di rado anche due soli opposti, lesiniformi ad apice appuntito, generalmente semplici, lunghi 20-30  $\mu$ , talora però lunghi anche il doppio ed a loro volta ramificati con uno o due verticilli di rami secondari, sono quasi sempre jalini, in qualche caso quelli dei verticilli inferiori leggermente brunicci. Sono inseriti di solito all'estremità superiore dei segmenti del conidioforo e portano al loro apice capolini sferici di varia grossezza (15 a 40  $\mu$  di diametro) formati dai conidi insieme conglobati da mucillaggine così che simulano degli sporangi.

In presenza d'acqua la mucillaggine si dissolve lasciando libere numerose sporicine, jaline, oblunghe o cilindracee, ad estremità ottuse, lunghe 4-6  $\mu$ , larghe 2  $\mu$ .

La forma macroconidica, frammista non di rado alla precedente sulla pagina superiore, ma di solito in prevalenza nella inferiore, presenta pure conidiofori quasi sempre isolati; assai di rado due o tre insieme ravvicinati simulano un cespuglietto; sono eretti, ovvero ascendenti, talora più o meno incurvato-contorti.

A differenza dei conidiofori della forma microconidica, essi sono semplici, e di color bruno-fuligineo omogeneo in tutta la loro lunghezza, la quale varia da mezzo a un millimetro. Sono cilindracei, con cellula basale ingrossata, bulbosa; il tratto inferiore (la metà circa) con rari setti senza rigonfiamenti, e la metà superiore invece settato-articolata, costituita cioè da diversi articoli (6-10) di lunghezza variabile (15-60  $\mu$ ), nodoso-rigonfiati all'apice sì da dar quasi l'immagine del tarso articolato di una zampa d'insetto.

I conidii sono acrogeni, originantisi all'apice dei conidiofori, di color più chiaro di questi, quasi ialini, talvolta cilindracei, per lo più però obclavati o cilindraceo-obclavati, con apice arrotondato e base largamente ottusa od

ottuso-troncata. Sono diritti o leggermente curvi, presentano numerosi setti trasversali e misurano da 60 a 160  $\mu$  in lunghezza per 12-20  $\mu$  di larghezza.

In base ai caratteri microscopici testè descritti, le due forme conidifere trovano il loro posto sistematico nell'ordine *Hyphales*, famiglia *Dematiaceae* e vanno ascritte: la microconidica al genere *Stachylidium*, la macroconidica al genere *Helminthosporium*.

Nel 1909 C. F. v. Faber (1) pubblicò una estesa monografia delle malattie del Cacao, nella quale menziona i funghi parassiti e saprofiti fin'allora riscontrati su tale pianta; in tutto una cinquantina di specie; egli però ne dimentica parecchi che pure erano di già stati descritti. Una ventina di nuove specie vennero inoltre in questi ultimi anni pure riscontrate sul Cacao e descritte da diversi autori, così ora circa ottanta sono i miceti parassiti o saprofiti vegetanti sul *Theobroma Cacao*; di questi otto vivono sulle foglie.

Queste specie peraltro appartengono a generi e famiglie ben diverse da quelle cui vanno ascritte le nostre tre forme di *Physalospora*, *Stachylidium* ed *Helminthosporium*, le quali, come dimostrerò nel lavoro definitivo, sono ben distinte pure dagli altri micomiceti (non fogliicoli) del Cacao ed altresì da tutte le specie congeneri finora note.

Sono dunque forme nuove per la scienza che denomino: *Physalospora Theobromae*, *Stachylidium Theobromae*, *Helminthosporium Theobromae*.

Eccone la diagnosi:

**Physalospora Theobromae** n. sp. — *Maculis plerumque marginalibus, irregularibus, amplis, magnam folii partem obtegentibus, rarius internis, rotundis vel oblongis. 1-3 cm. diam., in pagina superiore pallide avellaneis vel albo griseis, rubro-brunneo delimitatis, in inferiore pallide castaneis margine obscuriore; peritheciis epiphyllis vel amphigenis, sparsis aut laxe gregaris, globosis vel ovato-globosis, 100-150  $\mu$  diam., nigris, immersis, ostiolo pallidiore, papillato conoideo erumpentibus; ascis clavatis vel cylindraceo-clavatis, apice obtuse rotundatis, infere attenuatis ac breve stipitatis 40-60  $\times$  10-14  $\mu$  paraphysibus filiformibus, ascis aequilongis vel paullo longioribus, tenuissimis, evanidis obvallatis, octosporis; sporidiis oblique monostichis vel irregulariter distichis, oblongo-ellipsoideis, granulosis, hyalinis 12-16  $\times$  4-6  $\mu$ .*

In foliis *Theobromae Cacao* in calidariis Horti Botanici Ticinensis.

**Stachylidium Theobromae** n. sp. — *Conidiophoris plerumque solitariis aut laxe gregaris, rare 2-4 in caespitulum congestis, erectis 100-400  $\times$*

(1) Faber v. C. F., *Die Krankheiten und Parasiten des Kakaobaumes* (Arbeiten aus der Kaiserl. Biolog. Anstalt für Land- und Forstwirtschaft, Band. VII, H. 2, pp. 103-350, Berlin, 1909).

4-6  $\mu$ , septatis, cylindraceutis, basi subincrassatis, fuligineis, sursum sensim tenuatis, pallidioribus atque verticillato-ramosis; ramis pallidioribus vel hyalinis, subulatis, apice acutatis, 3-5 in quoque verticillo, rarius binis oppositis, plerunqne simplicibus 20-30  $\mu$  longis, quandoque vero duplo longioribus iterunqne verticillato ramulosis; conidiis in apice ramulorum capitulato-glomeratis, globulos sphaericos, mucos obvolutos, translucidos, 15-40  $\mu$  diam. efformantibus, dein madore diffuentibus, oblongis vel cylindraceutis 4-6  $\times$  2  $\mu$  hyalinis.

In foliis *Theobromae Cacao* socia *Physalospora Theobromae*.

**Helminthosporium Theobromae** n. sp. — Conidiophoris erectis vel adscendentibus quandoque plus minusve contortis,  $\frac{1}{2}$ -1 mm. longis, solitariis, rarissime binis-trinis in caespitulum laxum congestis, simplicibus, cylindraceutis, basi incrassato bulbosis, dimidio inferiore remote septatis, sursum 6-10 septato-articulatis, articulis longitudine variis 15-60  $\mu$ , apice noduloso-inflatis, fuligineo-ferrugineis; conidiis pallidioribus, acrogenis, plerunqne obclavatis vel cylindraceuto-obclavatis, sursum attenuatis atque rotundatis, basi late obtusis vel rotundato-truncatis, pluriseptatis, 60-160  $\mu$  longis, 12-20  $\mu$  crassis.

In foliis *Theobromae Cacao* socia *Physalospora Theobromae*.

Chimica fisiologica. — *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia*. III: *Applicazione della macrotitolazione al formolo per lo studio dell'arginasi*. Nota del dott. A. CLEMENTI, presentata dal Corrisp. D. LO MONACO.

Questa Nota sar  pubblicata in un prossimo fascicolo.



Chimica fisiologica. — *Sugli elementi che condizionano l'attività degli enzimi glicolitici*. II: *Gli enzimi glicolitici dell'intestino e i corpuscoli sanguigni*. Nota di CAMILLO ARTOM, presentata dal Socio L. LUCIANI.

In una serie di ricerche sperimentali sul metabolismo del glicosio in organi sopravvivenuti, eseguite in collaborazione dal prof. U. Lombroso e da me <sup>(1)</sup>, avevamo osservato che una soluzione di glicosio in liquido di Tyrode, messa in termostato, dopo prolungata circolazione in un segmento intestinale isolato, e lasciata ivi per molte ore, non modificava il suo contenuto zuccherino. Al contrario, una profonda e rapida distruzione del glicosio si aveva, quando invece di liquido di Tyrode si era adoperato per la circolazione nell'intestino sopravvivenuto sangue defibrinato con glicosio <sup>(2)</sup>. Una differenza perfettamente simile fra le circolazioni con liquido di Tyrode e quelle con sangue, si era osservata nelle analoghe esperienze sul pancreas isolato. Ora in una Nota precedente <sup>(3)</sup> il prof. Lombroso ha dimostrato che la glicolisi avviene anche nella soluzione di Tyrode con glicosio, circolata nel pancreas, purchè vi si aggiungano corpuscoli del sangue: si può dunque affermare che anche nelle circolazioni con liquido di Tyrode il pancreas provvede alla formazione di enzimi glicolitici, e li riversa nel liquido stesso, ma che l'attività di questi enzimi è condizionata dalla presenza dei corpuscoli sanguigni.

Appariva logico di riprendere lo studio della glicolisi in una soluzione di Tyrode con glicosio, circolata nell'intestino, con una disposizione sperimentale identica a quella usata nelle ricerche menzionate or ora. Sorgeva infatti spontaneo il pensiero che, come per gli enzimi glicolitici del pancreas, così anche per quelli producentisi nella circolazione artificiale di un segmento intestinale sopravvivenuto, fosse necessario il concorso degli elementi cellulari del sangue, affinchè potesse esplicarsi l'attività glicolitica di tali enzimi.

Ad un cane, tenuto digiuno per 48 ore ed appena ucciso per dissanguamento, asportavo buona parte dell'intestino tenue; lo liberavo con la pressione manuale dallo scarso contenuto; ne lavavo abbondantemente il lume con soluzione fisiologica; introducevo la cannula per la circolazione nell'arteria mesenterica media; applicavo ai due estremi del segmento una doppia legatura, e lo ponevo nell'apparecchio di Linde. Come liquido per la circo-

(1) Lombroso, Rend. Accad. Lincei, vol. XXV, 2° sem., 1916; Artom, ibidem.

(2) Id. ibid., Rend. Accad. Lincei, vol. XXV, 2° sem., pag. 41 (1916).

(3) Id. ibid., Rend. Accad. Lincei, vol. XXV, 2° sem., 1916.

lazione adoperavo una soluzione di Tyrode, a cui avevo aggiunto glicosio in proporzione del  $\frac{1}{2}$ -1 ‰, e una mescolanza di fosfati mono- e bi-potassico al  $\frac{1}{2}$  ‰ circa: l'aggiunta di fosfati avrebbe infatti, secondo i lavori di Rona e Döblin (1) e di molti altri, un'azione singolarmente favorevole sulla glicolisi.

Il liquido raccolto dopo la circolazione era posto in termostato insieme con corpuscoli dello stesso animale, ottenuti con la centrifugazione. Per controllo serbavo in termostato campioni del liquido non circolato, ed altri dello stesso liquido non circolato, a cui aggiungevo corpuscoli sanguigni. In tutte le provette ponevo toluolo, per diminuire e ritardare lo svolgimento dei batteri.

I dosaggi del glicosio erano compiuti col metodo di Lehmann-Emdem, previa dealbuminizzazione con ferro colloidale, quando si dovevano eseguire sui campioni, a cui si erano aggiunti corpuscoli sanguigni. Spesso, e particolarmente nei dosaggi terminali di ogni esperienza, si ricercava anche il potere riducente del campione, dopo di averlo idrolizzato con acido cloridrico, allo scopo di distinguere il fenomeno della distruzione reale del glicosio da quello interferente di una sua semplice condensazione molecolare.

I.

Cane kg. 18. Circolazione con liquido di Tyrode modificato  $\text{cm.}^3$  400 + glicosio 0,5 ‰. Peso dell'organo posto a circolare gr. 230, dopo circolazione gr. 400. Pressione 40-60 mm. Hg. Velocità di circolazione per minuto  $\text{cm.}^3$  12. Durata della circolazione  $\frac{1}{2}$  ora. La circolazione è iniziata un'ora circa dopo la morte dell'animale.

Appena cessata la circolazione	}	10 $\text{cm.}^3$ liquido non circolato . . . . .	= 53.7 mgr. glicosio
		10 " " circolato . . . . .	= 53.0 " "
Dopo 4 ore di termostato	}	10 $\text{cm.}^3$ liquido non circolato + corpuscoli . . . . .	= 53.7 mgr. glicosio
		10 " " circolato + " . . . . .	= 42.5 " "
		10 " " " " . . . . .	= 49.0 " "
Dopo 14 ore di termostato	}	10 $\text{cm.}^3$ liquido non circolato + corpuscoli . . . . .	= 53.7 mgr. glicosio
		10 " " circolato + " . . . . .	= 47.7 " "
		10 " " " + " idrolizz. con HCl =	53.0 " "
		10 " " " . . . . .	= 51.2 " "
		10 " " " idrolizzato con HCl . . . . .	= 51.2 " "

II.

Cane kg. 18. Circolazione con liquido di Tyrode modificato  $\text{cm.}^3$  500 + glicosio 1 ‰. Peso dell'organo posto in circolazione gr. 170, dopo circolazione gr. 240; succo raccolto nel lume intestinale  $\text{cm.}^3$  170. Pressione 40-60 mm. Hg. Velocità media di circolazione per minuto  $\text{cm.}^3$  45. Durata della circolazione 1 ora.

(1) Rona e Döblin, Biochem. Zeitschr., XXXII, pag. 489, an. 1911.

Appena cessata la circolazione	}	10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato . . . . .	= 101.8 mgr. glicosio
		10 " " circolato . . . . .	= 88.2 " "
Dopo 4 ore di termostato	}	10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . .	= 99.7 mgr. glicosio
		10 " " circolato + " . . . . .	= 79.4 " "
		10 " " " . . . . .	= 86.9 " "
Dopo 18 ore di termostato	}	10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . .	= 96.4 mgr. glicosio
		10 " " circolato + " . . . . .	= 65.2 " "
		10 " " " + " idrolizz. con HCl = 74.5 " "	
		10 " " " . . . . .	= 81.3 " "
		10 " " " idrolizzato con HCl . . . . .	= 81.3 " "

III.

Cane kg. 20. Circolazione con liquido di Tyrode modificato cm.<sup>3</sup> 500 + glicosio 1 %/o. Peso dell'organo posto in circolazione gr. 160, dopo circolazione gr. 180; succo raccolto nel lume intestinale dopo circolazione cm.<sup>3</sup> 140. Pressione 40-60 mm. Hg Velocità media di circolazione per minuto cm.<sup>3</sup> 30. Durata della circolazione ore 1 e 1/2.

Appena cessata la circolazione	}	10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato . . . . .	= 95.6 mgr. glicosio
		10 " " circolato . . . . .	= 81.3 " "
Dopo 3 ore di termostato	}	10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . .	= 95.6 mgr. glicosio
		10 " " circolato + " . . . . .	= 75.9 " "
		10 " " " . . . . .	= 80.3 " "
Dopo 7 ore di termostato	}	10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . .	= 95.6 mgr. glicosio
		10 " " circolato + " . . . . .	= 67.7 " "
		10 " " " . . . . .	= 75.6 " "
Dopo 21 ore di termostato	}	10 cm. <sup>3</sup> liquido non circolato + corpuscoli . . . . .	= 65.8 mgr. glicosio
		10 " " " " + " idrolizz. con HCl = 79.4 " "	
		10 " " circolato + " . . . . .	= 59.0 " "
		10 " " " + " idrolizz. con HCl = ? " "	
		10 " " " . . . . .	= 75.2 " "

Nel valutare i dati sperimentali riferiti, bisogna avvertire che, nonostante le maggiori precauzioni per guarentire lo svolgimento asettico della reazione, è quasi impossibile, in questo genere di ricerche, impedire un certo grado di inquinamento batterico, i cui effetti, nulli o quasi nulli nei primi tempi di permanenza in termostato, divengono rilevanti per periodi superiori alle 7-8 ore: i valori quindi, ottenuti negli ultimi dosaggi di ciascuna esperienza, devono essere accolti con prudenza, in quanto essi rappresentano la somma dell'azione dell'enzima glicolitico e di quella dei microrganismi, inquinanti il liquido in esame.

Ciò premesso, noi possiamo tuttavia affermare, con bastevole sicurezza, dai risultati delle nostre ricerche che il liquido di Tyrode con glicosio, circolato in un segmento intestinale sopravvivate, e quindi posto in termostato, non modifica che assai poco il suo contenuto in glicosio.

Se a questo liquido si aggiungono corpuscoli del sangue, non si ottiene neppure allora una distruzione profonda del glicosio, e, se si osserva una mediocre diminuzione del potere riducente, questa può in parte attribuirsi a una semplice condensazione molecolare del glicosio, e in parte all'azione glicolitica degli stessi corpuscoli sanguigni: infatti, anche una soluzione di glicosio in Tyrode, non circolata nell'intestino, quando vi si aggiungano corpuscoli del sangue, mostra spesso una lieve diminuzione del potere riducente.

Vi è dunque una differenza profonda fra il liquido di Tyrode con glicosio circolato nell'intestino, e il liquido di Tyrode con glicosio circolato nel pancreas: basta aggiungere a questo corpuscoli del sangue, perchè esso dimostri un'attività glicolitica molto intensa, mentre al contrario l'aggiunta dei corpuscoli al liquido circolato nell'intestino non basta a conferirgli la capacità di distruggere il glicosio.

Sull'intima ragione di questa diversità di comportamento, noi non possiamo fare alcuna sicura affermazione. I risultati delle nostre esperienze ci suggeriscono, peraltro, alcune ipotesi, che attendono la loro dimostrazione sperimentale. Noi possiamo cioè pensare che, a differenza del pancreas, l'intestino sopravvivate produca enzimi glicolitici soltanto quando è irrorato con sangue contenente glicosio, e non quando sia perfuso con soluzione di glicosio in liquido di Tyrode; ovvero, che anche con quest'ultima disposizione sperimentale l'intestino dia luogo alla formazione di enzimi glicolitici, ma che sia necessario, perchè questi esplicino la loro azione, la presenza contemporanea, non della parte corpuscolare, ma del siero di sangue, ovvero dei corpuscoli e del siero insieme. Quale di queste ipotesi sia la vera, ci ripromettiamo di indagare in una nuova serie di ricerche sperimentali.

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÒRRI dà, con commosse parole, il triste annuncio della perdita fatta dall'Accademia nella persona del suo Corrispondente professor ANGELO BATTELLI; e legge poscia, a nome del Socio nazionale A. NACCARI, la seguente Commemorazione del defunto Corrispondente:

ANGELO BATTELLI nacque a Macerata Feltria nel marzo del 1862. Compiuti gli studi secondari, egli non ebbe esitazione alcuna nella scelta della scienza, a cui dedicarsi, e appena entrato nell'Università di Torino chiese di poter frequentare il Laboratorio di Fisica. Egli tanto s'esercitò e s'addestrò come studente, che, quando fu laureato nel 1884, era già maturo per imprendere da sè dei lavori sperimentali di notevole difficoltà.

Studiò dapprima la termoelettricità. L'attraeva quell'argomento che ben si presta a riscontri fra teoria ed esperienza. Esaminò anzi tutto le proprietà termoelettriche di numerose leghe binarie, indi passò al fenomeno

Thomson. Fu egli il primo a determinare il valore assoluto di quella grandezza, che il Thomson chiamò *calore specifico dell'elettricità*. Operò dapprima sul cadmio, e il buon esito di queste esperienze lo incoraggiò ad estenderle ad altri cinque metalli. Venne così a concludere che l'intensità del fenomeno è in tutti i metalli da lui studiati proporzionale al valore dell'intensità della corrente ed è pure, fatta eccezione per il ferro, proporzionale alla temperatura assoluta.

Verificò il Battelli l'esistenza del fenomeno stesso e ne misurò l'intensità in due casi di speciale interesse, cioè nel piombo e nel mercurio e per eccitamento del Tait indagò se nel nichel avvenga ad una certa temperatura un cambiamento di segno del fenomeno.

L'effetto Peltier fu pure argomento di ripetute indagini del Battelli ed è notevole un suo scritto del 1887, nel quale descrive l'esperienze fatte con due leghe scelte opportunamente e tali che per esse, congiunte col piombo, il fenomeno Peltier s'annulla a temperature poco diverse delle ordinarie. A queste ricerche egli altre ne aggiunse alcuni anni più tardi intorno alla influenza del magnetismo e delle azioni meccaniche sui fenomeni termoelettrici.

Fra i suoi primi lavori meritano di essere menzionati anche quelli intorno all'influenza della pressione sulla temperatura di fusione, in cui trovò una buona verifica della formula di J. Thomson, come pure quelli compiuti insieme col Palazzo sulle variazioni di volume di alcuni corpi per effetto della fusione e quelli fatti con la collaborazione del Martinetti su argomenti affini.

Uno studio, che richiese cure pazienti e avvedute per ottenere sensibilità ed esattezza, fu quello intorno all'influenza della magnetizzazione sulla conducibilità termica del ferro. I risultati avuti da altri sperimentatori erano molto discordi. Il Battelli, perfezionando successivamente il metodo e gli apparecchi potè mettere in chiaro una piccola diminuzione.

Nel 1887 il Battelli imprese un lavoro di gran lena che proseguì per più anni e in luoghi diversi. Egli si propose di determinare per i vapori delle sostanze più importanti la legge che lega il volume, la temperatura e la pressione, quando variano le condizioni, rimanendo costante la massa. Egli voleva inoltre determinare le costanti del punto critico, le densità del vapore allo stato di saturazione a varie temperature, le densità dei liquidi sotto pressione eguale alla tensione massima del vapore e alla stessa temperatura di esso, i calori specifici dei vapori e dei liquidi. In questo vastissimo programma si manifesta il carattere del Battelli, che non si arretrava innanzi ad alcuna difficoltà. Egli iniziò le esperienze e ne eseguì buona parte quand'era assistente a Torino.

Il metodo seguito dal Battelli è quello del tracciamento delle isoterme. La prima sostanza studiata fu l'etere: la temperatura ebbe per limiti

—28 e 206°. Fra questi furono tracciate venti isoterme. La pressione salì fino a 45 atmosfere. Questi numeri mostrano le difficoltà che dovettero essere superate fin da principio, e se si considera che queste esperienze sull'etere vennero eseguite nelle stanze anguste e disadatte dell'antico Laboratorio dell'Università di Torino, con apparecchi che in gran parte dovettero essere costruiti dallo stesso sperimentatore, il merito di lui appare ancora più grande.

Difficoltà maggiori opposero l'esperienze sull'alcool e segnatamente quelle sull'acqua per la determinazione del punto critico e delle costanti relative.

Va anche notato che gli apparecchi dovettero per due volte essere disfatti e ricostruiti, perchè l'esperienze, interrotte nel 1889 a Torino, vennero proseguite a Cagliari e a Padova.

Le quattro prime Memorie pubblicate dal Battelli su questo argomento ebbero il premio Bressa dall'Accademia delle Scienze di Torino nel 1893.

Appartengono allo stesso programma le Note sulle isobare dei vapori, sullo stato della materia al punto critico, sul calore specifico dei liquidi che solidificano a temperatura molto bassa e sulle densità d'alcuni liquidi sotto la pressione dei propri vapori saturi.

Altro studio importante e molto esteso è quello sulle scariche elettriche oscillatorie, ch'ebbe nel 1908 il premio reale dall'Accademia dei Lincei. Esso è costituito da un gruppo di Memorie, che trattano varie parti del difficile soggetto. La parte sperimentale fu fatta in collaborazione col dottor Luigi Maggi poco dopo rapito improvvisamente alla scienza.

Per verificare la nota formula del Thomson bisognava misurare periodi brevissimi. Scelto il metodo del Feddersen, il Battelli fece costruire un apparecchio atto a dare agli specchi una grande velocità di rotazione, che poteva venir misurata con la necessaria esattezza. Anche gli apparecchi accessori richiesero ingegnosi espedienti.

Molte esperienze vennero eseguite per lo studio dei fenomeni di auto-induzione e dell'influenza che sulla scarica oscillatoria attraverso un filo avvolto ad elica esercita la natura dei nuclei costituiti da varie sostanze ferro-magnetiche. Non è possibile qui descrivere le particolarità della indagine, nè porre in rilievo l'importanza dei risultati, ma è certo che queste esperienze valsero a portare molta luce su quei complicati fenomeni. Similmente mi è forza accennare soltanto ad altri lavori dell'instancabile indagatore. Ricordo le sue esperienze sui raggi Röntgen, sulla radioattività, sulle correnti telluriche, sulla pressione osmotica, sulla legge del Boyle, e le sue misure di magnetismo terrestre.

Nè posso far più che menzionare i libri da lui pubblicati con l'ajuto di amici od allievi come quello sulla teoria della dissociazione elettrolitica che fu premiato dal R. Istituto Lombardo e quello sulla radioattività; e i suoi scritti didattici, come il grande trattato scritto col prof. Cardani e i libri elementari per le scuole secondarie, che ebbero rapida diffusione.

Merito insigne del Battelli fu l'aver ampliato e reso adatto a grandi ricerche l'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa. Quale il Battelli lo trovò non poteva quell'Istituto certamente servire nè per l'istruzione pratica degli allievi, nè per numerosi e svariati studî sperimentali fatti contemporaneamente. Mercè le cure di lui, esso acquistò nuove ed acconcie sale ed ebbe conveniente disposizione, ricca suppellettile scientifica ed una utilissima officina per l'addestramento di giovani tecnici. In esso il Battelli ebbe la soddisfazione di raccogliere una schiera numerosa e valente di giovani studiosi che sotto la sua direzione eseguirono lavori molto pregevoli.

Della sua opera parlamentare dirò soltanto che nessuna questione attinente alla pubblica istruzione fu da lui trascurata. Spesso egli anche ne tenne autorevolmente parola alla Camera ed è ben noto quanta fatica gli costasse la nuova legge sull'istruzione superiore.

L'incessante operosità del Battelli doveva necessariamente logorarne le forze fisiche. Alle fatiche intellettuali s'aggiungevano i disagi, i viaggi quasi sempre notturni, la mancanza del necessario riposo: forse avrebbe egli vinta la grave malattia che lo colse, se, cedendo alle istanze dei parenti e degli amici, si fosse a tempo rassegnato ad una vita tranquilla. Ma per lui non era possibile altra vita che quella, ch'era sempre stata la sua, vale a dire movimento e lavoro. Così avvenne che il suo organismo, precocemente indebolito, non resse all'assalto del male; e la sua fervida vita si chiuse a 54 anni la mattina dell'undici dicembre testè decorso.

Angelo Battelli mi fu assiduo compagno nel primo periodo della sua vita scientifica. Io lo vedevo ogni giorno alacramente intento alle sue esperienze, non mai scoraggiato dagli ostacoli, anzi vieppiù eccitato alla lotta, pronto ad immaginare nuovi espedienti per vincere le difficoltà, indefesso al lavoro e allo studio. E io rammento che fin d'allora egli riusciva a comunicare il suo ardore a chi gli stava dappresso, onde gli studenti che lo circondavano, gli offrivano l'opera loro e lo seguivano con amore nelle indagini.

Come ai suoi primi passi non c'era ostacolo che lo facesse arretrare, non fatica che lo sgomentasse, tale ei si serbò negli anni maturi. Se nell'ultimo tempo la sua operosità di scienziato apparve scemata, la causa di ciò fu per certo l'insidiosa malattia che l'andava logorando da tempo, ma finchè la sua vigoria fisica si mantenne, egli restò, qual era in gioventù, pieno d'ardore per la scienza, instancabile nel lavoro. Per queste doti tanto in lui segnalate il suo esempio vivrà ancora efficace nella memoria degli allievi che lo amavano tanto e anche l'opera sua di maestro non sarà spenta con lui.

Il Segretario E. MILLOSEVICH legge la seguente Commemorazione del Socio straniero OSKAR BACKLUND.

JOHAN OSKAR (Oskar Andrejewitsch) BACKLUND, direttore dell'Imperiale Osservatorio Astronomico Nicola a Pulkowa presso Pietrogrado, colà spegnevasi al mattino del 29 agosto 1916.

I tempi procellosi di oggi ci fecero assai tardi, e per via indiretta, consapevoli della grave perdita.

Backlund fu un astronomo, specialmente teorico, ragguardevole; era poi un uomo autorevolissimo nel ciclo internazionale degli studiosi.

Quando, negli ultimi lustri, i convegni per iscopi scientifici s'erano fatti più frequenti e per i bisogni delle scienze evolute e per i facili contatti, così che potevasi aver l'illusione che le arti della pace da sole avrebbero retto il mondo, Oskar Backlund era fra i più notevoli rappresentanti. La sua parola era ascoltata con devozione in riunioni o astronomiche o geodetiche o di fisica cosmica.

In quest'aula lo avemmo ospite gradito, allorchè ebbe luogo a Roma la accolta dei Delegati delle grandi Accademie mondiali.

In questa circostanza io ebbi l'onore d'una sua visita all'Osservatorio al Collegio Romano.

Era Backlund un bel tipo svedese, alto di statura, smilzo, gioviale; aveva serbato un aspetto giovanile ancor in verde vecchiaia.

Traeva egli la vita, il 28 aprile 1846, nella parrocchia di Långhem nel *län* (noi diremmo: governo o meglio prefettura) di Vermland a nord del grande lago, il Vener, in Isvezia.

Interno al ventennio si recò all'Università di Upsala per istudiarvi le matematiche e l'astronomia.

Volle la sorte benefica metterlo a contatto di Gyldén, in qualità di assistente nell'Osservatorio di Stoccolma, e già la tesi di laurea rivela l'azione del maestro, chè quella riguardò appunto uno studio sull'orbita del pianettino Ifigenia, scoperto a Clinton da C. H. F. Peters nel 1870.

Nel 1876 lo troviamo quale « Osservatore » alla Specola di Dorpart, e tre anni dopo Ottone Struve lo volle col grado di astronomo aggiunto a Pulkowa. L'imperiale Accademia delle scienze di Pietrogrado accolse ben presto fra i suoi il nostro Socio straniero, ed egli in brev'ora divenne uno dei più autorevoli ed ascoltati.

Quando Bredichine, che fu il direttore dell'Osservatorio di Pulkowa dopo Otto Struve, lasciò volontariamente quella direzione nel 1895, l'imperiale Accademia di Pietrogrado, cui spetta la designazione, elevò a quell'importante posto Oskar Backlund.



La serie II delle pubblicazioni dell'Osservatorio centrale Nicola era stata inaugurata da Brédichine colla pubblicazione delle osservazioni fatte al circolo verticale da Nyren.

Backlund la completò, e sotto la sua direzione vi aggiunse oltre venti preziosi volumi riguardanti in generale l'astronomia d'alta posizione, a cui s'aggiunsero, in causa dell'indirizzo moderno della scienza, le ricerche di astro-fisica.

È nostro dovere, allorchè ci proponiamo in brev'ora d'onorare un nostro Collega, di mettere in luce i punti salienti della sua produzione scientifica, trascurando di dire ciò che non dovrebbe essere trascurato ove uno dettar volesse una completa analisi scientifica.

Il calcolo delle perturbazioni generali coi metodi classici conduce ad un alto grado di precisione, e permette la costruzione delle tavole del moto dei pianeti, quando alcune condizioni felici siano soddisfatte.

Le forti eccentricità delle orbite dei pianetini rendono i procedimenti classici o penosissimi o insufficienti, nel senso almeno di rappresentazioni rigorose di conto quando vengano a confronto cogli atti osservativi; di qui i metodi abituali del calcolo delle perturbazioni speciali inflitte dalle grandi masse al pianetino; l'orbita di esso si modifica successivamente ne' suoi elementi, ma, per un dato intervallo, funge sempre l'ellisse Keplariana osculante.

Se i pianetini scoperti fossero rimasti in piccolo numero, il lavoro di calcolo poteva reggere; ma, se si pensa che questi sono oggi intorno a 900, i procedimenti abituali non possono adescare e tener sacrificata gran parte delle forze vive dei cultori d'Urania; di qui, fra quei 900, abbiamo oggi un grosso numero di dispersi, di disertori e di ribelli.

Devesi a Gyldén l'idea madre di poter dare, fino dalla prima fase del calcolo, o meglio dopo che si ha una buona rappresentazione d'un ellisse Keplariana, un'orbita più prossima al vero, che non sia la classica ellisse Keplariana, un'orbita più prossima al vero, che non sia la classica ellisse Keplariana cogli elementi osculanti in tempi successivi, ma un'orbita speciale per la quale viene evitata la formazione dei termini secolari e l'introduzione dei piccoli divisori.

Non è questo il luogo, nè io ho l'autorità d'entrare in ardue questioni, che interessarono i più grandi matematici.

Sta di fatto che i procedimenti ideati dal Gyldén ed illustrati ed applicati dai suoi allievi diedero, danno e daranno risultati pratici più che sufficienti per il ritrovamento, con quasi nessuna fatica, dei pianetini in larghi intervalli di tempo, anche se, come asserirono critici competentissimi, possano subir qualche censura dal punto di vista di un'austera teoria.

Il nostro Socio, fattosi maestro in questi nuovi campi di meccanica celeste, arricchì i volumi dell'Imperiale Accademia di Pietrogrado di ricerche teoriche e di applicazioni pratiche. Alcune Note credette opportuno di inse-

rire nelle « Astronomische Nachrichten » sul prefato argomento o argomenti affini, come ad es. quella che riguarda le formole per il calcolo dell'orbita approssimata di pianetini del tipo di Ecuba con applicazione al (184) Dejopeja.

Ligio a quanto ho detto un momento fa, ometto di parlare di Backlund come osservatore, e avendo appena accennato alle sue ricerche sui metodi moderni nel calcolo delle orbite dei pianetini, debbo pur consacrare qualche periodo sul lavoro più importante che occupò per tanti anni l'attività scientifica del nostro Socio, voglio dire sulla teoria delle comete di Encke, che gli procurò l'alto onore della medaglia d'oro della Reale Società Astronomica di Londra.

Così denominasi la celebre cometa a corto periodo di circa 1200 giorni, perchè l'identità delle comete trovate da Méchain e Messier nel 1786, da Carolina Herschel nel 1795, da Pons, Huth e Bouvard nel 1805 e dallo stesso Pons nel 1818 venne messa fuori dubbio dalle poderose ricerche di Encke, ancor studente all'Università di Gottinga. Aveva Encke ritardato a compiere i suoi studî, perchè, nel periodo turbinoso del 1812-15, quando, e specialmente nel 1813 la Germania lottava per riacquistare la sua indipendenza, Encke serviva la patria come artigliere.

Dopo Tilsitt, ed anche a Tilsitt, Napoleone cominciava a violentare gli uomini e le cose, e le cose e gli uomini ebbero ragione sul genio; la storia ha ieri insegnato, e domani insegnerà.

Un fatto importante risultò dagli studî di Encke sull'orbita della cometa, che cioè, tutto messo in conto, il periodo rivolutivo, che era di giorni 1208, 122 fra il 1786 e il 1795, discendeva a giorni 1207, 424 fra il 1805 e il 1819.

Eravamo in presenza d'un fatto nuovo e imprevedibile, un'accelerazione, cioè, nel moto medio della cometa che, come ben si sa, non può subire alterazioni se non di carattere periodico per effetto delle perturbazioni, il che noi sappiamo ben calcolare.

Encke invoca l'ipotesi del *mezzo resistente*, e ne trae conferma nei successivi passaggi al perielio, così che l'azione del mezzo resistente sul moto della cometa venne da lui espresso da una forza tangenziale, avendo il mezzo resistente un'azione proporzionale alla sua densità e al quadrato della velocità della cometa. e supponendo che la densità del mezzo sia in ragione inversa del quadrato della distanza dal sole.

Dopo la morte di Encke, i calcoli sull'orbita della cometa di Encke vennero assunti da von Asten, e poichè, nel 1870, questi accettò un posto all'Osservatorio di Pulkowa, l'eredità degli studî sulla cometa passò in Russia.

Encke si era occupato della teoria dell'orbita della cometa fino al 1858, e già, nel proseguire gli studî, era entrato nella convinzione che, in luogo di ricorrere ad ipotesi fisiche, potevasi ben rappresentare l'accelerazione nel

moto medio proporzionalmente al tempo, mentre poi l'anomalia media subiva un incremento proporzionalmente al quadrato del tempo, un'ipotesi, in fatto, del tutto empirica.

A Pulkowa, gli studi sull'orbita della cometa entrarono in fase nuova, quella cioè di calcolare le perturbazioni speciali per archi d'anomalia rispondenti a vicinanze della cometa a grossi pianeti, e di calcolare invece le perturbazioni assolute per archi vicini all'afelio. Evidentemente i metodi di Gyldén vi fecero capolino. Intanto, a soli 36 anni, moriva von Asten, e il nostro Socio assumeva la continuazione degli studi sull'orbita della cometa di Encke. Ben presto egli mise in luce il fatto nuovo che l'accelerazione nel moto medio, prima del 1871, cangiò nel senso di una diminuzione della medesima, e l'apparizione del 1884-85 confermò i suoi primi risultati; di fronte a un problema formidabile e ben difficilmente spiegabile colle abituali nostre ipotesi fisiche, Backlund venne nella grave deliberazione di rivedere l'intera teoria. Non gli mancarono i mezzi opportuni per raggiungere il proposito, perchè la generosità di Nobel vennegli incontro con sussidi economici tali da compensare i calcolatori delle perturbazioni speciali, con procedimento classico, a partire dal 1819. Egli tenne in conto le masse da Mercurio a Saturno, dal 1819 al 1891; le masse di Urano e di Nettuno avevano effetti trascurabili, in causa della postura dell'afelio della cometa. Sono *aseleni* Mercurio e Venere, donde la possibilità d'aver valori approssimati delle rispettive masse risulta soltanto dalle perturbazioni che quei pianeti possono infliggere; e però Backlund, nei tre distinti periodi, 1819-58, 1858-71, 1871-91, introdusse nelle equazioni differenziali, oltre le incognite di correzione ai sei elementi dell'orbita, altre tre incognite, cioè l'accelerazione al modo medio e le correzioni alle assunte masse di Mercurio e di Venere.

Il lavoro colossale di Backlund gli fornì due valori delle masse di Mercurio e di Venere abbastanza prossimi ai più probabili oggidì adottati e derivanti da altre ricerche consimili. In riguardo poi all'accelerazione nel moto medio, essa risultò reale, ma ad un tempo apparve la sua irregolarità, e credo sia da disperare di poter giustificare questa colle nostre ipotesi fisiche. In una grossa media, fra il 1819 e il 1858, l'accelerazione è costante; diminuisce in valore nel 1858 e nel 1868, riprende la costanza fra 1871 e 1891, e da ultimo si riduce piccolissima.

Backlund era un astronomo matematico e calcolatore, ma soprattutto uno scienziato dalle idee larghe e con vedute moderne. Intendeva Backlund che ciò che costituì la gloria immortale di Lagrange e di Laplace, gli alti problemi dipendenti da masse e distanze, oggidì non bastano a soddisfare la curiosità scientifica umana che osò, dopo Guglielmo Herschel, di porsi a contatto dei corpi celesti analizzando l'energia luminosa.

Senonchè il clima di Pulkowa male risponde agli studi dell'astro-fisica, donde la creazione a Simeis in Crimea d'un osservatorio succursale.

L'Italia aveva bene apprezzati i meriti altissimi di Backlund; egli, oltre essere nostro Collega come Socio straniero nella sezione d'astronomia, era uno dei 12 membri della Società italiana delle scienze detta dei XL. Di lui vi dissi quanto potevo nella brev'ora concessami; mi dorrebbe che la severa figura dell'eminente scienziato svedese, per deficienza mia, vi apparisse men bella.

## ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Fu eletto Socio nazionale:

Nella Categoria IV, per la *Fisiologia*: ALBERTONI PIETRO.

Furono eletti Corrispondenti:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: FUBINI GUIDO; per l'*Astronomia*: ANGELITTI FILIPPO; per la *Geografia matematica e fisica*: DE MARCHI LUIGI.

Nella Categoria II, per la *Cristallografia e Mineralogia*: BOERIS GIOVANNI.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente con Circolare del 22 dicembre 1916; la nomina del Socio nazionale fu sottoposta all'approvazione Sovrana.

## MEMORIE

### DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

U. PRATOLONGO. *Studi di chimica cinetica*. Pres. dal Socio MENOZZI.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio MARCHIAFAVA, relatore, a nome anche dei Soci TODARO e GRASSI, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi accademici, della Memoria del prof. A. NAZARI, intitolata: *Chiazze e noduli pigmentali emosiderinici dell'epicardio*.

Il Corrispondente DI LEGGE, relatore, a nome anche del Socio CELORIA, legge una Relazione colla quale si fa una proposta analoga alla precedente,

per la Memoria del dott. G. ZAPPA avente per titolo: *Differenze sistematiche tra il Catalogo fondamentale di Newcomb e quello di Auwers.*

Le proposte delle due Commissioni esaminatrici sopra ricordate, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio DINI presenta il 3° volume delle *Opere* di LUIGI CREMONA, dandone la seguente notizia:

Il 3° volume delle *Opere* di L. Cremona contiene 36 lavori che si riferiscono a varî argomenti geometrici ed analitici, fra i quali la classica Memoria sulle superficie di 3° ordine, i numerosi ed importantissimi lavori sulle superficie rappresentabili sopra un piano e sulle trasformazioni razionali nello spazio, l'elegante teoria delle figure reciproche nella Statica grafica, ecc.

In questo 3° volume, col quale la pubblicazione è compiuta, sono contenute, oltre le Note dei revisori, anche le Notizie della vita e delle Opere di Cremona e una Distribuzione in ordine alfabetico dei principali argomenti trattati nei tre volumi.

Per questo 3° volume i revisori furono 16 e i loro nomi trovansi indicati a pag. 507 del volume stesso.

### CONCORSI A PREMI

Il Presidente RÒITI comunica alla Classe il seguente Elenco dei concorrenti al premio Reale per la *Mineralogia e Geologia* del 1916.

Elenco dei concorrenti al premio Reale  
per la *Mineralogia e Geologia.*

(Scadenza 31 dicembre 1916. — Premio L. 10.000).

1. DAINELLI GIOTTO. 1) « La fauna eocenica di Bribir in Dalmazia » (st.) —
- 2) « Intorno alla nomenclatura delle morene secondo recenti studi » (st.) —
- 3) « *Vaccinites (Pironaea) polystylus* pirona nel cretaceo del Capo di Leuca » (st.) —
- 4) « Molluschi eocenici di Dalmazia » (st.) —
- 5) « Progressi e problemi della gliociologia » (st.) —
- 6) « Contemporaneità dei depositi vulcanici e glaciali in provincia di Roma » (st.) —
- 7) « Dell'Erta-Alè. Vulcano ritenuto attivo della Dancalia Settentrionale » (st.) —
- 8) « Vulcani attivi della Dancalia » (st.) —
- 9) « Escursione al Vulcano Alid (colonia Eritrea) » (st.) —
- 10) « Per l'organizzazione dello studio dei

ghiacciai in Italia » (st.) — 11) « Del Marahò-Vulcano estinto della depressione dancale; (in collaborazione con O. Marinelli) » (st.) — 12) « A proposito di moderne manifestazioni di attività vulcanica in Dancale; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 13) « Sopra la posizione del vulcano Aferà in Dancale; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 14) — « Cavità di erosione nei gessi del Moncenisio » (st.) — 15) « Materiali per la climatologia d'Italia. Carta delle piogge della regione toscana » (st.) — 16) « Alcune notizie sopra i ghiacciai delle valli di Gressoney e di Ayas (Gruppo del M. Rosa) » (st.) — 17) « Carta geologica della Regione Etiopica. » (st.) — 18) « A proposito di una nostra carta geologica; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 19) « Le meteore di Tessaglia » (st.) — 20) « Il ghiacciaio del Lys (Monte Rosa) » (st.) — 21) « Introduzione allo studio del cretaceo friulano » (st.) — 22) « I terremoti nella regione Eritrea; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 23) « Carta della permeabilità delle rocce del bacino del Cellina » (st.) — 24) « Risultati scientifici di un viaggio nella Colonia Eritrea; (in collab. con O. Marinelli) » (st.) — 25) « L'Eocene friulano. Monografia geologica e paleontologica » (st.).

2. DAL PIAZ GIORGIO. 1) « Gli Odontoceti del Miocene bellunese » (st.) — 2) « Le Alpi Feltrine. Studio geologico » (st.) — 3) « Sulla fauna liasica delle tranze di Sospirolo » (st.) — 4) « Nuovo giacimento fossilifero del Lias inferiore dei sette comuni (Vicentino) » (st.) — 5) « Sulla fauna batoniana del Monte Pastello nel Veronese » (st.) — 6) « Sull'età degli strati coralligeni di Monte Zovo presso Mori nel Trentino » (st.) — 7) « Sulla tectonica dei Monti fra il Brenta e i dintorni del Lago di S. Croce » (st.) — 8) « Studi geotettonici sulle Alpi Orientali » (st.) — 9) « Geologia dell'Antelao » (st.) — 10) « Altipiano del Cansiglio e Regione circostante » (st.) — 11) « Relazione della Commissione per lo studio dell'Albania » (st.) — 12) « Guida geologico-morfologica di Primiero e del Bacino dell'Avisio ». (ms.)

3. FRANCHI SECONDO. 1) « Relazione sulle escursioni in valle d'Aosta » (st.) — 2) « I terreni secondari a ' facies piemontese ' ed i calcari cristallini a erinoidi intercalati nei calcescisti presso Villeneuve, in Valle d'Aosta. Bibliografia ragionata dei principali lavori concernenti la cronologia dei terreni a « facies piemontese » (zona delle pietre verdi, *schistes lustrés*, *Bündnerschiefer Schieferhülle*) » (st.) — 3) « Relazione preliminare sulla campagna geologica dell'anno 1911 » (st.) — 4) « Il Retico quale zona di transizione fra la Dolomia principale ed il *Lias* a ' facies piemontese ' calcescisti con Belemniti e pietre verdi. Nell'Alta Valle di Susa » (st.) — 5) « L'età e la struttura della sindinale piemontese dopo la scoperta del Retico nell'Alta Valle di Susa » (st.) — 6) « Osservazioni sulla geologia della Liguria » (st.) — 7) « Le ' Arenarie di Annot ' e la ' Zona ad Helminthoida ' nell'Eocene delle Alpi marittime e dell'Appennino Geno-

vese » (st.) — 8) « Carta geologica delle Alpi Occidentali » (st.) — 9) « Fogli di *Oulx* e di *Cesana Torinese*, colla indicazione del Retico scoperto nel 1910 » (st.).

4. REPOSSI EMILIO. 1) « Osservazioni geologiche e petrografiche sulla bassa Valle della Mera » (st.) — 2) « I filoni pegmatitici di Olgiasca rinvenimento in essi di minerali d'uranio » (st.) — 3) « Il quarzo di Guggiate » (st.) — 4) « Il crisoberillo nella pegmatite di Olgiasca » (st.) — 5) « L'andalusite di Musso » (st.) — 6) « Su alcuni minerali del granito di S. Fedelino (Lago di Como) » (st.) — 7) « La bassa valle della Mera, studi petrografici e geologici » (st. e ms.).

5. SABATINI VENTURINO. 1) « I terremoti e le grandi catastrofi prodotte dai fenomeni sismici » (st.). — 2) « L'eruzione vesuviana dell'aprile 1906 » (st.). — 3) « I vetri forati di S. Giuseppe e d'Ottoiano durante l'eruzione vesuviana del 1906 » (st.). — 4) « Contribuzione allo studio dei terremoti calabresi » (st.). — 5) « Analogie fra monte Amiata e monte Cimino » (st.). — 6) « I vulcani dell'Italia centrale e i loro prodotti. Vulcani Cimini » (st.). — 7) « Note sul terremoto di Linera dell'8 maggio 1914 » (st.). — 8) « Considerazioni sismologiche. A proposito dell'area epicentrale del terremoto di Linera dell'8 maggio 1914 » (st.).

Il PRESIDENTE informa la Classe che al concorso al premio CARPI pel biennio 1915-1916, scaduto col 31 dicembre 1916, non si è presentato alcun concorrente.

E. M.

---

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA  
*presentate nella seduta del 7 gennaio 1917.*

- BADET A. — Arithmetique. Bello Horizonte, 1916. 8°, pagg. 1-28.
- BERNARDINI F. — Sui rapporti fra lo sviluppo della « Fioretta » e l'annacquamento dei vini (Estr. da « Le stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. XLIX, pagg. 437-496). Modena, 1916. 8°.
- BOCCARDI G. — Il mio « Credo » riguardo alla variazione delle latitudini (Estr. da « Saggi di astronomia popolare », an. VI, pagg. 1-6). Torino, 1916. 8°.
- CREMONA L. — Opere matematiche, vol. III. Milano, 1917. 4°, pagg. 1-620.
- DE TONI G. B. — Rassegna di mostruosità florali in individui di *digitalis purpurea* l. coltivati nel giardino pubblico di Modena. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena », vol. XII, pagg. 1-16). Modena, 1916. 4°.
- EREDIA F. — Strumenti e osservazioni di meteorologia, con norme sul servizio meteorico nelle Colonie. Firenze, 1916. 8°, pagg. 1-162.
- PEROTTI R. — Sui rapporti fra lo sviluppo della « Fioretta » e l'annacquamento dei vini. (Estr. da « Le stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. XLIX, pagg. 437-496). Modena, 1916. 8°.
- PEYRONEL B. — Una nuova malattia del lupino, prodotta da *chalaropsis thielavioides* Peyr. nov. gen. et nova sp. (Estr. da « Le stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. XLIX, pagg. 583-596). Modena, 1916. 8°.
-



MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

*Pratolongo*. Studi di chimica cinetica (pres. dal Socio *Menozzo*) . . . . . Pag. 90

RELAZIONI DI COMMISSIONI

*Marchiafava* (relatore) *Todaro* e *Grassi*. Relazione sulla Memoria del prof. *A. Nazari*, intitolata: « Chiazze e noduli pigmentali emossiderinici dell'epicardio » . . . . . »  
*Di Legge* (relatore) e *Celoria*. Relazione sulla Memoria del dott. *G. Zappa*, avente per titolo: « Differenze sistematiche tra il Catalogo fondamentale di *Newcomb* e quello di *Anwers* » . . . . . »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

*Dini*. Presenta un volume delle *Opere* del prof. *Luigi Cremona* e ne parla . . . . . 91

CONCORSI A PREMI

*Rditi* (Presidente). Comunica l'elenco dei concorrenti al premio Reale per la *Mineralogia* e *Geologia*, del 1916, e annuncia che il concorso al premio *Carpi* per il biennio 1915-1916, è andato deserto . . . . . »

**BOLLETTINO BIBLIOGRAFICO** . . . . . » 94

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Spedita del 7 gennaio 1917.*

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Ciamician e Ravenna.</i> Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante . . . . .	Pag. 3
<i>Tedone.</i> Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini omiassici . . . . .	» 8
<i>Bollini.</i> Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali invertebrati IX: Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci (parte 3 <sup>a</sup> ) . . . . .	» 19
<i>Berzolari.</i> Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos (pres. dal Socio Bertini) . . . . .	» 29
<i>Buratti-Forti.</i> Sopra una nuova definizione di terne ecc. (pres. dal corrisp. Marcolongo) . . . . .	» 35
<i>Cisotti.</i> Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore (pres. dal Socio Levy-Civita) . . . . .	» 36
<i>Dantelli.</i> Sulla probabilità come limite della frequenza (pres. dal corrisp. Castagna) . . . . .	» 39
<i>Perès.</i> Sur la composition de l'ère espèce. Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition (pres. dal Socio Volterra) . . . . .	» 45
<i>Pelmonaccio.</i> Sur les nombres infinis de Fontenelle (pres. dal Socio Veronese) (*) . . . . .	» 50
<i>Artom.</i> Sopra un metodo generale per rendere selettive le stazioni radiotelegrafiche (pres. dal Socio Blaserna) . . . . .	»
<i>Drago.</i> Sulla depolarizzazione della luce (pres. II) . . . . .	» 56
<i>Polgi.</i> I rilevamenti di anomalie magnetiche nei dintorni di Roma. I: Osservazioni lungo la via Appia antica (pres. dal Socio Millosevich) . . . . .	» 64
<i>Mascarelli.</i> Sulla isomeria degli acidi erucico, brassidinico, isocrucico (Risultati avuti col metodo criodratrico ed eutettico) (pres. dal Socio Ciamician) . . . . .	» 71
<i>Turroni.</i> Una nuova malattia del Cacao (Theobroma Cacao L.) (pres. dal Socio Briosi) . . . . .	» 75
<i>Olemondi.</i> Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia. II: Applicazione della microtitolazione al formolo per lo studio dell'arginasi (pres. dal Socio Lo Monaco) (*) . . . . .	» 78
<i>Artom.</i> Sui gli elementi che condizionano l'attività degli enzimi glicolitici. II: Gli enzimi glicolitici dell'intestino e i corpuscoli sanguigni . . . . .	» 79

PERSONALE ACCADEMICO

<i>Botta</i> (Presidente). Da annuncio della morte del corrisp. prof. Angelo Battelli . . . . .	» 82
<i>Naccari.</i> Commemorazione del corrisp. prof. A. Battelli . . . . .	»
<i>Millosevich</i> (Segretario). Commemorazione del Socio straniero Oskar Barkman . . . . .	» 86

ELEZIONI DI SOCI

Risultato delle elezioni nella Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Nomina dei signori: <i>Alberioni Pietro</i> a Socio nazionale; <i>Fabini Guido, Angelitto Filippo, De Marchi Luigi, Boëris Giovanni</i> a Corrispondenti . . . . .	» 90
--	------

(Segue in tersa pagina).

) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV  
1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 21 gennaio 1917.*

Volume XXVI.<sup>o</sup> — Fascicolo 2.<sup>o</sup>

1.<sup>o</sup> SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci ed estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta al suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in tutto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 21 gennaio 1917.*

F. D' OVIDIO Presidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sopra gli acidi azocarbonici* <sup>(1)</sup>. Nota del Socio  
A. ANGELI.

Allo scopo di completare le mie ricerche e di porre maggiormente in rilievo le analogie di comportamento che si riscontrano fra i derivati dell'azoto e quelli dell'ossigeno, ho giudicato opportuno di iniziare una serie di esperienze anche sopra i derivati degli acidi azocarbonici:



dove R indica un residuo aromatico, e la conoscenza dei quali è dovuta ai bei studi di Oscar Widman <sup>(2)</sup>.

Come è noto, Widman ha ottenute queste sostanze per ossidazione dei corrispondenti derivati idrazinici, e così ha potuto preparare gli eteri:



le ammidi:



nonchè i sali:



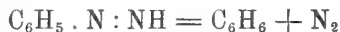
<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Laboratorio per le sostanze esplosive in Roma, dove mi trovo per compiere studi ed esperienze in seguito ad incarico avuto dal Ministero della Marina.

<sup>(2)</sup> Berliner Berichte, 28 (1895), 1927.

Gli acidi invece sono oltremodo instabili ed appena si pongono in libertà perdono una molecola di anidride carbonica, mentre la fenildiimmide che dovrebbe formarsi:

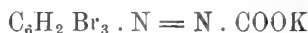


si decompone a sua volta per dare benzolo ed azoto:



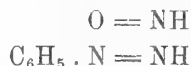
assieme ad altri prodotti più o meno complicati.

Le ricerche di Widman hanno altresì posto in rilievo l'influenza che esercitano i sostituenti negativi sopra la stabilità di questi sali; ne risulta così, che il sale potassico del tribromoderivato:



è molto più stabile del sale non bromurato, ciò che è in pieno accordo col fatto della maggiore stabilità che, in generale, tali sostituenti imprimono ai composti diazoici.

Rammentando le analogie fra i composti dell'azoto e quelli dell'ossigeno e sulle quali io ho avuto più volte occasione di riferire <sup>(1)</sup> apparisce subito che alla fenildiimmide corrisponde quell'acido del pari instabilissimo dell'azoto e che io ho chiamato nitrossile:



la loro instabilità è dovuta alla enorme facoltà di reagire: se non vi sono presenti altre sostanze, reagiscono sopra se stessi e perciò quando si cerca di averli allo stato libero, si perviene solamente ai loro prodotti di decomposizione.

Però, l'analogia della loro forma, lascia subito prevedere che anche la fenildiimmide, sebbene instabilissima <sup>(2)</sup> dovrà presentare una serie di reazioni perfettamente analoghe a quelle che io ho potuto riscontrare per il nitrossile. Per quest'ultimo, una delle più caratteristiche, è la facilità con cui reagisce sopra le aldeidi per dare acidi idrossammici:

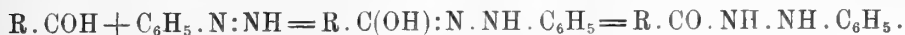


<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti (1910), 2° sem., pag. 99.

<sup>(2)</sup> Molto probabilmente saranno stabili i sali della fenildiimmide  $C_6H_5.N=NH$ , che corrisponde al fenilacetilene  $C_6H_5.C\equiv CH$ ; per analogia sono da aspettarsi sali della diimmide, come fanno l'acqua ossigenata e l'acetilene:



ovvero anche sopra i nitrosoderivati, che nel loro comportamento molto rassomigliano alle aldeidi, e perciò era da aspettarsi che anche la fenildiimmide dovesse fare altrettanto per dare fenilidrazidi:



L'esperienza ha subito confermato anche questa previsione.

Finora io ho sperimentato solamente con le aldeidi aromatiche, la benzaldeide ed il piperonalio, ed ho trovato che in questi casi non è nemmeno necessario partire dal sale puro:



si può impiegare il liquido che si ottiene saponificando l'ammide:



con poca potassa diluita, riscaldando lievemente in modo da avere soluzione limpida; la saponificazione dell'ammide si compie con grande rapidità e l'ammoniaca che si libera ed il lieve eccesso di potassa non ostacolano la reazione, almeno quando si impieghino aldeidi non facilmente alterabili dagli alcali, quali sono quelle aromatiche. Alla soluzione del sale così ottenuta si aggiunge la benzaldeide, in quantità un poco superiore alla calcolata e la quantità necessaria di alcool in modo da avere un liquido limpido ed omogeneo. Se per aggiunta di alcool si formassero due strati, allora bisogna aggiungere anche altra acqua. La soluzione, fortemente colorata in giallo aranciato, viene allora bollita a ricadere; si nota un lieve sviluppo gassoso e nello stesso tempo il liquido va scolorandosi; dopo qualche tempo si separano gocce giallognole che stanno a galla ed in una mezz'ora la reazione si può considerare finita.

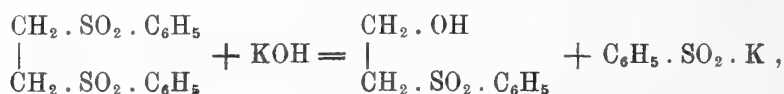
Si evapora allora in capsula a b. m. per scacciare la maggior parte dell'alcool e per raffreddamento rimane una massa cristallina che viene raccolta su filtro alla pompa e lavata prima con acqua e poi con ligroina allo scopo di eliminare la benzaldeide che non ha reagito. Partendo da un grammo di ammide si ottiene così circa un grammo di sostanza greggia ma quasi pura; un rendimento, come si vede, soddisfacente. Riceristallizzata una volta dall'alcool si ha in cristalli bianchissimi che fondono nettamente a 168° e con tutti gli altri caratteri della benzoilfenilidrazina:



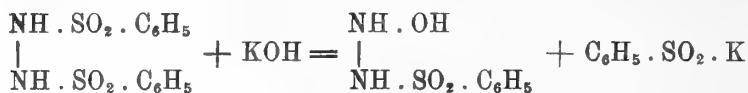
Con l'acetone invece non si ottengono prodotti caratteristici: sembrano quelli che fornisce lo stesso acido fenilazocarbonico, assieme a quelli che eventualmente può dare l'acetone con i derivati di scissione della fenildiimmide: probabilmente piccole quantità di acetonfenilidrazone.

Questa reazione presenta una certa analogia con altre che io ho descritte in questi ultimi anni e che riguardano le scissioni dei derivati benzosolfonici della fenilidrazina e dell'idrazina stessa (1); queste sostanze cedono, per azione degli alcali, con grande facilità acido benzosolfonico per dare residui che reagiscono immediatamente sulle aldeidi, ovvero sui nitrosoderivati; ma in questi ultimi casi è difficile poter decidere se si tratti di una scissione dovuta ad eliminazione diretta di acido benzosolfonico, ovvero ad un processo di idrolisi, con formazione intermedia di un derivato ossidrilato dell'idrazina, come ammette anche F. Raschig.

Quest'ultimo modo di concepire la reazione presenterebbe d'altra parte una perfetta analogia con la scissione studiata da R. Otto e J. Tröger nel caso dell'etilidifenilsulfone (2):



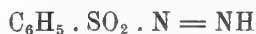
con l'altra alla quale io ho accennato due anni or sono:



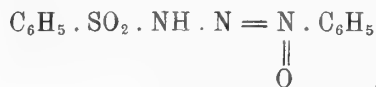
nella quale il termine instabile:



ovvero quello contenente una molecola di acqua in meno:



può addizionarsi nettamente p. es. al nitrosobenzolo per dare il prodotto:



I sali di Widman reagiscono anche con i nitrosoderivati; con i composti che cedono nitrossile danno fenilazide, e questo fatto porta una nuova conferma alla formola di costituzione che io ho attribuito a quest'ultima sostanza (3):



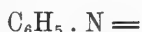
(1) Questi Rendiconti (1915), 1° sem., pag. 1093.

(2) Berliner Berichte, 26 (1893), pag. 944.

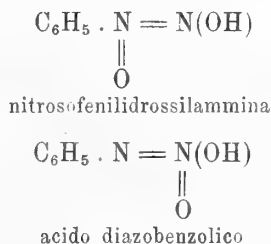
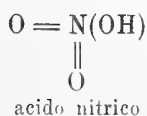
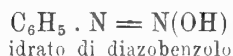
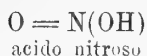
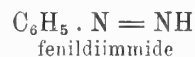
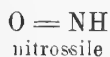
(3) Cfr. J. Thiele, Berliner Berichte, 44 (1911), pag. 3336.



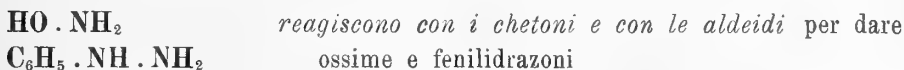
Le reazioni descritte permettono di porre in rilievo le analogie di comportamento che presentano i composti dell'ossigeno e dell'azoto e soprattutto i derivati della fenilidrazina (e dell'idrazina stessa) e quelli dell'idrossilammina e dei loro successivi prodotti di ossidazione: tutti differiscono gli uni dagli altri per il fatto che nei derivati della fenilidrazina il residuo:



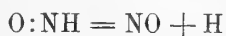
sostituisce l'atomo di ossigeno nei derivati dell'idrossilammina:



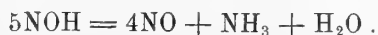
Queste analogie di struttura sono in perfetta armonia con la rassomiglianza del loro comportamento, come meglio risulta dai seguenti schemi, nei quali sono accennate solamente le reazioni principali e tipiche:



Inoltre il nitrossile, come hanno trovato O. Baudisch ed Ervin Meyer (<sup>1</sup>), può scindersi nel seguente modo:



e l'idrogeno che si libera riduce in una seconda fase una parte del biossido di azoto ad ammoniaca, dimodochè la reazione finale si potrà anche scrivere:

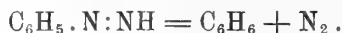


(<sup>1</sup>) Berliner Berichte, 46 (1913), pp. 117 e 120.

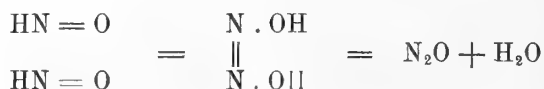
Come si vede si tratta di un processo correlativo di ossidazione e riduzione analogo p. es. alla trasformazione degli ipocloriti in clorati e cloruri:



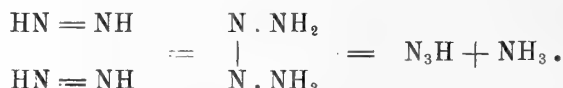
Anche la fenildiimmide, come ha trovato Widman, può subire la scissione molto semplice:



Inoltre il nitrossile può polimerizzarsi per dare acido iponitroso e successivamente protossido di azoto:



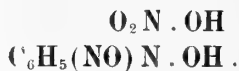
ed a suo tempo io ho dimostrato che anche il termine  $\text{N}_2\text{H}_2$  può subire una decomposizione che si spiega nell'identico modo:



Della mia ipotesi si sono in seguito giovati anche O. Diels e M. Paquin <sup>(1)</sup> per spiegare nel miglior modo altre scissioni analoghe che essi hanno osservato nel caso di alcuni derivati dell'acido azodicarbonico. Che anche la fenildiimmide possa in parte comportarsi in modo analogo, lo si desume dal fatto che oltre benzolo ed azoto essa può fornire azobenzolo, fenilidrazina ecc. Senza dubbio fra i prodotti di scissione si riscontreranno anche anilina e fenilazide.

$\text{O} = \text{N}(\text{OH})$       *reagiscono con i fenoli* per dare nitrosufenoli e  
 $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N} = \text{N}(\text{OH})$       benzolazofenoli.

Tutte queste reazioni procedono generalmente rapide e si compiono anche in soluzioni acquose molto diluite; le cose invece mutano profondamente quando si passa agli ultimi prodotti di ossidazione, l'acido nitrico ed i due termini isomeri, la nitrosufenilidrossilammina e l'acido diazobenzolico:

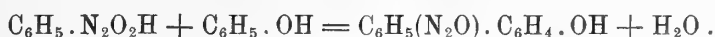


Essi sono quelli che reagiscono con maggiore difficoltà; le nitrazioni per mezzo dell'acido nitrico libero, a temperatura ordinaria, si compiono come

<sup>(1)</sup> Berlin Berichte, 46 (1913), 2002.

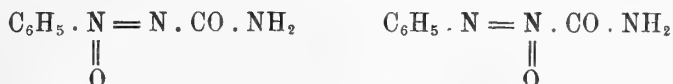
è noto solamente quando il reattivo ha una certa concentrazione ed anche in questi casi non è escluso, come suppone Nathan, che si formino dapprima nitrosoderivati i quali successivamente verrebbero ossidati a nitrocomposti. Infatti è noto da lungo tempo che l'orto ed il paranitrofenolo si possono preparare anche facendo reagire acido nitroso in eccesso sopra la soluzione eterea di fenolo.

Del pari la nitrosifenilidrossilammina e l'acido diazobenzolico, in soluzione acetica ed a temperatura ordinaria, non sono in grado di trasformare il fenolo nei due azossifenoli:



A temperatura elevata non si può operare perchè entrambi, come è noto, si decompongono in modo complicato per conto loro.

Accennerò infine che ossidando la fenilazocarbonammide, in soluzione acetica con acqua ossigenata (peridrol Merck), si ottiene con tutta facilità un prodotto che cristallizza in bei aghi d'un giallo chiaro e che a 151° si decompongono con sviluppo gassoso; dopo trattamento con potassa fornisce in modo intensissimo le reazioni dei diazocomposti; molto probabilmente si tratta di uno dei due azossiderivati (1):

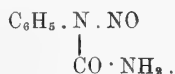


che da lungo tempo si è cercato invano di preparare e che corrispondono all'azocomposto di partenza:



vale a dire all'ammide di O. Widman, ovvero di qualche derivato semplice degli stessi.

(1) Isomeri con la nitrosammina:



**Matematica.** — *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos.* Nota II di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI.

3. Tornando alla varietà cubica del n. 1, i suoi 10 punti doppi e i suoi 15 piani sono tali che nè tre dei primi, nè tre degli altri appartengono ad una retta; inoltre, in ognuno dei piani giacciono quattro dei punti, e per ognuno dei punti passano sei dei piani. Ora si può dimostrare che queste proprietà sono *caratteristiche* per la configurazione formata dai 10 punti e 15 piani. In altri termini:

*Se in uno spazio di più che tre dimensioni <sup>(1)</sup> si hanno 10 punti e 15 piani, tali che nè tre dei punti siano in linea retta, nè tre dei piani passino per due dei punti, e se in ognuno dei piani giacciono quattro dei punti e per ognuno dei punti passano sei dei piani, quei punti e quei piani sono necessariamente i punti doppi e i piani di una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni.*

Chiamando 0, 1, ..., 9 i dieci punti, siano 0, 1, 2, 3 quattro di essi situati in un piano. Per ognuna delle rette 01, 02, 03 passa al più un altro dei 15 piani, perciò dei cinque piani ancora uscenti da 0, almeno due non passano per nessuno dei punti 1, 2, 3. Dico che due tali piani non hanno, fuori di 0, punti comuni. Se è possibile, abbiano invece in comune un punto, che supporremo dapprima appartenente alla configurazione, per esempio il punto 4, e contengano ulteriormente i punti 5, 6 e i punti 7, 8; esistano cioè i due piani 0456 e 0478. Degli altri tre piani per 0, qualcuno passerà per il residuo punto 9: altrimenti ciascuno di essi conterrebbe uno e uno solo così dei punti 1, 2, 3, come dei punti 5, 6, e come dei punti 7, 8, il che è impossibile.

Ora può darsi che un piano per 0, contenente 9, passi ulteriormente ad esempio per 5 e 7, oppure per 1 ed 8. Ma, nel primo caso, sugli altri due piani per 0 non potrebbero giacere che i punti 1, 2, 3, 6, 8, 9, giacendo però su ciascuno di essi uno al più dei punti 1, 2, 3, ed anche questo è impossibile.

(<sup>1</sup>) Nello spazio a tre dimensioni, le configurazioni di 10 punti e 15 piani aventi le proprietà qui supposte sono invece di tre diversi tipi, come mostrerò in un prossimo lavoro.

Resta da esaminare l'ipotesi che insieme coi piani 0123, 0456, 0478 si abbia il piano 0189. I rimanenti due piani per 0 possono ancora contenere soltanto i punti 2, 3, 5, 6, 7, 9, passando ciascuno al più per uno dei punti 2 e 3 e per uno dei punti 5 e 6: si può supporre ad esempio che siano 0257 e 0369. Ora i piani 0123, 0189, 0369 appartengono all' $S_3$  determinato dal primo di essi e dal punto 9; e i piani 0456, 0478, 0257 appartengono all' $S_3$  determinato dal primo di essi e dal punto 7. Ma di qui deriva l'assurdo che per 0 passa un settimo piano della configurazione, quello dei punti 0, 2, 6, 8 comuni ai due  $S_3$ .

Dato dunque il piano 0123, dei cinque rimanenti piani uscenti da 0, due certamente non hanno in comune alcun altro punto della configurazione, e si può supporre che siano 0456 e 0789. Gli altri tre, non potendo avere in comune coi precedenti, fuori di 0, più di un punto della configurazione, saranno per esempio 0147, 0258, 0369.

Ne segue che i piani 0456 e 0789 si tagliano nel solo punto 0: chè, in caso contrario, giacerebbero in un  $S_3$ , ed a questo apparterebbero tutti i punti della configurazione.

Riassumendo, *i sei piani passanti per uno qualunque dei dati punti, ad esempio per 0, si dividono in due terne*

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0123, 0456, 0789; \\ 0147, 0258, 0369, \end{array} \right.$$

*in modo che due piani dell'una o dell'altra terna s'incontrano nel solo punto 0, e due piani di terne diverse hanno comune, oltre a 0, un altro punto della configurazione.*

Di qui si deduce che i quattro piani della configurazione passanti per 1, e diversi da 0123, 0147, debbono rispettivamente contenere i punti 2, 3, 4, 7. E si riconosce subito che sono

$$1269, 1358, 1489, 1567.$$

In modo analogo si trovano i cinque piani rimanenti

$$2347, 2468, 2579, 3459, 3678.$$

I dieci punti appartengono dunque ad un  $S_4$ , quello determinato dai due piani 0123, 0147 e dal punto 5. Applicando allora la costruzione di Segre e Castelnuovo, per esempio, ai quattro piani 0123, 0456, 1489, 2579, come piano ad essi associato si trova 3678, e ciò dimostra il teorema.

Del quale può farsi la seguente generalizzazione:

*In un  $S_r$  (con  $r > 3$ ) si abbiano  $2(r+1)$  punti ed  $(r-1)(r+1)$  spazi  $S_{r-2}$ , tali che nè tre dei punti siano in linea retta, nè tre degli*

$S_{r-2}$  passino per due dei punti; e si supponga che in ognuno degli  $S_{r-2}$  giacciono  $r$  dei punti e per ognuno dei punti passino  $\frac{r(r-1)}{2}$  degli  $S_{r-2}$ .

Allora è necessariamente  $r = 4$ , e la configurazione consta dei 10 punti doppi e dei 15 piani di una varietà cubica dell'  $S_4$ .

Invero, fissato uno qualunque degli  $S_{r-2}$ , si denotino con  $1, 2, \dots, r$  gli  $r$  punti in esso contenuti. Per ognuna delle rette  $12, 13, \dots, 1r$  passerà al più un altro degli  $S_{r-2}$ ; quindi, essendo

$$\frac{r(r-1)}{2} - r = \frac{r(r-3)}{2} \geq 2,$$

almeno due degli ulteriori  $S_{r-2}$  uscenti dal punto 1 non passeranno per nessuno dei punti  $2, 3, \dots, r$ . Pongasi che due tali  $S_{r-2}$ , che dirò  $S'$  ed  $S''$ , abbiano in comune, oltre ad 1,  $\lambda$  punti della configurazione. Su essi e sul primitivo  $S_{r-2}$  stanno allora complessivamente

$$r + \lambda + 2(r - \lambda - 1) = 3r - \lambda - 2$$

dei dati punti, perciò sarà

$$3r - \lambda - 2 \leq 2r + 2,$$

ossia  $\lambda \geq r - 4$ . Restano dunque ancora e su  $S'$  e su  $S''$  al più tre punti della configurazione, e per essi e per i punti  $2, 3, \dots, r$  debbono passare gli

$$\frac{r(r-1)}{2} - 3 = \frac{(r-3)(r+2)}{2}$$

rimanenti  $S_{r-2}$  uscenti da 1. Ciò non è possibile se non è  $r = 4$ , e si ricade nel teorema precedente.

**Matematica.** — *Sur la composition de 1<sup>ère</sup> espèce: Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition.* Nota II di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA (1).

§ 3. — LES FONCTIONS D'ORDRE SINGULIER.

Il est impossible de conserver si  $\zeta'$  est nul ou entier négatif la définition (2) pour  $\mathfrak{I}^{\zeta}$ . Nous introduirons donc les nouveaux symboles

$$\mathfrak{I}^0 \quad \mathfrak{I}^{-n} \quad (n \text{ entier positif})$$

leur composition étant, par définition, exprimée par la première des formules (3).

(1) Voir la Note I dans les Rend. della R. Acc. dei Lincei, Séance du 7 janv. 1917.

Nous introduirons de même les nouveaux symboles

$$(4) \quad \overset{*}{f} = a(x) \overset{*}{1}^{\zeta} \quad \overset{*}{g} = \overset{*}{1}^{\zeta'} b(y)$$

représentant le *produit* et non la *composition* de  $a(x)$  par  $\overset{*}{1}^{\zeta}$  et de  $b(y)$  par  $\overset{*}{1}^{\zeta'}$ ; c'est ce que nous marquons dans nos formules en explicitant, dans  $a$  et  $b$  les variables et en ne surmontant pas ces fonctions d'une étoile. Dans le cas où la composition  $f g$  est définie, on a

$$(5) \quad \overset{*}{f} \overset{*}{g} = a(x) b(y) \overset{*}{1}^{\zeta+\zeta'}$$

dans le cas où elle n'est pas encore définie nous prendrons la formule (5) comme définition de  $\overset{*}{f} \overset{*}{g}$ .

Enfin,  $\overset{*}{h}$  étant une fonction d'ordre quelconque régulier  $\alpha$ , et  $\zeta$  et  $\zeta'$  étant égaux à  $-n$  ( $n$  étant un entier positif ou nul), si de plus  $\alpha - n$  est régulier, nous poserons par définition

$$\overset{*}{f} h = a(x) (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} h(x.y)$$

et

$$\overset{*}{h} \overset{*}{g} = b(y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} h(x.y).$$

Nous nommerons *fonction de l'ordre singulier*  $-n$  ( $n$  entier positif ou nul) une expression de forme

$$(5) \quad \overset{*}{1}^{-n} A(x.y) \quad (1)$$

$A$  étant une fonction d'ordre entier positif que l'on peut toujours supposer du 1<sup>er</sup> ordre (2). Remarquons qu'il est naturel de poser,  $p$  étant un entier positif,

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} \overset{*}{1}^{-n} (y-x)^p &= \overset{*}{1}^{-n+p} (-n+p-1) (-n+p-2) \dots (-n) && \text{si } p \leq n \\ &= 0 && \text{si } p > n, \end{aligned} \right\}$$

on s'en rendra compte en transformant d'abord  $\overset{*}{1}^{-n+\varepsilon} (y-x)^p$  de manière à

(1) Dans cette expression le symbole  $\overset{*}{1}^{-n}$  est *multiplié* et non composé avec  $A(x.y)$ ; de même dans les développements (7) et (8). Nous nous sommes d'ailleurs conformés aux notations indiquées au début du § 3. L'expression (5) n'est pas une fonction au sens ordinaire du mot, mais un symbole dont nous définissons les règles de calcul.

(2) Grâce aux formules (6) on peut toujours se ramener à ce cas.

faire apparaitro  $\mathring{1}^{-n+\varepsilon+p}$ , puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro. En prenant alors pour  $A(x.y)$  un développement limité de forme

$$A(x.y) = A(x.x) + (y-x) \frac{\partial}{\partial y} A(x.x) + \dots + \\ + \frac{(y-x)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} A(x.x) + (y-x)^{n+1} \Omega(x.y) \quad (1)$$

ou

$$A(x.y) = A(y.y) - (y-x) \frac{\partial}{\partial x} A(y.y) + \dots + \\ + \frac{(y-x)^n}{n!} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} A(y.y) + (y-x)^{n+1} \Omega_1(x.y)$$

et en utilisant les formules (6), on obtient sans peine pour (5) un développement de forme

$$(7) \quad \mathring{1}^{-n} a_0(x) + \mathring{1}^{-n+1} a_1(x) + \dots + \mathring{1}^0 a_n(x)$$

ou

$$(8) \quad \mathring{1}^{-n} b_0(y) + \mathring{1}^{-n+1} b_1(y) + \dots + \mathring{1}^0 b_n(y) \quad (2).$$

Il est facile de prouver que si les développements (7) de deux fonctions de la forme (5) sont identiques, il en est de même de leurs développements (8) et réciproquement: on dira alors que les deux fonctions sont égales.

On définit aisément l'addition des symboles (5): comme je dois me borner ici à indiquer brièvement la suite des idées, je me contente d'indiquer que pour additionner deux fonctions développées sous la forme (7)

$$\mathring{1}^{-n} a_0(x) + \mathring{1}^{-n+1} a_1(x) + \dots + \mathring{1}^0 a_n(x) , \\ \mathring{1}^{-n} a'_0(x) + \mathring{1}^{-n+1} a'_1(x) + \dots + \mathring{1}^0 a'_n(x)$$

il suffit de former, par addition terme à terme, le développement

$$\mathring{1}^{-n} (a_0(x) + a'_0(x)) + \mathring{1}^{-n+1} (a_1(x) + a'_1(x)) + \dots + \mathring{1}^0 [a_n(x) + a'_n(x)]$$

qui est le développement de forme (7) de la somme cherchée.

(1) Dans cette formule  $\frac{\partial}{\partial y} A(x.x)$  désigne la dérivée  $\frac{\partial}{\partial y} A(x.y)$  où l'on a fait  $y=x$ ; de même pour les symboles analogues.

(2) La fonction  $a_0(x) = b_0(x)$  doit être nommée diagonale de la fonction d'ordre négatif considérée. Nous verrons plus tard (fin de ce paragraphe) que les propriétés II et III du § 2 subsistent pour les diagonales de fonctions quelconques.



Plus généralement, nous appellerons encore fonction de l'ordre singulier  $-n$  une expression de forme

$$\mathfrak{I}^{-n} A(x, y) + H(x, y)$$

$H$  étant une fonction d'ordre entier positif.

Pour composer deux fonctions  $\overset{*}{f}$  et  $\overset{*}{g}$  d'ordres quelconques  $\alpha$  et  $\beta$ , réguliers ou non, et pour former  $\overset{*}{f}\overset{*}{g}$ , nous remarquerons que l'on peut toujours écrire

$$(9) \quad \begin{cases} \overset{*}{f} = \mathfrak{I}^{\alpha} a_0(x) + \mathfrak{I}^{\alpha+1} a_1(x) + \dots + \mathfrak{I}^{\alpha+n} a_n(x) + H(x, y) \\ \overset{*}{g} = \mathfrak{I}^{\beta} b_0(y) + \mathfrak{I}^{\beta+1} b_1(y) + \dots + \mathfrak{I}^{\beta+n'} b_{n'}(y) + H'(x, y) \end{cases}$$

$H$  étant d'ordre  $\delta$  supérieur à  $\alpha + n$  et  $H'$  d'ordre  $\delta'$  supérieur à  $\beta + n'$ . En prenant  $n$  et  $n'$  assez grand on peut toujours s'arranger de façon que

$$\delta, \delta', \delta + \delta', \delta + \beta \text{ et } \delta' + \alpha$$

soient des ordres réguliers. Nous formerons alors la fonction  $\overset{*}{f}\overset{*}{g}$  en composant terme à terme les développements (9), obtenant ainsi

$$(10) \quad \overset{*}{f}\overset{*}{g} = \sum_j a_i(x) b_j(y) \mathfrak{I}^{\alpha+\beta+i+j} + \sum_i a_i(x) \cdot \mathfrak{I}^{\alpha+i} \overset{\cdot}{H}' + \sum_j b_j(y) \overset{\cdot}{H} \mathfrak{I}^{\beta+j} + \overset{\cdot}{H}\overset{\cdot}{H}'.$$

Tous les compositions qui sont indiquées dans le 2<sup>ème</sup> membre de la formule (10) ayant un sens, d'après le choix de  $n$  et de  $n'$ , et d'après les définitions du début du § 3.

Nous obtenons ainsi pour  $\overset{*}{f}\overset{*}{g}$  une fonction de l'ordre  $\alpha + \beta$  et on peut démontrer que toutes les propriétés I à VI prouvées au § 2 pour les fonctions d'ordre régulier sont encore valables. En particulier on a

$$(VI) \quad \overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{h}$$

quels que soient les ordres de  $\overset{*}{f}$ ,  $\overset{*}{g}$ ,  $\overset{*}{h}$  (1).

On vérifie enfin que, que soit l'ordre de  $f$  on a

$$\overset{*}{f}\mathfrak{I}^0 = \mathfrak{I}^0 \overset{*}{f} = \overset{*}{f}.$$

#### § 4. — APPLICATION À UNE ÉQUATION INTÉGRALE.

Grâce à l'introduction des fonctions d'ordres quelconques et aux règles de calcul précédentes (surtout la règle VI) nous pouvons résoudre l'équation

(1) C'est la plus délicate à démontrer des propriétés I à VI. Pour la prouver on suivra encore, dans ses grandes lignes, la marche esquissée au § 2. — Remarquons aussi que dans le cas où  $\alpha$  ou  $\beta$  est nul, l'énoncé de III est légèrement modifié.

de Volterra de première espèce

$$(1) \quad \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\psi}$$

$\overset{*}{f}$  et  $\overset{*}{\psi}$  étant des fonctions données d'ordres *quelconques*  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\overset{*}{\varphi}$  une fonction inconnue d'ordre forcément égal à  $\beta - \alpha$ .

Admettons d'abord que l'ordre  $\beta$  soit assez grand pour que  $\beta + 1 - \alpha$  soit supérieur à 1. En composant les 2 membres de (1) avec  $\overset{*}{I}^{1-\alpha}$  et grâce à VI on obtient

$$(2) \quad (\overset{*}{I}^{1-\alpha} \overset{*}{f}) \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{I}^{1-\alpha} \overset{*}{\psi}$$

équation équivalente à (1) car en composant les 2 membres par  $\overset{*}{I}^{\alpha-1}$  on retrouve l'équation (1). Mais (2) peut s'écrire

$$(3) \quad \overset{*}{f}_1 \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\psi}_1$$

$\overset{*}{f}_1 = \overset{*}{I}^{1-\alpha} \overset{*}{f}$  étant d'ordre 1 et  $\overset{*}{\psi}_1 = \overset{*}{I}^{1-\alpha} \overset{*}{\psi}$  d'ordre  $\beta + 1 - \alpha$  plus grand que 1 ( $\overset{*}{\psi}_1$  est donc nulle pour  $x = y$ ). La résolution de l'équation (3) est classique et on sait former deux fonctions  $h(x)$  et  $H(x, y)$  (1) telles que  $\varphi$  solution unique de (3) ou de (1) soit égale à

$$\varphi(x, y) = -h(x) \frac{\partial}{\partial x} \overset{*}{\psi}_1(x, y) - \int_x^y H(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \overset{*}{\psi}_1(\xi, y) d\xi$$

ou avec nos notations

$$\overset{*}{\varphi} = (h(x) \overset{*}{I}^{-1} + \overset{*}{H} \overset{*}{I}^{-1}) \overset{*}{\psi}_1 = (h(x) \overset{*}{I}^{-\alpha} + \overset{*}{H} \overset{*}{I}^{-\alpha}) \overset{*}{\psi}$$

ou enfin en posant  $\overset{*}{f}^{-1} = (h(x) \overset{*}{I}^{-\alpha} + \overset{*}{H} \overset{*}{I}^{-\alpha})$ , ( $\overset{*}{f}^{-1}$  est d'ordre  $-\alpha$ ) (2)

$$\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\psi}$$

Puisque cette fonction est solution de (1) on a

$$(\overset{*}{f} \overset{*}{f}^{-1} - \overset{*}{I}^0) \overset{*}{\psi} = 0$$

et

$$\overset{*}{\varphi} (\overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{f} - \overset{*}{I}^0) = 0$$

(1) Cette dernière d'ordre entier positif.

(2) Dans toutes ces formules  $h(x)$  est multiplié, et non composé avec  $\overset{*}{I}^{-1}$  et  $\overset{*}{I}^{-\alpha}$ .

d'où enfin <sup>(1)</sup>

$$(4) \quad \overset{\circ}{f} \overset{\circ}{f}^{-1} = \overset{\circ}{f}^{-1} \overset{\circ}{f} = \overset{\circ}{1}^0 \text{ (}^2\text{)}.$$

Les formules (4) établies, des calculs élémentaires montrent que, *quel que soit l'ordre de  $\psi$* , l'équation (1) à une solution et une seule, donnée par la formule

$$(5) \quad \overset{\circ}{\varphi} = \overset{\circ}{f}^{-1} \overset{\circ}{\psi} \text{ (}^3\text{)}$$

On voit que, grâce à nos généralisations de la notion de composition nous sommes arrivés à calculer les symboles

$$\overset{\circ}{f}^{-1}$$

introduits par M.<sup>r</sup> Volterra. Si  $-\alpha$  est régulier l'expression  $\overset{\circ}{f}^{-1}$  n'est plus un symbole mais représente une fonction de  $x$  et de  $y$  dont la composition à été étudié au § 2. Si  $-\alpha$  est singulier, il reste, dans l'expression de  $\overset{\circ}{f}^{-1}$  les symboles  $\overset{\circ}{1}^0 \overset{\circ}{1}^{-1} \dots \overset{\circ}{1}^{-n}, \dots$  dont les règles de calcul ont été indiquées au § 3.

Il n'y a pas plus de difficulté maintenant à définir, en composant avec elle même la fonction  $\overset{\circ}{f}^{-1}$  la fonction  $\overset{\circ}{f}^{-n}$  ( $n$  entier).

Enfin, les fractions de composition introduites par M.<sup>r</sup> Volterra dans son Mémoire déjà cité, sont évidemment des fonctions d'ordre quelconque, de la nature de celles que nous avons définies ici. Ceci achève de démontrer que nos fonctions d'ordre quelconque coïncident avec celles de M.<sup>r</sup> Volterra.

Remarquons enfin que si  $f$  et  $\psi$  sont permutables, la solution  $\varphi$  de l'équation (1) sera permutable avec l'une et avec l'autre. Il est clair par exemple que l'on a

$$\overset{\circ}{f} \overset{\circ}{\varphi} = \overset{\circ}{\varphi} \overset{\circ}{f}$$

car cela s'écrit

$$\overset{\circ}{f} \overset{\circ}{f}^{-1} \overset{\circ}{\psi} = \overset{\circ}{f}^{-1} \overset{\circ}{\psi} \overset{\circ}{f} = \overset{\circ}{f}^{-1} \overset{\circ}{f} \overset{\circ}{\psi} = \overset{\circ}{\psi}$$

d'après les formules (4).

<sup>(1)</sup> En effet, la fonction  $\overset{\circ}{f} \overset{\circ}{f}^{-1} - \overset{\circ}{1}^0$ , par exemple, est d'ordre zéro et donc de forme  $\alpha(x) \overset{\circ}{1}^0 + \overset{\circ}{L}(x, y)$  ( $L$  d'ordre entier positif). La formule  $(\overset{\circ}{f} \overset{\circ}{f}^{-1} - \overset{\circ}{1}^0) \overset{\circ}{\psi} = 0$  s'écrit, en prenant  $\psi$  d'ordre positif

$$\alpha(x) \psi(x, y) + \int_{\alpha}^y L(x, \xi) \psi(\xi, y) d\xi = 0,$$

ceci a lieu quel que soit  $\psi$  d'ordre positif. On en tire  $\alpha(x) = 0$ ,  $L(x, y) = 0$ , c'est à dire

$$\overset{\circ}{f} \overset{\circ}{f}^{-1} = \overset{\circ}{1}^0$$

on prouve de même la seconde des formules (4).

<sup>(2)</sup> Égale aussi à  $\overset{\circ}{f}^0$  par définition de ce dernier symbole.

<sup>(3)</sup> Il n'est pas sans intérêt d'observer que la même fonction  $\overset{\circ}{f}^{-1}$  servira dans la résolution de l'équation

$$\overset{\circ}{\varphi} \overset{\circ}{f} = \overset{\circ}{\psi}$$

analogue à l'équation (1).

Fisica. — *La corrente termo-ionica nelle comuni lampade ad incandescenza* (1). Nota del dott. WASHINGTON DEL REGNO, presentata dal Corrisp. CANTONE.

Nelle lampade destinate allo studio delle correnti termo-ioniche, il filamento incandescente è circondato da un elettrodo metallico, continuo od a maglia e generalmente di forma cilindrica, unito mediante un filo che attraversa il bulbo della lampada ad un galvanometro di cui l'altro estremo è in comunicazione col polo positivo della lampada. L'Edison e l'Hollevigie (2) ebbero per primi l'idea di raccogliere gli elettroni emessi dal filamento incandescente a mezzo di un elettrodo esterno alla lampada: l'Hollevigie adattando un pezzo di stagnola, caricato positivamente ed in comunicazione con un elettroscopio, sul bulbo di una lampada Osram da 25 candele poté notare che l'elettroscopio si scaricava quando il filamento veniva attraversato dalla corrente. Esperienze furono in seguito fatte con lampade a filamento metallico e di carbone (3) sulle quali venivano adattate delle fasce metalliche a maglia o continue, ottenendosi correnti d'intensità non superiore a  $0,4 \times 10^{-6}$  amp. per i filamenti metallici ed  $1,5 \times 10^{-6}$  amp. per i filamenti di carbone.

Per quanto sia oramai assodata la natura delle correnti termo-ioniche ho voluto eseguire nuove esperienze in proposito perchè con un dispositivo semplice sono riuscito ad ottenere dalle ordinarie lampade ad incandescenza effetti cospicui e facilmente paragonabili fra di loro. I risultati, che in seguito riporto, furono ottenuti sperimentando su lampade di tipo diverso, usando un elettrodo costituito da uno spesso strato di argento depositato sul bulbo della lampada sul quale veniva avvolto un filo di rame in comunicazione col galvanometro e col polo positivo della lampada. Nel circuito principale una resistenza variabile permetteva di ottenere valori diversi della differenza di potenziale applicata agli estremi del filamento incandescente ed un inversore dava il mezzo di controllare volta per volta la natura della corrente che attraversava il circuito termo-ionico. Fu mia cura ottenere un isolamento perfetto di questo circuito per evitare in esso ogni corrente parasita che poteva stabilirsi per l'imperfetto isolamento del circuito principale

(1). Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli. Giugno 1916.

(2) H. Hollevigie, *Sur les rayons cathodiques émis par les lampes à incandescence*, Société Franc. de Physique. Séance du 16 février 1912.

(3) Grandone, *Sulla corrente termo-ionica generata nelle lampade ad incandescenza*. R. Acc. delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. Fascicoli 5° e 6°. 1915.

della lampada (circuito stradale): cercai inoltre d'evitare ogni derivazione di corrente fra il portalampada ed il rivestimento d'argento, lavando spesso con acido il tratto scoperto della lampada. L'uso dell'inversore dava in tutte le mie esperienze il ritorno istantaneo dell'indice a zero quando l'elettrodo metallico si trovava collegato col polo negativo della lampada, ciò che indicava l'assenza di correnti di dispersione: nè manca di accertare se per la notevole temperatura alla quale si portava il rivestimento della lampada si destassero nel circuito correnti di natura termo-elettrica. Anche in questo caso, chiudendo il circuito termo-ionico a lampada spenta dopo un funzionamento di diverse ore, il galvanometro non dava alcuna deviazione.

I valori riportati nelle tabelle si riferiscono a lampade a filamento di carbone ed a filamento metallico: da essi si rileva agevolmente il carattere termo-ionico delle correnti misurate ed il vantaggio dell'uso dell'elettrodo

TABELLA I.

LAMPADA A FILAMENTO DI CARBONE (Vtaggio 110)			LAMPADA A FILAMENTO METALLICO (Vtaggio 60)				
Differenza di potenziale agli estremi del filamento	Corrente termo ionica in micro-ampères			Differenza di potenziale agli estremi del filamento	Corrente termo-ionica in micro-ampères		
	(1)	(2)	(3)		(a)	(b)	(c)
80	6	0	0	50	0	0	0.000
90	34	4	2	60	4	0	0.001
100	272	26	14	70	34	2	0.001
110	510	127	85	80	255	22	0.002
120	680	510	595	90	...	175	...
130	...	210	1700				

continuo a contatto intimo col bulbo della lampada, avendosi valori per le intensità di corrente che, per qualche lampada ed a regime forzato, raggiungono i due mille-ampères, cioè la metà del valore massimo ottenuto dal Fleming <sup>(1)</sup> con le sue valvole a filamento di carbone con elettrodo interno.

<sup>(1)</sup> Philosophical Magazine, 42, 1896.

La differenza notevole nel valore della intensità della corrente termo-ionica quando si passa dall'elettrodo a maglia semplicemente applicato alla lampada al rivestimento di argento continuo ed intimamente unito alla lampada (vedi tabella II) ci porta ad ammettere nel primo caso la creazione di un campo antagonista che ostacola il moto degli elettroni liberi di fronte alle regioni scoperte del vetro, laddove con l'elettrodo continuo si annullano

TABELLA II.

LAMPADA A FILAMENTO DI CARBONE			LAMPADA E FILAMENTO METALLICO		
Differenza di potenziale agli estremi del filamento	Corrente termo-ionica in micro-ampères		Differenza di potenziale agli estremi del filamento	Corrente termo-ionica in micro-ampères	
	Elettrodo a fascia di rame discontinua adattata sulla lampada	Elettrodo continuo d'argento depositato per via chimica		Elettrodo a fascia di rame discontinua adattata sulla lampada	Elettrodo continuo d'argento depositato per via chimica
100	0	20	70	0	2
120	1	510	90	0	58
130	...	2210	100	0	175

le cariche degli elettroni con quelle eteronome che si destano su tutta quanta la superficie interna del vetro, mentre una carica negativa uguale in grandezza passa dall'argento al filo conduttore: siamo dunque in presenza di un fenomeno che determina uno spostamento elettrico in ogni strato della massa del vetro per effetto della continua polarizzazione dovuta ai corpuscoli che si sprigionano dal filamento caldo. In quanto all'influenza della natura dei filamenti sulla intensità della corrente termo-ionica è da notare che per i filamenti di carbone, quantunque le temperature raggiunte siano inferiori a quelle dei filamenti metallici, la corrente termo-ionica ha valori maggiori e ciò sia per la maggiore emissione caratteristica del carbone, sia perchè in queste lampade si ha, per rispetto a quelle a filamento metallico, una minore rarefazione e quindi un numero maggiore di ioni atti a neutralizzare parte della carica spaziale creante il campo antagonista che limita l'emissione degli elettroni da parte del filamento<sup>(1)</sup>. Dalle mie esperienze risulta inoltre confermata in ogni caso l'assenza di corrente termo-ionica per filamenti di tungsteno immersi in ambiente di azoto (vedi tabella I, serie (c) relativa ad una lampada ad azoto da 600 candele a 50 volta): tale particolare è

(<sup>1</sup>) I. Langmuir, *L'elettrotecnica*, anno 1915, novembre.

dovuto sia alla pressione non piccola esistente nelle lampade, sia alla natura stessa del gas (1).

Inefficace si è dimostrato per queste lampade un preventivo riscaldamento del filamento: esperienze eseguite con lampade di 600 candele sottoposte ad una preliminare accensione di un'ora al regime normale di 50 volta e di dieci minuti al regime forzato di 80 volta hanno dato un valore pressochè nullo della corrente.

Nello studio delle variazioni della corrente termo-ionica nelle lampade sottoposte a lunghi periodi di accensione, alternati con periodi di riposo, ho usato esclusivamente lampade a filamento di tungsteno, perchè le lampade a filamento di carbone dopo un breve periodo di funzionamento, specie se a regime forzato, si riscaldano troppo e non possono più essere utilmente usate. Dalle esperienze risulta quanto segue:

TABELLA III.

Differenza di potenziale agli estremi del filamento	LAMPADA A FILAMENTO METALLICO da 16 candele e 50 volta							Osservazioni
	Corrente termo-ionica in micro-ampères							
	(a)	(b)	(c)	(d)	(a <sub>i</sub> )	(b <sub>i</sub> )	(c <sub>i</sub> )	
Volta 50	...	...	...	...	...	...	...	Serie (a) - Lampada nuova - Pomeriggio 20-12-1915 - Serie (b) (c) (d) - Accesa la lampada per un'ora prima di eseguire la serie, pomeriggio del 21-12-1915.
" 60	...	1	1	2	3	3	4	
" 65	...	2	3	6	7	9	11	Serie (a <sub>i</sub> ) - Serie fatta senza accensione preliminare: mattino del 22-12-1915.
" 70	1	5	10	16	20	24	34	
" 75	4	16	27	48	51	68	94	Serie (b <sub>i</sub> ) (c <sub>i</sub> ) - Serie fatte dopo quattro ore e mezza di accensione della lampada a regime normale (la lampada si è fulminata alla tensione di 80 volta).
" 80	...	49	88	136	162	204	255	

TABELLA IV.

Differenza di potenziale agli estremi del filamento	LAMPADA A FILAMENTO METALLICO da 32 candele e 60 volta							Osservazioni
	Corrente termo-ionica in micro-ampères							
	(a)	(a <sub>i</sub> )	(b <sub>i</sub> )	(a <sub>ii</sub> )	(a <sub>iii</sub> )	(a <sub>iv</sub> )	(b <sub>iv</sub> )	
Volta 60	...	...	...	...	...	2	2	Serie (a) - Accensione preventiva di un'ora al regime di 50 volta, 28-12-1915, ore ant. - Serie (a <sub>i</sub> ) senza accensione preventiva, 29-12-1915, ore ant.
" 70	1	1	2	2	7	17	20	Serie (b <sub>i</sub> ) - senza accensione preventiva. Pomeriggio 31-12-1915.
" 80	8	13	17	22	39	127	153	Ser. (a <sub>ii</sub> ) 31-12-1915 senza accensione prev.
" 90	54	89	116	175	238	663	697	" (a <sub>iii</sub> ) 25-1-1916 " " "
" 100	...	...	...	...	2040	3145	3400	" (a <sub>iv</sub> ) 27-1-1916 " " "
								" (b <sub>iv</sub> ) 27-1-1916 " " " ore pomeridiane.

(1) I. Langmuir, The physical Review. Dicembre, 1915, pag. 450.

1° la corrente termo-ionica, a parità di differenza di potenziale agli estremi del filamento incandescente, non resta costante ma va continuamente aumentando con l'invecchiare della lampada (vedi tabelle III, IV, V);

TABELLA V.

Differenza di potenziale agli estremi del filamento	LAMPADA A FILAMENTO METALLICO da 50 candele e 50 volta													Osservazioni
	Corrente termo-ionica in micro-ampères													
Volta	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(a <sub>1</sub> )	(b <sub>1</sub> )	(c <sub>1</sub> )	(d <sub>1</sub> )	(e <sub>1</sub> )	(a <sub>11</sub> )	(b <sub>11</sub> )	
45	...	...	...	...	...	...	1	1	1	2	2	1	2	Serie (a)(b)(c) - Ore ant. 8-11-1915
" 50	1	1	1	1	1	2	5	7	7	7	7	7	8	" (d)(e)(f) - " pom. 8-11 1915 (nell'intervallo rimasta per quattro ore la lampada accesa al regime di 50 volta).
" 55	...	3	3	4	4	6	23	22	19	34	34	24	29	
" 60	9	11	14	14	16	21	77	85	87	85	84	77	102	Ser. (a <sub>1</sub> )(b <sub>1</sub> )(c <sub>1</sub> ) - Ore ant. 23-12-1915
" 65	...	32	43	46	53	71	272	272	289	306	306	306	323	" (d <sub>1</sub> )(e <sub>1</sub> ) - " pom. 23-12-1915 (nell'intervallo lamp. smorzata).
" 70	...	...	...	155	170	289	...	...	...	...	...	...	...	Ser. (a <sub>11</sub> )(b <sub>11</sub> ) - Ore ant. 24-12-1915.

2° il prolungato funzionamento delle lampade, anche se a regime forzato, produce nei filamenti una variazione di resistenza piccolissima (vedi tabella VI in cui I rappresenta l'intensità della corrente ed R la resistenza del filamento);

3° per tutte le lampade si nota un aumento della corrente termo-ionica dopo un lungo periodo di riposo delle lampade. Nella tabella III lo dimostrano le due coppie di serie (a)(b), (d)(a<sub>1</sub>): dalla seconda delle coppie si rileva che l'aumento della corrente non può ritenersi dovuto al periodo di preliminare accensione della lampada prima di eseguire la serie (b). Questo comportamento viene confermato da tutte le serie della tabella IV ed in ispecie dalla (f) ed (a<sub>1</sub>) della tabella V.

Tali risultati ci autorizzano ad ammettere che il notevolissimo incremento della corrente termo-ionica, non possa essere dovuto ad una variazione della temperatura dei filamenti avendosi per questi una variazione di resistenza piccolissima, variazione che per giunta è nel senso di una diminuzione e non di un aumento della temperatura. È quindi da ritenere che l'effetto sia dovuto al disgregamento dello strato superficiale ed alla conseguente maggiore facilità con la quale gli elettroni possono liberarsi dai filamenti. Il notevole aumento della corrente, di cui al n. 3, non potendosi attribuire all'influenza dei gas nell'interno della lampada avendosi nel periodo di riposo un'occlusione dei gas precedentemente liberati e quindi una diminuzione di ioni atti a neutralizzare parte della carica spaziale creante il campo antagonista, ci porta ad ammettere un continuo lavoro di disgregamento anche a lampada spenta: si avrebbe quindi per questi filamenti



TABELLA VI.

Differenza di potenziale agli estremi del filamento	LAMPADA A FILAMENTO METALLICO NUOVA da 25 candele e 60 volta						<i>Osservazioni</i>
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)		
Volta 60	I 0.478 R 140.180	0.428 140.180	0.427 140.510	0.426 140.750	0.423 141.840	(a) 19 giugno 1916. Serie iniziale.	
" 70	I 0.468 R 149.570	0.468 149.570	0.467 149.890	0.465 150.530	0.464 150.820	(b) 20 " " Dopo due ore di accensione preliminare a 90 volta. (c) 20 " " Dopo un'altra ora a 100 volta.	
" 80	I 0.507 R 157.790	0.507 157.790	0.507 157.790	0.505 158.410	0.503 159.040	(d) 20 " " "	
" 90	I 0.545 R 165.130	0.543 165.740	0.541 166.350	0.541 166.350	0.540 166.660	(e) 29 giugno 1916. Senza accensione preliminare.	
" 100	I ... R ...	0.980 172.410	0.577 173.310	0.577 173.310	0.574 174.210		

Differenza di potenziale agli estremi del filamento	LAMPADA A FILAMENTO METALLICO PROSSIMA A FULMINARSI da 50 candele e 50 volta						<i>Osservazioni</i>
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	
Volta 50	I 1.053 R 47.480	1.053 47.480	1.053 47.480	1.052 47.520	1.050 47.620	1.046 47.810	(a) 29 giugno 1916. Senza accensione preliminare.
" 55	I 1.114 R 49.370	1.114 49.370	1.113 49.410	1.113 49.410	1.110 49.550	1.107 49.680	(b) 29 " " pomeriggio. (c) 1° luglio "
" 60	I 1.178 R 50.930	1.174 51.100	1.172 51.190	1.170 51.280	1.167 51.430	1.166 51.450	(d) 4 " " Dopo tre ore di accensione a 60 volta (la lampada aveva oscillazioni di luce dipendenti dal grande disgregamento del filamento).
" 65	I ... R ...	1.237 52.540	1.231 52.800	1.230 52.840	1.224 53.100	1.222 53.190	(f) (g) 6 luglio 1916. La lampada si fulmina.

*uno stato continuo di vibrazione* ciò che costituisce una delle cause della breve durata delle lampade a tungsteno.

Le esperienze indicate furono ripetute con le stesse lampade alimentate da corrente alternata usando come rivelatore un telefono sensibilissimo. Anche in questo caso si ha corrente apprezzabile quando si sorpassa il regime normale di funzionamento: per una lampada a filamento di carbone da 32 candele e 110 volta si comincia a sentire un suono in corrispondenza ad una differenza di potenziale ai capi del filamento di 85 volta, suono che va rapidamente aumentando d'intensità fino a percepirsi, per una differenza di potenziale di 140 volta, anche a distanza dal telefono. Usando di un trasformatore di cui il circuito di alta resistenza è inserito nel circuito termo-ionico e l'altro porta il telefono, si riesce a seguire con maggiore facilità le variazioni di corrente.

Rendo vive grazie al prof. Cantone per gli aiuti fornitimi nel corso di queste ricerche.

**Matematica.** — *Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Sulla caratteristica dell'arco cantante nei regimi cui corrispondono diverse emissioni spettrali.* Nota II di ELENA FREDA e NELLA MORTARA, presentata dal Socio BLASERNA.

4. Per interpretare i risultati sperimentali riferiti nel precedente paragrafo <sup>(1)</sup>, occorre tener presenti le proprietà caratteristiche dell'arco.

Come è noto, se si alimenta l'arco con corrente continua, e lasciando costante la distanza dei carboni, si fa variare di tempo in tempo l'intensità della corrente, in corrispondenza ad ogni valore dell'intensità, la superficie del cratere negativo, la massa gassosa interessata alla scarica e la quantità di calore introdotta in ogni istante in questa massa gassosa, acquistano determinati valori, tanto maggiori, quanto più intensa è la corrente. Quindi, restando costante la distanza dei carboni, si ha per ogni valore  $i$  dell'intensità della corrente un determinato valore  $V$  della tensione ai poli dell'arco,

<sup>(1)</sup> Vedi la prima Nota in questi Rendiconti, vol. XXV, sem 2<sup>a</sup>, pag. 438.

e questo secondo valore è tanto minore quanto maggiore è il primo. La caratteristica statica dell'arco è perciò una caratteristica calante, gode cioè della proprietà espressa dalla diseuguaglianza  $\frac{dV}{di} < 0$ .

Se invece si fa passare nell'arco una corrente la cui intensità varia abbastanza rapidamente, la temperatura e lo spessore dell'arco non possono acquistare in corrispondenza ad ogni valore istantaneo della corrente quei valori che acquisterebbero se la corrente restasse costante per un certo tempo. Quindi i valori della tensione ai poli dell'arco, corrispondenti, nella caratteristica statica e in quella dinamica, ad uno stesso valore dell'intensità della corrente, non coincidono. Se la corrente assume due valori diversi in due istanti molto vicini, le condizioni dell'arco nel primo istante si ritrovano, più o meno modificate, nel secondo istante; contribuiscono quindi a determinare il valore della conducibilità corrispondente al secondo valore di  $i$ . Nella caratteristica dinamica il valore in ogni istante della tensione ai poli dell'arco non dipende dunque soltanto dal valore contemporaneo della corrente, ma anche dai valori di questa negli istanti precedenti; in corrispondenza ad un determinato valore della corrente, si ha un valore maggiore o minore della tensione ai poli dell'arco, secondo che la corrente è crescente o decrescente; l'arco presenta cioè isteresi.

Tenendo presenti queste considerazioni, possiamo renderci conto di alcune delle modificazioni osservate nella caratteristica dell'arco cantante, al variare delle condizioni di esperienza.

Per una stessa forma, una stessa ampiezza ed uno stesso periodo della corrente  $i_1$  è evidente che le variazioni di intensità di quest'ultima possono tanto più prontamente e meglio essere seguite dalle corrispondenti variazioni della sezione dell'arco e della quantità di calore posseduta in ogni istante da quest'ultimo (quindi dalle corrispondenti variazioni della tensione  $V$ ), quanto minore è la distanza dei carboni. Si comprende perciò perchè l'isteresi sia affatto trascurabile nelle caratteristiche riprodotte dalle figure 2 e 3 e cominci ad avvertirsi in quelle riprodotte dalle figure 5 e 6; perchè manchi nella figura 4 e sia invece sensibile nelle figure 7, 8, 9.

Come è noto, quanto minore è  $L$ , tanto più difficilmente si ottiene per l'arco cantante il regime sinusoidale; con induttanza molto piccola il solo regime possibile è quello tronco-sinusoidale. In tale regime, al diminuire di  $L$ , diminuisce la frazione di periodo durante la quale l'arco è acceso ed aumenta l'ampiezza massima della corrente  $i_1$ . Nella frazione di periodo in cui l'arco è spento, i carboni e il gas fra essi interposto si raffreddano; quanto maggiore è questo raffreddamento, quanto più rapidamente cresce  $i_1$  e quanto più sono distanti i carboni, tanto minori diventano la quantità di calore posseduta dall'arco e la sezione di esso, in corrispondenza ai diversi valori dell'intensità  $i_1$ , mentre questa aumenta.

Si comprende perciò perchè, per  $L$  molto piccola, ai diversi valori di  $i_1$ , crescente corrispondano valori di  $V$  più elevati di quelli che si hanno per  $L$  più grande (a parità delle altre condizioni). Si comprende pure perchè, posta nel circuito derivato la bobina di autoinduzione trascurabile, il tratto della caratteristica corrispondente ad  $i_1$  crescente si sposti verso la regione delle tensioni più alte, quando si allontanino i carboni e quando si diminuisca  $i_0$ . (Diminuendo  $i_0$ , aumenta l'intervallo di tempo durante il quale l'arco è spento, aumenta quindi il raffreddamento di quest'ultimo). Quando  $i_1$  comincia a decrescere, i suoi valori antecedenti hanno già determinato un aumento della quantità di calore e della sezione che l'arco aveva nei primi istanti della scarica. L'influenza dei valori antecedenti di  $i_1$  s'indebolisce ben poco

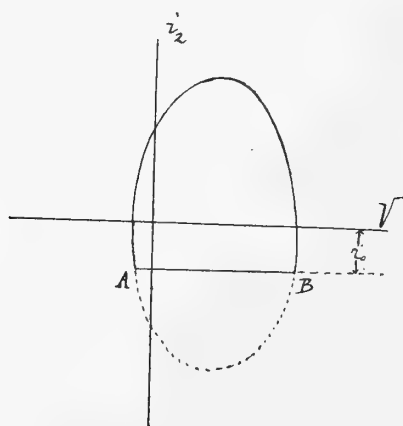


FIG. 16.

nel brevissimo intervallo di tempo durante il quale  $i_1$  decresce; perciò in tale intervallo la tensione  $V$  continua a diminuire.

Se, conservando piccola l'induttanza del circuito derivato, si diminuisce la capacità, diminuiscono tanto l'ampiezza massima della corrente  $i_1$ , quanto l'intervallo di tempo durante il quale si ha  $i_1 > 0$ ; la velocità con cui varia la corrente nell'arco si mantiene perciò molto grande e l'isteresi si mantiene notevole.

Termineremo questo paragrafo facendo qualche osservazione sulla legge secondo cui varia la tensione ai poli dell'arco cantante nel regime tronco-sinusoidale. Per maggiore chiarezza è bene aver presente la caratteristica del condensatore inserito nel circuito derivato. Tale caratteristica, nel regime tronco-sinusoidale, ha la forma di una ellisse troncata, col centro sul semiasse positivo  $i_2 = 0$ , come indica la figura 16 (se lo smorzamento è forte, l'ellisse è un po' schiacciata dalla parte delle tensioni minori).

Detta  $W$  la differenza di potenziale tra l'armatura del condensatore collegata al polo positivo dell'arco e l'altra armatura, tra  $V$ ,  $W$  e la tensione agli estremi della bobina d'induttanza  $L$  passa la relazione

$$V = W - L \frac{di_2}{dt}.$$

Nella frazione di periodo durante la quale l'arco è spento, durante la quale si ha cioè  $i_2 = -i_0$ , la differenza di potenziale  $V$  fra i poli dell'arco e quella  $W$  tra le armature del condensatore coincidono, poichè si ha  $L \frac{di_2}{dt} = 0$  (<sup>1</sup>);  $V$  e  $W$  aumentano fino ad acquistare un valore che determina la riaccensione dell'arco (La riaccensione corrisponde all'estremo di destra del tratto rettilineo orizzontale della figura 16 e delle caratteristiche, relative al regime tronco-sinusoidale, riprodotte nel paragrafo precedente).

Appena l'arco si accende, la tensione ai suoi poli, come è noto, si abbassa bruscamente. La tensione  $-L \frac{di_2}{dt}$ , agli estremi della bobina d'induttanza  $L$ , ha segno negativo o positivo a seconda che  $i_1$  è crescente o decrescente; perciò nel primo caso si ha  $V < W$ , nel secondo  $V > W$ . In corrispondenza al valore massimo di  $i_1$  si ha  $V = W$ . Appena  $i_1$  si annulla, si annulla pure  $L \frac{di_2}{dt}$ ; quindi la tensione  $V$  passa bruscamente dal valore che aveva raggiunto variando con continuità, al valore che la tensione  $W$  ha in quell'istante (cioè al valore corrispondente al punto A della figura 16). Così, per es., nel caso corrispondente alla figura 2, nel quale manca l'isteresi, la tensione  $V$ , che al diminuire di  $i_1$  cresce fino a riassumere il valore massimo corrispondente all'inizio della scarica, salta istantaneamente da questo valore massimo al valore minimo, appena  $i_1$  si annulla.

Se si fa crescere  $i_0$ , lasciando inalterate le altre condizioni, è evidente che il tratto rettilineo orizzontale della figura 16 deve diventare più corto e la figura stessa più simmetrica rispetto all'asse  $i_2 = 0$ ; si spiega perciò senz'altro la modificazione osservata, al crescere di  $i_0$ , nelle caratteristiche dell'arco cantante corrispondenti al regime tronco-sinusoidale.

Riteniamo che la caratteristica riprodotta nella figura 4, per quanto corrisponda ad una forma di corrente sensibilmente sinusoidale, si riferisca anch'essa, come le figure 2 e 3, ad un regime tronco-sinusoidale. Altrimenti non potrebbe spiegarsi la presenza del piccolo tratto orizzontale corrispondente al valore minimo di  $i_1$ .

(<sup>1</sup>) Corbino, loc. cit.

5. Come si è visto, al diminuire dell'induttanza  $L$  del circuito derivato, al diminuire di  $i_0$  e al crescere della distanza dei carboni, la caratteristica dell'arco cantante si allarga nella parte che corrisponde ad  $i_1 > 0$  e il tratto di essa che corrisponde ad  $i_1$  crescente si sposta verso la regione delle tensioni più alte.

Nel precedente paragrafo abbiamo spiegato queste modificazioni della caratteristica tenendo conto dell'isteresi dell'arco; le interpreteremo ora dal punto di vista energetico.

La seconda delle modificazioni della caratteristica sopra ricordate ci dice che, al diminuire di  $L$ , al diminuire di  $i_0$  e al crescere della lunghezza dell'arco, aumenta il valore della potenza  $i_1 V$  corrispondente ad un dato valore della corrente  $i_1$ , nella frazione di periodo in cui quest'ultima aumenta. Un aumento anche maggiore subisce la potenza specifica (cioè la potenza spesa, in ogni istante, nell'unità di volume della massa gassosa interessata alla scarica) perchè, come già si è detto nel precedente paragrafo, quanto più piccole sono  $L$  e  $i_0$  e quanto maggiore è la distanza dei carboni, tanto più sottile è l'arco, per uno stesso valore di  $i_1$  crescente.

Dalle caratteristiche ottenute ponendo nel circuito derivato la piccola bobina costituita da due spire di filo da campanelli, si vede che, per valori non troppo piccoli dell'intensità di corrente  $i_1$ , l'accrescimento di quest'ultima si effettua più rapidamente che non la diminuzione della tensione  $V$ . Dunque, se  $L$  è piccola, al crescere di  $i_1$  aumenta il valore di  $i_1 V$ ; la potenza specifica può perciò assumere valori elevati, anche in corrispondenza ai massimi valori di  $i_1$  crescente (valori tanto più grandi, quanto minori sono  $L$  e  $i_0$  e quanto maggiore è la distanza dei carboni), nonostante l'aumento della sezione dell'arco che accompagna l'aumento di  $i_1$ .

L'allargamento che, nel regime tronco-sinusoidale, si verifica nella caratteristica, contemporaneamente allo spostamento del tratto calante di quest'ultima verso la regione delle tensioni maggiori, ci dice che le condizioni che favoriscono tale spostamento rendono più rilevante la differenza fra due valori di  $i_1 V$  corrispondenti, nel ramo ascendente e nel ramo discendente della caratteristica, ad uno stesso valore di  $i_1$ .

Anche più notevolmente aumenta la differenza fra due valori della potenza specifica corrispondenti, in uno stesso periodo, ad un medesimo valore di  $i_1$ , poichè, al diminuire di  $L$  e di  $i_0$  e al crescere della distanza dei carboni, aumenta anche la differenza fra le sezioni dell'arco corrispondenti, nel ramo ascendente e nel ramo discendente della caratteristica, ad uno stesso valore di  $i_1$ .

Come già si è ricordato nel primo paragrafo, La Rosa ha potuto osservare una trasformazione graduale dello spettro d'arco in spettro di scintilla, sia facendo diminuire nel dispositivo di Duddel l'induttanza  $L$ , mentre la capacità restava grande, sia facendo crescere la capacità da 1 a 20 microfarad, mentre l'induttanza  $L$  era trascurabile.

La Rosa ha osservato che, contemporaneamente alla detta trasformazione, si aveva un aumento graduale della potenza media spesa nell'arco nella frazione di periodo in cui  $i_1$  non era nulla; egli ha affacciata l'ipotesi che la natura dello spettro sia determinata dalla potenza specifica media spesa nell'arco nella frazione di periodo in cui esso è acceso.

Ludewig <sup>(1)</sup> ha potuto osservare un'analogia trasformazione dello spettro dell'arco cantante, facendo diminuire  $i_0$ ; egli dalle sue esperienze è stato indotto ad ammettere che la detta trasformazione si verifichi tutte le volte che si favoriscano le condizioni che determinano un aumento del rapporto tra la frazione di periodo in cui l'arco è spento e la frazione di periodo in cui è acceso (l'allontanamento dei carboni è appunto una di queste condizioni).

I risultati sperimentali da noi ottenuti, per quanto precedentemente si è detto, rendono assai verosimile l'ipotesi che, quando l'arco cantante nel regime tronco-sinusoidale dà uno spettro di alta eccitazione (o spettro di scintilla), l'emissione di questo sia determinata dalla grande potenza specifica introdotta nell'arco nella frazione di periodo in cui  $i_1$  cresce.

Se con piccola capacità, riducendo l'induttanza  $L$ , non si ottiene la trasformazione dello spettro d'arco in spettro di scintilla, ciò avviene probabilmente perchè, a causa della piccola ampiezza che  $i_1$  ha sempre in queste condizioni, la potenza specifica non può raggiungere in nessun istante, valori abbastanza elevati.

Ludewig ha stabilito le seguenti condizioni per la presenza, nello spettro dell'arco, di righe di alta eccitazione:

- 1) queste righe si presentano quando la corrente nell'arco consiste in improvvisi schizzi, separati da intervalli sufficientemente lunghi;
- 2) la durata degli schizzi di corrente deve essere minore di  $10^{-4}$  secondi.

La prima di queste condizioni è perfettamente d'accordo con quanto precedentemente si è detto; infatti, quanto maggiori sono gli intervalli durante i quali la corrente è nulla, tanto più sottile è l'arco all'inizio della scarica e quindi tanto maggiore è la potenza specifica.

Le considerazioni precedentemente fatte ci inducono a sostituire alla seconda condizione di Ludewig (che precisa troppo, nel senso quantitativo, l'influenza di un elemento, mentre è perfino discutibile se tale influenza esista), la condizione che, all'inizio della scarica, l'intensità di corrente cresca con rapidità sufficientemente grande.

Entrambe queste condizioni, in ultima analisi, rientrano nella legge generica della grande potenza specifica.

(<sup>1</sup>) Annalen der Physik., 1913, XLII, pag. 643.

6. I risultati sperimentali ottenuti ci permettono anche di rispondere alle domande che ci siamo poste alla fine del primo paragrafo.

Se si osservano, per es., le figure 5, 10, 12, corrispondenti tutte ad una capacità di 20 microfarad, si vede che la caratteristica dell'arco cantante relativa al regime troncò-sinusoidale, al diminuire dell'induttanza  $L$  del circuito derivato, resta sempre dello stesso tipo, solo la parte di essa che corrisponde ad  $i_1 > 0$  si allarga e il tratto che corrisponde ad  $i_1$  crescente si sposta verso la regione delle tensioni più alte.

La trasformazione graduale della caratteristica, corrispondente alla trasformazione graduale spettrografica osservata da La Rosa, è mostrata anche meglio dalle figure 12, 13, 14 e 15, corrispondenti tutte ad uno stesso valore, assai piccolo, di  $L$  ed a valori diversi della capacità. (Poichè le variazioni della capacità potevano effettuarsi molto rapidamente, si poteva ottenere che tutte le altre condizioni restassero invariate). Queste caratteristiche sono affatto simili; esse non differiscono che per l'ampiezza massima di  $i_1$ .

Quando nel circuito derivato erano inserite la più piccola delle bobine da noi adoperate e una capacità di 20 microfarad, abbiamo potuto osservare, per mezzo di uno spettroscopio Hilgher, che apparivano nello spettro dell'arco le righe di alta eccitazione, tosto che si allontanavano alquanto i carboni, o si diminuiva la corrente principale  $i_0$ . L'apparizione di queste righe non era accompagnata da un cambiamento essenziale della caratteristica; in questa si osservavano solo le seguenti modificazioni: un aumento dell'ampiezza massima della corrente  $i_1$  e quindi un indebolimento della luminosità della porzione di caratteristica corrispondente ad  $i_1 > 0$ ; un piccolo spostamento del tratto di caratteristica corrispondente ad  $i_1$  crescente verso la regione delle tensioni maggiori.

Basandoci su tali risultati, possiamo asserire che, quando si facciano variare le costanti elettriche nel dispositivo di Duddel, in modo da ottenere, secondo le ricerche di La Rosa, una trasformazione graduale dello spettro d'arco in spettro di scintilla, si verifica pure una trasformazione graduale della caratteristica dell'arco; si deve quindi ammettere che anche il processo elettrico, completamente individuato dalla caratteristica, si trasformi gradualmente.

Poichè, nel fenomeno elettrico dell'arco cantante, a due forme di scarica nelle quali si ha rispettivamente l'emissione di un spettro d'arco o di uno spettro di scintilla, possono corrispondere due caratteristiche aventi perfettamente lo stesso tipo, non si può ammettere che nei due casi si tratti di processi del tutto distinti; si deve invece ammettere, con La Rosa, che le due forme di scarica costituiscano due gradazioni di uno stesso processo.



Geofisica. — *Rilevamenti di anomalie magnetiche nei dintorni di Roma. II: Osservazioni sulle variazioni col tempo di alcune anomalie.* Nota di A. PALAGI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. — Anche le variazioni col tempo di alcune tra le più notevoli anomalie della via Appia antica furono oggetto di studio da parte mia.

Per questo mi attenni al sistema di ripetere parecchie volte le misure in certi punti (determinati con precisione) in giornate diverse nel periodo febbraio-aprile 1916, ed ancora più volte nello stesso giorno, avendo solo cura in generale di cogliere i momenti in cui le variazioni col tempo degli elementi magnetici terrestri fossero da ritenersi non troppo rapide. Orbene i risultati ottenuti provano, a parer mio, con sufficiente evidenza che le variazioni nei valori delle anomalie, quali si possono riscontrare da un giorno all'altro, non sono molto notevoli; e così da un mese all'altro <sup>(1)</sup>.

Ecco invero alcune delle variazioni più caratteristiche trovate:

<sup>(1)</sup> Ciò conferma che esse non potrebbero, in via generale, ostacolare gran che il rilievo magnetico complessivo di zone anche abbastanza estese della regione Laziale, quand'esso fosse tentato con apparecchi opportuni a seconda dei casi, ma tutti di rapido uso, e contemporaneamente diversi osservatori procedessero alle misure con unità di metodo in varie direzioni divergenti dallo stesso centro.

TABELLA II.

*Variazioni col tempo di alcune anomalie della via Appia antica, espresse per mezzo delle semidifferenze  $\frac{n'-n}{2}$  = parti di scala (corrispondenti a decimi di mm.) lette sull'apparecchio Kohlrausch.*

D A T A	$\left\{ \begin{array}{c} \Sigma \\ \Sigma \end{array} \right. 21$	22	23	25	26	51	74	75	76	77	78	81	82	88	89
30. Gennaio 1916 . . . . .	..	..	..	..	..	..	..	..	-41	-47	+37	+20	+4	..	..
2. Febbraio . . . . .	..	..	..	..	..	..	..	..	-39	-55	+39	+26	+5	..	..
3. " . . . . .	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+60	+90
5. " . . . . .	..	..	..	..	..	..	-148	-39	..	..	..	..	..	..	..
6. " . . . . .	..	..	..	..	..	..	-150	-32	-35	..	..	..	..	..	..
19. " . . . . .	..	..	..	..	..	-85	..	..	..	..	..	..	..	..	..
10. Marzo . . . . .	+357	+269	+253	+200	+135	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
14. " . . . . .	..	..	..	+210	+137	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
18. " . . . . .	+357	+291	+260	+214	+139	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
19. " . . . . .	..	..	..	..	..	-73	..	..	-34	-54	+44	+18	+6	..	..
20. " . . . . .	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	+67	+94
MEDIE . . . . .	+357	+280	+257	+208	+137	-79	-149	-36	-37	-52	+41	+21	+5	+64	+92

*N.B.* In alcuni punti, come, p. es., nel punto 76 le misure furono controllate anche con le oscillazioni approfittando degli istanti di maggiore quiete su quella via deserta.

(1) Essendo un po' incerto il valore trovato il 30 gennaio, fu fatta la media tra esso e quello del 2 febbraio, indi la media tra il risultato ed il valore del 19 marzo, il che dà 41 in luogo di 40, come si avrebbe facendo la media di tutti e tre i valori della colonna, non considerandone il differente peso.

Osservazioni al quadro :

1<sup>a</sup>) Dalla tabella risulta, in generale, anche un lieve aumento nei valori del rapporto  $\frac{H_2 - H_1}{H_1}$  dal gennaio al marzo; il che starebbe ad indicare che l'onda termica invernale può aver aumentato di qualche poco il momento magnetico delle rocce anomale e quindi anche il valore algebrico apparente delle anomalie stesse, nella suddetta epoca;

2<sup>a</sup>) Si è osservato inoltre che, facendo delle serie di misure per intere giornate in punti fissi, il rapporto stesso andava decrescendo verso il mezzodì e crescendo verso sera; e ciò potrebbe indicare che anche l'onda termica diurna esercita la sua influenza sulle rocce del sottosuolo, ed in modo abbastanza sensibile.

2. — Molteplici misure di confronto con i due metodi di deviazione e di oscillazione furono da me fatte sui terreni della Farnesina e della villa Crescimbene (ora Spalletti-Rusconi), nei quali già nel 1911 e 1913 fecero misure assolute i magnetologi americani Sligh e Wallis della C. I. W. Ora, mentre i valori da me ottenuti per ciascuna località coi due apparecchi erano tra loro bene concordanti in generale, per contro i valori medi corrispondenti alle due località differivano sempre di qualche poco, indicando che il grande campo magnetico particolare del territorio vulcanico romano facevasi risentire con lieve anomalia anche su cotesti terreni apparentemente privi di ogni roccia magnetica: il che darebbe, in qualche modo, ragione del disaccordo più volte lamentato dai vari sperimentatori che in epoche diverse si proposero di stabilire i valori normali del magnetismo terrestre per Roma (<sup>1</sup>). Tuttavia se si cerca, per quanto è possibile, d'eliminare le influenze esterne, specialmente col fare parecchie serie di osservazioni in varie giornate e nelle ore di maggiore tranquillità del campo terrestre, si trova che le suddette differenze si riducono in media ad un valore minimo abbastanza piccolo per dar modo di ricavarne con sufficiente esattezza il reale valore medio normale del campo magnetico alla latitudine e longitudine di Roma. Basandomi, infatti, per la riduzione secolare sui dati più recenti forniti dagli osservatori di Potsdam (<sup>2</sup>) e di Kew (<sup>3</sup>), ho trovato che tra il valore di H asse-

(<sup>1</sup>) P. Denza, *La inclinazione magnetica a Roma* (Atti Acc. Pont. Nuovi Lincei, XLIII, 1889); *Sulla declinazione magnetica in Roma* (Mem. Acc. Pont. Nuovi Lincei, vol. VI, pag. 251, 1890).

(<sup>2</sup>) A. Nippoldt, *Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht*, 2<sup>o</sup> Auflage, s. 62 (Sammlung Göschen; Berlin, 1912).

(<sup>3</sup>) C. Chree, *Secular Change in the British Isles 1892-1913* (Terr. Mag., March, 1915, pag. 49). La variazione secolare in H sarebbe in questi ultimi anni così piccola da potersi ritenere trascurabile. — Si noti che le variazioni secolari dedotte dai dati degli osservatori inglesi e riportate dal Chree (e così quelle che si deducono dagli osservatori tedeschi) differiscono tra loro sempre di qualche poco, malgrado che le misure siano fornite dagli stessi apparecchi; e ciò potrebbe bene anche attribuirsi alla tenue influenza locale del terreno sul quale essi sono posti, influenza difficilmente eliminabile fintantochè non sia stabilito bene il grado di anomalia che ciascuna presenta di per sè.

gnato dal Wallis per la villa Crescimbene e quello da me riscontrato sulla Farnesina, verrebbe proprio a cadere il valore stesso (fatta la debita riduzione) quale fu stabilito nell'ottobre 1905 dal Palazzo <sup>(1)</sup> pel podere della Scuola Agraria (fuori di porta S. Pancrazio), essendo essi:

Villa Crescimbene . . . (Wallis)	H = 0,23458
Podere Scuola Agraria . . (Palazzo)	H = 0,23447
Collina della Farnesina . (Palagi)	H = 0,23441,

essendo tutti e tre ridotti all'epoca 1916.2, il che prova l'attendibilità dei valori dai suddetti Autori determinati per Roma.

Mi è grato infine esprimere al chiarissimo prof. L. Palazzo tutta la mia gratitudine per i mezzi ed i consigli preziosi largitimi durante l'esecuzione del mio lavoro.

*Chimica. — Alcuni prodotti dell'azione della formaldeide e bisolfito su amine aromatiche e derivati dei medesimi.* Nota I del dott. ROBERTO LEPETIT, presentata dal Socio A. ANGELI.

Le prime pubblicazioni sulle sostanze che si formano per l'azione del bisolfito e aldeidi su amine aromatiche, sono quelle di Schiff, il quale <sup>(2)</sup> ottenne combinazioni definite facendo agire, sia delle amine sui così detti corpi di Bertagnini (prodotti di addizione di bisolfiti alcalini con aldeidi), sia dei bisolfiti sulle così dette basi di Schiff. Lo Schiff si limitò a segnalare la formazione di tali composti, a carattere di sali, attribuendo loro la formola generale  $\text{Ar-NH-CHR-SO}_3\text{-Me}^1$ , dove Ar rappresenta un radicale aromatico, R il radicale aromatico o alifatico di un aldeide, senza peraltro indagarne il comportamento chimico.

Parecchi autori si occuparono di questi composti d'addizione, fra essi particolarmente Eibner <sup>(3)</sup>, il quale per il primo discusse varie formole di struttura più o meno plausibili, sulle quali sarebbe troppo lungo soffermarsi, ma neppure Eibner si occupò del loro modo di comportarsi di fronte a reagenti chimici.

Tali composti vennero designati sotto vari nomi; per es. amidometansolfonati, amidometil solfonati o solfiti; la denominazione prevalente è quella di amidometansolfonati, che userò in seguito, per es. fenilamidometansolfonato sodico per il composto anilina-formaldeide bisolfito.

<sup>(1)</sup> L. Palazzo, *Magnetic Elements determined at Tripoli, Barbary* (Terr. Mag., vol. XI, June 1906, pag. 96).

<sup>(2)</sup> Annalen, 140, 127 (1866).

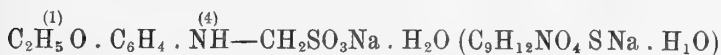
<sup>(3)</sup> Annalen, 315 (1889)?

A proposito del loro comportamento chimico, nel 1904 Knoevenhagel <sup>(1)</sup> pubblicò l'interessante reazione dello scambio del gruppo terminale SO<sub>3</sub>H, col gruppo CN, mediante trattamento con KCN, reazione per cui la Badische Anilin & Sodafabrik chiese un primo brevetto nel 1901, secondo il quale si ottengono dagli amidometansolfonati con facilità i nitrili delle relative glicine. Coi suoi allievi Knoevenhagel l'applicò ai derivati bisolfito formaldeici di amine primarie e secondarie, variando anche l'aldeide. Infine Bucherer e Schwalbe <sup>(2)</sup> dopo una polemica di priorità con Knoevenhagel ne completarono i lavori estendendoli ad altri composti.

Tengo però a rivendicare qui la priorità della reazione dei cianuri sugli amidometansolfonati da amine primarie da me descritta in un piego suggellato sin dal marzo 1900 <sup>(3)</sup>. Aggiungerò che a quell'epoca erà già sottoposto a ricerche farmacologiche sotto il nome di nevralteina, il derivato della formaldeide bisolfito e parafenetidina da me preparato fin dal 1899 e che solo nel 1913 apparve in commercio una sostanza del tutto analoga: la melubrina della Casa Meister Lucius, derivata dall'amidoantipirina, formaldeide e bisolfito, quindi copia ed imitazione della nevralteina.

Scopo della presente Nota è, oltre alla descrizione di alcuni derivati non ancora noti dell'acido fenilaminometansolfonico, di completare e di rettificare alcuni dati della letteratura e di riferire più specialmente intorno al comportamento della nevralteina.

*Nevralteina, paraetossifenilamidometansolfonato sodico*



Preparata da me fino dal 1899 facendo agire bisolfito sodico sur un miscuglio di una molecola di formaldeide e di parafenetidina in soluzione acquosa alcoolica a 75-80° C. La massa che si depone col raffreddamento viene ricristallizzata due volte da alcool diluito ed è senz'altro pura: rendimento 90 % della teoria.

I cristalli perdono acqua col riscaldamento diventando opachi; venne quindi determinata l'acqua di cristallizzazione.

Sostanza gr. 1,5861 diedero acqua gr. 0,1067; sostanza gr. 1,4322 diedero acqua gr. 0,0946.

	Acqua	
Trovato . . . . .	6,73 %	6,61 %
Calcolato per C <sub>9</sub> H <sub>14</sub> NO <sub>5</sub> SNa . . . . .	6,64 %	

<sup>(1)</sup> Berichte der deutschen chem. Ges., 37, pag. 4073.

<sup>(2)</sup> Berichte der deutschen chem. Ges., 39, pag. 2796.

<sup>(3)</sup> Bulletin de la Soc. Ind. de Mulhouse, nov. 1905, pag. 379, extrait du pli cacheté, n. 1170 déposé le 6 mars 1900 par M. Roberto Lepetit.

Il paraetossifenilamidometansolfonato sodico è molto solubile nell'acqua bollente che ne scioglie circa 90 parti in cento, molto meno in acqua fredda (circa il 10 %) poco solubile in alcool, insolubile in etere, benzolo, cloroformio.

Esso si decompone verso 150° C. ingiallendo, emettendo vapori d'acqua con anidride solforosa e vapori d'odore aromatico. L'aggiunta di poco acido cloridrico a freddo a soluzioni anche diluite precipita

*L'acido p-etossifenilamidometansolfonico*



in aghetti bianchi splendenti di sapore acidulo dapprima e poi intensamente dolce, poco solubili nell'acqua, più solubili in alcool, quasi insolubili in etere, cloroformio; facilmente decomponibili col riscaldamento anche già a 70-75° C. con emissione di anidride solforosa; fonde a 146° C. decomponendosi e colorandosi in giallo. Dalla massa di fusione isolai, con un rendimento molto scarso, una sostanza in aghi gialli (dal benzolo) fusibile a 192° C. (Vedi oltre).

Aggiungendo ad una soluzione acquosa alcoolica di acido p-etossifenilamidometansolfonico una soluzione di una quantità equivalente in alcool di una base aromatica, si ottengono precipitati cristallini di composti che si possono considerare come etossifenilamidometansolfonati delle basi rispettive, generalmente molto poco solubili in acqua. Tali composti si ottengono pure per doppia decomposizione di una soluzione di nevralteina con soluzione di un sale di una base.

Il prodotto ottenuto con cloridrato di fenetidina e nevralteina in soluzione acquosa corrisponde alla formola:



e cioè un p-etossifenilamidometansolfonato di fenetidina, il che è confermato dai risultati analitici seguenti:

gr. 0,3205 diedero 0,1977 di Ba SO<sub>4</sub> da cui risulta

	Zolfo
trovato . . . . .	8,47 %
calcolato per C <sub>17</sub> H <sub>24</sub> O <sub>5</sub> N <sub>2</sub> S . . . . .	8,68 %

Il comportamento del paraetossifenilamidometansolfonato di fenetidina, anilina, toluidina, anisidina ecc., con alcali e acidi diluiti lasciava il dubbio che tali sostanze non fossero semplicemente etossifenilamidometansolfonati delle rispettive basi: provai quindi a recuperare la nevralteina da 3 gr. di paraetossifenilamidometansolfonato di fenetidina sciogliendoli in alcool asso-

luto e trattandoli con gr. 0,17 di sodio sciolto in 30 gr. di alcool ed ottenni gr. 1,8 (anzichè gr. 2 richiesti dalla teoria) di una sostanza identificata con nevralteina anidra per i caratteri fisici e chimici e mediante una determinazione di zolfo. L'analisi diede per gr. 0,3181 di sostanza gr. 0,2848 di Ba SO<sub>4</sub>

	Zolfo
corrispondenti a . . . . .	12,33 %
calcolato per C <sub>9</sub> H <sub>12</sub> O <sub>4</sub> N <sub>5</sub> Na . . . . .	12,21 %

Si ricupera quindi semplicemente la nevralteina corrispondente all'acido etossifenilamidometansolfonico.

Il prodotto cristallizza dall'acqua in lamelline bianche lucenti poco solubili in acqua, più solubili in alcool e fonde, decomponendosi a 137° C., colorandosi intensamente in giallo.

Sostanza gialla (C<sub>18</sub>H<sub>18</sub>N<sub>2</sub>O<sub>2</sub>S) p. f. 192-193° C.

Si ottiene, riscaldando per un'ora circa, l'etossifenilamidometansolfonato di fenetidina a 150-160° C.; la massa fusa assume gradatamente un colore giallo sempre più intenso ed una consistenza più densa emettendo vapore d'acqua, anidride solforosa e vapori di fenetidina e di metilfenetidina. La massa polverizzata viene estratta ripetutamente con acqua calda, poi con acqua acidulata con HCl ed il residuo cristallizzato dal benzolo, il quale abbandona col raffreddamento una massa di bellissimi aghi di colore giallo limone di carattere inerte, insolubili nell'acqua, negli acidi, negli alcali, pochissimo solubili in alcool, abbastanza solubili in benzolo bollente e che fondono a 192-193° C. Continuando a riscaldare più forte si ha decomposizione e svolgimento di idrogeno solforato. Questa sostanza è identica con quella ottenuta con scarso rendimento dell'acido nevralteinico già citata.

**Analisi:**

gr. 0,2161 di sostanza diedero gr. 0,1591 di Ba SO<sub>4</sub>; gr. 0,2013 di sostanza diedero 16 cc. di N, T 27° e h 756 mm.; gr. 0,2084 di sostanza diedero 16,38 cc. di N, T 27° e h 758 mm.

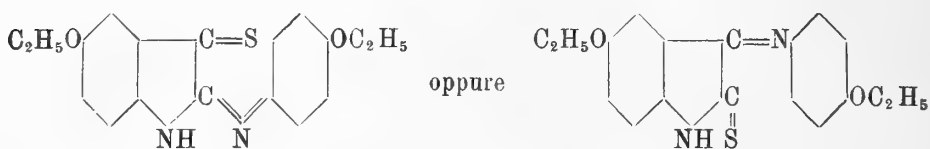
	Zolfo	Azoto
Trovato . . . . .	10,1 %	8,88-8,80 %
colcolato per C <sub>18</sub> H <sub>18</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> S . . . . .	10,14 %	8,86 %

Si può esprimere la formazione di questa sostanza dall'acido p-etossifenilamidometansolfonico con la reazione seguente:



La formola C<sub>18</sub>H<sub>18</sub>N<sub>2</sub>O<sub>2</sub>S non è basata solo sui risultati analitici sovrapcitati, bensì su considerazioni derivate dall'analisi di un composto analogo ossigenato che verrà descritto in un'altra Nota.

Alcune prove per chiarire la costituzione del composto solforato non diedero in modo diretto risultati soddisfacenti e furono abbandonate per dare la precedenza a ricerche su altri derivati della nevralteina. Ritengo tuttavia che si potrebbe, e ciò in base ad altre ricerche che verranno presto pubblicate, attribuire al composto giallo solforato una formola del tipo

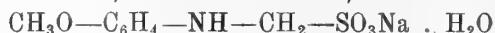


e siano similmente costituiti i composti analoghi, pure colorati in giallo, derivanti dalla paratoluidina e dalla paranisidina ecc., rappresentanti di una classe di sostanze che si potrebbe convenire di denominare (tioindamidine) per ricordare in qualche modo costituenti e gruppi; nel caso presente il composto derivato dalla nevralteina si potrebbe chiamare brevemente par-enetidina-tioindamidin-para fenetidina.

È in ogni modo interessante la formazione di tali composti dai fenilamidometansolfonati e la fissazione nella molecola di zolfo, proveniente unicamente da radicali  $\text{SO}_3\text{H}$ , mediante riscaldamento a temperatura relativamente poco elevata.

Prima di riferire sull'azione di reagenti sulla nevralteina, descriverò alcuni omologhi da me preparati ed ancora inediti:

*para metossifenilamidometansolfonato di sodio*

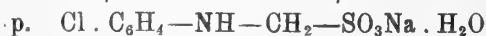


Si ottiene analogamente alla nevralteina suddescritta dalla para anisidina, formaldeide e bisolfito; cristallizza dall'acqua in lamelle bianche splendenti, è sensibilmente più solubile del composto corrispondente della p-fenetidina. L'analisi diede i risultati seguenti:

Sostanza gr. 0,5000 diedero acqua gr. 0,0375; sostanza gr. 0,2036 diedero cc. 10,0 di N, T 23° C., h 748 mm.

	Acqua	Azoto
Trovato . . . . .	7,5 %	5,57 %
Calcolato per $\text{C}_8\text{H}_{10}\text{O}_3\text{N S Na} \cdot \text{H}_2\text{O}$ . . . . .	7 %	5,45 %

*Para clorofenilamidometansolfonato di sodio*



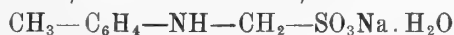
Si ottiene come i precedenti. Squamette bianche lucenti talcose al tatto, solubilità minore di quella della nevralteina. — Analisi:



Sostanza gr. 5,005 diedero gr. 0,0353 d'acqua; sostanza gr. 0,1909 diedero cc. 9,8 di N, T 24° C., h 748 mm.

	Acqua	Azoto
Trovato . . . . .	7,05 %	5,80 %
Calcolato per $C_7H_7O_3NClSNa \cdot H_2O$ . . . . .	6,88 %	5,75 %

*p. metilfenilamidometansolfonato di sodio*



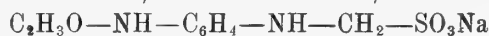
Questo prodotto fu già preparato da Bucherer e Schawlbe, ma questi autori analizzarono sempre i prodotti essiccati nella stufa e non segnalano quindi acqua di cristallizzazione. Come per i composti precedenti, è di una molecola. — L'analisi fornì per :

Sostanza gr. 1,4087, acqua gr. 0,1073; sostanza gr. 0,1420 : cc. 7,2 N a 22° e 756 mm.

	Acqua	Azoto
Trovato . . . . .	7,62 %	5,83 %
Calcolato per $C_8H_{10}O_2NS = NaH_2O$ . . . . .	7,47 %	5,80 %

Controllato anche il derivato amidometansolfonato sodico dell'anilina, trovai 8,05 d'acqua (calcolato 7,9 % per una molecola). Si può quindi affermare che i fenilamidometansolfonati di sodio preparati da Bucherer e Knövenhagel da varie amine come ortoluidina, xilidina, ortoanisidina,  $\alpha\beta$ -naftilamina, ortocloranilina, benchè gli autori non accennino alla presenza di acqua di cristallizzazione, la contengono realmente, dato che la formaldeide e il bisolfito sono adoperati in soluzione acquosa.

*para acetilamidofenilamidometansolfonato di sodio*



Si ottiene analogamente ai composti già descritti con paramidoacetil-anilide, formaldeide e bisolfito, senonchè occorre concentrare la soluzione a piccolo volume per isolare il prodotto, dato la sua grande solubilità anche in acqua fredda. Cristalli binchi lucenti, molto solubili anche in acqua fredda, facilmente solubili in alcool. Il p-acetilamidofenilamidometansolfonato sodico cristallizzato dall'acqua non ne contiene. Una determinazione d'azoto diede:

Sostanza gr. 0,1998, cc. 18,9 N<sub>2</sub> a 26° e 748 mm.

	Azoto
Trovato . . . . .	10,62 %
Calcolato per $CH_{11}N_2O_4SNa$ . . . . .	10,52 %

L'acido libero fonde a 153-154° C. decomponendosi.

*Azobenzolamidometansolfonato sodico.*



Si ottiene dall'amidoazobenzolo, formaldeide e bisolfito come per i composti precedenti. Cristallizza in pagliette lucenti di color arancio, è pochissimo solubile in acqua dando soluzioni d'un giallo intenso che l'aggiunta di acido fanno volgere al rosso precipitando subito in cristalli microscopici l'acido libero di colore rosso porporino.

L'analisi diede:

Sostanza gr. 0,7665, gr. 0,0452 d'acqua; sostanza gr. 0,1982, cc. 24,2 di azoto a 270 e 751 mm.

	Acqua	Azoto
Trovato . . . . .	5,89 %	13,73 %
Calcolato . . . . .	5,43 %	13,43 %

Anche questo composto, nonchè il composto analogo derivato dall'amidoazotoluolo del P. F. 100° a scopo di applicazione farmaceutica, si comportano col cianuro di potassio in modo normale dando i nitrili corrispondenti e questi danno l'amide e la tioamide, bellissimi composti i quali non furono per altro analizzati.

*Zoologia. — Sulla Crithidia inflata n. sp. parassita nel tubo digerente del Hygrotrechus najas. Struttura e ciclo di sviluppo.* Nota I di ANNA VIVANTI <sup>(1)</sup>, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

I flagellati appartenenti al genere *Crithidia* viventi come parassiti nel tubo digerente degli insetti, furono oggetto di molte ed interessanti ricerche. Le riassumerò brevemente a partire dal 1909, essendo stati i lavori precedenti già esaminati dalla signorina dott. Porter Annie. La signorina Porter (1909) descrive una *Crithidia* trovata come parassita nel tubo digerente, ovari e feci del *Gerris paludum*, raccolto in parecchie località della Inghilterra. Constatò che tale *Crithidia* passa per i tre stadi di pre-flagellato, flagellato e post-flagellato, caratterizzati ognuno dalle variazioni morfologiche che assume il parassita per compiere il suo ciclo di sviluppo. Il flagellato è di forma allungata, con nucleo generalmente posteriore, talvolta laterale al blefaroblasto; il flagello aderisce al corpo mediante una sottile membrana ondulante, provvista di mionemi, e pare abbia origine dal cosi-

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di zoologia della R. Università di Pavia.

detto granulo basale situato tra il blefaroblasto e l'origine del flagello stesso. Il post-flagellato, prima di uscire dal retto, s'incista, e le cisti espulse con le feci servono poi alla infezione casuale di giovani larve. La moltiplicazione avviene per scissione longitudinale, che può essere simmetrica od asimmetrica, e nel pre-flagellato anche mediante la formazione di rosette. La signorina Porter ritiene tale *Crithidia* come un parassita caratteristico dei *Gerris*.

Mackinnon D. L. (1909) studiando la *Hystriehopsylla talpae* trova nella parte posteriore dell'intestino una *Crithidia*. Egli non riscontra alcuna forma che possa essere ritenuta come uno stadio di pre-flagellato, ne osserva invece parecchie allo stadio di flagellato, che si presentano sotto tre tipi diversi, e molte allo stadio di post-flagellato od incistate. L'autore, dato lo scarso materiale, non poté fare alcuna osservazione sul processo di coniugazione; egli ammette però che vi debbano esistere forme macro e microgametiche.

Più tardi la signorina Porter (1910) fece alcune ricerche sopra un'altra *Crithidia* vivente come parassita nel tubo alimentare, uova ed ovari del *Melophagus ovinus*; ne seguì minutamente il ciclo di sviluppo studiandone in particolare la struttura. Come nella *Crithidia gerridis*, anche in questa essa nota la presenza di mionemi visibilissimi e molto ben marcati nella membrana ondulante, e di un granulo basale dal quale ha origine il flagello; essa aggiunge che talvolta il blefaroblasto è posteriore al nucleo, nel qual caso il flagello ha origine in una posizione prenucleare, e che non di rado la parte posteriore si è divisa prima della anteriore. Con le osservazioni a fresco poté accertare che l'infezione oltre che casuale, può essere anche ereditaria.

Rosenbusch F. (1910) vide una sola volta le *Crithidiae* incistate, le quali si muovevano rapidamente, rimanendo attaccate all'intestino col flagello. Si presentano sotto due aspetti:

1°) come forme allungate con protoplasma alveolare contenente nucleo posteriore e blefaroblasto anteriore. In queste notò talvolta: a) un filamento che dal blefaroblasto va al granulo basale dal quale parte il flagello che termina con un ingrossamento; b) un filamento centrale che partendo dal lato posteriore giunge sino al blefaroblasto dove si scinde in due parti e va a terminare nel granulo basale;

2°) come forme arrotondate od ovali con grosso nucleo, piccolo blefaroblasto e sottile flagello che sporge poco dal corpo.

L'autore dice che tali forme possono incistarsi, e che l'incistamento può avvenire in due modi differenti; aggiunge che mentre in una forma prevalgono blefaroblasto ed apparato flagellare, nell'altra è più appariscente il nucleo. Egli pensa che si tratti di gameti, e che si debba ritenere la prima forma di tipo maschile e la seconda di tipo femminile. Fa però semplicemente una ipotesi avendo egli vedute una sola volta le *Crithidiae* incistate.

La signorina Porter (1911) descrive il ciclo di sviluppo della *Crithidia pulicis* n. sp. trovata come endoparassita del *Pulex irritans*. Per lo studio

usa materiale raccolto dalla propria persona e nutrito col proprio sangue. Trova molti parassiti nel tubo digerente e nelle feci, ma non ne riscontra mai negli organi genitali nè nelle uova, ciò che le fa credere l'infezione casuale e non ereditaria. Ritene la *Crithidia pulicis* come un vero parassita della pulce, e non come uno stadio nel ciclo evolutivo di qualche tripanosoma. A rafforzare tale opinione essa dice di non aver mai trovato alcun tripanosoma nel suo sangue, nè di essere stata mai affetta da alcuna malattia.

Swellengrebel N. H. (1911) studiando una *Crithidia* trovata nell'intestino della *Calliphora erythrocephala* potè constatare che essa presenta veri stadi di tripanosoma; forme cioè che, invece di avere il blefaroblasto anteriore al nucleo, lo hanno situato posteriormente. Nella *Crithidia* l'autore trova un granulo basale, ed osserva che nella divisione il nuovo flagello ha origine da una nuova radice flagellare, che si forma alla base del vecchio, e che i due nuclei figli prima di scindersi completamente rimangono uniti da una striscia di cromatina.

Hindle E. e Lewis R. C. (1912) pubblicano una breve Nota sopra la *Crithidia* del *Cletus varius*. I loro studi però non sono basati sulle osservazioni a fresco, ma sugli strisci. Essi trovano due forme di pre-flagellato, ma incerte; molte forme di flagellato con nucleo e blefaroblasto, ma prive di membrana ondulante. Notano in tali forme un « end-bead » che certamente corrisponde al granulo basale di altri autori, posto all'apice di un vacuolo situato di faccia al blefaroblasto, dal quale parte il flagello. Riscontrano una sola forma allo stadio di post-flagellato e qualche cisti con nucleo e blefaroblasto, ma senza « end-bead ». In base a queste poche osservazioni non hanno creduto di poter dare definizione sistematica.

Sulla *Crithidia* del *Melophagus* furono già fatte molte ricerche; ultimamente (1912) Chatton e Delanoë, riprendendone lo studio, fanno alcune osservazioni sul ciclo di sviluppo e sulla propagazione dell'infezione. Essi dicono che non riscontrarono mai stadi di tripanosoma, ma sempre forme con blefaroblasto anteriore al nucleo, e che non osservarono mai stadi evolutivi nè nelle uova nè nelle larve, ciò che li indusse a concludere che l'infezione non è ereditaria, ma avviene per ingestione.

#### MATERIALE E METODO.

Nella primavera dell'anno scorso 1915. io ho intrapreso una serie di ricerche per studiare i flagellati dei rincoti acquatici, non mai osservati in Italia. Dopo varie indagini su specie diverse, trovai che una specie appartenente al genere *Gerris*, appariva molto spesso infetta; feci allora raccogliere e talvolta raccolsi io stessa tali insetti, e le pesche incominciate in aprile terminarono verso la fine di giugno.

I *Gerris* usati per le mie ricerche furono pescati in gran parte in un ruscelletto detto « Carona » proveniente dal torrente di « San Genesis » che prende il nome dal paese che attraversa, che dista circa 6 km. da Pavia. Al « Carona » si giunge in mezz'ora di cammino circa dopo aver passata la cascina di « San Giuseppe », ed aver raggiunto quella più piccola della « Bordoncina ». La corrente del ruscello è abbastanza rapida; il « Carona » in qualche punto è molto stretto, ed in altri invece si allarga notevolmente; presenta però sempre un fondo basso e melmoso. Alle sponde è fiancheggiato da abbondante vegetazione, ed una fila di salici rende il suo corso ombroso nelle ore del mattino. La temperatura dell'acqua oscilla tra i 15° ed i 16° centigradi circa.

Altre volte invece furono raccolti in acque stagnanti che si trovano nelle vicinanze del Ticino, ma qualunque ne fosse la provenienza, sia da acque correnti, che da quelle stagnanti, i *Gerris* nei mesi caldi erano sempre infetti. Li osservai ogni volta accuratamente e li trovai sempre appartenenti alla sottospecie del *Hygrotrechus najas*.

Espongo nella seguente tabella i risultati delle mie osservazioni:

DATA DELLA PESCA	NUMERO degli individui raccolti	NUMERO degli individui infetti
26 aprile 1915 . . . .	80-100 (♀ e ♂)	4-5
3 maggio 1915 . . . .	27 ♀	3 ♀
	35 ♂	5 ♂
10-16 maggio 1915 . . . .	42 ♀	13 ♀
	49 ♂	13 ♂
31 maggio 1915 . . . .	56 ♀	23 ♀
	47 ♂	17 ♂
27 giugno 1915 . . . .	78 ♀	6 ♀
	79 ♂	8 ♂

Dando un semplice sguardo a questa tabella possiamo osservare che, mentre in aprile ed ai primi di maggio la percentuale degli individui infetti è piccolissima, aumenta a poco a poco fin verso la metà di maggio, raggiunge il massimo alla fine del mese stesso e diminuisce poi di molto in quello successivo.

Per le osservazioni spaccavo i *Gerris* dal lato ventrale con un bisturi per estrarre l'intestino, che mettevo in un vetro da orologio con qualche goccia di soluzione di cloruro di sodio al 0.9 %.

Se l'intestino era infetto, o lo includevo per sezionarlo, o lo schiacciavo cautamente per farne uscire il contenuto che, in parte mi serviva per gli strisci, ed in parte per le osservazioni a fresco.

Sia per gli strisci asciutti od umidi, esposti o no ai vapori di acido osmico e quindi fissati per 10 minuti in alcool metilico od etilico, che per le sezioni fissate in sublimato alcoolico di Schaudinn, usai il metodo Giemsa, che mi diede buoni risultati.

Osservando accuratamente gli strisci potei studiare il parassita nei suoi più minuti particolari e seguirne il completo ciclo di sviluppo, mentre gli studi sulle sezioni mi convinsero che le *Crithidia* vivono liberamente nel lume intestinale.

Dando uno sguardo alla tavola si può subito vedere che il parassita è senza dubbio una *Crithidia*.

Tutte le forme presentano costantemente il blefaroblasto anteriore al nucleo, un solo flagello e la membrana ondulante.

La *Crithidia* è un parassita del *Gerris* e svolge il suo ciclo di sviluppo nel tubo digerente, dove non presenta alcuno stadio di tripanosoma.

La *Crithidia* del *Hygrotrechus najas* ha un grande polimorfismo ed oltre alle forme più comuni a tali flagellati, ne presenta altre (figg. 30-52) che sino ad ora non furono descritte.

Passa per tre stadi, che seguendo le solite denominazioni, usate dagli autori nella descrizione di tali flagellati, chiamerò con:

- 1°) pre-flagellato;
- 2°) flagellato;
- 3°) post-flagellato.

#### *Pre-flagellato.*

In questo stadio ho trovato solo poche forme, le quali si presentano sotto vario aspetto. Generalmente sono arrotondate od ovali (figg. 1-5), talvolta invece rettangolari (fig. 8), od a contorni irregolari (figg. 9 e 10).

Tutti i pre-flagellati mostrano un grosso nucleo, spesso a struttura apparentemente omogenea, di rado costituito dall'accumulo di cromidi, situato nel centro, o spostato verso la periferia. La forma del nucleo è arrotondata (fig. 1), od ovale (fig. 2). Il blefaroblasto è sempre anteriore o laterale al nucleo, mai posteriore. Di solito è arrotondato, ma talvolta è ricurvo, ed assume la forma di un piccolo fagiolo (fig. 5); dista più o meno dal nucleo e molto spesso si trova vicino alla periferia. La sua struttura appare sempre omogenea. A brevissima distanza dal blefaroblasto parte il flagello, che, nei primi stadi di sviluppo del parassita, o rimane nell'interno del corpo (fig. 2), o ne segue il margine periferico (fig. 1). Esso va successivamente allungandosi (figg. 3-5) e presto si libera dal corpo (figg. 6 e 7). Alla base è alquanto ingrossato, ma diviene sempre più sottile verso l'estremità. In tutta la massa protoplasmatica sono sparsi granuli di cromatina, dei quali alcuni sono piccoli e si tingono in rosa od in azzurro pallido col Giemsa; altri sono più grossi ed assumono una colorazione rosso-oscuro. La loro distribu-

zione è assolutamente irregolare, in certi punti sono più ammassati, in altri meno. Nelle forme di pre-flagellato con la parte anteriore già allungata è rarissimo osservare tali granulazioni al di sopra del nucleo.

Man mano che il parassita cresce, la sua parte distale si allunga e si assottiglia, mentre la posteriore rimane ancora molto larga (figg. 11 e 12); il parassita però mantiene i soliti caratteri, ad eccezione della formazione di una sottile membrana ondulante, che segue l'andamento del flagello.

Le forme di pre-flagellato in divisione che ho vedute sono poche, ma tali da dimostrare che la divisione avviene in due maniere: o per scissione longitudinale, o mediante la formazione di una rosetta data dalla ripetuta divisione di un individuo.

#### *Flagellato.*

La struttura del parassita in questo stadio presenta i caratteri generali di tutte le *Crithidiae* nel loro completo sviluppo.

Le forme tipiche di *Crithidiae* del *Hygrotrechus najas* sono lunghe e strette. La lunghezza può variare di molto, e mentre vi sono individui che misurano solamente da  $6\mu$ - $9\mu$  senza il flagello, ve ne sono altri che raggiungono gli  $86\mu$  circa; la larghezza varia solo di pochi  $\mu$  ( $1.5\mu$ - $3.5\mu$ ). Tutte le forme, sia le più piccole (figg. 13-16), che le più grandi (figg. 23-24) hanno i medesimi caratteri: grosso nucleo generalmente allungato, situato circa alla metà del corpo, a struttura apparentemente omogenea (fig. 53), o formato dall'accumulo di granuli di cromatina che in alcuni casi, lo riempiono totalmente (fig. 23) ed in altri sono distribuiti alla periferia (fig. 27); blefaroblasto arrotondato (fig. 25), ovale (fig. 23), od a guisa di fagiolo (figg. 31 e 49) vicino od anteriore al nucleo, mai posteriore; a brevissima distanza dal blefaroblasto parte il flagello al quale aderisce una sottile membrana ondulante.

Non ho mai riscontrato nel breve spazio situato tra l'origine del flagello ed il blefaroblasto il così detto " basal granule " (Porter, Swellengrebel) o " end bead " (Hindle). L'estremità anteriore del parassita è sempre acuminata, mentre la posteriore o termina a punta acuta (fig. 17), o più spesso è arrotondata (fig. 24). La massa protoplasmatica è ricca di granulazioni, che abbondano nella estremità basale e sono rare, o mancano del tutto in quella apicale. Alcune sono molto grosse; altre piccolissime; spesso ve ne sono tre vicine disposte in modo da formare un triangolo spiccatamente visibile (figg. 22 e 23).

La forma ora descritta è la più comune. Alcuni parassiti però presentano certe parti alquanto allargate, assumendo così un aspetto strano ed irregolare.

Se noi osserviamo una serie di tali *Crithidiae* (figg. 27-49) potremo vedere che il rigonfiamento varia di posizione da individuo a individuo;

mentre in alcune forme, sia lunghe che corte, esso corrisponde all'estremità basale (figg. 27-39), in altre (figg. 40-47) si trova tra l'estremità basale ed il nucleo, ed in altre ancora (figg. 48 e 49) è in corrispondenza del nucleo stesso.

Questi parassiti sono ricchissimi di cromidi che si accumulano in ispecie nella parte più larga disponendosi generalmente alla periferia. La colorazione che assume la *Crithidia* col Giemsa è sempre la medesima; ho notato però che in corrispondenza dell'allargamento il protoplasma invece di avere la solita tinta rosea, assume una colorazione azzurrognola o viola pallido.

Meritano ancora di essere osservate tre forme (figg. 50-52), che oltre ad essere allargate in corrispondenza dell'estremità basale, sono caratterizzate dalla grande distanza che v'è tra il nucleo ed il blefaroblasto. In tutte e tre il grosso nucleo è in vicinanza dell'estremità terminale che è ricchissima di cromidi; circa a metà del corpo v'è il blefaroblasto, a breve distanza dal quale parte un sottile flagello che segue l'andamento della membrana ondulante. Anche la signorina Porter (1911) riscontra nella *Crithidia pulicis* stadi simili, che essa dice di aver trovato solo dopo un periodo di grande attività.

Altre forme (figg. 54-60), nel loro completo sviluppò, presentano molto larga la parte basale, la quale d'un tratto si restringe e termina in una seconda porzione più o meno lunga e molto stretta. La parte basale varia da  $4\mu$ - $8\mu$  circa e la terminale da  $1\mu$ - $2\mu$  solamente, in larghezza. Sono forme ricchissime di granulazioni; il nucleo è dato quasi sempre da un accumulo di cromidi, ed il blefaroblasto talvolta è molto vicino al nucleo (fig. 57), e tal'altra invece ne dista d'un tratto abbastanza considerevole (fig. 59).

Riassumendo dunque possiamo dire che i tipi principali di forme nel secondo stadio sono tre:

- a) forme lunghe e strettissime;
- b) forme lunghe e sottili, aventi una parte più o meno larga che varia di posizione da individuo a individuo;
- c) forme allargate posteriormente con prolungamento terminale molto sottile.

Generalmente questi flagellati vivono isolati, talvolta però quelli appartenenti al primo tipo si raggruppano attorno ad una particella alimentare alla quale aderiscono mediante il flagello (fig. 53).

#### BIBLIOGRAFIA.

- Porter Annie (1909), *The Morphology and Life-history of Crithidia gerridis, as found, in the British water-bug, Gerris paludum*. Parasitology, II, pp. 348-366.
- Mackinnon D. L. (1909), *Note on two New flagellate parasites, in Fleas, Herpetomonas ctenophthalmi n. sp. and Crithidia hystriehopsyllae n. sp.* Parasitology, II, pp. 288-296, 1 tavola.



- Porter Annie (1910), *The structure and Life-history of Crithidia melophagia*. Quart. Journ. Microsc. Sci., vol. 55, pag. 189.
- Rosenbusch F. (1910), *Ueber eine neue Encyterung bei Crithidia muscae domesticae*. Centralbl. f. Bakt., I, Abt. Orig., Bd. 53, H. 4.
- Porter Annie (1911), *The structure and Life-history of Crithidia pulicis, n. sp., parasitic, in the alimentary tract of the Human Flea, Pulex irritans*. Parasitology, IV, pag. 237, 1 tavola.
- Swellegrebel N. H. (1911), *Note on the morfology of Herpetomonas and Crithidia, with some remarks on a physiological degeneration*. Parasitology, IV, pag. 108.
- Hindle E. e Lewis R. C. (1912), *Note on Crithidia cletii, n. sp. Parasitic, in the alimentary canal of Cletus varius Dall.* Parasitology, V, pp. 109-113, 17 figure.
- Chatton E. e Delanoe P. (1912), *Observations sur l'evolution et la propagation de Crithidia melophagi* Flü. C. R. Soc., Biol., Paris, T. 72, pp. 942-944.

### SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

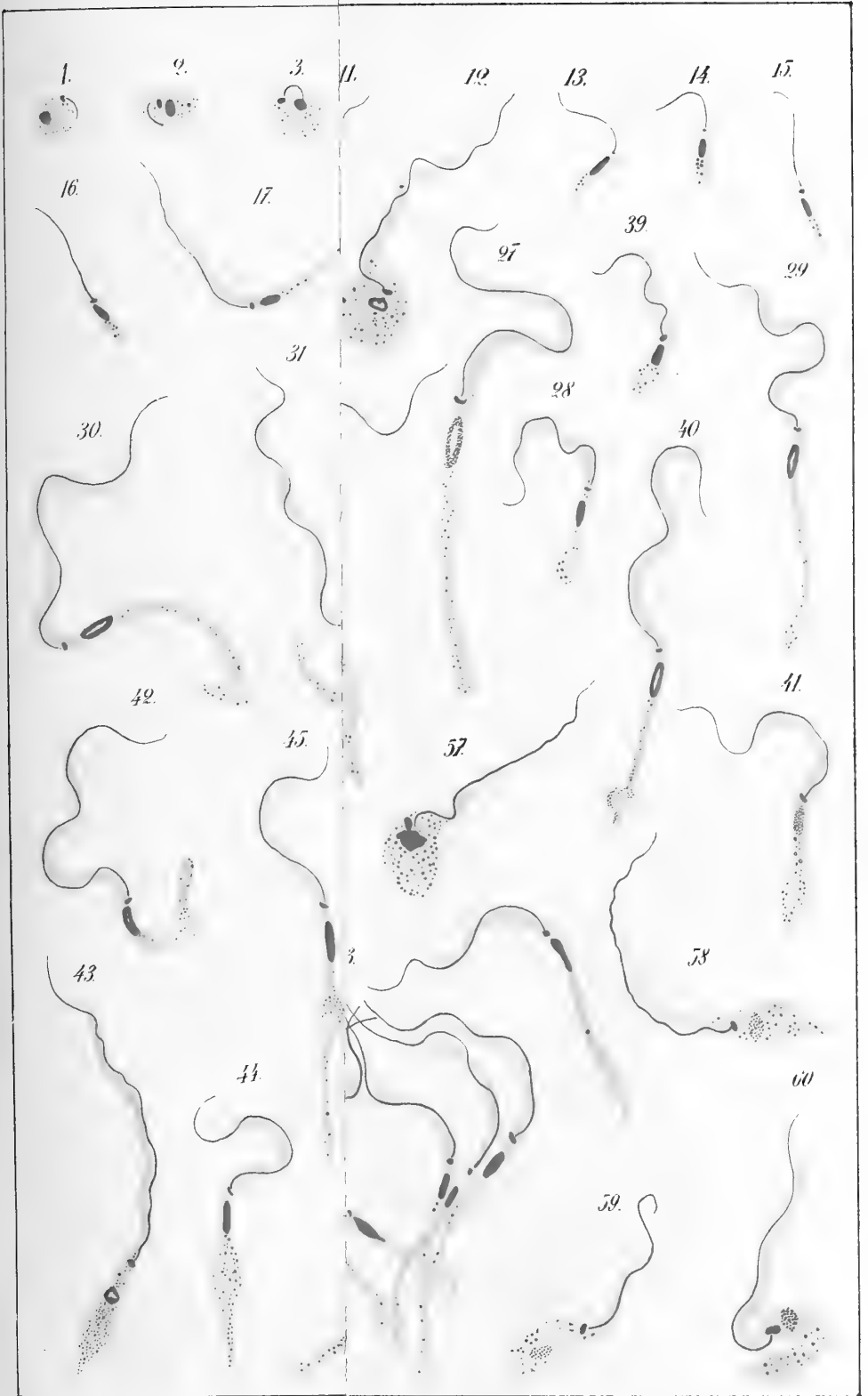
I disegni sono fatti con la camera chiara usando l'obiettivo di 1/15 e l'oculare 8. L'ingrandimento è di 1200 volte.

- FIG. 1. — Pre-flagellato tondeggiantissimo ( $6\mu-7\mu$ ), nucleo ovale vicino alla periferia, piccolo blefaroblasto, sottile flagello ( $2\mu-3\mu$ ) che segue il margine esterno del corpo.
- FIG. 2. — Pre-flagellato alquanto allungato ( $4.74\mu \times 3.16\mu$ ).
- FIG. 3. — Pre-flagellato con flagello più sviluppato che quello della fig. 1.
- FIG. 4. — Pre-flagellato con flagello uscito dal corpo, che misura  $7.40\mu$ , grosso nucleo vicino alla periferia distante dal blefaroblasto, granulazioni in tutto il protoplasma, più grosse vicino al nucleo ed al blefaroblasto.
- FIG. 5. — Pre-flagellato allungato ( $9.48\mu \times 6.32\mu$ ) con flagello aderente al corpo, nucleo ovale, blefaroblasto a forma di fagiolo.
- FIG. 6. — Pre-flagellato in istadio abbastanza avanzato, parte basale ancora molto larga, parte apicale accenna ad allungarsi, nucleo tondeggiantissimo, blefaroblasto schiacciato, flagello lungo.
- FIG. 7. — Pre-flagellato di forma rettangolare ( $11.06\mu \times 6.32\mu$ ).
- FIG. 8. — Pre-flagellato a forma di parallelogramma a contorni regolari, nucleo tondeggiantissimo vicino alla periferia, blefaroblasto piccolissimo, flagello sottile e lungo ( $15.80\mu$ ).
- FIG. 9. — Pre-flagellato ( $12.64\mu \times 7.90\mu$ ) con nucleo tondeggiantissimo a grossi granuli cromatici, blefaroblasto vicino alla periferia, lungo flagello libero completamente dal corpo.
- FIG. 10. — Pre-flagellato di forma irregolare ( $7.90\mu \times 5.53\mu$ ) con nucleo tondeggiantissimo, il blefaroblasto non si vede, il lungo flagello ( $20.54\mu$ ) è libero dal corpo.
- FIGG. 11, 12. — Pre-flagellati in istadio molto avanzato, granulazioni abbondanti nella parte basale, blefaroblasto vicino al nucleo.
- FIGG. 13-16. — Quattro piccoli flagellati, flagello sempre più lungo del corpo che non oltrepassa mai i  $9\mu$ , i flagelli misurano da  $9\mu-14\mu$  circa.
- FIG. 17. — Flagellato con parte basale ed apicale appuntita ( $31.60\mu$ ), poche granulazioni, nucleo grosso ovale, piccolo blefaroblasto.
- FIG. 18. — Flagellato con parte basale allargata, nucleo e blefaroblasto tondeggiantissimi, il corpo misura  $21\mu$  circa.
- FIG. 19. — Flagellato con parte basale appuntita ( $33.18\mu$ ).
- FIG. 20. — Lungo flagellato ( $51\mu$  circa) con nucleo a granuli cromatici.

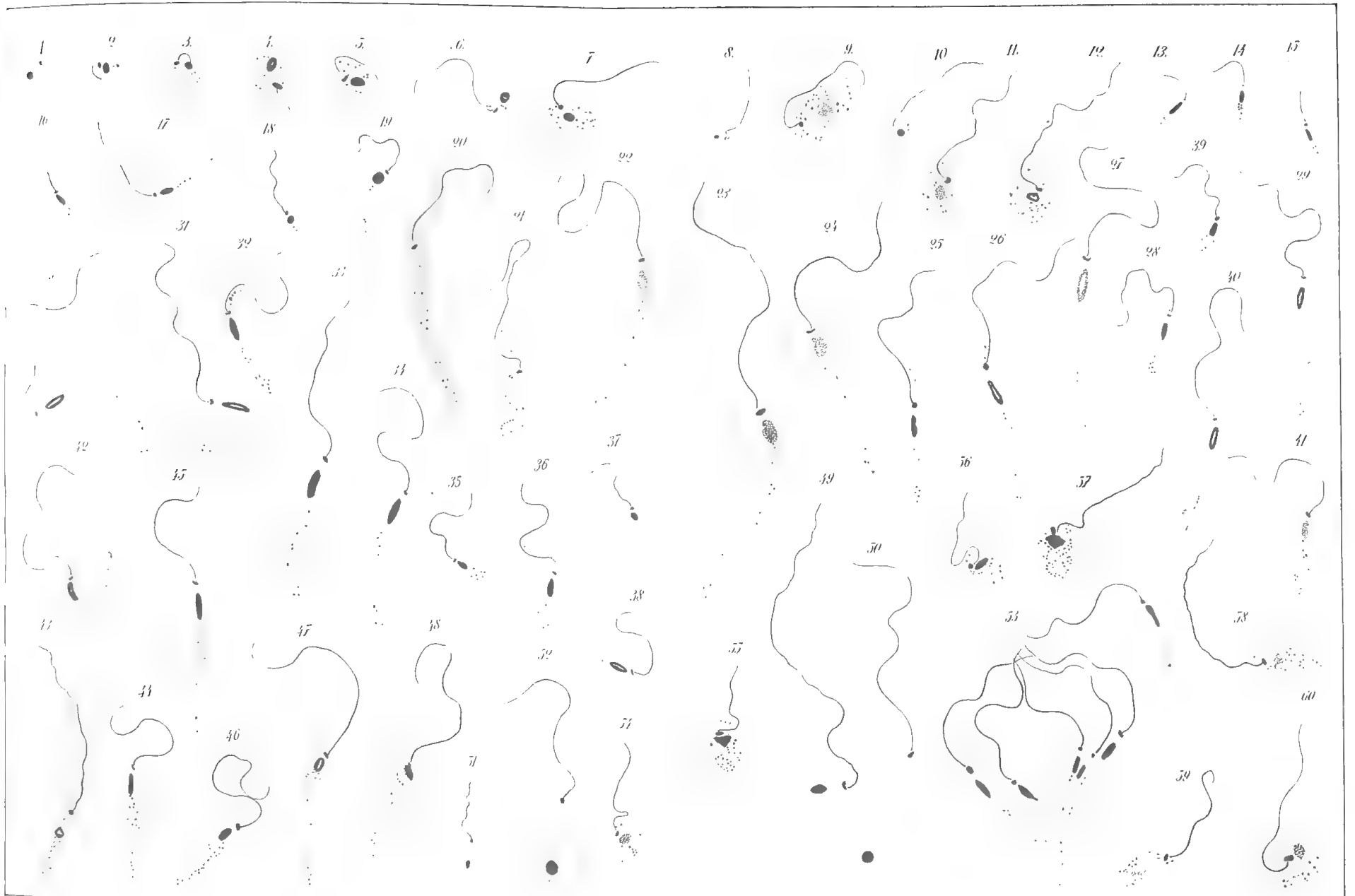
- FIG. 21. — Flagellato (58.46  $\mu$ ) con parte basale ricchissima di granulazioni, parte apicale lunga e sottile.
- FIG. 22. — Lungo flagellato (58.46  $\mu$ ), in corrispondenza del nucleo misura 3.16  $\mu$  in larghezza; nucleo grosso, lungo flagello, abbondanti granulazioni nella parte basale.
- FIG. 23. — Flagellato lunghissimo (60.04  $\mu$ ), in corrispondenza del nucleo misura 3.16  $\mu$  in larghezza, grosso nucleo, blefaroblasto allungato, granulazioni nella parte basale.
- FIG. 24. — Flagellato allargato posteriormente; lungo 58.46  $\mu$ .
- FIG. 25, 26. — Due forme strette e lunghe (61  $\mu$  circa); pochi cromidi.
- FIG. 27. — Lungo flagellato (63.20  $\mu$ ) con parte basale allargata, nucleo allungato con granuli di cromatina alla periferia.
- FIG. 28. — Crithidia lunga 33.18  $\mu$ , posteriormente larga 3.16  $\mu$ .
- FIG. 29, 30. — Flagellati con allargamento basale, il primo è lungo 58.46  $\mu$ , la sua porzione allargata misura 2.37  $\mu$ ; il secondo è lungo 62.52, la porzione allargata misura 3.16  $\mu$ .
- FIG. 31. — Flagellato lungo 62.52  $\mu$ , grosso nucleo posto circa alla metà del corpo; estremità basale allargata, ricca di cromidi.
- FIG. 32. — Flagellato con parte basale allargata (lungo 39.40  $\mu$ ).
- FIG. 33. — Flagellato lungo (52.14  $\mu$ ), estremità basale allargata, ricca di granulazioni; flagello lungo e sottile.
- FIG. 34-39. — Sei flagellati di varia dimensione, con estremità posteriore rigonfia.
- FIG. 40-47. — Flagellati di aspetto e dimensione differenti, tutti con porzione protoplasmatica allargata, situata a diversa altezza tra l'estremità posteriore ed il nucleo.
- FIG. 48. — Flagellato con porzione allargata in corrispondenza del nucleo, nucleo irregolare, blefaroblasto piccolissimo, parte basale lunga e molto sottile.
- FIG. 49. — Lungo flagellato (86  $\mu$  circa) con porzione allargata in corrispondenza del nucleo, estremità basale appuntita, blefaroblasto a forma di fagiolo, flagello lunghissimo 67  $\mu$  circa.
- FIG. 50. — Flagellato con parte basale allargata e con nucleo molto distante dal blefaroblasto. Lunghezza totale della Crithidia 67.94  $\mu$ , lunghezza del flagello 39.50  $\mu$ , distanza tra nucleo e blefaroblasto 20.54  $\mu$ .
- FIG. 51. — Piccolissimo flagellato con le medesime caratteristiche del precedente. Lunghezza della Crithidia 18.96  $\mu$ , lunghezza flagello 9.48  $\mu$ .
- FIG. 52. — Altro flagellato con le medesime caratteristiche. Lunghezza della Crithidia 34.76  $\mu$ , lunghezza del flagello 23.70  $\mu$ .
- FIG. 53. — Gruppo di flagellati che aderiscono col flagello ad una particella alimentare. Forme lunghe e sottili con poche granulazioni. Variano da 48  $\mu$ -68  $\mu$  in lunghezza.
- FIG. 54-60. — Flagellati con parte basale larga (varia da 4  $\mu$ -9  $\mu$ ) e parte apicale appuntita e sottilissima, nucleo ovale (fig. 56), o triangolare (fig. 57), blefaroblasto più o meno arrotondato, molte granulazioni nella parte basale. I parassiti, in lunghezza, variano da 18  $\mu$ -42  $\mu$  circa.

E. M.

---









## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

---

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76). Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.
- Vol. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 2<sup>o</sup>. Sem. 1<sup>o</sup>.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-XII. Fasc. 2.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.
- 
- 

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 21 gennaio 1917.*

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Angeli</i> . Sopra gli acidi azocarbonici. . . . .	Pag. 95
<i>Berzolari</i> . Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos (pres. dal Socio <i>Bertini</i> ) . . . . .	" 102
<i>Pérès</i> . Sur la composition de 1 <sup>ère</sup> espèce. Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition (pres. dal Socio <i>Volterra</i> ) . . . . .	" 104
<i>Del Regno</i> . La corrente termo-ionica nelle comuni lampade ad incandescenza (pres. dal Corrisp. <i>Cantone</i> ). . . . .	" 110
<i>Sanna</i> . Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie (pres. dal Socio <i>D'Ovidio</i> ) (*)	" 116
<i>Fredà e Montara</i> . Sulla caratteristica dell'arco cantante nei regimi cui corrispondono diverse emissioni spettrali (pres. dal Socio <i>Blaserna</i> ). . . . .	" "
<i>Palagi</i> . Rilevamenti di anomalie magnetiche nei dintorni di Roma. II: Osservazioni sulle variazioni col tempo di alcune anomalie (pres. dal Socio <i>Millosevich</i> ) . . . . .	" 123
<i>Lepetit</i> . Alcuni prodotti dell'azione della formaldeide e bisolfito su anine aromatiche e derivati dei medesimi (pres. dal Socio <i>Angeli</i> ) . . . . .	" 126
<i>Vivanti</i> . Sulla <i>Crithidia inflata</i> n. sp. parassita nel tubo digerente del <i>Hygrotrechus najas</i> . Struttura e ciclo di sviluppo (pres. dal Socio <i>Grassi</i> ) . . . . .	" 132

---

(\*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.





ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici, se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione, la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto, o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo, in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorché nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 4 febbraio 1917.*

A. RÒITI, Vicepresidente.

---

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

---

Astronomia. — *Sulla determinazione della polodia.* Nota del  
Corrispondente V. CERULLI.

A pag. 532 e segg. del tomo XXX (1913) del Bulletin astronomique è un Articolo del sig. H. Roggero, assistente dell'Osservatorio di Pino Torinese, in cui si pretende dimostrare che, per conoscere in grandezza e direzione gli spostamenti del polo sopra la superficie terrestre, e quindi tracciare la cosiddetta « polodia », possono bastare osservazioni sistematiche delle distanze zenitali meridiane di parecchie stelle, o, in altre parole, osservazioni di latitudine, *fatte in un solo osservatorio.*

L'assurdità di questa proposizione salta agli occhi di chiunque consideri come due essendo le incognite da determinare, due almeno debbano pur essere i dati d'osservazione: è quindi impossibile che basti la variazione di latitudine di un'unica specola. Nè è difficile, nella elementare analisi del Roggero, scoprire l'errore radicale che ha condotto alla falsa asserzione. Sta esso nell'aver considerato lo spostamento del polo come un archetto di circolo orario fisso, cioè non partecipante alla rotazione terrestre: in altre parole nell'aver creduto che si tratti di moti dell'asse di rotazione e quindi del polo celeste nella sfera celeste, anzichè di moti del polo terrestre sopra la superficie del globo, ossia della Terra rispetto all'asse di rotazione. Il lettore si accorge di ciò anche alla semplice ispezione delle figure dell'Articolo, dove vede il nuovo parallelo di un dato punto della Terra, inclinato sull'antico, e le distanze polari (non soltanto le zenitali) delle stelle, mutate in sèguito dello spostamento di polo sulla Terra, come se si trattasse di spostamento del polo in cielo, ossia dell'asse di rotazione.

Il contenuto dell'Articolo del Roggero poggia dunque su di un malinteso, ed è totalmente da rigettare.

L'errore in parola riappare nel Bulletin del 1914 a pag. 114 in una Nota del prof. Boccardi, Direttore del detto Osservatorio di Pino, che si chiude con queste parole:

« Le grand nombre de nos observations et leur précision nous mettent à même de pouvoir déterminer la polodie par nos observations, indépendamment des observations faites dans les six stations internationales ».

Con qual metodo si determini a Pino la polodia non è detto, ma è manifestamente quello del Roggero, perchè già da questo indicato nel suo Articolo.

Riappare poi l'errore fin una terza volta nel Bulletin dell'ottobre 1816, in una rassegna, senza disamina, che l'astronomo B. B. fa delle pubblicazioni di Pino Torinese. In essa si riportano — senza sospettarne la falsità — le formule del Roggero.

L'essersi l'assurdo potuto insinuare, e sostenere così a lungo, in un periodico dell'importanza del Bulletin, ci ha fatto pensare che fosse doveroso il rilevarlo. Non avremmo, in caso diverso, stimato prezzo dell'opera l'occuparcene (<sup>1</sup>).

Per poter determinare la polodia da una sola stazione bisognerebbe conoscere con estrema esattezza oltre la variazione di latitudine, anche lo spostamento del zenit perpendicolare al meridiano, o, che fa lo stesso, l'influenza di detto spostamento sullo stato dell'orologio. Detta  $d\theta$  questa influenza e  $d\varphi$  la variazione della latitudine, si avrebbero le relazioni:

$$\text{Spostamento del polo} \dots = \sqrt{d\varphi^2 + \cotg^2 \varphi d\theta^2}$$

$\theta$  = angolo fra lo spostamento del polo ed il meridiano della

$$\text{stazione} \dots = \text{arctg} \left( \cotg \varphi \frac{d\theta}{d\varphi} \right)$$

Si potrebbe anche, invece di  $d\theta$ , far entrare in considerazione il cambiamento  $dA$  d'azimut di una mira terrestre, e le relazioni sarebbero:

$$\text{Spostamento del polo} = \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi dA^2}$$

$$\text{tg } \theta = \cos \varphi \frac{dA}{d\varphi}.$$

Ma sì nell'uno che nell'altro modo, la soluzione del problema sarebbe puramente teorica, bastando microscopici errori nelle già di per sè minime quantità  $d\theta$ ,  $d\varphi$ ,  $dA$ : a falsar totalmente la conoscenza dell'angolo  $\theta$ .

Ne concludiamo che la polodia può costruirsi solo in base ai  $d\varphi$  di diverse stazioni: ciò che il buon senso aveva suggerito fin dal primo giorno che si scopersero variazioni nelle latitudini.

(<sup>1</sup>) Di altri Articoli della stessa provenienza di Pino, accolti anch'essi nel Bulletin, avremo forse opportunità di occuparci in seguito.

Fisica matematica. — Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici. Nota II del Corrisp. O. TEDONE.

V. — MEZZO CRISTALLINO UNIASSICO INDEFINITO

8. Supponiamo ora che il nostro mezzo cristallino si estenda all'infinito, in tutti i sensi, e che, in esso, non abbiano luogo correnti di convezione, per cui sia dappertutto  $u = v = w = 0$ . Supponiamo, quindi, che, all'istante iniziale  $t = 0$ , sieno dati i valori  $X_0, Y_0, \dots, W_0$  di  $X, Y, \dots, W$ , per ogni sistema di valori delle coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  e cerchiamo di determinare i valori delle stesse quantità per ogni sistema di valori delle coordinate stesse ad ogni altro istante  $t$  successivo all'istante iniziale. Questo problema ci vien subito risolto, per una parte, dalle formole generali (8) e (15), precedentemente costruite, se, in queste, oltre a porre  $u = v = w = 0$ , si suppone che la varietà a tre dimensioni a cui appartengono  $\sigma_3$  e  $\bar{\sigma}_3$  si riduca all'iperpiano  $\tau = 0$ ; per l'altra parte, invece, ci vien risolto dalle formole (21) costruite nel piano  $\xi = x, \eta = y$  del solito spazio a quattro dimensioni e adattate alle equazioni (16), (16'), nella stessa ipotesi  $u = v = w = 0$  e nell'altra che la linea  $s$  a cui appartengono i punti P, Q, R sia la retta  $\tau = 0$  del piano  $\xi = x, \eta = y$  sopramenzionato.

Chiamando S lo spazio compreso nella sfera ordinaria di raggio  $Ct$  col centro nel punto  $(x, y, z)$  ed  $\bar{S}$  lo spazio compreso nell'ellissoide

$$\varepsilon_3 [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] + \varepsilon_1 (\zeta - z)^2 = c^2 t^2,$$

concentrico alla sfera precedente, possiamo scrivere, intanto, le due formole seguenti per W e Z

$$(22) \left\{ \begin{aligned} 4\pi W(x, y, z, t) &= 4\pi W_0(x, y, z) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_S \frac{Y_0}{r} dS - \frac{\partial}{\partial y} \int_S \frac{X_0}{r} dS \right] + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_S \frac{W_0}{r} dS - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_S \frac{U_0}{r} dS + \frac{\partial}{\partial y} \int_S \frac{V_0}{r} dS \right], \\ \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z(x, y, z, t) &= \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z_0(x, y, z) + \\ &\quad + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{S}} \frac{V_0}{r} d\bar{S} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{S}} \frac{U_0}{r} d\bar{S} \right] + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_{\bar{S}} \frac{Z_0}{r} d\bar{S} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{S}} \frac{X_0}{r} d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{S}} \frac{Y_0}{r} d\bar{S} \right]. \end{aligned} \right.$$

Determinate, così, W e Z, troviamo subito, per X e V,

$$\begin{aligned}
 2X(z, t) &= X_0(z - Ct) + X_0(z + Ct) + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} [V_0(z - Ct) - V_0(z + Ct)] + \\
 &\quad + \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] + W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] - Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau, \\
 (23) \quad & \\
 2V(z, t) &= \sqrt{\varepsilon_1} [X_0(z - Ct) - X_0(z + Ct)] + V_0(z - Ct) + V_0(z + Ct) + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] - W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau + \\
 &\quad + c \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] + Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau
 \end{aligned}$$

nelle quali formole non abbiamo messi in vista i parametri  $x$  e  $y$  da cui le nostre quantità pure dipendono. Per Y ed U troviamo, invece, analogamente

$$\begin{aligned}
 2Y(z, t) &= Y_0(z - Ct) + Y_0(z + Ct) - \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} [U_0(z - Ct) - U_0(z + Ct)] - \\
 &\quad - \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] + W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] - Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau, \\
 (23') \quad & \\
 2U(z, t) &= -\sqrt{\varepsilon_1} [Y_0(z - Ct) - Y_0(z + Ct)] + U_0(z - Ct) + U_0(z + Ct) + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] - W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau - \\
 &\quad - c \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] + Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau.
 \end{aligned}$$

#### VI. — CENTRO LUMINOSO IN UN MEZZO UNIASSICO.

9. Mettendoci dal punto di vista della teoria elettromagnetica della luce, diremo che un punto A, in un mezzo qualunque, è un centro lumi-

noso (più in generale, centro di scuotimento elettromagnetico) se all'interno di una piccolissima regione  $S$ , intorno al punto  $A$ , esistono delle masse elettriche vibranti (restando nel caso più generale, si può lasciare indeterminata la frequenza di queste vibrazioni) le quali restino continuamente all'interno della detta regione di spazio, e intendendo di considerare gli effetti prodotti dal movimento di queste masse elettriche a distanze finite da  $A$  e infinitamente grandi rispetto alle dimensioni di  $S$ .

Otterremo subito le formole atte a rappresentare il campo elettromagnetico dovuto al centro di scuotimento  $A$ , nel nostro caso, se, nelle formole generali, supponiamo che sia  $X_0 = Y_0 = \dots = W_0 = 0$ , mentre  $u, v, w$  sieno diversi da zero soltanto all'interno della varietà cilindrica con le generatrici parallele all'asse  $t$  e di sezione normale  $S$ , per  $t \geq 0$ . Avremo così tre specie di campi elettromagnetici distinti da considerare supponendo che sia diversa da zero una sola delle tre quantità  $u, v, w$  all'interno della varietà cilindrica sopra menzionata. E, poichè le formole relative al caso in cui  $v$  solamente è diverso da zero si deducono da quelle relative al caso in cui è diversa da zero soltanto  $u$ , facendo rotare gli assi coordinati  $x, y, z$ , nel senso positivo, di un angolo retto, intorno all'asse  $z$ , ci restringeremo a trascrivere le formole relative ai due casi in cui è diversa da zero soltanto  $w$ , ovvero  $u$ .

Se chiamiamo  $x_0, y_0, z_0$  le coordinate del centro luminoso  $A$ , nel caso in cui sia  $u = v = 0, w \neq 0$ , ponendo

$$\int_0^t d\tau \int_S \frac{W(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{\bar{r}} dS = \frac{f(t)}{\bar{r}}$$

$$\text{con } \bar{r} = \sqrt{\varepsilon_3 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \varepsilon_1 (z - z_0)^2},$$

avremo

$$(24) \quad W = 0, \quad Z = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{f\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)}{\bar{r}},$$

mentre  $X, Y, U, V$  saranno date sempre dalle (23), (23') quando, in esse, si ponga  $X_0 = Y_0 = U_0 = V_0 = 0$  e, per  $W$  e  $Z$ , le espressioni (24).

Nel caso, invece, in cui sia  $v = w = 0, u \neq 0$ , ponendo

$$\int_0^t d\tau \int_S \frac{u}{r} dS = \frac{F(t)}{r}, \quad \int_0^t d\tau \int_S \frac{u}{\bar{r}} dS = \frac{F(t)}{\bar{r}},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

possiamo scrivere

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(x, y, z, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \frac{F\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \\ Z(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{F\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)}{\bar{r}}, \end{array} \right.$$

mentre  $X, Y, U, V$  saranno ancora date dalle (23), (23'), sempre nella ipotesi che in esse si faccia  $X_0 = Y_0 = U_0 = V_0 = 0$  e si pongano, per  $W$  e  $Z$ , le espressioni (25).

10. Possiamo aggiungere, allo scopo di dare più chiara ragione del perchè si riesca completamente alla integrazione delle equazioni del campo elettromagnetico, in un mezzo uniaassico, che  $W$  e  $Z$ , in questo caso, soddisfano, rispettivamente, alle equazioni

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \mathcal{A}^2 \right) \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \\ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left[ \frac{1}{\epsilon_3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} \frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \end{array} \right.$$

Di queste equazioni si costruiscono immediatamente soluzioni con un punto singolare soltanto e, partendo da esse, si possono poi costruire soluzioni analoghe per le equazioni che sono state oggetto del nostro studio.

#### VII. — FORMOLE DI KIRCHHOFF E PRINCIPIO DI HUYGENS.

11. In quest'ultima parte di questo nostro studio, supporremo che sia  $u = v = w = 0$  ed, inoltre, che sieno soddisfatte le due relazioni

$$(27) \quad \epsilon_1 \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \epsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Considereremo, quindi, una superficie ordinaria  $\sigma$  racchiudente una regione  $S$  dell'iperpiano  $\tau = 0$  del nostro spazio a quattro dimensioni, ed assumeremo per la varietà a tre dimensioni dello stesso spazio alla quale appartengono  $\sigma_3$  e  $\bar{\sigma}_3$ , quella costituita da  $S$  e dalla parte della varietà cilindrica a tre dimensioni che ha le generatrici parallele all'asse  $\tau$  e per direttrice la superficie  $\sigma$ , sulla quale  $\tau > 0$ . E supporremo, anche, che la coordinata  $t$  sia così grande che le varietà coniche caratteristiche  $\Gamma$  e  $\bar{\Gamma}$  che hanno il vertice comune nel punto  $(x, y, z, t)$ , abbiano tutti i loro punti esterni a  $\sigma$



e incontrino, quindi, l'iperpiano  $\tau = 0$  sempre in punti diversi da quelli di S. In questa ipotesi, dalla (8), tenendo conto delle (26), avremo subito

$$(27) \left\{ \begin{aligned} W(x, y, z, t) = & -\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} (U_0 \cos n\xi + V_0 \cos n\eta + W_0 \cos n\zeta) \frac{d\sigma}{r} \end{aligned} \right.$$

nella quale formola è, ora,

$$(27') \left\{ \begin{aligned} F_1 = & \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (V \cos n\zeta - W \cos n\eta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}}, \dots \\ G_1 = & -\frac{c}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} \int_0^{t-\frac{r}{C}} (Y \cos n\zeta - Z \cos n\eta) d\tau, \dots \end{aligned} \right.$$

ed  $U_0, V_0, W_0$  indicano i valori di  $U, V, W$  sull'iperpiano  $\tau = 0$ . La formola (27) appartiene al tipo delle formole di Kirchhoff. Da questa si ottiene subito una formola che ha, com'essa stessa, inalterata la corrispondente nel caso dell'isotropia completa. notando che, in virtù delle equazioni del campo,

$$G_1 = -\frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_S \frac{dS}{r} \int_0^{t-\frac{r}{C}} Y d\tau \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_S \frac{dS}{r} \int_0^{t-\frac{r}{C}} Z d\tau \right) \right\} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{dS}{r} \left| U \right|_0^{t-\frac{r}{C}}, \dots$$

e che si scrive

$$(28) \left\{ \begin{aligned} 4\pi W(x, y, z, t) = & \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (V \cos n\zeta - W \cos n\eta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (W \cos n\xi - U \cos n\zeta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}} - \\ & - \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (X \cos n\eta - Y \cos n\xi) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}} - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (U \cos n\xi + V \cos n\eta + W \cos n\zeta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}} \end{aligned} \right.$$

Formole analoghe alle precedenti, valgono per  $Z$ . Di queste trascriveremo solo quella che corrisponde alla (28).

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (Y \cos n\zeta - Z \cos n\eta)_{\tau=t-\frac{\bar{r}}{c}} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (Z \cos n\xi - X \cos n\zeta)_{\tau=t-\frac{\bar{r}}{c}} + \\ &\quad + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (U \cos n\eta - V \cos n\xi)_{\tau=t-\frac{\bar{r}}{c}} - \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (\varepsilon_1 X \cos n\xi + \varepsilon_1 Y \cos n\eta + \varepsilon_3 Z \cos n\zeta)_{\tau=t-\frac{\bar{r}}{c}}. \end{aligned} \right.$$

Il principio di Huygens vale, dunque, per le componenti  $W$  e  $Z$  delle forze magnetiche ed elettriche secondo l'asse d'isotropia ed è rappresentato dalle formole (28) e (29). I valori di queste due quantità, in un punto  $(x, y, z)$ , si possono sempre immaginare determinati dal sistema di valori che le sei quantità  $X, Y, \dots, W$  assumono su di una superficie fissa, arbitraria, separante il punto  $(x, y, z)$  dai centri di scuotimento elettromagnetico che producono il campo, ed, all'istante  $t$ , il valore di  $W$ , nel punto  $(x, y, z)$ , dipende soltanto dalle condizioni elettromagnetiche in cui si trovano i diversi elementi  $d\sigma$  della superficie  $\sigma$ , distanti di  $r$  dal punto  $(x, y, z)$ , agli istanti corrispondenti  $t - \frac{r}{C}$ , mentre il valore di  $Z$  dipende dalle condizioni elettromagnetiche in cui si trovano gli stessi elementi di superficie agli istanti  $t - \frac{\bar{r}}{c}$ .

12. Cerchiamo, ora, che cosa si può dire, per quanto riguarda il principio di Huygens, sulle altre quattro quantità  $X, Y, U, V$ . Avvertiamo, intanto, che ci limiteremo a considerare soltanto  $X$ , potendosi estendere, facilmente, alle altre tre quantità quello che riusciremo a stabilire per  $X$ . Allo scopo indicato, consideriamo il piano  $\xi = x, \eta = y$  del nostro solito spazio a quattro dimensioni e supponiamo, per evitare complicazioni inessenziali, che questo piano incontri la superficie  $\sigma$  in due soli punti  $A$  e  $B$  i cui corrispondenti valori di  $\zeta$  indicheremo con  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  e sia  $\zeta_1 < \zeta_2$ . Lo stesso piano incontrerà la varietà cilindrica di cui abbiamo fatto uso nel num. prec. e che ha per direttrice la superficie  $\sigma$ , nelle due generatrici  $a$  e  $b$  le quali sono, naturalmente, parallele all'asse  $\tau$ . Supponiamo, poi, che le costruzioni fatte per stabilire le (21), sieno state eseguite nel piano  $\xi = x, \eta = y$  e che la linea  $s$  a cui appartengono i punti  $P, Q, R$  sia costituita dal segmento di retta  $\overline{AB}$ , tutto contenuto in  $S$ , e dalle due parti delle

rette  $a$  e  $b$ , passanti per gli estremi del segmento  $\overline{AB}$ , sulle quali  $\tau > 0$ . Ricordando che  $u = v = w = 0$ , troviamo subito

$$(30) \left\{ \begin{aligned} 2\sqrt{\varepsilon_1} X(z, t) = & (X\sqrt{\varepsilon_1} + V)_{\zeta=\zeta_1, \tau=t-\frac{z-\zeta_1}{C}} + \\ & + (X\sqrt{\varepsilon_1} - V)_{\zeta=\zeta_2, \tau=t+\frac{z-\zeta_2}{C}} + \\ & + \int_{\zeta_1}^z d\zeta \left( \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \sqrt{\varepsilon_1} \right)_{\tau=t-\frac{z-\zeta}{C}} + \\ & + \int_z^{\zeta_2} d\zeta \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} \sqrt{\varepsilon_1} \right)_{\tau=t+\frac{z-\zeta}{C}}. \end{aligned} \right.$$

In questa formola compaiono i valori di  $W$  e  $Z$  in tutti i punti del segmento  $\overline{AB}$  interno ad  $S$ , ciascuno di questi valori in un istante corrispondente determinato.  $X(x, y, z, t)$ , com'è determinato dalla (30), si può, quindi, considerare come dipendente dalle condizioni elettromagnetiche degli elementi della superficie  $\sigma$  in tutto un intervallo finito di tempo.

13. Ad evitare malintesi, mi permetto di aggiungere le considerazioni seguenti sulla nomenclatura seguita a riguardo del principio di Huygens, sul significato e l'importanza di questo principio.

A rigore, si può parlare di un principio di Huygens ogni volta che ci troviamo in presenza di una determinata categoria di fenomeni di propagazione in un mezzo continuo. Però, si può, anche, parlare di una dimostrazione di un tale principio solo quando si è riusciti a costruire una teoria razionale dei fenomeni accennati per cui essi vengano a dipendere da certe equazioni che, di solito, sono alle derivate parziali. E la dimostrazione del principio di Huygens consisterà in un procedimento analitico con cui si deducono, dalle equazioni alle derivate parziali, le formole che rappresentano questo principio. Nel periodo empirico della scienza, un principio di Huygens può essere soltanto una ipotesi, più o meno giustificata dai fatti osservati e che è chiamato a sostituire, in parte almeno, la teoria dei fenomeni di propagazione a cui si riferisce (equazioni alle derivate parziali e loro formole d'integrazione).

Col passaggio della scienza dal periodo empirico a quello razionale, un principio di Huygens può ancora conservare molto valore a causa delle difficoltà che le equazioni alle derivate parziali possono offrire alla loro integrazione indefinita, o con condizioni ai limiti, mentre il principio stesso, com'è il caso dell'ottica, si presta bene a risolvere i problemi della natura indicata con approssimazione che si mostra sufficiente per molti scopi.

Come conseguenza di quello che è stato detto sopra, invece che ad una certa categoria di fenomeni di propagazione converrà riferirsi alle equazioni

che li rappresentano e di esse dire se ammettono, o non ammettono, un principio di Huygens; e questo, mi pare, sia anche il punto di vista dell' Hadamard.

Per esprimere con la maggiore precisione il nostro pensiero, supporremo che si tratti di fenomeni di propagazione in uno spazio a tre dimensioni, traducibili in equazioni del primo ordine, nelle variabili indipendenti  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Sarà, poi, facile generalizzare quello che andremo a dire agli altri casi. Ritorniamo, perciò, a considerare lo spazio a quattro dimensioni  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  e la varietà  $\sigma_3$ , di questo spazio, formata dalla regione S dell'iperpiano  $\tau = 0$ , limitata dalla superficie  $\sigma$ , e dalla parte della varietà cilindrica avente per direttrice  $\sigma$  e le generatrici parallele all'asse  $\tau$ , sulla quale sia  $\tau > 0$ . Se in tutti i punti di questa varietà  $\sigma_3$  sono assegnati i valori delle incognite, il problema di esprimere, per mezzo di essi, i valori delle incognite stesse in ogni punto  $(x, y, z, t)$  con  $t > 0$  e, aggiungiamo, con  $t$  sufficientemente grande come innanzi è stato indicato, è un problema, ordinariamente, possibile. Esso non è che un caso particolare del problema di Cauchy. Può, però, accadere che nelle formole che risolvono il nostro problema non compaiano, o si possano eliminare i valori delle incognite nei punti di S. In questo caso i valori delle incognite nel punto  $(x, y, z, t)$  sono espressi per mezzo dei valori che esse assumono sulla superficie  $\sigma$  in un certo intervallo di tempo, il quale intervallo varierà, in generale, col variare dell'elemento di  $\sigma$  a cui si riferisce. In questo caso si dirà che le nostre equazioni ammettono formole di Kirchhoff ed un principio di Huygens *in senso largo*. E si chiameranno, precisamente, formole di Kirchhoff relative alle nostre equazioni, le formole supposte, che danno i valori delle incognite nel punto  $(x, y, z)$  all'istante  $t$ , per mezzo dei valori che le incognite stesse assumono su  $\sigma$  in determinati intervalli di tempo. (È da notare che i valori delle incognite, su  $\sigma$ , che compaiono nelle formole di Kirchhoff non possono darsi tutti ad arbitrio). Si dirà, poi, che sussiste, per le nostre equazioni, un principio di Huygens *in senso stretto*, o un principio di Huygens, senz'altro, se nelle formole di Kirchhoff, supposte, si possono far comparire soltanto i valori delle incognite su  $\sigma$ , a determinati istanti, dipendenti dalla posizione del punto  $(x, y, z)$ , dall'istante  $t$  e dalla posizione degli elementi di  $\sigma$ .

Aggiungiamo che l'ultimo fatto, dato che accada, può accadere in due modi diversi. Nel primo, ed è questo il caso della formola di Kirchhoff propriamente detta, il contributo dato ai valori delle incognite nel punto  $(x, y, z)$ , all'istante  $t$ , da ogni elemento di  $\sigma$  soddisfa alle equazioni del problema. Nel secondo di questi modi, le formole di Kirchhoff soddisfano alle equazioni nostre solo perchè i valori delle incognite nei punti di  $\sigma$  soddisfano alle equazioni stesse come funzioni di  $t$  e delle coordinate dell'elemento variabile di  $\sigma$ . Questo è appunto il caso delle equazioni di Maxwell.

Balistica. — *Alcune formole di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

I problemi fondamentali della balistica esterna sono quelli di costruire la traiettoria di un dato proietto con determinate condizioni iniziali, e quello di correggere il tiro per uno spostamento del bersaglio. E notiamo che questo secondo problema non ha minore importanza del precedente; perchè conosciuti anche soltanto in modo approssimato i dati iniziali corrispondenti al bersaglio da colpire, la risoluzione del secondo problema permette di correggere in modo razionale tali dati con pochi colpi di aggiustamento. Tali problemi sono risolti in modo sufficientemente approssimato per il pratico nel caso di tiri tesi: la nostra guerra in alta montagna dimostrò, a quanto mi si disse, l'insufficienza dei metodi soliti nel caso di traiettorie molto curve e di forti dislivelli tra origine e bersaglio. Per ciò che riguarda il problema della costruzione della traiettoria un metodo molto approssimato è quello di scomporla in archi [quello p. es. dove la velocità  $v$  non supera 240 m. s., in cui la resistenza dell'aria è proporzionale a  $v^2$ ; quello, ove  $v > 340$ , in cui la resistenza è quasi una funzione lineare di  $v$ ; e, per l'intervallo  $240 < v < 340$ , integrando l'equazione dell'odografa, p. es. considerandola come un'equazione alle differenze finite] <sup>(1)</sup>. Io qui mi occuperò principalmente del problema della correzione del tiro. Nel § 1 darò un metodo, che p. es. potrà servire al pratico per studiare come variano i coefficienti balistici ridotti del Siacci lungo una traiettoria; e troverò la formola di correzione, che sola si può dedurre dalle formole del Siacci, quando si ammetta per il  $\beta$  principale l'ipotesi del Parodi; nel § 2 troverò una formola di correzione del tiro, valida in tutti i casi senza bisogno di ipotesi sussidiarie; il metodo della *falsa origine*, che vi uso, è suscettibile delle più svariate applicazioni, che io accenno al § 3. Nel § 4 deduco per nuova via tale formola, che si traduce in un'equazione alle derivate parziali (che ritengo nuova) per le gittate orizzontali e verticali; e ne deduco nuove e più approssimate formole di correzione.

§ 1. *Le formole del Siacci e una prima formola di correzione del tiro.* — Indicando al solito con  $V$  la velocità iniziale, con  $\varphi$  l'angolo di

(<sup>1</sup>) A tale problema dedicherò un'altra Nota, in cui verranno svolti nuovi metodi di calcolo approssimato.

proiezione, con  $u$  la pseudovelocità, con  $\theta$  l'inclinazione della traiettoria, con  $C'$  i vari coefficienti balistici ridotti, le equazioni del Siacci sono:

$$(1) \quad x = C_x' [D(u) - D(V)];$$

$$(2) \quad \frac{y}{x} - \operatorname{tg} \varphi = - \frac{C_\epsilon'}{2 \cos^2 \varphi} \left[ \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right]$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi = - \frac{C_\theta'}{2 \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)].$$

I vari  $C'$  sono in prima approssimazione riguardati come costanti ed uguali tra di loro; negli studi del Gener. Parodi sulla linea di ugual angolo di partenza, essi vengono considerati come costanti lungo un arco di traiettoria, ma variabile da traiettoria a traiettoria: altri perfino li considera costanti lungo una stessa verticale! Nella dimostrazione della formola di correzione del Parodi si trascurano delle quantità non ben definite, si compensano errori non ben noti in modo, che non pare soddisfacente ad un teorico. D'altra parte si applicano poi i risultati ottenuti anche al caso di forti dislivelli tra arma e bersaglio, mentre in generale le tavole di tiro sono calcolate per bersagli posti alla stessa altezza dell'arma. Procedimenti tutti, che mi sembra necessario sostituire con altri logicamente più accettabili.

Non pare p. es. ammissibile senz'altro che nel caso di forti dislivelli si possano considerare i coefficienti balistici ridotti come costanti lungo una stessa traiettoria. Io cercherò di rendere questo fatto evidente, studiando p. es.  $C_\theta'$ . L'equazione dell'odografa

$$g d(v \cos \theta) = \frac{\delta_y i}{C} v F(v) d\theta$$

[  $C$  = coefficiente balistico;  $\delta_y$  = densità dell'aria all'altezza  $y$ ;  $i$  = coefficiente di forma;  $F(v)$  = funzione resistente;  $v$  = velocità del proietto;  $u = \frac{v \cos \theta}{\cos \varphi}$  ] si può scrivere

$$y du = \frac{\delta_y i}{C \cos \varphi} \left[ \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{v F(v)}{u F(u)} \right] u F(u) d\theta = \frac{\delta_0 i}{C} \left[ \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{K(v)}{K(u)} \right] \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} u F(u)$$

$$K(u) = \frac{1}{u^2} F(u);$$

cioè, posto  $\xi_2(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ ,

$$(4) \quad \xi_2(\theta) - \xi_2(\varphi) = - \frac{C}{2i\delta_0 \gamma \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)]$$

ove con  $\gamma$  indico un valore intermedio di  $\frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{K(v)}{K(u)}$ , con  $J(u)$  la solita funzione di Siacci  $-2g \int_u \frac{du}{F(u)}$ .

Se noi, seguendo il Siacci, indicassimo con  $\beta$  un valore intermedio di  $\frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{K(v)}{K(u)} \frac{1}{\cos \theta}$ , otterremmo la (3) al posto di (4), quando si ponga:

$$C_\theta' = \frac{C}{\delta_0 i \beta}. \text{ Similmente scriveremo } C_\theta'' = \frac{C}{\delta_0 i \gamma} \quad (1).$$

Analiticamente ciò corrisponde soltanto ad un cambiamento di funzione incognita; cioè all'incognita  $\theta$  si è sostituita l'incognita  $\gamma$ . Se io considero la (4) come definente la  $\gamma$ , si vede che l'equazione dell'odografa diventa:

$$(5) \quad \frac{d \left[ \frac{1}{\gamma} \{ J(u) - J(v) \} \right]}{du} = -2 \frac{\delta_0}{\delta_y} \frac{g}{u^3 K(v)}$$

che dà  $\gamma = \text{cost}$ , se si suppone  $\delta_0 = \delta_y$ ,  $K(u) = K(v)$ . E il coefficiente  $\beta$  del Siacci soddisfa a un'equazione dello stesso tipo, di forma lievemente più complicata. La (5) dice dunque come varia  $\gamma$ , ossia come varia  $C''$ ; in modo simile si vedrebbe come variano  $C_x'$ ,  $C_e'$ ,  $C_\theta'$ . Ora nei punti ove  $\frac{\delta_y}{\delta_0}$  è differente sensibilmente da 1 (punti molto elevati), o dove  $v$  dista sensibilmente da  $u$  non si vede come neanche in un piccolo intorno, tali coefficienti possano considerarsi come costanti, anche se, come suppone il Parodi, ci limitiamo a muoverci lungo una stessa traiettoria. E questi casi, ritenuti come eccezionali, diventano la regola nei tiri a grandi altitudini con grandi angoli di proiezione.

La (5) al pratico potrà dare un'indicazione sommaria del come varii un coefficiente balistico lungo un piccolo arco di traiettoria; il teorico osservi che, integrando le (4), (5) con approssimazioni successive (ciò che è ben noto essere lecito) si potrà calcolare la  $\theta$  con qualsiasi approssimazione. Il valore di  $\theta$  dedotto da (4) con  $\gamma = 1$  (oppure da (2) con  $C' = \frac{C}{i \delta \beta}$ ,  $\beta = \frac{1}{\cos \varphi}$ ) rappresenta la prima approssimazione; la (5) darebbe, integrando, un nuovo valore di  $\gamma$ , che, sostituito in (4), permetterebbe di dedurne  $\theta$  con approssimazione maggiore. E così via.

(1) Un valore approssimato di  $\beta$  è  $\frac{1}{\cos \varphi}$ ; un valore approssimato di  $\gamma$  è 1 (anche se  $\varphi$  è molto grande); almeno per velocità non superiore a 300 ms. l'uso di  $C''$  pare ù conveniente dell'uso di  $C'$ ; in ogni modo non è difficile passare dall'uno all'altro. Uso del  $C''$ , anzichè del  $C'$  soltanto perchè esso soddisfa a un'equazione differenziale più semplice ed ha un valore iniziale indipendente da  $\varphi$ .

Il metodo di Siacci si può dunque considerare soltanto come la sostituzione del solo primo termine alla serie, che viene data dal classico metodo delle approssimazioni successive. E appare assai dubbioso pertanto che questo sia lecito per tiri molto curvi <sup>(1)</sup>. Probabilmente si potrebbero migliorare tali formole, studiando la (5) e le equazioni analoghe per i vari  $C'$ ; sostituendo poi nelle (1), (2), (3) al posto dei  $C'$  delle convenienti funzioni di  $u$ . Ma io dubito che valga la pena di continuare per questa via; altri e ben più rapidi metodi possono servire (Vallier, Cranz, ecc.) a definire analiticamente le traiettorie! <sup>(2)</sup>.

Il calcolo migliore per dare, senza inutili e imprecise ipotesi, una formola di correzione del tiro conforme ai metodi classici della balistica di Siacci è il seguente. Consideriamo le (1) e (2), in cui si supponga dato a  $C'$  uno stesso valore (ipotesi approssimata usuale) costante (all'incirca) lungo un piccolo arco di traiettoria, e precisamente uguale a  $\frac{F}{\cos^n \varphi}$  lungo la traiettoria con l'angolo di proiezione  $\varphi$ .

Questa ipotesi (che aggiungiamo alle altre del Siacci) è la più spontanea generalizzazione delle ipotesi usuali; e, per quanto io la ritenga poco ammissibile, voglio far vedere che da essa sola, senza altre ammissioni, si può dedurre una formola di correzione del tiro.

Sarà  $n = 0$ , se, come fanno taluni balistici, si suppone potersi ammettere  $C' = \text{cost}$  in un intorno del punto considerato;  $n = \frac{1}{2}$  se, col Parodi, si suppone  $C'$  proporzionale a  $\sqrt{\sec \varphi}$ ;  $n = 1$ , se si ammette  $C'$  proporzionale a  $\sec \varphi$  <sup>(3)</sup>; ecc. ecc. La (1) dà

$$D(u) - D(V) = \frac{1}{F} x \cos^n \varphi,$$

donde

$$(6) \quad dD = \frac{1}{F} (\cos^n \varphi dx - n x \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi d\varphi).$$

<sup>(1)</sup> Il pratico usa le formole Siacci anche nel caso di  $\varphi$  prossimo a  $45^\circ$ ; e assicura che le formole vanno bene, ma si noti che vi compaiono dei coefficienti  $\beta$ , che si determinano appunto in modo da metter d'accordo formole e dati sperimentali. Naturalmente così si aggiusta tutto, ma soltanto per quel determinato dislivello tra origine e bersaglio, che si è avuto nelle esperienze (nullo nei calcoli del Siacci).

<sup>(2)</sup> Alcuni cercano ora, per tiri contro velivoli ecc., di dare delle tavole a doppia entrata, che terrebbero luogo della tavola balistica generale del Siacci; ma, se si vogliono usare tavole cosiffatte, sarebbe assai più opportuno costruirle per gli integrali usati da Cranz ecc., abbandonando per tiri non tesi, ogni generalizzazione delle (1), (2), (3). In una prossima Nota darò però un nuovo metodo, che ricorre a tavole a semplice entrata, cioè a funzioni di una sola variabile; le quali coincidono quasi tutte con quelle del Siacci.

<sup>(3)</sup> Ciò avviene nell'intorno dell'origine; Parodi suppone  $n = \frac{1}{2}$  nel punto di caduta: ciò che forse è lecito in una prima approssimazione.



Poichè  $dA(u) = J(u) dD(u)$ , la (2) dà, differenziando, e riducendo con le (1), (6):

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy}{x} - \frac{y}{x} \frac{dx}{x} \right) \cos^{n+2} \varphi - d [\text{sen } \varphi \cos^{n+1} \varphi] + \frac{y}{x} d(\cos^{n+2} \varphi) = \\ = - \frac{\Gamma}{2} \left\{ \frac{J(u)}{D(u) - D(V)} - \frac{A(u) - A(V)}{[D(u) - D(V)]^2} \right\} dD(u) \\ = - \frac{\Gamma}{2} \left\{ J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} \right\} \frac{\Gamma}{x \cos^n \varphi} \frac{1}{\Gamma} (\cos^n \varphi dx - nx \cos^{n-1} \varphi \text{sen } \varphi d\varphi). \end{aligned}$$

Il valore  $C' = \frac{\Gamma}{\cos^n \varphi}$ , per cui valgono le (1), (2), si dirà, secondo la terminologia del Siacci, il  $C'$  principale. Indicheremo con  $\theta'$  il valore di  $\theta$ , che si deduce da (3), sostituendo il  $C'$  principale al  $C_0'$ . Dalle (2), (3) si deduce:

$$(7) \quad \text{tg } \theta' - \frac{y}{x} = - \frac{\Gamma}{2 \cos^{n+2} \varphi} \left[ J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} \right],$$

cosicchè l'uguaglianza precedente diventa:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy}{x} - \frac{y}{x} \frac{dx}{x} \right) \cos^{n+2} \varphi - d [\text{sen } \varphi \cos^{n+1} \varphi] + \frac{y}{x} d(\cos^{n+2} \varphi) = \\ = \cos^2 \varphi \left( \text{tg } \theta' - \frac{y}{x} \right) \frac{1}{x} (\cos^n \varphi dx - nx \cos^{n-1} \varphi \text{sen } \varphi d\varphi) \end{aligned}$$

ossia

$$(dy - \text{tg } \theta' dx) \cos^{n+2} \varphi = x d [\text{sen } \varphi \cos^{n+1} \varphi] + n(y - x \text{tg } \theta') \cos^{n+1} \varphi \text{sen } \varphi d\varphi - \gamma d(\cos^{n+2} \varphi)$$

donde

$$(8) \quad d\varphi = \frac{dy - \text{tg } \theta' dx}{x \{ 1 - (n+1) \text{tg}^2 \varphi \} + (n+2) y \text{tg } \varphi + n(y - x \text{tg } \theta') \text{tg } \varphi}$$

ossia

$$(8)^{\text{bis}} \quad d(\text{tg } \varphi) = \frac{dy - \text{tg } \theta' dx}{x(\cos 2\varphi - n \text{sen}^2 \varphi) + (\frac{1}{2}n + 1) y \text{sen } 2\varphi + \frac{1}{2}n(y - x \text{tg } \theta') \text{sen } 2\varphi}$$

che diventa specialmente semplice se  $n = 0$  (caso del movimento nel vuoto). Da queste si passa alla correzione dell'angolo  $\alpha$  di elevazione, notando che  $\varphi = \alpha + \varepsilon + \varrho$ , dove  $\varepsilon = \text{arctg } \frac{y}{x} =$  angolo di sito,  $\varrho =$  rilevamento = costante. Se ne deduce

$$(8)^{\text{ter}} \quad d\alpha = d\varphi - d\varepsilon = d\varphi - \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Le (8), (8)<sup>bis</sup>, (8)<sup>ter</sup> mi sembrano le uniche formole per la correzione del tiro, che si possano nelle nostre ipotesi logicamente dedurre dalle classiche formole del Siacci. Esse appaiono però profondamente *differenti* dalle formole del Parodi (che suppone  $n = \frac{1}{2}$ ), che pure parte da ipotesi analoghe!

D'altra parte si noti che nelle (8) ogni traccia del coefficiente balistico ridotto del proietto è sparita; la resistenza dell'aria vi compare soltanto per mezzo di un coefficiente  $n$ , che si sceglie sempre lo stesso, sia per velocità piccole che grandi, a cui corrispondono resistenze di tipo tanto differente!

Quando all'angolo  $\theta'$  che vi compare, si noti che, poichè  $d\varphi = 0$  quando il bersaglio si sposta sulla traiettoria del proietto (come è ben evidente), dev'essere in tal caso  $\frac{dy}{dx} = \text{tg } \theta'$  almeno in via approssimata. L'angolo  $\theta'$  dato dalla (3), sostituendo il  $C'$  principale a  $C_0'$ , deve essere dunque prossimo all'inclinazione  $\theta$  della traiettoria. Cioè le 3 formole del Siacci dovrebbero, anche nel caso di tiri molto curvi, rappresentare bene le particolarità del percorso balistico con *uno stesso* valore di  $\beta$ , o di  $C'$ ! (1).

Tutto questo *permette a un teorico di elevare gravi dubbii sull'esattezza di formole del tipo precedente*, e consiglia di affrontare *ex-novo* e per altra via il problema della correzione del tiro. Se si volesse percorrere la via precedente con ogni rigore, bisognerebbe trovare le equazioni differenziali analoghe alla (5), a cui soddisfano i vari  $C'$ : anzi si dovrebbe studiare l'equazione differenziale relativa al  $C'$  principale: cosa complicata e poco pratica!

§ 2. *Formola per la correzione del tiro.* — Di formole a questo scopo se ne possono dare parecchie, secondo i metodi con cui sono costruite le tavole di tiro. La correzione del tiro si effettua generalmente, facendo variare l'angolo di proiezione; *per mettermi nelle condizioni più sfavorevoli*, supponiamo di avere una tavola di tiro ad angolo fisso, e carica variabile, tavole che so essere già state proposte da qualche nostro ufficiale, e che sono anche realizzate in qualche modo dalle nostre usuali tavole di tiro, in cui sono dati gli elementi corrispondenti a più cariche differenti.

Siano dunque calcolate le traiettorie corrispondenti a un angolo di proiezione  $\varphi$ , e alle varie velocità iniziali  $V$ . Voglio vedere l'effetto prodotto, quando l'angolo di proiezione  $\varphi$  diventa  $\varphi + d\varphi$ . Notiamo che sparare dall'origine  $O$  con velocità  $V$  ed angolo  $\varphi + d\varphi$  equivale a sparare da quel

(1) Se questo non avvenisse, le (8) e seg., anzichè servire a correggere il tiro per un dato spostamento del bersaglio, correggerebbero soltanto l'errore commesso dall'autore nelle varie ipotesi fatte circa il coefficiente balistico.

Se l'ipotesi del Parodi è lecita *in pratica*, varrà forse meglio applicare le (8)<sup>bis</sup>, (8)<sup>ter</sup> per il calcolo del coefficiente  $C_0$  del Parodi per i punti *prossimi* al punto di caduta. Io credo poco esatta la sua applicazione nel caso di forti dislivelli.

punto  $O'$  della traiettoria (dove l'inclinazione ha il valore  $\varphi$ ) con la velocità acquistata dal proietto nel passare dal punto  $O$  al punto  $O'$ . Questa velocità sarà  $V - dv$ , ove  $dv$  è un infinitesimo, che ha lo stesso segno di  $d\varphi$ . [Notisi che, se  $d\varphi < 0$ , il punto  $O'$ , piuttosto che sulla traiettoria, è posto sul prolungamento di questa al di qua dell'origine  $O$ ]. Dunque, per calcolare la traiettoria  $(V, \varphi + d\varphi)$  corrispondente alla velocità iniziale  $V$  e all'angolo di proiezione  $\varphi + d\varphi$ , basterà calcolare la traiettoria  $(V - dv, \varphi)$ , aggiungendo poi alle coordinate di tutti i suoi punti le coordinate di  $O'$  rispetto ad  $O$ .

Se il bersaglio raggiunto con la traiettoria  $(V, \varphi)$  era il punto  $x_0, y_0$ , si tratti di determinare  $d\varphi$  in guisa che la traiettoria  $(V, \varphi + d\varphi)$  raggiunga il bersaglio  $x_0 + dx, y_0 + dy$ . Dette  $\xi, \eta$  le coordinate di  $O'$ , ciò dunque equivale a cercare che la traiettoria  $(V - dv, \varphi)$  raggiunga il bersaglio  $x_0 + dx - \xi, y_0 + dy - \eta$  <sup>(1)</sup>. La traiettoria  $(V, \varphi)$  abbia per tangente nel punto  $(x_0, y_0)$  la retta  $y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tg} \theta$ ; in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$  alla traiettoria potremo sostituire questa retta; sia

$$(y - y_0) = \operatorname{tg} \theta (x - x_0) - \frac{1}{2} a (x - x_0)^2 + b \int dV$$

l'equazione corrispondente per la traiettoria  $(V - dV, \varphi)$ . Posto  $y = y_0$ , si deduce, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore,  $x - x_0 = -dX = \frac{b}{\operatorname{tg} \theta} dV$ ; cioè l'incremento  $-dX$  di gittata sul piano  $y = y_0$ , corrispondente all'incremento  $-dV$  di velocità iniziale vale  $\frac{b}{\operatorname{tg} \theta} dV$ ; quindi, se  $dX$  è l'incremento di gittata corrispondente all'incremento  $dV$  di velocità iniziale, sarà  $b = -\operatorname{tg} \theta \frac{dX}{dV}$  (dove, si noti,  $-\operatorname{tg} \theta$  sul ramo discendente della traiettoria è positivo). Per es., se il bersaglio è sulla stessa orizzontale del pezzo, è  $-\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \omega$ , dove  $\omega$  è l'angolo di caduta. I valori di  $\operatorname{tg} \theta$ , di  $\frac{dX}{dV}$  si ricaveranno dalla tavola di tiro; il coefficiente  $b$  si può supporre pertanto noto a chi possieda tale tavola. Dovremo cercare  $d\varphi$  in guisa che  $x_0 + dx - \xi, y_0 + dy - \eta$  giaccia sulla retta ultimamente citata, che cioè sia

$$dy - \eta = \operatorname{tg} \theta (dx - \xi) - b dV$$

(formola ottenuta trascurando infinitesimi d'ordine superiore).

(1) Veramente si dovrebbe tener conto della differente densità dell'aria nei punti  $O, O'$ ; ma, se ci limitiamo a piccole correzioni, ci troviamo di fronte ad una quantità certamente trascurabile.

Ora, per le stesse equazioni differenziali del movimento di un proietto, è :

$$g \cos \varphi dv = v \left\{ g \sin \varphi + \frac{\partial i}{C} F(v) \right\} d\varphi \quad C = \text{coefficiente balistico}$$

$$g\xi = + v^2 d\varphi \quad ; \quad g\eta = v^2 \operatorname{tg} \varphi d\varphi .$$

La nostra equazione diventa:

$$dy = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{tg} \varphi d\varphi + \operatorname{tg} \theta \left[ dx - \frac{v^2}{g} d\varphi \right] - b \frac{v \left[ g \sin \varphi + \frac{\partial i}{C} F(v) \right]}{g \cos \varphi} d\varphi$$

donde

$$(9) \quad d\varphi = g \frac{dy - \operatorname{tg} \theta dx}{V^2 (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta) - bV \left( g \operatorname{tang} \varphi + \frac{\partial i}{C} F(V) \frac{1}{\cos \varphi} \right)}$$

Con la (8)<sup>ter</sup> si passa dalla correzione  $d\varphi$  alla correzione  $d\alpha$  per la elevazione. La (9) è stata ottenuta *trascuando gli infinitesimi del secondo ordine senza altra ipotesi sussidiaria.*

Come controllo, osserviamo che nel vuoto, per bersagli posti all'orizzontale uscente dall'arma, si ha: gittata =  $X = \frac{V^2}{g} \sin 2\varphi$ ;  $\omega = \varphi$ . Cosicchè  $b = 2 \frac{V}{g} \sin 2\varphi \operatorname{tg} \varphi$ . È poi  $F(V) = 0$ ; cosicchè la (9) diventa:

$$d\varphi = \frac{dy - \operatorname{tang} \theta dx}{X \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}}$$

in completo accordo con la (8)<sup>bis</sup> ove si ponga  $n = 0$ .

La (9) appare dunque accettabile tanto più volentieri, che essa vale anche nel vuoto [cfr. il § 4 per nuove formole di correzione e nuove interpretazioni della (9)].

*Formole più approssimate potremmo ottenere con lo stesso procedimento, sostituendo parabole alle linee rette con cui abbiamo rappresentato l'arco iniziale e l'arco finale della traiettoria. — Soltanto l'esperienza può dire se sia conveniente, o no, raggiungere questa migliore approssimazione teorica. Formole analoghe si hanno per la correzione del tiro con variazione di carica.*

In ogni modo io propongo per la correzione dei tiri curvi o con forti dislivelli di abbandonare i metodi usuali, ma di usare o la (9), o quella formola analoga più approssimata, che, come dicemmo, si può ottenere con analogo procedimento.

§ 3. *Altre applicazioni del metodo precedente.* — Il metodo di una falsa origine  $O'$  può ricevere anche altre applicazioni. Esso si basa sul principio che per trovare una traiettoria  $(\varphi + \Delta\varphi, V)$  uscente da  $O$  basta aggiungere le coordinate di una *falsa origine*  $O'$  alle coordinate dei punti di una traiettoria  $(\varphi, V - \Delta V)$ . Il punto  $O'$  è il punto della traiettoria iniziale, dove l'inclinazione ha il valore  $\varphi$ ; e  $V - \Delta V$  è la velocità del proietto nel punto  $O'$ . Noi potremmo dedurne altre formole di correzione del tiro corrispondenti ad altri tipi di tavole di tiro. Ma esso si presta anche a calcoli di altro genere, che non siano le piccole correzioni. Noi possiamo p. es. con esso da una tavola di tiro ad angolo fisso, dedurre una tavola a carica fissa, cioè a velocità iniziale  $V$  costante; e viceversa; noi possiamo da una tavola di tiro che ci dia i risultati sperimentali quando il bersaglio è all'orizzonte del pezzo *passare a una tavola di tiro relativamente a bersagli  $B'$  posti ad altitudine maggiore*, scegliendo per ogni traiettoria come *falsa origine* quel punto  $O'$  che è alla stessa altezza di  $B'$ . E così via. Naturalmente in queste correzioni non piccolissime si dovrà tener conto della differente densità dell'aria all'origine vera ed alla falsa origine. I calcoli numerici, che *si riducono a calcolare l'arco  $OO'$  di traiettoria* (l'ho verificato io stesso su esempi particolari) riescono abbastanza facili; essi sono poi di una grandissima semplicità per non troppo grandi differenze di velocità nella vera e nella falsa origine: p. es. quando queste due velocità sono entrambe maggiori di 400 ms., oppure comprese p. es. entrambe tra 240 e 285 ms., e così via: in una parola quando le due velocità sono comprese in un intervallo, in cui la resistenza dell'aria si possa esprimere con una stessa funzione analitica della velocità (lineare, oppure proporzionale ad una potenza della velocità). Ho dato un esempio al § 2; soltanto la pratica può suggerire quali altri problemi si debbano affrontare per questa via, cioè per quali calibri e per quali dislivelli sia meglio sviluppare i calcoli numerici. Si potrebbe costruire p. es. una serie di tavole corrispondenti ai dislivelli di 0, 500, 1000, 1500, 2000 m. tra cannone e bersaglio.

§ 4. *Nuovo enunciato della formola data al § 2 in un caso particolare.* — Se noi poniamo in tale formola  $dy = 0$ , essa ci dà l'incremento  $d\varphi$  dell'angolo di proiezione corrispondente *all'incremento  $dx$  (o, come diremo,  $dX$ ) di gittata sul piano  $y = \text{cost}$  corrispondente a una stessa velocità iniziale  $V$* ; tale formola permette cioè di calcolare  $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ .

Se ricordiamo che  $b = -\text{tg } \theta \frac{\partial X}{\partial V}$ , troviamo che dalla nostra formola si deduce (entro i limiti di approssimazione <sup>(1)</sup> da noi imposti al calcolo):

(<sup>1</sup>) che in fondo si riducono a trascurare le variazioni di  $\delta$ .

La gittata  $X$  su un qualunque piano orizzontale  $y = \text{cost}$ , pensata come funzione dei dati iniziali  $V, \varphi$ , soddisfa all'equazione:

$$(10) \quad V^2 \left(1 - \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \theta}\right) = g \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial V} V \left[ g \text{ tang } \varphi + \frac{\delta i}{C} \frac{F(V)}{\cos \varphi} \right].$$

E una formola affatto analoga si può dedurre per l'altitudine  $Y$  raggiunta su un piano verticale  $x = x_0$  prefissato ad arbitrio.

Ora noi possiamo dimostrare, o, meglio, verificare direttamente quest'ultima formola, che lega le variazioni di gittata su un piano qualsiasi orizzontale corrispondente a variazioni dei dati iniziali  $\varphi, V$ . Infatti dalle

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\varphi}^{\theta_1} v^2 \text{tg } \theta \, d\theta \quad X = -\frac{1}{g} \int_{\varphi}^{\theta_1} v^2 \, d\theta$$

(dove con  $\theta_1$  si è indicato il valore di  $\theta$  nel punto di arrivo) si deduce che  $X$  ed  $y$  possono pensarsi funzioni di  $V, \varphi, \theta_1$  (perchè  $v$  dell'equazione della odografa si deduce come funzione di  $V, \varphi, \theta$ ). Ora

$$-g \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = v^2 \text{tg } \theta_1, \quad -g \frac{\partial y}{\partial V} = \int_{\varphi}^{\theta_1} \frac{\partial(v^2)}{\partial V} \text{tg } \theta \, d\theta,$$

$$-g \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -V^2 \text{tg } \varphi + \int_{\varphi}^{\theta_1} \frac{\partial(v^2)}{\partial \varphi} \text{tg } \theta \, d\theta.$$

Poichè la  $y$  si riguarda come costante, dalla  $y = \text{cost}$  si potrà dedurre  $\theta_1$  come funzione di  $V, \varphi$ ; e si avrà:

$$d\theta_1 = -\frac{1}{v^2 \text{tg } \theta_1} \left\{ \left[ \int_{\varphi}^{\theta_1} \frac{\partial(v^2)}{\partial V} \text{tg } \theta \, d\theta \right] dV + \left[ -V^2 \text{tg } \varphi + \int_{\varphi}^{\theta_1} \frac{\partial(v^2)}{\partial \varphi} \text{tg } \theta \, d\theta \right] d\varphi \right\}.$$

Ora  $X$  è funzione di  $V, \varphi, \theta_1$ , essendo  $\theta_1$  funzione di  $V$  e di  $\varphi$ . Pertanto si trova:

$$\frac{\partial X}{\partial V} = -\frac{1}{g} \int_{\varphi}^{\theta_1} \frac{\partial(v^2)}{\partial V} \left(1 - \frac{\text{tg } \theta}{\text{tg } \theta_1}\right) d\theta$$

$$g \frac{\partial X}{\partial \varphi} = V^2 \left(1 - \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \theta_1}\right) - \int_{\varphi}^{\theta_1} \frac{\partial(v^2)}{\partial \varphi} \left(1 - \frac{\text{tg } \theta}{\text{tg } \theta_1}\right) d\theta.$$

Il secondo membro di (10) diventa pertanto:

$$V^2 \left(1 - \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \theta}\right) - 2 \int_{\varphi}^{\theta_1} v \left(1 - \frac{\text{tg } \theta}{\text{tg } \theta_1}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial v}{\partial V} V \left[ \text{tang } \varphi + \frac{\delta i}{Cg} \frac{F(V)}{\cos \varphi} \right] + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} d\theta.$$

La (10) risulta verificata, se  $v$ , funzione di  $\theta, \varphi, V$ , soddisfa alla relazione ottenuta uguagliando a zero l'espressione tra  $\{ \}$ , cioè alla

$$(11) \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} g \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial V} V \left[ g \sin \varphi + \frac{\partial i}{C} F(V) \right] = 0$$

(per ogni valore di  $\theta$ ).

Ora ciò è ben evidente, perchè i valori di  $V$  e di  $\varphi$ , che fanno corrispondere a uno stesso valore di  $\theta$  lo stesso valore di  $v$ , soddisfano alla

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} g d(V \cos \varphi) = \frac{\partial i}{C} V F(V) d\varphi, \\ \text{ossia} \\ g \cos \varphi dV = V \left[ g \sin \varphi + \frac{\partial i}{C} F(V) \right] d\varphi. \end{array} \right.$$

Ora la (11) dice appunto soltanto questo che il valore di  $v$ , corrispondente ad un dato valore di  $\theta$ , non varia (ha differenziale nullo), quando  $V, \varphi$  variano soddisfacendo alla (12).

La (10) si può chiamare l'equazione delle gittate su un piano orizzontale qualsiasi; l'equazione analoga per le altitudini  $Y$  su un piano verticale

$$(10)^{\text{bis}} \quad V^2(\text{tg } \varphi - \text{tg } \theta) = g \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial Y}{\partial V} V \left[ g \text{ tang } \varphi + \frac{\partial i}{C \cos \varphi} F(V) \right]$$

si dimostra in modo simile, e si presta ad analoghe applicazioni.

Per trovare le altre formole di correzione, a cui abbiamo accennato alla fine del § 2, si noti che dalla (10) si può dedurre  $\frac{\partial X}{\partial V}$ , quando si conosca  $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ : cioè si può dedurre da una tavola a carica fissa (a velocità iniziale  $V$  fissa) l'effetto  $\frac{\partial X}{\partial V} dV$  dovuto ad un cambiamento di carica.

Così, derivando la (10), si ottengono due equazioni tra le  $\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial V \partial \varphi}, \frac{\partial^2 X}{\partial V^2}$ . Cosicchè, se p. es. è data una tavola di tiro a carica fissa, e sono pertanto calcolabili  $\frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}$  si può dedurre l'effetto  $\frac{\partial X}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial V^2} dV^2$  prodotto sulla gittata da un cambiamento di  $V$ , cioè da un cambiamento della carica, anche tenendo conto degli infinitesimi del secondo ordine. E ciò con grande semplicità, senza complicare il metodo della falsa origine con parabole od altro. Gli esempi si potrebbero variare a piacere. Ma p. es. non credo valga la pena di dare formole di correzione, che tengano conto degli infinitesimi di ordine superiore al secondo.

Matematica. — *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.

Chimica-fisica. — *Sui cristalli misti.* Nota del Socio CARLO VIOLA.

Le precedenti Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. Secondo il Borel, una serie

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

è sommabile quando la serie di potenze associata

$$(2) \quad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$$

è una trascendente intera e l'integrale improprio (associato)

$$(3) \quad s = \int_0^{+\infty} e^{-x} u(x) dx$$

è convergente. È poi assolutamente sommabile quando sono convergenti assolutamente tutti gli infiniti integrali impropri

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

ove

$$u^{(0)}(x) = u(x) \quad , \quad u^{(r)}(x) = \frac{d^r u}{dx^r} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

In ogni caso il numero  $s$  è la somma della serie.

2. Per tutte le serie sommabili sussistono quelle proprietà algoritmiche elementari delle serie assolutamente convergenti che possono sintetizzarsi nelle seguenti uguaglianze:



$$(I) \quad (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) + k = \\ = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \dots,$$

$$(II) \quad (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) k = ku_0 + ku_1 + ku_2 + \dots,$$

$$(III) \quad (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) + (v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = \\ = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots.$$

Al contrario, non sussistono le altre

$$(IV) \quad (u_0 + u_1 + \dots) (v_0 + v_1 + \dots) = \\ = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots,$$

$$(V) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots = u_0 + u_1 + \dots + u_{r-1} + (u_r + u_{r+1} + \dots).$$

Ciò indusse il Borel a limitare le sue considerazioni alle serie assolutamente sommabili, per le quali dimostrò esser valide anche queste proprietà.

Ora, in una recente Nota <sup>(1)</sup>, io ho dimostrato che, volendo restringere il campo delle serie sommabili fino a conseguire la validità dell'importante proprietà (IV), non è punto necessario spingersi fino alle serie assolutamente sommabili (le quali formano una classe particolarissima di serie sommabili), ma basta fermarsi alle serie *sommabili* B', caratterizzate dalla convergenza (semplice) dei primi due integrali (4) soltanto <sup>(2)</sup>.

3. In questa Nota voglio dimostrare che neppure per conseguire la validità della proprietà (V) è necessario spingersi fino alle serie assolutamente sommabili; ma che è sufficiente (ed anche necessario) fermarsi alle serie, che chiamerò *totalmente sommabili*, caratterizzate dalla convergenza *semplice* di tutti gli integrali (4).

Se si osserva che la serie di potenze associata alla serie

$$(8) \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots$$

<sup>(1)</sup> *Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino vol. LII, 1916-1917, pag. 67).

<sup>(2)</sup> Precisamente ho dimostrato (loc. cit., n. 11) che: *se delle due serie sommabili*

$$(5) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

con somma  $u, v$  rispettivamente, una è sommabile B', la serie

$$(6) \quad w_0 + w_1 + w_2 + \dots, \quad \text{ove } w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0,$$

è sommabile ed ha per somma  $w = uv$ . Che se poi ambedue le serie (5) sono sommabili B', anche la (6) è sommabile B'.

ANCORA: se le due serie (5) sono sommabili, la serie

$$0 + w_0 + w_1 + w_2 + \dots$$

è sommabile ed ha per somma  $uv$ .

è

$$(9) \quad \sum_{m=0}^{\infty} u_{r+m} \frac{x^m}{m!} = u^{(r)}(x),$$

e che perciò l'integrale (4) ne è l'integrale associato, possiamo anche dire che una serie (1) è totalmente sommabile quando è sommabile insieme con la serie (8), per ogni intero  $r > 0$ .

La condizione necessaria e sufficiente affinché per una serie sommabile (1) sussista la proprietà (V) per ogni intero  $r > 0$ , è che essa sia totalmente sommabile.

Supponiamo infatti che la (1) sia sommabile con somma  $s$ . Affinchè la (V) possa sussistere per ogni  $r > 0$ , è necessario che sia sommabile la serie (8) che comparisce nel secondo membro, per ogni  $r > 0$ , e perciò che la (1) sia totalmente sommabile.

Viceversa, se la (1) è totalmente sommabile con somma  $s$ , è pure sommabile la (8) per ogni  $r > 0$  ed ha per somma il valore  $\sigma_r$  dell'integrale (4). Si ha inoltre

$$\begin{aligned} s - \sigma_r &= \int_0^{+\infty} e^{-x} [u(x) - u^{(r)}(x)] dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[ u_0 + u_1 \frac{x}{1!} + \dots + u_{r-1} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \right] dx = u_0 + u_1 + \dots + u_{r-1} \quad (1) \end{aligned}$$

e perciò la (V) sussiste.

4. Or vogliamo provare che con l'acquisto della proprietà (V), nessuna delle rimanenti proprietà viene perduta; sicchè tutto l'algoritmo delle serie assolutamente sommabili sussiste per la serie totalmente sommabili. Precisamente:

TEOREMA I. — *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \dots$$

*è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (I).*

TEOREMA II. — *Se una delle due serie*

$$(10) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad ku_0 + ku_1 + ku_2 + \dots \quad (k \neq 0)$$

*è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (II).*

(1) Si ricordi che, per  $n$  intero non negativo, è

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

TEOREMA III. — *Se le due serie*

$$(11) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono totalmente sommabili ed hanno per somma  $u, v$  rispettivamente, anche la serie

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots$$

è totalmente sommabile ed ha per somma  $u + v$ .

TEOREMA IV. — *E, nelle stesse ipotesi, anche la serie*

$$(12) \quad [w_0 + w_1 + w_2 + \dots \quad \text{ove } w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0$$

è totalmente sommabile ed ha per somma  $uv$ .

TEOREMA V. — *Se una delle due serie*

$$(13) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots$$

è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (V).

Le dimostrazioni dei teoremi I, II, III sono ben facili.

Passando al teorema V, osserviamo che, nella seconda parte della dimostrazione del teorema del n. 2, è stato provato che: se la prima delle due serie (13) è totalmente sommabile, tale è anche la seconda.

Viceversa: se per un certo intero fissato  $r > 0$ , la seconda delle (13) è totalmente sommabile, convergerà l'integrale (4) pel detto valore di  $r$  e per tutti i maggiori, e quindi <sup>(1)</sup> anche per tutti i minori, e perciò anche la prima delle (13) sarà totalmente sommabile. Infine al n. 2 si è dimostrato che fra le somme delle due serie intercede la relazione espressa dalla (V).

Passiamo infine al teorema IV.

Le due serie (11), essendo per ipotesi totalmente sommabili, sono anche sommabili B'; quindi, pel teorema enunciato nella seconda nota al n. 2, possiamo asserire che la serie (12) è sommabile (anzi è sommabile B') e che ha per somma  $uv$ . Dunque intanto: *la serie prodotto (di Cauchy) di due serie totalmente sommabili con somma  $u, v$  rispettivamente è sommabile ed ha per somma  $uv$ .*

Per dimostrare che la (12) è anche totalmente sommabile, basta dimostrare che è sommabile per ogni  $r$  la serie

$$(14) \quad w_r + w_{r+1} + w_{r+2} + \dots$$

<sup>(1)</sup> Loc. cit., n. 6, lemma II (di Hardy).

Ed infatti, poichè la prima delle (11) è totalmente sommabile, tale sarà pure (pel teorema V) la serie

$$(15) \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots$$

Poichè la (15) e la seconda delle (11) sono totalmente sommabili, possiamo asserire (per quanto abbiamo rilevato più su) che la serie-prodotto a cui danno origine

$$u_r v_0 + (u_r v_1 + u_{r+1} v_0) + (u_r v_2 + u_{r+1} v_1 + u_{r+2} v_0) + \dots$$

ossia

$$(16) \quad [w_r - (u_{r-1} v_1 + u_{r-2} v_2 + \dots + u_0 v_r)] + \\ + [w_{r+1} - (u_{r-1} v_2 + u_{r-2} v_3 + \dots + u_0 v_{r+1})] + \dots$$

è sommabile.

Intanto, poichè la seconda delle (11) è totalmente sommabile, tali saranno pure (pei teoremi V e II successivamente applicati) le serie

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{r-1} v_1 + u_{r-1} v_2 + u_{r-1} v_3 + \dots \\ u_{r-2} v_2 + u_{r-2} v_3 + u_{r-2} v_4 + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_0 v_r + u_0 v_{r+1} + u_0 v_{r+2} + \dots \end{array} \right.$$

Sommando, termine a termine, le serie sommabili (16) e (17), si trova la (14), la quale perciò sarà sommabile.

5. I teoremi precedenti ci permettono di concludere che d'ora innanzi la considerazione delle serie assolutamente sommabile è inutile (almeno per la teoria delle serie numeriche), perchè in luogo di esse si possono considerare con vantaggio le serie totalmente sommabili; in quanto che costituiscono una classe di serie più ampia, pur godendo di tutte le proprietà algoritmiche delle prime.

Vi ha di più. Hardy <sup>(1)</sup> ha dimostrato che vi sono serie convergenti che sfuggono alla sommabilità assoluta, cioè che non sono assolutamente sommabili. Invece: ogni serie convergente con somma  $s$  è totalmente sommabile con ugual somma.

Infatti se una serie (1) è convergente con somma  $s$ , è anche sommabile con ugual somma <sup>(2)</sup>; ma è pur sommabile la serie (8) per ogni  $r > 0$ , perchè convergente, dunque la (1) è totalmente sommabile.

<sup>(1)</sup> Quarterly Journal of Mathematics, vol. 35, 1903, pag. 22.

<sup>(2)</sup> Ibidem.

6. Se poi ci assoggettiamo a rinunciare ad adoperare la proprietà (V), possiamo considerare con vantaggio molto maggiore le serie sommabili B', che costituiscono una classe amplissima, appena leggermente più ristretta di quella formata da tutte le serie sommabili. Per le serie sommabili B' sussistono le proprietà (I), (II), (III) e la (IV) così modificata:

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = 0 + w_0 + w_1 + w_2 + \dots$$

Il rinunciare ad adoperare la proprietà (V) non apporta che svantaggi trascurabili.

Per tutto ciò cfr. la Nota citata.

**Fisica terrestre.** — *La velocità di propagazione del terremoto ligure del 23 febbraio 1887.* Nota di G. AGAMENNONE e A. CAVASINO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Farà maraviglia che dopo un trentennio si torni ancora a studiare questo terremoto, che ebbe allora sì triste celebrità e che, avvenuto pochi anni dopo la catastrofe di Casamicciola (1883), indusse ancor meglio il nostro Governo ad incoraggiare ufficialmente gli studi sismici. A suo tempo non mancarono numerose e pregiate pubblicazioni sul predetto terremoto, segnatamente le estese monografie dei professori Issel, Mercalli e Taramelli, ma in tutte venne appena sfiorato il problema della velocità di propagazione. Chi se ne occupò meno fuggacemente fu il compianto Tacchini, allora direttore del R. Ufficio centrale di Meteorologia, il quale, nella seduta del 12 giugno 1887, presentò una breve Nota a questa stessa Accademia, e poi il sig. Offret con due Note inserite nei Comptes Rendus dell'Accademia di Francia. Ma i risultati cui pervennero questi due autori, furono quanto mai discordi tra loro, in quanto che al Tacchini risultava una velocità di propagazione sensibilmente costante e che si aggirava sui 2100 metri al secondo, mentre, secondo l'Offret, la medesima cresceva con la distanza in modo notevolissimo, e precisamente da 450 a ben 2070 metri!

Colpito da questa enorme discordanza, uno di noi (Agamennone) si propose di approfondire la questione, ed a tale scopo cominciò col raccogliere numerosissimi dati orari ed a discuterli uno per uno per trarne il maggior vantaggio possibile. È bensì vero che in quel tempo i dati orari erano ben lungi dal raggiungere la precisione di quelli che si ottengono pei recenti terremoti, specialmente allora per la mancanza quasi assoluta di strumenti sismici; ma la quantità poteva in parte supplire alla qualità e si poteva ragionevolmente sperare in una tal quale compensazione tra i numerosi dati, ben discussi e raggruppati in varie categorie di precisione diversa. Ma, come

si può ben comprendere, l'impresa non era di piccola mole, e per di più l'Agamennone non vi poteva impiegare saltuariamente che pochi ritagli di tempo in mezzo ad altri lavori d'urgenza, soprattutto concernenti il servizio geodinamico che appunto fin dal 1887 egli era incaricato di organizzare sotto l'alta direzione del Tacchini. Avvenne così che passassero molti anni senza che il lavoro intrapreso entrasse ancora nella fase risolutiva, sebbene tutto il materiale fosse stato già approntato, vagliato e ordinato. Nè maggior tempo vi potè impiegare da quando fu nominato direttore del R. Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, poichè nuovi obblighi ed altri lavori più pressanti o di attualità lo distolsero sempre dal riprendere con assiduità lo studio già cominciato sul terremoto ligure del 1887; sicchè disperando di poterlo condurre a buon fine con le sole sue forze, si decise finalmente a ricorrere alla cooperazione del proprio assistente dott. A. Cavasino, il quale accettò ben volentieri l'invito e si pose anche lui alacramente all'opera, specie nei lunghi calcoli de' minimi quadrati. Con la speranza che il nostro lavoro completo e piuttosto voluminoso possa essere a suo tempo pubblicato negli Annali del R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica, crediamo utile fin da ora di far conoscere i principali risultati da noi ottenuti, la cui importanza consiste soprattutto nell'aver dimostrato non rispondente a verità il fatto singolarissimo trovato dall'Offret, che la velocità andasse notevolmente crescendo con la distanza, e riportato in seguito da tanti altri autori e perfino in trattati di sismologia!

Da una disamina accurata di tutti i dati orari, ci è risultato chiaramente che questo preteso aumento della velocità delle onde sismiche veniva fuori pel fatto che l'Offret assumeva, quale punto di partenza ne' suoi calcoli, l'ora di Mentone, da lui ritenuta la più sicura per l'epicentro e perchè era la più bassa di quelle osservate in tante altre località della *zona mesosismica*. Il sistema di riferirsi unicamente ad un solo dato orario, per la regione epicentrale, è assai pericoloso nel calcolo della velocità, quando non siasi assolutamente sicuri della sua precisione. Così, nel terremoto Andalus del 1884, il Cancani avendo voluto basarsi sulla sola ora di Cadice, ebbe a trovare una velocità notevolmente decrescente col crescere della distanza, e cioè tutto all'opposto di quanto risultò all'Offret pel terremoto ligure<sup>(1)</sup>. Per non incorrere dunque in questo grave pericolo, è stato da noi prescelto il metodo adottato da Dutton e Newcomb pel terremoto di Charleston del 1886, e seguito quasi sempre dall'Agamennone nei suoi numerosi calcoli sulla velocità delle onde sismiche. Con questo metodo non si dà la preferenza ad alcuna delle ore osservate, sia pure riferentisi a località le più prossime all'epicentro, e vengono perciò di molto attenuate le conseguenze di qualche

(1) Vedi: G. Agamennone, *Alcune considerazioni sui differenti metodi fino ad oggi adoperati nel calcolare la velocità di propagazione del terremoto Andalus del 25 dicembre 1884* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 18 novembre 1894).

errore contenuto nelle medesime. In questo modo, tutte le ore possedute entrano ugualmente nel calcolo e tanto meglio se con vario peso, a seconda della loro maggiore o minore presunta esattezza.

\* \* \*

Ricordiamo che la mattina del 23 febbraio, preceduta nella notte da alcune poche scosse premonitriche, la commozione più disastrosa avvenne nella Riviera Ligure di ponente intorno alle 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> (t. m. di Roma). Per la medesima è stato possibile conoscere circa 700 dati orari, osservati direttamente da persone o indicati da strumenti (orologi arrestati, sismoscopi, o strumenti magnetici) in Italia, Francia, Svizzera, Austria, Germania, Belgio, Olanda, Inghilterra e Portogallo. In seguito ad una discussione accurata, s'è dovuto scartare la maggior parte de' medesimi, restandone 125, caratterizzati da errori probabili non superiori ad un paio di minuti, e precisamente divisi nei seguenti quattro gruppi:

N.	16	con errore probabile	< 15	secondi
N.	21	"	da 15 a 30	"
N.	29	"	" 30 a 60	"
N.	59	"	" 60 a 120	"

**TOTALE N. 125**

L'epicentro, da noi prescelto, è quello determinato dal Mercalli e che si trova a circa 20 km. a sud di P. Maurizio.

Formate 6 equazioni di condizione, dalla loro risoluzione col metodo de' minimi quadrati, vien fuori una velocità media superficiale di 2033 metri al secondo e l'ora epicentrale: 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> 12<sup>s</sup>.

Rifacendo il calcolo, utilizzando soli 40 dati orari, scartando cioè tutti quelli che non si riferiscono esplicitamente all'inizio della commozione sismica la quale, come si sa, fu di lunga durata, s'ottiene una velocità di m. 2137 e 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> 9<sup>s</sup> per l'ora all'epicentro.

Scartando ancora altri 10 dati orari, utilizzando cioè nel nuovo calcolo i 30 dati più sicuri relativi al principio della scossa, abbiamo m. 2335 per la velocità e 6<sup>h</sup> 20<sup>m</sup> 57<sup>s</sup> per l'ora epicentrale; e s'ottengono valori pochissimo diversi, ripetendo lo stesso calcolo, salvo ad arrecare lievi modificazioni ad alcuni pochi tra i predetti 30 dati orari.

Finalmente, scartando anche le ore di Nizza e Torino, come quelle che da molti indizi risultano troppo in anticipo e perciò assai anormali — a malgrado del lieve errore probabile che *a priori* era stato loro assegnato — risulta da un quinto calcolo, fondato sui rimanenti 28 dati, una velocità di 2540 m. ed un'ora epicentrale uguale a 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> 9<sup>s</sup>.

Come si vede, si ha da fare sempre con una velocità superiore ai 2000 metri e con un'ora epicentrale che si aggira attorno a  $6^h 21^m$  e che perciò è più alta di ben  $2\frac{1}{2}$  minuti circa in confronto di quella di Mentone ( $6^h 18^m 35^s$ ) assunta quale punto di partenza dall'Offret, e in ritardo di più di un minuto in confronto di quella di Nizza ( $6^h 19^m 43^s$ ), assunta come ora epicentrale da altri autori. Oltracciò i varî valori da noi ottenuti per la velocità, e segnatamente l'ultimo, non accennano che la medesima abbia potuto sensibilmente variare, per il fatto che le differenze tra le ore osservate e calcolate non sono tali, e per segno e per grandezza, da fare intravedere, coll'aumentare della distanza, un accrescimento e tanto meno così forte come l'Offret ed altri hanno preteso (<sup>1</sup>).

Molti autori, tra i quali lo stesso Offret, avendo asserito che la velocità aveva variato notevolmente anche secondo le varie direzioni, abbiamo voluto intraprendere apposita ricerca eziandio su tale interessantissima questione; ed avendo diviso tutti i 125 dati, da noi posseduti, in tre gruppi relativi a tre diversi quadranti, siamo giunti ad un risultato opposto, cioè non esservi alcun serio motivo — anche avuto riguardo al ristretto numero ed alla poca esattezza dei dati orari, di cui si poteva disporre per un problema tanto più delicato — per ammettere la pretesa variazione, almeno nella misura così rilevante che gli altri autori avevano trovata.

Abbiamo altresì voluto fare un tentativo di calcolo per la velocità delle due fortissime repliche avvenute nella stessa regione Ligure la mattina del 23 febbraio, e cioè una dopo circa 10 minuti e l'altra dopo  $2^h \frac{1}{2}$  dalla grande scossa, sebbene per ognuna delle medesime non potessimo disporre che d'una quindicina di dati orari, vagliati e discussi in mezzo a tanti altri. Per la 1<sup>a</sup> replica è venuta fuori una velocità di c. 1600 metri, e per la 2<sup>a</sup> di soli c. 1300 metri; valori entrambi notevolmente minori, soprattutto l'ultimo, in confronto di quelli trovati per la grande scossa. Riteniamo che la differenza possa essere dipesa in parte, sebbene forse assai piccola, da una reale minore velocità delle onde sismiche prodotte dalle due repliche, a causa appunto della loro minore intensità, e per l'altra parte dal fatto che questa minore intensità s'oppose a che le onde sismiche si propagassero a distanze notevoli, e che nelle località più lontane fosse osservata soltanto una fase già assai inoltrata del movimento sismico, se non addirittura la massima.

Ritornando al più elevato valore (m. 2540) da noi trovato per la velocità di propagazione della grande scossa, è assai probabile che il medesimo si riferisca non alle onde *longitudinali*, bensì a quelle *trasversali* della

(<sup>1</sup>) L'Agamennone aveva sempre ritenuto che così dovesse essere, ma soltanto per semplice intuizione e sospettando che l'ora di Mentone, utilizzata dall'Offret, potesse essere errata in meno, come aveva pubblicato fin dal 1894 nella Nota, sopra ricordata, sul terremoto Andaluso ed in altri suoi lavori.



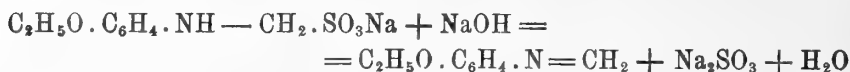
teoria dell'elasticità de' corpi solidi, le quali ultime avrebbero con il loro arrivo (e forse già a fase inoltrata) determinato l'inizio dello scuotimento sensibile nei varî luoghi oltre i 200 km. dall'epicentro e avrebbero provocato l'arresto degli orologi, o lo scatto dei sismoscopi o la perturbazione meccanica dei magnetografi fino alle distanze più notevoli. Con questa riserva, non si esclude che anche nel terremoto ligure del 1887 la velocità delle onde sismiche più rapide possa essere stata assai più considerevole e paragonabile a quella che è stata dedotta nei successivi terremoti meglio studiati, specialmente con l'aiuto di più appropriati e sensibili strumenti.

Nel corso di questa nostra ricerca non abbiamo mancato di studiare questo memorando terremoto ligure anche sotto altri punti di vista, ai quali occasionalmente o indirettamente siamo stati condotti. Così, per bene individuare la grande scossa e le due sue più notevoli repliche, abbiamo riportato un elenco accurato e il più completo possibile delle scosse sentite in Italia e nelle regioni limitrofe tanto il 22 quanto il 23 febbraio; elenco che può tornare utilissimo per chi volesse esaminare il modo di esplicarsi d'un gran terremoto. Oltracciò, abbiamo fatto uno studio speciale circa l'estensione della grande scossa e delle sue due repliche più violente, e circa l'intensità relativa delle medesime, nell'ipotesi d'un comune *ipocentro*. Dalle nostre ricerche è risultato che la grande scossa fu circa due volte e mezzo più intensa della 1<sup>a</sup> replica, avvenuta dopo 10 minuti, e approssimativamente quattro volte più intensa della 2<sup>a</sup> replica, che seguì circa 2<sup>h</sup> 1/2 più tardi. L'estensione della grande scossa, avuto riguardo alla massima distanza di 1540 km. (Lisbona) a cui furono perturbati i magnetografi, fu di 7 1/2 milioni di chilometri quadrati la quale, per quanto voglia parere notevole, non rappresenta che circa la 68<sup>a</sup> parte dell'intera superficie del nostro globo (1). Non mancano, inoltre, nel nostro lavoro, molte notizie inedite che l'Agamennone si procurò ne' primi anni di assidua inchiesta epistolare presso numerosi Osservatori, principalmente per indagare sulla precisione dei dati orari; e infine abbiamo corredato il nostro lavoro d'una ricca bibliografia risultante di più che 170 pubblicazioni sul nostro terremoto, il quale ora, mercè il nostro contributo, resterebbe così quasi completamente illustrato sotto i suoi molteplici aspetti, come del resto, la sua veramente straordinaria importanza richiedeva.

(1) Però, se a quel tempo avessero potuto ovunque agire i moderni sismografi, nessun dubbio che il nostro terremoto sarebbe stato uno di quelli che si dicono *mondiali*, vale a dire che arrivano a perturbare più o meno sensibilmente gli apparati sismici di tutte le parti della terra.

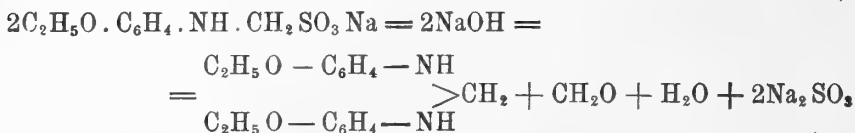
Chimica. — *Azione degli alcali e degli acidi sul p. etossifenilamidometansolfonato sodico.* Nota II del dott. ROBERTO LEPE-  
TIT, presentata dal Socio A. ANGELI.

La presente Nota, in dipendenza dalla precedente, ha origine da un tentativo di preparazione dell'anidroformofenetidina, ancora sconosciuta, partendo dalla supposizione che la soda caustica potesse agire sulla nevralteina nel senso dell'equazione.



dato che partendo dalla p.fenetidina il Bischoff ottenne con formaldeide solo la metilene di parafenetidina, mentre da altre amine si ottiene, in analoghe condizioni, l'anidroformamina e talora un miscuglio di questa con la diimide.

Si è verificato invece che non solo si ottiene coll'etossifenilamidometansolfonato sodico unicamente la diimide secondo l'equazione



in modo quantitativo, ma che con altri aril amidometansolfonati la reazione ha luogo nel medesimo modo per cui il trattamento dei medesimi con soda caustica diluita costituisce un interessante metodo di facile preparazione generale delle imidi. Notisi che partendo da arilamidometansolfonati ben puri si ha di primo acchito una diimide pura, mentre per ricristallizzazione di queste sostanze piuttosto delicate, il punto di fusione dapprima esatto si abbassa per decomposizioni facili a verificarsi.

Citerò, a titolo di esempio, la preparazione della metilendiimide della para fenetidina: 53 gr. di nevralteina vengono disciolti in 500 cc. d'acqua calda e la soluzione si lascia raffreddare a 30-35° C., si aggiunge una soluzione di 10 gr. di soda caustica in 50 cc. d'acqua e si osserva, dopo alcuni minuti, eventualmente riscaldando a 60-70° C., un intorbidamento del liquido e la separazione di goccioline oleose che si depongono. Si lavano alcune volte nell'imbuto separatore con acqua tiepida e si ottiene col raffreddamento una massa cristallina di più di 27 gr. della diimide (calcolato 28,6) fondente a 89° C. come la diimide preparata da Bischoff.

Trattando la diimide con anidride acetica si ottiene con un buon rendimento della fenacetina caratterizzata dal punto di fusione e dalle reazioni.

*Azione degli acidi sul p. etossifenilamidometansolfonato sodico.*

Come fu già detto, da una soluzione di p. etossifenilamidometansolfonato sodico si ottiene l'acido libero aggiungendo a freddo con precauzione dell'acido cloridrico diluito in leggero eccesso. Se invece si riscalda, i cristalli si disciolgono e si nota dopo qualche tempo, specialmente all'ebollizione, uno svolgimento di anidride solforosa e poi di formaldeide, mentre il liquido acquista gradatamente un colore rosso più o meno intenso ed abbandona col raffreddamento una sostanza cristallina leggermente colorata in viola. Il liquido, che contiene cloridrato di fenetidina, ha un sapore amaro pronunciato e produce abbastanza rapidamente un senso di anestesia sulla lingua, che persiste durante mezz'ora e più. Raccogliendo il precipitato viola e purificandolo ottenni una sostanza che cristallizza dall'acqua bollente in aghi bianchi lucenti leggermente giallognoli e rappresenta il cloridrato di una base di proprietà anestetiche che fonde a 140° C. e non contiene più zolfo.

Bollendo l'acido libero per se stesso con acqua si svolgono SO<sub>2</sub> e HCOH; il liquido rimane poco colorato in giallo e col raffreddamento si separano sostanze resinose ed una sostanza cristallina in aghi bianchi o leggermente paglierini contenente ancora zolfo.

Tale sostanza ricristallizzata dall'alcool bollente si ottiene in aghetti bianchi che fondono a 160-161° C. insolubili in benzolo e benzina, poco in etere acetico e pochissimo in acqua bollente (1). Anche questa sostanza ha un'azione anestetica pronunciata e abbastanza duratura.

L'analisi diede: Sostanza gr. 0,4277, BaSO<sub>4</sub> gr. 0,1920; sostanza gr. 0,5106, BaSO<sub>4</sub> gr. 0,2336; sostanza gr. 0,1776, 13 cc. N. a 20° C. e 752 mm. =

Sostanza gr. 0,2010, 14,3 cc. N a 20° C. e 752 mm. Sost. 0,1949 0,4368  
CO<sub>2</sub> e gr. 0,1114 H<sub>2</sub>O.

	S	N	C	H
Trovato . . . . .	6,16 %	8,32 %	61,12 %	6,39 %
" . . . . .	6,28 %	8,14 %	—	—
Calcolato per C <sub>27</sub> H <sub>33</sub> O <sub>6</sub> N <sub>3</sub> S . . .	6,30 %	7,97 %	61,44 %	6,30 %

(1) = Ricorderò qui il brevetto germanico D R P 148.760 della Ditta Geigy per la preparazione di acidi monometildiamidoarilmetansolfonici mediante il trattamento a caldo di basi aromatiche a posizione para libera con acido solforoso e formaldeide per cui si ottengono sostanze del tipo NH<sub>2</sub>.R.CH<sub>2</sub>R.NH.CH<sub>2</sub>SO<sub>3</sub>H da due molecole di una sostanza RNH.CH<sub>2</sub>.SO<sub>3</sub>H. Nel caso del derivato metansolfonico della fenetidina dove la posizione dell'NH<sub>2</sub> è occupata dall'etossile, la trasposizione con formazione di un derivato del difenilmetano non può aver luogo nel senso del brevetto sovracitato.

Con alcali si precipita una base fusibile a 140° identica con quella testè descritta. Questa sostanza venne pure ottenuta aggiungendo 1 mol. di acido etossiamido metansolfonico ad una soluzione alcoolica di 1 mol. della predetta base del P.F. 140° C. ciò che permette di stabilirne in modo certo la natura e di formularla così:



ossia quale para etossifenilamidometansolfonato della base del punto di fusione 140° C. per la quale dirò, anticipando, fu trovata la formola  $\text{C}_{18}\text{H}_{20}\text{O}_2\text{N}_2$ .

Lo studio della base di questo composto verrà pubblicato in altra Nota in collaborazione col dott. Maimeri che mi è grato di ringraziare per il suo valido aiuto in queste ricerche.

Zoologia. — *Sulla Crithidia inflata n. sp. parassita nel tubo digerente del Hygrotrechus najas. Struttura e ciclo di sviluppo.* Nota II di ANNA VIVANTI, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

Nella Nota precedente ho dato la descrizione dei due primi stadi di sviluppo di una *Crithidia* vivente come parassita nel tubo alimentare del *Hygrotrechus najas*. Passo ora a considerare il terzo stadio, quello cioè di

*Post-flagellato.*

In quest'ultimo stadio (figg. 1-8) il parassita presenta la parte posteriore del corpo alquanto ridotta e globulare; l'anteriore tende anch'essa ad accorciarsi assieme al flagello, ed a concentrarsi verso il nucleo. Il nucleo, situato dapprima nel centro, occupa ora la parte basale, mentre il blefaroblasto, formato da un sottile bastoncino trasversale, gli si avvicina. Il flagello diviene ora sempre più corto e finisce con lo scomparire del tutto, mentre il parassita, concentrato attorno al nucleo, assume forma ovale od arrotondata e si ispessisce alla periferia, dando luogo alle cisti; queste uscendo dall'intestino con le feci, serviranno per l'infezione di nuovi individui.

Le cisti hanno sempre la parete esterna colorata intensamente e mancano di flagello; alcune (figg. 9, 10) presentano nucleo e blefaroblasto, in altre il nucleo è ridotto ad un gruppo di pochi cromidi (fig. 11); ed in altre ancora non v'è traccia nè di nucleo, nè di blefaroblasto. ma nel protoplasma si osservano grossi cromidi che stanno forse a rappresentare un nucleo frammentato (fig. 13). Variano da  $3\mu$ - $6\mu$  circa.

Ho trovato cisti con un nucleo grossissimo (fig. 14) e ripieno di granuli di cromatina, che si prepara alla moltiplicazione. Esso mediante una prima

divisione dà luogo a due nuclei figli (fig. 15), che alla loro volta si scindono formandone quattro (figg. 16, 17). Tale forma darà presto origine a quattro giovani individui formati ciascuno da una porzione di protoplasma con nucleo (fig. 18).

Ho veduto spesso forme polinucleate, le quali seguendo il solito processo danno luogo a nuovi individui piriformi, individui molto piccoli che misurano da  $3\mu$ - $6\mu$  circa. Questi non rimangono liberi nel tubo digerente, ma si fissano con la loro estremità ad una particella alimentare, o ad un lembo dell'epitelio intestinale. Costituiscono così degli aggruppamenti di più *Cri-thidiae*, il numero delle quali può variare di molto (figg. 19-24) e che uscendo con le feci dal retto, isolate o no, serviranno per l'infezione di giovani larve.

#### DIVISIONE.

I miei studi sulla moltiplicazione sono basati tanto sulle osservazioni sui preparati, quanto su quelle a fresco. Nella *Cri-thidia* del *Hygrotrechus najas* la moltiplicazione avviene per divisione longitudinale, che si osserva in forme di qualsiasi dimensione, e mediante la formazione di rosette.

Il primo a dividersi è sempre il blefaroblasto, il quale è seguito dal flagello e poi dal nucleo; da ultimo si ha la scissione longitudinale del corpo del parassita.

#### *Pre-flagellato.*

In seguito alle ricerche fatte sugli strisci ho trovato solamente due forme di pre-flagellato in divisione longitudinale.

In una (fig. 25), i due blefaroblasti ed i flagelli sono completamente divisi, mentre il nucleo, dato dall'accumulo di molti cromidi, soltanto ora si prepara alla formazione dei due nuclei figli. Nell'altra (fig. 26) invece, si ha la completa formazione di due blefaroblasti, due flagelli e due nuclei, che dal centro sono migrati verso la periferia, e nel corpo è già evidente il solco che darà origine alle due nuove forme. La fig. 27 poi, mostra che talvolta mediante successive divisioni i pre-flagellati possono dar luogo ad una rosetta di più individui.

#### *Flagellato.*

Ho potuto raccogliere molte figure di divisione longitudinale della *Cri-thidia* nel suo secondo stadio di sviluppo, le quali mostrano chiaramente come avviene il processo.

I primi indizi di divisione si osservano sempre nel blefaroblasto, il quale si restringe nel centro dividendosi poi in due parti uguali; alla moltiplicazione del blefaroblasto segue immediatamente quella del flagello e da ultimo quella del nucleo (figg. 28-30). Questo, nelle forme in divisione, è costituito

da un ammasso di granuli di cromatina che o lo riempiono completamente (fig. 30), o si dispongono alla periferia lasciando uno spazio libero nel centro (fig. 28).

Il protoplasma è ricchissimo di cromidi di varia misura e colorati più o meno intensamente dal Giemsa. Subito dopo la formazione dei due nuclei figli nella estremità anteriore del corpo, appare un breve solco longitudinale che procede a poco a poco sino all'estremità posteriore (figg. 32-34). In questo momento abbiamo la formazione di due nuovi individui che si separano del tutto (figg. 35-37) e nuotano liberamente nel lume intestinale.

Il processo di scissione longitudinale avviene in individui di qualsiasi forma e dimensione (figg. 37-42); ciò conferma il polimorfismo della specie.

La divisione può essere simmetrica od asimmetrica; nel primo caso i due flagellati che risultano sono uguali (fig. 37), nel secondo hanno dimensioni differenti (fig. 34), e mentre la differenza in lunghezza tra i due individui è abbastanza notevole ( $10\mu$ - $20\mu$ ), quella in larghezza è solo di qualche  $\mu$ .

Ciò potrebbe far ammettere l'esistenza di una sessualità. Parecchi autori, infatti, fecero l'ipotesi che esistano individui sessuali femminili ed individui sessuali maschili, e basarono tale opinione sulla formazione di due figli non uguali, i quali presentino cioè dimensione differente o numero diverso di granulazioni nel protoplasma.

Nessuno sino ad oggi venne ad una conclusione sicura su tale argomento; per accertarsene sarebbe necessario poter osservare se in vita due flagellati si coniugano fra di loro. Nè io per ora posso asserire nulla in proposito riguardo alla *Crithidia* del *Hygrotrechus najas*, ad eccezione del fatto che molto spesso in seguito a divisione longitudinale si hanno due forme di grandezza ineguale.

#### OSSERVAZIONI A FRESCO.

Potei fare molte osservazioni a fresco mettendo i parassiti tolti da un intestino infetto di *Gerris* in soluzione fisiologica, dove le forme completamente sviluppate si mantengono in vita per 24 ore circa, mentre le forme di preflagellato e quelle di post-flagellato, tenute in camera umida, vivono per alcune settimane e si moltiplicano in modo straordinario.

Come colorazione vitale ho tentato usare il bleu di metilene, che mi fu poco utile, perchè le *Crithidiae* appena colorate morivano quasi istantaneamente.

Le osservazioni fatte a fresco confermarono tutte quelle sugli strisci.

Studiando una notevole quantità di flagellati, tolti da un intestino di *Gerris* (sia ♂ che ♀) e messa in una goccia di soluzione fisiologica, constatavi sempre la presenza di molte forme in ogni stadio di sviluppo con dimensione ed aspetto svariatisimo.

I pre-flagellati appaiono come corpi ovali od arrotondati con grosso nucleo, piccolo blefaroblasto e con protoplasma incolore, trasparente, cosparso di granuli che rifrangono fortemente la luce; presentano o no il flagello. Le forme più giovani, prive di flagello, hanno due movimenti, uno di traslazione, ed uno di rotazione attorno a sè stesse; sovente descrivono un circolo per tre o quattro volte di seguito. Negli stadi più avanzati, quando cioè posseggono il flagello, o procedono in avanti con questo, o si fissano coll'estremità anteriore a qualche elemento estraneo e volgono il corpo con grande rapidità alternativamente a destra ed a sinistra, continuando tale movimento per un lungo periodo di tempo.

I flagellati, nel secondo stadio, generalmente sono i più abbondanti e si presentano sotto i diversi tipi descritti, ma prevalgono sempre le *Crithidiae* lunghe, sottili e filiformi appartenenti al tipo A.

Il protoplasma è talvolta alveolare, sempre incolore e trasparente, ricchissimo di granuli di cromatina che rifrangono fortemente la luce, e che, pel giuoco della luce stessa, appaiono di una bellissima tinta verde smeraldo. I movimenti delle *Crithidiae* sono rapidissimi; esse procedono col flagello in avanti che vibra con enorme velocità volgendosi ora da un lato ed ora dall'altro, cosicchè l'animale non si avvanza in linea retta, ma seguendo una linea a zig-zag. La *Crithidia*, dopo aver percorso un breve tratto, facendo perno sull'estremità posteriore, o descrive per parecchie volte un circolo completo e rimane nella medesima posizione, o descrive un angolo di 180° e cambia completamente direzione.

Tali flagellati si raggruppano spesso a centinaia radialmente ad una particella alimentare, alla quale aderiscono con loro flagello. Questi aggruppamenti sono bellissimi e si possono paragonare ad una attinia nella quale ogni tentacolo rappresenti un singolo individuo. Ciascun flagellato si muove indipendentemente, e l'intero aggruppamento non si sposta mai a meno che non venga urtato da un corpo estraneo, o trascinato altrove da una corrente di liquido.

Vidi in gran numero forme grandi e piccole in divisione e più di una volta riuscii a seguire il completo processo di scissione longitudinale, che avviene con gran lentezza procedendo dall'estremità distale a quella basale. I due individui che ne risultano mantengono sempre la precisa forma del genitore, pur non avendone le stesse dimensioni.

Nelle mie osservazioni a fresco mi è occorso di vedere molto spesso il processo dell'incistamento. Quando il post-flagellato ha assunto la forma di un corpo ovale ed è munito ancora di flagello, comincia a perdere alquanto della sua vivacità primitiva e generalmente ruota attorno a sè stesso non spostandosi di molto. Tale movimento diviene sempre più lento, mentre contemporaneamente il flagello si accorcia. A poco a poco la *Crithidia* concentra tutto il protoplasma attorno al nucleo e si arrotonda perfettamente;

essa eseguisce ancora alcuni giri attorno a sè stessa e poi rimane completamente immobile. La *Crithidia* si è ora incistata, ma mostra ancora per alcuni istanti un brevissimo flagello, che presto scompare del tutto non lasciando alcuna traccia di sè.

#### MODO D'INFEZIONE.

Io credo che l'infezione sia casuale e non ereditaria, giacchè non trovo mai nè uova nè organi genitali infetti. I flagellati sotto forma di cisti, usciranno dunque con le feci dal retto e probabilmente verranno ingerite da giovani larve di *Gerris*.

#### CONSIDERAZIONI GENERALI.

La *Crithidia*, che ho descritta, è molto simile nei caratteri generali a quella studiata dalla signorina Porter (1909), che vive come parassita nel tubo alimentare, ovari e feci del *Gerris paludum*.

La *Crithidia* del *Gerris paludum* passa per i tre stadi di pre flagellato, flagellato e post-flagellato, come quella del *Hygrotrechus najas*; mentre però questi due parassiti hanno caratteri analoghi nel primo e nel terzo stadio, essi presentano alcune differenze nel secondo, quando cioè hanno raggiunto il loro completo sviluppo.

La signorina Porter nota infatti:

1°) nella membrana ondulante la presenza di mionemi che servono a darle una certa contrattilità;

2°) nel protoplasma la presenza del cosiddetto « granulo basale » situato fra il blefaroblasto e l'origine del flagello, dal quale sembra che il flagello stesso abbia origine.

Nel caso della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas* invece:

1°) non ho mai riscontrati mionemi nella membrana ondulante;

2°) per ciò che riguarda il granulo basale, posso dire, che spesso vi sono granulazioni vicino al blefaroblasto, ma che nessuna ha caratteri tali da essere ritenuta come un « granulo basale ».

Oltre a ciò il polimorfismo della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas* è molto maggiore di quello della *Crithidia* del *Gerris paludum*. La signorina Porter nella sua descrizione non accenna alle forme che io ho chiamato del tipo *b*, e che sono numerosissime nel caso della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas*, a quelle forme cioè caratterizzate da speciali rigonfiamenti protoplasmatici situati o all'estremità basale, o tra l'estremità basale ed il nucleo, od in corrispondenza del nucleo stesso.



La *Crithidia* del *Gerris paludum* infetta tubo digerente, feci ed ovarî, quella del *Hygrotrechus najas* tubo digerente e feci soltanto.

Considerando dunque, che l'ospite in cui vivono le due *Crithidiae* è diverso, e che oltre a ciò esse presentano notevoli caratteri differenziali, io credo opportuno fare della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas* una nuova specie che denominerò *Crithidia inflata*.

### SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

I disegni sono fatti con la camera chiara usando l'obiettivo di 1/15 e l'oculare compensatore 8.

L'ingrandimento è di 1200 volte.

- FIGG. 1, 2. — Principio di incistamento; parte posteriore accorciata.
- FIGG. 3-8. — Post-flagellati con parte posteriore ancora più accorciata; protoplasma concentrato attorno al nucleo; nucleo grosso arrotondato addossato alla periferia; blefaroblasto sempre più vicino al nucleo ed a guisa di bastoncino.
- FIG. 8. — Post flagellato visto a freseo.
- FIGG. 9-14. — Una serie di cisti.
- FIG. 9. — Cisti arrotondata con nucleo, blefaroblasto e con periplasma evidente (diametro  $4.74 \mu$ ).
- FIG. 10. — Cisti arrotondata con nucleo, blefaroblasto e poche granulazioni.
- FIG. 11. — Piccola cisti arrotondata con nucleo dato dall'ammasso di cromidi.
- FIG. 12. — Cisti ovale ( $6.30 \mu \times 4.74 \mu$ ) con nucleo evidente, il blefaroblasto non si vede; granulazioni di varia dimensione; periplasma.
- FIG. 13. — Grossa cisti con nucleo probabilmente frammentato ( $7.90 \mu \times 6.32 \mu$ ).
- FIG. 14. — Grossa cisti ( $7.90 \mu \times 6.32 \mu$ ) con nucleo ( $4.74 \mu \times 3.16 \mu$ ), dato dall'accumulo di cromidi, che si prepara alla moltiplicazione; periplasta evidente.
- FIG. 15. — Cisti il cui nucleo ha subito una prima divisione in due nuclei figli.
- FIGG. 16, 17. — Seconda divisione in quattro nuclei figli.
- FIG. 18. — Giovani forme.
- FIGG. 19-24. — Aggruppamenti di più individui derivanti da forme polinucleate.
- FIG. 25. — Pre-flagellato in divisione.
- FIG. 26. — Pre-flagellato in divisione, ma in istadio più avanzato del precedente. Si ha già la formazione dei due nuclei, dei due blefaroblasti e dei due flagelli, ed un solco trasversale mostra nettamente le due forme figlie che ne risulteranno.
- FIG. 27. — Moltiplicazione a rosetta di pre-flagellato.
- FIGG. 28-43. — Forme in divisione longitudinale.
- FIG. 28. — Forma in divisione. blefaroblasto e flagello già completamente scissi.
- FIG. 29. — Flagellato che darà luogo a due forme figlie piccole.
- FIG. 30. — Flagellato che darà luogo a due individui di dimensioni differenti, il più lungo misura  $59 \mu$  circa e l'altro  $43 \mu$  circa.
- FIG. 31. — Forma in divisione con nucleo, blefaroblasto e flagello già completamente scissi; moltissime granulazioni protoplasmatiche.
- FIG. 32. — Forma in divisione longitudinale; anteriormente il corpo del parassita è già diviso e sono già evidenti le due forme figlie con nucleo, blefaroblasto e flagello proprio; sono disuguali: una misura  $55.30 \mu$  e l'altro  $39.50 \mu$ .
- FIG. 33. — Altra forma in divisione di aspetto differente dalla precedente.

- FIG. 34. — Forma in divisione molto avanzata; le due figlie sono ancora unite all'estremità posteriore per un brevissimo tratto; nucleo arrotondato; blefaroblasto tondeggiante, flagello sottilissimo. Le due nuove forme sono disuguali: una misura  $36.34 \mu$  in lunghezza e  $3 \mu$  in larghezza; l'altra invece  $63.20 \mu$  in lunghezza e  $2 \mu$  circa in larghezza.
- FIG. 35. — Due flagellati appena divisi, lunghi e sottili, uguali ( $60.04 \mu$ ).
- FIG. 36. — Due Crithidiae appena divise; sono disuguali, una misura  $48 \mu$  e l'altra  $37 \mu$  circa in lunghezza; in larghezza misurano tutte e due  $3 \mu$  circa.
- FIG. 37. — Due Crithidiae lunghissime ( $79.00 \mu$ ) appena divise; nucleo allungato; blefaroblasto tondeggiante, abbondanti granulazioni specialmente in vicinanza del nucleo. All'estremità posteriore v'è un corpo arrotondato che ritengo sia una particella alimentare, alla quale sia attaccato il parassita prima di dividersi; ma il preparato non troppo evidente in questo punto non permette di determinarne la natura.
- FIGG. 38-40. — Flagellati in divisione che daranno luogo a Crithidiae di vario aspetto.
- FIG. 41. — Due piccole Crithidiae già completamente divise ( $19 \mu$  circa).
- FIG. 42. — Forma in divisione in istato molto avanzato.
- FIG. 43. — Crithidia che si prepara alla moltiplicazione come si può vedere dal grosso nucleo ( $4 \mu$  circa), dato dall'accumulo dei cromidi, che presenta un principio di movimento nucleare.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibii all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Proprietà chimiche e fisico-chimiche dei liquidi interni di animali tenuti in soluzioni Ringer isotoniche ed ipotoniche.* Nota V di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio LUCIANI (1).

Dopo le esperienze riferite precedentemente ho eseguito anche ricerche per constatare i fenomeni osservabili nelle *rane esculente estive immerse in soluzioni Ringer isotoniche ed in soluzioni Ringer ipotoniche*. Come nel caso di animali tenuti nelle soluzioni ipertoniche, così in questi casi, le rane, prima di essere immerse nelle soluzioni saline iso- ed ipo-toniche, venivano fatte soggiornare in acqua corrente di condotta finchè nel liquido di lavaggio non si fossero più trovati residui alimentari.

La soluzione isotonica conteneva:

Na Cl . . . . .	gr.	7	%
Ca Cl <sub>2</sub> . . . . .	"	0,1	"
Na HCO <sub>3</sub> . . . . .	"	"	"
KCl . . . . .	"	0,075	"

Il  $\Delta$  di tale soluzione era =  $0^{\circ}450$ , R  $22^{\circ}$  =  $26 \text{ Ohm}$ .

(1) Annunciata il 25 febbraio 1915, non fu potuta più inviare perchè l'A. fu richiamato in servizio militare.





In questa soluzione furono messe le rane, il cui sangue defibrinato, il siero dello stesso, la linfa dei sacchi, e l'urina venivano poi analizzati dopo le prime ore di permanenza e dopo parecchi giorni.

*Dopo le prime 24 h.* non si notano cambiamenti nel colore della pelle degli animali, come avviene invece allorchè essi siano stati immersi nelle soluzioni saline ipertoniche. Non si trova urina in vescica; lo stomaco e gli intestini sono vuoti; la cistifellea è generalmente poco ripiena di bile; i polmoni sono poco distesi. Non si notano fenomeni dolorifici allorchè gli animali siano stimolati.

Dai risultati analitici riportati nella tabella 8<sup>a</sup>, serie *F*, si rileva che già dopo le prime 24 h. gli animali assumono elettroliti dall'ambiente salino isotonico e che questo fatto fa aumentare la concentrazione molecolare del loro sangue, mentre il  $\Delta$  del liquido ambiente diminuisce. Nello stesso tempo si accumula la linfa nei loro sacchi linfatici.

Quando le rane sono rimaste parecchi giorni nell'ambiente salino isotonico, il colore della loro pelle resta del pari immutato; non si trova urina raccolta in vescica, lo stomaco è vuoto, l'intestino contiene abbondante liquido verdastro, così pure si trova raccolto abbondante liquido verdastro molto denso nella cloaca, la cistifellea si presenta più ripiena di bile che negli animali che vi hanno soggiornato 24 h. soltanto.

Nei sacchi linfatici si trova raccolta una grande quantità di linfa spontaneamente coagulabile.

I polmoni sono mediocrementemente distesi; gli animali si mostrano normalmente vivaci, la loro sensibilità dolorifica non è aumentata, e stimolati adeguatamente non presentano mai il caratteristico riflesso tonico che si osserva sempre invece nelle rane immerse in soluzioni saline ipertoniche.

Dalle analisi dei liquidi interni riassunte nella stessa tabella 8<sup>a</sup> risulta che la concentrazione molecolare del sangue defibrinato non tende ad aumentare oltre il limite già raggiunto dopo le prime 24 h., mentre quella della linfa defibrinata dei sacchi tende leggermente a diminuire.

Osservando le variazioni cui va soggetto il liquido salino isotonico mentre le rane vi soggiornano, si nota che ad una primitiva diminuzione della sua concentrazione molecolare tien dietro un aumento il quale nel 4° giorno raggiunge il valore originario, e nel 7° lo sorpassa ( $\Delta = 0,465$ ).

Poichè a questo aumento del  $\Delta$  non coincide una diminuzione della resistenza elettrica, come dovrebbe accadere se esso fosse dovuto ad un aumento di elettroliti ceduti dall'animale all'ambiente, così dobbiamo ammettere che esso sia dovuto a sostanze non elettrolite osmoticamente attive prodotte dall'animale stesso e da lui eliminate (urea, bile, acidi grassi ecc.).

Relativamente alle rane esculente estive tenute in soluzione Ringer ipotonica, i risultati analitici sono riportati nella tabella 9<sup>a</sup>, serie *G*.

Il liquido ipotonico conteneva:

Na Cl . . . . .	gr.	2,5	%
Ca Cl <sub>2</sub> . . . . .	"	0,18	"
Na HCO <sub>3</sub> . . . . .	"	"	"
KCl . . . . .	"	0,13	"

Il suo  $\Delta$  era = 0°215, R 22° = 55 Ohm.

Anche in questo caso cioè di animali immersi in soluzione salina ipotonica si vede che gli elettroliti passano nei primi giorni nell'interno dell'organismo che poi esso tende a ricedere.

Questo fatto risulta dall'analisi del liquido ambiente praticata ogni tanto. Il colore della pelle dei suddetti animali rimane immutata; così pure non presenta variazioni degne di nota la loro eccitabilità.

Quello che invece risalta maggiormente agli occhi dell'osservatore, è la grandissima quantità di linfa che sin dalle prime ore si accumula in tutti i sacchi linfatici. Tale quantità è molto superiore di quella che si vede accumularsi negli stessi sacchi quando le rane soggiornino in ambienti ipertonici ed isotonici (1). La suddetta linfa ha un colore più intensamente giallo del solito e si *rapprende spontaneamente in una massa gelatinosa densa*. Il sangue si presenta molto acquoso; esso forma un piccolo coagulo rosso-chiaro, ed alla centrifugazione si ottiene circa un terzo meno di corpuscoli di tutte le altre volte, comprese quelle nelle quali le rane furono tenute in acqua distillata. Nella vescica si trova poca o punta urina, per lo più densa e di colorito verdastro. Il cuore è normale; lo stomaco vuoto, mentre l'intestino contiene nell'ultimo tratto e nella cloaca molta bile densa. La cistifellea è pure ripiena di bile.

Come si rileva dalle analisi riportate nella tabella 9<sup>a</sup>, serie G, confrontate con quelle della tabella 1<sup>a</sup> (Nota III) nelle quali sono riportati i dati riferentisi alle rane esculente estive tenute in acqua distillata, la concentrazione molecolare del sangue defibrinato e del siero dello stesso tende ad aumentare. Infatti da una media di circa  $\Delta = 0^{\circ},440$  (sangue defibrinato) e di  $\Delta = 0^{\circ},410$  (siero dello stesso) ottenuta dalle rane soggiornanti in acqua distillata, si sale in quelle tenute invece in ambiente ipotonico al valore di circa  $\Delta = 0^{\circ},460$ .

Un fatto che ci sembra degno di nota è che la linfa defibrinata che si produce in così enorme quantità, abbia un  $\Delta$  eguale a quello che ha il sangue defibrinato delle rane esculente estive tenute in acqua distillata.

(1) Quando per scopo didattico o per altro scopo si debba avere un'abbondante quantità di linfa è facile ottenerla così.

## Serie F

## TABELLA 8\*

*Rane esculente estive, tenute in soluzione Ringer isotonica*(NaCl gr. 7°/oo; CaCl<sub>2</sub>, NaHCO<sub>3</sub> gr. 0,1°/oo; KCl gr. 0,075°/oo).

Numero e Data	A	R <sub>gas</sub> (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni	Giorni	Liquido ambiente	
									A	R <sub>gas</sub> °
1. Dopo 24 ore	Liquido ambiente	0,420	—	—	—	—	Si mettono 24 rane in soluzione isotonica dopo depurazione in acqua di condotta e vi si lasciano 24 ore. Temperaturat. ambiente circa 12° C.	*	0,450	26
	Sangue defibrinato	0,520	—	—	—	—			0,420	26,5
	Siero dello stesso	0,505	0,471	2,840	0,284	2,556				
	Linfà defibrinata	0,515	0,336	2,216	0,316	1,900				
	Urina	—	—	—	—	—				
2. Dopo 7 giorni (21-VI -1913)	Liquido ambiente	0,465	—	—	—	—	Si mettono 30 rane in soluzione isotonica, previa depurazione in acqua di condotta (acqua piovana di cisterna) e vi si lasciano 7 giorni. Temperatura ambiente circa 12° C.	*	0,450	26
	Sangue defibrinato	0,520	—	—	—	—			0,425	26,5
	Siero dello stesso	0,495	0,523	3,238	0,377	2,861				
	Linfà defibrinata	0,505	0,271	1,784	0,266	1,518				
	Urina	—	—	—	—	—				

\* Appena messevi le rane.

Serie G

TABELLA 9<sup>a</sup>.

*Rane esculente estive, tenute in soluzione Ringer ipotonica*  
(NaCl gr. 2.5‰ + gli altri sali in proporzione).

Numero e data	Liquido ambiente	A	R <sub>25°</sub> (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Generi gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni	Liquido ambiente		
									Giorni	A	
1. 9° giorno (3-12-VI-1912)	Liquido ambiente	0,220	60	—	—	—	—	Si mettono 24 rane in <i>soluzione ipotonica</i> , dopo depurazione in acqua di condotta e vi si lasciano 9 giorni. Temperatura ambiente circa 12° C. Allo scuro.			
	Sangue defibrinato	0,460	39	—	—	—	—				
	Siero dello stesso	0,460	31	0,353	2,260	0,234	2,026				
	Linfà defibrinata	0,445	30	0,146	1,160	0,282	0,877				
	Urina	0,150	non basta!	0,203	—	—	—				
2. 11° giorno (8-19-IX-1913)	Liquido ambiente	0,215	55	—	—	—	—	Si mettono 40 rane in <i>soluzione ipotonica</i> , dopo depurazione in acqua di condotta e vi si lasciano 11 giorni. Allo scuro. Temperatura ambiente circa 12° C.	*	0,215	
	Sangue defibrinato	0,465	38	—	—	—	—			2	0,210
	Siero dello stesso	0,465	31	0,387	2,288	0,312	1,976			4	0,200
	Linfà defibrinata	0,440	30	0,243	1,658	0,366	1,292			6	0,210
	Urina	—	—	—	—	—	—			8	0,220
								* Appena messevi le rane.	11	0,215	



Riassumendo, tanto dalle esperienze eseguite sulle rane esculente estive immerse in soluzione Ringer isotoniche, quanto da quelle eseguite tenendo le rane nelle soluzioni Ringer ipotoniche, si rileva che *gli animali assumono in primo tempo elettroliti dall'ambiente e che successivamente glieli ricedono, mantenendo poi la pressione osmotica del loro sangue a quel livello che era stato raggiunto nelle prime ore a spese degli elettroliti, mediante l'utilizzazione di sostanze osmoticamente attive non elettrolite che il loro organismo viene eliminando nell'ambiente, precisamente come si è visto avvenire nel caso di rane tenute in ambiente salino ipertonico.*

Le esperienze poi relative alle rane tenute in soluzione Ringer isotonica confermano quanto avevamo osservato in tutte le ricerche precedenti fatte con le soluzioni ipertoniche e cioè *che la pressione osmotica del sangue e della linfa tende sempre a portarsi ad un livello superiore a quello dell'ambiente.*

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÒITI dà notizia delle condizioni di salute del senatore BLASERNA, da varî giorni gravemente ammalato; le notizie odierne accennano ad un miglioramento, che è sperabile voglia mantenersi. Dietro proposta del suo Presidente, la Classe approva unanime che all'illustre infermo siano inviati i più fervidi augurî di guarigione.

Il PRESIDENTE comunica alla Classe i ringraziamenti, per la loro recente elezione, del Socio ALBERTONI e dei Corrispondenti ANGELITTI, BOERIS, DE MARCHI e FUBINI.

Il PRESIDENTE dà il triste annuncio della morte dei seguenti Soci stranieri: CHAUVEAU AUGUSTO, mancato ai vivi il 4 gennaio scorso; apparteneva il defunto Socio all'Accademia, per l'*Agronomia* sino dal 13 febbraio 1890. — BASSOT LEONE, morto il 17 gennaio scorso; faceva parte dell'Accademia per la *Geografia matematica e fisica* sino dal 27 luglio 1913.

#### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci TARAMELLI e LACROIX, e del Corrisp. BERLESE. Fa inoltre particolare menzione di una *Nota Commemorativa di Pietro Duhem*, del prof. A. FAVARO; della Memoria dei signori VOLTA e SILVA, intitolata: *Sulla riduzione al vuoto delle durate di oscillazione dei pen-*

*doli gravimetrici; e delle Tavole inedite di Mammiferi terziari e di Vertebrati del Permiano, preparate da E. DRINKER CAPE e W. DILLER MATTHEW.*

Il Corrisp. FANTOLI offre in omaggio all'Accademia varie sue pubblicazioni.

#### CONCORSI A PREMI

La Classe approva, su proposta del Consiglio d'Amministrazione, che il concorso al premio *Carpi* pel biennio 1917-918, venga bandito per lavori di *Fisica terrestre* intesa nel senso più lato; ed inoltre che si rimetta a concorso pel 1917 il tema del concorso andato deserto colla scadenza del 1916, tema che riguarda la *Meccanica dello sviluppo degli organismi*.

E. M.

---

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 4 febbraio 1917.*

- BERLESE A.** — Centuria terza di Acari nuovi (Estr. dal « Redia », vol. XII, pp. 289-338). Firenze, 1916. 8°.
- FANTOLI G.** — Concorso al premio di fondazione Kramer (Estr. dai « Rendiconti del reale Istituto Lombardo di scienze e lettere », vol. XLVII, pp. 1149-1152). Pavia, 1915. 8°.
- FANTOLI G.** — Premiazione degli allievi delle scuole professionali. Milano, 1916. 8°. pp. 1-10.
- FANTOLI G.** — Relazione sul concorso al premio della fondazione Kramer (Estr. dai « Rendiconti del reale Istituto Lombardo di scienze e lettere », vol. XLIX, pp. 1097-1100). Milano, 1917. 8°.
- FANTOLI G.** — Sistemazione ed ampliamento del porto di Venezia (Studi e proposte della commissione tecnica). Roma, 1915. 6°. pp. 1-75.
- FAVARO A.** — Pietro Duhem; nota commemorativa letta al R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, adunanza del 29 ottobre 1916. Venezia, 1916. 8°, pp. 1-5.
- LACROIX A.** — Notice historique sur Bory de Saint-Vincent (Institut de France, Académie des sciences). Paris, 1916. 4°, pp. 1-75.
- MATTEW W. D.** — Hitherto unpublished plates of tertiary mammalia and perman vertebrata. Descriptions of plates. Washington, 1915. 4°, pp. I-CLIV.
- PETRONE A.** — Contributo alle questioni medico-legali nei morti per soffocazione senza alcuna lesione esterna (Estr. dagli « Atti dell'Accad. Gioenia di scienze naturali », vol. V, pp. 1-6). Catania, 1912. 4°.
- PETRONE A.** — Contributo allo studio dell'encefalite traumatica, sub-acuta dell'uomo (Estr. dal « Bollettino dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », fasc. XXII, pp. 1-7). Catania, 1912. 8°.
- PETRONE A.** — La reazione al sesquiossido di cromo secco, anche nei nucleoli delle cellule nervose e nei nuclei di cellule parenchimali (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », vol. VIII, pp. 1-3). Catania, 1914. 4°.
- PETRONE A.** — L'apparato reticolare endoglulare di tutte le emasie (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », vol. VII, pp. 1-7). Catania, 1914. 4°.
- PETRONE A.** — La nuova reazione del sangue per la fissazione del sesquiossido di cromo secco (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », vol. VIII, pp. 1-6). Catania, 1914. 4°.
- SILVA G.** — Sulla riduzione al vuoto delle durate di oscillazione di pendoli gravimetrici. Bologna, 1916. 4°, pp. 1-36.
- TARAMELLI E.** — Di alcuni problemi geologici che riguardano la valle dell'Isonzo (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLIX, pp. 966-985). Milano, 1917. 8°.
- VOLTA L.** — Sulla riduzione al vuoto delle durate di oscillazione di pendoli gravimetrici. Bologna, 1916. 4°, pp. 1-36.
-



## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76) Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
— Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 3<sup>o</sup>. Sem. 1<sup>o</sup>.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-XII. Fasc. 2.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 febbraio 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Cerulli</i> . Sulla determinazione della polodia . . . . .	Pag. 141
<i>Tedone</i> Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici . . . . .	" 143
<i>Fubini</i> . Alcune formole di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro . . . . .	" 151
<i>Maggi</i> . Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni (*) . . . . .	" 162
<i>Viola</i> . Sui cristalli misti (*) . . . . .	" "
<i>Sannia</i> . Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie (pres. dal Socio <i>E. D'Ovidio</i> ). . . . .	" "
<i>Agamennone e Cavasino</i> . La velocità di propagazione del terremoto ligure del 23 febbraio 1887 (pres. dal Socio <i>Millosevich</i> ) . . . . .	" 167
<i>Lepetit</i> . Azione degli alcali e degli acidi sul petossifenilamidometansolfonato sodico (pres. dal Socio <i>Angeli</i> ). . . . .	" 172
<i>Vivanti</i> . Sulla <i>Crithidia inflata</i> n. sp. parassita nel tubo digerente del <i>Hygrotrechus najas</i> . Struttura e ciclo di sviluppo (pres. dal Socio <i>B. Grassi</i> ) . . . . .	" 174
<i>Brunacci</i> . Sull'adattamento degli anfi bi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Proprietà chimiche e fisico-chimiche dei liquidi interni di animali tenuti in soluzioni Ringer isotoniche ed ipotoniche (pres. dal Socio <i>Luciani</i> ) . . . . .	" 180

PERSONALE ACCADEMICO

<i>Rditi</i> (Presidente). Dà buone notizie della salute del Socio sen. <i>Blaserna</i> . Deliberazione della Classe . . . . .	" 185
<i>Id.</i> Comunica che hanno inviato ringraziamenti per la loro recente elezione, il Socio nazionale <i>Albertoni</i> e i Corrispondenti <i>Angelitti</i> , <i>Boeris</i> , <i>De Marchi</i> e <i>Fubini</i> . . . . .	" "
<i>Id.</i> Da annuncio della morte dei Soci stranieri <i>Augusto Chauveau</i> e <i>Leone Bassot</i> . . . . .	" "

PRESENTAZIONE DI LIBRI

<i>Millosevich</i> (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci <i>Taramelli</i> , <i>Lacroix</i> , <i>Berlese</i> , del prof. <i>A. Favaro</i> , dei signori <i>Volta</i> e <i>Silva</i> . . . . .	" "
<i>Fantoli</i> . Fa omaggio di alcune sue pubblicazioni . . . . .	" 186

CONCORSI A PREMI

Premio <i>Carpi</i> . Approvazione dei temi di concorso pel 1917 e pel biennio 1917-1918 . . . . .	" "
--	-----

BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . .	" 187
------------------------------------	-------

(\*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXIV.  
1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 18 febbraio 1917.*

Volume XXVI.° – Fascicolo 4°

1.° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOCT. PIO BEFANI

1917

SEP 25 1924

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, si seguono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e stranieri, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dieci fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è portata a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie programmate dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce alla prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti conclusioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in tutto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 18 febbraio 1917.*

F. D' OVIDIO Presidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.

Per la ragione, principalmente, che la formola in discorso serve di fondamento ad una ricerca, che formerà oggetto di una mia prossima Nota, mi permetto, con queste poche righe, di metterne in rilievo alcune circostanze, e di mostrarne l'utilità per la spedita deduzione di alcuni risultati. D'altronde, con questo, trova pure risposta la questione di derivabilità lungo una superficie, accennata da Somigliana, in fine alla seconda delle sue belle Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche* (1).

Intese  $\varphi(s, n)$  e  $\frac{\partial \varphi(s, n)}{\partial s}$  funzioni limitate e continue, in un campo, di cui il luogo  $n=0$  rappresenta un contorno (compreso il contorno medesimo), e indicato con  $\lim_n$  il limite, col tendere di  $n$  a 0, per valori crescenti o decrescenti, si ha, in primo luogo,

$$(1) \quad \lim_n \frac{\partial \varphi(s, n)}{\partial s} = \frac{\partial \lim_n \varphi(s, n)}{\partial s}.$$

Questa formola traduce semplicemente l'eguaglianza

$$\left[ \frac{\partial \varphi(s, n)}{\partial s} \right]_{n=0} = \frac{\partial \varphi(s, 0)}{\partial s},$$

(1) Questi Rendic., vol XVIII, 1<sup>a</sup> sem. 1914; Nuovo Cimento, vol. XI, 1<sup>o</sup> sem. 1916.

sotto una forma opportuna per alcune questioni, colle quali si trova certo ripetutamente adoperata.

Abbiasi ora una superficie regolare  $\sigma$ . Immaginiamo su questa superficie un doppio sistema di linee, atte a determinarne i punti, con le loro mutue intersezioni. Concepiamo i punti medesimi rappresentati per mezzo dei relativi parametri  $u, v$ , e indichiamo con  $s_1$  e  $s_2$  le misure degli archi delle stesse linee coordinate, aventi per origine un punto stabilito della linea, e per termine il punto considerato. Infine, immaginiamo un sistema di linee normali, in ogni punto, alla superficie  $\sigma$ , e indichiamo con  $n$  la misura dell'arco di questa linea, avente per origine il punto d'incontro della linea con la superficie, e per termine il punto generico.

Potremo allora intendere la posizione di ogni punto, P, dello spazio rappresentato per mezzo delle coordinate curvilinee  $u, v, n$ . La superficie  $\sigma$  sarà, per tal modo, rappresentata da  $n = 0$ . E  $\lim_{n > 0}$ ,  $\lim_{n < 0}$  significheranno

il limite di una funzione del punto P, o delle coordinate  $u, v, n$ , col tendere di P ad un punto,  $P_\sigma$ , della superficie  $\sigma$ , — determinato dalle coordinate  $u, v$  — da una parte e dall'altra del pian tangente nel punto medesimo.

Supponiamo che una funzione del punto P

$$\varphi = \varphi(u, v, n)$$

e le sue derivate parziali fino a

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}$$

siano limitate e continue dall'una o dall'altra parte della superficie  $\sigma$ . Varrà, in base a (1), l'una o l'altra delle due formole

$$(2) \quad \lim_{n > 0} \frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} \lim_{n > 0} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}, \quad \lim_{n < 0} \frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} \lim_{n < 0} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}.$$

Supposto poi che la funzione e le indicate sue derivate parziali siano limitate e continue dall'una e dall'altra parte di  $\sigma$ , dove presentino, per avventura, una discontinuità di prima specie, varrà l'una e l'altra delle (2), e posto, per brevità di scrittura,

$$\lim_{n > 0} - \lim_{n < 0} = D,$$

si avrà

$$(3) \quad D \frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} D \varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu}.$$

Si riconosce agevolmente come le stesse formole si verifichino, sostituendo  $s_1$  e  $s_2$  a  $u$  e  $v$ , con che a  $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial u^\mu \partial v^\nu}$  si sostituisce  $\frac{\partial^\mu}{\partial s_1^\mu} \frac{\partial^\nu}{\partial s_2^\nu}$ .

Riferiamoci ora ad una terna d'assi cartesiani ortogonali  $x, y, z$ , e indichiamo con  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , con  $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$  e con  $\varrho_i$  ( $> 0$ ), dove  $i$  siano i valori 1 e 2, i coseni di direzione della tangente, volta nel senso in cui cresce la misura  $s_i$  dell'arco, i coseni di direzione della normale principale, volta verso il centro di curvatura, e il raggio di curvatura, nel punto  $(x, y, z)$  o  $(u, v, 0)$ , delle linee coordinate dell'uno e dell'altro sistema.

Abbiamo

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha_i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta_i + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma_i,$$

e rammentando

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i} \alpha'_i, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i} \beta'_i, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial s_i} = \frac{1}{\varrho_i} \gamma'_i,$$

con scrittura simbolica di manifesto significato,

$$(5) \quad \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha_i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta_i + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma_i \right]^2 + \frac{1}{\varrho_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha'_i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta'_i + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma'_i \right).$$

Supponiamo l'asse delle  $x$  tangente, nel punto considerato, alla superficie, e con questo rappresenti la tangente alla linea  $i$ , presa col senso indicato. Le formole (4) e (5) forniscono

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha'_i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \beta'_i + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \gamma'_i \right).$$

La (7) mostra che, per la derivata prima, si può sostituire la coordinata relativa ad un asse tangenziale all'arco di linea superficiale corrispondente: mentre le (8) e (9) mostrano che simile sostituzione non si può fare in generale, per le derivate di ordine superiore. Per cui, applicando le formole in discorso alle (2) o alla (3), si nota che, supposti gli assi  $x$  e  $y$  tangenziali, si può derivare lungo la superficie ( $\lim \varphi$  o  $D\varphi$ ) per avere il limite, o il salto, di  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , ma non egualmente per avere il limite, o il salto, di  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ .

La (7) assume una forma particolarmente utile, supponendo che la linea  $i$  sia linea di curvatura della superficie, relativa al considerato punto, e che

l'asse delle  $z$  abbia la direzione della normale alla superficie, nel punto stesso, presa con un senso stabilito, per attribuire poi alla misura  $R_i$  del raggio di curvatura principale corrispondente il segno  $+$  o il segno  $-$ , secondo che il relativo centro di curvatura si trova dalla parte positiva o negativa della normale medesima. Si ha, con questo, pel teorema di Meusnier,

$$\frac{\gamma'_i}{\rho_i} = \frac{1}{R_i}.$$

Per cui la (8) diventa

$$(7') \quad \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_i} \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \alpha'_i + \frac{\partial}{\partial y} \beta'_i \right) + \frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{1}{R_i}.$$

Applichiamo le precedenti formole al caso di

$$(10) \quad \varphi = \int_{\sigma} \frac{k \, d\sigma}{r}$$

« funzione potenziale di strato semplice », dove  $r$  rappresenta la distanza del punto P dello spazio dal punto generico della superficie  $\sigma$ , e  $k$  è supposta una funzione regolare di questo punto: cioè una funzione limitata, continua, e dotata delle derivate, rispetto alle coordinate cartesiane del punto, fino all'ordine che occorre considerare.

Basta supporre  $k$  limitata e continua, perchè  $\varphi$  ne risulti funzione limitata e continua di P, in tutto lo spazio: e supporre le derivate prime di  $k$  limitate e integrabili, perchè  $\varphi$  ammetta derivate prime, limitate e continue dalle due parti, separatamente, di  $\sigma$ . Si ha quindi, nella prima ipotesi,

$$(11) \quad D\varphi = 0,$$

e, aggiungendovi la seconda, per (3), dove si faccia  $\mu = 1$ ,  $\nu = 0$ , e (7) (relativa all'asse della  $x$  tangenziale)

$$(12) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Nelle stesse due ipotesi, per un risultato di Beltrami <sup>(1)</sup>, recentemente richiamato e utilizzato da Somigliana <sup>(2)</sup>, ogni derivata prima di  $\varphi$  si può rappresentare come somma di tre funzioni potenziali, di linea, relativa al contorno di  $\sigma$ , di strato semplice e di doppio strato, relative a  $\sigma$ ; espres-

<sup>(1)</sup> *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. Neumann sulle funzioni potenziali.* Annali di Matematica pura e applicata (2), vol. X (1880).

<sup>(2)</sup> *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LI (1916).

sione che intanto fornisce, inteso che l'asse delle  $z$  abbia la direzione della normale a  $\sigma$ , nel punto considerato,

$$(13) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -4\pi k.$$

Ora, ammessa l'esistenza delle derivate seconde di  $k$ , con cui si forma la densità dell'accennato strato semplice, risulta dalla stessa espressione, per le ricordate proprietà generali della funzione potenziale di strato semplice, oltre di che, per le premesse ipotesi, in conseguenza delle note proprietà della funzione potenziale di doppio strato, che  $\varphi$  ammetterà derivate seconde, rispetto alle singole coordinate, limitate e continue, dalle due parti, separatamente, della superficie  $\sigma$ .

Tanto basta perchè possiamo applicare a (11) la (3), dove si faccia  $\mu = 2$ ,  $\nu = 0$ , e s'introduca  $s_i$ . Otteniamo, supposti gli assi delle  $x$  e delle  $y$  tangenti alle linee di curvatura, nel punto considerato, per (7'), tenendo conto di (12) e di (13),

$$(14) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi k}{R_1}, \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{4\pi k}{R_2}.$$

Dalle quali due relazioni, poichè, verificandosi dalle due parti di  $\sigma$

$$A_2 \varphi = 0,$$

si avrà

$$D A_2 \varphi = 0,$$

si ricava

$$(15) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi k \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Inoltre, applicando la (3), con  $\mu = 1$ ,  $\nu = 0$  (introdottovi  $s_i$ ), alla (13), e valendosi della (6), si ottiene

$$(16) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = -4\pi \frac{\partial k}{\partial x}.$$

Per  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$  giova riprendere le coordinate  $u, v$ . Si ha, con espressione simbolica, simile a quella adoperata in (5),

$$(17) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right] \times \\ \times \left[ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

E supposto che i tre sistemi di linee coordinate siano tra loro ortogonali, e che gli assi delle  $x$  e delle  $y$  rappresentino le tangenti alla linea 1 e alla linea 2, nel punto considerato,

$$(17)' \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \sqrt{EG} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Nell'ipotesi che, inoltre, le linee coordinate siano formate colle linee di curvatura, risulta (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Per cui, applicando a (11) la (3), dove si faccia  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ , nelle stesse ipotesi, e tenendo conto di (12), otteniamo

$$D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Tutte relazioni, codeste, che si trovano negli scritti testè ricordati.

In modo simile si possono agevolmente dedurre le relazioni analoghe, relative alla funzione potenziale di doppio strato

$$\varphi = \int_{\sigma} k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

valendosi semplicemente della relazione

$$D\varphi = 4\pi k.$$

(1) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, Spoerri, 1902), Cap. IX, formule (I) (§ 55) e (14) (§ 62).

Chimica-fisica — *Sui cristalli misti*. Nota del Socio CARLO VIOLA.

I cristalli misti si possono considerare come miscele meccaniche, miscele fisiche o soluzioni solide. È strano ma non inopportuno che si venga a rivangare teorie antiche dei tempi di Rammelsberg, Tschermak, Mallard, Retgers ecc. quando la splendida teoria sulle soluzioni solide dapprima tentata da Lecoq de Boisbaudrand, indi sostenuta da van't Hoff e proseguita fino ad oggi, avesse portato a risultati insperati con gli studi ed esperienze di Roozeboom, Tammann, Bruni e altri. Le variazioni nell'energia totale e nell'energia interna che sogliono caratterizzare le soluzioni solide, come vorrebbe E. Sommerfeld, si ripetono eziandio nelle miscele meccaniche, purchè per la scissione dei componenti eterogenei di esse, occorra un consumo di lavoro. Anzi si può aggiungere che quando i singoli componenti di una miscela sono piccolissimi, tali da essere paragonabili con la lunghezza d'onda dei raggi visibili ( $4 \times 10^{-5}$  —  $8 \times 10^{-5}$  cm.), le miscele meccaniche non differiscono essenzialmente dalle soluzioni solide, tranne per l'esistenza in queste ultime della pressione osmotica e per il fenomeno della diffusione, che ne è la conseguenza. Ma come poi il fenomeno della diffusione in moltissimi cristalli misti è quasi impercettibile, e la forza osmotica non è misurabile praticamente con quantità conosciute, ne viene che la differenza è trascurabile od irrealizzabile con l'analisi termica. Questo cercai di dimostrare nella mia precedente Nota <sup>(1)</sup>, ove rilevai ancora che le recenti esperienze sulla struttura dei cristalli danno ragione di questo modo di vedere; poichè se la struttura dei cristalli consiste di sistemi punteggiati identici, nei cui nodi sono gli atomi o centri di essi, non le molecole, come si è ritenuto sempre, intercalati fra di loro, il cristallo stesso rappresenta uno stazionario stato omogeneo ed anisotropo, nel quale moti di traslazione sono esclusi. Giusta le dette esperienze le molecole esistenti nello stato amorfo, passando allo stato cristallino tanto si accostano, ossia si associano in un complesso omogeneo, che le loro distanze non sono diverse da quelle fra gli atomi, sicchè questi divengono gli individui del cristallo, come risulta precisamente dalle esperienze di Laue, Bragg e dalle considerazioni teoriche di Groth, mentre gli individui dello stato amorfo sono sempre le molecole, e da queste esso è determinato <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> C. Viola, R. Accademia dei Lincei, Rendiconti 1916, II, 286.

<sup>(2)</sup> Vedi a questo proposito A. E. H. Tutton, Zeit. f. Krystall. 1897, 27, 266, che già allora parlava di *unità strutturale*, mentre G. Wyronboff, Bull. d. Soc. min. de Fr., 1906, 29, 235, 354, sosteneva ancora la *particule cristalline*.

Le soluzioni solide invero sono state messe in paragone con i cristalli misti prima da Lecoq de Boisbaudrand, indi da van't Hoff; ciò ha permesso a H. W. Backhuis-Roozeboom (1) di spiegare i fenomeni della solubilità e della fusibilità dei cristalli misti, e l'equilibrio di essi con la fase amorfa secondo la legge delle fasi di Gibb. Ma la generalizzazione di questa teoria non era necessaria; la maggior parte dei cristalli misti, specialmence le miscele isomorfe non sono soluzioni, o se lo sono, questo fatto, non perchè tale, ma per le ragioni suesposte, non modifica le conclusioni, che si traggono dalle miscele — non soluzioni —.

\* \* \*

Posto ciò possiamo esaminare le condizioni di equilibrio di contatto fra un cristallo misto così concepito e la fase amorfa, da cui esso trae origine. Il problema così posto è naturalmente risolvibile con gli stessi dati occorrenti per dimostrare la legge di Curie (2), secondo la quale gli accrescimenti perpendicolari alle facce di un cristallo sono proporzionali direttamente alle loro rispettive costanti capillari.

Esso è il seguente. Il cristallo misto in esame sia composto di due componenti, cioè di due cristalli in intimo contatto fra di loro fino nelle piccole parti. L'equilibrio di esso con la fase amorfa, nella quale si trovano gli stessi componenti, in generale in proporzione diversa da quella, in cui si trovano gli stessi componenti nel cristallo misto, avverrà quando in primo luogo la proporzione fra i due componenti non si alteri, pur variando la massa complessiva in corrispondenza con la legge delle fasi di Gibb; in secondo luogo quando l'energia superficiale sia minima in corrispondenza con la minima azione; ed in terzo luogo, vogliamo stabilire, quando il volume totale del cristallo misto non varii, ferma stando per tal modo la condizione che non vi sia nel sistema nè immissione nè emissione di energia calorifica. La sola variazione possibile è dunque nella forma.

Immaginiamo che il cristallo misto sia formato di particelle finissime del primo e del secondo componente. Le perpendicolari alle facce del cristallo misto, tirate da un centro O interno, attraverseranno strati del primo e del secondo componente. Sia p. es.  $p_r$  la distanza effettiva dal centro O ad una delle numerose facce costituenti il contorno di area  $s_r$ , la quale conterà di due parti, una di esse d'area  $s'_r$  appartenente al primo componente, l'altra di area  $s''_r$  appartenente al secondo. La distanza perpendicolare  $p_r$  consta anch'essa di due parti:  $p'_r$ , comprendente strati del primo componente, e  $p''_r$  comprendente strati del secondo, sicchè  $p_r = p'_r + p''_r$  come

(1) Zeitschr. f. phys. Chemie, 1891, 8, 531.

(2) C. Viola, R. Accademia dei Lincei, 1916, II, 401.



$s_r = s'_r + s''_r$ . I volumi elementari dei due componenti sono rispettivamente

$$\frac{1}{3} p'_r s'_r \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} p''_r s''_r,$$

e quindi i volumi totali:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V' = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{r=n} p'_r s'_r \quad \text{del primo componente,} \\ V'' = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{r=n} p''_r s''_r \quad \text{" secondo " ;} \end{array} \right.$$

intendendo estese le sommatorie a tutte le facce  $s'_1, s'_2, s'_3, \dots, s'_n$  e rispettivamente  $s''_1, s''_2, s''_3, \dots, s''_n$  dei due componenti con le rispettive distanze perpendicolari  $p'_1, p'_2, p'_3, \dots, p'_n$  e  $p''_1, p''_2, p''_3, \dots, p''_n$  a partire da un centro interno comune O.

Siano  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \dots, \alpha'_n$  e rispettivamente  $\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3, \dots, \alpha''_n$  le costanti capillari delle suddette  $n$  facce dei due componenti; le tensioni superficiali totali saranno con ciò

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E' = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r s'_r \quad \text{del primo componente,} \\ E'' = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r s''_r \quad \text{" secondo " .} \end{array} \right.$$

Consideriamo ora una deformazione virtuale del cristallo misto, sotto l'azione della fase amorfa.

Facendo variare di  $\delta p_r$  la distanza perpendicolare  $p_r = p'_r + p''_r$ , si otterrà una variazione corrispondente  $\delta s'_r$  dell'area  $s'_r$  e  $\delta s''_r$  relative alla perpendicolare  $p_r$ , cosicchè le variazioni volumetriche elementari saranno:

$$(s'_r + \delta s'_r) \delta p'_r = s'_r \delta p'_r \quad \text{del primo componente,}$$

$$(s''_r + \delta s''_r) \delta p''_r = s''_r \delta p''_r \quad \text{" secondo " ,}$$

trascurando quantità piccole di secondo ordine.

Facendo la variazione totale del volume elementare, ossia

$$\delta \frac{1}{3} (p'_r s'_r) = \frac{1}{3} p'_r \delta s'_r + \frac{1}{3} s'_r \delta p'_r = s'_r \delta p'_r,$$

si ottiene semplicemente

$$s'_r \delta p_r = \frac{1}{2} p'_r \delta s'_r \quad \text{per il primo componente,}$$

$$s''_r \delta p_r = \frac{1}{2} p''_r \delta s''_r \quad \text{" secondo " .}$$

Nel considerare una piccolissima deformazione del cristallo per effetto del contatto con la fase amorfa, una sola ipotesi è giustificata, cioè che avvenga una variazione di volume, rimanendo inalterato il rapporto fra i due componenti, come si è sopra osservato, poichè si suppone che l'equilibrio stabile secondo la legge delle fasi di Gibb sia pienamente raggiunto.

Questa ipotesi, per le cose sopradette, porta naturalmente all'equazione:

$$\sum_{r=1}^{r=n} p'_r \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} p''_r \delta s''_r = 0.$$

Consideriamo analogamente le variazioni parziali delle tensioni superficiali, dovute alle stesse variazioni delle aree  $\delta s'_r$  e  $\delta s''_r$ ; otterremo:

$$\begin{aligned} \delta E' &= \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r \delta s'_r && \text{del primo componente,} \\ \delta E'' &= \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r \delta s''_r && \text{" secondo " " .} \end{aligned}$$

Dalla loro somma risulterà la variazione totale dell'energia superficiale del cristallo misto, la quale dovrà annullarsi per l'equilibrio stabile del sistema, vale a dire si avrà

$$\sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r \delta s''_r = 0.$$

Le due equazioni come condizione dell'equilibrio del cristallo misto in contatto con la fase amorfa nella supposizione che non vi sia nè emissione nè immissione di calore, sono dunque le seguenti:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{r=1}^{r=n} p'_r \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} p''_r \delta s''_r &= 0 \\ \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r \delta s''_r &= 0. \end{aligned} \right.$$

Moltiplicando la seconda di queste equazioni per una costante — C da determinarsi, e sommata alla prima, si ottiene

$$(4) \quad \sum_{r=1}^{r=n} (p'_r - C\alpha'_r) \delta s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} (p''_r - C\alpha''_r) \delta s''_r = 0.$$

Le variazioni  $\delta s'_r$  e  $\delta s''_r$ , come ancora  $\delta p'_r$  e  $\delta p''_r$  non sono fra loro indipendenti; infatti le concentrazioni dei due componenti sono determinati, tale essendo la condizione nell'equilibrio di contatto. Potremo dunque stabilire il rapporto, costante, almeno entro certi limiti,

$$(5) \quad \delta s''_r = c_r \delta s'_r \quad r = 1, 2, 3, \dots, n,$$

mediante il quale la (4) diventa

$$(6) \quad \sum_{r=1}^{r=n} \left\{ (p'_r - C\alpha'_r) \delta s'_r + (p''_r - C\alpha''_r) c_r \delta s'_r \right\} = 0,$$

ove tutte le variazioni  $\delta s'_r$ ,  $r = 1, 2, 3 \dots n$ , sono fra loro indipendenti, o possono considerarsi tali, sino a quantità piccole di secondo ordine. Per tal modo le (6) si scindono nelle  $n$  condizioni seguenti:

$$(7) \quad (p'_r + p''_r c_r) = C(\alpha'_r + \alpha''_r c_r) \quad r = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Vale a dire: *gli accrescimenti medi, perpendicolari alle facce del cristallo misto sono proporzionali direttamente alle costanti capillari medi dei due componenti.*

Da qui segue la regola: *La figura normale di un cristallo misto, è una media delle figure normali dei cristalli che lo compongono nel rapporto, in cui essi si trovano nel cristallo misto (Analogia della legge di Curie).*

Fin qui abbiamo considerato che  $\delta s'_r$  e  $\delta s''_r$  siano dello stesso segno; ma ciò non è assolutamente necessario. Possiamo all'incontro sostituire alle (5) il rapporto

$$(5_a) \quad \delta s''_r = -c_r \delta s'_r,$$

con la quale in luogo della (6) si ottiene:

$$(8) \quad \sum_{r=1}^{r=n} \left\{ (p'_r - C'\alpha'_r) \delta s'_r - (p''_r - C'\alpha''_r) c_r \delta s'_r \right\} = 0$$

e in luogo delle (7) le condizioni di equilibrio:

$$(9) \quad (p'_r - p''_r c_r) = C'(\alpha'_r - \alpha''_r c_r), \quad r = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Moltiplicando le (7) e le (9) per  $s'_r$ , col riguardo delle (5) e (5<sub>a</sub>), si deduce

$$(10) \quad p'_r s_r + p''_r s'_r = C(\alpha'_r s'_r + \alpha''_r s'_r) \quad \left. \vphantom{p'_r s_r + p''_r s'_r} \right\} r = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$(11) \quad p'_r s_r - p''_r s'_r = C'(\alpha'_r s'_r - \alpha''_r s'_r) \quad \left. \vphantom{p'_r s_r - p''_r s'_r} \right\}$$

Dando ad  $r$  tutti gli indici  $1, 2, 3, \dots, n$ , quante sono le facce in esame, indi sommando tutte le analoghe alle (10), e alla lor volta tutte le analoghe alle (11), si ottengono le relazioni seguenti:

$$(12) \quad \sum_{r=1}^{r=n} p'_r s'_r + \sum_{r=1}^{r=n} p''_r s'_r = C \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r s'_r + C \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r s'_r,$$

ovvero

$$(13) \quad \sum_{r=1}^{r=n} p'_r s'_r - \sum_{r=1}^{r=n} p''_r s''_r = C' \sum_{r=1}^{r=n} \alpha'_r s'_r - C' \sum_{r=1}^{r=n} \alpha''_r s''_r,$$

ossia, in virtù delle (1) e (2),

$$(14) \quad \begin{cases} V' + V'' = C(E' + E'') \\ V' - V'' = C'(E' - E''). \end{cases}$$

La prima di queste due relazioni esprime semplicemente la legge di Curie <sup>(1)</sup>, ossia:

*La totale energia superficiale è sempre proporzionale direttamente al volume totale del cristallo misto.*

La seconda dice:

*La differenza delle energie superficiali dei componenti è proporzionale direttamente alla differenza dei volumi, in ogni istante dell'accrescimento, qualunque sia d'altronde il rapporto fra i componenti del cristallo misto.*

Se è interessante questo risultato che in ogni istante e per qualsivoglia rapporto di concentrazione la differenza delle energie superficiali è proporzionale alla differenza dei volumi dei rispettivi componenti, di gran lunga più importante è il fenomeno se i componenti si mescolano in proporzione di volumi eguali, ossia

$$V' = V'',$$

<sup>(1)</sup> La relazione di Curie (C. Viola, R. Accademia dei Lincei, Rendiconti, II, 401)

$$(1) \quad p_1 : p_2 : p_3 : \dots : p_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \dots : \alpha_n$$

moltiplicata membro a membro rispettivamente per  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ , ed eseguitane la somma, dà appunto

$$\sum_{r=1}^{r=n} p_r s_r = C \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r s_r.$$

Il termine a sinistra è proporzionale direttamente al volume del cristallo  $V$ , il termine a destra è l'energia superficiale  $E$ , sicchè

$$(2) \quad V = CE.$$

Segue: la legge di Curie espressa nella relazione (1), comunemente così conosciuta, riceve la forma (2), ossia: *L'energia superficiale del cristallo è proporzionale direttamente al suo volume, in ogni istante del suo accrescimento.* È naturale che le due forme della stessa legge abbiano lo stesso contenuto; infatti se l'accrescimento del cristallo non avvenisse secondo la (1), in uno stato reversibile, non potrebbe verificarsi la (2); e viceversa se la (2) non fosse soddisfatta, l'accrescimento non avverrebbe secondo la (1), e l'equilibrio stabile di contatto sarebbe rotto.

perchè in tale caso le energie superficiali sono pure eguali,

$$E' = E'',$$

come si trae dalla (14).

La *miscibilità media*, che per semplicità così chiamerò quella determinata da volumi eguali dei componenti, eguali essendo allora le energie superficiali, dovrebbe essere il carattere fondamentale della miscibilità continua entro limiti di due cristalli, poco monta se le miscele siano meccaniche, fisiche o soluzioni solide.

Rappresentino precisamente  $V'$  e  $V''$  i volumi molecolari; e si tratti di due componenti aventi i volumi molecolari così vicini fra di loro che possono ritenersi eguali; ammessa la miscibilità media fra i due, il risultato è il seguente: le stesse energie superficiali si trovano negli stessi volumi molecolari. E poichè le costanti capillari sono proporzionali inversamente alle densità superficiali, risulterà ancora che i due componenti a eguali volumi molecolari hanno la stessa struttura e in tutte le corrispondenti facce la stessa densità. Non si potrebbe immaginare una analogia più completa di questa ora considerata, ove due componenti godono della miscibilità continua entro limiti intorno alla miscibilità media. E tale essendo questa analogia, sarebbe allora opportuno di fondare su questo spiccato carattere la definizione dell'isomorfismo, ossia:

*I cristalli isomorfi hanno la stessa struttura e la stessa densità superficiale e perciò godono della miscibilità continua entro limiti, compresa la miscibilità media, e viceversa.*

Ma conviene subito notare che i corpi, per quanto analoghi, non hanno volumi molecolari eguali; naturalmente trattasi di corpi allo stato libero. Se all'incontro, essi allo stato legato, si trovano ad avere volumi eguali dimostrata dalla miscibilità media, discende da questo fatto che i due componenti subiscono variazione ossia contrazione e rispettivamente dilatazione. Si viene per tal modo a sollevare, non volendo, una questione, rimasta controversa per un lato seguendo Retgers (1) col principio esagerato della additività, per l'altro seguendo Gossner col principio della modificazione (2). La miscibilità continua entro limiti compresa la miscibilità media ne dà appunto la possibilità.

Se dunque componenti allo stato legato si contraggono e rispettivamente si dilatano, la densità dell'uno cresce, dell'altro diminuisce, e i volumi molecolari eguali corrispondono precisamente ai pesi molecolari dei due componenti. La miscibilità media avviene dunque in proporzione dei pesi molecolari. Se questa è possibile i due corpi sono isomorfi, escluso il caso

(1) J. Retgers, op. cit.

(2) B. Gossner, *Ueber Isomorphie*, Zeit. f. Krystall., 1907, 43, 130.

naturalmente che non si presenti una combinazione in proporzione stechiometrica esatta come nei sali doppi, essendo allora impossibile la miscibilità in tutte le proporzioni intorno a detta combinazione.

La miscibilità in tutte le proporzioni è stato sempre il punto più critico della teoria dell'isomorfismo; Retgers (1) nel 1889 dimostrò l'esistenza di lacune nella miscibilità fra sostanze ritenute miscibili in tutte le proporzioni e perciò isomorfe. E dopo Retgers i corpi che si mescolano in proporzioni continue con lacune si sono presentati a centinaia a misura che le ricerche si intensificarono. Invero Groth (2) continuò a ritenere che due isomorfi devono poter mescolarsi in tutte le proporzioni senza lacune, ovvero distinte in seguito isomorfi assoluti e isomorfi relativi; ma Gossner (3) non fu dello stesso avviso, ed estese la definizione dell'isomorfismo a sostanze miscibili in tutte le proporzioni entro limiti separati da lacune. Ognun scorge però in questa definizione una grande indeterminatezza, e Wallerant (4) osservò giustamente a tale proposito: « Queste considerazioni ci conducono « a mettere in rilievo un errore nel quale, mi sembra, incorsero parecchi « autori; essi nell'intento di accertarsi se due corpi siano isomorfi, fecero « cristallizzare una soluzione di questi corpi, ed ottennero cristalli di un « corpo, nei quali l'analisi dimostrò piccolissime quantità dell'altro; con- « clusero allora trattarsi di cristalli misti fra limiti molto ristretti, mentre « in realtà uno di essi non è che impurità dell'altro ».

\* \* \*

A me pare che non si uscirà dalla indeterminatezza, se non si includerà nella definizione dell'isomorfismo la *miscibilità media*, ossia la miscibilità continua entro limiti comprendente la miscibilità nelle proporzioni dei pesi molecolari dei due componenti; senza di questo carattere l'isomorfismo perde la sua vera base, e sotto il suo nome potrebbero riunirsi corpi cristallizzati, che non hanno la più piccola analogia fra di loro. E si comprende che così deve essere, poichè quanto più sono lontani fra di loro i volumi molecolari di due corpi miscibili, tanto meno è possibile la contrazione e dilatazione per dar luogo alla miscibilità media. Qualche esempio, credo, potrà chiarire la questione.

I due sali  $Mg SO_4 + 7 aq$  e  $Fe SO_4 + 7 aq$  sono stati i primi cristalli isomorfi, dove Retgers (5) scoperse lacune nella loro miscibilità in tutte le

(1) I. W. Retgers, Zeitschr. f. phys. Chem. 1889, 3, 552.

(2) P. v. Groth, Einleitung in die chemische Krystallographie, 1904.

(3) B. Gossner, Beiträge zur Kenntniss des Isomorphismus. Zeit. f. Kryst., 1903, 44, 417.

(4) F. Wallerant, Fortschritte f. Min. etc. 1912, vol. II, 74.

(5) J. Retgers, Beiträge zur Kenntniss des Isomorphismus. Zeit. f. phys. Chemie, 1889, 3, 534; 4, 617.

proporzioni, il primo cristallizzando ordinariamente nella classe bisfenoidale-trimetrica (Epsomite) col peso specifico 1,677; il secondo nella classe prismatico-monoclina (Vitriolo di ferro) col peso specifico 1,898.

Il sale magnesiaco nello stato metastabile cristallizza anche nel monoclinico, come il corrispondente sale ferroso, ed allora ha il peso specifico 1,691, secondo le deduzioni di Retgers in base al principio della additività. Ora è dimostrato che i cristalli misti  $(Mg Fe) SO_4 + 7 aq$  in modificazione monoclina contengono del sale di magnesio in tutte le proporzioni da 0 a 54 % in peso, e rispettivamente del sale ferroso da 100 % a 46 %.

La *miscibilità media* di detti sali cade precisamente in questo intervallo; infatti per volumi eguali di entrambi, il sale magnesiaco corrisponde a 47,00 % in peso e il sale ferroso a 53,00 %, tenuto conto dei loro pesi specifici allo stato libero. Si conclude perciò che essendo la miscibilità media di essi possibile nella modificazione monoclina, essi hanno necessariamente eguale struttura e perciò sono isomorfi.

Non così va la bisogna per i due sali nella modificazione trimetrica, che è stabile per il sale magnesiaco e instabile e forse irriversibile per il sale ferroso. Secondo le deduzioni di Retgers il sale ferroso in questa modificazione dovrebbe avere il peso specifico di 1,875.

La miscibilità in tutte le proporzioni va da 0 % a 19 % per il sale ferroso, e rispettivamente da 100 % a 81 % per il sale magnesiaco. La miscibilità media non è possibile, essa esce da questo intervallo; infatti la proporzione corrispondente a 47,00 % in peso del sale magnesiaco e a 53,00 % del sale ferroso, tenuto conto dei relativi pesi specifici; segue da ciò che i due sali ferroso e magnesiaco della modificazione trimetrica non hanno eguale struttura e non sono perciò isomorfi.

Un secondo esempio di miscibilità in tutte le proporzioni e con lacune ci offre lo stesso Retgers <sup>(1)</sup> fra le numerose coppie di corpi, che egli studiò. I due sali sono  $Na NO_3$  e  $Ag NO_3$ .

La modificazione stabile del sale  $Na NO_3$  appartiene alla classe scalenoedrico-trigonale come la calcite; quella stabile del sale  $Ag NO_3$  appartiene alla classe bipiramidale-trimetrica col peso specifico 4,35. Il sale di argento cristallizza ancora in una modificazione instabile appartenente alla classe scalenoedrico-trigonale, come il primo sale, col peso specifico 4,19; mentre non è nota una seconda modificazione del sale sodico, nè stabile nè instabile.

La miscibilità in tutte le proporzioni dei due sali è possibile propriamente solo nella modificazione trigonale ed è diversa per le singole temperature. Alla temperatura di 138° C. essa va dal 0 % al 52 % in peso del sale argenteo e rispettivamente dal 100 % al 48 % del sale sodico; alla

<sup>(1)</sup> J. W. Retgers, op. cit.

temperatura di 15° C. va rispettivamente dal 0 % al 64,4 % in peso del sale argentario e dal 100 % al 35,6 % del sale sodico.

Invero una certa miscibilità sembra possibile anche nella modificazione trimetrica dei due sali, benchè non si conosca la modificazione corrispondente del sale sodico. Infatti Retgers ottenne cristalli misti di questa modificazione dal 0 % al 1,6 % del sale sodico e rispettivamente dal 100 % al 98,4 % del sale argentario alla temperatura di 138° C., e dal 0 % al 4,5 % del sale sodico alla temperatura di 15°. Probabilmente quest'ultima miscibilità presunta di Retgers non è che impurità di Vallerant.

In conclusione la lacuna esistente nella miscibilità di questa coppia di sali va dal 52 % al 98,4 % del sale argentario e rispettivamente dal 48,8 % al 1,6 % del sale sodico per la temperatura di 138° C.; e dal 64,4 % al 95,5 % del sale argentario per la temperatura di 15°.

La *miscibilità media* all'incontro corrisponde a 33,40 % in peso del sale sodico e rispettivamente a 66,6 % in peso del sale argentario, tenuto conto che il peso specifico del sale sodico è 2,271 e quello del sale argentario 4,19 allo stato libero; essa è vicinissima alla miscibilità osservata di 35,6 % del sale sodico per la temperatura di 15°, ma ne è lontana dal limite 48 % per la temperatura di 138°.

Dato che la lacuna si restringe col discendere della temperatura da 138° a 15°, si potrebbe concludere che a più bassa temperatura la miscibilità media non sia compresa nella lacuna, e che perciò i due sali  $\text{AgNO}_3$  e  $\text{NaNO}_3$  siano isomorfi nella modificazione trigonale, e solo in questa. Ma alzandosi la temperatura i volumi molecolari tanto si scostano l'uno dall'altro che la miscibilità media riesce impossibile. L'esempio è istruttivo poichè dimostra che se due corpi non appaiono isomorfi a una certa temperatura, mancandovi il carattere sperimentale riconoscibile, lo possono tuttavia essere a temperatura molto diversa da quella osservata.

Apparece intanto da queste considerazioni un fatto importante che se due corpi sono isomorfi in una modificazione, non lo possono essere in un'altra. Ammenochè le differenti modificazioni di detti corpi non comprendano la miscibilità media <sup>(1)</sup>; tanto si dica della coppia  $\text{AgNO}_3$  e  $\text{NaNO}_3$  quanto della coppia precedente; cosicchè la definizione della morfotropia di Groth dovrebbe essere un po' più allargata, e quella dell'isodimorfismo un po' più ristretta, limitando il principio delle soluzioni solide solo a miscibilità piccolissime.

Gossner <sup>(2)</sup> sperimentò varie sostanze miscibili in tutte le proporzioni con lacune. I due sali  $\text{KCl}$  e  $(\text{NH}_4)\text{Cl}$  ritenuti isomorfi, sono miscibili in

<sup>(1)</sup> A. Steger, *Zeitschr. f. phys. Chemie.* 1903, 43, 595.

<sup>(2)</sup> B. Gossner, *Untersuchung polymorpher Körper.* Zeit. f. Kryst. 1903, 38, 110 e B. Gossner, *Zeitschr. f. Kryst.* 1908, 44, 491.



quantità molto limitate formando da un lato cristalli aventi la figura del sale KCl con pochissima quantità di NH<sub>4</sub>Cl, dall'altra cristalli aventi la figura del sale NH<sub>4</sub>Cl con pochissima quantità di KCl. Secondo quanto abbiamo qui esposto i due cloruri non possono essere considerati isomorfi, nè quelli con la modificazione di KCl, nè quelli con la modificazione di NK<sub>4</sub>Cl. Chi li vuole isomorfi ad ogni costo esce dal campo sperimentale, ed entra in un campo ipotetico come il Groth, ritorcendo la miscibilità continua ma piccolissima a vantaggio di idee aprioristiche, che nel campo della lacuna la miscibilità è possibile, ma le modificazioni che vi prendono parte sono così labili, che esulano dalle osservazioni. La stessa cosa può ripetersi per alcuni sali di K e NH<sub>4</sub> apparentemente analoghi. Altrettanto debba ritenersi per la coppia NaCl e KCl, se si tien conto della loro struttura.

\* \* \*

Fissato il principio che l'isomorfismo di due corpi premette la miscibilità media nel campo della miscibilità in tutte le proporzioni con o senza lacune fuori di questo campo, è conseguenza inerente a questo principio che per volumi eguali di due corpi isomorfi, le energie superficiali sono eguali come sono eguali le loro strutture.

Fosto ciò e dato che le costanti capillari sono inversamente proporzionali alle densità superficiali, segue che *i corpi isomorfi non solamente hanno la stessa struttura, ma ancora allo stato legato hanno lo stesso numero di atomi o di gruppi di atomi vicarianti nello stesso volume a temperatura e pressione data.*

Quando i corpi si trovano allo stato libero, i loro volumi elementari sono conosciuti; essi sono infatti i volumi molecolari, nel supposto che allo stato amorfo essi abbiano la stessa molecola con lo stesso numero di atomi o gruppi di atomi vicarianti.

Ecco per esempio i pesi specifici (Ps), i pesi molecolari (M) e i volumi molecolari (V) per le sostanze sopra considerate allo stato libero. ritenute isomorfe:

	Ps	M <sub>1</sub> e M <sub>2</sub>	V <sub>1</sub> e V <sub>2</sub>	$\frac{1}{2}(V_1 + V_2)$
{ Mg SO <sub>4</sub> + 7 aq	1,691	247,072	146,11	} 143,815
{ Fe SO <sub>4</sub> + 7 aq	1,898	278,612	141,52	
{ Na NO <sub>3</sub>	2,271	85,09	37,60	} 39,03
{ Ag NO <sub>3</sub>	4,190	169,97	40,46	

Da questi esempi e da altri che si potrebbero facilmente aggiungere, risulta che i corpi ritenuti isomorfi nel senso sopra indicato, non hanno allo stato libero volumi eguali per lo stesso numero di atomi o gruppi di essi.

La conclusione che dobbiamo trarre da queste considerazioni è che in generale i corpi isomorfi nel formare cristalli misti si contraggono o si dilatano, come si è sopra detto. nel senso di ottenere come risultato finale volumi eguali per lo stesso numero di atomi o gruppi di essi, non importa se i cristalli misti siano soluzioni o no <sup>(1)</sup>. Di quanto essi si contraggono o rispettivamente si dilatano, è questo un problema, che richiede altre esperienze. Non andiamo però molto lontani dal vero, supponendo i volumi elementari di due isomorfi allo stato legato siano eguali alla media aritmetica dei volumi elementari di detti isomorfi allo stato libero nel caso di miscibilità media.

Posto  $V_1$  e  $V_2$ , i volumi elementari di due isomorfi allo stato libero. Attesa la miscibilità media i volumi eguali dei due componenti si portano con ciò al valore  $V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ . Da qui viene che il componente di volume maggiore  $V_1$  si contrae nella proporzione seguente nello stato legato:

$$\varepsilon_1 = \frac{V_1 + V_2}{2V_1};$$

il componente di volume minore  $V_2$  si dilata nella proporzione seguente:

$$\varepsilon_2 = \frac{V_1 + V_2}{2V_2}.$$

Nei sopra citati gruppi isomorfi i coefficienti di contrazione e di dilatazione  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  sono i seguenti:

$\varepsilon_1 = 0,984$	per il componente	Mg SO <sub>4</sub> + 7 aq
$\varepsilon_2 = 1,016$	" "	Fe SO <sub>4</sub> + 7 aq
$\varepsilon_1 = 0,974$	" "	Ag NO <sub>3</sub>
$\varepsilon_2 = 1,038$	" "	Na NO <sub>3</sub>

È inoltre naturale che le contrazioni e dilatazioni si ripartiscono diversamente nel cristallo, se diverse sono le concentrazioni.

Posto  $p_1$  % il peso di un componente del cristallo misto, e  $p_2$  % quello dell'altro, essendo  $p_1 + p_2 = 100$ , sarebbe naturale supporre che le contrazioni e le dilatazioni di essi,  $\varepsilon'_1$  e  $\varepsilon'_2$ , fossero proporzionali inversamente ai volumi  $v_1 = \frac{p_1}{s_1}$  e  $v_2 = \frac{p_2}{s_2}$ , essendo  $s_1$  ed  $s_2$  i loro pesi specifici allo stato libero; ossia stabilire

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 \frac{v_2}{(V_2)} \quad \text{e} \quad \varepsilon'_2 = \varepsilon_2 \frac{v_1}{(V_1)}.$$

<sup>(1)</sup> B. Gossner, op. cit. Vedi anche E. Mallard, Bull. Soc. Min. d. France, 1886, 9, 120.

essendo

$$(V_1) = \frac{100}{M_1 + M_2} V_1 \quad \text{e} \quad (V_2) = \frac{100}{M_1 + M_2} V_2;$$

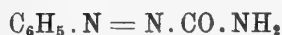
perchè il componente in predominanza deve esercitare maggiore compressione sull'altro, che questo su quello.

In questo senso sarebbero corrette le tabelle dei pesi specifici di Gossner — per i componenti allo stato legato — ed i pesi specifici dei cristalli misti calcolati da Retgers.

Chimica. — *Sopra l'ossidazione della fenilazocarbonammide* (1).

Nota del Socio A. ANGELI.

Nella Nota precedente, sopra gli acidi azocarbonici, pubblicata nei Rendiconti dello scorso mese, ho accennato che l'ammide di Oscar Widman (2):



per ossidazione con acqua ossigenata in soluzione acetica, addiziona nettamente un atomo di ossigeno, come fanno tutti gli azoderivati, per dare un prodotto che probabilmente si doveva considerare come uno dei due azossi-composti corrispondenti alla forma:



Le ulteriori esperienze che ho eseguite hanno dimostrato che la mia previsione era esatta.

Per preparare il nuovo prodotto, che rappresenta il primo derivato di un acido azossicarbonico:



che finora si conosca, si sciogliono a caldo 8 gr. dell'ammide di Widman in 30 cc. di acido acetico ed alla soluzione così ottenuta si aggiungono 10 cc. di acqua ossigenata al 30 % (peridrol Merck). Il liquido, intensamente colorato in rosso bruno, viene tenuto per circa una settimana alla temperatura di 40-45°, riscaldando il bagno dalle 8 del mattino alle 7 della sera. Dopo questo tempo la colorazione del liquido, che presenta ancora le reazioni dell'acido peracetico, ha diminuito notevolmente di intensità ed appare rosso aranciata. Per ricavare il prodotto che si è formato, si può versare il liquido in grandi vetri da orologio che si pongono nel vuoto, a

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio per le sostanze esplosive in Roma.

(2) Berliner Berichte, 28 (1895), 1927.

temperatura ordinaria, sopra calce: il solvente si evapora e rimane indietro una massa cristallina giallognola.

Oppure si può versare il liquido in circa 200 cc. di acqua; si separa una massa cristallina aranciata, semisolida che viene raccolta su filtro e seccata nel vuoto; il liquido acquoso si estrae con etere e lo strato eterico si lava con carbonato sodico allo scopo di togliere la maggior parte dell'acido acetico. Non bisogna però impiegare eccesso di carbonato, perchè questo può decomporre il prodotto che sta sciolto. Per evaporazione del solvente si ottiene una nuova quantità di sostanza che si riunisce alla prima. Per la purificazione, il prodotto secco nel vuoto, viene bollito un paio di volte con poco benzolo, nel quale anche a caldo è poco solubile. In tal modo rimane sciolta nel benzolo una piccola quantità di un olio giallo, che ha odore di nitrobenzolo, che poi si rapprende in una massa cristallina che non ho ancora esaminato. Non è improbabile che sia costituito del secondo isomero preveduto dalla teoria. Il prodotto rimasto insolubile in benzolo a freddo, si può ricristallizzare da acqua bollente, nella quale è abbastanza solubile, impiegando piccola quantità di nero animale, allo scopo di eliminare una traccia di resina che trattiene. Dopo un paio di ricristallizzazioni si ottengono magnifici aghi splendenti, lunghi qualche centimetro, lievemente colorati in bianco giallognolo. Fondono nettamente a 151°, con debole sviluppo gassoso. Il prodotto si può anche purificare da molto benzolo bollente; anche in questo caso si separa sotto forma di aghi che appaiono quasi bianchi, perchè più sottili, e che fondono alla stessa temperatura. Il prodotto è molto solubile in alcool ed acetone; poco solubile in etere a freddo.

La sostanza seccata nel vuoto diede all'analisi i seguenti numeri:  
gr. 0,1135 di sostanza fornirono cc. 24,3 di azoto a 11° e 759 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_7H_7N_3O_2$
N	25,70	25,45

La combustione deve venire eseguita con molta cautela perchè la sostanza cede con grande facilità la maggior parte del suo azoto quando le fiamme sono ancora molto lontane.

Il prodotto bollito con acido solforico al 25 % passa prima in soluzione e poi si decompone con forte sviluppo di azoto; nello stesso tempo si forma fenolo.

Evidentemente per tale trattamento l'ammide viene dapprima saponificata e l'acido fenilazossicarbonico che si forma:



a caldo, perde anidride carbonica per dare solfato di fenildiazonio, che suc-

cessivamente si decompone nel solito modo. All'acido solforico più diluito e bollente, presenta una maggiore resistenza, tanto che anche dopo riscaldamento prolungato di alcuni minuti, per raffreddamento ricristallizza in gran parte inalterata. Nell'acido solforico concentrato a freddo si scioglie con colorazione giallo bruna, ma senza sviluppo gassoso. Dopo qualche tempo, per aggiunta di acqua, il liquido presenta le reazioni dei sali di fenildiazonio.

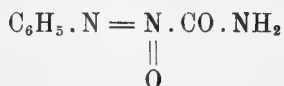
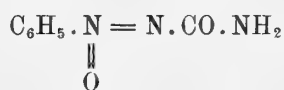
La fenilazossicarbonammide è invece molto sensibile all'azione degli alcali ed anche dei carbonati alcalini.

La soluzione acquosa, per ebollizione con  $\beta$ -naftolo, si mantiene incolore; ma se si aggiunge qualche goccia di carbonato sodico al liquido bollente, esso si colora immediatamente in rosso scarlatto, in seguito a formazione di benzolazonaftolo. Lo stesso si verifica per azione degli idrati alcalini. Aggiungendo all'ammide qualche goccia di potassa essa passa in soluzione; riscaldando il liquido si svolge ammoniacca (1).

Dopo raffreddamento, la soluzione per trattamento con  $\beta$ -naftolo fornisce immediatamente benzolazonaftolo purissimo. Versando sopra l'ammide potassa metilica, essa passa del pari in soluzione con lieve sviluppo gassoso; aggiungendo etere si separano cristalli gialli che con  $\beta$ -naftolo si comportano nell'identico modo.

Che veramente si tratti dell'azossicomposto corrispondente all'ammide di Widman, viene provato dal fatto che per moderata riduzione il primo si può nuovamente trasformare nella seconda, come si dirà più avanti.

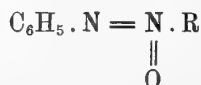
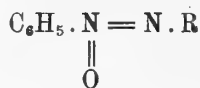
Siccome la fenilazocarbonammide di partenza rappresenta un azoderivato asimmetrico, come ho dimostrato nei precedenti lavori, ad essa corrispondono due azossicomposti isomeri:



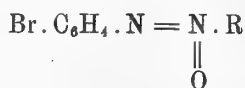
e per decidere quale delle due forme spetta al derivato da me ottenuto, sono ricorso al metodo che ho impiegato con buon successo in tutti i casi finora studiati e che consiste nello studiare il comportamento della sostanza,

(1) È noto che anche l'ammide di Widman  $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N} : \text{N} \cdot \text{CO} \cdot \text{NH}_2$  può dare sali; perciò è molto probabile che per azione della potassa a freddo anche l'azossiammide possa in una prima fase fornire un sale potassico:  $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot (\text{N}_2\text{O}) \cdot \text{CO} \cdot \text{NHK}$ , tanto che acidificando il liquido si riottiene l'ammide di partenza. Solamente per ulteriore azione dell'alcali, questa viene saponificata con formazione del sale dell'azossiacido.

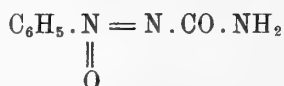
rispetto all'azione del bromo; come risulta infatti da tutte le esperienze eseguite, dei due isomeri:



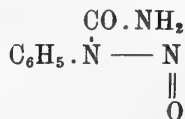
solamente il secondo per azione di questo metalloide, fornisce il *p*-bromo-derivato:



mentre invece il primo rimane inalterato. Ora, l'azossiammide da me preparata, trattata con bromo, senza impiego di solvente, a temperatura ordinaria, rimane indifferente all'azione dell'alogeno e perciò, delle due possibili, ad essa spetta la forma:



Il composto, come si vede, è anche isomero con la nitrosammina della fenilurea:

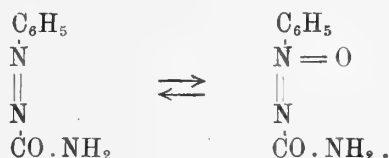


preparata da Walther e Wlodkowski (1); questa fonde a 95°, è molto alterabile e bollita con acqua fornisce facilmente azoto e fenolo. La fenilazossicarbonammide è molto stabile, e come si è detto, si purifica benissimo ricristallizzandola dall'acqua bollente.

Per trasformare l'azossiammide nel prodotto di partenza, vale a dire nella fenilazocarbonammide di Widman, la si scioglie a freddo in etere; è necessario impiegare molto solvente data la sua piccola solubilità ed il liquido si versa sopra un po' di amalgama di alluminio. Si nota un lieve sviluppo d'idrogeno e quando la riduzione è compiuta, a temperatura ordinaria, si filtra il liquido incolore nel quale si aggiunge poco per volta ossido di mercurio preparato di recente e secco. Le prime porzioni dell'os-

(1) Journal f. pr. Chemie, (2), 59, 282.

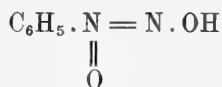
side vengono prontamente ridotte e quando il giallo dell'ossido rimane persistente si filtra di nuovo e si evapora la soluzione che da incolore è diventata gialla. Rimane indietro una massa cristallina, di colore aranciato, che purificata dall'acqua bollente fonde nettamente a 114° e che possiede tutti i caratteri dell'ammide di Widman. Per riduzione dunque l'azossiderivato ha perduto nettamente l'atomo di ossigeno che si era addizionato per azione dell'acqua ossigenata all'ammide; questo fatto, che porta una nuova conferma alla formula di struttura da me assegnata alla sostanza, dimostra anche che la trasformazione è invertibile, nel senso rappresentato dallo schema:



Per quanto riguarda la struttura dell'idrato del diazocomposto che in una prima fase si forma dall'azossiacido, in seguito a perdita di anidride carbonica, siccome la reazione non avviene di mezzo acido (e perciò in questo caso è da escludersi la formazione intermedia di un sale di fenildiazonio) ma bensì in soluzione alcalina, è naturale che una volta stabilita la costituzione dell'azossiderivato di partenza, si debba pensare alla forma di un imminonitrobenzolo:

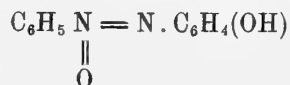


perfettamente corrispondente a quella che io ho assegnata alla cosiddetta nitrofenilidrossilammia, da me ottenuta anche per azione dell'idrossilammia sul nitrobenzolo:



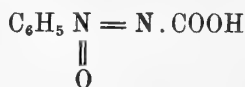
Ed è pure noto che un sale dell'idrato di diazobenzolo è stato preparato da Bamberger facendo reagire la sodioammide sul nitrobenzolo.

Ad una tale formola per un idrato di diazobenzolo ha accennato per la prima volta Kekule ed in seguito anche Eug. Bamberger, ed essa è resa probabile anche dallo studio dei prodotti di ossidazione dell'azossifenolo:



ed ai quali accennerò in una prossima pubblicazione.

Fin da ora dirò che i sali dell'acido:

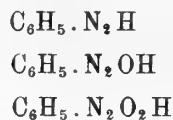


sono molto più stabili di quelli del corrispondente azoacido:



e che l'azossiacido stesso, sebbene molto alterabile, può esistere per qualche tempo anche allo stato libero.

Si vede che l'introduzione di un atomo di ossigeno aumenta la stabilità di questi prodotti, e ciò si verifica anche nella serie:



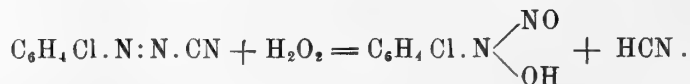
la stabilità dei cui termini cresce con l'aumentare del numero degli atomi di ossigeno. Il primo si scinde immediatamente in benzolo ed azoto, come ha trovato Widman; gli idrati dei diazocomposti, come ha trovato Hantzsch, possono esistere allo stato libero, almeno per qualche tempo, in soluzione acquosa; i due composti corrispondenti al terzo termine, l'acido diazobenzolico e la nitrosifenilidrossilammina, sono invece entrambi stabili e ben definiti.

Le reazioni descritte in queste Note permettono anche di chiarire alcune altre trasformazioni osservate da Eugenio Bamberger <sup>(1)</sup> e che egli non è riuscito a spiegare in modo soddisfacente.

Egli ha trovato infatti che l'ossidazione del cianuro di p-clorodiazobenzolo con acqua ossigenata procede *in modo inaspettato* perchè invece della clorofenilnitrammina si forma p-cloronitrosifenilidrossilammina, sebbene in non grande quantità, perchè la maggior parte si trasforma nell'ammide:



Questa ossidazione corrisponde, secondo Bamberger, all'eguaglianza:

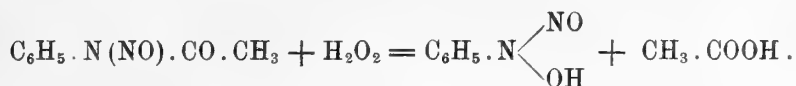


Bamberger aggiunge inoltre che tale processo ricorda l'ossidazione che subisce anche la nitrosoacetanilide per azione dell'acqua ossigenata e che

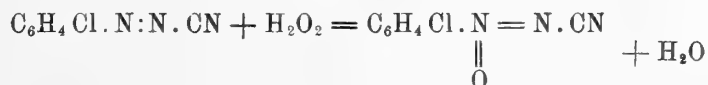
<sup>(1)</sup> Berliner Berichte, 45 (1912), 2054.



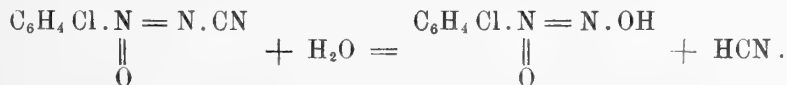
conduce del pari alla corrispondente nitrosoidrossilammina:



Si comprende subito che anche in questo caso Bamberger non ha veduto chiaro, e che invece le reazioni si spiegano nel miglior modo ammettendo che dal cianuro si formi in una prima fase l'azossicomposto:



il quale viene successivamente idrolizzato con formazione di nitrosifenilidrossilammina alla quale, anche per questa ragione, si deve assegnare la formola di struttura da me stabilita:



Il Bamberger, senza tenere conto dei fatti sperimentali, preferisce a secondo che gli garba, l'una o l'altra forma per la nitrosifenilidrossilammina; così p. es. a pag. 2055 dello stesso lavoro si giova della mia formola quando riporta, tentando di farle passare come sue, alcune eguaglianze che io aveva stabilite alcuni anni prima di lui <sup>(1)</sup>, sebbene egli sapesse perfettamente che sono mie, perchè più volte egli mi ha scritto in proposito.

Che poi non si debba ammettere che in una prima fase possa formarsi l'idrato del diazocomposto, lo si comprende dal fatto che in questo caso dovrebbe formarsi il corrispondente acido diazobenzolico.

<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti, vol. XIV (1905), 2° sem., pag. 658.

### Biologia. — *Esistono diverse razze di fillossera della vite?*

Nota di B. GRASSI e M. TOPI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Balistica. — *Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

In una precedente Nota testè pubblicata in questi Rendiconti, mi sono occupato del problema della correzione del tiro, per il quale ho determinato un'equazione differenziale che lega direttamente ai dati iniziali di tiro la gittata e l'angolo di arrivo su un piano orizzontale o verticale qualsiasi. Qui mi occuperò, invece, del problema di calcolare la traiettoria di un dato proietto. Nel § 1 dò alcune generalizzazioni del metodo Siacci, che credo utili per lo studio del tiro con forte dislivello tra origine e bersaglio; negli altri paragrafi mi occupo invece del cosiddetto calcolo di una traiettoria per punti, cioè del calcolo di una traiettoria eseguito mediante decomposizione in archi parziali. Il § 2 vuole perfezionare il calcolo numerico della densità media dell'aria relativa a un arco di traiettoria; il § 3 contiene una osservazione affatto elementare, che mi si presentò studiando le traiettorie del nostro mortaio da 210: che cioè in molti casi, specialmente per velocità moderate, il semplice sviluppo di Taylor dà un'approssimazione non inferiore a quella ottenuta con altri metodi più faticosi e meno rapidi.

§ 1. *Generalizzazione del metodo Siacci.* — Per una tale generalizzazione credo si debba evitare l'uso di funzioni in due variabili (di tavole a doppia entrata), che porterebbero probabilmente a tavole a tripla entrata per i fattori di tiro. Perchè, se così si volesse procedere, meglio varrebbe abbandonare il metodo Siacci, spezzare la traiettoria in archi, in ciascuno dei quali il problema si possa ridurre a quadrature, costruendo tavole numeriche (proprio a doppia entrata) per questi integrali, e raggiungendo così la massima esattezza teorica. Io credo preferibile rendere, per così dire, più elastico il metodo Siacci, ricordando che una formola teorica tanto più completamente può rappresentare un fenomeno fisico, quanto maggiore è il numero delle costanti arbitrarie, che essa contiene.

Nelle formole Siacci compare un *solo* parametro  $\beta$ : ciò che basta per il tiro contro un bersaglio posto sull'orizzonte dell'arma, perchè in tale studio vi è un'incognita sola: la *gittata*. E in fondo il  $\beta$  si determina appunto in modo da mettere d'accordo risultati teorici e sperimentali. Il  $\beta$  non basta più, secondo me, per bersagli a forti dislivelli dall'arma, che dipendono da *due* coordinate, o per altri problemi più complicati. Nella mia Nota citata ho provato che il metodo Siacci si può, con opportuno cambiamento di funzione incognita, considerare come la sostituzione del solo primo termine allo sviluppo in serie, che si ottiene dal classico metodo delle successive approssimazioni. Risultati migliori sono pertanto da attendersi dal

calcolo del secondo termine di tale sviluppo; ma le difficoltà di apprezzare la migliore approssimazione raggiunta, mi hanno indotto a procedere per altra via,\* che pure permette di realizzare una ulteriore approssimazione. A tal fine sarà bene esporre il metodo Siacci nella forma seguente. Per trovare alcune delle curve che soddisfano a un'equazione  $dy = f(x, y) dx$ , si scriva tale equazione nella forma

$$\frac{dy}{Y(y)} = \frac{X(x)}{Y(y)} f(x, y) \frac{dx}{X(x)}, \quad \text{ossia} \quad \int \frac{dy}{Y(y)} = \beta \int \frac{dx}{X(x)},$$

dove  $X(x)$  ed  $Y(y)$  sono funzioni arbitrarie della sola  $x$ , o della sola  $y$ , e  $\beta$  è un conveniente valore intermedio di  $\frac{X(x)}{Y(y)} f(x, y)$  lungo le curve cercate; il quale  $\beta$  si determinerà per via teorica, o sperimentale. Il risultato sarà *tanto migliore*, quanto *più ristretti* sono i limiti tra cui varia  $\beta$ . Così concepito, il metodo Siacci si presta alle più svariate generalizzazioni, ottenute, o cambiando le variabili  $x, y$ , oppure le funzioni  $X, Y$ .

Conserviamo le notazioni abituali <sup>(1)</sup>, ponendo poi  $w = v \cos \theta =$  velocità orizzontale; e introdurremo una nuova variabile  $\omega$  (il cui valore iniziale sarà indicato con  $\Omega$ ), scrivendo  $w = \psi(\omega)$ . Per ogni scelta della funzione arbitraria  $\psi(\omega)$  otterremo particolari formole di tiro: noi adotteremo  $\psi(\omega) = a + b\omega$  con  $a, b$  costanti (da scegliersi in modo opportuno, come vedremo). Ma potremmo per es. assumere  $\psi$  uguale anche ad un polinomio di grado più elevato. L'equazione  $Cg dw = i\delta_y v F(v) d\theta$  dell'odografa dà, integrata

$$\text{tg } \theta - \text{tg } \varphi = - \frac{Cb}{2\delta_0 i\beta} [I(\omega) - I(\Omega)]$$

dove  $\beta$  è un valore intermedio di

$$\beta' = \frac{\delta_y v F(v)}{\delta_0 \omega F(\omega)} \cos^2 \theta.$$

E, continuando col metodo Siacci, si trova poi <sup>(2)</sup>:

$$x = \frac{C}{\delta_0 i\beta} \{A(\Omega) - A(\omega)\} \quad \text{ove} \quad A(\omega) = \frac{a^2 b}{2g} I(\omega) + 2a b^2 T(\omega) + b^3 D(\omega).$$

<sup>(1)</sup> Con  $A, D, I, T$  indico le funzioni Siacci, con  $F(v)$  la funzione resistente Siacci, con  $C$  il coefficiente balistico, con  $i$  il coefficiente di forma, con  $\theta$  l'inclinazione, con  $\varphi$  l'angolo di proiezione. Gli assi  $x, y$  hanno la posizione consueta. Altre formole, *meno analoghe* a quelle del Siacci, noi potremmo ottenere *sostituendo alla  $w$  un'altra variabile indipendente*, funzione di  $v$  e di  $\theta$ .

<sup>(2)</sup> Se si ponesse  $\psi(\omega) = a + b\omega + c\omega^2 + e\omega^3$  con  $a, b, c, e$  costanti, si troverebbe

$$\text{tg } \theta - \text{tg } \varphi = - \frac{C}{2\delta_0 i\beta} \left\{ b [I(\omega) - I(\Omega)] + 4ge [T(\omega) - T(\Omega)] + 6ge [D(\omega) - D(\Omega)] \right\}.$$

E, supposto soltanto  $\psi(\omega) = a + b\omega + c\omega^2$ , si troverebbe per la  $x$  una formola affatto

Posto  $B = \int Id T$ , se ne deduce ancora:

$$\frac{y}{x} - \operatorname{tg} \varphi = - \frac{Cb}{2\delta_0 i\beta} \left\{ \frac{\mathcal{A}(\omega) - \mathcal{A}(\Omega)}{\mathcal{A}(\omega) - \mathcal{A}(\Omega)} - I(\Omega) \right\},$$

ove

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{a^2 b}{2g} \frac{1}{2} I^2(\omega) + 2a b^2 B(\omega) + b^3 A(\omega).$$

Tranne la  $B(\omega)$ , funzione di andamento semplicissimo, tutte le altre funzioni coincidono con quelle calcolate dal Siacci; e le precedenti formole si prestano benissimo ai calcoli numerici. Per questi basterà determinare  $a$  e  $b$  in modo che per due punti scelti a piacere della traiettoria (calcolata in modo approssimato con un metodo qualsiasi, per es. anche col metodo originale del Siacci) la  $\beta'$  diventi uguale ad 1, oppure in modo che per tre punti (per es. punto di partenza, di arrivo e vertice) la  $\beta'$  assuma uno stesso valore, oppure in altri modi, che permettano di apprezzarne facilmente un valor medio. E anzi tale procedimento, ripetuto due volte, condurrà a risultati ancora più approssimati: *Si è così trasformato nel modo più semplice, anche per il calcolo numerico, il metodo Siacci in un metodo di successive approssimazioni.* Naturalmente il metodo si può anche applicare ad un solo pezzo di traiettoria, e dà nuovi e approssimati metodi di calcolo di una traiettoria per punti.

Ma io credo utile considerare le precedenti formole anche da un altro punto di vista. Assumiamo pure l'ipotesi consueta (che mi sembra però parecchio arbitraria) di considerare  $\beta$  come costante lungo una stessa verticale, e perciò funzione soltanto dell'angolo di proiezione  $\varphi$  e dell'ascissa del bersaglio. Noi abbiamo a nostra disposizione due parametri  $a, b$  per compensare l'errore, dando ad  $a, b$  valori opportuni: per es. ponendo  $b = \cos \varepsilon$ , ove  $\varepsilon$  è l'angolo di sito definito dalla  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{y}{x}$ . Il parametro  $a$  varierà allora verisimilmente con grande lentezza lungo una ordinata; e si tratterà soltanto di fare uno studio sperimentale o teorico (con sviluppo in serie) del come varia  $a$  al variare dell'ordinata, così come il Siacci ha fatto per il parametro  $\beta$ .

Oppure anche si può porre  $a = 0$ : le formole diventano assai simili a quelle del Siacci. E ci si può accontentare poi di studiare come varia

analoga alla precedente, ove però  $\mathcal{A}(\omega)$  sarebbe definito dalla

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{a^2 b}{2g} I(\omega) + 2a(b^2 + ac) T(\omega) + (b^3 + 6abc) D(\omega) + 4c(b^2 + ac) D_2(\omega) + 5bc^2 D_3(\omega) + 2c^3 D_4(\omega),$$

ove è scritto  $D_n(\omega) = \int - \frac{u^n du}{F(u)}$ .

$b \sec \varepsilon$  lungo una verticale; ciò che pure porterà verisimilmente a funzioni di lenta variabilità <sup>(1)</sup>. Si otterrebbero così formole, che anche per tiri con forti dislivelli dànno l'approssimazione del solito metodo per tiri all'orizzonte con l'aggiunta di una sola tavola che ci dica come varia il parametro  $b \sec \varepsilon$ . Conto di ritornare su questo studio numerico.

§ 2. *Densità media dell'aria per un arco di traiettoria.* — Negli studi per calcolare una traiettoria per punti, si presenta sempre il problema di determinare il valor medio della densità dell'aria per l'arco di traiettoria considerato; e si espongono sovente dei metodi, in apparenza di gran precisione (tanto da distinguere il  $\beta$  principale dai secondari), che, a mio credere, dànno un'approssimazione molto inferiore alla sperata (come mi sono accorto facendo effettive applicazioni numeriche). La ragione sta in ciò: che nello studio del valor medio di  $\delta_y$  ha importanza non trascurabile l'integrale, per il calcolo del quale si cerca tale valor medio. Trascurare tale integrale, e sostituirlo con un altro (generalmente lo  $\int \delta_y dx$ ) rende illusoria ogni approssimazione maggiore di quella ottenuta prendendo un valor medio suggerito senz'altro dall'intuizione, senza calcoli speciali. Ora l'integrale, che più frequentemente si presenta in balistica sia a chi applichi i metodi Siacci, sia a chi consideri con Eulero archi ove  $F(v)$  è proporzionale a  $v^n$ ,

è l'integrale  $L = \int_{\varphi}^{\theta} \frac{1}{\delta_0} \delta_y \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ ; e, a seconda dei casi, lo si vuole scrivere nella forma  $\delta_m \frac{1}{\delta_0} \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$ , oppure  $\frac{\gamma}{\delta_0} \delta_m \int_{\varphi}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ ; ove  $\delta_m$  è un valor medio di  $\delta_y$ , e  $\gamma$  un valor medio di  $\frac{1}{\cos^{n-2} \theta}$ . Per determinare  $\delta_m$ , oppure il prodotto  $\gamma \delta_m$ , basterà evidentemente calcolare il valore di  $L$ . Sarà nei due casi  $\delta_m = \frac{L \delta_0}{\xi_{n-1}(\theta) - \xi_{n-1}(\varphi)}$ , oppure  $\gamma \delta_m = \frac{L \delta_0}{\text{tg } \theta - \text{tg } \varphi}$ . (Con  $\xi_m$  indico al solito lo  $\int \frac{d\theta}{\cos^{m+1} \theta}$ ). Ora si noti che, indicando con  $h$  una costante, la quale, nelle condizioni usuali, vale 0,00008, si ha  $\frac{\delta_y}{\delta_0} = 1 - hy$ . Si tratta pertanto di calcolare

$$L = \int_{\varphi}^{\theta} (1 - hy) \frac{d\theta}{\cos^n \theta}.$$

<sup>(1)</sup> Il caso di  $a=0$ ,  $b=1$  è già stato usato dall'Olsson; il caso  $a=0$ ,  $b = \sqrt{\cos \varphi \cos \varepsilon}$  dall'ing. colonnello Bianchi in un suo pregevole lavoro (Rivista di artiglieria e genio, vol. I, 1914). L'ing. Bianchi lo applica al calcolo di un arco di traiettoria. Non conoscevo queste ricerche, quando sono giunto alle formole precedenti. La maggiore generalità di queste e il modo affatto nuovo di concepirle che sopra ho esposto per le applicazioni numeriche, mi hanno indotto ciononostante a pubblicare questo studio.

Ora l'idea più semplice e *più esatta* è quella di sostituire *in questo integrale* alla  $y$  un suo valore approssimato (anche soltanto in modo grossolano, perchè  $h$  è molto piccolo). E i calcoli numerici risultano tanto semplici quanto i consueti, che ricorrono invece al calcolo di  $\int y dx$ . Come ora proveremo, si possono in modi molteplici trovare tre costanti  $a, b, c$ , così da poter scrivere con sufficiente approssimazione  $y = a + b \operatorname{tg} \theta + c \operatorname{tg}^2 \theta$ . Si avrà allora:

$$L = (1 + hc - ha) [\xi_{n-1}(\theta) - \xi_{n-1}(\varphi)] - ch [\xi_{n+1}(\theta) - \xi_{n+1}(\varphi)] - \frac{hb}{n} [\sec^n \theta - \sec^n \varphi],$$

che risolve il nostro problema per mezzo delle solite funzioni  $\xi(\theta)$ , per cui i balistici hanno, come è noto, costruito tavole numeriche. Tutto è ridotto pertanto a calcolare le costanti  $a, b, c$ . Ciò che si può fare nei modi più svariati: o calcolare in modo analogo a quello che esponiamo nel § 3 lo sviluppo della  $y$  secondo le potenze di  $\operatorname{tg} \theta$ , oppure sostituire alla traiettoria una curva media tra due parabole  $P_1, P_2$  che comprendano la traiettoria stessa. A parabole  $P_i$  possiamo per es. assumere quelle <sup>(1)</sup> che nel vuoto sarebbero descritte da un proietto, che *partisse*, o che *arrivasse* con la stessa inclinazione e con la stessa velocità del nostro proietto.

§ 3. *Sviluppo di Taylor.* — Nello studiare le traiettorie per il nostro mortaio da 210, ho notato che il semplice sviluppo di Taylor delle  $x, y$  secondo le potenze di  $\operatorname{tg} \theta$ , o di  $\theta$  permette, senza speciali tavole numeriche, di calcolare un arco di traiettoria con metodi rapidi e non meno approssimati dei consueti. Io qui, *a titolo di esempio*, mi occuperò dello sviluppo della  $x$  secondo le potenze di  $\theta$ . Supponiamo di studiare un arco di traiettoria, ove  $F(v)$  sia proporzionale a  $v^n$ ; cosicchè  $F'(v) = \frac{nF(v)}{v}$ . Da questa, e dalle equazioni fondamentali della balistica si deduce derivando e ponendo  $H = \frac{i \delta_y}{Cg}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{v^2}{g}; & \frac{d^2x}{d\theta^2} &= -2\frac{v^2}{g} [\operatorname{tg} \theta + HF(v) \sec \theta] \\ \frac{d^3x}{d\theta^3} &= -2\frac{v^2}{g} \{ (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta) + (n + 5) \operatorname{tg} \theta [HF(v) \sec \theta] + \\ & & & + (n + 2) [HF(v) \sec \theta]^2 \}. \end{aligned}$$

*Trascurando i termini dello sviluppo*, che contengono derivate di ordine superiore, la formola di Lagrange del resto dimostra che l'errore commesso per un arco, ove  $\theta$  varia di  $\alpha$  gradi, è minore di  $\frac{T}{24} \alpha^4 \left( \frac{\pi}{180} \right)^4$

<sup>(1)</sup> Altre parabole di questo tipo sono date dal prof. Picone in una sua notevole Memoria in corso di stampa nella Rivista di artiglieria e genio; altre traiettorie approssimate del tipo voluto sono date nella Nota citata dell'ing. Bianchi.

ove  $T$  è il massimo di  $\left| \frac{d^4 x}{d\theta^4} \right|$  nell'arco considerato, cioè è il massimo di  $2 \frac{v^2}{g} \{ 4 \operatorname{tag} \theta (2 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta) + [\operatorname{HF} \sec \theta] [(n + 7) + (n^2 + 9n + 26) \operatorname{tg}^2 \theta] + 3 [\operatorname{HF} \sec \theta]^2 (n + 2) (n + 3) \operatorname{tg} \theta + 2(n + 1) (n + 2) [\operatorname{HF} \sec \theta]^3 \}$ .

Il calcolo numerico dimostra che questo metodo, applicato al mortaio succitato, rivaleggia in precisione con i soliti tanto più complicati.

**Geodesia.** — *Azimut assoluto dell'Osservatorio Vesuviano sull'orizzonte dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte in Napoli.* Nota di G. CICONETTI, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

Negli anni 1911 e 1912 sono state fatte sul R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte in Napoli due determinazioni di azimut assoluto relative al R. Osservatorio Vesuviano.

Nel 1911 le osservazioni vennero effettuate con l'Universale Bamberg del Gabinetto di Geodesia della R. Università (circoli di 27 cm. di diametro, cannocchiale centrale spezzato, valore angolare della parte di livella azimutale 3".67) e nel 1912 con un Teodolite Starke di 1<sup>a</sup> grandezza (circolo di 26 cm. di diametro, cannocchiale centrale retto, valore angolare della parte di livella azimutale 4".75) appartenente al Gabinetto di Topografia del R. Istituto tecnico di Napoli.

Lo scopo di queste determinazioni era duplice: in primo luogo la ricerca dell'azimut dell'Osservatorio Vesuviano ed in secondo luogo vedere qual grado di precisione fosse conseguibile nella misura di un azimut astronomico con un teodolite geodetico facilmente montabile e smontabile e non specialmente adatto per osservazioni stellari come quello adoperato nella seconda misura.

La stazione a Capodimonte fu stabilita sul pilastro scoperto della terrazza che sormonta la parte centrale dell'edificio, vicino alla cupola centrale dell'equatoriale; la mira notturna, costituita di una lampada a petrolio al fuoco di una lente, venne centrata sul pilastro della penultima terrazza dell'Osservatorio Vesuviano, presso l'angolo nord-est, sul quale si era già compiuta nel 1910 una determinazione astronomica di latitudine<sup>(1)</sup>.

Le osservazioni di azimut coll'Universale Bamberg ebbe luogo nei giorni 30 giugno, 1, 2, 3 luglio 1911 e durante questo periodo lo strumento rimase fisso sul pilastro, protetto di giorno da una copertura mobile che veniva tolta alla sera.

I puntamenti della Polare venivano riferiti ad occhio ed orecchio ad un cronometro trasportabile Hausmann del Gabinetto di Geodesia, e profit-

<sup>(1)</sup> La latitudine astronomica del R. Osservatorio Vesuviano determinata nel 1910. R. Commissione geodetica italiana. 1915.

tando dei pendoli dell'Osservatorio si eliminarono le determinazioni dirette di tempo sostituendole con confronti cronografici dell'Hausmann, al principio ed alla fine di ogni periodo di osservazioni, col pendolo Riefler sul quale si facevano le ordinarie determinazioni di tempo per l'Osservatorio.

I dati riguardanti il pendolo Riefler, gentilmente comunicatimi dal dott. V. Nobile, furono quelli segnati nel seguente specchio:

DATA	Tempo siderale locale	Correzione del Riefler	Andamento (accelera)	
			diurno	orario
1911 - Giugno 29	<sup>h m</sup> 16,36	<sup>m s</sup> - 0.20,56	<sup>s</sup> - 0,39	<sup>s</sup> - 0.0163
" " 30	—	20,96	0,29	0,0121
" Luglio 1	—	21,25	0,44	0,0182
" " 2	—	21,69	0,26	0,0108
" " 3	—	21,95	0,35	0,0146
" " 4	—	22,30		

*Confronti cronografici Hausmann-Riefler e andamenti dell'Hausmann.*

DATA 1911	Hausmann	Riefler	Tempo siderale	Correzione dell'Hausmann	Andam. orario dell'Hausmann (ritarda)
Giugno 30 (sera)	<sup>h m</sup> 12.50	<sup>h m s</sup> 13.57.20,67	<sup>h m s</sup> 13 56.59,75	<sup>h m s</sup> + 1.06.59,75	<sup>s</sup> 0,000
Luglio 1 (matt.)	21.54	23.01 20,76	23.00.59,72	06.59,72	
" " (sera)	11 54	13.01.22,03	13.01 00,38	07.00,38	+ 0,033
" 2 (sera)	11.40	12 47.23,97	12.47.02,35	07.02,35	+ 0,104
" 3 (matt.)	19.55	21.02.24,94	21.02.03,21	07.03,21	
" 3 (sera)	12.06	13 13.27,56	13.13.05,64	07.05,64	
" 4 (matt.)	18.34	19.41.28,08	19.41.06,08	07.06,08	+ 0,067

Qui appresso si riportano i risultati delle determinazioni di azimut col Bamberg, calcolato in base alla latitudine  $\varphi = 40^{\circ}.51'.45''$ , 1 del pilastro d'osservazione. Ciascuna serie veniva effettuata col solito schema: Cerchio a sinistra - Mira, Polare — Cerchio a destra - Polare, Mira, Mira, Polare — Cerchio a sinistra - Polare, Mira — e ad ogni serie si girava il cerchio orizzontale di  $10^{\circ}$ . A metà osservazioni si invertì il cannocchiale sui perni.

Le notazioni  $C_m$   $C_p$  rappresentano la costante di collimazione rispettivamente dedotta dalle osservazioni sulla Mira e da quelle sulla Polare.



DATA 1911	Serie	Azimut della Mira	C <sub>M</sub>	C <sub>P</sub>	C <sub>M</sub> - C <sub>P</sub>	Espressioni differenziali
Giugno 30	I	108.14' 23",28	- 3",5	- 2",6	- 0",9	- 0,29 dα <sup>a</sup> - 0,91 dδ" + 0,02 dφ
"	II	25,80	- 5,1	- 3,8	- 1,3	- 0,23 - 1,08 + 0,02
"	III	22,52	- 3,2	- 2,2	- 1,0	- 0,17 - 1,18 + 0,02
"	IV	22,68	- 5,0	- 4,3	- 0,7	- 0,11 - 1,26 + 0,02
"	V	21,50	- 6,9	- 2,3	- 4,6	- 0,05 - 1,31 + 0,02
"	VI	24,62	- 3,8	- 3,9	+ 0,1	0,00 - 1,31 + 0,02
"	VII	20,85	- 5,7	- 2,4	- 3,3	+ 0,05 - 1,31 + 0,02
"	VIII	22,92	- 6,3	- 2,1	- 4,2	+ 0,11 - 1,28 + 0,02
"	IX	21,90	- 5,6	- 3,6	- 2,0	+ 0,16 - 1,21 + 0,02
"	X	22,67	- 5,1	- 3,0	- 2,1	+ 0,21 - 1,14 + 0,02
"	XI	20,10	- 5,6	- 3,6	- 2,0	+ 0,25 - 1,04 + 0,02
"	XII	24,80	- 5,5	- 2,8	- 2,7	+ 0,29 - 0,95 + 0,02
Luglio 1	XIII	24,10	- 2,7	- 2,0	- 0,7	- 0,36 - 0,54 + 0,01
" 2	XIV	24,70	- 3,2	- 2,5	- 0,7	- 0,36 - 0,50 + 0,01
" "	XV	24,82	- 4,9	- 2,9	- 2,0	- 0,34 - 0,70 + 0,01
" "	XVI	23,18	- 5,4	- 3,2	- 2,2	- 0,31 - 0,83 + 0,01
" "	XVII	22,62	- 4,3	- 2,6	- 2,2	- 0,27 - 0,96 + 0,02
" "	XVIII	21,70	- 5,3	- 2,7	- 2,6	- 0,25 - 1,07 + 0,02

*Inversione dei perni.*

" "	XIX	24,27	- 4,3	- 3,2	- 1,1	- 0,20 - 1,16 + 0,02
" "	XX	25,48	- 3,5	- 2,1	- 1,4	- 0,14 - 1,24 + 0,02
" "	XXI	21,00	- 2,5	- 2,8	+ 0,3	- 0,09 - 1,28 + 0,02
" "	XXII	21,00	- 4,2	- 2,5	- 1,7	- 0,04 - 1,31 + 0,02
" "	XXIII	23,15	- 2,7	- 2,8	+ 0,1	0,00 - 1,32 + 0,02
" "	XXIV	23,35	- 4,0	- 1,6	- 2,4	+ 0,06 - 1,31 + 0,02
" 3	XXV	20,32	- 3,2	- 2,4	- 0,8	- 0,36 - 0,60 + 0,01
" "	XXVI	23,50	- 2,5	- 1,2	- 1,3	- 0,33 - 0,72 + 0,01
" "	XXVII	24,40	- 2,6	- 1,5	- 1,1	- 0,31 - 0,82 + 0,01
" "	XXVIII	21,50	- 3,1	- 1,9	- 1,2	- 0,29 - 0,90 + 0,02
" "	XXIX	23,20	- 2,8	- 2,0	- 0,8	- 0,26 - 0,98 + 0,02
" "	XXX	22,78	- 3,4	- 1,9	- 1,5	- 0,24 - 1,05 + 0,02
" "	XXXI	23,42	- 3,0	- 1,8	- 1,2	- 0,21 - 1,12 + 0,02
" "	XXXII	23,32	- 2,7	- 3,9	+ 1,2	- 0,17 - 1,18 + 0,02
" "	XXXIII	24,38	- 3,6	- 1,1	- 2,5	- 0,14 - 1,23 + 0,02
" "	XXXIV	25,25	- 3,6	- 2,2	- 1,4	- 0,11 - 1,26 + 0,02
" "	XXXV	24,48	- 2,6	- 1,7	- 0,9	- 0,08 - 1,29 + 0,02
" "	XXXVI	22,40	- 2,7	- 1,3	- 1,4	- 0,04 - 1,31 + 0,02

MEDIA A = 108.14 23,11 ± 0,24      dA = - 0,19 dα - 1,07 dδ + 0,02 dφ  
 Epoca 1911,50

Le determinazioni di azimut col teodolite Starke ebbero luogo nelle notti del 17 e 18 giugno 1912 nelle stesse condizioni e collo stesso metodo dell'anno precedente, salvo che furono effettuate 25 serie invece di 32 girando il cerchio di 15° fra una serie e l'altra. Lo strumento si montava la sera sul pilastrino, smontandolo la mattina alla fine delle osservazioni per riporlo nelle proprie cassette. I puntamenti della Polare si fecero sempre senza l'aiuto di oculare prismatico, e l'illuminazione del campo si otteneva con una lamina a foggia di corona ellittica, applicata a 45° sull'obbiettivo, in modo da riflettere verso l'interno del cannocchiale i raggi di una lampadina posta di lato.

I dati relativi al pendolo Riefler furono i seguenti:

DATA	Tempo siderale	Correzione del Riefler	Andamento (ritarda)	
			diurno	orario
1912 - Giugno 15	<sup>h m</sup> 14.15	<sup>m s</sup> + 0.35,18	<sup>s</sup> + 0,082	<sup>s</sup> + 0,0003
" " 25	14.12	+ 0,36,00		

*Confronti cronografici Hausmann-Riefler e andamenti dell'Hausmann.*

DATA 1912	Hausmann	Riefler	Tempo siderale	Correzione dell' Hausmann	Andamento orario dell' Hausmann (ritarda)
Giugno 17 (sera)	<sup>h m</sup> 6.43	<sup>h m s</sup> 11.30 50,78	<sup>h m s</sup> 11.31.26,11	<sup>h m s</sup> + 4.48.26,11	<sup>s</sup> + 0,186
" 18 (matt.)	16.12	20.59.52,50	21.00.27,87	27,87	
" " (sera)	6.41	11.28.54,04	11.29.29 46	29,46	
" " "	11.10	15.57.54,28	15.58.29,71	29,71	+ 0,056

Ecco i risultati delle determinazioni di azimut:

DATA 1912	Serie	Azimut della Mira	C <sub>M</sub>	C <sub>P</sub>	C <sub>M</sub> - C <sub>P</sub>			
Giugno 17	I	108.14.22 <sup>o</sup> 78	-2 <sup>o</sup> 5	-3 <sup>o</sup> 8	+1 <sup>o</sup> 3	-0,40 dα <sup>s</sup>	-0,33 dδ <sup>o</sup>	+0,01 dφ
" "	II	23,35	-3,4	-2,2	-1,2	-0,38	-0,44	+0,01
" "	III	21,32	-4,2	-3,0	-1,2	-0,36	-0,58	+0,01
" "	IV	22,02	-3,0	-3,1	+0,1	-0,34	-0,68	+0,01
" "	V	23,82	-4,3	-3,3	-1,0	-0,32	-0,78	+0,01
" "	VI	24,67	-3,0	-2,6	-0,4	-0,29	-0,86	+0,02
" "	VII	22,30	-2,7	-3,6	+0,9	-0,27	-0,93	+0,02
" "	VIII	21,18	-4,2	-3,2	-1,0	-0,26	-1,00	+0,02
" "	IX	24,12	-3,1	-3,9	+0,8	-0,23	-1,08	+0,02
" "	X	22,88	-1,2	-1,5	+0,3	-0,20	-1,13	+0,02
" "	XI	26,25	-3,2	-1,9	-1,3	-0,17	-1,18	+0,02
" "	XII	24,05	-2,6	-4,0	+1,4	-0,14	-1,22	+0,02
" "	XIII	21,55	-2,0	-2,9	+0,9	-0,12	-1,24	+0,02
" "	XIV	26,85	-0,7	-4,1	+3,4	-0,09	-1,26	+0,02
" "	XV	26,15	-1,4	-4,4	+3,0	-0,05	-1,31	+0,02
" "	XVI	22,00	-2,4	-2,4	0,0	-0,02	-1,31	+0,02
" "	XVII	20,82	-1,3	-2,3	+1,0	+0,01	-1,32	+0,02
" "	XVIII	23,75	-3,7	-4,4	+0,7	+0,06	-1,30	+0,02
" "	XIX	22,32	-1,4	-1,9	+0,5	+0,10	-1,26	+0,02
" 18	XX	27,35	-0,2	-2,5	+2,3	-0,39	-0,31	+0,01
" "	XXI	22,95	-2,1	-1,3	-0,3	-0,39	-0,41	+0,01
" "	XXII	21,82	-1,6	-1,3	-0,3	-0,38	-0,51	+0,01
" "	XXIII	24,18	+0,2	-1,1	+1,3	-0,36	-0,60	+0,01
" "	XXIV	21,01	-2,2	-0,9	-1,3	-0,34	-0,69	+0,01

MEDIA A = 108.14.23,31      ± 0,38      dA = -0,22 dα - 0,91 dδ + 0,02 dφ  
 Epoca 1912,46

Per ridurre al polo medio i risultati ottenuti per l'azimut nelle due diverse epoche, si cavano dalle Astron. Nachr. Nr. 4588, Bd. 192 e Nr. 4665, Bd. 195, gli elementi di Albrecht:

$$\begin{array}{lll}
 1911,50 & x = -0,081 & y = +0,321 \\
 1912,46 & x = -0,124 & y = +0,036
 \end{array}$$

coi quali, essendo  $\lambda = -14^{\circ} 15'$  la longitudine della stazione di Capodi-  
 monte rispetto a Greenwich, si calcolano le correzioni

$$-(y \cos \lambda - x \sin \lambda) \sec \varphi.$$

Queste risultano:

per le determinazioni del 1911 . . . . . — 0",15  
e per quelle del 1912 . . . . . — 0",01.

Gli azimut corretti per lo spostamento del polo divengono pertanto

(1911)  $108^{\circ} 14' 22''$ ,  $96 \pm 0''$ , 24      (1912)  $108^{\circ} 14' 23''$ ,  $30 \pm 0''$ , 38

e la loro media ponderata conduce al valor finale dell'azimut astronomico del R. Osservatorio Vesuviano nell'orizzonte del R. Osservatorio di Capodimonte:

**$108^{\circ} 14' 23''$ ,  $06 \pm 0''$ , 15.**

I risultati precedenti mostrano che, in latitudini non troppo elevate, con un teodolite geodetico da triangolazione tipo Starke possono ottenersi buone determinazioni di azimut. L'uso di uno strumento di questo genere può quindi riuscire utile a tale scopo specie nelle stazioni di montagna in vista della maggior facilità di trasporto di questi teodoliti rispetto ai veri universali astronomici e soprattutto della possibilità di montarli sera per sera sul pilastrino, senza essere obbligati ad un assetto stabile della stazione per tutto il periodo delle osservazioni. Nè le determinazioni di tempo possono costituire una difficoltà, perchè con un teodolite a cannocchiale retto centrale, quale è quello adoperato, può seguirsi il metodo dei passaggi di stelle orarie pel verticale della Polare o quello della misura di zenitali di stelle in prossimità del 1° verticale. L'inconveniente si manifesta piuttosto quando si tratti di determinare la latitudine perchè il cannocchiale centrale retto del teodolite usato non permette l'applicazione del metodo dei passaggi meridiani di stelle culminanti a nord e a sud a poca distanza dallo zenit, metodo che, non richiedendo l'uso del cronometro, è indubbiamente il più comodo da seguirsi in campagna per la determinazione della latitudine.

**Fisica matematica.** — *Sulla capacità elettrostatica di un sottile anello conduttore.* Nota di U. CISORRI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Chiedo il permesso di intrattenere l'Accademia sopra un argomento che in questi Rendiconti esposi alcune settimane or sono <sup>(1)</sup>, per apportare ai risultati alcune modificazioni e complementi, atti a precisare e a esaurire la questione.

Si abbia un anello la cui configurazione geometrica si immagini definita da una sezione trasversale piana  $\tau$  che si muove deformandosi (con continuità e mantenendosi piana) in modo da mantenersi normale alla linea chiusa  $l$  descritta da un suo punto generico (ad es. il baricentro); la linea  $l$  definisce l'andamento longitudinale dell'anello.

Sarà da ritenersi *sottile* l'anello se le dimensioni di  $\tau$  sono dovunque piccole di fronte alle dimensioni longitudinali (con che si intende non solo di fronte alla lunghezza di  $l$ , ma anche rispetto al raggio di curvatura in ogni suo punto).

Sia l'anello isolato e caricato di elettricità in equilibrio.

Le formole stabilite nella Nota precedente, definiscono la distribuzione della carica sulla superficie del conduttore e la risultante delle forze elettriche relative ad una generica sezione trasversale dell'anello. Esse sussistono in quanto le sezioni trasversali sono, o si possono ritenere, sensibilmente uguali. Vanno modificate nell'ipotesi, più generale, che la legge di variazione delle sezioni trasversali sia qualunque, purchè tale naturalmente da conservare all'anello la caratteristica di essere sottile.

La legge di distribuzione delle masse elettriche si può compendiare allora in una relazione notevolmente semplice che ora preciserò.

Si fissi sopra la *direttrice*  $l$  dell'anello, un'origine degli archi e un senso positivo, per cui ad un generico punto  $O$  di  $l$  corrisponde un arco

$$0 \leq s \leq l,$$

denotando con  $l$  la lunghezza della direttrice designata finora colla stessa lettera. Sia  $\tau$  la sezione trasversale piana dell'anello che contiene il punto  $O$ ,  $\tau'$  l'analoga sezione nel punto  $O'$  di  $l$ , cui corrisponde il valore  $s + ds$  dell'arco:  $\tau$  e  $\tau'$  limitano una fetta del conduttore, di spessore  $ds$ . Se si in-

<sup>(1)</sup> *Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore.*

[Vol. XXIV (1917), pp. 36-39].

dica con  $\nu ds$  la quantità di elettricità contenuta sulla porzione di superficie  $\sigma$  dell'anello appartenente alla fetta anzidetta, rappresenterà  $\nu$  la densità di distribuzione delle cariche, corrispondente alla sezione  $\tau$  del conduttore; essa risulta definita dalla seguente formola

$$(I) \quad 2 \nu k = U,$$

essendo  $U$  il potenziale elettrostatico (costante) del conduttore ed essendo

$$k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} d\tau \int_{\tau} d\tau_0 \log \frac{l}{PP_0},$$

in cui  $P$  e  $P_0$  sono due generici punti di  $\tau$ ,  $d\tau$  e  $d\tau_0$  gli elementi di  $\tau$  ad essi attigui. La quantità  $k$  è un puro numero, che dipende soltanto dalla sezione  $\tau$ , per cui è, in generale, variabile con questa, cioè è funzione di  $s$ .

La formola (I) lascia sussistere, anche in generale, ciò che avevo rilevato nella Nota precedente, e cioè che *la densità  $\nu$  è indipendente dai caratteri geometrici della direttrice  $l$* .

Per la (I) stessa, la quantità di elettricità in equilibrio su tutto l'anello è definita dalla seguente formola

$$(II) \quad e = \int_l \nu ds = \frac{U}{2} \int_l \frac{ds}{k};$$

per cui la capacità del conduttore risulta essere

$$(III) \quad c = \frac{e}{U} = \frac{1}{2} \int_l \frac{ds}{k};$$

mentre la eliminazione del potenziale  $U$  tra la (II) e la (I), conduce ad assegnare a  $\nu$  l'espressione seguente

$$(I') \quad \nu = \frac{e}{k \int_l \frac{ds}{k}},$$

che va sostituita alla (I) della Nota precedente, nella quale vi è  $\sqrt{k}$  al posto di  $k$ .

Se, in particolare, le sezioni trasversali  $\tau$  del conduttore sono tutte eguali tra di loro,  $k$  è costante e la (I') e la (III) diventano rispettivamente

$$\nu = \frac{e}{l}, \quad c = \frac{l}{2k}.$$

Dall'ultima di queste scende che la capacità elettrostatica del conduttore è proporzionale alla sua lunghezza.

Merita speciale menzione il caso in cui l'anello è a sezione circolare. Detto  $a$  il raggio, è allora (1)

$$k = \frac{1}{4} + \log \frac{l}{a},$$

per cui la capacità assume il valore seguente:

$$c = \frac{2l}{1 + 4 \log \frac{l}{a}}.$$

È quasi superfluo richiamare la circostanza che questi risultati hanno carattere approssimato, tanto maggiore quanto più sottile è l'anello.

1. La giustificazione della formola (I) è immediata. Basta ricorrere all'espressione approssimata, assegnata dal Levi-Civita, alla funzione potenziale newtoniana di un tubo sottile nei punti appartenenti al tubo stesso. Essa, riportata al caso nostro, è la seguente (2):

$$U(P) = \frac{2v}{r} \int_{\tau} \log \frac{l}{PP_0} dx_0.$$

Il valore medio del potenziale  $U$  nei punti della sezione  $\tau$  è in conseguenza

$$\frac{1}{\tau} \int_{\tau} U(P) dx = 2 \frac{v}{r^2} \int_{\tau} dx \int_{\tau_0} \log \frac{l}{PP_0} dx_0 = 2v k.$$

Dopo ciò, basta manifestamente rilevare che nella interpretazione elettrostatica della precedente formola, il primo membro altro non è se non il valore del potenziale del conduttore. Con ciò la (1) rimane dimostrata.

2. Sieno  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  i due vettori unitari diretti secondo la tangente e la normale principale nel generico punto  $O$  della direttrice  $l$  dell'anello. La risultante  $\Phi$  delle forze elettriche della sezione trasversale  $\tau$ , contenente il punto  $O$ , è definita dalla formola seguente (3):

$$\Phi = \frac{d(v^2 k)}{ds} \mathbf{t} + \frac{v^2 k}{r} \mathbf{n},$$

dove  $\frac{1}{r}$  è la curvatura della direttrice  $l$  nel punto  $O$ .

(1) Cfr. Levi-Civita, *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, vol. XXXIII (1912), pag. 362, formola (11)].

(2) Cfr. Levi-Civita, loc. cit., formola (3).

(3) Cfr. Levi-Civita, loc. cit., § 6.

Avuto riguardo alla (I') la precedente diviene

$$\Phi = \frac{e^2}{\left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2} \frac{d\frac{1}{k}}{ds} \mathbf{t} + \frac{e^2}{kr \left(\int_l \frac{ds}{k}\right)^2} \mathbf{n}.$$

Appare da questa che se è

$$\frac{d\frac{1}{k}}{ds} = 0,$$

cioè le sezioni trasversali del tubo sono (o si possono ritenere sensibilmente) costanti. è

$$\Phi = \frac{e^2 k}{r l^2} \mathbf{n},$$

come nella Nota precedente (1).

**Matematica.** — *Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques.* Nota di S. LEFSCHETZ, presentata dal Corrispondente CASTELNUOVO.

1. L'objet de cette Note est de démontrer le théorème suivant: *A toute paire de courbes algébriques, algébriquement distinctes, d'une surface algébrique irréductible à singularités ordinaires, correspond un cycle à deux dimensions bien défini.*

Soit  $F(x, y, z) = 0$  l'équation de la surface,  $m$  son ordre,  $\{H_x\}$ ,  $\{H_y\}$  les faisceaux découpés par les plans  $x = \text{Cte}$ ,  $y = \text{Cte}$ ,  $C_1, C_2$ , deux courbes algébriques de la surface, ne passant pas par les points bases de  $\{H_y\}$ , hypothèse qui ne diminue en rien la généralité. Soient encore  $M_1^1, M_2^1, \dots, M_{m_1}^1$ , les points du groupe  $C_1 H_y$ ,  $M_1^2, M_2^2, \dots, M_{m_2}^2$ , ceux du groupe  $C_2 H_y$ . Traçons une ligne quelconque de  $M_h^1$  à  $M_k^2$  dans  $H_y$ , et faisons décrire à la variable complexe  $y$  un cercle de grand rayon  $\gamma$ . Soient  $\zeta_h^1, \zeta_k^2$ , les lieux de  $M_h^1$  e  $M_k^2$ ,  $\Phi_{hk}$  la surface engendrée par la

(1) Le formole di questa furono dedotte sfruttando la circostanza che le forze elettriche, nei punti della superficie del conduttore, devono esser dirette normalmente agli elementi superficiali cui si riferiscono. Questa circostanza mi indusse a stabilire la relazione  $\Phi \times \mathbf{t} = 0$ , ciò che è legittimo solo nella ipotesi che il conduttore abbia sezione trasversale costante. Basta pensare ad es. ad un anello a sezione circolare variabile. È però interessante la coincidenza dei risultati ottenuti coi due metodi distinti, quando la sezione è costante, nel qual caso anche il primo metodo è perfettamente legittimo.



ligne  $M^1 M^2_k$ . Les lignes  $\zeta^1_h, \zeta^2_k$  sont fermées si les axes sont arbitraires, car alors le plan de l'infini n'est tangent ni à  $C_1$ , ni à  $C_2$ , et quand  $y$  décrit  $\gamma$ ,  $M^1_h$  et  $M^2_k$  sont ramenés à leur position primitive.  $\zeta^1_h$  et  $\zeta^2_k$  forment la frontière complète de  $\Phi_{hk}$ . Si l'on remplace le chemin  $M^1_h M^2_k$  par un autre, les deux ne différeront que d'un cycle linéaire  $\sigma$  de  $H_y$ . Le lieu de  $\sigma$  quand  $y$  décrit  $\gamma$ , est une surface fermée correspondant à un résidu à l'infini pour les intégrales doubles, ou comme nous le dirons, c'est un *cycle résiduel*. Un tel cycle est à considérer comme nul, car il peut être réduit par déformation, à une ligne ordinaire de la surface (dans ce cas la position de  $\sigma$  pour  $y = \infty$ ).

2. L'ensemble des lignes  $\zeta^1_h$  forme frontière complète pour une certaine aire fermée  $\Psi_1$  de  $C_1$ , puisqu'elles entourent les points à l'infini. De même on aura une aire fermée  $\Psi_2$  de  $C_2$ , dont les lignes  $\zeta^2_k$  forment la frontière complète. Avec les notations de Poincaré dans ses études d'Analyse Situs, on a les congruences

$$\Phi_{hk} \equiv \zeta^2_k - \zeta^1_h, \quad \Psi_1 \equiv \Sigma \zeta^1_h, \quad \Psi_2 \equiv \Sigma \zeta^2_k.$$

Par suite

$$\Gamma = m_1 \Psi_2 - m_2 \Psi_1 + \Sigma \Phi_{hk} \equiv 0,$$

c'est à dire que  $\Gamma$  est un cycle à deux dimensions de notre surface algébrique. D'après une remarque faite plus haut, quand on change la forme des lignes  $M^1_h M^2_k$  on ne fait qu'ajouter à  $\Gamma$  des cycles résiduels, c'est à dire des cycles nuls.  $\Gamma$  est donc bien défini. C'est le cycle que nous avions en vue. Il faut montrer que l'on n'a pas  $\Gamma \sim 0$ .

3. Pour atteindre notre objet, il suffit de montrer qu'il existe une intégrale double de deuxième espèce, sous la forme dite *normale*

$$(1) \quad \iint \frac{P(x, y, z)}{F'_z} dx dy, \quad (P \text{ polynome adjoint}),$$

à période non nulle par rapport à  $\Gamma$ . En effet, d'après les travaux classiques de Mr. Picard, le nombre de telles intégrales à périodes non nulles, est précisément celui des cycles à deux dimensions.

Tout d'abord je dis que

$$(2) \quad \iint_{\Psi_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} dx dy = 0, \quad \iint_{\Psi_2} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} dx dy = 0.$$

Transformons birationnellement la surface  $F$ , en une autre  $F_1$ , d'équation  $F_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ , au moyen d'un système linéaire  $|D|$ , découpé par des surfaces adjointes  $\sum_i \lambda_i \varphi_i(x, y, z) = 0$ , la transformation étant définie par

$$x_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_4}, \quad y_1 = \frac{\varphi_2}{\varphi_4}, \quad z_1 = \frac{\varphi_3}{\varphi_4}.$$

Supposons le système  $|D|$  choisi de telle manière que,  $D_i$  étant la courbe déterminée par  $\varphi_i = 0$ ,  $C_1$  fasse partie de  $D_2$ . Le jacobien  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)}$  ne s'annule identiquement que sur  $D_4$ . De plus, comme les axes sont arbitraires,  $C_1$  ne fait pas partie de la courbe simple de  $F$ , pour laquelle  $F'_z = 0$ . Le jacobien ci-dessus ne s'annulera donc qu'en un nombre fini de points de  $\Psi_1$ . Entourons chacun d'eux d'un petit circuit sur  $C_1$ , et soit  $\Psi'_1$  la somme des aires que ces circuits renferment. Posons enfin  $\Psi''_1 = \Psi_1 - \Psi'_1$ . La quantité

$$\left| \iint_{\Psi'_1} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} dx dy \right|,$$

est évidemment très petite. D'ailleurs si  $\overline{\Psi''_1}$  est la transformée de  $\Psi''_1$  sur  $F_1$ , comme  $y_1 = 0$  en tous les points de  $\overline{\Psi''_1}$ , on a

$$\iint_{\overline{\Psi''_1}} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} dx dy = \int \int_{\overline{\Psi''_1}} \frac{P(x, y, z)}{F'_z} \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)} dx dy = 0.$$

ce qui suffit pour démontrer la première équation (2), et par suite aussi la deuxième.

4. D'après ce qui précède la période par rapport à  $\Gamma$ , est donc égale à la valeur de l'intégrale étendue aux surfaces  $\Phi_{h\kappa}$ . C'est par suite le résidu à l'infini de la fonction

$$w(y) = \sum_{h, \kappa} \int_{M_h^1}^{M_h^2} \frac{P(x, y, z) dx}{F'_z},$$

qui  $y$  est d'ailleurs régulière. Les fonctions de ce genre, correspondant à l'intégrale abélienne

$$(3) \quad \int \frac{P(x, y, z) dx}{F'_z},$$

relative à  $H_y$ , ont déjà été étudiées par Poincaré (Annales de l'Ecole Normale, 1909; Archiv für Math. 1911). Quoiqu'il se soit limité surtout au cas où (3) est de première espèce, certaines de ses conclusions s'appliquent encore ici. En particulier nous avons

$$(4) \quad w(y) = \sum_j \frac{\mu_j}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j(Y) dY}{Y - y} + E(y),$$

où: 1°) les plans  $y = b_j$ , sont les plans du faisceau  $y = Cte$ , tangents à  $F$ . 2°)  $\Omega_j(y)$  est une période de (3) correspondant au cycle linéaire de  $H_y$  qui devient très petit pour  $y = b_i$ . 3°)  $E(y)$  est un polynome de degré

$\nu - m + 2$ ,  $\nu$  étant le degré de  $P$ . 4°) Les  $\mu$  sont des entiers indépendants de l'intégrale particulière (3) choisie.

Supposons que (3) se réduise à une intégrale de première espèce. On aura, si  $A$  est un point base de  $\{H_y\}$ ,

$$(5) \quad \sum_{h,k} \int_{M_h^1}^{M_k^2} du = m_1 \sum_k \int_A^{M_k^2} du - m_2 \sum_h \int_A^{M_h^1} du.$$

D'ailleurs (Poincaré)

$$\begin{aligned} \sum_h \int_A^{M_h^1} du &= \sum \frac{\lambda_j^1}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j'(Y) dY}{Y - y} + e_1(y), \\ \sum_k \int_A^{M_k^2} du &= \sum \frac{\lambda_j^2}{2\pi i} \int_b^{b_j} \frac{\Omega_j'(Y) dY}{Y - y} + c_2(y). \end{aligned}$$

où la période  $\Omega_j'$  correspond à  $\Omega_j$  pour  $u$ , et ces sommes sont les « fonctions normales » de l'illustre géomètre. Rappelons les propriétés suivantes :

1°. Toute période est une fonction normale. Soit  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2p}$ ,  $2p$  périodes fondamentales,  $p$  étant le genre des sections planes de la surface. Les entiers  $l_1^i, l_2^i, \dots, l_N^i$ , formant le système des  $\lambda$  pour  $\omega_i$ , ne dépendent pas de l'intégrale de première espèce choisie.

2°. Si  $C_1 = C_2$ , on a  $\lambda_j^1 \equiv \lambda_j^2$ , modulo  $l_j^1, l_j^2, \dots, l_j^{2p}$ . Plus généralement soient  $C_1, C_2, \dots, C_s$ , des courbes algébriques ne passant pas par les points bases de  $\{H_y\}$ ,  $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_N^i$ , les  $\lambda$  pour  $C_i$ . Si  $\sum t_i C_i = 0$ , on a aussi  $\sum t_i \lambda_j^i \equiv 0$ , modulo  $l_j^1, l_j^2, \dots, l_j^{2p}$ .

Des relations (3), (4), (5), on tire  $\mu_j = m_1 \lambda_j^2 - m_2 \lambda_j^1$ . De (5) on déduit en prenant le résidu à l'infini de  $w(y)$ , la valeur

$$(6) \quad \sum_j \mu_j \int_b^{b_j} \Omega_j(Y) dY.$$

pour la période de l'intégrale double (1) par rapport au cycle  $F$ . En remarquant que cette période est indépendante de  $b$ , et par suite a une dérivée nulle par rapport à  $b$ , on obtient la relation  $\sum \mu_j \Omega_j'(b) = 0$ , ce qui vérifie que (6) est bien une période de (1) (Picard).

La période obtenue est évidemment nulle si  $C_1 = C_2$ , quand (1) est de seconde espèce, résultat que l'on peut déduire de la définition de  $F$ .

5. Pour achever la démonstration, nous aurons recours aux intégrales doubles sous forme normale et en même temps du type

$$(7) \quad \iint \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy$$

dont Mr. Picard a fait un usage constant, les ayant d'ailleurs introduites. Nous dirons des intégrales du type (7), qu'elles sont *impropres de deuxième espèce*. On peut évidemment supposer que le nombre  $\rho$  de Mr. Picard est  $> 1$ . Soit  $D_1, D_2, \dots, D_{\rho-1}$ , un système de courbes formant base avec celle à l'infini,  $g_i(x, y) = 0$  la projection de  $D_i, D'_i$  étant l'autre courbe de  $F$  avec la même projection. Il y a alors  $\rho - 1$  intégrales doubles telles que

$$(8) \quad \iint \frac{Q_i(x, y, z)}{F'_z} dx dy = \iint \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) dx dy,$$

( $U_i, V_i$ , du type  $\frac{K(x, y, z)}{\varphi(y) g_i(x, y) F'_z}$ ;  $K$  polynome adjoint nul sur  $D'_i$ ,

$\varphi(y)$  polynome),

telles que toute intégrale impropre de seconde espèce sous forme normale soit une combinaison linéaire de celles-ci, à une intégrale à périodes nulles près (Picard). Posons

$$\varepsilon(x, y) = \int^{x,y} \frac{Q_i(x, y, z) dx}{F'_z}.$$

Cette fonction est holomorphe en tout point à distance finie, extérieur aux plans  $y = b_i$ . Soit  $B_i$  le point de contact de  $y = b_i$ . Pour tous les points de ce plan autres que  $B_i$ , on peut toujours choisir le chemin d'intégration de manière que  $\varepsilon$  soit holomorphe en leur voisinage. Cela revient simplement à choisir une détermination convenable pour  $\varepsilon$ .

Ceci posé, l'intégrale suivante déjà considérée par Mr. Picard,

$$(9) \quad \int (U_i - \varepsilon) dy - V_i dx,$$

est une intégrale de différentielles totales, car la condition d'intégrabilité est satisfaite. Soit  $\varphi(y_j) = 0, \alpha_j$  la période logarithmique de (9) relative à  $H_{y_j}$ . On peut soustraire de (9) une intégrale de différentielles totales

$$\sum \int \frac{\alpha_j dy}{y - y_j}$$

de façon à éliminer les courbes logarithmiques du faisceau  $\{H_y\}$ . Cela revient à soustraire de  $U_i$  une fonction de  $y$  seul, ce qui ne change pas  $\frac{\partial U_i}{\partial x}$ .

Les intégrales abéliennes

$$\int U_i dy, \quad - \int V_i dx,$$

relatives à  $H_x, H_y$ , respectivement, auront alors comme seuls points loga-

rithmiques à distance finie, ceux des groupes  $H_x D_i, H_y D_i$ , avec des périodes égales pour toutes deux à une même constante que l'on peut supposer égale à  $un$ .

6. Le plan à l'infini étant arbitraire, on peut supposer que  $U_i, V_i$ , ne deviennent infinies nulle part sur les  $\Phi$ . On aura alors, en appliquant une transformation bien connue, pour la période de (8) par rapport à  $\Gamma$ , la valeur

$$\begin{aligned} & \sum_{hk} \iint_{\Phi_{hk}} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) dx dy \\ &= m_1 \sum_k \int_{\xi_k^2} (U_i dy - V_i dx) - m_2 \sum_h \int_{\zeta_h^1} (U_i dy - V_i dx). \end{aligned}$$

Le coefficient de  $m_2$  dans cette relation est égal à la somme des périodes logarithmiques à l'infini de l'intégrale abélienne

$$\int U_i dy - V_i dx,$$

relative à  $C_1$ , et par suite égale à celle des périodes logarithmiques à distance finie. Les seuls points logarithmiques à distance finie, sont ceux du groupe  $C_1 D_i$ , et ceux où  $\varphi(y) = 0$ . On pourra toujours supposer que parmi ces points ne se trouvent aucun des points B, et par suite, on pourra toujours choisir pour  $\varepsilon$  une détermination holomorphe au voisinage de l'un d'eux. Soit M un des points du premier type, M' un du second,  $\eta, \eta'$  deux petits circuits autour de M, M', dans  $C_1$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon'_1$  deux détermination de  $\varepsilon$  holomorphes autour de M, M', respectivement. On a

$$\begin{aligned} \int_{\eta} U_i dy - V_i dx &= \int_{\eta} (U_i - \varepsilon_1) dy - V_i dx = 1, \\ \int_{\eta'} U_i dy - V_i dx &= \int_{\eta'} (U_i - \varepsilon'_1) dy - V_i dx = 0. \end{aligned}$$

En désignant comme d'habitude par [CD] le nombre de points du groupe CD commun à deux courbes C, D, le coefficient de  $m_2$  dans l'expression obtenue pour la période de (8) par rapport à  $\Gamma$ , est donc égal à  $[C_1 D_i]$ . De même celui de  $m_1$  est  $-[C_2 D_i]$ . D'où pour cette période la valeur  $[(m_2 C_1 - m_1 C_2) D_i]$ . Elle est nulle si  $m_2 [C_1 D_i] = m_1 [C_2 D_i]$ . D'ailleurs si E est une section plane, on a  $m_2 [C_1 H] = m_1 [C_2 H] = m_1 m_2$ . Donc si toutes les périodes des intégrales doubles (8) par rapport à  $\Gamma$  étaient nulles, on aurait  $m_2 [C_1 D] = m_1 [C_2 D]$ , pour toute courbe D de F, et par suite, (Severi),  $tm_2 C_1 = tm_1 C_2$ . Ainsi si  $C_1$  et  $C_2$  sont algébriquement distinctes, il y a au moins une intégrale double de seconde espèce à période non nulle par rapport à  $\Gamma$ , et l'on n'a pas  $\Gamma \sim 0$ . C. Q. F. D.

7. Soit  $\Gamma_i$  le cycle analogue à  $\Gamma$ , et relatif aux courbes  $D_i, H$ , dans l'ordre nommé. Posons  $m D_i - n_i H = G_i$ , où  $n_i$  est l'ordre de  $D_i$ . Les courbes  $G_1, G_2, \dots, G_{p-1}, H$ , forment base. Le déterminant des périodes des intégrales (8) par rapport aux cycles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{p-1}$ , est égal à

$$|[\Gamma_j D_i]|,$$

et par suite il n'est pas nul. Donc, étant donnée l'intégrale de seconde espèce (1), il existe des constantes non toutes nulles  $a_i$ , telles que les périodes de

$$\iint \frac{P(x, y, z) - \sum_i a_i Q_i(x, y, z)}{F_z'} dx dy$$

qui est aussi sous forme normale, par rapport aux cycles  $\Gamma$ , soient toutes nulles.

On vérifie d'ailleurs par un calcul assez simple, que si

$$t_1 C_1 = t_0' H + \sum t_i' D_i, \quad t_2 C_2 = t_0'' H + \sum t_i'' D_i,$$

on a

$$m t_1 t_2 \Gamma \sim \sum (m_1 t_2 t_i' - m_2 t_1 t_i'') \Gamma_i.$$

En définitive parmi les cycles  $\Gamma$ , il y en a  $\rho - 1$  linéairement indépendants, et les cycles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{p-1}$ , forment base, pour ceux de ce type.

**Matematica.** — *Sovra certe equazioni di composizione di seconda specie.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. In questa breve Nota proseguiamo una ricerca iniziata in due precedenti Note (1).

Ci proponiamo ora di assegnare la soluzione generale delle equazioni di composizione del tipo

$$(1) \quad f^{xx}(\eta) = a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots + a_m \eta^m = v(xy),$$

ove  $v(xy)$  sia un nucleo di Goursat ed abbia perciò la forma:

$$v(xy) = \sum \alpha'_{rs} h_r(x) k_s(y).$$

(1) G. Andreoli, *Sulla risoluzione di certe equazioni di composizione; Sulla soluzione generale d'una classe di equazioni di composizione.* Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXV, ser. 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem. 1916.

Possiamo subito osservare che, per noti teoremi, dalle due successioni

$$\begin{aligned} h_1(x), h_2(x), \dots \\ k_1(x), k_2(x), \dots \end{aligned}$$

si può sempre dedurre, mediante combinazioni lineari, un sistema biortogonale normalizzato:

$$\begin{aligned} p_1(x), p_2(x), \dots, p_\rho(x) \\ q_1(x), q_2(x), \dots, q_\rho(x). \end{aligned}$$

Si può scrivere dunque:

$$\nu(xy) = \sum \alpha_{rs} p_r(x) q_s(y).$$

2. Supporremo dapprima che, in particolare, sia

$$\nu(xy) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y)$$

e che l'equazione algebrica

$$f(\xi) = 0$$

ammetta solo radici semplici. Notiamo che se fra le  $\alpha_r$  ve ne sono  $\rho_1$  eguali ad  $\alpha$ ;  $\rho_2$  eguali a  $\beta$  e così via, il nucleo  $\nu$  si scrive sotto la forma:

$$\nu(xy) = \alpha \sum_{\rho_1} p_r(x) q_r(y) + \beta \sum_{\rho_2} p_r(x) q_r(y) + \gamma \sum_{\rho_3} p_r(x) q_r(y) + \dots$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  tutte diverse fra loro.

Quindi, se indichiamo con  $F(\xi) = 0$  l'equazione algebrica che ha per radici semplici tutte e sole le  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, 0$ , possiamo dire che il nucleo  $\nu$  soddisfa all'equazione di composizione

$$\overset{\times \times}{F}(\overset{\times \times}{\nu}) = 0;$$

e questa sarà l'equazione di composizione, priva di termine noto, e di grado minimo cui esso soddisfa.

Tenendo presente la (1), vediamo che la  $n$ , se esiste effettivamente, deve certamente soddisfare l'equazione di composizione:

$$(2) \quad \overset{\times \times}{F}(\overset{\times \times}{f}(\overset{\times \times}{\mu})) = 0.$$

3. Intanto osserviamo che — per le ipotesi fatte — l'equazione algebrica

$$(3) \quad F(f(\xi)) = 0$$

è a radici semplici.

Quindi, la più generale soluzione della (2) è data da un nucleo

$$\mu = \sum c_r \xi_r(x) \eta_r(y)$$

con le  $\xi, \eta$  formanti sistema biortogonale normalizzato, e le  $c_r$  radici della (3).

Ma noi vogliamo che questa soluzione soddisfi anche la (1); e perciò deve essere:

$$f^{**}(\mu) = v.$$

Per i risultati ottenuti nelle Note precedenti, e per la speciale forma di  $\mu$ , si ha:

$$(4) \quad f^{**}(\mu) = \sum f(c_r) \xi_r(x) \eta_r(y) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y).$$

Da quest'ultima eguaglianza segue che il sistema biortogonale  $(\xi, \eta)$  deve comprendere quello  $(p, q)$  (o un suo trasformato mediante una trasformazione lineare biortogonale: ciò che non cambia il ragionamento). Quindi esso si otterrà aggiungendo alle  $p$  delle funzioni  $u$ , ortogonali alle  $q$ ; alle  $q$  delle funzioni  $v$  ortogonali alle  $p$ ; le  $u$  e  $v$  essendo biortogonali fra loro.

Epperò resta:

$$(5) \quad \sum_1^p f(c'_r) p_r(x) q_r(y) + \sum_1^{\sigma} f(c''_s) u_s(x) v_s(y) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y),$$

ove  $c'$  e  $c''$  stanno ad indicare i due gruppi in cui si dividono le  $c$ .

Ma quest'ultima eguaglianza può sussistere solo se si ha separatamente:

$$\sum_1^p f(c'_r) p_r(x) q_r(y) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(y)$$

$$\sum_1^{\sigma} f(c''_s) u_s(x) v_s(y) = 0.$$

Basta, infatti, moltiplicare la (5) per una qualunque coppia  $p_r(x) q_r(y)$  ed integrare rispetto alla  $x$  ed alla  $y$  nel campo fissato, per avere:

$$f(c'_r) = \alpha_r,$$

e operare analogamente con la  $u_s(x) v_s(y)$  per avere:

$$f(c''_s) = 0.$$



4. Si vede quindi che vale il

TEOREMA. — *La soluzione generale dell'equazione di composizione:*

$$f^{xx}(n) = \sum \alpha_r p_r(x) q_r(x),$$

*nell'ipotesi che l'equazione algebrica  $f(\xi) = 0$  sia a radici distinte, si ottiene aggiungendo al nucleo*

$$n_1 = \sum c'_r p_r(x) q_r(y) \quad ; \quad f(c'_r) = \alpha_r$$

*il nucleo ad esso ortogonale*

$$n_2 = \sum c''_s u_s(x) v_s(y) \quad ; \quad f(c''_s) = 0$$

*soluzione della*

$$f^{xx}(n) = 0.$$

Infatti, pel ragionamento fatto sinora,  $n_1$  ed  $n_2$  saranno ortogonali, perchè formati con funzioni appartenenti a porzioni (che non hanno parte comune) dello stesso sistema biortogonale.

Se il numero delle  $p$  è  $q$ , e se la  $f$  è di grado  $m$ , la  $n_1$  avrà  $m^q$  forme differenti in corrispondenza appunto alla scelta delle  $c'$ .

Per esempio, consideriamo la

$$n^{xx} = 3n - 2(p_1(x) q_1(y) + p_2(x) q_2(y) + p_3(x) q_3(y)).$$

Si ha:

$$f(\xi) = \xi^2 - 3\xi \quad ; \quad \alpha_r = -2 \quad (r = 1, 2, 3).$$

Per ottenere le  $c'_r$  bisogna risolvere la

$$f(c') - \alpha_r = \xi^2 - 3\xi + 2 = 0,$$

che dà  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = 2$ .

Quindi il nucleo  $n_1$  sarà dato da

$$n_1 = 2 \sum p'_r(x) q'_r(x) + \sum p''_r(x) q''_r(x) = 2n' + n'' \quad (v = n' + n''),$$

ed inoltre

$$n_2 = 3 \sum u_r(x) v_r(y) = n''',$$

ove le  $p'$ ,  $q'$  sono alcune delle  $p$ ,  $q$ ;  $p''$ ,  $q''$  le rimanenti; le  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$  sono ortogonali fra loro.

Infatti si ha, tenendo presente che  $(\overset{\times\times}{n})^2 = n' ; \dots :$

$$\begin{aligned} (2 \overset{\times\times}{n} + \overset{\times\times}{n}' + 3 \overset{\times\times}{n}'' )^2 - 3(2n' + n'' + 3n''') + 2(n' + n'') = \\ = 4(\overset{\times\times}{n})^2 + (\overset{\times\times}{n}')^2 + 9(\overset{\times\times}{n}'')^2 - 6n' - 3n'' - 9n''' + 2n' + 2n'' \end{aligned}$$

che è identicamente nullo.

5. Passiamo ora a trattare il caso che la  $\nu$  non abbia quella forma particolare, o che la  $f(\xi) = 0$  non abbia radici semplici.

È facile vedere che <sup>(1)</sup>, dati due nuclei di Goursat appartenenti allo stesso sistema biortogonale (o ciò, che è lo stesso, di cui uno dei sistemi comprenda l'altro) e differenti quindi per i soli coefficienti  $\alpha$ ; chiamata « *matrice relativa* » del nucleo  $\nu$  la matrice:

$$A \equiv \|\alpha_{rs}\|; \quad (r, s = 1, 2, \dots, q)$$

sussistono i lemma

I. La matrice relativa  $A$  di un nucleo  $\nu$ , composto mediante due altri nuclei, le cui matrici relative sieno  $A_1$  ed  $A_2$ , è data da

$$A \equiv A_1 A_2 .$$

II. La matrice relativa  $B$  di un nucleo  $\nu$ , somma di due altri nuclei, le cui matrici relative sieno  $B_1$  e  $B_2$ , è data da

$$B \equiv B_1 + B_2 .$$

Il quadro delle  $\alpha_{rs}$  va ovviamente completato con degli zeri, al posto dell' $\alpha_{rs}$ , se nel nucleo  $\nu$  non figura il prodotto  $p_r(x) q_s(y)$ ; inoltre  $\nu$  sarà il nucleo relativo ad  $A$ , nel sistema  $(p, q)$ .

Tali due lemma mostrano che il calcolo di composizione sui nuclei  $\nu$  appartenenti allo stesso sistema biortogonale coincide col calcolo delle loro matrici relative; e reciprocamente ogni relazione intercedente fra le matrici può essere direttamente letta come una relazione di composizione fra i nuclei relativi, scelti tutti in uno stesso sistema.

Ad ogni matrice corrisponde un nucleo relativo ed uno solo, in ogni sistema  $(p, q)$ ; ad ogni nucleo una ed una sola matrice relativa.

Intanto noi sappiamo che la matrice  $A$  soddisfa coll'equazione caratteristica:

$$F(A) \equiv \gamma_1 A + \gamma_2 A^2 + \dots + \gamma_\sigma A^\sigma \equiv \|0\|:$$

quindi, a sua volta il nucleo  $\nu$  soddisfa all'equazione di composizione:

$$F(\overset{\times\times}{\nu}) = 0 .$$

<sup>(1)</sup> Cfr. Volterra, *Sopra le funzioni permutabili di 2<sup>a</sup> specie*, Rend. R. Accad. dei Lincei, ser. 3<sup>a</sup>, vol. XX.

Epperò  $n$ , se esiste, deve soddisfare certamente all'equazione di composizione

$$\mathbf{f}^{\times\times\times}(f(n)) = \gamma_1 f(n) + \gamma_2 (f(n))^2 + \dots + \gamma_\sigma (f(n))^\sigma = 0.$$

Richiamando i risultati delle due Note precedenti, vediamo che la soluzione generale di questa equazione è un nucleo di Goursat

$$\mu = \sum g_{rs} \chi_r(x) \eta_s(y),$$

ove  $\chi, \eta$  sono funzioni di un sistema biortogonale. Quindi, a sua volta, l'espressione  $f(\mu)$  sarà della stessa forma:

$$f(\mu) = \sum l_{rs} \chi_r(x) \eta_s(y),$$

ove le  $l$  si ricavano subito dalle  $g$ .

Se si vuole che  $\mu$  ci dia proprio la  $n$ , dovrà essere:

$$(6) \quad \sum l_{rs} \chi_r(x) \eta_s(y) = \sum a_{rs} p_r(x) q_s(y).$$

La (6) implica che il sistema biortogonale (o un suo trasformato mediante una trasformazione lineare biortogonale, ciò che è lo stesso)  $(p, q)$  sia compreso nel sistema  $(\chi, \eta)$ .

Epperò, scelto un qualunque sistema  $\chi, \eta$  che comprenda  $(p, q)$ ; chiamata  $H$  la nuova matrice ottenuta orlando con zero la matrice  $A$  [relativa a  $\nu$  nel sistema  $(p, q)$ , mentre la nuova è relativa a  $\nu$  nel sistema  $(\chi, \eta)$ ], e detta  $G$  la matrice relativa ad  $n$  nel sistema  $(\chi, \eta)$ , si dovrà avere:

$$a_1 G + a_2 G^2 + \dots + a_m G^m = H.$$

Quindi abbiamo il

TEOREMA II. — *La soluzione generale dell'equazione di composizione*

$$f^{\times\times\times}(n) = \nu,$$

ove  $\nu$  sia un qualunque nucleo di Goursat, si ottiene risolvendo l'equazione fra matrici:

$$f(G) = H$$

e prendendo il nucleo relativo alla matrice  $G$ , nello stesso sistema biortogonale  $(\xi, \eta)$  comprendente quello primitivo di  $\nu$ , rispetto al quale si è presa la matrice relativa  $H$  del nucleo  $\nu$ .

Per  $\nu = 0$  si ritrovano i risultati delle Note precedenti; però lo svolgimento in esse dato è necessario, poichè permette appunto di assegnare la forma delle soluzioni, mentre col presente metodo, noi ci limitiamo a verificare che se la soluzione è di una certa forma, sussiste una certa relazione algebrica fra i coefficienti  $g$  del nucleo  $n$ , senza mostrare che effettivamente quella data sia la forma più generale di soluzione.

Meccanica celeste. — *Sopra le distanze planetarie dal Sole.*  
Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *Andamento annuale della pressione barometrica in Italia.* Nota di FILIPPO EREDIA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

La pressione barometrica presenta, durante l'anno, un andamento particolare che nei luoghi continentali suole manifestarsi con un aumento di essa nei mesi a temperatura più fredda, e una diminuzione nei mesi a temperatura più calda; mentre, nei luoghi sottoposti alla diretta influenza dei mari, si osserva un andamento contrario. Nelle regioni che risentono dell'influenza tanto del mare che della terraferma, si ha un andamento annuale della pressione ben diverso e che può individuarsi con due massimi e due minimi.

Oltre a tali ondulazioni principali nelle diverse curve esprimenti l'andamento su riferito, qualora si considerino valori relativi a periodi più brevi del mese ossia alla decade o alla pentade, si riscontrano altre ondulazioni che sembrano presentare i medesimi caratteri per gli stessi luoghi di una data regione ed essere in stretta relazione con gli andamenti annuali delle precipitazioni atmosferiche. Alcune di tali ondulazioni permangono nei valori mensili e si individuano distintamente sì da lasciare traccia nell'andamento annuale costituendo un terzo massimo e un terzo minimo.

La causa a cui debbono attribuirsi i su citati andamenti è tuttora non nota, forse per la mancanza di dati, ma più ancora per la complessità dei fenomeni meteorici che vi agiscono.

Le ricerche sul proposito sono abbastanza limitate, e i più si occupano della variazione annuale della pressione barometrica incidentalmente, venendo a trattare del clima nelle monografie speciali che illustrano gli elementi climatici di una singola città o località.

Questo stato di cose si rispecchia in gran parte nelle conoscenze climatiche dell'Italia, e difatti, ad eccezione del lavoro pregevole degli astronomi Schiaparelli e Celoria sulle variazioni annuali della pressione barometrica in Milano <sup>(1)</sup>, ove i valori ottenuti vengono messi a raffronto con quelli

(<sup>1</sup>) Schiaparelli V. e Celoria C., *Sulle variazioni periodiche del barometro nel clima di Milano* (Supplemento alla Meteorologia italiana). Vol. I, anno 1867.

di Bologna e di Trieste, e del lavoro del Ragona per Modena <sup>(1)</sup>, si trovano cenni soltanto di carattere generale nelle diverse monografie climatiche relative a periodi diversi; cosicchè mancano gli elementi per considerare il comportamento dell'andamento annuale della pressione su tutta la nostra penisola.

Schiaparelli e Celoria esaminarono le osservazioni barometriche eseguite a Milano dal 1835 al 1859, e l'andamento annuale dei valori medii venne messo a raffronto con gli andamenti ottenuti da Respighi per Bologna sulla base di 45 anni di osservazione e da Jelinek per Trieste sulla base di 16 anni. Rappresentando le curve annuali, gli Autori notarono parallelismo fra queste curve e ne dedussero che sull'Italia superiore l'andamento annuo della pressione barometrica è rappresentato da tre massimi e da tre minimi che cadono alle seguenti epoche:

	Milano	Bologna	Trieste
Massimo principale . . . . .	1 gennaio	25 dicembre	15 gennaio
Minimo principale . . . . .	17 aprile	22 aprile	13 aprile
1° massimo secondario . . . . .	25 giugno	1 luglio	21 giugno
1° minimo secondario . . . . .	25 luglio	25 luglio	5 luglio
2° massimo principale . . . . .	22 settembre	2 ottobre	18 settembre
2° minimo principale . . . . .	2 novembre	2 novembre	7 novembre

Di queste tre onde una, che ha luogo nei mesi invernali, è grandissima e si estende dal massimo principale al minimo principale; le altre due onde sono molto minori, e dal massimo al minimo la pressione varia di frazioni di millimetro, specie per Bologna. La prima delle onde secondarie è poco sensibile a Trieste, mentre l'altra è più accentuata; la seconda onda secondaria sembra avere presso a poco eguale importanza a Milano e a Bologna.

Aggiungono gli Autori che il numero degli anni presi in esame è abbastanza limitato e tale da non dare perfetta cognizione dell'andamento annuo della pressione barometrica; occorrerebbero dati estesi ad un periodo maggiore (almeno di 100 anni) per definire tale andamento con qualche sicurezza, e pertanto qualche minima differenza che presentano i predetti diagrammi, non può attribuirsi se non all'insufficienza delle osservazioni.

Gli studiosi che successivamente hanno considerato le osservazioni barometriche, hanno confermato la presenza di tre onde nell'andamento annuale, cosicchè il Roster <sup>(2)</sup> credette di poter dire che la legge che presiede all'andamento annuale della pressione è con ogni probabilità la stessa per tutta l'Italia.

<sup>(1)</sup> Ragona D., *Andamento annuale della pressione barometrica* (Supplemento alla Meteorologia italiana). Fasc. II, anno 1877.

<sup>(2)</sup> Roster G., *Climatologia dell'Italia*. Torino, 1909.

Recentemente Angot <sup>(1)</sup> pubblicò un importante lavoro sulla variazione della pressione in Francia e in esso sono anche esaminate le osservazioni barometriche eseguite a Milano pel 1851-1900 ed a Torino, Moncalieri, Modena, Genova per un periodo minore di anni; ma queste ultime vennero ridotte al periodo cinquantennale confrontandole con le osservazioni rilevate a Milano, Ginevra, Marsiglia e Trieste. L'A., considerando i valori medii mensili delle diverse città, ne tracciò l'andamento annuale e vi distinse cinque tipi, quattro dei quali presentano distintamente due massimi in inverno e in estate e due minimi in primavera ed autunno con una piccola oscillazione nel mese di agosto, ove la pressione è nettamente più bassa di quella dei mesi di luglio e di settembre.

Variano però da tipo a tipo i mesi degli estremi, potendosi presentare spostamenti di un mese. Per quasi tutta la Francia vale il tipo IV che dà il massimo principale in gennaio il secondario in settembre, il minimo principale in aprile e il secondario in ottobre.

L'A. trova inoltre un quinto tipo che chiama della regione sud-est, e aggiunge che è notato sull'alta Italia col massimo principale in gennaio, il secondario in settembre, il minimo principale in aprile e il secondario in ottobre. Non si ha adunque cenno alcuno del terzo massimo e minimo già trovati da altri autori.

Gli studi così elencati portano a non affermare un'identità di andamento della pressione barometrica, anzi dallo studio di Angot si verrebbe ad attribuire all'alta Italia un andamento ben diverso da quello riscontrato dagli studiosi italiani. E d'altra parte, per un paese come il nostro, molto esteso in latitudine, può pensarsi che una certa diversità debba verificarsi da luogo a luogo. Sembra pertanto utile contribuire alla risoluzione di tali quesiti, prendendo a base della ricerca un uguale periodo di anni di osservazioni barometriche, e contemporaneamente per diverse località, si da prospettare l'andamento su tutta la nostra penisola.

Il periodo più uniforme è quello che si estende dal 1881 al 1915, ossia per un trentacinquennio; e per esso diamo qui appresso i valori medi mensili ed annuali per 12 città italiane.

Avvertiamo che le medie mensili provengono dalle medie diurne risultano dalle osservazioni eseguite a 9<sup>h</sup>, 15<sup>h</sup>, 21<sup>h</sup>: e non abbiamo fatto subire ad esse correzione alcuna per ridurle al vero medio diurno, perchè tuttora manca uno studio completo sull'argomento e dalle ricerche fatte, benchè limitate a pochi anni, sembra non esservi bisogno di apportare riduzione. Si intende che le osservazioni sono ridotte soltanto alla temperatura di zero gradi, ma non ridotte al livello del mare e per ragioni tipografiche si è soppressa la prima cifra che è il sette.

<sup>(1)</sup> Angot A., *Études sur le climat de la France. Pression atmosphérique*. Annales du Bureau Central Météorologique de France, année 1906, I, Mémoires, Paris, 1910.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Udine . . . . .	53,79	52,53	50,56	49,14	50,21	50,56	50,66	51,05	52,45	51,84	52,45	52,59	51,49
Padova . . . . .	61,66	60,23	57,79	56,72	57,63	57,83	57,82	58,36	59,78	59,41	60,25	60,24	58,97
Milano . . . . .	51,42	49,61	47,41	46,27	47,53	47,88	48,01	48,49	49,69	49,07	50,18	50,13	48,80
Torino . . . . .	39,78	38,18	35,69	34,98	35,96	36,78	36,79	37,24	38,30	37,64	38,37	38,31	37,28
Modena . . . . .	58,87	57,58	54,67	53,59	54,79	54,88	55,04	55,23	56,65	56,29	57,46	57,62	56,05
Genova . . . . .	58,46	57,09	55,01	54,29	55,61	56,13	56,24	56,48	57,31	56,47	57,11	56,99	56,43
Pesaro . . . . .	63,20	61,61	59,28	58,24	58,87	59,55	59,51	59,86	61,12	60,79	61,64	61,56	60,43
Firenze . . . . .	57,13	55,69	54,06	53,00	54,19	54,67	54,42	55,00	56,01	55,56	56,03	55,97	55,14
Roma . . . . .	58,34	57,66	56,14	55,09	56,37	57,02	56,90	57,14	58,24	57,77	58,13	57,99	57,23
Napoli . . . . .	49,50	49,11	47,28	46,42	47,86	48,50	48,68	48,79	49,63	48,97	49,24	48,86	48,34
Lecce . . . . .	56,71	55,75	54,53	53,52	54,40	54,74	54,49	54,71	56,24	56,35	56,51	56,18	55,34
Palermo . . . . .	56,83	56,16	54,99	54,07	55,41	55,92	55,98	56,08	56,57	56,29	56,52	56,13	55,91

Il massimo principale cade ovunque in gennaio e il minimo principale in aprile; e possiamo adunque stabilire queste due date come limiti principali per tutta l'Italia.

Uguale concordanza non si riscontra per la prima e la seconda onda secondaria; anzi possiamo dire che quest'ultima manca di generalità, inquantochè, verificandosi nel periodo giugno-agosto in cui la pressione subisce le minori variazioni, può manifestarsi nei valori mensili con differenze di qualche decimo che non appaiono però nelle rappresentazioni grafiche ove si riscontra piuttosto un quasi livellamento. Dai valori numerici su riferiti per Firenze, Roma, Pesaro, Lecce, Napoli si rileva come in luglio corrispondono valori di poco inferiori a quelli di giugno, il che consentirebbe, per queste località, di considerare luglio come secondo minimo secondario, e giugno come secondo massimo secondario. Per Padova, le pressioni di giugno e di luglio si possono ritenere eguali fra di loro. Per Milano, Udine, Genova e per Palermo si riscontra invece un lieve aumento del valore di luglio rispetto a quello di giugno. Sembra adunque che questa terza onda si individui maggiormente sulle regioni centrali e meridionali, e assuma minore importanza sulle regioni settentrionali e insulari, ove, in corrispondenza, riscontrasi quasi livellamento di pressione.

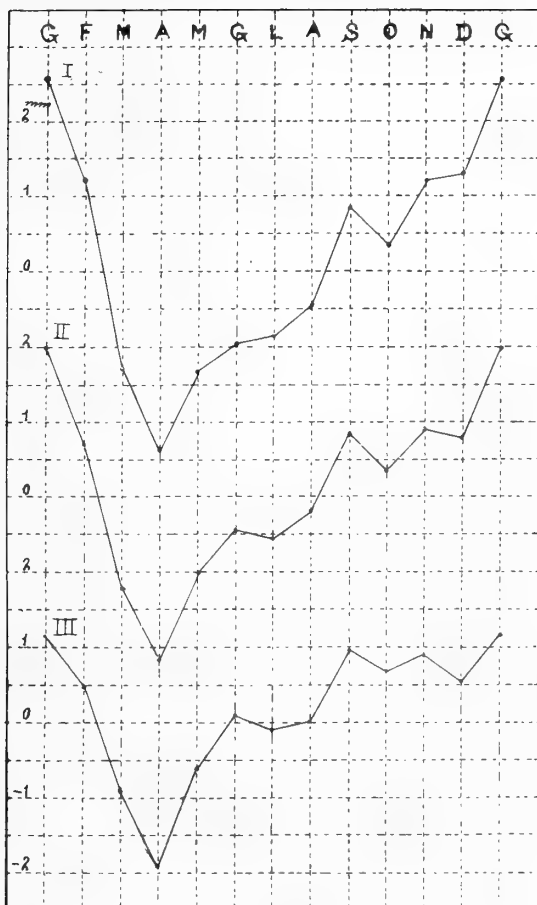
La seconda onda ha caratteri ben diversi; il primo massimo secondario cade ovunque in settembre, eccetto Lecce ove il massimo cade in ottobre, differendo la pressione di questo mese da quella di settembre di soli nove decimi. Riguardo al primo minimo secondario, esso appare distintamente in ottobre, eccetto per Napoli, Lecce e Palermo in cui cade in dicembre.

Da questo esame, basato su un periodo identico di anni di osservazioni, risultano pertanto alquanto modificate le idee che si avevano in proposito, inquantochè ci sembra riscontrarvi una variazione di andamento annuale con la latitudine la cui influenza però si esplica sulla 1<sup>a</sup> e sulla 2<sup>a</sup> onda secondaria che hanno un'ampiezza molto minore di quella propria della primaria. E quantunque le città esaminate non siano numerose, tuttavia, pel fatto che esse riguardano le diverse latitudini del nostro paese, e tenuto conto che per località vicine la variazione è minima, se non trascurabile, ci sembra potere distinguere tre tipi che possiamo denominare settentrionale, centrale e meridionale.

Al primo tipo includiamo le città di Udine, Padova, Milano, Modena, Torino; al secondo tipo Genova, Pesaro, Firenze e Roma; al terzo tipo Napoli, Lecce e Palermo; e a ciascuno di essi spettano i seguenti valori della deviazione media mensile dalla media annua.

Per dedurre questi valori si è calcolato separatamente per ciascuna città la deviazione della pressione media mensile dalla corrispondente annua, e dopo si è dedotta per ciascun mese del tipo dalla media delle diverse deviazioni spettanti alle città che formano il tipo.



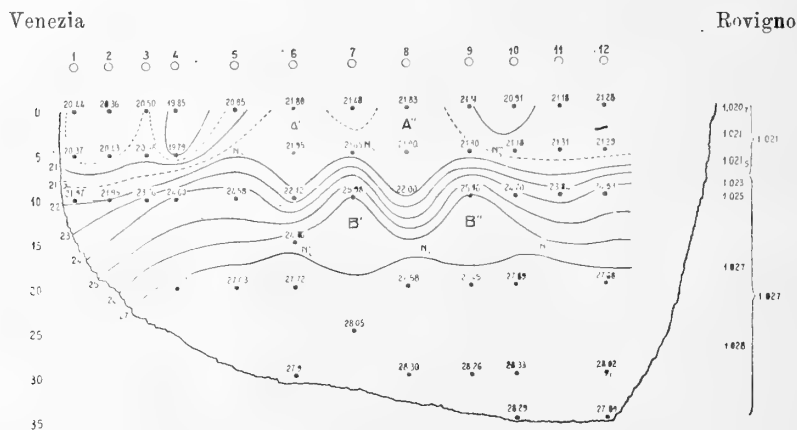


	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
Tipo settentr. . .	+2,58	+1,18	-1,29	-2,38	-1,29	-0,93	-0,85	-0,44	+0,86	+0,33	+1,22	+1,26
" centrale. . .	+1,07	+0,70	-1,18	-2,15	-1,04	-0,47	-0,54	-0,19	+0,86	+0,34	+0,92	+0,82
" merid. . . .	+1,15	+0,48	-0,93	-1,86	-0,64	+0,14	-0,15	0,00	+0,95	+0,67	+0,89	+0,53

E nel grafico 1° diamo la rappresentazione grafica che riassume quanto avanti abbiamo specificato. Notiamo infine che i valori della escursione annua, rispettivamente di 4,96, 4,12 e 3,01, mostrano una diminuzione sensibile con la latitudine, differendo di mm. 1,95 i valori relativi alle regioni settentrionali e meridionali.

Fisica terrestre. — *Le onde interne e le sesse dell'Adriatico superiore.* Nota di EMILIO ODDONE, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Le isoterme, isoaline ed isopiene presentano talora, nello strato di salto dei mari interni, delle ondulazioni regolari, gli studi sulle quali sono sunteggiati nei trattati di oceanografia. Ondulazioni di tale specie furono trovate nell'Alto Adriatico durante la crociera della R. nave Ciclope nell'agosto 1911 e vennero recentemente studiate dal prof. L. De Marchi (1). Il vicino grafico riproduce dal detto studio le linee di egual densità nel tratto adriatico della trasversale Venezia-Rovigno, addì 17 agosto 1911, e mostra le ondulazioni in regione di salto, tra due strati: uno inferiore, profondo una ventina di metri circa, a peso specifico medio maggiore; l'altro superiore, spesso circa dieci metri, a peso specifico minore.



I cerchietti, lungo le ascisse, indicano le stazioni sulle cui verticali si eseguirono le osservazioni. Le cifre sulle ordinate, alla sinistra, danno le profondità del mare in metri. I numeri interni esprimono i pesi specifici, o densità relativa, in millesimi della parte decimale ad es. per 20,44 leggere 1,02044. In base alle constatazioni della figura, abbiamo ritenuto nei calcoli, che i due fluidi sovrapposti avessero gli spessori più approssimati di 21<sup>m</sup>,9 l'inferiore; 8<sup>m</sup>,1 il superiore, e rispettivamente i pesi specifici medi di 1,027 e 1,021.

Per ricavare il periodo dell'ondulazione, il prof. De Marchi, in prima valutazione, impiega l'espressione

$$(1) \quad T = \frac{\lambda}{V} = \frac{l}{4V}$$

(1) L. De Marchi, *Onde interne e propagazione di marea nell'Adriatico superiore.* Atti del R. Istituto Veneto di sc. lett. ed arti, vol. LXXV, parte 2<sup>a</sup>, 1915-16.

nella quale  $\lambda$  è la lunghezza media delle onde osservate,  $l$  la larghezza dell'alto bacino adriatico (100.000<sup>m</sup>),  $V$  la velocità dell'onda.

L'espressione di  $V$  toglie ai lavori teoretici di Stokes <sup>(1)</sup> e Lamb <sup>(1)</sup>, per cui

$$(2) \quad V = \sqrt{g \frac{\rho_i - \rho_s}{\frac{\rho_i}{h_i} + \frac{\rho_s}{h_s}}}$$

Sostituendo alle lettere i valori spettanti all'Alto Adriatico addì 17 agosto 1911,  $V$  assume un valore intorno a 0,6 m/s e per la (1) viene

$$(1^{bis}) \quad T = \frac{l}{4} \sqrt{\frac{1}{gh_i h_s}} \sqrt{\frac{\rho_i h_s + \rho_s h_i}{\rho_i - \rho_s}} = 42.500^s \text{ circa.}$$

Il buon accordo tra tale periodo e quello teorico di marea semi-diurna, è per il prof. De Marchi la rivelazione che « le osservate ondulazioni sono « vere onde di marea, che al passaggio sotto uno strato di acqua più dolce « accentuano notevolmente la loro ampiezza e rallentandosi sensibilmente, di- « minuiscono sensibilmente di lunghezza ». Egli perciò esclude che dette onde interne abbiano per causa le sesse trasversali, giacchè in tal caso il loro periodo  $T'$  calcolato con la formola di Schmidt <sup>(2)</sup>:

$$(3) \quad T' = 2l \sqrt{\frac{\frac{\rho_i}{h_i} + \frac{\rho_s}{h_s}}{ng(\rho_i - \rho_s)}}$$

verrebbe poco meno di tre volte tanto.

Prima di accettare questa conclusione, ho voluto esaminare di nuovo il problema.

Abbiamo due strati sovrapposti, i quali costituiscono due sistemi che hanno virtualmente due gradi di libertà e possono prendere due modi indipendenti di oscillazione intorno lo stato d'equilibrio. Cosa accade quando un'onda investe i due sistemi?

L'onda li influenza entrambi, ed, attraverso modificazioni del moto dei due, dovute al reciproco vincolo, appare un terzo sistema a lungo periodo.

I moti vincolati dei due primi sistemi, fluido superiore e fluido inferiore, possiamo scriverli sotto la forma:

$$(4) \quad x_s = x_s^* \sin \frac{2\pi}{T_s^*} t \quad x_i = x_i^* \sin \left( \frac{2\pi}{T_i^*} t + \beta \right)$$

dove  $\beta$  è una differenza di fase costante.

<sup>(1)</sup> H. Lamb, *Hydrodynamics*, terza ed. 1906, pag. 354, University press, Cambridge.

<sup>(2)</sup> W. Schmidt, *Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten*. Sitz. ber. der math. naturw. Cl. der k. Ak. der Wiss., 117 Bd., 1908, Wien.

Possiamo anche scriverli così:

$$(4^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_s = x_s^* \sin \left( \frac{2\pi}{T_s^*} + \frac{2\pi}{T_i^*} t + \frac{2\pi}{T_s^*} - \frac{2\pi}{T_i^*} t \right) \\ x_i = x_i^* \sin \left( \frac{2\pi}{T_s^*} + \frac{2\pi}{T_i^*} t - \frac{2\pi}{T_s^*} - \frac{2\pi}{T_i^*} t + \beta \right) \end{array} \right.$$

Le (4<sup>bis</sup>) rappresentano i moti dei due primi sistemi aventi un egual periodo:

$$\frac{2}{\frac{1}{T_s^*} + \frac{1}{T_i^*}}$$

ed una differenza di fase  $\left(\frac{2\pi}{T_s^*} - \frac{2\pi}{T_i^*}\right)t - \beta$  variabile col tempo.

Ne segue che i moti saranno ora concordanti ed ora dissonanti e l'intervallo di tempo, perchè i movimenti siano o non siano concordanti, verrà espresso dalla

$$(5) \quad \theta = \frac{T_s^* T_i^*}{T_s^* - T_i^*}.$$

Sorge quindi nei due fluidi una terza ondulazione a periodo  $\theta$  tanto più lenta, quanto minore è la differenza  $T_s^* - T_i^*$ . Il modo col quale abbiamo ricavato  $\theta$ , esclude si possa avere la propagazione lenta, senza una prima e seconda ondulazione rapida di cui essa è la conseguenza (1).

I moti in un piano verticale normale alla sezione rappresentata dalla figura, hanno analogie con quelli del sistema che si può realizzare dal complesso di due pendoli verticali sovrapposti. Se applichiamo ai due pendoli, inferiore e superiore, gli indici  $i$  ed  $s$  ed indichiamo con  $T$ ,  $l$  ed  $m$  il periodo avanti l'accoppiamento, la lunghezza e la massa, dopo l'accoppiamento si trova:

$$(6) \quad T_i^* = T_i \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_s l_s}{m_i l_i - l_s} \right) ; \quad T_s^* = T_s \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m_s l_i}{m_i l_i - l_s} \right)$$

nell'ipotesi che  $\frac{m_s}{m_i}$  sia molto piccolo (2). Pel fatto che i due periodi  $T_i^*$

(1) Se i due primi sistemi non fossero reciprocamente vincolati, il terzo sistema a lungo periodo sarebbe irrealo o stroboscopico.

(2) A. Garbasso, *Vorlesungen über Spektroskopie*, Leipzig, J. A. Barth, 1906, pag. 65; idem, *La struttura degli atomi materiali*. Atti della Soc. It. per il progresso delle scienze. Riunioni, 1908, pag. 123.

e  $T_s^*$  non vengono identici, si rivela in ogni pendolo il fenomeno dei battimenti, la cui durata corrisponde all'espressione (5) già detta, ossia al lento periodo del terzo sistema.

Anche nel caso idrodinamico, è molto piccolo il rapporto

$$\frac{m_s}{m_i} = \frac{8.1 \times 1.021}{21.9 \times 1.027} = 0.36$$

e possiamo adattare ad esso le formole (6) e (5). Basteranno calcoli approssimati, essendo la nostra una dimostrazione e non una misura assoluta.

I liquidi inferiore e superiore, se soli, avrebbero oscillato coi periodi:

$$(7) \quad T_i = \frac{l}{4\sqrt{gh_i}} = 1689^s \quad ; \quad T_s = \frac{l}{4\sqrt{gh_s}} = 2778^s .$$

Per le lunghezze  $l_i$  ed  $l_s$  metto le cifre che corrispondono ai periodi delle (7). Avremo:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_s}{l_i - l_s} = \frac{h_s}{h_i - h_s} = \frac{T_i^2}{T_s^2 - T_i^2} = 0.59 \\ \frac{l_i}{l_i - l_s} = \frac{h_i}{h_i - h_s} = \frac{T_s^2}{T_s^2 - T_i^2} = 1.59 \end{array} \right.$$

Le (6) forniscono

$$(6^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_i^* = 1689 \left( 1 + \frac{1}{2} 0.36 \times 0.59 \right) = 1865^s \\ T_s^* = 2778 \left( 1 - \frac{1}{2} 0.36 \times 1.59 \right) = 1950^s \end{array} \right.$$

Ed avremo per la (5)

$$\theta = 42.500^s .$$

Ripetuto il ragionamento per tutte le sezioni verticali, si arriva ad un'onda per cadun liquido, del periodo  $\theta$ , sfasate tra loro di  $180^\circ$ . Tale periodo è quello del terzo sistema lento, che troviamo corrispondere al periodo  $T$  della (1<sup>bis</sup>), quale ottenemmo sostituendo alle lettere le identiche cifre rispettive.

Il fenomeno che nei pendoli è di battimento, viene nel caso idrodinamico mascherato dal moto fluido discontinuo della superficie comune.

Le velocità corrispondenti alle onde dei due primi sistemi rapidi, a periodo di 1865 e 1950<sup>s</sup>, ottengo rispettivamente colla formola (1):

$$(9) \quad V_i = \frac{l}{4T_i^*} = 13,4 \quad ; \quad V_s = \frac{l}{4T_s^*} = 12,8 \text{ m/s} .$$

La velocità del sistema lento vale la differenza :

$$V_i - V_s = 0,6 \text{ m/s},$$

e corrisponde al valore  $V$  della formola (2) di Stokes e Lamb.

Figura un'onda del periodo di 42.500<sup>s</sup>, ma l'oscillazione è dovuta a concomitanti oscillazioni, di periodi molto più brevi, nei due fluidi sovrapposti. Abbiamo l'onda del sistema lento che viaggia colla velocità di 0,6 m/s, ma è una velocità differenza delle grandi velocità che hanno le onde dei due primi sistemi. Mentre l'A. ritiene trattarsi di un'onda di marea che avanza lentissima per l'Alto Adriatico, si tratta invece di un'onda differenziale, conseguenza di onde, le quali corrono con velocità venti volte circa maggiore [valori delle (9)].

Nella trasversale Venezia-Rovigno sono quattro onde del sistema lento, che a svolgersi impiegano  $4 \times 42.500^s$ . Durante questo intervallo, le onde dei primi sistemi, alle velocità rispettive di 12,8 e 13,4 m/s percorreranno 2176 e 2278 Km. La trasversale è solo lunga 100 Km, ne consegue che dette onde la percorreranno circa 20 volte in cifra tonda, dando luogo alle onde stazionarie di una sessa quadrinodale.

Tutta l'interpretazione del fenomeno delle onde interne va modificata e ritenuta sostanzialmente diversa da quella data nella citata Memoria.

Respinto il fenomeno della propagazione, ed accettato quello di sessa <sup>(1)</sup>, raddoppia la lunghezza d'onda, che da  $\lambda = \frac{l}{4}$  va a  $\lambda = \frac{2l}{4} = 50.000^m$ ; raddoppiano i periodi dei primi sistemi, cosicchè da 1907<sup>s</sup> [media delle (6<sup>bis</sup>)] = 32<sup>mp</sup> salgono a  $\frac{2l}{4V} = 64^{\text{mp}}$ ; e raddoppia il periodo  $\theta$  del terzo sistema lento, che da 42.500<sup>s</sup> va a 85.000<sup>s</sup>; questa volta in ottimo accordo colla formola teorica (3) che W. Schmidt propose per le sesse.

Ai tempi della figura, il primo stadio della propagazione è già superato e siamo a quello delle onde stazionarie, a nodi migratori.

Nello strato superiore, dei quattro nodi, uno è alle estremità della trasversale e gli altri tre sono indicati nella figura alle lettere  $N_s, N_s'', N_s'''$ . Sempre nello strato superiore, nell'area centrale che ha all'incirca la forma di una lemniscata ed è nella figura occupata dal liquido a densità uniforme poco inferiore ad 1.022, le due ali  $A'$  ed  $A''$  della lemniscata sono i ventri

(1) La causa della sessa è qui fuori discussione; probabilmente sta in relazione alle agitate condizioni meteoriche di quei giorni. Dalla mezzanotte del 16 al 17 soffìò vento fresco del primo quadrante, che si mantenne tutto il 17, assumendo nelle ore meridiane forza da 4 a 6 e determinando un mare così grosso da costringere la spedizione austriaca sulla Najade a sospendere le sue osservazioni lungo la trasversale Ravenna-Lussimpiccolo.

dell'onda lenta (periodo  $85.000^s$ ) inviluppo delle onde relativamente rapide (periodo  $2 \times 1950^s$ ) che andarono e tornarono lungo la superficie inferiore dello strato superiore.

Nello strato inferiore vediamo i nodi alle lettere  $N'_i N''_i N'''_i$ . Le zone  $B'$  e  $B''$  accennano ai ventri di un'onda lenta (periodo circa  $85.000^s$ ) inviluppo d'onde relativamente rapide (periodo  $2 \times 1865^s$ ) che andarono e tornarono lungo la superficie superiore dello strato inferiore.

I ventri  $A', A''$  dell'onda inviluppo superiore sono sfasati di  $180^\circ$ , cioè in opposizione di fase su quelli  $B', B''$  dell'onda inviluppo inferiore, ad un intervallo eguale a circa  $\theta/2 = 42.500^s$ .

Non credo che le ampiezze massime delle onde abbiano occupato lo spazio che i ventri accennano nella figura. Essi sono in parte il risultato della convettività. Anche oscillazioni piccole bastano a rimescolare le masse liquide. Il lettore può ricordare quel che capita quando si fa oscillare trasversalmente una corda polverosa tesa orizzontalmente. Si produce ai ventri una nube di polvere, che esagera l'ampiezza reale d'oscillazione della corda. Nella figura l'uniformità della densità indica il rimescolio ai ventri, mentre ai nodi sussiste il gradiente di densità proprio di quel tempo. Ai nodi le densità vanno rapidamente decrescendo verso l'alto. È 1.024 a  $10^m$  di profondità, 1.021<sub>4</sub> a  $5^m$ , 1.0207 alla superficie. Il valore della densità nei ventri (0.021<sub>8</sub>) è la media circa delle densità che sovrastano e sottostanno ai nodi.

Il risultato del mio studio è, in conclusione, contrario all'affermazione fatta dal Petterson <sup>(1)</sup>, e sostenuta dal prof. De Marchi, che le ondulazioni nello strato di salto siano onde progressive provenienti da maree di alto mare. La soluzione, quale in questa Nota ho proposto, appoggia invece le idee di John Murray <sup>(1)</sup> e di L. M. Wedderburn <sup>(1)</sup> che si tratti di sessa.

Sussistesse anche la risonanza tra il periodo lento del terzo sistema e l'onda diurna di marea, dovrebbe nondimeno, il fenomeno delle onde interne, considerarsi di sessa, giacchè furono le onde di sessa a generare le onde lente.

Pur non avendo ricorso alle formole più esatte del Chrystal, abbiamo trovato che il periodo della sessa fu di  $64^{mp}$  circa. Ora risulta da tre mie pubblicazioni (\*) che i periodi delle sesse non sono innumeri, ma si stringono attorno a cifre tra loro legate da relazioni, che sono un bell'esempio dell'armonia che regge i fenomeni cinematici del mare. Ad esempio Pola e Venezia mostrano un periodo di 30 a  $31^{mp}$  e Venezia anche quello di  $60^{mp}$ .

<sup>(1)</sup> O. Krümmel, *Handbuch der Ozeanographie*, vol. II, cap. IX, J. Engelhorn, Stuttgart, 1911.

(\*) E. Oddone, *Il problema delle ondulazioni secondarie di mare e delle sesse*, Boll. Soc. Sismol. It., vol. XII, 1908; idem, *Per lo studio delle cause del fenomeno delle sesse*, questi Rendiconti, vol. XIX, fasc. 3°, 1910; idem, *Alcune osservazioni idrodinamiche su di un piccolo modello di mare Adriatico*. Ann. dell'Uff. Centr. di Meteorol. e Geod., vol. XXXII. Parte I<sup>a</sup>. 1910.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfrbi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. I fenomeni di adattamento nelle rane esculente ibernanti.* Nota VII di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Avendo riferiti i fatti che si osservano durante l'adattamento delle rane esculente estive all'ambiente liquido esterno di varia concentrazione, riferisco i risultati delle esperienze eseguite sull'adattamento delle *rane esculente ibernanti*. A tale scopo nel mese di ottobre ho conservato per l'inverno circa 500 rane. Ma mentre metà di esse furono tenute entro una grande vasca di terra cotta nella quale era stata posta della terra mantenuta umida facendovi pervenire sempre un po' d'acqua; l'altra metà fu fatta svernare invece dentro una cassetta di legno sul fondo della quale era stato messo uno strato di borraccina spruzzata ogni tanto con un po' di acqua. Delle rane svernanti entro la vasca di terra cotta, verso il principio di febbraio ne erano morte più di un terzo; di quelle invece tenute nella cassetta con la borraccina erano sopravvissute un numero molto maggiore.

Le rane conservate tra la terra umida si presentavano secche; stimolate adeguatamente, mostravano il caratteristico riflesso tonico diffuso (aumentata sensibilità dolorifica); i loro sacchi linfatici erano vuoti di liquido. La vescica era invece ripiena di urina. Il sangue usciva con difficoltà dai vasi tagliati, era molto scuro e formava un abbondante coagulo. Da circa 50 di tali rane ibernanti si raccolse l'urina e il sangue che venne difibrinato con palline di vetro. Per avere poi un'idea dell'ambiente nel quale le rane avevano svernato, ho fatto una soluzione satura della terra posta nella vasca e ne ho determinato il  $\Delta$ .

Nella tabella 10<sup>a</sup> serie H, sono riportati i dati analitici riferentisi sia alle rane provenienti dalla terra umida, sia di quelle che avevano svernato tra la borraccina. Queste ultime non si mostravano secche, stimolate, non davano quasi mai luogo al riflesso tonico diffuso. Da esse si otteneva abbondante quantità di sangue, il quale era parimenti molto scuro e formava un ricco coagulo. Avevano l'urina in vescica, ma molto più scarsa che le rane tenute nella vasca colla terra. Nei loro sacchi linfatici non vi era liquido. Il cuore pulsava lentamente. Lo stomaco e l'intestino erano vuoti.

Confrontando i dati analitici relativi a queste rane con quelli concernenti le precedenti, si vede che il sangue delle prime ha una concentrazione molecolare superiore a quello delle seconde ( $\Delta = 0^{\circ},650$  e  $\Delta = 0^{\circ},570$ ),



così pure si osserva che l'orina è più concentrata. Risulta inoltre da tali analisi che *il sangue delle rane ibernanti ha sempre una concentrazione molecolare superiore a quello delle rane estive.*

Dopo avere osservati i fenomeni constatabili nelle rane svernanti tra la terra umida e tra la borraccina, posi una parte delle prime e una parte delle seconde in due recipienti separati nei quali era stata messa acqua distillata che veniva mutata tre o quattro volte al giorno. Dopo parecchi giorni di permanenza nell'acqua distillata si osservava che esse avevano perduto quel grado di iperestesia che le faceva porre in riflesso tonico quando fossero state stimulate adeguatamente. Scompariva quasi del tutto l'orina dalla vescica; il sangue esciva più abbondantemente dai vasi tagliati, era meno denso, scuro e facilmente coagulabile. I risultati delle analisi eseguite su tali rane sono riportati nella tabella 11\* serie I. Da essi si rileva come anche le rane ibernanti tenute in acqua distillata riportino la concentrazione molecolare del loro sangue a quello stesso livello di circa  $\Delta = 0^{\circ},450$  che è caratteristico delle rane esculente estive tenute del pari in acqua distillata.

Poichè dalle esperienze eseguite sulle rane estive si era visto che esse non riuscivano a mantenersi lungamente in vita in una soluzione Ringer contenente l'11 ‰ di cloruro di sodio; così ho voluto provare se le rane ibernanti fossero riuscite a resistere ad una soluzione Ringer più concentrata di quella che per le rane estive avevo chiamato *ultramassima* (soluzione Ringer contenente l'11 ‰ di NaCl). Ho scelto perciò una soluzione contenente il 12 ‰ di NaCl, più gli altri sali in proporzione, e vi ho messo 30 rane di quelle che avevano svernato in borraccina. Dopo cinque giorni di permanenza in tale soluzione ne erano morte sei. Le altre si presentavano torpide nei movimenti. Il colorito della loro pelle era grigiastro. Stimolate adeguatamente presentavano il fenomeno del riflesso tonico diffuso. Nei loro sacchi linfatici si trovava pochissima linfa, la quale aveva un colore giallo-ambra chiaro. Il sangue rosso-scuro esciva facilmente dai vasi tagliati e coagulava con rapidità. La vescica era per lo più vuota di urina; o se ve ne era, essa si presentava piuttosto densa e di colore giallo-verdastro. Lo stomaco e l'intestino erano pieni di acqua ed aria.

Le analisi praticate sul sangue, sulla linfa dei sacchi e sull'orina sono riportati nella tabella 12\* ser. L.

Da esse risulta che *le rane ibernanti riescono meglio di quelle estive a vivere in ambienti salini più concentrati ed a regolare con essi la pressione osmotica del loro sangue.*

Dopo quanto ho riferito relativamente alle esperienze eseguite su le rane ibernanti, ho voluto, a simiglianza di quanto avevo fatto per le rane estive, cercare di conoscere *in quanto tempo le rane esculente ibernanti sarebbero state capaci di adattarsi all'ambiente salino ipertonico.* Nelle esperienze eseguite in questo senso ho adoperato la soluzione Ringer della

stessa concentrazione di quella usata per le rane estive (soluzione contenente il 10 ‰ di NaCl più gli altri sali in proporzione).

La tabella 13<sup>a</sup> serie *M*, dimostra che dopo 12 ore l'adattamento non era ancora avvenuto. Ricordando ora come le rane estive poste nella stessa soluzione riescissero già entro le prime 8, o 9 h. non solo a raggiungere il livello di concentrazione molecolare iniziale dell'ambiente esterno, ma anche a sorpassarlo (cfr. Nota IV), si vede chiaramente come *nelle rane ibernanti i fenomeni di adattamento siano molto più lenti*. Inoltre si è rilevato in tali esperimenti che dopo le prime 12 h. di permanenza delle rane in soluzione ipertonica il colore della loro pelle resta quasi immutato e che nei sacchi linfatici non si trova quasi punta linfa.

Solo circa dopo 58 h. le rane cominciano a presentare cambiato il colore della pelle e si comincia ad accumulare linfa nell'interno dei loro sacchi linfatici. Dopo 132 h. la linfa era abbondante, densa, di colore giallo ambra, non coagulava spontaneamente con facilità. Il sangue era oscuro, denso, facilmente coagulabile. Lo stomaco talora era vuoto, tal'altra conteneva acqua, muco ed aria. L'intestino era per lo più ripieno di acqua e bile, così pure piena di bile, densa era la loro cloaca. La cistifellea era piena di bile. I polmoni si presentavano molto meno distesi che nelle rane estive, così pure molto meno accentuati erano i fenomeni dolorifici (riflesso tonico).

*Tutto ciò dimostra come nelle rane ibernanti tutti i fatti concomitanti al fenomeno dell'adattamento all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione osmotica dei loro liquidi interni avvengano molto più lentamente che nelle rane estive poste nelle medesime condizioni; e che esse sono inoltre più resistenti alle soluzioni ipertoniche (1).*

(1) Avrei voluto completare le ricerche sul tempo entro il quale ha luogo l'adattamento delle rane ibernanti alle soluzioni ipertoniche, ricercando, come avevo fatto per quelle estive, in quanto tempo esse avrebbero potuto ritornare al livello normale, qualora, dalla soluzione ipertonica, fossero state poste in acqua corrente di condotta, ma mi è venuto a mancare il materiale necessario a ciò.

## Rane esulente invernanti, tenute a svernare in terra umida e in borraccina.

Numero e data	A	R <sub>113</sub> <sup>o</sup> (in Ohm)	N. tot. gr. o/o	Residuo secco a 110° C gr. o/o	Ceneri gr. o/o	Sostanze organiche gr. o/o	Osservazioni
1. 19 febr. 1913							
[Liquido ambiente] * . . .	[0,170]	—	—	—	—	—	Rane portate in laboratorio nei primi di novembre. Tenute a svernare per vari mesi entro una vasca di terracotta nella quale si era messa terra umida. Allo scuro. Temperatura ambiente circa 10° C.
Sangue defibrinato . . . .	0,650	46	—	—	—	—	[* Per avere un'idea della solubilità del terreno, si mette la terra nella quale hanno svernato le rane entro un recipiente con acqua fino ad averne una soluzione satura. Si ottiene così una soluzione che ha un $A = 0^{\circ},170$ ].
Siero dello stesso . . . . .	0,610	32	—	5,055	0,435	4,620	
Linfà defibrinata . . . . .	—	—	—	—	—	—	
Urina . . . . .	0,625	45	0,700	—	—	—	
2.							
Liquido ambiente . . . . .	—	—	—	—	—	—	Rane portate in laboratorio nei primi di novembre. Tenute a svernare per vari mesi dentro una cassetta di legno con borraccina.
Sangue defibrinato . . . . .	0,570	46	—	—	—	—	
Siero dello stesso . . . . .	0,550	31	—	5,619	0,495	5,124	
Linfà defibrinata . . . . .	—	—	—	—	—	—	
Urina . . . . .	0,520	29	0,327	—	—	—	

Serie I

TABELLA 11<sup>a</sup>.

*Rane esculente ibernanti, tenute in acqua distillata, dopo aver svernato o in terra umida (1) o in borraccina (2).*

Numero e data	A	Raso <sup>o</sup> (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni
1.							
	Liquido ambiente . . . .	—	—	—	—	—	Rane che hanno svernato in terra umida, si mettono in acqua distillata e vi si lasciano 7 giorni, mutando l'acqua 3 volte al giorno.
	Sangue defibrinato . . . .	47	—	—	—	—	
	Siero dello stesso . . . .	34	—	3,448	0,389	3,059	
	Linfà defibrinata . . . .	—	—	—	—	—	
	Urina . . . . .	0,055	—	—	—	—	
2.							
	Liquido ambiente . . . .	—	—	—	—	—	Si mettono 24 rane che hanno svernato in borraccina, nell'acqua distillata e si fanno stare parecchi giorni cambiando l'acqua 3 volte al giorno.
	Sangue defibrinato . . . .	47	—	—	—	—	
	Siero dello stesso . . . .	33	0,588	3,266	0,253	3,013	
	Linfà defibrinata . . . .	—	—	—	—	—	
	Urina . . . . .	—	—	—	—	—	

Serie L

TABELLA 12<sup>a</sup>.

*Rane escul. ibernanti, tenute in soluzione Ringer molto ipertonica (NaCl gr. 12‰ + gli altri sali in proporzione).*

1.							
	Liquido ambiente . . . .	0,795	15,5	—	—	—	Si mettono 30 rane di quelle che hanno svernato in borraccina, in soluzione Ringer molto ipertonica (NaCl gr. 12‰ + gli altri sali in proporzione) e vi si lasciano stare 5 giorni. Allo scuro. Temperatura ambiente circa 10° C.
	Sangue defibrinato . . . .	0,830	26	—	—	—	
	Siero dello stesso . . . .	0,830	19	0,658	0,462	3,570	
	Linfà dei sacchi defibrin.	0,825	17	0,298	—	—	
	Urina . . . . .	0,815	non basta!	0,132	—	—	

Serie M

TABELLA 13<sup>a</sup>.

*Rane esulente ibernanti. Il tempo entro il quale ha luogo l'adattamento alla soluzione ipertonica.*

Numero e data		$\lambda$	$R_{25}^{\circ}$ (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni	
1. Dopo 12 ore	Liquido ambiente . . . .	0,655	—	—	—	—	—	Si mettono alcune rane che hanno svernato in borraccina, in soluzione Ringier ipertonica (NaCl gr. 10 ‰ + gli altri sali in proporzione) (dopo averle fatte stare tre giorni in acqua corrente di condotta), allo scopo di vedere in quanto tempo avviene l'adattamento. Allo scuro. Temperatura ambiente circa 10° C.	
	Sangue defibrinato . . . .	0,555	—	—	—	—	—		
	Siero dello stesso . . . .	—	—	—	2,819	0,304	2,515		—
	Linf. dei sacchi defibrin. Urina . . . . .	—	—	—	—	—	—		—
	Urina . . . . .	—	—	—	—	—	—		—
2. Dopo 34 ore	Liquido ambiente . . . .	0,690	—	—	—	—	—		
	Sangue defibrinato . . . .	0,675	—	—	—	—	—		
	Siero dello stesso . . . .	—	—	—	3,249	0,412	2,837		—
	Linf. defibrinata . . . . .	—	—	—	—	—	—		—
	Urina . . . . .	—	—	—	—	—	—		—
3. Dopo 132 ore	Liquido ambiente . . . .	0,640	—	—	—	—	—		
	Sangue defibrinato . . . .	0,690	—	—	—	—	—		
	Siero dello stesso . . . .	—	—	—	3,044	0,477	2,567		—
	Linf. defibrinata . . . . .	0,695	—	—	1,888	0,427	1,456		—
	Urina . . . . .	non basta!	—	—	0,302	—	—		—

Parassitologia. — *Esperienze di lotta contro le tignuole della vite*. Nota del dott. MARIO TOPI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Mi ero proposto di ripetere quest'anno le esperienze di trattamenti insetticidi contro le tignuole della vite su un numero considerevole di viti, svolgendo un piano razionale di lotta con lavori invernali e trattamenti primaverili ed estivi, e cercando di trarne conclusioni esatte ed accertate sulla convenienza economica della lotta, anche da parte di un solo e piccolo proprietario. Le condizioni dell'attuale momento mi hanno però costretto, specialmente per la deficienza di mano d'opera, a vari ripieghi e limitazioni nel piano dei lavori, per cui l'esperienza, salvo per il maggior numero delle viti trattate, si è su per giù mantenuta nei limiti delle precedenti, eseguite nella stessa zona.

Ad Alice Bel Colle, in una vigna in cui predomina la coltivazione del *moscato*, venne determinata una porzione, in complesso di uniforme vegetazione, comprendente mille viti circa; i trattamenti insetticidi e le operazioni che saranno appresso indicate vennero fatte su queste 1000 viti; le altre viti della vigna avrebbero servito da testimoni.

Verso la metà di settembre 1915, sul tronco, a varia altezza, o sulle canne dell'impalatura di ognuna di queste mille viti si applicarono una o più fasce di varia sorta: vennero adoperati principalmente stracci di stoffa e foglie e brattee di granturco; queste fasce avrebbero dovuto servir di rifugio alle larve di tignuole che, abbandonando il grappolo per incrisalidarsi, si sarebbero altrimenti ricoverate sotto le cortecce del tronco.

Nel gennaio 1916 vennero tolte e portate via dalla vigna tutte queste fasce; inoltre, a tutte le canne, che sarebbero rimaste anche per quest'anno nell'impalatura delle 1000 viti, venne tolto con le forbici l'ultimo internodio, nel quale si nascondono, pure per incrisalidarsi, le larve delle tignuole.

Era intenzione verificare in tutto questo materiale (fasce e pezzi di canna, egualmente asportati dalla vigna) quale fosse la frequenza delle crisalidi di tignuole e di determinare la percentuale di quelle sane, per farci un concetto approssimativo della quantità di farfalle di prima generazione che veniva così ad essere tolta dal vigneto. Ma purtroppo quel materiale non poté essere esaminato che in piccolissima parte; in questa, le crisalidi erano tutt'altro che frequenti.

Alle stesse 1000 viti vennero fatti in primavera due trattamenti insetticidi con l'arseniato di piombo ed in estate due trattamenti con l'estratto

di tabacco. Tutti i trattamenti sono stati applicati con la pompa da solfato di rame, munita di getto intermittente e cercando di colpire a preferenza i grappoli, senza tuttavia esigere dall'operaio incaricato una eccessiva accuratezza, appunto per porci nelle condizioni possibili di praticità.

Il primo trattamento venne fatto il 15 maggio, adoperando la soluzione del solo arseniato di piombo in acqua, alla dose di 800 grammi per ettolitro.

Il secondo trattamento venne effettuato il 30 maggio, adoperando un kg. di arseniato di piombo ed unendolo ad un ettolitro della ordinaria poltiglia bordolese. Per aumentare l'adesività si aggiunsero anche circa 100 grammi di caseina per ettolitro di poltiglia.

Il terzo trattamento, contro la generazione estiva, venne effettuato il 19 luglio, con l'estratto di tabacco alla dose del 2 %. Si aggiunsero anche due ettogrammi di sapone molle di potassa. Prima di questo trattamento il proprietario aveva proceduto ad una leggera sfogliatura, allo scopo di scoprire meglio i grappoli, in tutta la vigna. A quest'epoca, nella porzione di viti in esperimento, le uova delle tignuole erano rarissime; in un quarto d'ora di ricerche non ne abbiamo trovate che due. Nella parte più bassa della vigna, fuori della parte in esperimento, le uova erano un po' più frequenti: qualche piccolissima larva di *Conchylis* era già penetrata entro l'acino.

Il quarto ed ultimo trattamento venne effettuato il 31 luglio, con l'estratto di tabacco e sapone alle dosi sopra indicate. A quest'epoca si vedeva, tanto nella parte del vigneto sottoposta ai trattamenti quanto nella parte testimone, larve penetrate entro gli acini, ma in piccol numero. Scarse sempre le uova.

In questo stesso giorno, dietro invito del compianto prof. E. Voglino, facemmo anche, in un'altra vigna, un'esperimento con l'arseniato di piombo in polvere. Venne trattato un intero filare di viti col solfo ramato contenente il 5 % di arseniato di piombo; questo trattamento fu unico.

Come nelle esperienze precedenti, l'esame dei risultati venne fatto raccogliendo tutti gli acini più o meno erosi o guasti di una o più viti, sia sottoposte ai trattamenti insetticidi, sia rimaste senza alcun trattamento, e contando in questi acini le larve delle tignuole presenti, distinguendole a seconda della specie.

La scelta delle viti venne fatta in modo che la quantità di uva che portavano fosse approssimativamente eguale nelle viti trattate ed in quelle di controllo.

Si è avuto cura di scegliere le viti, trattate e non, nello stesso filare, perchè, come è noto, la quantità dei parassiti e la proporzione relativa delle due specie di tignuole varia molto a seconda che si fanno ricerche in basso od in alto di una vigna situata in zona collinare.

La raccolta degli acini venne fatta il 28 agosto.

Ecco i risultati delle ricerche compiute dove si effettuarono l'applicazione delle fasce, la spuntatura delle canne, due trattamenti primaverili con l'arseniato di piombo e due estivi con estratto di tabacco :

VITIGNO	VITI TRATTATE						VITI NON TRATTATE					
	N.° delle viti	N.° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve rinvenute			N.° delle viti	N.° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve rinvenute		
				<i>Eudemis</i>	<i>Conchylis</i>	TOTALE				<i>Eudemis</i>	<i>Conchylis</i>	TOTALE
Moscato . . .	2	46	170	15	2	17	2	46	356	49	10	59
Dolcetto . . .	1	27	33	4	3	7	1	26	213	41	7	48
TOTALI . . .	3	73	203	19	5	24	3	72	569	90	17	107

Facciamo seguire i risultati delle ricerche eseguite nel filare sottoposto ad un unico trattamento di arseniato di piombo in polvere il 31 luglio :

VITIGNO	VITE TRATTATA					VITE NON TRATTATA					
	N.° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve rinvenute			N.° dei grappoli	Acini guasti ed erosi	Larve rinvenute			
			<i>Eudemis</i>	<i>Conchylis</i>	TOTALE			<i>Eudemis</i>	<i>Conchylis</i>	indeterminate	TOTALE
Dolcetto . .	14	294	31	27	58	13	376	42	52	3	97

Risulta così da queste esperienze che, in un'annata di non forte infezione, come quella del 1916, con le operazioni invernali indicate, due trattamenti primaverili con l'arseniato di piombo e due estivi con l'estratto di tabacco — il tutto fatto senza particolari attenzioni, come potrebbe essere eseguito da qualunque operaio di campagna, cui fossero state date le opportune indicazioni — si è ottenuta una riduzione nel numero delle larve presenti alla fine di agosto variabile dal 71 all'85 %; cui corrisponde, alla stessa epoca, una riduzione nel numero degli acini guasti od erosi (anche ammessa la equivalenza del guasto, che invece è sempre di minor grado nelle viti trattate) variabile dal 52 all'84 %.

L'unico trattamento con l'arseniato di piombo in polvere avrebbe determinato la riduzione del 40 % del numero delle larve e del 21 % del numero degli acini guasti od erosi. Formuliamo però ogni dubbio sull'innocuità di tali trattamenti arsenicali fatti in estate, quando dovessero essere largamente applicati.

Gioveranno alcuni rilievi circa la entità e la variabilità dei danni che le tignole possono produrre da un anno all'altro.



Le ricerche, come è stato detto, sono state fatte nel comune di Alice Bel Colle (alto Monferrato), sui vitigni ivi principalmente coltivati (*dolcetto*, *moscato*, *barbera*, *lambrusca*), non però sempre nelle stesse vigne.

Nel 1915, annata di forte infezione, furono contate: 164 larve in 14 grappoli (=11,7 per grappolo); 159 larve in 11 grappoli (=14,4 per grappolo); 235 larve in 21 grappoli (=11,1 per grappolo); media: 12,1 per grappolo.

Nel 1916, annata di infezione scarsa o normale, si hanno: 59 larve in 46 grappoli (=1,2 per grappolo); 48 larve in 26 grappoli (=1,8 per grappolo); in località, di regola, molto infetta: 97 larve in 13 grappoli (=7,4 per grappolo); media: 2,4 per grappolo.

Il numero delle larve è in proporzione, naturalmente, del numero degli acini guasti ed erosi: alla fine di agosto, nella zona in esperimento a distanza di circa un mese dalla vendemmia, stanno circa nel rapporto di 1:4; cioè, per ogni larva presente, vi sono da 3 a 4 acini più o meno erosi o guasti. Approssimandosi alla vendemmia, per la maggiore voracità delle larve, per le condizioni climatiche più favorevoli allo sviluppo della *Botrytis cinerea* negli acini attaccati ed in quelli contigui, il numero degli acini guasti, a causa dello stesso numero di larve, deve aumentare considerevolmente.

Non essendo stati fatti i rilievi tutti gli anni nelle stesse vigne, nè alla stessa epoca, nè sugli stessi vitigni, non è possibile dire finora con sicurezza se la percentuale relativa delle due tignuole si mantenga, o se l'una specie si sviluppi a detrimento dell'altra, come si è creduto rilevare altrove<sup>(1)</sup>. Sembra tuttavia da escludere finora una decrescenza dell'invasione della *Conchylis* a profitto dell'*Eudemis*.

Eguualmente non mi è dato decidere se l'una o l'altra specie preferiscano l'uno o l'altro dei vitigni più estesamente coltivati nella località; le differenze che si notano sembrerebbero finora più riferibili alla situazione del vitigno stesso (località più o meno ventilata, più o meno umida ecc.) che ad una predilezione della tignuola per l'una varietà di vitigno piuttosto che per l'altra.

**Chimica fisiologica.** — *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia.* III: *Impiego della microtitolazione nella ricerca dell'arginasi*<sup>(2)</sup>. Nota del dott. A. CLEMENTI, presentata dal Corresp. D. LO MONACO.

L'utilità dell'impiego della microtitolazione al formolo nelle ricerche sull'*arginasi* si comprende facilmente, quando si considerino le grandi difficoltà, che presenta la preparazione di quantità, anche minime, di *argi-*

(<sup>1</sup>) Cfr. Chauvigné in *Revue de Viticulture*, 5 ottobre 1916.

(<sup>2</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.



La dimostrazione pratica di tale applicazione e dei risultati che se ne possono ottenere è data dalle cifre, che sono qui sotto riportate:

I. *Microtitolazione del solfato di arginina.* — Di una stessa soluzione di solfato di arginina contenente gr. 0,8 % di arginina furono prelevati due campioni: il primo di 5 cm<sup>3</sup> richieste per la macrotitolazione al formolo cm<sup>3</sup> 1,15 di soluzione Na OH  $\frac{1}{5}n$ : il secondo di 0,5 cm<sup>3</sup> richieste per la microtitolazione al formolo l'impiego di cm<sup>3</sup> 1,20 di soluzione Na OH  $\frac{1}{50}n$ .

II. *Ricerca dell'arginasi nel fegato di Mammifero mediante la microtitolazione:*

(Fegato di embrione umano preso asetticamente) in termostato a 37°, 12 ore con aggiunta di toluolo	Quantità adoperata di NaOH $\frac{1}{50}n$ in cm <sup>3</sup>	Azoto			
		Aminico in mgr.	Totale in mgr.		
Solfato di arginina . . . . cm <sup>3</sup> 0,5	1,0	0,28	1,12		
( <sup>1</sup> ) Solfato di arginina . . . cm <sup>3</sup> 0,5 Estratto acquoso di fegato . " 0,5 Acqua . . . . . " 2,0	2,1				
( <sup>2</sup> ) Estratto acquoso di fegato cm <sup>3</sup> 0,5 Acqua . . . . . cm <sup>3</sup> 2,5	0,1				
Come ornitina {	Calcolato . . . . .	2,0	Arginina {	in mgr.	in %.
	Trovato . . . . .	2,0			
			Idrolizzata	3,5	100

L'arginasi è presente nel fegato di embrione umano (<sup>3</sup>).

(<sup>1</sup>) Dopo 12 ore di permanenza in termostato il liquido di questo campione era perfettamente limpido e presentava numerosi e piccoli fiocchi negli strati più bassi.

(<sup>2</sup>) Dopo la permanenza in termostato il liquido di questo campione era uniformemente e lievemente torbido senza fiocchi.

(<sup>3</sup>) Clementi A., *Sulla diffusione nell'organismo e nel regno dei vertebrati e sulla importanza fisiologica dell'arginasi.* Archivio di Fisiologia, vol. XIII, 1915.

III. Ricerca dell'arginasi nel fegato di Rettile mediante la microtitolazione:

Fegato di Zamenensis Viridiflavus in termostato a 37°, 48 ore con aggiunta di toluolo	Quantità adoprata di NaOH $\frac{1}{50}$ n in cm <sup>3</sup>	Azoto		
		Aminico in mgr.	Totale in mgr.	
Solfato di arginina . . . . cm <sup>3</sup> 0,5	1,0	0,28	1,12	
( <sup>1</sup> ) Solfato di arginina . . . . cm <sup>3</sup> 0,5 Estratto acquoso di fegato . . . . " 0,5 Acqua . . . . . " 2,0	1,5			
( <sup>2</sup> ) Estratto acquoso di fegato cm <sup>3</sup> 0,5 Acqua . . . . . " 2,5	0,5			
Come ornitina { Calcolato . . . . .	2,0	Arginina { Aggiunta	3,5	100
{ Trovato . . . . .	1,0		{ Idrolizzata	0

Concordemente ai risultati di precedenti ricerche, l'arginasi risulta assente (<sup>3</sup>) nel fegato di *Zamenensis Viridiflavus*.

Le analisi surriferite dimostrano, che la *microtitolazione al formolo rende possibile eseguire la ricerca dell'arginasi nei tessuti e negli organi, impiegando per ogni analisi pochi milligrammi di arginina.*

(<sup>1</sup>) Il liquido di questo campione era perfettamente limpido e presentava negli strati più bassi numerosi e piccoli fiocchi, mentre il liquido dell'altro campione (<sup>2</sup>) era uniformemente torbido e non conteneva fiocchi o coaguli; questo fatto conferma, che gli aminoacidi, anche se presenti in quantità *assai piccole*, hanno il potere di agevolare e determinare fenomeni di fiocchificazione e di precipitazione negli estratti acquosi di organi, secondo quanto ebbi già a dimostrare (questi Rendiconti, Cl. sc. fis., vol. XXV, 1916) e Archivio di farmacologia sperimentale e scienze affini, vol. XXI); illustrerò diffusamente in un lavoro in corso di pubblicazione, *questa proprietà* fisico-chimica degli aminoacidi, così importante dal punto di vista biologico.

(<sup>3</sup>) Clementi (loc. cit.).

E. M.

## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76) Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. V. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-XXVI. (1892-1917); T. 1-49. Tom. 1<sup>o</sup>.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XXV. (1892-1916); T. 1-56.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-XII. Fasc. 2.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI-O-PRESENTATE DA SOCI

<i>Maggi</i> . Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni . . . . .	Pag. 189
<i>Viola</i> . Sui cristalli misti . . . . .	" 195
<i>Angeli</i> . Sopra l'ossidazione della fenilazocarbonammide . . . . .	" 207
<i>B. Grassi e Topi</i> . Esistono diverse razze di fillossera della vite? (*) . . . . .	" 213
<i>Fubini</i> . Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proiettile . . . . .	" 214
<i>Ciconetti</i> . Azimut assoluto dell'Osservatorio Vesuviano sull'orizzonte dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte in Napoli (pres. dal Socio <i>Pizzetti</i> ) . . . . .	" 219
<i>Cisotti</i> . Sulla capacità elettrostatica di un sottile anello conduttore (pres. dal Socio <i>Levi-Civita</i> ) . . . . .	" 225
<i>Lefschetz</i> . Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques (pres. dal Corresp. <i>Castelnuovo</i> ) . . . . .	" 228
<i>Andreoli</i> . Sovra certe equazioni di composizione di seconda specie (pres. dal Socio <i>Volterra</i> ) . . . . .	" 234
<i>Armellini</i> . Sopra le distanze planetarie dal Sole (pres. dal Corresp. <i>Marcolongo</i> ) (*) . . . . .	" 240
<i>Eredia</i> . Andamento annuale della pressione barometrica in Italia (pres. dal Socio <i>Millosevich</i> ) . . . . .	" "
<i>Oddone</i> . Le onde interne e le sesse dell'Adriatico superiore (pres. <i>Id.</i> ) . . . . .	" 246
<i>Brunacci</i> . Sull'adattamento degli anfihi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. I fenomeni di adattamento nelle rane esculente ibernanti (pres. dal Socio <i>Luciani</i> ) . . . . .	" 252
<i>Topi</i> . Esperienze di lotta contro le tignuole della vite (pres. dal Socio <i>Grassi</i> ) . . . . .	" 258
<i>Clementi</i> . Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia. III: Impiego della microtitolazione nella ricerca dell'arginasi (pres. dal Corresp. <i>Lo Monaco</i> ) . . . . .	" 261

(\*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXIV.  
1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 4 marzo 1917.*

Volume XXVI.° — Fascicolo 5.°

1.° SEMESTRE.



ROMA  
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEI DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e stranieri, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di stranieri presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli stranieri; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia, o in *suntò*, o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se stranieri. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 4 marzo 1917.*

A. RÒITI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Biologia. — *Esistono diverse razze di fillossera della vite?*  
Nota di B. GRASSI e M. TOPI (1).

Com'è noto, Börner ritiene che la fillossera della vite di Lorena rappresenti una razza biologica speciale, ch'egli propone di denominare var. *per-vastatrix*. Su questo argomento egli ha fatto diverse pubblicazioni. Nella prima di esse (1910) egli ha portato, a sostegno della sua tesi, le seguenti osservazioni fatte appunto nella Lorena:

1) Le alate preferiscono deporre le loro uova su viti di Gamay piuttosto che su viti di Riparia  $\times$  Rupestris 3309; soltanto sulle prime egli ha potuto trovare uova d'inverno.

2) Deformazioni a guisa di galle si sono prodotte da radicecole, in serra, su foglie di viti nostrali, quantunque il fogliame di queste viti si intrecciasse con quello di viti americane, le quali sono rimaste senza galle.

3) Gallecole schiuse da uova d'inverno o delle successive generazioni hanno prodotto galle su viti nostrali (Gamay ed altre V. vinifera) e su Labrusca, mentre non le producevano o le producevano imperfette su altre sorta di viti americane (Riparia  $\times$  Rupestris 3309 e 101. 14, Rupestris Ganzin, ecc.), che nel Sud-Europa sono abbondanti portatrici di galle, nonostante che si fossero fatte ripetute prove d'infezione.

Dal complesso di questi ed altri simili fatti che per brevità tralasciamo, Börner deduceva che la fillossera, vivendo da circa 40 anni in Lorena sulle

(1) Tutta la parte sperimentale delle presenti ricerche deve a M. Topi. Le ricerche sono state fatte per incarico del Ministero d'Agricoltura.

viti europee, deve aver acquistato caratteri biologici, cioè, gusti, attitudini, ecc., diversi da quelli della forma originaria, e riteneva come quasi compiuta una specializzazione della fillossera della Lorena in una razza propria della vite europea e della Labrusca.

Noi nel 1912 gli obbiettavamo che Boiteau già nel 1875, a Villegouge (Francia), aveva trovato molto frequente l'uovo d'inverno sulle viti europee, sulle quali si sviluppavano benissimo anche le galle, cosicchè la pretesa razza in ogni caso sarebbe già esistita fin dai primi tempi dell'introduzione della fillossera. Aggiungevamo che le esperienze del Börner, per esser fatte in gran parte in serra e con scarso numero di larve fondatrici, non davano affidamento di rappresentare esattamente il fenomeno quale avviene in natura (del resto lo stesso Franceschini in speciali apparecchi, dove le alate e le sessuali avevano libera scelta, aveva ottenuta la deposizione di uova d'inverno anche su tralci di viti nostrali).

Infine richiamavamo l'attenzione sulla circostanza che è molto variabile il comportamento delle viti sia europee sia americane di fronte a gallecole certamente della stessa razza (tipico è il caso della *Rupestris du Lot* restata per tanto tempo immune da galle in diversi paesi, dove oggigiorno può presentarne o molte o soltanto poche, o continuare a non presentarne affatto, differenze che si possono manifestare in impianti anche prossimi l'uno all'altro e in terreno simile, ancorchè artificialmente si intervenga per provocare l'infezione.

Prima che scoppiasse la guerra, il Börner ha portato nuovi argomenti a favore della sua tesi, pur non negando la possibilità che la sua nuova razza (la sua *pervastatrix*) fosse già esistita in America sulla Labrusca e che di là sia stata introdotta in Europa.

Egli coltivò in vasi colla stessa terra un certo numero di talee tagliate tutte dalla stessa pianta madre e, a tempo opportuno, una metà venne infettata a Villers l'Orme, presso Metz, con fillossere lorenese; l'altra metà a Pagny sulla Moselle (località poco distante), con fillossere provenienti dal sud della Francia. Questo esperimento fu fatto contemporaneamente per varie sorta di vitigni.

Il risultato, veramente notevole, è stato questo: regolare formazione di galle e di nodosità a Pagny e assoluta immunità a Villers l'Orme per i seguenti vitigni:

Riparia Gloire di Montpellier  
Riparia × Rupestris 107 Geisenheim  
Riparia × Rupestris 3306 Coudere  
Riparia × Rupestris 3309 Coudere  
Cordifolia × Rupestris 19 Geisenheim  
Riparia × Chasselas 24 Laq.

I tentativi fatti dall'A. per infettare i nominati vitigni colla fillossera lorenese riuscirono sempre vani, per quanto egli variasse le condizioni rispetto alla stagione, al terreno, all'ambiente (serra o vigna), ecc.

Questi fatti inaspettati ci hanno invogliato a fare ricerche nella stessa direzione, sperando che potesse venirne luce sul diverso progredire delle infezioni fillosseriche in Italia, ora celere o rapidissimo anche in zone nordiche, ora lento tanto al nord quanto in zone abbastanza meridionali.

Eravamo a conoscenza che nei vivai di viti americane posti sul Lago Maggiore il comportamento della fillossera gallecola non era lo stesso di quello rilevato nei vivai della Toscana o della Sicilia (Franceschini, Petri, Grassi) (1). Intraprendemmo perciò degli esperimenti con la fillossera gallecola sviluppatasi sulle foglie di Clinton in vigne dei dintorni di Arizzano, presso Intra.

Gli esperimenti furono iniziati ad Alice Bel Colle e proseguiti a Nizza Monferrato — dentro una serra a vetri, in località non vitata —, zone abbandonate nei riguardi della lotta fillosserica e già devastate dalla infezione stessa. Le foglie con galle, che furono portate esclusivamente attraverso zone infette e in cui non si fa alcun lavoro antifillosserico, sono state sempre in ogni occasione racchiuse entro scatole di latta, ermeticamente ed appositamente saldate, chiuse a lor volta in altri involucri, dei quali uno esterno imbevuto di formalina.

Gli esperimenti si iniziarono alla fine di agosto del 1914 con due tentativi d'infezione. Le viti adoperate furono barbatelle nostrali, di Riparia × Rupestris 3306 e 101.14, di Riparia tomentosa, di Mourvèdre × Rupestris 1202 e di Bourrisquou × Rupestris 93.5. Per provocare l'infezione si legavano ai tralci e si interravano al piede delle viti, foglie di Clinton con galle. Ambedue i tentativi rimasero infruttuosi, cioè nè si produssero galle nè si ebbe infezione alle radici. Rimase tuttavia il dubbio che l'infezione potesse essere non avvenuta sia per la scarsità del materiale adoperato (foglie con galle non abbondanti, frequenza di galle vuote, abbandonate, rarità di uova e di neonate), sia perchè le viti non si fossero trovate in adatte condizioni di vegetazione, anche per la stagione tardiva.

La prova fu ripresa nel 1915 in migliori condizioni. Non si poterono però iniziare prima dell'agosto, perchè ad Arizzano anteriormente a quest'epoca non è possibile trovare galle in abbondanza. Là, contrariamente a quanto avviene altrove, anche in estate avanzata sono rarissime le piante veramente piene di galle: da queste l'infezione passa alle viti più o meno

(1) Ad Arizzano le galle, per quanto noi sappiamo, sono state osservate soltanto su Clinton, Violla e Rupestris du Lot. Börner non accenna specificatamente a questi vitigni, pure riferendo in genere gli ibridi di Riparia × Labrusca e la Vitis Rupestris tra quei vitigni che sono soggetti alle galle ed alle nodosità-tuberosità, per parte della fillossera lorenese.

prossime, adatte a portar galle (non, per esempio, per quanto noi abbiamo veduto, sull'Isabella, molto diffusa in quei contorni), ma non vi prende grande diffusione. Da un anno all'altro non sono le stesse piante che si caricano di galle. È quindi a supporre o che le uova d'inverno siano molto rare, o che soltanto pochissime gallecole, schiuse da uova d'inverno, arrivino a fissarsi ed a produrre galle fertili, e ciò soltanto per particolari condizioni della pianta ospite.

Abbiamo colà visto ripetuto il fatto, già osservato in Toscana e in Sicilia, di trovare tutte le neonate fissate su foglioline all'apice del tralcio, morte; sono frequenti gallecole in stadi più avanzati, morte senza deporre uova; frequentissime le galle imperfette e quelle abbandonate.

Colle galle raccolte in agosto cercammo di provocare, al modo solito, l'infezione di barbatelle in vaso di Riparia Gloire, di Riparia tomentosa, di Riparia  $\times$  Rupestris 3309, 3306 e 101.14, di Berlandieri  $\times$  Rupestris 301 A e di barbatelle di viti nostrali e di Isabella.

Verso la stessa epoca, volemmo fare anche una prova di confronto con galle raccolte nel Vivaio governativo di Ventimiglia, ripetendo su per giù l'esperimento di Börner di Pagny e di Villers l'Orme, tentando di infettare, cioè, con gallecole di diversa provenienza le stesse sorta di viti nelle medesime condizioni di ambiente. Anche questo esperimento venne fatto in condizioni di scrupolosa e assoluta sicurezza contro ogni diffusione, distruggendo alla fine dell'esperimento le viti stesse. Si sottoposero alle prove d'infezione barbatelle di Riparia Gloire, di Riparia  $\times$  Rupestris 3309, 3306 e 101.14, di Aramon  $\times$  Rupestris G. n. 1, di Mourvèdre  $\times$  Rupestris 1202. Le galle infettanti furono raccolte principalmente su piante di 3309, ma anche su altri vitigni. S'intende che si usò ogni cautela per togliere di mezzo qualunque confusione tra gli esperimenti.

Le barbatelle, specialmente quelle dell'esperimento con la fillossera di Arizzano, si trovavano in condizioni ottime per l'attecchimento dell'infezione; tralci in via di sviluppo, abbondante capillizio radicale. Numerose erano le gallecole fra le neonate che uscivano dalle galle; si poteva osservare lungo i tralci il peregrinare delle neonate.

Su nessuna delle viti, che si è cercato di infettare col materiale di Arizzano, si è notata per tutto il mese di agosto la comparsa di alcuna galla, tanto che verso il 7 di settembre fu rinnovato il materiale infettivo, ma in poca quantità, non avendo potuto procurarcene di più.

Il 16 di settembre si notarono due piccole galle su due foglioline di Riparia  $\times$  Rupestris 101.14. Avevano circa due mm. di diametro e si trovavano su foglioline larghe appena due cm.

Di queste due piccole galle, una rimase piccolissima; l'altra, marginale, si sviluppò un po' di più; più tardi scomparsa ogni speranza che l'infezione gallecola si sviluppasse, le galle furono aperte e trovate vuote: le

gallecole, ben per tempo, dovevano averle abbandonate, scomparendo. Tutte le altre viti restarono immuni di galle.

Invece, su le barbatelle infettate con le galle raccolte a Ventimiglia, la infezione gallecola si sviluppò regolarmente sul 3309 e 3306; non si sviluppò sulla Riparia Gloire, nè sul 101.14 e nemmeno sull'Aramon X Rupestris e Mourvèdre X Rupestris; ma quest'ultimi due vitigni non si trovavano in adatte condizioni di vegetazione.

In ottobre facemmo un esame superficiale dell'apparato radicale delle barbatelle infettate con le galle di Arizzano; questo esame dette un risultato completamente negativo. Ci riservammo di fare una nuova ricerca più accurata nell'estate 1916, nella fiducia che una leggera infezione sarebbe allora diventata più evidente. Ma anche a questa esplorazione, tutte le viti, comprese le nostrali, risultarono immuni. Il loro apparato radicale era abbondantemente sviluppato.

Lo stesso esame superficiale nell'ottobre fu anche fatto alle barbatelle infettate con le galle di Ventimiglia. (Questo esame era fatto estraendo dal vaso il pane di terra racchiudente le radici ed esaminando le radici che si erano sviluppate alla superficie, fra questa e la parete del vaso). Risultarono infette il 3306 ed il 101.14; del 3309 non comparivano radici; della Riparia Gloire comparivano, ma erano immuni; dell'Aramon X Rupestris e del Mourvèdre X Rupestris non comparivano radici. Tutte queste viti furono subito distrutte.

Le prove d'infezione con le galle raccolte presso Arizzano sono continuate nel 1916. Il 18 agosto abbiamo ritentata col metodo e con le precauzioni già indicate, l'infezione di barbatelle in vaso di Riparia Gloire, Riparia X Rupestris 3309, 3306 e 101.14 e di barbatelle di viti nostrali; le une e le altre in ottime condizioni di vegetazione. Il materiale infettante era discretamente abbondante. Abbiamo anche, in una vigna in piena distruzione fillosserica, avvolte ai tralci di una vite di Clinton (?) e di una vite di Pinot, contigua alla prima, alcune foglie piene da galle, sempre raccolte ad Arizzano.

Con galle raccolte a Ventimiglia su piante di 3309 (s'intende sempre colle debite cautele) infettammo una sola barbatella in vaso di Riparia Gloire. Contrariamente all'esperienza dell'anno precedente, anche sulla Riparia Gloire si produssero galle ben formate, sebbene piccole ed in piccolo numero; si notava inoltre una grande quantità di punture necrosate, senza formazione di galle. Anche queste viti al termine dell'esperimento vennero distrutte.

L'infezione con le galle di Arizzano ha dato i seguenti risultati:

Immunità assoluta delle foglie di Riparia Gloire, di Riparia X Rupestris 3309 e 3306 e delle viti nostrali in vaso. Su Riparia X Rupestris

101.14, come l'anno precedente, poche piccolissime galle, tosto abbandonate appena appena iniziate e che quindi non hanno proceduto nel loro sviluppo.

Sulle foglie del Clinton (?) e del Pinot (vite francese), si sono pure prodotte poche piccole galle, anche queste presto abbandonate; è tuttavia da tener nota che le viti erano in piena vigna (v. sopra) e che la stagione era tardiva (fine agosto-settembre).

L'esame dell'apparato radicale delle viti in vaso, fatto il 24 settembre, ha mostrato che sono rimaste immuni tutte le viti americane (Riparia Gloire, 3309, 3306, 101.14); si sono invece infettate le viti nostrali. Tutte le viti hanno un bellissimo apparato radicale, con abbondantissime radici capillari.

Al momento attuale abbiamo riunite nello stesso vaso una barbatella di vite nostrale infettatasi, come si è detto, ed una americana immune, per seguire gli ulteriori progressi dell'infezione (\*).

Al punto in cui siamo di queste ricerche, ci pare si possa pervenire alle seguenti conclusioni:

Colle galle fillosseriche raccolte da viti di Clinton non è stato possibile, per tre anni consecutivi, infettare nè alle foglie nè alle radici, diversi vitigni americani, che in generale sono atti a portar galle e nodosità, le quali infatti vi si sviluppano, se si adoperano galle raccolte su altri vitigni, in altra regione. Solo, fra quelli sperimentati, la Riparia × Rupestris 101.14 sembra avere una maggiore facilità a produrre galle, pur non avendone portata alcuna fertile. Le galle si producono con maggiore facilità su vitigni identici o simili (Clinton (?) nella vigna). Il comportamento delle viti nostrali di fronte alla stessa infezione non è, per riguardo alla produzione delle galle, identico per ogni varietà di vitigni (viti nostrali piemontesi in vaso e Pinot nella vigna).

Se volessimo seguire il Börner nel suo ordine di idee, potremmo ritenere che anche ad Arizzano esista una razza di fillossera che somiglia molto a quella della Lorena, colla sola differenza che la fillossera di Arizzano ha prodotto galle sterili sulle foglie della Riparia × Rupestris 101.14, della quale non ha però infettate le radici, mentre questo stesso vitigno infettato colla fillossera di Lorena, non ebbe a mostrare traccia alcuna di galle, ma presentò infezione regolare alle radici.

(\*) Dovendomi recare ad Arizzano per la raccolta di galle necessarie per le nostre esperienze, ho potuto molto facilmente constatare che anche là, nelle vigne infette, la fuoriuscita dal terreno delle neonate radicolose si effettua, come ovunque dove ne ho fatta ricerca. La mia indagine ad Arizzano è stata fatta verso la metà di agosto, dopo una pioggia che veniva ad interrompere un lungo periodo siccitoso. Il terreno della vigna in cui facevo le osservazioni, era ghiaioso e coperto di erba. Ciò nonostante, la fuoriuscita vi era abbondantissima, delle più numerose che io abbia vedute. Ormai tale fenomeno deve essere ritenuto generale per tutte le vigne fillosserate, salvo forse in terreni specialissimi (TORI).

Senonchè ci sembra più giusto di formulare un'ipotesi, la quale trova già negli esperimenti esposti un principio di conferma.

Non potrebbe darsi che per la continuazione del ciclo fino all'uovo d'inverno, le alate dovessero, almeno di regola, ovificare sulle foglie, o sulla corteccia di quello stesso vitigno, o di vitigni più o meno affini, sulle cui radici si sono sviluppate? e che il passaggio delle gallecole da vitigno a vitigno e conseguentemente la formazione delle galle fossero regolati da condizioni finora imprevedute (varietà, biotipi di vitigno predeterminato)?

Gli esperimenti di cui abbiamo riferito, esaminati con questo criterio convaliderebbero l'ipotesi; un'altra serie di fatti e di osservazioni, che passiamo ad esporre le darebbero già un ulteriore appoggio.

\* \* \*

Sulle radici delle viti europee infette di fillossera si sviluppa, in maggiore o minore abbondanza a seconda di diverse condizioni, specialmente climatiche, la forma alata, la quale, sciamando, dovrebbe contribuire alla diffusione dell'insetto. Invece, come è noto, sulle viti nostrali la forma gallecola non compare, in generale. Quale è dunque il destino delle alate, che, specialmente nei vigneti infetti dell'alta Italia, si producono in grande abbondanza? È la gallecola, schiusa dall'uovo d'inverno, che non trovando viti adatte alla produzione delle galle, scompare e muore? Sono le alate che, non guidate dall'istinto, si disperdono senza deporre uova o le depongono a caso ed ovunque, in modo che i sessuati trovino difficoltà ad incontrarsi?

Per cercare di risolvere tali quesiti intraprendemmo nel 1915 alcune ricerche ed esperienze, le quali hanno avuto un esito, che non prevedevamo.

Abbiamo cominciato col coprire con stoffa due viti, in una vigna già devastata dalla fillossera, in modo da costituire come una gabbia a maglie fittissime. Le due viti scelte furono una vite nostrale ed una Clinton (?), che casualmente trovavasi nella vigna.

Entro queste gabbie portammo due volte al giorno, dal 10 agosto al 24 settembre, il maggior numero possibile di ninfe e di alate, che un operaio, all'uopo addestrato, riusciva a raccogliere. Le ninfe erano ricercate sulle radici di viti infette ed introdotte nella gabbia in scatole di vetro, senza toglierle dalla radice su cui si trovavano. Le alate erano raccolte nelle tele di ragno, frequentissime nei vigneti del Monferrato, e distaccate dalle tele stesse nel miglior modo, sì che potessero liberamente muoversi e volare; anche queste erano mantenute entro scatole di vetro, che venivano aperte quando le ponevamo entro la gabbia.

Con questa ricerca delle alate, confermammo quanto già avevamo osservato, che, cioè, le alate sciamano più facilmente nel pomeriggio: infatti tele di ragno, in cui al mattino non era impigliata alcuna alata, ne contenevano un buon numero nel pomeriggio. Abbiamo trovato delle tele di ragno con un centinaio circa di alate, vive o morte.

Abbiamo così introdotto nelle nostre gabbie, diverse centinaia di ninfe, non tutte mature e quindi capaci di trasformarsi, e di alate, non tutte vitali ed in istato di deporre uova.

Al tempo stesso ricercavamo alate, uova di sessuati, sessuati, ed uova d'inverno sotto le foglie e sui ceppi di vigne fillosserate; l'esito fu sempre negativo sulle viti nostrali. Le alate si vedevano non difficilmente sul terreno.

Le alate, in captività, depongono facilmente le uova ed è facile anche ottenere sessuati vivi e mobili.

Verso la fine di agosto facemmo ricerche di alate e sessuati sotto le foglie delle viti coperte, con esito negativo; non guardammo che poche cortecce del ceppo — con lo stesso esito —, nel dubbio di distruggere le uova d'inverno eventualmente presenti e che ci sarebbero state rilevate con maggior certezza la primavera successiva con lo sviluppo delle galle almeno sul Clinton (?).

Nell'inverno successivo la vite di Clinton non venne nemmeno potata. Nelle vigne fillosserate facemmo ricerca di uova d'inverno sulle viti nostrali, sempre con esito negativo.

Alla primavera 1916 ci attendevamo di veder comparir le galle, se non sulla vite nostrale, almeno sulla Clinton (?) coperta. Nessuna galla si è invece formata e neanche abbiamo potuto notare punture che, con tutta sicurezza, potessimo attribuire a gallecole; non si può tuttavia nemmeno escluderlo, giacchè è ben difficile distinguere, specialmente su viti nostrali, semplici punture di gallecole da simili lesioni prodotte da altri insetti (*Drepanothrips*).

Come spiegare la mancata infezione gallecola? Si potrebbe sospettare che neanche quella Clinton (?), d'incerta origine, fosse atta a portar galle e che quindi, tanto su questa che sulla vite nostrale, le gallecole, schiuse da eventuali uova d'inverno, siano andate perdute.

Oppure ci soccorre un'altra ipotesi, che, come abbiamo detto, viene a lumeggiare le ricerche riferite nella prima parte di questa Nota: che, cioè, per produrre l'infezione gallecola, sia necessario non solo che il vitigno sia suscettibile di produrre galle, ma anche che l'infezione *passi* prima sulle radici del vitigno da infettare, o che si adoperino galle provenienti dallo stesso vitigno, o da determinati vitigni.

Un fatto, rilevabile nella stessa vigna, ci conforta in questa opinione: in quella vigna, semidistrutta dalla fillossera, sono coltivate qua e là viti americane selvaggie di diversa sorta; vi sono anche una ventina circa di piante di produttori diretti, ormai adulte. Eppure l'infezione gallecola non si è ancora manifestata! Se le viti americane o ibridi avessero una sorta di attrazione per le alate, non avrebbe dovuto mancare di prodursi.

Nello scorso settembre, esaminando quella Clinton (?), di cui abbiamo parlato, abbiamo notato sotto le foglie tre alate. Ciò non era mai avvenuto in osservazioni precedenti. È da notarsi in proposito che la Clinton (?) era



molto probabilmente immune alle radici fino all'anno scorso ed è quest'anno infetta; così potrebbe spiegarsi la presenza delle alate.

Da un punto di vista più generale, è noto che l'infezione gallecola è sempre comparsa in un paese od in una regione posteriormente — ed anche di diversi anni — all'infezione radicecola. Così in Sicilia, in Piemonte, in Puglia, in Toscana. Non si può ciò spiegare con il necessario passaggio attraverso alle radici delle viti americane? Se le viti americane esercitassero un'attrazione per le alate di qualunque provenienza, non si potrebbe spiegare l'assenza di galle in vigneti di piante madri di viti americane contigui ad infezioni fillosseriche, come accade per tanti vivai delle Puglie.

All'epoca in cui avevamo il nostro Osservatorio a Fauglia, comparve un'infezione gallecola in località non molto distante. Evidentemente doveva trattarsi di barbatelle già infette provenienti dalla Francia, sulle quali presto si produsse quindi l'infezione gallecola.

Più recentemente abbiamo avuto occasione di visitare a Villafranca d'Asti, in zona immune da fillossera, un vigneto di piante madri di viti americane infetto di galle. È quasi sicuramente provato che si tratta di un impianto fatto con barbatelle infette.

Questi fatti, che citiamo a solo titolo di esemplificazione, potrebbero facilmente moltiplicarsi. Ma solo dopo altre esperienze, già in corso, si potrà pervenire a conclusioni definitive e trovare la spiegazione di altri risultati di nostre esperienze, che sembrerebbero in contraddizione con i fatti che abbiamo citato.

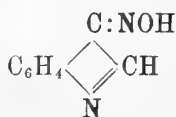
**Chimica.** — *Sopra il nero di nitrosopirrolo.* Nota del Socio A. ANGELI e GUIDO CUSMANO.

In due lavori pubblicati recentemente in questi Rendiconti <sup>(1)</sup> venne dimostrato che il pirrolo, ossidato nelle opportune condizioni, fornisce con grande facilità un prodotto intensamente colorato, che chiamammo *nero di pirrolo*, i caratteri ed il comportamento del quale presentano una sorprendente analogia con alcune melanine naturali. Ma nel corso delle nostre ricerche abbiamo avuto occasione di osservare che il pirrolo stesso, anche per azione di altri reattivi può dare origine a prodotti molto colorati, che però nella loro composizione differiscono naturalmente dal precedente; ma siccome la differenza di composizione non esclude eventuali analogie di struttura, così noi abbiamo giudicato opportuno di prendere in esame anche queste sostanze, giacchè dal loro studio si potranno avere nuovi dati i quali

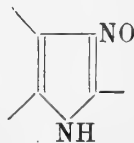
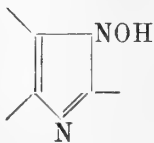
<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti (1915), vol. XXIV, sem. 2°, pag. 3; (1916), vol. XXV, sem. 1°, pag. 761.

contribuiranno a loro volta a stabilire la costituzione del nero di pirrolo stesso.

Noi abbiamo iniziate le nostre esperienze dai prodotti che il pirrolo fornisce per azione dell'acido nitroso. Le prime esperienze, eseguite da coloro che ci hanno preceduti in questo campo, non hanno portato a nessuna conclusione; così nel trattato del Beilstein si trova solamente il dato che il pirrolo non fornisce una nitrosammina. Solo molto più tardi è stato dimostrato <sup>(1)</sup> che gli indoli per azione dell'acido nitroso, ovvero dei nitriti alcoolici, in presenza di etilato sodico, forniscono composti che si devono considerare come sali di *isonitrosoderivati*:



Successivamente si è potuto stabilire che anche i derivati del pirrolo ed il pirrolo stesso danno prodotti perfettamente analoghi ed ai quali perciò si deve attribuire la stessa costituzione. Nel caso degli indoli, dai sali così ottenuti per azione di acidi deboli (acetico, carbonico, borico) facilmente si possono avere i composti allo stato libero; alcuni sono stabilissimi, come quello p. es. che deriva dal solito fenilindolo; altri invece sono più o meno alterabili; lo stesso vale per i corrispondenti derivati ottenuti dai pirroli, dei quali quelli contenenti gruppi fenilici sono assai stabili, mentre invece quelli che derivano da pirroli sostituiti con radicali alifatici si alterano con grande facilità; alcuni anzi quando si cerca di metterli in libertà dai loro sali, si colorano fugacemente in *verde* e poi tosto si decompongono in modo profondo. La comparsa di questa colorazione verde, che in certe condizioni si può osservare anche nel caso del derivato dell' $\alpha$ -metilindolo, accenna che senza dubbio in una prima fase l'ossima passa per la forma del vero nitrosoderivato:



Nel caso del sale sodico dell'isonitrosopirrolo, quando si cerca di avere il prodotto allo stato libero, la trasformazione successiva si compie in modo così rapido che non è nemmeno dato di percepire la colorazione verde che si osserva in altri casi: infatti, quando si acidifica la soluzione acquosa del sale sodico dell'isonitrosopirrolo, il liquido giallo aranciato pone al bruno e

<sup>(1)</sup> Angeli, Memorie Lincei (1911), pag. 437.

poi si separa una polvere finissima, intensamente colorato in nero e che per brevità, anche per differenziarla dal prodotto descritto lo scorso anno, chiameremo *nero di nitrosopirrolo*.

Per ottenere questo nuovo prodotto, si parte da una soluzione acquosa del sale sodico del nitrosopirrolo, che si prepara nel miglior modo seguendo il metodo a suo tempo descritto, facendo reagire il nitrito di etile sopra una soluzione alcoolica di pirrolo, raffreddata con ghiaccio, in presenza di etilato sodico. Il pirrolo da noi adoperato venne purificato per mezzo del sale potassico.

Nel domani, quando il liquido si è quasi tutto rappreso in una massa aranciata, cristallina, costituita dal sale sodico del nitrosopirrolo, si aggiunge un po' di acqua in modo da avere soluzione limpida, che poi si estrae ripetutamente con etere allo scopo di esportare il pirrolo ed il nitritoalcoolico che eventualmente non hanno ancora reagito. Il liquido acquoso viene diluito con altra acqua e quindi sottoposto ad una corrente di anidride carbonica; il colore della soluzione, dapprima giallo aranciato, passa al bruno e poi si separa una polvere nera, finissima che viene raccolta su filtro e lavata molte volte con acqua (1).

Dal liquido acquoso da cui si è separata la polvere nera, per aggiunta di acido acetico, si ottiene un'altra quantità di prodotto. Anche l'etere che ha servito per le estrazioni, per aggiunta di poco acido solforico diluito, dopo qualche tempo fornisce ancora una polvere nera, che sembra però diversa dalle precedenti e che ancora non abbiamo esaminata.

Il prodotto così ottenuto è pressochè insolubile in tutti i solventi; si scioglie invece facilmente negli alcali e dalle soluzioni viene riprecipitato per azione degli acidi. Per l'analisi venne impiegato il prodotto ottenuto direttamente per azione dell'anidride carbonica e lavato a lungo con acqua. Una seconda combustione venne eseguita sopra lo stesso prodotto bollito con alcool; in entrambi i casi la sostanza fu seccata a 100° fino a costanza di peso.

Il nero di nitrosopirrolo, a temperature elevate deflagra, ma senza fondere e nello stesso tempo si sviluppano vapori rossi; per questa ragione la combustione si deve eseguire con la maggior cautela.

Sostanza lavata con acqua e seccata a 100°:

gr. 0,1787 diedero gr. 0,3319 di CO<sub>2</sub> e gr. 0,0582 di H<sub>2</sub>O.

In 100 parti;

C	50,65
H	3,61

(1) La stessa polvere nera si forma anche facendo reagire sul pirrolo il nitrito etilico ovvero l'acido nitroso.

Sostanza esaurita con alcool bollente e seccata a 100°:

gr. 0,1422 diedero gr. 0,2620 di CO<sub>2</sub> e gr. 0,0437 di H<sub>2</sub>O.

In 100 parti:

C	50,24
H	3,41

Data la proprietà della sostanza da decomorsi per azione del calore con sviluppo dei vapori rossi, lasciando indietro un residuo nero che abbrucia con grande difficoltà, prima che col metodo di Dumas abbiamo tentata una determinazione di azoto col metodo di Kjeldahl.

Gr. 0,1116 diedero gr. 0,03257 di azoto.

In 100 parti:

N	29,18
---	-------

La composizione del prodotto si approssima per ciò a quella della formula più semplice:



la quale richiede:

C	50,53
H	3,15
N	29,52

e poco differisce da quella del nitrosopirrolo di partenza:

C	50,00
H	4,16
N	29,16

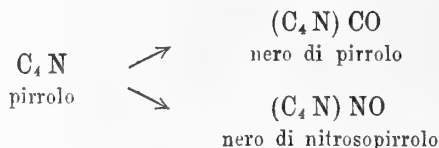
La sostanza, come si è detto, si scioglie facilmente negli alcali; tali soluzioni vengono immediatamente ossidate per azione del permanganato; per azione dei riducenti si scolorano e poi all'aria imbruniscono nuovamente.

Le poche esperienze preliminari finora eseguite naturalmente sono ben lungi dal permetterci di fissare la costituzione del prodotto; senza dubbio si tratta di un polimero della forma più semplice prima riferita, il quale potrà anche contenere qualche atomo in più od in meno; un'idea della grandezza molecolare si potrà avere solamente dallo studio degli eteri ovvero dei sali.

Ma però fino da ora si può formarsi un criterio almeno approssimato sul modo più probabile secondo cui sono fra di loro congiunti i residui pirrolici.



è detto ora per il secondo, limitandoci a considerare il carbonio e l'azoto pirrolici, avremo :



Riprenderemo lo studio di questi prodotti appena le circostanze ce lo permetteranno.

**Cristallografia.** — *Sulla formazione di geminati.* Nota del Socio CARLO VIOLA.

La figura normale di un cristallo sottoposto ad accrescimento libero è determinata dalla legge di Curie (<sup>1</sup>), secondo la quale gli accrescimenti perpendicolari  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r, \dots, p_n$  alle facce sono proporzionali direttamente alle rispettive costanti capillari  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_n$ , ossia

$$(1) \quad p_1 : p_2 : p_3 : \dots : p_r : \dots : p_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \dots : \alpha_r : \dots : \alpha_n .$$

Si moltiplichino termine a termine per le rispettive aree delle facce  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_r, \dots, s_n$ , e si eseguisca la sommatoria sul contorno, si ottiene

$$(2) \quad p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_r s_r + \dots + p_n s_n = \\ = C \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_r s_r + \dots + \alpha_n s_n \} ,$$

essendo  $C$  una costante di proporzionalità.

Il membro a sinistra di quest'equazione non è che una quantità proporzionale al volume del cristallo, che diremo  $V$ ; il membro a destra nella parentesi è la tensione o energia superficiale del cristallo, che diremo  $E_0$ , sicchè

$$(3) \quad V = C E_0 .$$

Qui si intende  $E_0$  l'energia minima possibile per dato volume  $V$ , essendo questa la condizione della legge di Curie; ossia per ogni accrescimento del cristallo il volume è proporzionale alla minima energia superficiale, non altrimenti si avrebbe equilibrio stabile di contatto fra la fase amorfa e il cristallo, come precisamente vogliono le condizioni, sulle quali si basa la legge delle fasi di Gibb.

(<sup>1</sup>) C. Viola, R. Accademia dei Lincei, 1916, Rendiconti, II, pag. 401.

Solamente nel caso, in cui il sistema si trovi in istato irriversibile, l'accrescimento del cristallo non avrà luogo secondo la legge di Curie, la figura di esso non sarà normale e l'eguaglianza (3) non potrà verificarsi. Io rilevai già un caso di anormalità nella figura del cristallo, forse la più importante, al quale diversi possono essere ricondotti; gli è quando facce a indici grandi prendono accrescimenti anormali e si sostituiscono a facce aventi costanti capillari piccole; e considerai le circostanze, che si possono avere per ristaurare simili anormalità, nel supposto che non vi sia variazione di energia interna. Ma aggiunsi ancora che il ristauo di cristalli anormali devonsi poter ottenere per mezzo di geminazioni.

Poniamo il caso semplicissimo che una sola delle facce del cristallo abbia assunto una estensione superiore a quella, che essa avrebbe, se la tensione superficiale fosse minima; ciò induce a indicare che qualcuna delle condizioni di equilibrio sia rotta. Fra tutte le facce  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_n$  che si verificano sul contorno del cristallo, sia precisamente la faccia  $\sigma_r$  quella che ha assunto un'area  $S_r$  maggiore della faccia  $s_r$ , che corrisponde alla costante capillare  $\alpha_r$ ; chiameremo  $S_r$  faccia o area anormale. Naturalmente se  $S_r > s_r$ , significa che l'accrescimento perpendicolare a  $\sigma_r$  è stato rallentato, ossia in luogo di  $p_r$  sia  $p'_r$ , essendo  $p'_r < p_r$ . Posto nella (2)  $p'_r S_r$  in luogo di  $p_r s_r$  e  $\alpha_r S_r$  in luogo di  $\alpha_r s_r$ , avremo

$$(4) \quad p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p'_r S_r + \dots + p_n s_n < \\ < C \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_r S_r + \dots + \alpha_n s_n \}.$$

Essendo la costante C rimasta la medesima; per le premesse fatte è evidente che in luogo dell'eguaglianza (2) si abbia la disequaglianza (4).

Il membro a sinistra di essa è ancora sempre proporzionale al volume V del cristallo; la somma in parentesi del membro a destra è l'energia totale superficiale che diremo E, maggiore di  $E_0$ , sicchè

$$(5) \quad V < C E.$$

Questo risultato dimostra che l'energia superficiale diviene proporzionale al volume V del cristallo nell'istante, in cui è minima. In questa elegante espressione è tradotta la legge di Curie, ovvero la legge di Hauy sulla razionalità degli indici semplici.

Se la perturbazione, causa dell'anormale accrescimento del cristallo, persiste, la figura rimarrà anormale; se essa sarà soppressa, il cristallo poco a poco si adatterà, come una massa pastosa sotto l'azione esclusiva della tensione superficiale per riprendere infine la figura normale, dissolvendosi in quelle direzioni, secondo le quali esso aveva troppo cresciuto, e sviluppandosi là dove aveva rallentato. Ma un altro fenomeno può contempo-

raneamente avvenire, che sulla faccia  $S_r$  troppo estesa (anormale) venga a posarsi e a crescere un secondo individuo, il quale come il precedente abbia avuto la corrispondente faccia  $S'_r$  troppo sviluppata, persistendovi la medesima causa.

\*  
\* \*  
\*

Consideriamo dunque due cristalli di sviluppo press'a poco eguale, i quali siano venuti a coprirsi con la comune faccia  $S_r$  dell'uno ed  $S'_r$  dell'altro, venendo così a diminuire la loro tensione superficiale comune in contatto con la fase amorfa, come precisamente farebbero due gocce sferiche perfettamente libere nel loro moto; la fusione di due gocce eguali in una avrebbe per risultato di ridurre la loro area sferica complessiva a circa  $\frac{4}{5}$ , e in questo rapporto eziandio la tensione superficiale.

Scriveremo per il secondo cristallo una espressione analoga alla (4); le stesse lettere con apice indichino gli stessi oggetti e le corrispondenti costanti per questo cristallo, ossia:

$$(6) \quad p'_1 s'_1 + p'_2 s'_2 + \dots + p''_r S'_r + \dots + p'_n s'_n < \\ < C \{ \alpha'_1 s'_1 + \alpha'_2 s'_2 + \dots + \alpha'_r S'_r + \dots + \alpha'_n s'_n \}.$$

Trattandosi di due cristalli perfettamente analoghi e di eguale sviluppo in tutte le loro parti, potremo considerare le rispettive distanze perpendicolari  $p_1, p_2, p_3, \dots$  eguali rispettivamente alle distanze  $p'_1, p'_2, p'_3, \dots$  e così dicasi delle aree e delle loro costanti capillari. Inoltre avvenendo il contatto di due individui nelle facce  $S_r$  e  $S'_r$ , sarà conveniente e necessario assumere su detta faccia il comune origine O, donde si computano gli accrescimenti. Sarà allora  $p_r = p'_r = 0$ , e la somma delle (4) e (6) ci darà

$$2 \{ p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \dots + p_n s_n \} < \\ < C2 \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n \} + \alpha_r C [S_r + S'_r].$$

Naturalmente il membro a sinistra è proporzionale al volume totale dei due cristalli; quello a destra senza la costante C è l'energia superficiale complessiva, che può variare come varia il binomio  $\alpha_r (S_r + S'_r)$ .

Tanto  $S_r$  di un cristallo quanto  $S'_r$  dell'altro si dividono in due parti, in quella di contatto e quella libera. La prima  $(S_r)_1 = (S'_r)_1$  è la stessa per i due cristalli; la seconda  $(S_r)_2$  e  $(S'_r)_2$  è pure press'a poco la stessa, ritenendo che i due cristalli abbiano circa lo stesso sviluppo. Fra le aree  $(S_r)_1$  e  $(S'_r)_1$ , essendo reciprocamente coperte, vi è una costante capillare  $\alpha'_r$ , in generale diversa di  $\alpha_r$ , la quale esprime il lavoro che è necessario spen-



dere per aumentare di una unità la superficie di contatto  $(S_r)_1$ , sicchè potremo scrivere

$$\alpha_r(S_r + S'_r) = 2\alpha'_r(S_r)_1 + 2\alpha_r(S_r)_2.$$

Rifacciamo ora le condizioni di equilibrio per una piccolissima variazione nelle singole aree del contorno del cristallo, supposto che questo rimanga in contatto con la fase amorfa senza sensibile aumento di volume. Per quello che si è precedentemente detto <sup>(1)</sup>, le condizioni di equilibrio stabile saranno le seguenti:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta s_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \delta s_i + \alpha'_r \delta(S_r)_1 + \alpha_r \delta(S_r)_2 = 0; \end{array} \right.$$

dalle quali si ottiene in primo luogo la relazione che ripete la legge di Curie per ciascuno dei due cristalli in contatto, ossia:

$$(8) \quad p_1 : p_2 : p_3 : \dots : p_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \dots : \alpha_n;$$

in secondo luogo esse forniscono ancora

$$(9) \quad \alpha'_r \delta(S_r)_1 + \alpha_r \delta(S_r)_2 = 0,$$

che integrata dà precisamente

$$(9_a) \quad \alpha'_r(S_r)_1 + \alpha_r(S_r)_2 = \text{costante}.$$

Se si considera l'accrescimento a partire dall'origine del cristallo geminato, questa costante è naturalmente zero; sicchè si potrà scrivere senz'altro, invece della (9<sub>a</sub>), la condizione seguente da aggiungersi alle (8) per rendere minima la tensione superficiale per un dato volume:

$$(10) \quad \alpha'_r(S_r)_1 + \alpha_r(S_r)_2 = 0.$$

Ma è da osservarsi che  $\alpha'_r$  è quantità piccolissima e trascurabile; essa inoltre tende a zero, quando i due cristalli sono in tale contatto da ritenersi l'uno la continuazione dell'altro. La condizione di equilibrio (10) esprime che la parte di area  $(S_r)_1$  di contatto deve essere grande, come all'opposto per l'area libera si dovrà avere

$$(11) \quad (S_r)_2 = \text{minimo o zero}.$$

<sup>(1)</sup> C. Viola, R. Accademia dei Lincei. 1916, Rendiconti, II, pag. 401.

Affinchè la condizione (10) sia possibile, è necessario che per ogni aumento di  $(S_r)_1$  corrisponda una adeguata diminuzione di  $(S_r)_2$ , il che è anche naturale. In ogni modo considerando i loro valori assoluti, la (10) esprime appunto la relazione

$$(12) \quad (S_r)_1 : (S_r)_2 = \frac{1}{\alpha'_r} : \frac{1}{\alpha_r} ;$$

ossia l'area legata e l'area libera sono inversamente proporzionali alle rispettive costanti capillari.

Sarà precisamente  $(S_r)_2 = 0$  e perciò  $\alpha'_r = 0$  quando le rispettive aree  $S_r$  e  $S'_r$  dei due individui saranno identicamente ricoperte, il che sarà sempre realizzabile, ove i due cristalli siano in associazione parallela. Di più esse condizioni saranno soddisfatte eziandio nel caso, in cui i due individui si trovino in posizione emitropa; la quale si ottiene dalla prima, girando di  $180^\circ$  nel piano comune  $S_r = S'_r$  uno dei due individui per rispetto all'altro.

La conclusione a cui si arriva in seguito a questi sviluppi, così si può riassumere:

*L'equilibrio stabile di contatto fra più cristalli e la fase amorfa è raggiunto, quando essi si trovino sovrapposti in posizione di geminazione o in posizione parallela; posizioni che diremo brevemente di congiunzione.*

Si intende da quanto è stato detto sopra, che la superficie di contatto o di associazione è una faccia, che ha subito durante l'accrescimento degli individui uno sviluppo superiore a quello ad essa dovuto in forza della legge di Curie o di Haüy. Finchè infatti la cristallizzazione non sia perturbata, la figura che il cristallo conserva allo stato reversibile è normale; nè vi è ragione che in questo stato altri centri di cristallizzazione si formino. Il che vale:

*Le figure anormali dei cristalli esclusivamente possono dar luogo a geminati.*

\*  
\* \*

Passiamo ora ad esaminare il procedimento dinamico che si può immaginare avvenga nella formazione di un geminato.

A tal fine partiamo dal supposto che il centro di cristallizzazione di un secondo cristallo si formi sulla superficie anormale del primo, e che il secondo individuo inizi il suo accrescimento in modo affatto arbitrario, ma tale che le superficie  $S_r$  e  $S'_r$  siano in contatto.

Se le superficie anormali legate  $S_r$  ed  $S'_r$  si coprano identicamente, come avviene in una delle due posizioni di congiunzione, l'energia superficiale raggiungerà un minimo, e l'equilibrio sarà stabile. Ogni posizione intermedia corrisponderà ad energia superficiale maggiore della minima, e l'equilibrio

sarà rotto. Nondimeno fra tutte le possibili posizioni intermedie, vi è una per la quale l'energia superficiale è massima, quando cioè

$$(S_r)_z = \text{massimo}$$

compatibilmente con la legge di Curie per i due individui.

Questa speciale posizione intermedia, che chiameremo di *quadratura* si ottiene naturalmente, girando uno dei due individui per rispetto all'altro nel piano comune  $S_r$  dell'angolo di  $90^\circ$  a partire da una delle due posizioni di congiunzione. Si comprende che la posizione di quadratura non è altro che una posizione di *equilibrio instabile*; se i due individui uscissero da essa, anche di pochissimo, si troverebbero trasportati in una o nell'altra delle due posizioni di congiunzione e di stabilità. Possiamo così concludere:

*Le posizioni di equilibrio di due individui identici sovrapposti secondo una superficie anormale sono tre: due di esse, dette di congiunzione, corrispondono ad equilibrio stabile o stato reversibile, la terza è di quadratura e corrisponde ad equilibrio instabile o stato irreversibile.*

Nella meccanica è comune il caso di incontrare un sistema in equilibrio stabile o instabile. Un pendolo p. es. nella sua posizione ordinaria col centro di gravità sotto al centro di sospensione si trova in equilibrio stabile, poichè spostato da essa di poco o di molto, ritorna nella sua posizione primitiva. All'incontro un pendolo capovolto col centro di gravità verticalmente sopra al centro di sospensione si trova in equilibrio instabile; poichè spostato di pochissimo da essa posizione, continua il suo moto fino a raggiungere la posizione stabile. Analogo stato di cose si avverte precisamente fra due cristalli aventi una faccia di contatto: che essi tendono ad assumere una delle due posizioni di equilibrio stabile, anche allorquando si trovino nella posizione di equilibrio instabile, purchè per una qualunque ragione siano levati da essa anche di pochissimo. È chiaro che teoricamente i due cristalli raggiungerebbero la posizione instabile in un tempo infinito, sempre che le condizioni siano a tal fine favorevoli.

Fra tutte le infinite posizioni che due cristalli in contatto possono avere fra di loro, le più probabili sono certamente le posizioni intermedie perchè frequenti; la meno probabile è quella corrispondente ad equilibrio instabile. Le posizioni di equilibrio stabile sono solamente due, epperò sono molto meno probabili che tutte le posizioni intermedie prese insieme; ma poichè ogni posizione intermedia deve alla fine risolversi in una posizione di congiunzione, queste ultime dovranno più facilmente ripetersi in natura, purchè ci sia il tempo sufficiente per la risoluzione e la successiva ricristallizzazione in modo che ad ogni istante la deformazione sposti i due individui l'uno per rispetto all'altro di un angolo sia pure piccolissimo.

Raggiunta una volta la congiunzione nei due individui, l'accrescimento del geminato può continuare imperturbato in relazione con la legge di Curie.

Solamente in seguito ad un secondo accrescimento anormale si può formare un terzo individuo, e poi un quarto e così via, ripetendosi la stessa legge di geminazione, se le stesse circostanze causanti le anomalie si ripetano identicamente.

\*  
\* \* \*

La ripetizione della stessa geminazione innumerevoli volte sarà oltremodo poco probabile per non dire impossibile, poichè è quasi impossibile che le identiche condizioni si rinnovino innumerevoli volte. Per questa ragione si deve presumere che i poligeminati e le mimesie, come si osservano bellissime in vari cristalli tipici, quali la leucite, l'analcime, i granati, i feldspati triclini e monoclini, la boracite, alcune cloriti ecc. ecc. devono avere un'altra origine. L'ipotesi che più naturalmente si presenta è quella del polimorfismo.

Esaminiamo appunto una sostanza avente due modificazioni cristalline; per una data temperatura e pressione una modificazione passa bruscamente nell'altra. A causa di siffatta trasformazione la struttura del cristallo cambia, ma ne rimane la figura esterna. Facciamoci prima a considerare una data modificazione e la figura normale a lei propria. Siano  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  le distanze perpendicolari di accrescimento computate da un'origine  $O$  delle facce di essa  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ , le cui aree siano rispettivamente  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  e le rispettive costanti capillari  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ . Ammesso l'equilibrio stabile, come si è detto, e quindi lo stato reversibile si avrà

$$(13) \quad p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \dots + p_n s_n = \\ = C \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 + \dots + \alpha_n s_n \},$$

essendo  $C$  la costante di proporzionalità.

Consideriamo ora la seconda modificazione della stessa sostanza, che come si è detto, avviene a una data temperatura e pressione e per un certo consumo o produzione di calore. Posto ciò, il membro a sinistra della (13), rappresentante il volume totale del cristallo non subisce alcuna variazione.

Ma ognuna delle facce  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  si scomporrà in generale in parecchie. La area  $s_1$  p. es. avente la costante capillare  $\alpha_1$  si scomporrà in  $s'_1, s''_1, s'''_1, \dots$  con le rispettive costanti capillari  $\alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1, \dots$ ; l'area  $s_2$  analogamente si scomporrà in  $s'_2, s''_2, s'''_2, \dots$  con le rispettive costanti capillari  $\alpha'_2, \alpha''_2, \alpha'''_2, \dots$  e così via, la area  $s_n$  si scomporrà nelle aree parziali  $s'_n, s''_n, s'''_n, \dots$  con le rispettive costanti capillari  $\alpha'_n, \alpha''_n, \alpha'''_n, \dots$ . Durante una siffatta trasformazione il processo può essere reversibile, p. es. se il consumo di calore di trasformazione venga riguadagnato identicamente nella



modificazioni, come nei feldspati hanno una faccia comune della stessa densità — e le innumerevoli geminazioni hanno per faccia di associazione la faccia della stessa densità.

Riassumendo ora i due sviluppi secondo i quali si possono formare i geminati e i poligeminati, l'uno in base alla trasformazione della fase amorfa in fase cristallina, l'altro in base alla trasformazione di due modificazioni cristalline, l'una nell'altra, della stessa sostanza dimorfa, vien fatto di pensare che un poligeminato o un cristallo cosiddetto mimetico altro non può rappresentare che una modificazione di una sostanza dimorfa ancorchè non ne sia dimostrato il dimorfismo, o brevemente:

*Un poligeminato finissimo o un cristallo mimetico è sempre una modificazione di una sostanza dimorfa.*

Per diversi cristalli questa legge è dimostrata p. es. la leucite, la boracite, alcune zeoliti ecc.; per altre sostanze questa legge è supposta p. es. il microclino, l'ortoclasio, ecc.

**Matematica.** — *Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

1. In questa Nota vogliamo dare una dimostrazione semplice e diretta delle formole che esprimono il principio di Huygens in un campo elettromagnetico nella credenza che una tale dimostrazione possa interessare i cultori della fisica teorica.

Il nostro campo elettromagnetico esista in un dielettrico omogeneo ed isotropo, di cui indichiamo con  $\varepsilon$  e  $\mu$  la costante dielettrica e la permeabilità magnetica. Richiamando, quindi, notazioni già altra volta adoperate, indichiamo, pure, con  $\mathfrak{E}$  ed  $\mathfrak{H}$  la forza elettrica e la forza magnetica, con  $c$  la velocità della luce nel vuoto e con  $C = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  la velocità della luce nell'interno del dielettrico considerato. Con queste notazioni le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico, all'interno del dielettrico stesso, si scrivono

$$(1) \quad \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H} \quad , \quad \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E} .$$

Sia, ora,  $\sigma$  una superficie fissa, chiusa e regolare compresa nel nostro campo, limitante una regione  $S$  di spazio, all'interno della quale  $\mathfrak{E}$  ed  $\mathfrak{H}$ , come funzioni delle coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  di un punto variabile e del tempo  $t$ , sieno regolari e soddisfino alle equazioni (1), e sia  $n$  un vettore unitario normale a  $\sigma$  diretto verso l'interno di  $S$ . Se, allora,  $x, y, z$  sono le coordinate di un punto fisso, interno ad  $S$ , e poniamo

$$(2) \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} ,$$

potremo scrivere

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} = \\ & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) + \int_S \frac{dS}{r} \operatorname{rot}' \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) = \\ & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) - \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right), \\ & \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} = \\ & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right) + \int_S \frac{dS}{r} \operatorname{rot}' \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right) = \\ & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right) + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) \end{aligned} \right.$$

nelle cui formole abbiamo messo in vista soltanto il valore dell'argomento  $t$  da cui dipendono  $\mathfrak{E}$  ed  $\mathfrak{H}$ , e l'operazione  $\operatorname{rot}'$  s'intende eseguita rispetto alle variabili  $\xi, \eta, \zeta$  supponendo  $r$  costante. Tenendo conto, poi, delle relazioni

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \left( \Delta^2 - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) = - 4\pi \mathfrak{E} (x, y, z, t), \\ & \operatorname{rot}^2 \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) = \\ & = - \Delta^2 \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) \end{aligned} \right.$$

e delle formole analoghe pel vettore  $\mathfrak{H}$ , si deducono immediatamente, dalle (3), le formole richieste. Basta, infatti, una volta, eseguire sulla prima delle (3) l'operazione  $\operatorname{rot}$ , sulla seconda l'operazione  $\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  e sottrarre, un'altra volta, invece, eseguire sulla prima l'operazione  $\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ , sulla seconda l'operazione  $\operatorname{rot}$  e sommare, per trovare, seguendo la via indicata, le due formole

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & 4\pi \mathfrak{E} (x, y, z, t) = \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \\ & - \operatorname{rot} \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right), \\ & - 4\pi \mathfrak{H} (x, y, z, t) = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{E} \left( t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} + \\ & + \operatorname{rot} \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right). \end{aligned} \right.$$

È quasi superfluo aggiungere che se le divergenze dei vettori  $\mathfrak{C}$  ed  $\mathfrak{H}$  si suppongono nulle, gli ultimi termini dei secondi membri delle (5) si riducono a

$$\text{grad} \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{C} \left( t - \frac{r}{C} \right) \times n \right] \frac{d\sigma}{r} \quad \text{e} \quad \text{grad} \int_{\sigma} \left[ \mathfrak{H} \left( t - \frac{r}{C} \right) \times n \right] \frac{d\sigma}{r}.$$

2. Nella Nota II *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell* <sup>(1)</sup> abbiamo ottenuto l'integrale delle (1) che ci è assicurato dal teorema della Kowalewski, sotto la forma

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}(x, y, z, t) = \mathfrak{C}_0(x, y, z) + \\ \quad + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left\{ \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathfrak{H}_0 \frac{dS}{r} - \text{rot} \int_S \mathfrak{C}_0 \frac{dS}{r} \right\}, \\ \mathfrak{H}(x, y, z, t) = \mathfrak{H}_0(x, y, z) - \\ \quad - \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left\{ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathfrak{C}_0 \frac{dS}{r} + \text{rot} \int_S \mathfrak{H}_0 \frac{dS}{r} \right\} \end{array} \right.$$

in cui  $S$  è la regione di spazio compresa nella sfera di centro  $(x, y, z)$  e di raggio  $Ct$  ed  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{H}_0$  sono i valori assegnati ad  $\mathfrak{C}$  ed  $\mathfrak{H}$  per  $t=0$ . Vogliamo approfittare di questa Comunicazione per dare una dimostrazione semplice e diretta anche delle (6), dimostrazione che può considerarsi una verifica delle stesse formole. Ci fermeremo a considerare soltanto la prima delle (6) trattandosi di ripetere, per la seconda, cose analoghe. Notiamo, a questo scopo, che, dalle (1), discende

$$\left( \Delta^2 - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} = 0$$

e che, dalle (1) stesse, si ricava

$$\left( \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} \right)_0 = \frac{c}{\varepsilon} \text{rot} \mathfrak{H}_0 \quad , \quad \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{C}}{\partial t^2} \right)_0 = -C^2 \text{rot}^2 \mathfrak{C}_0 ;$$

per cui la formola di Poisson ci permette, subito, di scrivere

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left\{ \frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\omega} \mathfrak{H}_0 d\omega \right) - C^2 \text{rot} \left( t \int_{\omega} \mathfrak{C}_0 k\omega \right) \right\}$$

$\omega$  essendo la superficie sferica di raggio uno, mentre i valori di  $\mathfrak{C}_0$  ed  $\mathfrak{H}_0$  si intendono, naturalmente, presi nei punti corrispondenti della sfera di raggio  $Ct$ . Basta, ora, integrare la precedente equazione, rispetto a  $t$ , fra 0 e  $t$  per ottenere la prima delle (6).

(1) Questi Rendiconti, 1° sem. 1916, fasc. 9°.



Un procedimento analogo, convenientemente esteso, serve a determinare l'integrale delle equazioni di Maxwell che discende dal teorema citato della Kowalewski, anche quando, in queste equazioni, si debba tener conto di correnti di conduzione, o di correnti di convezione.

Nei mezzi cristallini uniassici un procedimento della natura precedente si può applicare, solo, alle componenti delle forze elettrica e magnetica secondo l'asse di isotropia. Però, determinate queste due quantità, l'integrazione delle equazioni si compie nel modo più agevole.

**Matematica.** — *Equazioni integrali singolari con nuclei analoghi a quelli di Evans.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. In questa Nota tratteremo equazioni del tipo

$$(A) \quad \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Porremo come condizione fondamentale che l'integrale

$$(B) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |n(\alpha x - \beta y)| dy$$

esista sempre, qualunque sia  $x$ .

Un'equazione analoga, in un caso particolarissimo, è stata già trattata dal Picard <sup>(1)</sup>.

Premettiamo il seguente lemma:

*Se il nucleo  $n$  è tale che esista l'integrale*

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y) dy,$$

*questo integrale si riduce ad una costante.*

Infatti, mutiamo  $x$  in  $x + \xi$ , con  $\xi$  arbitrario; l'integrale ora scritto diventa

$$\sigma(x + \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y + \alpha \xi) dy.$$

Notiamo che  $\beta$  non può essere nullo, poichè allora la  $n$  non dipenderebbe dalla  $y$ , e l'integrale sarebbe infinito. Poniamo perciò

$$y = z - \frac{\alpha}{\beta} \xi \quad ; \quad dy = dz.$$

<sup>(1)</sup> T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, pag. 121 e seg.; ivi è citato e riportato l'esempio di E. Picard.

I limiti dell'integrale non cambiano; sarà dunque

$$\sigma(x + \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta z) dz = \sigma(x),$$

da cui, ponendo  $x = 0$ , si trae

$$\sigma(\xi) = \sigma(0) = h.$$

Si vede che soddisfatta la condizione (B), è di conseguenza soddisfatta la condizione enunciata nel lemma.

2. Dimostriamo ora che, almeno in un certo intorno di  $\lambda = 0$ , la (A) ammette soluzione unica soddisfacente alla condizione

$$|\varphi(x)| < \Phi \quad (-\infty < x < +\infty)$$

se è anche

$$|f(x)| < F \quad (-\infty < x < +\infty);$$

e che inoltre, almeno in quell'intorno, tale soluzione è sviluppabile in serie di potenze rispetto a  $\lambda$ .

Consideriamo lo sviluppo

$$(1) \quad \theta(x) = f(x) - \lambda \int n(xs_1) f(s_1) ds + \\ + \lambda^2 \int_2 ds_2 \int n(xs_2) n(s_2 s_1) f(s_1) ds_1 - \dots$$

ove per brevità si ponga

$$n(\alpha x - \beta y) = n(xy)$$

e si tralascino i limiti d'integrazione.

Supponiamo d'aver già dimostrato che

$$\left| \int n(xs_m) ds_m \int n(s_m s_{m-1}) ds_{m-1} \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| \leq k_m;$$

in conseguenza di quanto abbiamo già detto sarà:

$$\left| \int n(xy) dy \int n(ys_m) ds_m \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| \leq \\ \leq \int |n(xy)| dy \left\{ \left| \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| \right\} \leq \int |n(xy)| k_m \cdot dy \leq k k_m;$$

ed essendo

$$\left| \int n(xs) f(s) ds \right| \leq \int |n(xs)| |f(s)| ds \leq Fk,$$

pel principio d'induzione completa, avremo che

$$\left| \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1, s) f(s) ds \right| \leq Fk^m.$$

Ne segue che lo sviluppo (1) ammette come maggiorante la serie

$$(2) \quad F \cdot \sum \lambda^m k^m;$$

e poichè questa converge assolutamente per

$$|\lambda k| < 1,$$

ne deduciamo che sotto tale condizione effettivamente la (1) rappresenta una serie che converge uniformemente nel campo  $(-\infty, +\infty)$  rispetto alla  $x$ ; e che anzi

$$(3) \quad |\theta(x)| \leq \frac{F}{1 - |\lambda k|}.$$

Se invece di avere

$$|f(x)| < F$$

si avesse solo

$$(4) \quad \left| \int n(xs_r) ds_r \int \dots \int n(s_2, s_1) f(s_1) ds_1 \right| < F,$$

mentre gli integrali

$$\int n(xs_p) ds_p \int \dots \int n(s_2, s_1) f(s_1) ds_1 \quad (p < r)$$

esistono qualunque sia  $x$ , il ragionamento fatto vale ancora, come si vedrebbe trascurando i primi  $r$  termini della (1). Seguendo il ragionamento che faremo, si vedrebbe che esistono

$$\theta(x), \int n(xs) \theta(s) ds, \dots,$$

ma che si può solo affermare che

$$\left| \int n(xs_r) ds_r \int \dots \int n(s_2, s_1) \theta(s_1) ds_1 \right| < \Theta \text{ (costante),}$$

e che in conseguenza resta invariata tutta la discussione.

3. Dimostriamo ora che per

$$|\lambda k| < 1,$$

la (1) rappresenta effettivamente la soluzione di A, e che tale soluzione è unica.

Poniamo

$$\theta(x) = \left\{ f(x) - \lambda \int n(xs) f(s) ds + \lambda^2 \int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) f(s) ds - \dots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right\} + R_m(x);$$

in conseguenza sarà:

$$\begin{aligned} \theta(x) + \lambda \int n(xz) \theta(z) dz = & \left\{ f(x) - \lambda \int n(xs) f(s) ds + \dots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right\} + R_m(x) + \\ & + \lambda \left\{ \int n(xz) f(z) dz - \lambda \int n(xz) dz \int n(xs) f(s) ds + \dots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xz) dz \int n(zs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right\} + \\ & + \lambda \int n(xz) R_m(z) dz. \end{aligned}$$

Per le ipotesi fatte sulla convergenza degli integrali, il primo e terzo termine si possono sommare membro a membro; spariscono tutti i sommandi eccetto il primo del primo termine e l'ultimo del terzo. Resta dunque:

$$\begin{aligned} \theta(x) + \lambda \int n(xz) \theta(z) dz = \\ = f(x) + \lambda (-\lambda)^{m+1} \int dz \int \dots \int ds n(xz) n(zs_m) \dots n(s_1 s) f(s) ds + \\ + R_m(x) + \lambda \int n(xz) R_m(z) dz. \end{aligned}$$

Ma abbiamo già visto che la (1) ammette, per ogni valore di  $x$ , la (2) come maggiorante; ed essendo  $|\lambda k| < 1$ , ne viene in conseguenza che dato un  $\varepsilon$  piccolo a piacere, esisterà un indice  $\mu$  tale che per  $m > \mu$  sia sempre

$$|\lambda^{m+2}| \left| \int dz \int \dots \int ds n(xz) n(zs_m) \dots n(s_1 s) f(s) \right| < \varepsilon \quad \left. \vphantom{\int} \right\} -\infty < x < +\infty.$$

Quindi sarà

$$\left| \int n(xz) R_m(z) dz \right| \leq \int |n(xz)| |R_m(z)| dz \leq \varepsilon \int |n(xz)| dz,$$

ove, pel lemma enunciato, l'ultima quantità scritta è eguale ad  $\varepsilon k$ .

Ed avremo in conseguenza

$$\left| \theta(x) + \lambda \int n(xz) \theta(z) dz - f(x) \right| \leq \varepsilon + \varepsilon + |\lambda k| \varepsilon < 3\varepsilon.$$

con  $\varepsilon$  piccolo ad arbitrio.

Quindi sarà precisamente

$$\theta(x) + \lambda \int n(xz) \theta(z) dz - f(x) = 0$$

cioè  $\theta(x)$  sarà soluzione della (A). Il ragionamento fatto sussiste invariato nelle conclusioni, e poco modificato nella forma, anche nell'ipotesi più generale fatta colla (4).

4. Resta da mostrare che imposta la condizione

$$|\varphi(x)| < \Phi,$$

[o quella più generale enunciata alla (4)], la soluzione è unica nel campo di validità dello sviluppo in serie.

Supposto infatti che esistano due soluzioni soddisfacenti a tale condizione, la loro differenza vi soddisferà ancora, e sarà soluzione dell'equazione omogenea

$$(5) \quad \omega(x) + \lambda \int n(xs) \omega(s) ds = 0 \quad |\lambda k| < 1.$$

Quindi, chiamato  $\Omega$  il limite superiore di  $|\omega(x)|$ , sarà

$$|\omega(x)| = \left| \lambda \int n(xs) \omega(s) ds \right| \leq |\lambda| \int |n(xs)| |\omega(s)| ds \leq |\lambda k| \Omega.$$

D'altra parte, dalle (5) si trae successivamente

$$\begin{aligned} \int n(xs) \omega(s) ds &= \lambda \int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) \omega(s) ds \\ \int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) \omega(s) ds &= \lambda \int n(xs_2) ds_2 \int n(s_2 s_1) ds_1 \int n(s_1 s) \omega(s) ds. \\ &\dots \end{aligned}$$

Le prime  $m$  di queste, moltiplicate rispettivamente per  $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^m$  e sommate tutte con la (5), danno

$$\omega(x) = \lambda^{m+1} \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) \omega(s) ds$$

e quindi

$$|\omega(x)| \leq |\lambda|^{m+1} \int |n(xs_m)| ds_m \int \dots \int |n(s_1 s)| \cdot |\omega(s)| ds \leq |\lambda|^{m+1} k^{m+1} \Omega,$$

qualunque sia  $m$ . Ma  $|\lambda k|^{m+1}$  tende a zero al crescere di  $m$ ; se quindi e

$$|\omega(x)| < \Omega$$

sarà di conseguenza

$$\omega(x) = 0$$

salvo tutt'al più i punti d'un insieme di misura nulla.

Al posto dell'ultima condizione, si può porre la (4) ed il risultato non cambia.

Resta quindi dimostrato che per  $|\lambda k| < 1$ , la soluzione limitata della (A) è unica, se la  $f(x)$  è limitata.

Epperò possiamo enunciare il

TEOREMA I. — *L'equazione*

$$\varphi(x) - \lambda \int n(\alpha x - \beta y) \varphi(y) dy = f(x)$$

ammette, in un certo intorno di  $\lambda = 0$ , una soluzione unica, sviluppabile in serie di potenze della  $\lambda$ , e tale che

$$|\varphi(x)| < \Phi, \quad |f(x)| < F \quad (-\infty < x < +\infty)$$

se esiste l'integrale

$$\int |n(\alpha x - \beta y)| dy = k;$$

ed il

TEOREMA II. — *L'equazione stessa ammette, in un intorno di  $\lambda = 0$ , una soluzione unica soddisfacente alla*

$$\left| \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| < \Phi$$

se

$$\left| \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| < F$$

sempre che esista l'integrale

$$\int |n(\alpha x - \beta y)| dy.$$

5. Osserviamo poi che l'esistenza di

$$\int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) f(s) ds$$

unita a quella dell'integrale

$$\int |n(xs)| ds$$

implica che si abbia anche

$$\int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) f(s) ds = \int \left\{ \int n(xs_1) n(s_1 s) ds \right\} f(s) ds$$

$$\int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds = \int \left\{ \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) ds_1 \right\} f(s) ds$$

Quindi, con uno sviluppo analogo allo sviluppo (1), si potrà addirittura costruire un nucleo risolvete, allorchè sia stato dimostrato che i nuclei iterati dedotti da un nucleo funzione d'una combinazione lineare di  $x$  ed  $y$ , se esistono, conservano la stessa forma; e che se il nucleo primitivo soddisfa alla condizione B, anche i nuclei iterati vi soddisfano,

Tali proprietà risulteranno in una prossima Nota, come conseguenza di una teoria della composizione di tali nuclei.

Notiamo che le considerazioni qui svolte si possono riattaccare ad un precedente lavoro (1).

**Matematica.** — *Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica.* Nota di F. P. CANTELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. Questo scritto fa seguito ad una mia precedente Nota (2); adopero, pertanto, gli stessi simboli di questa, premettendo ad essi un indice tutte le volte che occorra. Così, ad es., scriverò  ${}_x M_n$  per indicare il valore medio di una variabile casuale  $X_n$  e  ${}_y M_s$  per indicare l'analogo valore di un'altra variabile casuale  $Y_s$ .

Nella indicata Nota ho mostrato come una estensione di un teorema di Boole (3) si renda utile nella risoluzione di un interessante problema; qui mostrerò due altre diverse applicazioni del teorema stesso, tentando, così, di toglierlo dall'oblio nel quale è stato lasciato.

(1) G. Andreoli, *Su un problema di meccanica ereditaria*, Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 50, 1915.

(2) *Sulla probabilità come limite della frequenza*. Questi Rendiconti, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXVI (1917).

(3) Il Boole, nel libro citato nella Nota precedente, dà il suo teorema sotto la forma

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_n} - (n - 1).$$

Ponendo  $p_{i_r} = 1 - p_{e_r}$ , si può anche scrivere

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq 1 - (p_{e_1} + p_{e_2} + \dots + p_{e_n}).$$

Quest'ultima si presta, come si è visto, alla estensione ad una infinità di eventi, contrariamente all'altra.





Ora, mentre sono note delle formole che permettono di calcolare confini inferiori convenienti della probabilità  $P_{(s)}$ , o valori sufficientemente approssimati di questa, non sono note, per quanto mi consta, formole generali analoghe relative alla probabilità  $P_{(s, t, \dots, v)}$ .

La prima delle applicazioni, delle quali qui mi occupo, serve a mostrare come il teorema di Boole sia adatto a colmare, almeno in parte, la lacuna ora accennata; e mi limiterò a indicare una formola, che dà spesso un confine inferiore conveniente di  $P_{(s, t, \dots, v)}$ , dedotta dalle formole analoghe relative alle probabilità  $P_{(s)}$ ,  $P_{(t)}$ , ...,  $P_{(v)}$ .

Il confine inferiore, indicato, della probabilità  $P_{(s, t, \dots, v)}$  conduce, sotto opportune condizioni, a dimostrare che si ha

$$(6) \quad \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \vdots \\ v \rightarrow \infty}} P_{(s, \dots, v)} = 1,$$

e in ciò può vedersi una generalizzazione della *legge dei grandi numeri* la quale, come è noto, è espressa dalla relazione

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} P_{(s)} = 1.$$

La formola appresso indicata, inoltre, conduce a risultati numericamente più espressivi di quelli ottenuti nella Nota precedente.

3. È da indicare, in primo luogo, un teorema che fornisca limiti superiori generalmente convenienti delle probabilità relative al *non verificarsi* di ciascuna delle ineguaglianze (2), a prescindere dalle altre. Queste probabilità corrispondono alle  $p_{e_1}, p_{e_2}, \dots, p_{e_n}$  che entrano nella formola di Boole, mentre la probabilità relativa alla *coesistenza* delle (2) corrisponde alla  $p_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  della formola stessa.

A confini superiori convenienti delle probabilità indicate, si perviene usufruendo dei valori medi delle variabili casuali simbolicamente rappresentate da alcune potenze di  ${}_x M_{(s)} - X_{(s)}, \dots, {}_z M_{(v)} - Z_{(v)}$ .

Le espressioni che si ottengono riescono però complicate, nelle applicazioni, quando si vada oltre la quarta potenza. È perciò che mi limito a considerare soltanto le potenze non superiori alla quarta, scartando, anche per semplicità, la terza potenza la quale, ordinariamente, non ha grande peso nei risultati.

Vale il seguente teorema, che mi limito ad enunciare:

*Il confine superiore più conveniente della probabilità che non sia*

$$(8) \quad -\lambda \sqrt{\sigma_2} \leq M - X \leq +\lambda \sqrt{\sigma_2}$$



Se al crescere di  $s, t, \dots, v$ , i valori

$$\alpha\sigma_{2,(s)}, \dots, z\sigma_{2,(v)}, h(x, s), \dots, h(z, v)$$

si mantengono inferiori ad un numero finito assegnato, e i valori  $\alpha\alpha_s, \dots, z\alpha_v$  superiori ad un numero  $a > 0$ , si ha

$$(14) \quad \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \\ \vdots \\ v \rightarrow \infty}} P_{(s,t,\dots,v)} = 1.$$

5. Quando si tratti di un gran numero di variabili casuali  $X_{(s)}, Y_{(t)}, \dots, Z_{(v)}$  può convenire di adottare, invece della (12), un'altra espressione che da essa si deduce.

Valgono, identicamente, la relazione

$$(15) \quad \frac{h(x, s) - 1}{\alpha\lambda_s^4 - 2\alpha\lambda_s^2 + h(x, s)} = \frac{h(x, s) - 1}{\alpha\lambda_s^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{\alpha\lambda_s^2} + \frac{h(x, s)}{\alpha\lambda_s^4}}$$

e le analoghe per le variabili casuali  $Y_{(t)}, \dots, Z_{(v)}$ . Se al denominatore dell'ultimo fattore della (15), e delle analoghe, si sostituisce un confine inferiore  $L$  dei denominatori stessi, si deduce dalla (12) il confine inferiore di  $P_{(s,t,\dots,v)}$ ; meno conveniente del precedente,

$$(16) \quad 1 - \frac{1}{L} \left[ \frac{h(x, s) - 1}{\alpha\lambda_s^4} + \dots + \frac{h(z, v) - 1}{z\lambda_v^4} \right]$$

ma più agevole per le determinazioni numeriche.

Ricordando, poi, che valgono le relazioni

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} E[xM_{(s)} - X_{(s)}]^4 = \frac{\alpha\sigma_{4,(s)}}{s^3} + 3 \left(1 - \frac{1}{s}\right) \frac{\alpha\sigma'_{2,(s)}}{s^2}, \dots \\ \dots \\ E[zM_{(v)} - Z_{(v)}]^4 = \frac{z\sigma_{4,(v)}}{v^3} + 3 \left(1 - \frac{1}{v}\right) \frac{z\sigma'_{2,(v)}}{v^2}, \dots \end{array} \right.$$

se si tengono pure presenti le (10), (11), (13), quando si ammetta che siano  $A, B$  confini superiori finiti, rispettivamente delle successioni  $\alpha\sigma_{4,(s)}, \dots, z\sigma_{4,(v)}$ ;  $\alpha\sigma'_{2,(s)}, \dots, z\sigma'_{2,(v)}$  e che sia  $C_1$  un confine inferiore della successione  $\alpha\sigma_{2,(s)}, \dots, z\sigma_{2,(v)}$ , si ricava, dalla (16), l'altra ineguaglianza

$$(18) \quad P_{(s,t,\dots,v)} > 1 - \frac{1}{L} \left[ A \left( \frac{1}{\alpha\alpha_s^4 s^3} + \dots + \frac{1}{z\alpha_v^4 v^3} \right) + \right. \\ \left. + (3B - C_1^2) \left( \frac{1}{\alpha\alpha_s^4 s^2} + \dots + \frac{1}{z\alpha_v^4 v^2} \right) \right].$$

Se, inoltre, è:  $C$  un confine superiore finito di  ${}_x\sigma_{z,(s)}, \dots, {}_x\sigma_{z,(v)}$ ;  $\alpha$  un confine inferiore di  ${}_x\alpha_s, \dots, {}_x\alpha_v$ ;  $r$  un analogo confine dei numeri  $s, t, \dots, v$ , si può porre

$$(19) \quad L = 1 - \frac{2}{\alpha^2} \cdot \frac{C}{r}.$$

La (18), meno conveniente della (16), è tale che, pur sostituendo in essa il secondo membro della (19), conduce, quando si applichi al caso particolare in cui le variabili casuali  $X_{(s)}, \dots, Z_{(v)}$  coincidano con le variabili  $X_{(s)}, X_{(s+1)}, \dots, X_{(v)}$ , di cui alla Nota precedente, e poi venga estesa al caso di una successione illimitata di variabili  $X_{(s)}, X_{(s+1)}, \dots$ , tenuto conto che la successione  $M_{(s)}, M_{(s+1)}, \dots$  tenda ad un limite  $M$ , a risultati più espressivi di quelli corrispondenti indicati nella Nota stessa, purchè  $s$  sia sufficientemente elevato. Ma su ciò non mi intrattengo oltre.

6. L'altra applicazione del teorema di Boole, della quale mi occupo, riguarda la *teoria del rischio* nelle assicurazioni <sup>(5)</sup>. Evito, per semplicità, il linguaggio e i particolari inerenti alla tecnica assicurativa.

Si immagini un Istituto il quale, al tempo  $t$ , abbia assunto degli impegni verso un numero  $N$  di assicurati, dai quali riceva in compenso certe somme. Si ammetta che siano rappresentabili per mezzo di una variabile casuale  $X_{(0,r)}$  le perdite, positive o negative (guadagni), che può subire l'Istituto stesso, nell'intervallo  $(t, t+r)$ , a seconda dei diversi raggruppamenti cui possono dar luogo le eliminazioni degli  $N$  individui dall'Istituto considerato.

Mi pongo, per semplicità, nel caso in cui sia, per qualunque valore intero di  $r$ ,  $E[X_{(0,r)}] = 0$  e considero

$$(20) \quad E[X_{(0,r)}]^2 = M_r.$$

Sarà  $M_r = 0$  per ogni  $r \geq \omega$ , se è nulla la probabilità che, dopo l'epoca  $t + \omega$ , qualcuno degli  $N$  individui considerati non si sia eliminato dall'Istituto.

Siccome un confine inferiore della probabilità  $P_1$  che sia

$$(21) \quad -\infty < X_{(0,\omega)} \leq \lambda \sqrt{M_\omega}$$

è espresso <sup>(6)</sup> da  $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$ , si può dire che l'Istituto resta garantito, al

<sup>(5)</sup> Cfr. H. Poterin du Motel, *Technique de l'assurance sur la vie* (d'après l'article allemand de G. Bohlmann) [Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, tome I, vol. IV, fasc. IV (1911), pp. 575-590]. U. Broggi, *Matematica attuariale* [Hoepli, Milano (1906), pp. 307-344].

<sup>(6)</sup> loc. cit. <sup>(4)</sup>.

tempo  $t$ , con una probabilità superiore a  $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$  che, alla fine del periodo  $(t, t + \omega)$ , la perdita non superi la somma  $\lambda \sqrt{M_\omega}$ .

Confini inferiori più elevati di  $P_1$  possono ottenersi tenendo conto dei valori medi delle potenze superiori alla seconda di  $X_{(0, \omega)}$ ; si ottengono espressioni, anche limitandosi alla quarta potenza, che generalmente conducono, nel caso studiato, a calcoli lunghi sì che, almeno per ora, sono da scartare. Se, però, il numero  $N$  degli individui considerati è sufficientemente grande vale ordinariamente, per le perdite, con buona approssimazione, la legge di probabilità gaussiana degli errori e si può scrivere

$$(22) \quad P_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

7. Si può ricercare, invece, la probabilità  $P_2$  che la perdita dell'Istituto non superi la somma  $\lambda \sqrt{M_\omega}$  alla fine di tutti i periodi  $(t, t + r)$ ,  $r = 1, 2, \dots, \omega$ .

L'applicazione del teorema di Boole permette di asserire, quando valga, per le perdite, la legge di probabilità sopra indicata, in ogni periodo  $(t, t + r)$ , e quando si ponga

$$(23) \quad m_r = \frac{M_\omega}{M_r},$$

che un confine inferiore di  $P_2$ , ossia della probabilità della *coesistenza* delle ineguaglianze

$$(24) \quad -\infty < X_{(0,1)} \leq \lambda \sqrt{M_\omega}, \dots, -\infty < X_{(0,\omega)} \leq \lambda \sqrt{M_\omega},$$

è dato da

$$(25) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=1}^{\omega} \int_{\lambda \sqrt{\frac{m_r}{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

8. Si ha normalmente  $M_1 < M_2 < \dots < M_\omega$  e se si ha pure, ad es.,  $\omega \leq 100$ , la (25) permette di scrivere

$$(26) \quad P_2 > 1 - \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Se si vuole che sia  $P_2 = P_1$ , il valore  $\lambda_1$  di  $\lambda$ , cui si riferisce  $P_2$ , non potrà essere inferiore al valore di  $\lambda$  cui si riferisce  $P_1$ . Assegnato  $P_1$ , le

(22), (26) permettono di dedurre immediatamente che un valore  $l$ , più elevato di  $\lambda_1$ , si ha dall'equazione

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{l}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Risulta, per i valori di  $\lambda$  che più interessano:

$$\lambda = 3, l = 4,19 \dots; \quad \lambda = 4, l = 4,97 \dots$$

La questione, sopra indicata, inerente alla teoria del rischio, richiede ulteriori considerazioni quando si connetta col normale svolgimento degli affari di un Istituto di assicurazioni.

*Correzioni alla Nota precedente:* Al denominatore della seconda delle formole (15) togliere il fattore  $\frac{1}{2}$ ; al denominatore del 2° membro della (25) sostituire  $2^{s-1}$  a  $2^s$ ; a pag. 45 sostituire 10.000.000.000 a 1.000.000.000.

**Matematica.** — *Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative.* Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Risulta dalle ricerche del prof. Volterra sulle operazioni di composizione e sulle funzioni permutabili che ad ogni problema algebrico o differenziale, — la cui soluzione si ottenga con funzioni che siano, nell'intorno dell'origine, olomorfe, oppure presentino un punto di diramazione od un polo, oppure una singolarità logaritmica, — corrisponde, secondo una determinata regola, un problema integrale o integro-differenziale che si risolve con funzioni olomorfe in tutto il piano oppure dotate, tutt'al più, delle singolarità dianzi accennate. Queste ricerche hanno la loro base nel noto volume *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IX-XIII, e trovano il loro completamento nella recente Memoria *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione* (Mem. d. R. Acc. d. Lincei, ser. 5<sup>a</sup>, vol. XI, fasc. 4<sup>o</sup>, 1916), dove sono definite, almeno per la composizione di 1<sup>a</sup> specie, le potenze di composizione ad esponente qualunque, nonchè i logaritmi di composizione.

Consideriamo per semplicità un'equazione differenziale ordinaria:

$$(A) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

L'equazione integro-differenziale ad essa correlativa si ottiene nel modo seguente: scriviamo  $hx$  in luogo di  $x$ , e  $\frac{y}{k}$  in luogo di  $y$ , essendo  $h$  e  $k$  due parametri indipendenti da  $x$ ; la (A) diventa

$$F\left(hx, \frac{y}{k}, \frac{y'}{hk}, \dots, \frac{y^{(n)}}{hk^n}\right) = 0,$$

ossia, riducendo a forma intera col moltiplicare per convenienti potenze di  $h$  e di  $k$ :

$$\Phi(x|h, k|y, y', \dots, y^{(n)}) = 0;$$

dopo ciò sostituiamo ad  $h$  e  $k$  due funzioni  $\varphi(\lambda, \mu)$  e  $\psi(\lambda, \mu)$  delle due nuove variabili  $\lambda$  e  $\mu$ , permutabili fra di loro, e interpretiamo i prodotti e le potenze di  $\varphi, \psi, y, y', \dots, y^{(n)}$  come delle composizioni. L'ultima equazione si muta così in un'equazione integro-differenziale, cioè (per limitarci alla composizione di 1<sup>a</sup> specie):

$$(B) \quad \Phi(x|\varphi, \psi|y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

e se la (A) ammette una soluzione

$$y = f(x)$$

il cui comportamento nell'intorno dell'origine sia quello indicato dianzi, se ne deduce per la (B) la soluzione

$$y(x|\lambda, \mu) = \check{\psi} f(x\check{\varphi}),$$

la quale si costruirà, qualora  $f(x)$  non sia olomorfa, mediante funzioni di  $\lambda$  e  $\mu$  non più di *ordine* intero e positivo.

2. Vi sono però delle equazioni differenziali che apparentemente sfuggono al principio generale di dare luogo, attraverso alla regola di Volterra, ad un'equazione integro-differenziale correlativa. Tale è, per esempio, l'equazione

$$(a) \quad xy' + y = 0.$$

Se difatti scriviamo  $hx$  in luogo di  $x$ , e  $\frac{y}{k}$  in luogo di  $y$ , sparisce, dopo averla moltiplicata per  $k$ , ogni traccia dei parametri  $h$  e  $k$ .

Anche fra le equazioni a derivate parziali si trovano facilmente analoghi esempi. Così l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{a}{v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{b}{u} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

con  $a$  e  $b$  costanti, non si altera quando si sostituiscia  $h_1 u$  ad  $u$ ,  $h_2 v$  a  $v$ , e  $\frac{\theta}{k}$  a  $\theta$ .

Limitandoci alle equazioni differenziali ordinarie (l'estensione alle equazioni alle derivate parziali non presenta difficoltà) cominceremo col caratterizzare la forma che spetta al primo membro della (A) nell'ipotesi che l'equazione manchi, come accade per la (a), di equazione integro-differenziale correlativa. Vedremo poi successivamente come questo difetto non sia, per così dire, che apparente, potendosi dare, con una trasformazione semplicissima, alle equazioni in discorso una forma tale da farle rientrare nella regola generale.

3. La più generale equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  si può scrivere nel modo seguente:

$$(1) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv \sum C(x) y^i (y')^{i_1} (y'')^{i_2} \dots (y^{(n)})^{i_n} = 0,$$

dove  $i, i_1, \dots, i_n$  sono dei numeri interi, positivi o nulli, e  $C(x)$  è una funzione qualunque di  $x$ . Facciamo la sostituzione

$$(2) \quad x = h\xi, \quad y = \frac{\eta}{k};$$

il termine generale della (1) diventa:

$$\Gamma(\xi) \frac{\eta^i (\eta')^{i_1} (\eta'')^{i_2} \dots (\eta^{(n)})^{i_n}}{h^p k^q},$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi) &= C(h\xi) \\ p &= i + 2i_1 + \dots + ni_n \\ q &= i + i_1 + i_2 + \dots + i_n, \end{aligned}$$

e rappresentando con  $\eta', \eta'', \dots$  derivate rispetto a  $\xi$ .

Con ciò ogni termine di  $F$  riceve intanto un fattore

$$\frac{1}{h^p k^q},$$

diverso, naturalmente, da termine a termine.

Scriviamo ora la (1) in modo che in un suo termine si abbia  $C(x) = 1$ ; dividiamo cioè tutta l'equazione per uno qualunque dei coefficienti  $C$ , e indichiamo con  $P$  e  $Q$  i valori di  $p$  e  $q$  in quel termine in cui  $C = 1$ . In virtù della sostituzione (2) questo termine si altera esattamente pel fattore

$$\frac{1}{h^p k^q}.$$



Partiamo ora dall'ipotesi che questa sostituzione debba lasciare invariata la (1). Ciò significa che in seguito alla sostituzione (2) il primo membro della (1), ossia  $F$ , potrà risultare moltiplicato tutt'al più per un fattore indipendente da  $\eta', \dots, \eta^{(n)}$ . Questo fattore dovrà comparire nei singoli termini di  $F$ , e proverrà, per ciascun termine, in parte dal fattore  $C(x)$  ed in parte dall'altro fattore

$$Y = y^i (y')^{i_1} \dots (y^{(n)})^{i_n}.$$

Ma poichè vi è un termine, quello in cui  $p$  e  $q$  hanno i valori  $P$  e  $Q$ , che viene moltiplicato precisamente per  $\frac{1}{h^p k^q}$ , tutti i rimanenti termini di  $F$  dovranno ricevere questo moltiplicatore; e poichè la parte  $Y$  si moltiplica per  $\frac{1}{h^p k^q}$ , così la parte residua  $C(x)$  deve ricevere un fattore del medesimo tipo. Osservando infine che  $C$  è indipendente da  $y$ , ne risulta che dev'essere:

$$C(x) = \frac{c}{x^j},$$

dove  $c$  indica una costante qualunque, mentre  $j$  è un numero intero legato a  $p$  dalla relazione

$$(3) \quad p + j = P.$$

Quanto a  $q$  è chiaro che dovrà avere il medesimo valore in tutti i termini, cioè:  $q = Q$ .

L'equazione (1) prende dunque la forma

$$(4) \quad \sum \frac{c}{x^j} y^i (y')^{i_1} \dots (y^{(n)})^{i_n} = 0:$$

il suo primo membro è un polinomio omogeneo in  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , e l'esponente  $j$  di  $\frac{1}{x}$  si potrà sempre supporre positivo o nullo, e quindi per la (3)  $P$  indicherà il massimo valore di  $p$ . I coefficienti  $c$  non vanno soggetti ad alcuna restrizione.

4. Vogliasi p. es. costruire le equazioni del tipo (4) del 1° ordine. Dovremo porre  $i_2 = \dots = i_n = 0$ , e la (4) si riduce alla seguente:

$$(5) \quad x^n y'^n + c_1 x^{n-1} y y'^{n-1} + \dots + c_{n-1} x y^{n-1} y' + c_n y^n = 0;$$

essa si scinde in  $n$  (od in un numero minore) di equazioni lineari

$$xy' = \gamma y, \quad (\gamma \text{ costante})$$

i cui integrali sono

$$(6) \quad y = \beta x^\gamma, \quad (\beta \text{ cost. arbitraria}).$$

Un secondo esempio notevole ci viene fornito dalle equazioni lineari d'ordine  $n$ , che assumono la forma:

$$(7) \quad x^n y^{(n)} + c_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_{n-1} x y' + c_n y = 0.$$

È l'equazione di Cauchy, alla quale si soddisfa ponendo

$$(8) \quad y = x^\alpha,$$

e ricavando  $\alpha$  dall'equazione (fondamentale)

$$\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) + c_1 \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 2) + \dots + c_{n-1} \alpha + c_n = 0.$$

Se questa ha le radici tutte distinte, la (7) ammette  $n$  integrali distinti della forma (8); se invece ha  $r$  radici eguali ad  $\alpha$ , accanto all'integrale (8) avremo gli altri

$$(8') \quad x^\alpha \lg x, x^\alpha \lg^2 x, \dots, x^\alpha \lg^{r-1} x.$$

Tanto la (6) quanto le (8) e (8'), che forniscono rispettivamente gli integrali della (5) e della (7), contengono delle funzioni alle quali corrispondono, nella teoria della composizione, delle funzioni o delle operazioni aventi un significato preciso; queste nuove espressioni non si saprebbero tuttavia considerare come soluzioni di equazioni integro-differenziali relative alle equazioni differenziali (5) e (7).

5. Trasformiamo la (4) col porre:  $x = e^\xi$ . Poichè la (4) è omogenea rispetto ad  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , e pel modo come contiene  $x$ , il primo membro si riduce al prodotto di  $e^{-r\xi}$  per un polinomio omogeneo in  $y, y', \dots, y^{(n)}$  a coefficienti costanti, rappresentando con  $y' y'' \dots$  derivate rispetto a  $\xi$ . Indicando allora con

$$\Phi(y y' \dots y^{(n)})$$

un tale polinomio, l'equazione trasformata si scrive:

$$(9) \quad \Phi(y y' \dots y^{(n)}) = 0.$$

Ora questa equazione si trova nelle condizioni volute per dare luogo, attraverso alla regola di Volterra, all'equazione integro-differenziale correlativa. Difatti la sostituzione (2) la muta in un'equazione del medesimo tipo, dalla quale si staccherà per conseguenza il fattore  $\frac{1}{k^\alpha}$  (e quindi non rimarrà

traccia del parametro  $h$ , non essenziale del resto), mentre in ogni termine comparirà come fattore una certa potenza di  $h$ , diversa generalmente da termine a termine.

In conclusione, all'equazione (4) si può associare un'equazione integro-differenziale correlativa, purchè si eseguisca su  $x$  e  $y$ , invece della sostituzione (2), l'altra:

$$(10) \quad x = e^{h\xi} \quad , \quad y = \eta .$$

Nell'equazione trasformata, il cui primo membro sarà un polinomio omogeneo in  $\eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$  a coefficienti costanti, i vari termini conteranno  $h$  a potenze differenti (che si potranno sempre supporre ad esponente positivo o nullo); non resta che porre in luogo di  $h$  una qualunque funzione  $\psi$  di due variabili  $\lambda$  e  $\mu$ , e interpretare i prodotti e le potenze di  $\psi, \eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$  come composizioni.

6. Applicando questo procedimento all'equazione differenziale (7), la sostituzione (10) la trasforma nell'equazione a coefficienti costanti  $\gamma_1 \gamma_2 \dots$ :

$$(11) \quad y^{(n)} + \gamma_1 h y^{(n-1)} + \dots + \gamma_{n-1} h^{n-1} y' + \gamma_n h^n y = 0 ,$$

da cui si deduce l'equazione integro-differenziale

$$(12) \quad y^{(n)} + \gamma_1 \check{\psi}(\lambda\mu) \check{y}^{(n-1)}(\xi|\lambda\mu) + \dots \\ + \gamma_{n-1} \check{\psi}^{n-1}(\lambda\mu) \check{y}'(\xi|\lambda\mu) + \gamma_n \check{\psi}^n(\lambda\mu) \check{y}(\xi|\lambda\mu) = 0 .$$

Agli integrali della (7) del tipo

$$(13) \quad y = x^\alpha$$

oppure

$$(13') \quad y = x^\alpha \lg^r x$$

corrispondono gli integrali della (11)

$$y = e^{h\alpha\xi} \quad , \quad y = h^r \xi^r e^{h\alpha\xi} ,$$

e quindi le soluzioni della (12):

$$y(\xi|\lambda\mu) = 1 + \alpha\xi\psi(\lambda\mu) + \frac{1}{2!} \alpha^2 \xi^2 \check{\psi}^2(\lambda\mu) + \dots \\ y(\quad) = \xi^r \check{\psi}^r(\lambda\mu) + \alpha \xi^{r+1} \check{\psi}^{r+1} + \frac{1}{2!} \alpha^2 \xi^{r+2} \check{\psi}^{r+2} + \dots$$

Questi sviluppi sono convergenti in tutto il piano, e rappresentano funzioni di  $\lambda$  e  $\mu$  permutabili con  $\psi$ : s'intende che per il primo sviluppo, che non è nullo per  $\xi=0$ , la composizione dovrà essere definita nel senso specificato a pag. 138 delle *Leçons sur les fonctions de lignes*.

È da segnalare il fatto che, partendo dall'equazione differenziale (7) e da un suo integrale (13) o (15'), in generale non olomorfo, si perviene, attraverso alla sostituzione (10), ad un'equazione integro-differenziale correlativa, le cui soluzioni corrispondenti a quegli integrali sono sempre olomorfe in tutto il piano.

7. Passando in generale all'equazione differenziale (4), notiamo in primo luogo ch'essa ammette sempre, al pari della (7), degli integrali della forma (13), e sotto certe condizioni, cui debbono soddisfare i suoi coefficienti, ammette pure degli integrali della forma (13'). Consideriamo più generalmente quegli integrali che presentano, intorno all'origine, lo sviluppo

$$(14) \quad y = x^\alpha \lg^r x (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots),$$

dove  $\alpha$  indichi un numero qualunque ed  $r$  un intero positivo o nullo. La sostituzione

$$x = e^{h\xi}$$

trasforma la (4) in un'equazione

$$\Phi(y y' \dots y^{(n)} | h) = 0$$

in cui la  $\xi$  non figura esplicitamente, e per la quale lo sviluppo (14) diventa :

$$(15) \quad y = h^r \xi^r e^{h\alpha\xi} (a_0 + a_1 e^{h\xi} + a_2 e^{2h\xi} + \dots).$$

Ora la serie

$$a_0 + a_1 x + \dots$$

è convergente in un certo cerchio col centro nell'origine; ne segue che la serie

$$(16) \quad a_0 + a_1 e^{h\xi} + a_2 e^{2h\xi} + \dots$$

sarà convergente in tutto un campo infinito limitato da una retta parallela all'asse delle ordinate ed estendentesi nel senso delle ascisse negative.

La (15) dà quindi, col sostituire agli esponenziali i loro sviluppi in serie di potenze e ad  $h$  una funzione  $\psi(\lambda\mu)$ , e interpretando al solito le potenze di  $\psi$  come composizioni, una serie convergente in tutto il piano, soluzione dell'equazione integro-differenziale che possiamo ora chiamare correlativa della (4). Si potrà sempre dire che questa soluzione è permutabile con la funzione  $\psi(\lambda\mu)$ : soltanto bisognerà osservare, quando  $r = 0$ , che se il campo di convergenza della serie (16) non comprende il punto  $\xi = 0$ , allora si dovrà assumere la composizione nel senso più ampio come già si specificò nel caso particolare esaminato al n. 6.

Storia della Matematica. — *Sur les nombres infinis de Fontenelle*. Nota del prof. BRANISLAV PETRONIEVICS, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le premier essai d'une théorie rationnelle des nombres infinis a été fait par B. Fontenelle dans ses *Éléments de la Géométrie de l'Infini* (1). Que cette théorie soit pleine de contradictions, la critique l'a bientôt relevé (2). Mais qu'elle possède une valeur historique incontestable, comparée avec les deux théories modernes des nombres infinis, celle de M. Cantor et celle de M. Veronese, c'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

Comme on le sait, les deux théories modernes ont des points de départ tout à fait différents. Tandis que la théorie de Cantor procède arithmétiquement en partant des nombres finis et en définissant  $\omega$ , le premier nombre infini, comme nombre de tous les nombres finis (3), celle de Veronese procède géométriquement, en définissant le nombre infini de premier ordre  $\infty$  comme nombre de segments égaux à l'unité (AB) d'un segment de droite infini ( $AA^\infty$ ), qui peut être divisé en un nombre fini de parties infinies (4).

(1) Fontenelle B. *Éléments de la Géométrie de l'Infini*, Paris, MDCCXXVII.

(2) Mac Laurin, *Treatise on the Theory of Fluxions*, Introduction, trad. franç., MDCCXLIX, t. I, p. XLI-XLVI. — Card. G. S. Gerdil, *Opere edite ed inedite*, Roma, MDCCCVI, t. IV, p. 261-286 (« Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanens, soit successifs »; cet essai a été imprimé pour la première fois à Paris 1760; la critique de Fontenelle y est contenue dans § 1 et 2, p. 263-276). — Achard F., *Reflexions sur l'infini mathématique*, dans Mémoires de l'Académie royale, Berlin 1745, p. 143-154 (cité par Veronese, *Fondamenti di Geometria*, p. 620).

(3) Cantor distingue parmi les nombres transfinites deux sortes de nombres: nombres ordinaux et nombres cardinaux, en définissant les premiers comme types d'ordre des ensembles bien ordonnés et les seconds comme résultats de double abstraction de la qualité et de l'ordre des éléments dans les ensembles (comp. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen, Bd. 46, p. 481 et Bd. 49, p. 216). Tandis que à chaque nombre ordinal fini correspond un nombre cardinal fini, il y a une infinité de nombres transfinites ordinaux, appartenant tous à la même classe, qui correspondent au même nombre cardinal transfinites (l. c., Bd. 49, p. 220).

(4) Comp. G. Veronese, *Fondamenti di Geometria*, Padova. 1891 Ip. III et IV, p. 84, 92 et Def. II, § 86, p. 97. — M. Veronese, pour introduire ses nombres infinis et infinis petits, part de la définition du système linéaire homogène, tel que étant donné un de ses éléments quelconques il existe dans le système deux segments égaux à un segment donné quelconque, qui ont respectivement le second et le premier extrême dans l'élément

Veronese veut établir, qu'il ny a aucun point de la ligne droite infinie, qui puisse correspondre au nombre  $\omega$  de Cantor, c'est à dire que, selon lui, l'application géométrique des nombres transfinites de Cantor n'est pas possible (1). Mais la différence la plus essentielle des deux théories, c'est le critère de l'égalité des ensembles infinis, en tant que ces ensembles forment la base des nombres infinis, leurs types d'ordre.

D'après Cantor, ce critère consiste dans la correspondance univoque (ou biunivoque) des nombres de deux ensembles, tandis que, d'après Veronese, c'est la possession d'éléments qualitativement égaux qui, outre la correspondance, détermine l'égalité de deux ensembles infinis (2).

La théorie de Fontenelle a le même point de départ que celle de Cantor. « Pour mieux concevoir l'Infini, je considère la suite naturelle des nombres, dont l'origine est 0 ou 1. Chaque terme croit toujours d'une unité, & je vois que cette augmentation est sans fin, & que quelque grand que soit le nombre où je serai arrivé, je n'en suis pas plus proche de la fin de la suite, ce qui est un caractère qui ne peut convenir à une suite dont le nombre des termes serait fini. Donc la Suite naturelle a un nombre de termes infini (Fontenelle, op. c., p. 29) (3). Mais tandis que d'après Cantor

---

donné; sans qu'il subsiste entre deux segments quelconques  $a$  et  $b$  du système l'axiome d'Archimède, c'est à dire l'axiome que si  $a < b$  il y a un nombre entier fini  $n$  tel que  $a.n > b$ .

(1) Comp. Veronese, op. c., § 90, p. 102-106.

(2) D'après Cantor deux ensembles sont « semblables » (ähnlich), quand on peut établir une correspondance univoque de leurs éléments d'après leur ordre (l. c. Bd. 46, p. 497 s.). « Égaux ou équivalents » (äquivalent) sont des ensembles, quand on peut établir une correspondance univoque de leurs éléments (ib., p. 482).

Quand on veut établir l'égalité de deux ensembles infinis, il ne suffit pas, d'après Veronese, qu'il y ait une correspondance univoque entre leurs éléments, il faut qu'il y ait en outre identité qualitative de ces éléments. Veronese attribue aux éléments des ensembles trois propriétés différentes: 1. la position, 2. la qualité et 3. l'ordre (op. c., Def. I, § 38, p. 15). La qualité des éléments servant de base à la différence entre le tout et la partie (Def. II, § 27, p. 9), le nombre ordinal est défini alors par Veronese comme type d'ordre d'un ensemble ordonné, où l'on a fait uniquement abstraction de la position des éléments, la relation de partie et du tout et la relation de l'ordre étant conservées (op. c., Def. II, § 45, p. 26). Fait-on abstraction de la relation de partie et du tout, on a le nombre ordinal de Cantor, et si l'on va enfin jusqu'à faire abstraction aussi de l'ordre, on parvient au nombre cardinal de Cantor. Veronese ne conteste donc point la valeur logique des nombres de Cantor, il les tient seulement pour des notions purement arithmétiques incapables d'être appliqués à la ligne droite (comp. aussi son article *Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali*, Math. Annalen, Bd. 47. p. 426 f.).

(3) Que Fontenelle ait clairement conçu le nombre  $\omega$ , cela est confirmé encore mieux par les mots suivants, qui, dans son texte, viennent immédiatement après les mots cités dans le nôtre:

« En vain dirait-on que le nombre des termes qui la compose est toujours actuellement

le nombre  $\omega$  se trouve *hors* de la suite naturelle des nombres finis <sup>(1)</sup>, le nombre infini de tous les nombres finis se trouve d'après Fontenelle dans cette suite même comme son dernier terme <sup>(2)</sup>, Tandis que d'après Cantor  $1 + \omega = \omega$ , mais  $\omega + 1 > \omega$ , on a en général d'après Fontenelle, qui ne distingue pas ces deux cas,  $\infty + a = \infty$ , mais  $\infty + \infty = 2 \infty$  <sup>(3)</sup>. Tandis que d'après Cantor il y a deux principes de formation des nombres transfinis, il n'en existe chez Fontenelle qu'un seul, le principe des séries des nombres infinis correspondant à la suite naturelle de nombres finis <sup>(4)</sup>.

---

fini, mais que je le puis toujours augmenter. Il est bien vrai que le nombre des termes que je puis actuellement parcourir ou arranger selon leur ordre, est toujours fini, mais le nombre des termes dont la suite est composée en elle-même, est autre chose. Les termes dont elle est composée en elle-même existent tous également, et si je la conçois poussée seulement jusqu'à 100, je ne donne pas à ces 100 termes une existence dont soient privés tous ceux qui sont par de-là. Donc tous les termes de la suite, quoique-qu'ils ne puissent pas être embrassés ou considérés ensemble par mon esprit, sont également réels. Or le nombre en est infini, comme on vient de le prouver, donc un nombre infini existe aussi réellement que les nombres finis » (op. c., § 84, p. 29 et s.).

Veronese reconnaît aussi Fontenelle pour un des précurseurs de l'idée du nombre  $\omega$ ; mais il trouve que Gerdil, un de critiques de Fontenelle (comp. remarque 2), l'aurait conçu mieux que Fontenelle (Veronese, op. c., p. 620). Cependant, si l'on compare le texte de Gerdil cité par Veronese (p. 620 s.) avec le texte de Fontenelle, ici communiqué in extenso, on ne peut pas partager cette opinion.

(1) D'après Cantor le nombre  $\omega$  est un nombre limite (« eine Grenzzahl »), qui n'est précédé par aucun nombre plus petit (l. c., Bd. 49, p. 226 et 231; comp. aussi son article *Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten*, dans *Zeitschrift für Philosophie*, vol. 91, p. 84).

(2) « Dans la suite naturelle chaque terme est égal au nombre des termes qui sont depuis 1 jusqu'à lui inclusivement. Donc puisque le nombre de tous ses termes est infini, elle a un dernier terme qui est ce même infini.

« On l'exprime par ce caractère  $\infty$ .

« Il ne faut point que le mot de *dernier terme* effraye en cette matière. C'est un dernier terme fini que la suite naturelle n'a point, mais n'en avoir point de dernier fini, ou en avoir un dernier infini, c'est la même chose » (Fontenelle, op. c., p. 30).

(3) «  $\infty$  ne peut plus être augmenté par les grandeurs qui l'avaient augmenté jusque-là, car il a reçu d'elles tout ce qu'il pouvait recevoir d'augmentation. Et si  $a$  n'augmente pas  $\infty$ , il ne le diminue pas non plus quand il en est retranché. Donc  $\infty \pm a = \infty$  » (Fontenelle, op. c., pag. 31).

« — —  $\infty$ , qui est 1 devenue infini par une augmentation sans fin, ou une grandeur fini qui est sortie de l'ordre du fini, & a passé dans celui de l'infini, ne peut plus être augmenté par tout ce qui est de l'ordre du fini dont elle n'est plus, mais seulement par ce qui est de l'ordre de l'infini, dont elle a commencé d'être » (ib., p. 32).

(4) Comp. Cantor, l. c., Bd. 49, p. 223, 221 et 226. Le premier principe de production des nombres transfinis consiste dans l'addition de 1 à un nombre précédant, et le deuxième dans la position d'un nouveau nombre (nombre limite) d'après la formule  $\alpha = \text{Lim. } \alpha_n$ , les nombres  $\alpha_n$  représentant une « série fondamentale » (Fundamentalreihe) et la série fondamentale étant une série de type  $\omega$  (l. c., Bd. 46, p. 508).

Le principe de production des nombres infinis est exprimé par Fontenelle dans des termes suivants.

« Il suit & de tout ce qui a été dit, & de la nature de la chose, que  $\infty$  étant gran-

Comme on le voit, autant par son point de départ que par la manière d'après laquelle sont déduits les nombres infinis supérieurs, la théorie de Fontenelle se rapproche sensiblement de celle de M. Cantor. Mais les ressemblances avec la théorie de M. Veronese ne sont pas moins grandes. En mettant le nombre  $\omega$  dans la série des nombres naturels comme son dernier terme, Fontenelle admet la divisibilité de son nombre  $\infty$  en parties égaux, c'est à dire les nombres infinis de la forme  $\frac{\infty}{n}$  <sup>(1)</sup>, comme Veronese admet de tels nombres d'après la définition même de son nombre  $\infty$ . Mais tandis que Veronese admet, d'après son principe d'égalité des ensembles infinis, des nombres de la forme  $\infty - n$  et  $\infty + n$ , Fontenelle, comme nous l'avons déjà vu, n'admet point de tels nombres. La différence est encore plus grande quant à la production des nombres infinis des ordres supérieurs. Tandis que d'après Fontenelle, comme nous l'avons vu, ces nombres sont produits d'après un principe analogue au deuxième principe de Cantor, Veronese déduit ces nombres en appliquant le principe, qui lui permet d'obtenir son nombre infini de premier ordre, un nombre fini (les infinis d'ordre fini), ou un nombre infini de fois (les infinis d'ordre infini) <sup>(2)</sup>.

Mais les deux théories ont de commun, par opposition à celle de Cantor <sup>(3)</sup>, la supposition de nombres infiniment petits, quoique la manière de déduire ces nombres soit bien différente chez eux deux. Fontenelle en déduit la nécessité, en partant de la suite des fractions  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  etc. qui

deur, est susceptible d'augmentation, pourvu que les grandeurs que l'on concevra l'augmenter soient grandeurs par rapport à lui, c'est à dire infinies. Ainsi l'on peut concevoir cette nouvelle suite  $\infty, 2\infty, 3\infty, \&c$  qui sera une progression arithmétique, dont la différence sera  $\infty$ , & comme la différence de 1 à  $\infty$  ou  $\infty - 1$  est  $=\infty$ , cette progression pourra commencer par 1, & on aura  $\div 1\infty, 2\infty, 3\infty, \&c$ .

« Puisque dans cette nouvelle progression les coefficients de  $\infty$  croissent toujours selon la suite des nombres naturelles, elle se terminera enfin par  $\infty \times \infty = \infty^2$  » (op. c., p. 33).

En élevant la progression  $1, \infty, \infty^2, \infty^3, \dots \infty^\infty$  au carré, cube, etc.  $\infty$ , on arrive d'après Fontenelle (p. 40) à la progression:  $1^\infty, \infty^\infty, \infty^{2\infty}, \infty^{3\infty}, \dots \infty^{\infty^2}$ , et en appliquant le même procédé à cette progression, à la progression dont le dernier terme sera  $\infty^{\infty^3}$ .

« Il est visible, que ces élévations n'ont point du fin, qu'on irait jusqu'à une progression dont le dernier terme serait  $\infty^{\infty^\infty}$ , & que là même on recommencerait encore à faire des élévations sans fin » (op. c., p. 40).

<sup>(1)</sup> La divisibilité de  $\infty$  par  $n$ , nombre fini, est déduite par Fontenelle de la propriété générale d'une grandeur d'être divisible. (Comp. op. c., § 93, p. 32 et § 133, p. 41).

<sup>(2)</sup> Veronese, op. c., Def. II, § 86, p. 97 et hyp. V, p. 106.

<sup>(3)</sup> Cantor s'est déclaré expressement contre la possibilité des nombres infiniment petits. Comp. son article cité dans Zeitschrift für Philosophie, vol. 91, p. 112 s.



doit d'après lui se terminer par un  $\frac{1}{\infty}$ , l'infiniment petit de premier ordre (1).

Les infiniments petits des ordres supérieurs se déduisent par divisions successives de  $\frac{1}{\infty}$  par  $\infty$ , de  $\frac{1}{\infty^2}$  par  $\infty$  etc. (2). Veronese y arrive en supposant que, un segment fini pouvant devenir indéfiniment petit, il y aura un point hors du champs de cette variabilité de telle sorte, que ce point-limite delimitera avec le point initial un segment infiniment petit, par rapport auquel le segment donné fini sera un infini de premier ordre (3). De la même manière, on peut supposer un infiniment petit de second ordre dans l'infiniment petit de premier ordre, et ainsi de suite (4).

Mais le point de ressemblance le plus important entre les deux théories se trouve dans la complète applicabilité, reconnues par eux, de nombres infiniment grands et infiniment petits à la ligne droite (5).

(1) « 1 étant pris pour représenter en général la grandeur finie, plus le nombre par lequel je le divise est grand, plus je le diminue, de sorte que  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ , &c sont des grandeurs toujours décroissantes. Donc à la fin  $\frac{1}{\infty}$  sera une grandeur infiniment petite, ou, ce qui est la même chose, ... une partie *infinitième* du Fini, comme 1 est une partie infinitième de  $\infty$  » (Fontenelle, op. c., p. 116).

Que cette déduction de l'infiniment petit soit tout à fait erronée, on peut l'entrevoir aisément. Le nombre  $\omega$  est posé par la réalisation de tous les nombres finis, parce qu'il représente le type d'ordre de cet ensemble. Mais le nombre  $\frac{1}{\omega}$  n'est point posé par la réalisation de tous les fractions finies  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , ...,  $\frac{1}{n}$ , ...,  $\frac{1}{\omega}$  ne se trouvant par définition parmi les membres de cette série, et n'étant point posé immédiatement par sa réalisation, comme l'est le nombre  $\omega$  par la réalisation de la série  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ . Cantor a donc eut raison de n'admettre pas d'infiniment petits dans sa théorie; et la déduction de l'infiniment petit par Veronese est la seule qu'on puisse regarder comme rationnelle (et formellement admissible).

(2) « Donc  $\frac{1}{\infty}$  peut être encore infiniment divisé, ce qui donnera  $\frac{1}{\infty^2}$ , partie infinitième de  $\frac{1}{\infty}$  ...; et comme cela n'a point de fin, on aura  $1 \cdot \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty^2} \cdot \frac{1}{\infty^3} \cdot \frac{1}{\infty^4} \cdot \dots$  &c  $\frac{1}{\infty^\infty}$ , c'est-à-dire, autant d'ordres de Infiniments petits qui s'abaisseront au dessous de 1, que l'on a vu d'ordres d'Infinis qui s'élevaient à l'infini au dessus de 1 » (Fontenelle, op. c., p. 117).

(3) Comp. Veronese, op. c., Ip. VI, p. 128, prop. a § 96, p. 129, prop. d § 97, p. 131.

(4) Veronese, op. c., Ip. VII, p. 147 et prop. e, § 100, p. 148.

Mr. Levi-Civita, qui a faite une exposition purement analytique des nombres infinis et infiniments petits de Mr. Veronese (Atti R. Istituto Veneto, 1892: *Infiniti e Infinitesimi attuali*) en confirmant ainsi la validité mathématique de la théorie, a donnée une importante extension de cette théorie par l'introduction des infinis et infiniment petits d'ordres rationnels quelconques.

(5) Fontenelle, op. c., p. 245: « Il n'y a point de nombre qui ne puisse exprimer

A cette comparaison des trois théories de nombres infinis, je veux ajouter encore quelques remarques critiques touchant la valeur de la théorie de Fontenelle.

Comme nous l'avons vu, le nombre  $\infty$  de Fontenelle veut être et le type d'ordre d'ensemble arithmétique des nombres finis sans dernier terme et le type d'ordre des segments finis égaux d'une ligne droite infinie avec un point à l'infini, c'est qui est contradictoire.

Mais nous ne devons pas nous étonner de cette confusion des points de vue arithmétique et géométrique dans la conception principale de la théorie de Fontenelle: cette théorie appartient à l'âge d'élaboration du calcul infinitésimal, qui dans son développement initial s'inspirait aussi bien de motifs arithmétiques que de motifs géométriques.

C'est par cette confusion de motifs arithmétiques et géométriques qu'on peut expliquer aussi les autres contradictions, qui se trouvent dans la théorie de Fontenelle. La contradiction formelle du nombre  $\infty$ , dernier terme de la suite naturelle des nombres, a pour conséquence immédiate une autre contradiction: si  $\infty$  est le dernier terme de la suite naturelle des nombres, il devrait être précédé immédiatement par un nombre fini. Fontenelle s'aperçoit de cette contradiction, mais il cherche à l'éviter en supposant, que  $\infty$  est divisible par  $n$ ,  $n$  étant un nombre fini quelconque (op. c., p. 59). Mais en poursuivant la recherche des propriétés de la suite A (par A Fontenelle désigne la suite des nombres naturels avec son dernier terme  $\infty$ ), Fontenelle tombe dans la même contradiction, qu'il a voulu et su éviter. En comparant les deux suites:

$$1, 2, 3, 4, \dots \infty$$

$$1, 4, 9, 16, \dots \infty^2,$$

la deuxième représentant l'élévation au carré de la première, et en les représentant par des lignes droites supposées infinies, Fontenelle, sans motiver

---

quelque Ligne droite, ni réciproquement de Ligne droite qui ne puisse être exprimée par quelque nombre... Donc à tous les nombres infiniment grands ou petits répondent des lignes possibles infiniment grands ou petits ».

Chez Veronese l'applicabilité des nombres infinis et infinitésimaux résulte immédiatement de l'origine même de ces nombres (comp. op. c., prefazione, p. XXV-XXVI).

Cantor s'est occupé très peu de la question de cette applicabilité. Nous trouvons seulement un passage dans ses écrits, où il touche cette question, en attribuant à la ligne droite un point à l'infini correspondant à son nombre  $\omega$  (comp. son article cité dans *Zeitschrift für Philosophie*, vol. 91, p. 103 s.). Sur l'impossibilité formelle de cette application géométrique des nombres cantoriciens comp. mon opuscule *Die typischen Geometrien und das Unendliche*, Heidelberg. 1907, p. 31-48.

suffisamment la nécessité d'un tel passage, admet un passage immédiat du Fini à l'Infini dans les deux séries, et, ce passage étant plus proche du commencement dans la deuxième série, il admet aussi l'étrange thèse d'un nombre fini devenant infini par l'élévation au carré. La gravité de cette conséquence, qui manifeste une contradiction éclatante, est reconnue par Fontenelle même, mais il s'efforce de l'atténuer en distinguant les nombres finis indéterminables des nombres finis fixes, qui appartiennent au commencement de la suite naturelle (1). Il dit aussi que « le paradoxe admis ne conduit jamais à aucune conclusion fausse » (p. 66). Mais une théorie, qui peut admettre de pareilles contradictions comme principes de déductions logiques, ne mérite, même si elle appartient à la Mathématique de l'Infini, d'être poursuivie dans ses détails, son paradoxe suprême étant sa sentence de mort.

Reste sa valeur historique. Comme on le voit par ce qui précède, la théorie de Fontenelle peut être regardée comme la souche commune des deux théories divergentes de Cantor et de Veronese, et il serait intéressant de savoir, si et dans quelle mesure les deux créateurs des nouvelles théories se sont inspirés, au moins négativement, de l'ancienne. Ce qui est hors de doute, c'est qu'elle a été connue par tous les deux, car ils la citent, en repoussant également ses conséquences. En critiquant la théorie de son rival et en rapprochant par trop la théorie de celui-ci de la théorie de Fontenelle, Cantor s'exprime, d'après sa manière un peu violente, en disant que les nombres de Veronese possèdent une similitude frappante (auffallende Aehnlichkeit) « mit den höchst absurden 'unendlichen Zahlen' Fontenelle's in dessen *Géométrie de l'Infini* » (2). En répondant à la critique injuste de Cantor, Veronese se défend de la similitude imputée de ses nombres avec ceux de Fontenelle, qu'il rejette également (3). Mais il n'est pas impossible

(1) « J'avoue que du premier coup d'oeil cette difficulté est accablante, et elle m'aurait fait abandonner tout ce Système de l'Infini, si je n'avais vu un grand nombre de fortes raisons qui la diminuoient... » (Fontenelle, op. c., p. 64).

Parmi ces raisons la plus importante est celle de la différence entre les finis fixes et les finis indéterminables, qui est établie par Fontenelle de la manière suivante. « Il y a bien de la différence entre le Fini fixe, pour ainsi dire. & le Fini en mouvement, ou, comme disent nos habiles Voisins, en fluxion, pour devenir Infini » (op. c., p. 65).

« J'appelle *Finis indéterminables* les termes finis de A qui deviennent infinis dans A<sup>2</sup> par l'élévation au carré... » (op. c., p. 67).

(2) Comp. Cantor, l. c., Bd. 46, p. 501.

(3) « Egli (Cantor) afferma la 'Uebereinstimmung' dei miei infiniti e infinitesimi cogli 'höchst absurden' numeri infiniti di Fontenelle. Io conosco perfettamente questi infiniti e le censure che li hanno distrutti, ed è per ciò che nell'appendice del libro mi limitai ad accennare a quelle critiche ed a dichiarare che la teoria di Fontenelle non è da confondersi colla mia » (comp. G. Veronese, *Mathematische Annalen*, Bd. 47, p. 424 s. et son livre *Fondamenti di Geometria*, Appendice, p. 620, trad. allemande, p. 698).

de supposer, vu les similitudes subsistantes, que Cantor comme Veronese soient parvenus à établir les principes de leurs théories en cherchant d'éviter les contradictions flagrantes dans lesquelles était tombée la théorie du célèbre académicien français.

Meccanica celeste. — *Sopra le distanze dei pianeti dal Sole.*  
Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

1. Mi permetto di partecipare all'Accademia alcune semplici considerazioni sopra le distanze planetarie.

2. Prescindendo da considerazioni teoriche che, nello stato attuale delle nostre cognizioni cosmogoniche, la scienza è obbligata a riguardare con qualche diffidenza, è noto che le leggi empiriche, le quali ci rappresentano le distanze dei pianeti dal Sole, possono tutte ridursi alla formola:

$$x_n = a + bc^n.$$

3. Così nella celebre legge di Bode o di Titius<sup>(1)</sup> si pone  $a = 0,4$ ;  $b = 0,3$ ;  $c = 2$ . Per Mercurio abbiamo  $n = -\infty$ ; per Venere  $n = 0$  (vale a dire supponiamo implicitamente l'esistenza d'infiniti pianetini tra Mercurio e Venere), per la Terra  $n = 1$  ecc., ottenendo in tal modo i seguenti valori:

Mercurio . . . . .	0,4	Marte . . . . .	1,6	Saturno . . . . .	10,0
Venere . . . . .	0,7	Asteroidi . . . . .	2,8	Urano . . . . .	19,6
Terra . . . . .	1,0	Giove . . . . .	5,2	Nettuno . . . . .	38,8

Le vere distanze sono invece:

Mercurio . . . . .	0,387	Marte . . . . .	1,52	Urano . . . . .	19,2
Venere . . . . .	0,723	Giove . . . . .	5,20	Nettuno . . . . .	30,1
Terra . . . . .	1,00	Saturno . . . . .	9,54		

Questo specchietto mostra, come del resto è notissimo, che la legge di Bode è assolutamente falsa per Nettuno dove l'errore è del 30 %<sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Il vero inventore della legge è Titius (G. D. Tietz). Il Wurm cercò di perfezionarla prendendo

$$a = 0,397 \quad , \quad b = 0,301 \quad , \quad c = 2;$$

ma, mentre in tal modo si altera la bella semplicità della legge, l'errore per Nettuno è ancora *aumentato* ( $d = 38,92$ ). Ciò spiega perchè la modificazione del Wurm non abbia attecchito.

<sup>(2)</sup> Non si dica che Urano e Nettuno appartengono alla così detta « *zona retrograda* ». Noi ora ci proponiamo di rappresentare *empiricamente* le distanze degli otto pianeti principali, prescindendo da ogni teoria cosmogonica; su ognuna delle quali, del resto, sussistono ancora moltissimi dubbi.

4. Più tardi L. Gaussin cercò una legge valida anche per Nettuno prendendo (1):

$$a = 0 \quad b = \frac{1}{214,45} \quad c = 1,7226$$

Egli pone  $n = 8$  per Mercurio (cioè ammette 7 pianeti intramercuriali),  $n = 9$  per Venere e così di seguito, ottenendo in tal modo le distanze seguenti:

Mercurio . . 0,362	Marte . . . 1,848	Saturno . . 9,445
Venere . . . 0,623	Asteroidi . . 3,183	Urano . . . 16,269
Terra . . . . 1,073	Giove . . . . 5,483	Nettuno . . 28,025

La rappresentazione di Nettuno è migliorata in confronto di quella data dalla legge di Bode; ma per Urano, ed anche un po' per Giove e Marte, è peggiorata assai.

5. E. Belot (2) immaginando il sistema planetario nato dall'urto di due nebulose e servendosi di considerazioni matematiche, su cui ora non insistiamo, prende:

$$a = 0,28 \quad b = \frac{1}{214,45} \quad c = 1,883$$

Nella sua ipotesi Mercurio corrisponderebbe ad  $n = 5$ ; Venere ad  $n = 7$

(1) A differenza di Bode, Gaussin (e, dopo di lui, Belot) prende come unità di lunghezza il semidiametro solare invece della distanza media dalla Terra al Sole. Il numero  $b = \frac{1}{214,45}$  nelle leggi di Gaussin e Belot esprime appunto il rapporto tra le due lunghezze. Non riusciamo però a comprendere quale relazione possa esistere tra il raggio attuale del Sole e le distanze dei pianeti. La Nota di Gaussin è intitolata: *Lois concernant la distribution des astres du système solaire*, C. R. 1880 I. pag. 518.

Il Gaussin ha dato anche la legge

$$x_n = 1,336 + 1,6425^n$$

per rappresentare i satelliti di Giove; però dopo la pubblicazione della sua Nota (1880) sono stati scoperti altri cinque satelliti. Istituito il confronto, si ha il seguente specchietto:

Satellite	Distanza osservata	Distanza calcolata	Errore
V	2,53	2,19	13,4 %
VI	160,46	116,23	27,5 "
VII	164,46	190,9	16,1 "
VIII	329,3	313,5	4,8 "
IX	?	512,73	?

La mancanza di spazio c'impedisce di fare analoghe osservazioni per i satelliti degli altri pianeti.

(2) *Sur la loi de Bode et les inclinaisons des eq. planétaires* etc., C. R. 1905, II, pag. 937.

(cioè egli ammette 4 pianeti intramercuriali, ed un pianeta fra Mercurio e Venere); la Terra ad  $n = 8$  ecc., ottenendo così le seguenti distanze:

Mercurio . . . 0,390	Marte . . . 1.668	Saturno . . . 9,546
Venere . . . 0,671	Asteroidi . . . 2,893	Urano . . . 17,728
Terra . . . . . 1,017	Giove . . . . . 5,201	Nettuno . . . 33,133

6. Ora io ho osservato che, *se invece di ammettere un gran numero di pianeti tra il Sole e Mercurio o tra Mercurio e Venere, si ammette un solo posto vacante tra Saturno ed Urano, diviene possibile di rappresentare le distanze planetarie con legge semplicissima e con notevolissima esattezza.*

7. È noto infatti che la distanza di Marte dal Sole è compresa tra 1,52 ed 1,53. Prendendola per eccesso avremo il numero 1,53. Ora io dico che la distanza di ogni pianeta dal Sole è data dalla formola:

$$x_n = \overline{1,53}^n ;$$

dove si ha  $n = -2$  per Mercurio,  $n = -1$  per Venere,  $n = 0$  per la Terra,  $n = 1$  per Marte ecc.

Si ha infatti, eseguendo i calcoli:

Mercurio . . . 0,427 = $\overline{1,53}^{-2}$	Giove . . . . . 5,48 = $\overline{1,53}^4$
Venere . . . . . 0,654 = $\overline{1,53}^{-1}$	Saturno . . . . . 8,38 = $\overline{1,53}^5$
Terra . . . . . 1,00 = $\overline{1,53}^0$	. . . . .
Marte . . . . . 1,53 = $\overline{1,53}^1$	Urano . . . . . 19,46 = $\overline{1,53}^7$
Asteroidi . . . } 2,24 = $\overline{1,53}^2$	Nettuno . . . 29,76 = $\overline{1,53}^8$
	} 3,58 = $\overline{1,53}^3$

8. Possiamo paragonare tra loro le quattro leggi, calcolando l'errore medio, cioè la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati degli errori. Eseguendo i calcoli per gli otto grandi pianeti, abbiamo la seguente tabella:

Bode . . . . .	errore medio = 3,083
Gaussin . . . . .	" " = 1,37
Belot . . . . .	" " = 1,18
Armellini . . . . .	" " = 0,473

Tenendo presente la nota relazione che unisce l'errore medio alla misura di precisione abbiamo ancora:

Bode . . . .	misura di precisione	=	0,230
Gaussin . . . .	"	"	= 0,517
Belot . . . .	"	"	= 0,601
Armellini. . . .	"	"	= 1,499

Occorre inoltre osservare che la mia legge è la *più semplice e non contiene alcun elemento estraneo (come il raggio solare nelle leggi di Gaussin e Belot)* giacchè l'unico parametro che vi comparisce è il rapporto tra la distanza di Marte e quella della Terra. Il numero dei posti vacanti nella mia legge è il minimo. Infatti nella legge di Bode esso è infinito, in quella di Gaussin è uguale a 7, in quella di Belot a 5, e nella mia ad 1. Sarà inutile far notare che i due valori 2,34 e 3.58 che si ottengono per gli asteroidi, sono compresi nei limiti della zona asteroidica ed anzi sono sufficientemente vicini ai limiti stessi.

9. Benchè, come già dicevo, la scienza sia costretta a riguardare con una certa diffidenza ogni tentativo di applicazione delle matematiche alle ricerche cosmogoniche, pure non sarà inutile aggiungere alcune considerazioni supplementari. Osserviamo dunque che:

a) Nelle quattro leggi comparisce sempre una progressione geometrica, sola o unita con altri termini. Ciò sembrerebbe dar ragione alle teorie del Poincarè <sup>(1)</sup> il quale interpretava la legge di Bode ammettendo che i pianeti siano stati prodotti ad intervalli di tempo presso a poco costanti.

b) La nostra legge tenderebbe invece a indebolire alcune delle considerazioni teoriche da cui parte il Belot <sup>(2)</sup>. Nel nostro caso si ha infatti  $\alpha = 0$ . Ammettendo quindi l'origine vorticale del Belot, il raggio della nebulosa vorticale primitiva sarebbe stato trascurabile. Di più, secondo la teoria del Belot, il rapporto  $\varrho = c : M^{1/3}$  ( $M =$  massa solare) dovrebbe essere poco differente dall'unità. Ed egli lo trova, infatti, eguale a 1,039. Nel nostro caso, invece, essendo  $c = 1,53$ , si avrebbe  $\varrho = 0,84$ .

c) Nulla può dirsi riguardo ai pianetini intramercuriali e a quelli supposti tra Mercurio e Venere. Gaussin suppone 7 pianetini intramercuriali; E. Belot, 4 intramercuriali ed 1 fra Mercurio e Venere; Bode infiniti pianetini fra Mercurio e Venere; noi non ne supponiamo nessuno. Come si vede, vi è pieno disaccordo tra le quattro leggi.

<sup>(1)</sup> Poincarè. *Hypothèses cosmogoniques*.

<sup>(2)</sup> E. Belot, *Précisions nouvelles sur la loi exponentielle des distances des planètes et satellites*, C. R. 1916, II, pag. 564.

Non crediamo quindi di poter sottoscrivere alla teoria dello Charlier <sup>(1)</sup> il quale, fondandosi sulla sola legge di Bode, ammette tra Mercurio e Venere uno sciame di pianetini che suppone concentrato presso i centri di librazione, ai vertici del triangolo Lagrangiano.

d) Ancor meno può dirsi del posto vacante tra Saturno ed Urano. Può trattarsi di una pura coincidenza aritmetica, ma può anche ammettersi che ciò dipenda da un periodo di stasi dell'attività centrale. Infatti, secondo la teoria già citata del Poincarè, una maggior distanza tra i pianeti corrisponderebbe ad un maggior intervallo di tempo tra la loro produzione. Potrebbe anche mettersi in relazione questo ristagno dell'attività centrale con la produzione dei due pianeti giganti Giove e Saturno, od anche col passaggio dalla zona a rotazione diretta alla zona retrograda.

Nè sarebbe assurdo supporre l'esistenza di qualche pianetino tra Saturno ed Urano, ammettendo così che la zona dei due grandi pianeti, Giove e Saturno, sia contornata tanto all'interno (tra Giove e Marte) quanto all'esterno (tra Saturno ed Urano) da uno sciame di pianetini. La grande distanza ci avrebbe fino ad ora impedito di scoprire il secondo sciame. Per persuadercene supponiamo per es. che il pianetino Cerere venisse trasportato nel posto vacante indicato dalla nostra legge, cioè alla distanza 12,72. La sua lontananza dal Sole essendo aumentata nel rapporto 4,6, essa riceverebbe una quantità di luce  $\overline{4,6^2} = 21,16$  volte minore. Nell'opposizione la sua distanza dalla Terra sarebbe aumentata nel rapporto 6,6; quindi la quantità di luce che essa c'invierebbe sarebbe uguale ad  $\frac{1}{21,16 \times 6,6^2}$  od  $\frac{1}{921,72}$  della quantità che ora ci manda. Tenendo presente il rapporto fotometrico tra le grandezze stellari <sup>(2)</sup> risulterebbe che in tale ipotesi Cerere, quando è all'opposizione, cioè nelle migliori condizioni, brillerebbe come un astro di 15<sup>a</sup> grandezza! Essa sarebbe quindi probabilmente sfuggita alle nostre ricerche. E si pensi che, nella maggior parte, i pianetini sono assai minori di Cerere!

10. Termineremo con un'osservazione, non fatta ancora da alcuno, sulla teoria del Belot.

Nella Nota citata <sup>(3)</sup> il Belot, supponendo, come ho detto, che sia avve-

<sup>(1)</sup> L. Charlier, *Das Bodesche Gesetz und die sogenannten intramercuriellen Planeten*, Astr. Nachr., Bd. 193, n. 4623. Sullo stesso argomento si consulti pure un bel l'articolo del prof. V. Cerulli, *La legge di Bode e il preteso pianeta intramercuriale*, nella « Rivista di Astronomia e scienze affini », anno VII (1913).

<sup>(2)</sup> Chiamando con  $\rho$  il rapporto fotometrico tra due grandezze stellari consecutive, si ha, come è notissimo:  $\log \rho = 0,4$ ;  $\rho = 2,512$ .

<sup>(3)</sup> C. R. 1905, II. Non citiamo altre Note recentissime del Belot in C. R. non avendo attinenza con l'argomento.



nuto un urto tra una nebulosa verticale e una non verticale arriva all'equazione

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{V}{\varphi} \frac{1}{x-a},$$

dove  $V$  e  $\varphi$  sono due funzioni su cui ora non insistiamo.

Egli integra ponendo

$$(2) \quad \frac{V}{\varphi} = \text{costante}$$

senza dare alcuna spiegazione della limitazione (2) e supponendo quindi implicitamente che ciò sia avvenuto per puro caso: cosa certo molto improbabile.

Ne segue quindi che, supposta vera la *causa* (cioè l'urto tra le due nebulose), la probabilità  $p$  affinchè si sia verificato l'*effetto* (cioè affinchè le distanze del sistema planetario risultante obbediscano ad una legge esponenziale) è certo estremamente piccola.

Ora noi vediamo che l'*effetto* si è verificato e vogliamo cercare la probabilità  $X$  affinchè esso sia dovuto alla causa assegnata dal Belot.

Chiamando perciò con  $\omega$  la probabilità *a priori* di un urto tra una nebulosa vorticale con una non vorticale, la teoria delle probabilità di cause ci dà la nota formola del Bayes <sup>(1)</sup>

$$(3) \quad X = \frac{p\omega}{\sum p_i \omega_i},$$

dove la sommatoria al denominatore va estesa a tutte le ipotesi analoghe (p. es. teoria di Laplace, teoria delle catture del See ecc.).

Noi non possiamo calcolare il secondo membro della (3) ignorando i fattori  $\omega$  e  $p$ , ma possiamo con ragione affermare quanto segue:

*La posizione (2) fatta dal Belot, introducendo al numeratore della (3) un fattore  $p$  estremamente piccolo, indebolisce in modo notevolissimo la probabilità della sua ipotesi.*

<sup>(1)</sup> V. Bertrand, *Calcul de probabilités*, pag. 145; Poincaré, *Calcul de probabilités*, pag. 135.

**Astronomia.** — *Per una verifica sperimentale della teoria di relatività di Einstein.* Nota di GIOVANNI ZAPPA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

È noto che una delle conseguenze che Einstein ha tratto dalla sua teoria generale della *relatività*, ed anche da ipotesi più limitate, è l'azione che subisce un raggio luminoso in un campo gravitazionale. Precisamente, se un raggio luminoso traversa un campo in cui valga il potenziale di gravitazione  $\frac{K^2 M}{r}$ , esso subisce una deviazione totale di

$$\alpha = \frac{4K^2 M}{c^2 r}$$

dove  $K$  è la costante di gravitazione e  $c$  è la velocità della luce, ed  $r$  sarà la minima distanza del raggio luminoso dalla massa  $M$ .

Se si usano le unità astronomiche, si ha

$$\begin{aligned} K &= 0,01720 \\ c &= 172.8, \end{aligned}$$

e indicando con  $\beta$  l'angolo sotteso da  $r$  per un osservatore situato sulla terra e  $A$  la distanza dalla terra della massa  $M$ , per  $\beta'$  piccolo, espresso in primi, si ha in secondi:

$$\alpha'' = \frac{M}{\beta' A} \times 28,10.$$

Il senso della deviazione è quello di aumentare  $\beta$ .

Einstein stesso ha richiamato l'attenzione degli astronomi sulla convenienza di tentare la verifica sperimentale del fenomeno misurando la deviazione di posizioni stellari in vicinanza del sole, durante gli eclissi totali.

Il raggio del sole è di  $16'$  alla distanza 1, quindi una stella al bordo solare deve subire, secondo Einstein, una deviazione di  $1''.76$ , a  $4'$  dal bordo di  $1''.4$ , a  $10'$  di  $1''.1$ , a  $16'$  di  $0''.9$ , a  $32'$  di  $0''.6$  e così via.

Se si considerano le distanze di due stelle equidistanti dal sole e collocate l'una da una parte, l'altra dall'altra di esso, allineate col centro, si hanno numeri doppi dei precedenti. In generale la distanza di due stelle, la cui congiungente passi a  $d$  minuti primi dal centro del sole, sarà modificata di

$$\alpha'' = 28.10 \left( \frac{1/\beta_1^2 - d^2}{\beta_1^2} + \frac{1/\beta_2^2 - d^2}{\beta_2^2} \right)$$

dove  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono le distanze dal centro del sole delle due stelle sempre

in minuti primi e vale il segno  $\div$  se le stelle sono situate da parti opposte della normale dal centro del sole alla loro congiungente, il segno  $-$  in caso contrario.

Il dott. Freundlich <sup>(1)</sup> e il prof. Curtis <sup>(2)</sup> esaminarono subito le lastre, fino allora ottenute, da varie spedizioni fotografando le regioni intorno al sole durante eclissi totali, ma non ne trovarono nessuna che potesse dare le posizioni delle stelle con la precisione sufficiente. Si trattava di fotografie ottenute con uno scopo diverso, quello della ricerca del pianeta intramercu-riale; tra l'altro esse presentavano le immagini stellari allungate, perchè il moto della macchina era stato regolato sul moto del sole.

Gli stessi astronomi si accinsero ad eseguire fotografie adatte durante l'eclisse del 1914 in Russia, ma l'uno, tedesco, fu impedito di impiantare i suoi strumenti per lo scoppio della guerra; l'altro, americano, li impiantò, ma tra essi ed il sole vide interpersi al buon momento le nubi.

Oggi, dopo sei anni dal primo richiamo di Einstein, non si ha ancora la risposta dell'esperienza. Non si tratta di cosa di poco momento. Ottenute che si abbiano le fotografie adatte, si dovrà discutere un complesso di fenomeni che possono alterare le posizioni delle stelle in quelle condizioni, come rifrazione dovuta alla corona solare, anomalie di rifrazione della nostra atmosfera per la quale l'eclissarsi del sole è una causa di perturbazione, ecc. ecc. Già il prof. Courvoisier <sup>(3)</sup> ha trovato deviazioni sistematiche nella posizione degli astri osservati non lontani dal sole: Così per osservazioni di Venere a  $6^\circ$  dal sole di circa  $0''.5$ , a  $11^\circ$  di circa  $0''.2$ , di stelle lucenti a circa  $25^\circ$  dal sole di circa  $0''.2$  sempre nella distanza dal sole, che appare aumentata. Si tratta, è vero, di osservazioni visuali, eseguite in condizioni del tutto diverse; ma, prescindendo da qualunque spiegazione, qualche cosa di analogo è da aspettare anche nelle posizioni fotografiche di stelle tanto più vicine al sole, sia pure eclissato.

Nell'intento di giungere più rapidamente a raccogliere il materiale necessario per verificare l'esistenza dell'effetto di Einstein, A. F. e F. A. Lindemann <sup>(4)</sup> hanno proposto di recente di fotografare i dintorni del sole fuori dell'eclisse; ma se essi soggiungono cose interessanti per chi voglia ottenere immagini fotografiche delle stelle durante il giorno, non mostrano davvero la possibilità di poter riuscire in una impresa così difficile come quella che essi propongono. Noi riportiamo nel quadro seguente le stelle non più deboli di  $4^M$  che hanno una massima vicinanza al sole inferiore o di poco superiore ai due gradi. Per ciascuna diamo la misura appunto della minima distanza dal centro del sole e quindi il valore massimo per esse dell'effetto di Einstein,

<sup>(1)</sup> Astronomische Nachrichten, vol. 193, pag. 369.

<sup>(2)</sup> Publications of the Astronomical Society of the Pacific, vol. 35, pag. 77.

<sup>(3)</sup> Beobachtungs-Ergebnisse der K. Sternwarte zu Berlin, n. 15.

<sup>(4)</sup> Montly Notices of the R. A. S., vol. 77, pag. 140.

poi l'indice del colore, desunto dallo spettro, di cui riportiamo il tipo, secondo le misure di King e Schwarzschild, ma posto uguale a zero l'indice relativo al tipo A0 (King) ed infine la grandezza stellare. Vi aggiungiamo la grandezza delle stelle più lucenti di 6<sup>m</sup>.6 che possono capitare su una lastra quadrata di due gradi di lato con una delle suddette in centro e la loro distanza da queste.

STELLA PRINCIPALE						COMPAGNE	
Nome	Gr.	Sp.	I. C.	Dist sol.	Eff. Ein.	Gr.	Dist. princ.
$\rho$ Geminorum . . .	M 3.2 ... M 4.2	Ma	+ 1.9	54'	0''.5	M 6.5	46'
$\mu$ Geminorum . . .	3.2	Ma	+ 1.9	50'	0''.6	nessuna	
$\delta$ Geminorum . . .	3.5	F0	+ 0.3	11'	max	6.5	76'
$\alpha$ Leonis . . . . .	1.3	B8	- 0.1	29'	1''.0	nessuna	
$\rho$ Leonis . . . . .	3.8	B0p	- 0.3	10'	max	5.9	51'
$\beta$ Virginis . . . . .	3.8	F8	+ 0.6	45'	0''.6	nessuna	
$\eta$ Virginis . . . . .	4.0	A0	0.0	90'	0''.3	6.1	19'
$\alpha$ Virginis . . . . .	1.2	B2	- 0.3	133'	0''.2	nessuna	
$\alpha$ Librae . . . . .	2.9	A2	0.0	21'	1''.3	5.5	4'
$\delta$ Scorpii . . . . .	2.5	B1p	- 0.3	121'	0''.2	nessuna	
$\beta$ Scorpii . . . . .	2.9	B1	- 0.3	62'	0''.4	5.5	0'.2

Si apprende così che una sola stella più lucente di 2<sup>m</sup>.9 si avvicina al sole tanto da dare un effetto di Einstein non piccolo, ma che essa non ha nessuna stella di luminosità non inferiore alle 6<sup>m</sup>.5 nei limiti di distanza suddetti. Si apprende che solo sei stelle hanno una compagna ed una sola negli stessi limiti e sempre più debole della 5<sup>m</sup>.0. Certamente anche con cannocchiali a lungo fuoco, come di necessità occorrono, si possono usare lastre alquanto maggiori di quelle con 2 gradi di lato; ma comunque, anche quando si avesse un successo impensato nelle fotografie, mancherebbero sempre gli elementi indispensabili per una riduzione delle misure. In nessun modo possono soccorrere i metodi di riferimento proposti dai Lindemann e nemmeno si può sperare che riferendo la stella vicina al sole, ad una di eguale altezza a circa 180° d'azimut con un telescopio zenitale, si abbia una posizione scevra da errori dell'ordine del secondo d'arco, pur supposto che ci si possa metter nelle condizioni di vedere o fotografare almeno Regolo (1).

(1) I risultati di un tentativo di tale osservazione sarebbero pur sempre istruttivi, quando si prendessero le necessarie cure e ci si mettesse in condizioni eccezionalmente buone.

Ma fortunatamente vi è un'altra circostanza in cui si può tentare di mettere in luce l'effetto di Einstein con qualche probabilità di successo.

Applichiamo la formola data in principio a Giove; e lo possiamo fare perchè per Giove, più ancora che per il sole, è soddisfatta la condizione che sia  $\frac{2K^2 M}{c^2}$  piccolo rispetto ad  $r$ . (Difatti  $\frac{2K^2 M}{c^2}$  vale per il sole 3 Km. e per Giove 3 m., mentre  $r$  è per il sole  $10^5$  Km. e per Giove  $10^4$  Km.). Allora tenendo conto che per Giove  $M = 10^{-3} \mathcal{A}\beta' = 10^{-1}$ , il doppio dell'effetto di Einstein, cioè l'alterazione nella distanza di due stelle presso il lembo di Giove, allineate col suo centro e simmetriche rispetto ad esso, è di

$$0''.035$$

che, quando si considerino stelle a circa un decimo del diametro dal lembo, cioè  $4'' \dots 5''$  quando Giove è in opposizione, diviene quasi esattamente

$$0''.03.$$

Così se noi fotografiamo una stella che sia per essere occultata da Giove con occultazione centrale o quasi centrale (diciamo più esattamente, con una minima distanza, dal centro del pianeta, inferiore alla metà del raggio), quando è a  $4''$  o  $5''$  dal disco, prima e dopo del fenomeno su una stessa lastra, spostata di una grandezza arbitraria  $d$ , intorno ai 5 mm. che sarà rivelata esattamente dallo spostamento di tutte le stelle che vi compaiono, dovremo trovare le due immagini, se esiste l'effetto di Einstein, distanti di

$$d + 0''.03.$$

A un decimo del diametro di Giove dal suo lembo è certamente nulla la rifrazione dell'atmosfera del pianeta.

Ci troviamo dunque di fronte a misure che offrono la stessa difficoltà di quelle per determinare la parallasse della maggior parte delle stelle prese in considerazione per tale determinazione, con la differenza che per noi si tratta di comparare due posizioni prese con l'intervallo di alcune ore, e non di alcuni mesi.

Sulla stessa lastra potremo ottenere parecchie immagini della stella che si occultata, anche a distanze dal lembo maggiori della suddetta, per esempio fino ad una distanza uguale al raggio,  $25''$  in opposizione, alla quale l'effetto di Einstein sarà poco meno di  $0''.02$ .

Pensiamo da ultimo che nelle buone determinazioni di parallasse di singole stelle si ottiene un errore probabile di  $0''.01$ , che è come dire nella misura dello spostamento angolare al massimo di  $0''.014$ , e che in quelle delle parallassi medie di determinati aggruppamenti di stelle si tenta di avere una precisione notevolmente maggiore, alla quale si può giungere nei

riguardi degli errori sistematici solo con una effettiva maggior precisione nelle misure; pensiamo d'altra parte che con l'andar del tempo si possono prendere in considerazione diverse occultazioni, ed acquisteremo la convinzione che nel modo descritto ci può esser dato di mettere in luce l'effetto di Einstein. Ma, senza dubbio, ad affermarne l'esistenza varranno i risultati concordi delle osservazioni negli eclissi totali e nelle occultazioni prodotte da Giove.

Botanica. — *Prime osservazioni sulla distribuzione degli Imenomiceti unicoli e sui loro probabili rapporti colle micorize ectotrofiche delle fanerogame* <sup>(1)</sup>. Nota del dott. BENIAMINO PEYRONEL, presentata dal Socio G. CUBONI.

Durante le mie ricerche sulla flora micologica di Val Germanasca, nelli Valli Valdesi del Piemonte, e più specialmente di Riclaretto, mio paese natio, ho avuto l'occasione di fare alcune osservazioni che mi sembrano in stretta relazione con le nostre attuali conoscenze sulle micorize e che, a mio avviso, gettano una luce assai viva sulla questione della natura specifica dei funghi che producono le micorize stesse.

Le mie ricerche non avendo avuto di mira in modo particolare tale argomento, ma piuttosto in generale la distribuzione della flora micologica montana a seconda del variare dei fattori mesologici, s'intende che tali osservazioni, da me fatte specialmente durante la stagione estiva di questi ultimi anni, sono ancora frammentarie e incomplete, e dovranno essere proseguite con maggior metodo e precisione, avendo di mira il problema sopra accennato. Mi sembra tuttavia opportuno renderle di pubblica ragione, richiamando l'attenzione dei naturalisti, e particolarmente dei micologici, sul grande interesse che, da vari punti di vista, presentano gli studi di micogeografia, finora, e specialmente in Italia, quasi affatto trascurati.

Onde rendere più chiara l'esposizione dei fatti che ci interessano, non sarà fuori luogo premettere un brevissimo cenno sulla natura del suolo e sulla flora fanerogama di Riclaretto.

È questo un comunello montuoso di Val Germanasca che prende il suo nome dal torrentello che lo bagna, il Riclaretto o meglio, come si scriveva una volta, Rioclaretto, così chiamato per la perenne limpidezza delle sue acque, scorrenti in un letto molto accidentato, scavato in massima parte nella viva roccia.

I confini naturali di Riclaretto (quelli politici sono un po' più ampî) sono segnati al nord dal corso della Germanasca, e dalle altre parti dalle

(1) Lavoro fatto nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

creste montuose che verso questa scendono dal Monte Gran Trùc (2366 m.), sicchè nell'assieme la piccola vallata viene ad essere esposta approssimativamente a tramontana. La pendenza dei declivi varia assai da punto a punto, ma nell'assieme è assai forte: e infatti, sopra una superficie inferiore ai 1200 ettari, abbiamo delle altezze sul livello del mare che vanno dai 600 m. circa a quella massima di 2366 m.

Il suolo è prevalentemente siliceo-argilloso, il terreno geologico essendo formato da micascisti, talcoseisti, cloritescisti quarziti e simili. Ne abbiamo un indice nella diffusione del Castagno, della *Calluna vulgaris*, del *Rhododendron ferrugineum*, piante notoriamente silicicole.

Il Larice è l'essenza arborea che forma i boschi di maggiore estensione, delle vere foreste pure che ricoprono come d'una fascia quasi ininterrotta tutta la zona compresa tra i 1300 e i 1700 m. circa; esso si spinge però anche molto più in su, fin verso i 2200 m., e scende, d'altra parte, fin nella zona del Castagno, diventando tuttavia piuttosto sporadico in mezzo ad altre essenze.

Il Castagno forma dei boschi abbastanza estesi nella regione inferiore del Comune e si spinge fin verso i 1000 m. d'altezza. Le altre Cupulifere, come pure le Salicacee e le Betulacee, non formano dei boschi puri di grande estensione, ma si uniscono a formare dei boschi misti, in cui si riscontrano talora anche dei Larici, dei Tigli, dei Laburni, *Sorbus aucuparia*, *Sorbus Aria*, *Fraxinus excelsior*, ecc.

Fra le Betulacee, però, l'*Alnus viridis*, pur scendendo qua e là fin sotto i mille metri, forma nella zona soprastante a quella del Larice, cioè dai 1700 m. in su, delle estese e dense macchie.

I boschi misti di Cupulifere, Salicacee e Betulacee si trovano sia nella zona del Castagno, sia, e soprattutto, in quella, che altrove corrisponde approssimativamente alla zona del Faggio, compresa tra la prima (1000 m. circa) e quella del Larice (1300 m. circa). Tanto in questa zona dei boschi eterogenei quanto in quella del Castagno si trova la massima parte della superficie coltivata a campi e prati, nei quali abbondano gli alberi fruttiferi, rappresentati esclusivamente da una parte delle Rosacee sopra elencate e dal Noce.

I pascoli aperti abbondano invece nella zona del Larice e sopra ad essa.

Pure dai 1600 m. in su *Rhododendron ferrugineum*, *Vaccinium Myrtillus*, *Vaccinium uliginosum* e *Azalea procumbens*, fra le Ericacee, formano delle estese macchie più o meno pure.

In definitiva il territorio di Rielaretto è ricoperto da campi e prati disseminati di Rosacee e di *Juglans regia*, pascoli aperti, boschi frondosi costituiti in massima parte da Cupulifere, Betulacee e Salicacee, boschi di aghi-foglie formati esclusivamente da *Larix decidua*, macchie di *Alnus viridis* e di Ericacee; le altre essenze legnose sono sporadiche, formando solo qua e là dei cespugli o minuscoli boschetti.

Accennato, così, sommariamente alle principali associazioni di fanerogame, vediamo ora se e quali rapporti esistano tra esse e la distribuzione dei funghi a cappello.

Una prima constatazione, nota del resto a tutti, si è che, mentre la flora micologica è bene rappresentata, sia per le numerose specie, sia per la loro abbondanza, nei boschi, essa è invece piuttosto povera nei prati e nei pascoli aperti.

In queste stazioni sono particolarmente bene rappresentati i Gasteromiceti; fra le Agaricacee, vi troviamo numerosi *Hygrophorus*, specialmente nei luoghi umidi e freschi, e numerose jantinospore e melanospore manifestamente coprofile, quali *Agaricus campestris*, varie specie di *Coprinus*, *Panaeolus*, *Stropharia* e simili. Mancano affatto i *Boletus*, le Russule, i Lattari, le Amanite, abbondantemente rappresentati, invece, nei boschi. Nei campi è frequente in autunno *Lepiota procera*.

Della frequenza in tali stazioni di certune di queste specie, la ragione va evidentemente cercata nella presenza di letame nel suolo: ciò vale per *Lepiota procera*. *Agaricus campestris*, per i Coprini, i Paneoli, le Strofaria: tali specie infatti si sviluppano anche indipendentemente da qualunque vegetazione erbacea ovunque si trovi del fimo di animali domestici. Ma in quanto agli *Hygrophorus*, alle *Clitocybe* e ai Gasteromiceti, propendo piuttosto a credere che essi siano in intimi rapporti con la vegetazione erbacea in mezzo alla quale essi si sviluppano; rapporti che possono avvenire sia direttamente per mezzo di micorize, sia semplicemente per mezzo dello scambio di sali attraverso il terreno.

Un altro fatto importante, sul quale devo richiamare l'attenzione del lettore, si è che al piede degli alberi fruttiferi, i quali abbondano appunto nella regione campestre e prativa, non si notano mai funghi caratteristici, ma solo affatto accidentalmente qualche specie propria dei prati e dei campi ed in manifesta indipendenza dalle essenze fruttifere stesse. Lo stesso ho osservato nei boschi e nelle macchie per tutte le essenze legnose della famiglia delle Rosacee, eccettuato *Sorbus aucuparia*, in vicinanza di cui ho qualche rara volta raccolto *Boletus scaber*: devo però avvertire che a poca distanza si trovavano anche dei cespugli di *Corylus Avellana*, alla cui presenza era forse piuttosto legata quella del fungo.

Mancano pure o scarseggiano grandemente gli Imenomiceti umicoli nelle macchie di *Alnus viridis*, di *Rhododendron*, di *Vaccinium* e di *Azalea*, nei boschetti di *Acer*, di *Fraxinus*, di *Ulmus* e di *Salix alba*, non ne ho trovati mai in vicinanza dei cespugli di *Rhamnus*, di *Sambucus*, di *Lonicera*. Riguardo a *Salix Caprea* e a *Cytisus Laburnum* non posso per ora affermare nulla di sicuro, questi arboscelli trovandosi per lo più dispersi in mezzo ad altre essenze. Ricordo però d'aver raccolto parecchi anni or sono al piede d'un Laburno una Agaricacea (*Tricholoma?*) che emanava intensamente il



gradevole e caratteristico profumo dei fiori di quella leguminosa. Ai piedi dei Tigli ho raccolto *Hydnum repandum* e qualche *Russula*; anche questa essenza, però, è assai sporadica e quindi non ho avuto altra occasione finora di fare che poche osservazioni sulla sua micoflora.

Fra le Salicacee, mentre *Salix alba*, come abbiamo visto, sembra mancare di funghi a cappello, *Populus tremula*, invece, è accompagnata da una numerosa coorte di Russule, di Lattari ed altre Agaricacee leucospore; fra le Poliporacee, *Boletus rufus* è pure comunissimo ai suoi piedi e sembra essergli esclusivo.

Anche le Betulacee si comportano in modo assai diverso dal punto di vista che ci interessa. Mentre, infatti, le macchie di *Alnus viridis*, come già ho detto, non sembrano possedere specie caratteristiche, *Betula alba*, invece, è spesso accompagnata da *Boletus scaber*, da *Amanita muscaria* e probabilmente anche da varie specie di Russule e di Lattari. Quanto ad *Alnus glutinosa* è certamente molto povera di funghi: devo però dire che ho spesso riscontrato ai suoi piedi una caratteristica specie di *Lactarius*, molto minuta, che non mi è riuscito ancora di determinare.

Dove la flora degli Imenomiceti unicoli presenta la massima ricchezza e varietà è, senza contrasto, nei boschi di Cupulifere e di Larice. La flora imenomicetica dei boschi di Cupulifere presenta però uno spiccato contrasto con quella dei boschi di Larice: contrasto che si può all'ingrosso definire a questo modo: i boschi di Cupulifere rappresentano il regno delle Agaricacee, quelli di Larice il regno dei Boleti.

Non bisogna però credere che le stesse specie fungine si sviluppino indifferentemente sotto tutte le Cupulifere: anche qui si può dire che ogni essenza è caratterizzata da una micoflorula particolare, costituita da specie che si riscontrano più o meno esclusivamente sotto di essa.

Vi sono poi certe specie fungine, come ad esempio *Boletus scaber*, che, pur trovandosi tanto sotto il Castagno, quanto sotto il Rovere, il Faggio e il Nocciuolo, assumono un aspetto diverso, abbastanza caratteristico e costante per ognuna di tali essenze. Le Russule e i Lattari sembrano predominare nei boschi di Castagni e di Quercie, ove sono abbondantissimi, e quivi pure troviamo di preferenza le Amanite, sempre però piuttosto sporadiche: i fitti ed ombrosi boschi di Faggio e di Nocciuolo sembrano invece caratterizzati dalla frequenza dei Cortinari e dall'abbondanza di *Cantharellus* e di *Hydnum repandum*, i quali ultimi si trovano però, benchè meno abbondanti, non solo sotto le Quercie e i Castagni, ma anche sotto le Betulle e i Larici. Anche *Boletus edulis*, frequentissimo sotto i Castagni, non è raro nei boschi di Faggio e di Larice.

L'accennata differenza tra boschi di Castagni e Quercie da una parte, con predominio di Russule e Lattari, di Faggio e Nocciuolo dall'altra, con frequenza di *Cortinarius*, potrebbe però essere accidentale e dipen-

dere unicamente dal fatto che i primi sono in generale più soleggiati dei secondi.

Molto caratteristica è la flora imenomicetica dei boschi di Larice; quivi, infatti, non solo troviamo un'abbondanza straordinaria di Boleti, ma varie specie di questi sono esclusive del Larice; tali sono *Boletus elegans*, *B. laricinus* e *Boletinus cavipes*: cerchereste invano queste specie nei boschi di latifoglie, mentre esse ricoprono quasi letteralmente il suolo delle foreste di Larice in agosto e settembre, se la stagione procede normalmente piovosa. Anche *Amanita muscaria* vi è molto frequente, specialmente verso la fine di settembre, quando già i Boleti o sono scomparsi o sono in piena regressione. Fra le altre Agaricacee sembrano esclusive dei Larici due Russule: *Russula ochroleuca* e un'altra specie assai grande, carnosa, dal cappello bruno-terreo, dalla carne caseosa, che non mi è riuscito finora di determinare; e forse *R. fallax*, da taluni, però, considerata come semplice varietà di *R. emetica*.

Propri dei boschi laricini e abbastanza comuni sono pure due Lattari, *Lactarius rufus* e *Lac. sp. indet.*, nonchè *Gomphidius gracilis* fra le Ocrospore.

Abbastanza frequenti, ma non esclusivi dei boschi di Larice sono *Amanitopsis vaginata*, *Clitocybe laccata*, *Russula foetens*, *Cantharellus edulis*, *Paxillus lateralis*, *Boletus edulis*, *B. subtomentosus*, *B. badius*, *B. piperatus*.

In conclusione noi possiamo affermare:

1°) I boschi di *Larix decidua* abbondano di Imenomiceti umicoli e particolarmente di Boleti.

2°) I boschi di Cupulifere sono altrettanto ricchi quanto quelli di Larice, ma con predominio delle Agaricacee sulle Poliporacee.

3°) Nella famiglia delle Salicacee, *Populus tremula* è sempre accompagnata da una ricca coorte di Imenomiceti umicoli, mentre *Salix alba* ne è priva.

4°) *Betula alba*, fra le Betulacee, è accompagnata da un discreto numero di funghi umicoli; sotto *Alnus glutinosa* ho spesso trovato un *Lactarius*; *Alnus viridis* sembra mancare di funghi umicoli caratteristici.

5°) Le essenze legnose appartenenti alle altre famiglie, eccettuati *Tilia vulgaris* e forse *Cytisus Laburnum*, *Sorbus Aucuparia*, non sono mai accompagnati da Imenomiceti umicoli.

6°) I prati e pascoli erbosi sono caratterizzati dalla presenza di molte specie del genere *Hygrophorus*, e da Agaricacee manifestamente coprofile, appartenenti ai generi *Agaricus*, *Coprinus*, *Stropharia*, *Panaeolus* e affini, nonchè dai Gasteromiceti.

Da quanto precede, lasciando da parte, per maggior semplicità, le stazioni erbose costituite da troppe specie fanerogame, risulta evidente il fatto

che ogni essenza legnosa è accompagnata da una florula caratteristica di Agaricacee e Boletinee umicole. Questa florula è costituita da alcune specie che si dimostrano esclusive d'una essenza legnosa determinata, oppure di un gruppo di essenze tra loro affini (p. es. le Cupulifere) e da altre specie le quali sembrano crescere più o meno indifferentemente sotto un gran numero di essenze disparate.

Come si possono interpretare tali differenze?

Il modo più ovvio e più semplice di spiegare il fatto sembrerebbe a prima vista di farlo dipendere da ciò, che i funghi vivono a spese dell'*humus* formato dai detriti (rami e foglie caduti) dell'essenza legnosa al cui piede si sviluppano, *humus* che varia, naturalmente, da essenza ad essenza.

Questa era, del resto, la mia opinione durante le mie prime ricerche, se non che una osservazione fatta su *Boletus elegans* mi dimostrò come tale interpretazione non possa assolutamente applicarsi a tutti i casi.

Ho detto più sopra come il Larice scenda a Rielaretto fin nella zona del Castagno; ma sotto i 1300 m. esso diventa sporadico ed è per lo più rappresentato qua e là da qualche individuo isolato in mezzo ai boschi di latifoglie. Ora più volte mi accadde, nell'esplorare il suolo di qualche bosco frondoso, di trovarmi ad un tratto davanti a caratteristici esemplari di *Boletus elegans*. Sapendo che questa specie è esclusiva del Larice, cercavo naturalmente se nelle vicinanze ve ne fosse qualche esemplare, e non mi è mai capitato di non trovarcelo, ma talora era ad una distanza abbastanza considerevole, tale che era impossibile che le foglie ed i rami suoi venissero a formare umus nel posto ove si trovava il Boletto; spesso anzi l'umus era formato dalle latifoglie più vicine! Bisogna perciò ammettere che corressero dei rapporti tra il fungo e le radici del Larice. Così pure ho più volte avuto l'occasione di osservare che, quando un bosso confina con un prato, i funghi non si sviluppano soltanto sotto la chioma degli alberi ove abbonda l'umus, ma anche, e talora anche di più, nel prato fino ad una distanza abbastanza considerevole; ora era impossibile nei casi da me osservati che i funghi vivessero a spese dell'umus formato dai detriti arborei, sia perchè questi non potevano arrivare in quantità apprezzabile fino a tale distanza, sia soprattutto, perchè essi vengono a Rielaretto allontanati più volte all'anno durante le pratiche agricole.

Richiamata da questi fatti la mia attenzione sulla probabilità di rapporti tra le radici degli alberi e i funghi a cappello, non mi è stato difficile di constatare più volte — i Larici e i Pioppi si prestano particolarmente bene a tali osservazioni — lo stretto rapporto tra la distribuzione dei funghi attorno ad un albero e il percorso delle radici di questo.

I rapporti tra radici e funghi mi sembrano perciò fuori dubbio.

Tali rapporti si possono interpretare in due modi: o essi avvengono direttamente per mezzo di micorize, oppure anche i funghi assorbono dal

terreno delle sostanze secrete dalle radici e necessarie al loro sviluppo. È noto, infatti, come tanto le radici degli alberi quanto il micelio dei funghi non si limitino ad esercitare un assorbimento elettivo dei composti disciolti nel terreno, ma ne cedano a questo altri inutili o dannosi al loro organismo.

Per parte mia propendo a credere che ambedue questi generi di rapporti si verifichino in natura. Comunque, però, mi sembra fuori di dubbio che molte Agaricacee e Boletinee umicole formino delle micorize ectotrofiche e ciò per la ragione seguente.

Se noi confrontiamo i risultati sovra esposti, circa la distribuzione degli Imenomiceti umicoli, con quanto si sa oggi giorno sulle micorize, salta agli occhi questo fatto: *Le essenze legnose sotto le quali abbondano i funghi a cappello sono precisamente quelle le quali possiedono delle micorize ectotrofiche, mentre le essenze prive di Imenomiceti o possiedono micorize endotrofiche o non ne possiedono affatto.*

Questa constatazione viene a recare un valido appoggio all'opinione di coloro, i quali pensano che le micorize siano prodotte in massima parte da funghi appartenenti al gruppo dei Basidiomiceti.

**Chimica.** — *Sopra un prodotto della deflagrazione della nitrocellulosa* <sup>(1)</sup>. Nota di ELIGIO TRAPANI, presentata dal Socio A. ANGELI.

In questi ultimi tempi ho avuto frequentemente occasione di dover distruggere, facendoli deflagrare, i residui delle polveri infumi che avevano servito alle varie ricerche chimiche e determinazioni di stabilità al calore, e più volte ho potuto constatare che, assieme a quello caratteristico dei vapori nitrosi, si avvertiva un odore molto più pungente e che molto rassomiglia a quello della formalina, la soluzione acquosa di formaldeide che viene adoperata come disinfettante. Ne ho parlato al prof. Angeli, il quale si è subito interessato della cosa e sotto la sua guida ho eseguite le esperienze preliminari che comunico in questa Nota, le quali dimostrano che con tutta probabilità si tratta realmente di formaldeide.

Io ho incominciato dall'esaminare la balistite, tanto con anilina che senza, le corditi, che come è noto sono costituite da nitroglicerina e nitrocellulosa, e le polveri a sola nitrocellulosa.

Per la ricerca della formaldeide mi sono giovato della bella reazione di Rimini <sup>(2)</sup>, la quale permette di svelare la presenza anche di piccolissime quantità di tale sostanza, e che consiste, come è noto, nel trattare i

<sup>(1)</sup> Ricerche eseguite nel R. Laboratorio per le sostanze esplosive in Roma.

<sup>(2)</sup> Bull. Soc. chim. de France (3) 20 (1898), 896.

liquidi che la contengono con cloridrato di fenilidrazina e nitroprussiato sodico: per aggiunta di alcali si forma una colorazione azzurra che poi lentamente volge verso il rosso.

Si pone un frammento dell'esplosivo, qualche centigrammo, sul fondo di un tubo da saggio e si riscalda con cautela fino a che è avvenuta la deflagrazione: assieme a quello dei vapori rossi, si avverte subito l'odore pungente di cui ho fatto parola. Dopo raffreddamento si pone acqua fino alla metà del tubo da saggio; ma siccome il liquido contiene acido nitroso, che reagirebbe subito per conto proprio con la fenilidrazina e turberebbe la reazione, così è necessario aggiungere dapprima carbonato sodico; si agita, si aggiunge il cloridrato di fenilidrazina con un paio di gocce di soluzione recente di nitroprussiato sodico: si agita, dopo un paio di minuti si rende alcalino con potassa e così comparisce immediatamente la caratteristica colorazione azzurra. È sufficiente qualche centigrammo di esplosivo per colorare intensamente tutto il contenuto di un ordinario tubo da saggio. Se anche la reazione è molto sensibile, ciò dimostra che la formaldeide si forma sempre in quantità notevole.

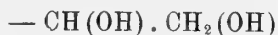
In questo modo si comportano la balistite, le corditi e le polveri infumi contenenti solamente nitrocellulosa, accuratamente private dal solvente residuo.

Con la nitroglicerina sola non ho ancora provato.

La presenza dell'aldeide formica non era stata ancora riscontrata fra i prodotti di deflagrazione delle polveri contenenti nitrocellulose; il prof. Angeli mi ha detto di non averne trovata parola nei trattati sopra le materie esplosive e per la nitroglicerina e nitrocellulosa separate nemmeno nei grandi trattati di chimica organica. Solamente nelle celebri Ricerche di Sir Frederick Abel si trova un cenno sopra un « odore pungente », oppure sopra un « odore pungente nel quale però non si riconobbe quello dell'acido nitroso », che manifesta la nitrocellulosa per azione della luce <sup>(1)</sup> oppure del calore <sup>(2)</sup>, senza che sia però determinato a quale prodotto tale odore sia dovuto.

Ancora non è possibile di stabilire a quale reazione sia da attribuirsi la formazione della formaldeide; non sono note le formole di struttura delle nitrocellulose e nemmeno quella della cellulosa, ed in ogni caso si tratta di processi molto complicati.

Si comprende subito però che la formaldeide potrebbe derivare da residui:

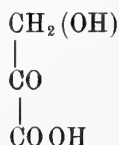


che forse preesistono nella nitrocellulosa, ovvero da catene analoghe che pos-

<sup>(1)</sup> *Abel. Untersuchungen über Schiessbaumwolle.* Traduzione del dott. B. Pleus. Parte II (Berlino, 1907), pp. 17, 18, 20 e seg.

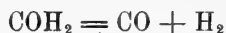
<sup>(2)</sup> *Ibid.*, pp. 61, 62 e seg.

sono formarsi in una prima fase della decomposizione, in seguito ai cosiddetti processi di denitrazione. È noto infatti che per azione del calore oppure della luce, dalla nitrocellulosa si formano prodotti, che riducono il liquido di Fehling; ed O. Silberrad e R. Crosbie Farmer <sup>(1)</sup> hanno trovato che la nitrocellulosa, per azione del calore fornisce anche acido ossipiruvico:



Si comprende subito come queste sostanze possano scindersi ulteriormente con formazione di aldeide formica.

Accennerò infine che la presenza di formaldeide è molto probabilmente in relazione anche con l'ossido di carbonio e con l'idrogeno:



che si riscontrano fra i prodotti di esplosione della nitrocellulosa.

Appena le altre occupazioni me lo permetteranno, vedrò se è possibile riscontrare la formaldeide anche nelle polveri avariate, giacchè in questo caso la sua presenza potrebbe interessare forse quanto quella dei prodotti nitrosi.

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÖTTI dà il triste annuncio della perdita fatta dall'Accademia, nelle persone dei Soci: BAZIN ENRICO, morto il 14 febbraio 1917; faceva parte dell'Accademia, come Socio straniero per la *Meccanica*, dal 13 febbraio 1890; — DARBOUX GASTONE, mancato ai vivi il 23 febbraio 1917; apparteneva anch'egli all'Accademia come Socio straniero per la *Matematica*, sino dal 13 febbraio 1890.

Il Socio VOLTERRA con elevate e commosse parole riassume l'opera scientifica del Darboux, le cui scoperte, specialmente nella geometria differenziale, lo collocarono fra i più grandi matematici del nostro tempo; ricorda inoltre la deferenza e la stima dall'illustre estinto professata verso i matematici italiani.

<sup>(1)</sup> Journal of the chemical Society, luglio, 1906, pag. 1183.

Il Socio DE STEFANI legge la seguente commemorazione dell'Accademico prof. FRANCESCO BASSANI.

L'anno decorso cessava di vivere Francesco Bassani. Già prima Socio Corrispondente, da undici anni, dal 21 agosto 1905, era stato nominato nostro Socio Nazionale. Egli fu degnamente ricordato da ciascuno dei numerosi Istituti e Società dei quali fece parte e vanno rammentate le affettuose commemorazioni che di lui fecero due suoi diletti discepoli, il nostro collega De Lorenzo ed il prof. D'Erasmus.

È doveroso il mesto tributo anche a noi ed in ispecie a me, dolente, quasi coetaneo e conterraneo, che avevo diviso con lui, come con gli altri colleghi, l'apostolato della scienza geologica e il desiderio di renderla vieppiù degna dei nostri maestri e della nostra patria.

Non è mia intenzione di passare in rassegna i numerosi lavori del Bassani, la qual cosa, in parte fatta da altri, renderebbe necessaria una assai lunga e completa biografia e bibliografia; ma riassumerò, almeno per sommi capi, quanto egli fece fino a che una dura malattia, a lui consapevole, tolse negli ultimi anni le forze, non la volontà del lavoro.

Nato a Thiene in provincia di Vicenza il 29 ottobre 1853 e compiuti i primi studi, si iscrisse all'Università di Padova e frequentò la scuola di Giovanni Omboni, geologo positivo, che insegnava la scienza schietta come era allora, non complicata da quelle farragini teoriche sopravvenute coi geologi da tavolino d'oltr'Alpe, nelle quali ha in parte incespicato dappoi. Acquistata con onore la laurea nel 1875 e nominato dal maestro suo assistente di Mineralogia e Geologia, dopo due anni ottenne un posto di perfezionamento all'estero, e nel 1877 seguì in Parigi alla Sorbona i corsi di Edmondo Hébert, nonchè gli ammaestramenti di Gaudry, Gervais, Sauvage e di altri valenti. Confermatogli il posto nel 1878 si recò a Vienna presso Edoardo Sueff e Melchiorre Neumayr, poi a Monaco da Alfredo Zittel, maestri di coscienza, ai quali da ogni parte di mondo, fin dal Giappone, accorrevano gli studiosi, sapienti maestri tutti e questi ultimi non ancora pervasi da quella smania di grandezza e di superiorità fuor di luogo che ha fatto poi velo ad altri loro compaesani assai minori, pur nati e cresciuti alla medesima scuola.

Tornato in Italia, dopo essere stato otto anni nell'istruzione secondaria, fù nel 1887 chiamato ad insegnare geologia, poi anche Paleontologia nell'Università di Napoli, e quivi presso a Capri finì la vita.

Fin da quando era stato assistente dell'Omboni egli si era dedicato allo studio dei pesci fossili e questo fu l'occupazione principale della sua vita. Nella difficile materia egli era fra le primarie autorità d'Europa, e molte sue pubblicazioni comparvero negli Atti di Istituti e di Accademie francesi ed austriache, alcune nella lingua loro, altre nella lingua nostra italiana.

Di più d'un centinaio di sue pubblicazioni almeno una sessantina riguardano pesci di ogni parte d'Europa, ma specialmente d'Italia e di regioni finitime come S. Agata presso Gorizia, Lesina e Comen: ma pur si era occupato di pesci di Francia, del Württemberg e di altre ittiofaune straniere. Nè si era limitato con ciò allo studio paleontologico, bensì era riuscito pure a stabilire l'età controversa di molte fra le dette faune. La sua diletta moglie Everdina Dekker, olandese, esimia disegnatrice, lo aiutava con gli artistici ma pure sempre scrupolosi disegni degli esemplari che egli illustrava. È curioso notare che, mentre nei primi tempi, come dal più al meno tutti i giovani, era propenso a scernere i più minuti caratteri biologici ed a moltiplicare le cosiddette specie, con l'esperienza prolungata e con l'età era giunto invece, come pure ad altri avviene, a concludere, talora, credo, con troppo eccesso, che le specie si susseguono senza alterazione a traverso parecchie generazioni e a traverso più o meno lunghe età geologiche.

Nè solo di pesci si occupò; ma ebbe pure a trattare di altri argomenti paleontologici e di varie questioni strettamente geologiche riguardanti soprattutto l'Italia meridionale. Così scrisse della solfatara di Pozzuoli, del Vesuvio, della penisola di Sorrento, del Monte Consolino, dei dintorni di Pignataro Maggiore, degli scavi di Capri, sempre con la sua solita diligenza. In taluni di questi studi non disdegnò di avere a collaboratori alcuni dei suoi allievi, De Lorenzo, Galdieri, D'Erasmus, od amici e colleghi come il Chistoni ed il Misuri.

Buon dicitore ed efficace insegnante amò come padre i discepoli e da questi fu in pari modo amato.

Non procacciatore di onori, questi vennero a lui, sebbene non forse quanti la sua sapienza meritava e quanti ne avrebbe avuti se li avesse cercati; d'altri non invidioso fu largo di consigli e di aiuti ai richiedenti. Gentiluomo perfetto, amico fidato, estimatore degli scienziati stranieri chè la scienza non ha patria, ma pensieroso sempre, con efficacia, di tenere altissima quella italiana, morì il 26 aprile 1916 lontano dalla casa materna, alla quale da tutti amato e desiderato, tornava ogni anno per rinfrancarsi.

#### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, tra le quali segnala quelle dei Socî seguenti: PIROTTA: *L'origine di nuove specie secondo la teoria dell'incrocio*; LIPPMANN: *Variations de la chaleur spécifique des gas avec la pression*. Fa inoltre menzione di una raccolta di pubblicazioni del Corr. GUIDI CAMILLO, rilevandone i pregi e la importanza, ed osservando che alcune delle pubblicazioni suddette tro-



varono accoglienza pratica, come quella sui tubi in cemento armato, la cui teoria fu applicata all'acquedotto Pugliese; e che altre furono riprodotte o per disteso o per recensione negli « Annales des Ponts et Chaussées », nel « Génie Civil » ecc.

Finalmente lo stesso SEGRETARIO fa menzione del vol. II-2 dell'*Epistolario di Berzelius*, edito per cura dell'Accademia delle scienze di Stoccolma; e di un opuscolo che ricorda le onoranze tributate dal Municipio di Bergamo al Socio prof. TORQUATO TARAMELLI.

---

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA  
*presentate nella seduta del 4 marzo 1917.*

- BERZELIUS JAC. — Bref utgifna af Kungl. Svenska Vetenskapsakademien gemon H. G. Söderbaum. Uppsala, 1916 8°. pp. 1-356.
- CAVASINO A. — Frequenza e distribuzione dei terremoti italiani nel ventennio 1891-1910 (Estr. dal « *Bullettino della Soc. Sismologica Italiana* », vol. XX, pp. 1-25). Modena, 1916. 8°.
- D'ACHIARDI G. — Credenze e teorie sull'origine dei minerali e dei loro giacimenti (Estr. dagli « *Annali delle Università toscane* », vol. I, pp. 1-28. Pisa, 1916. 8°.
- DE TONI G. B. — Analisi microscopica di alcuni saggi di fitoplancton raccolti dalla R. N. « *Liguria* » (Estr. dalle « *Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere, ed arti* », vol. XXIX, pp. 1-33. Venezia, 1916. 4°.
- DE TONI G. B. — Catalogo delle Alge raccolte nella regione di Bengasi da R. P. D. Vita Zanon (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere, ed arti* », vol. LXXVI, pp. 1-22). Venezia, 1916. 8°.
- DE TONI G. B. — Seconda contribuzione alla flora algologica della Libia italiana (R. Comitato Talassografico Italiano. Mem. XLI). Venezia, 1914, 4°, pp. 1-32.
- DE TONI G. B. — Terza contribuzione alla flora algologica della Libia (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. LXXIII, pp. 1142-1551). Venezia, 1914. 8°.
- FORTI A. — Analisi microscopica di alcuni saggi di fitoplancton raccolti dalla R. N. « *Liguria* » (Estr. dalle « *Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. XXIX, pp. 1-33). Venezia, 1916. 4°.
- FORTI A. — Catalogo delle Alge raccolte nella regione di Bengasi dal R. P. D. Vita Zanon (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. LXXVI, pp. 1-22). Venezia, 1916. 8°.
- FORTI A. — Notizie biografiche di Alberto Grunow (1826-1914). Padova, 1915. 8°, pp. 1-40.
- FORTI A. — Seconda contribuzione alla flora algologica della Libia Italiana (R. Comitato Talassografico Italiano. Mem. XLI). Venezia, 1914. 4°, pp. 1-32.
- FORTI A. — Terza contribuzione alla flora algologica della Libia (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. LXXIII, pp. 1142-1551). Venezia, 1914. 8°.
- GUIDI C. — Assemblage de l'ame des poutres à I (Sodenrdruck aus der « *Eisenbau* », 1 Jahr. Ss. 185-186). Leipzig, 1910. 4°.
- GUIDI C. — Il frettage nelle travi inflesse (Estr. dal « *Giornale del Genio Civile* », pp. 1-14). Roma, 1914. 8°.
- GUIDI C. — Lezioni sulla scienza delle costruzioni. La trave solidale coi piedritti. Torino, 1916. 8°, pp. 1-32.
- GUIDI C. — Proposta di modificazioni alle prescrizioni normali per l'esecuzione delle costruzioni in cemento armato. Roma, 1914. 8°, pp. 1-18.
- GUIDI C. — Prove comparative su travi in beton armate con tondini o con quadretti tipo Jonson (Estr. da « *Il Cemento* », pp. 1-12). Milano, 1910. 8°.
- GUIDI C. — Prove di resistenza sulla ghisa (Estr. dall' « *Ingegneria ferroviaria* »). Roma, 1914. fol.
- GUIDI C. — Sollecitazioni nell'armatura dell'ala di un biplano in linea di volo, prodotte dal sostegno dell'aria (Estr. dagli « *Atti della R. Accademia delle*

- Scienze di Torino », vol. LII, pp. 87-96). Torino, 1916. 8°.
- GUIDI C. — Sollecitazione prodotta nei pali di una condotta elettrica per strappamento completo di una tesata (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LII, pp. 226-332). Torino, 1916. 8°.
- GUIDI C. — Sul calcolo della lastra rettangolare (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-4) Torino, 1914. fol.
- GUIDI C. — Sul calcolo della trave vierendeel (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-14). Roma, 1916. 8°.
- GUIDI C. — Sul calcolo statico dei serbatoi cilindrici in beton armato (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVIII, pp. 199-208). Torino, 1913. 8°.
- GUIDI C. — Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVII, pp. 1-18). Torino, 1912. 8°.
- GUIDI C. — Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro. Nota II (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVII, pp. 1-15). Torino, 1912. 8°.
- GUIDI C. — Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-3). Roma, 1912. 8°.
- GUIDI C. — Sulle deformazioni dei tubi di grande diametro per condotte d'acqua (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVIII, pp. 358-369). Torino, 1913. 8°.
- GUIDI C. — Sulle dighe a volta (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-11). Roma, 1917. 8°.
- GUIDI C. — Sulle formole del portale (Estr. dalla Rivista « Il Cemento », pp. 1-3). Torino, 1916. foll.
- LURIA A. — Aerofuoco (cioè faro per aeronavigazione) a lampi singoli, od a gruppi semplici o composti di lampi, tipo « Luria » a proiettore con riflettore ausiliario. Torino, 1916. 4°, pp. 1-9.
- LURIA A. — Fuoco (Fanale) ad intermitenza per aeronavigazione, atto altresì a funzionare da telegrafo ottico per trasmettere messaggi ai velivoli. Torino, 1917. 4°, pp. 1-11.
- LUSSANA S. — Sul calore specifico dei liquidi a pressione costante per pressioni e temperature diverse (Estr. dal « Nuovo Cemento », vol. VII, pp. 1-11). Pisa, 1914. 8°.
- LUSSANA S. — Variation de la chaleur spécifique des gaz avec la pression (Extrait des « Annales de physique », pp. 345-356). Paris, 1916. 8°.
- Onoranze al prof. Torquato Taramelli. Bergamo, 1916. 4°, pp. 1-31.
- PIROTTA R. — L'origine di nuove specie secondo la teoria dell'incrocio (Estr. da « Scientia ». Rivista di Scienza, vol. XXI, pp. 1-11). Bologna, 1917. 8°.



## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76) Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE *della Classe di scienze fisiche,  
matematiche e naturali.*  
3<sup>a</sup> MEMORIE *della Classe di scienze morali,  
storiche e filologiche.*
- Vol. V. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*  
Vol. I-VII.  
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 5<sup>o</sup>. Sem. 1<sup>o</sup>.  
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*  
Vol. I-XII. Fasc. 2.  
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*  
Vol. I-XII Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 marzo 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>B. Grassi e M. Topi.</i> Esistono diverse razze di fillossera della vite? . . . . .	Pag. 265
<i>Angeli e Cusmano.</i> Sopra il nero di nitrosopirrolo . . . . .	273
<i>Viola.</i> Sulla formazione di geminati . . . . .	278
<i>Tedone.</i> Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico . . . . .	286
<i>Andreoli.</i> Equazioni integrali singolari con nuclei analoghi a quelli di Evans (pres. dal Socio <i>Volterra</i> ) . . . . .	289
<i>Cantelli.</i> Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica (pres. dal Corrisp. <i>Castelnuovo</i> ) . . . . .	295
<i>Daniele.</i> Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative (pres. dal Socio <i>Volterra</i> ) . . . . .	302
<i>Petronievics.</i> Sur les nombres infinis de Fontenelle (pres. dal Socio <i>Levi-Civita</i> ) . . . . .	309
<i>Armellini.</i> Sopra le distanze dei pianeti dal Sole (pres. dal Corrisp. <i>Marcolongo</i> ) . . . . .	316
<i>Zappa.</i> Per una verifica sperimentale della teoria di relatività di Einstein (pres. dal Socio <i>E. Millosevich</i> ) . . . . .	322
<i>Peyronel.</i> Prime osservazioni sulla distribuzione degli Imenomiceti umicoli e sui loro probabili rapporti colle micorize ectotrofiche delle fanerogame (pres. dal Socio <i>Cuboni</i> ) . . . . .	326
<i>Trapani.</i> Sopra un prodotto della deflagrazione della nitrocellulosa (pres. dal Socio <i>Angeli</i> ) . . . . .	332

PERSONALE ACCADEMICO

<i>Roiti.</i> (Presidente). Annuncia la morte dei Soci stranieri <i>Enrico Bazin</i> e <i>Gaston Darboux</i> . . . . .	334
<i>Volterra.</i> Si associa alle parole del Presidente riassumendo l'opera scientifica del defunto Accademico <i>Darboux</i> . . . . .	"
<i>De Stefani.</i> Commemorazione del Socio nazionale prof. <i>Francesco Bussani</i> . . . . .	335

PRESENTAZIONE DI LIBRI

<i>Millosevich</i> (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle dei Soci <i>Pirotta</i> , <i>G. Lippmann</i> e <i>C. Guidi</i> . . . . .	336
<i>Id.</i> Fa menzione di un volume edito per cura dell'Accademia delle scienze di Stoccolma e di un opuscolo che ricorda le onoranze tributate dal Municipio di Bergamo al Socio prof. <i>Torquato Taramelli</i> . . . . .	337
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . .	338

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 18 marzo 1917.*

Volume XXVI.º — Fascicolo 6º

1º SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

SEP 3 5 1925

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 18 marzo 1917.*

F. D' OVIDIO Presidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Matematica.* — *Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli.* Nota del Socio C. SEGRE.

1. Quando le rette dello spazio ordinario si rappresentano nel modo noto coi punti di una varietà quadratica  $R$  dello  $S_5$ , le sezioni di  $R$  coi piani di questo spazio sono immagini, in generale, di schiere di generatrici rettilinee di quadriche ordinarie; a meno che i piani giacciono in  $R$ . nel qual caso si ottengono le ordinarie stelle di raggi e i sistemi piani rigati.

Dirò, per brevità, *regolo* per significare « schiera di generatrici di una quadrica ordinaria »: includendo però nel concetto di *regolo* anche la detta degenerazione in stelle, o piani rigati.

Seguendo il metodo iperspaziale ora ricordato, ho potuto giungere, attraverso alla geometria dei piani di  $S_5$ , a risultati notevoli sulla geometria dei regoli, e quindi anche delle quadriche ordinarie.

In attesa della pubblicazione completa di queste ricerche, ne estraggo qui alcuni enunciati, omettendo le dimostrazioni.

2. Ricordiamo che i regoli sono  $\infty^2$ ; e che in generale sono a coppie *incidenti*, cioè situati in una stessa quadrica.

Due regoli, che giacciono in una stessa congruenza lineare di rette, determinano un *fascio di regoli*: costituito da quei regoli della congruenza che han comuni le due rette (distinte o infinitamente vicine) d'intersezione dei due regoli dati. I regoli di un fascio stanno in generale su quadriche (di un fascio-schiera) passanti per uno stesso quadrilatero sghembo, di cui solo due lati opposti sono rette dei regoli.

Ciò premesso, chiamo *complesso lineare di regoli* un insieme algebrico di regoli, tale che in un fascio generico di regoli ve ne sia *uno* solo. Un tale insieme abbraccerà  $\infty^8$  regoli.

I complessi lineari di regoli sono  $\infty^{19}$ .

3. Dato un complesso lineare di regoli, se di ogni suo regolo si prende il regolo incidente, si otterranno i regoli di un altro complesso lineare.

La coincidenza di un complesso lineare di regoli con quello che in tal modo gli è associato, avviene solo nei due casi particolari seguenti.

Si fissi una quadrica  $\varphi$  da considerarsi come *inviluppo*, od una  $f$  da riguardar come *luogo*. Le  $\infty^8$  quadriche-luoghi armoniche a  $\varphi$ , o le  $\infty^8$  quadriche-inviluppi armoniche a  $f$ , costituiscono un sistema lineare; sicchè in un fascio-schiera ve n'è in generale una sola. Ne segue che i regoli giacenti nelle quadriche dell'uno, oppure dell'altro sistema lineare, formano, secondo la definizione del n. 2, un complesso lineare.

Così le due specie diverse di sistemi lineari  $\infty^8$  di quadriche, provenienti dal considerar le quadriche come superficie di 2° ordine, o come inviluppi di 2ª classe, vengono subordinate ad un unico concetto, molto più ampio: quello di complessi lineari di regoli.

Sono solo  $\infty^9$ , sì nell'una che nell'altra specie, questi particolari complessi, provenienti da sistemi lineari di quadriche.

4. Un altro esempio speciale di complessi lineari di regoli, dipendenti ancora da sole 9 costanti, si ha nell'insieme di tutti i regoli, ognun dei quali è in uno stesso complesso lineare di rette con un regolo fisso (*nucleo*).

5. Consideriamo un complesso lineare *generale* di regoli,  $\Gamma$ . Ad esso si connettono strettamente (son forme invariantive) due quadriche  $f, \varphi$ .

La quadrica  $f$  è il luogo dei centri di quelle stelle che, riguardate come regoli (n. 1), fan parte di  $\Gamma$ . Dualmente  $\varphi$  è l'inviluppo dei piani sostegni dei sistemi piani rigati che, come regoli, stanno in  $\Gamma$ .

Si posson anche definire  $f$  e  $\varphi$  in quest'altro modo. Le quadriche di cui ambi i regoli stanno in  $\Gamma$  sono precisamente quelle  $\infty^7$  che, come luoghi, sono armoniche ad una quadrica-inviluppo fissa  $\varphi$ , e come inviluppi sono armoniche ad una quadrica-luogo fissa  $f$ .

In altre parole, il dato complesso  $\Gamma$  (insieme col suo associato nel senso del principio del n. 3) appartiene sempre ad un *fascio di complessi* determinato da due complessi lineari armonici rispettivamente ad una quadrica-luogo e ad una quadrica-inviluppo (complessi particolari del n. 3).

Dirò  $f$  e  $\varphi$  gli *appoggi* di  $\Gamma$ .

6. Sono pure determinati da  $\Gamma$  due regoli  $\alpha, \beta$ , che chiamerò invece i *cardini* di  $\Gamma$ .

In una congruenza lineare di rette stanno  $\infty^3$  regoli; e se la congruenza è generica, solo  $\infty^2$  di questi sono in  $\Gamma$ . Ma esistono infinite congruenze lineari, che possiam chiamare *totali* per  $\Gamma$ , nel senso che *ogni* loro regolo

appartiene a  $\Gamma$ . Queste congruenze si hanno da due determinati regoli  $\alpha, \beta$ , così: son le congruenze lineari di rette, ognuna delle quali contiene due rette di  $\alpha$  e due rette di  $\beta$ .

Si giunge anche ad  $\alpha, \beta$  colla seguente proposizione. Il complesso dato  $\Gamma$  sta sempre in un fascio con due complessi della specie particolare definita al n. 4. I nuclei di questi due complessi saranno appunto  $\alpha$  e  $\beta$ .

Indicherò con  $A, B$  le due quadriche (che suppongo non singolari) su cui stanno i regoli  $\alpha, \beta$ .

7. I regoli  $\alpha, \beta$ , e quindi anche le quadriche  $A, B$ , sono strettamente legati alle  $f, \varphi$ .

La  $f$  sta in un fascio di quadriche con  $A, B$ ; e così  $\varphi$  sta nella schiera di quadriche determinata da  $A$  e  $B$ .

Per determinare il complesso  $\Gamma$  si posson prendere ad arbitrio i due regoli cardini  $\alpha, \beta$ ; e poi anche, entro al fascio  $AB$ , la quadrica d'appoggio (luogo)  $f$ , oppure, entro la schiera  $AB$ , la quadrica d'appoggio (inviluppo)  $\varphi$ . Con ciò  $\Gamma$  risulta individuato.

Si ha dunque, fra le quadriche del fascio e della schiera che son determinati dalle quadriche  $A, B$  di due dati regoli  $\alpha, \beta$ , una corrispondenza biunivoca. Dette  $f$  e  $\varphi$  due quadriche omologhe, rispettivamente del fascio e della schiera, il loro legame (con  $\alpha, \beta$ ) si può esprimere così: per ogni coppia di rette incidenti di  $\alpha$  e  $\beta$ , quella retta del loro fascio che è tangente ad  $f$  è pure tangente a  $\varphi$ .

8. Un'altra maniera di presentare la corrispondenza tra le  $f$  e le  $\varphi$  (di cui l'ultima proposizione può riguardarsi come un corollario) deriva dalla considerazione di quelle congruenze di rette, *totali* (n. 6) per  $\Gamma$ , che sono *speciali*.

Le direttrici di tali congruenze sono le  $\infty^3$  rette di un complesso quadratico  $T$  di Battaglini. Se  $p$  è una di esse, la congruenza lineare speciale di cui è direttrice stabilisce fra i punti e i piani di  $p$  una corrispondenza proiettiva, che fa corrispondere ai quattro punti d'incontro di  $p$  con rette di  $\alpha, \beta$  i quattro piani che congiungon  $p$  rispettivamente alle stesse rette <sup>(1)</sup>. Orbene, in questa stessa proiettività ai punti d'incontro di  $p$  con  $f$  rispondono i piani tangenti a  $\varphi$  passanti per  $p$ .

Così, se per un punto qualunque  $P$  si tirano le  $\infty^1$  rette del complesso quadratico  $T$  definito dall'incidenza sui due dati regoli  $\alpha, \beta$ ; e per ciascuna  $p$  di quelle  $\infty^1$  rette si costruisce il piano  $\pi$ , che corrisponde a  $P$  nella proiettività che è data tra punti e piani di  $p$ ; gli  $\infty^1$  piani  $\pi$  saranno tutti

(1) La proiettività così richiesta fra 4 punti e 4 piani di  $p$  è una condizione che può servire per definire il complesso  $T$  di Battaglini. Veggasi su questa definizione (*per incidenza su due regoli*) una mia Nota: *Sui complessi quadratici di rette del Battaglini*, Rendic. Circ. mat. di Palermo, t. 42 (1917).

tangenti ad una stessa quadrica  $\varphi$  della schiera AB; e questa  $\varphi$  non muoverà se P si muoverà su una quadrica  $f$  del fascio AB.

9. Invece di partire dai due regoli cardini  $\alpha, \beta$  (nn. 7 e 8), si può, per determinare il complesso  $\Gamma$ , partire dalle due quadriche d'appoggio  $f$  e  $\varphi$ , prese ad arbitrio.

Date  $f$  e  $\varphi$ , sono ancora  $\infty^1$  (un fascio) i complessi lineari  $\Gamma$ . Le quadriche contenenti i loro cardini formano un sistema  $\Sigma$ , semplicemente infinito, ellittico, d'indici puntuale e planare 3; sistema che contiene  $f$  e  $\varphi$ , e che si può definire come l'insieme delle quadriche passanti per 8 punti O associati rispetto a un tetraedro (cioè fra loro omologhi nel  $G_3$  di colli-neazioni involutorie definite dal tetraedro), e tangenti a 8 piani  $\omega$ , pure associati rispetto a quel tetraedro. I punti O sono gli 8 punti di contatto di  $f$  con generatrici di  $\varphi$ ; e dualmente i piani  $\omega$  sono quei piani tangenti a  $\varphi$  che passan per le generatrici di  $f$  tangenti a  $\varphi$ . Due regoli  $\alpha, \beta$  di quadriche di  $\Sigma$  si posson assumere come cardini di un complesso  $\Gamma$  (del fascio), quando le loro rette uscenti da un punto O sono in un piano con quella generatrice di  $\varphi$  che tocca  $f$  in O; o dualmente, scambiando fra loro  $f$  e  $\varphi$ , O e  $\omega$ . Naturalmente, con tale scelta le quadriche A, B di  $\alpha, \beta$  riesciranno in un fascio con  $f$ , e in una schiera con  $\varphi$ .

10. Quando si conoscano, per un complesso lineare di regoli  $\Gamma$ , si i cardini  $\alpha$  e  $\beta$ , che le quadriche di appoggio  $f$  e  $\varphi$ , la costruzione di  $\Gamma$  si farà facilmente, considerando  $\Gamma$  come comune ai due fasci di complessi definiti rispettivamente da  $\alpha, \beta$  e da  $f, \varphi$ . (Ne deriva anzi qualche nuova relazione tra  $\alpha, \beta, f, \varphi$ ).

Accennerò invece ad una costruzione di  $\Gamma$ , che si può fare quando son dati i due cardini  $\alpha, \beta$ , e poi un regolo qualunque  $\varepsilon$  di  $\Gamma$ . Si considerino le  $\infty^2$  congruenze lineari di rette, ognuna delle quali contiene una coppia di rette di ciascuno dei regoli  $\alpha, \beta, \varepsilon$ . (Si ottiene ogni congruenza siffatta, ad esempio, come intersezione dei complessi lineari di rette che congiungono  $\alpha$  e  $\beta$  ad una coppia di rette di  $\varepsilon$ ). Riguardando ciascuna congruenza come la base di un fascio di complessi lineari di rette, si pensi per ognuno di questi complessi il birapporto che con esso (come quarto elemento) determinano i tre complessi di quel fascio passanti per  $\alpha, \beta, \varepsilon$ . Tre qualunque complessi lineari di rette (rispettivamente per tre arbitrarie delle dette congruenze), ai quali spettino in tal modo dei birapporti, il cui prodotto sia uguale a 1, si taglieranno sempre in un regolo di  $\Gamma$ . E si otterranno così tutti gli  $\infty^8$  regoli di  $\Gamma$ .

**Astronomia.** — *Sul moto di rotazione della Terra; a proposito di una recente comunicazione del prof. Cerulli.* Nota del Socio P. PIZZETTI.

1. La interessante Nota del Consocio Cerulli: *Sulla determinazione della polodia* <sup>(1)</sup>, mi offre occasione ad alcune osservazioni intorno al moto di rotazione di un corpo, in tutto, o in parte, rigido. Tali osservazioni sono in realtà di indole affatto elementare, ma avendo esse connessione con un problema molto importante e delicato qual'è quello degli spostamenti dei poli, non saranno forse ritenute inopportune.

L'errore, segnalato dal prof. Cerulli, del riportare tali e quali alla Sfera celeste (ossia agli assi cartesiani di direzione fissa nello spazio) le variazioni del polo terrestre, è evidente. Se un corpo nei successivi istanti  $t_1, t_2, \dots, t_r, \dots$  ruota attorno alle rette  $a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ , che supponiamo rigidamente connesse col corpo stesso, e le cui direzioni, al tempo  $t_1$ , sono rappresentate dai punti  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$  della sfera celeste, il polo celeste all'epoca  $t_r$  non sarà già  $\alpha_r$ , ma bensì quel punto che sulla sfera rappresenta la novella direzione assunta, nello spazio, dalla retta  $a_r$  per il complessivo effetto delle rotazioni avvenute nelle precedenti epoche  $t_1, t_2, \dots, t_{r-1}, \dots$ . Ed è chiaro che questo effetto può esser tale da riportare il polo celeste vicinissimo alla sua posizione iniziale  $\alpha_1$ , ancor quando la retta  $a_r$  faccia un angolo non piccolo colla  $a_1$ . E viceversa può avvenire che l'effetto accumulato delle considerate rotazioni sposti di molto il polo celeste, ancorchè sia piccolissimo l'angolo fra le rette  $a_1, a_r$ . La cinematica ci dice soltanto che: se l'asse istantaneo di rotazione è di posizione invariabile rispetto al corpo (polo terrestre fisso), sarà pure tale rispetto alle direzioni fisse dello spazio (polo celeste fisso); ma non afferma che a piccole variazioni del polo terrestre corrispondano variazioni piccole dello stesso ordine nel polo celeste, o viceversa.

Esemplî classici di discordanza, sotto questo aspetto, presentano due casi notissimi: 1°, quello del *ciclo Euleriano*, o moto periodico del polo terrestre dovuto ad eventuale non coincidenza iniziale dell'asse di rotazione con uno degli assi principali d'inerzia terrestri: al quale moto periodico, dato che esista, corrisponde una variazione, d'ordine estremamente più piccola, della direzione assoluta dell'asse, ossia del polo celeste; 2°, gli spostamenti notevoli del polo celeste che vanno sotto il nome di precessione e nutazione

(1) Questi Rendiconti, seduta 4 febbraio 1917.

luni-solare, ai quali corrisponde una variazione praticamente insensibile del polo terrestre.

2. Le relazioni fra le velocità di spostamento dei due poli possono stabilirsi come segue. Indichiamo con  $x_1, y_1, z_1$ , un sistema d'assi cartesiani invariabilmente legati alla parte solida del Globo, con  $x, y, z$  gli assi di direzione invariabile nello spazio. Colla consueta tabella

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$x$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$y$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$z$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$

esprimiamo i coseni di direzione dell'una terna rispetto all'altra. Detti  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  i coseni di direzione dell'asse istantaneo di rotazione, al tempo  $t$ , rispetto alle due terne  $(x, y, z)$ ,  $(x_1, y_1, z_1)$  rispettivamente, avremo:

$$\xi = \sum_i \alpha_i \xi_i \quad , \quad \eta = \sum_i \beta_i \xi_i \quad , \quad \zeta = \sum_i \gamma_i \xi_i$$

( $i = 1, 2, 3$ ) e, colla derivazione rispetto a  $t$ :

$$(1) \quad \frac{d\xi}{dt} = \sum_i \alpha_i \frac{d\xi_i}{dt} \quad , \quad \frac{d\eta}{dt} = \sum_i \beta_i \frac{d\xi_i}{dt} \quad , \quad \frac{d\zeta}{dt} = \sum_i \gamma_i \frac{d\xi_i}{dt} \quad ,$$

annullandosi, per ovvie ragioni, nei secondi membri l'insieme dei termini che contengono le derivate degli  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  <sup>(1)</sup>.

Assumiamo come postulati di fatto che, per tutto l'intervallo di tempo che si ha a considerare, siano piccolissimi gli spostamenti, sia del polo celeste rispetto alle stelle fisse, sia del polo terrestre rispetto alla Terra. Con ciò si potrà ritenere che facciano sempre angolo piccolissimo fra loro le tre rette  $z, z_1$  e asse istantaneo, e ritenere quindi piccolissimi i coseni indicati con

$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi_2, \xi, \eta.$$

Supporremo pure assai piccole le derivate  $\frac{d\xi_i}{dt}$  e trascurabili i prodotti di

(1) Il punto che all'istante  $t$  trovasi sull'asse  $x$  a distanza  $l$  dall'origine delle coordinate, ha, in quell'istante, una velocità le cui componenti, rispetto agli assi  $x_1, y_1, z_1$ , sono le derivate di  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  rispetto a  $t$ . Ma la detta velocità è perpendicolare all'asse istantaneo. Quindi  $\sum_i \xi_i \frac{d\alpha_i}{dt} = 0$

esse per i coseni ora menzionati. Nello stesso ordine di approssimazione, porremo nelle (1)

$$\alpha_1 = \cos \theta, \quad \alpha_2 = -\sin \theta, \quad \beta_1 = \sin \theta, \quad \beta_2 = \cos \theta,$$

ove  $\theta$  è l'angolo fra il piano  $z_1 x_1$  e il piano  $zx$ , oppure, sempre con la stessa approssimazione, il *tempo siderale* di un meridiano terrestre assegnato. Le due prime delle (1) potranno pertanto scriversi:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \cos \theta \frac{d\xi_1}{dt} - \sin \theta \frac{d\xi_2}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \sin \theta \frac{d\xi_1}{dt} + \cos \theta \frac{d\xi_2}{dt}. \end{aligned}$$

Qui, sempre nello stesso ordine d'approssimazione,  $\xi_1, \xi_2$  possono rappresentare (a meno di un fattore costante) le due prime coordinate del polo terrestre rispetto agli assi terrestri, mentre  $\xi$  ed  $\eta$  esprimono le analoghe coordinate del polo celeste rispetto agli assi fissi.

Le formole (2) mettono in evidenza come le *velocità di variazione* dei due poli, terrestre e celeste, siano generalmente dello stesso ordine di grandezza. Ma nulla ne possiamo inferire, in generale, riguardo alla relazione di grandezza fra queste *variazioni*, per un intervallo finito di tempo, fino a che, per speciali condizioni imposte al problema, le equazioni della Meccanica non siano atte a darci il modo di variare, col tempo, della derivata del vettore *velocità angolare*, e quindi delle derivate di  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .

3. Vi ha un caso in cui le (2) conducono ad una evidente conclusione: quello dei moti che possiamo dire *impulsivi*, ossia di quegli spostamenti del polo terrestre che possono essere dovuti a turbamenti improvvisi nell'assetto della corteccia terrestre (cataclismi). Tali moti si verificano in un tempo così breve, che nelle (2) si può ritenere  $\theta$  costante e alle *derivate* sostituire le *variazioni finite* verificatesi nelle coordinate, del polo celeste (al 1° membro) e del terrestre (al 2° membro). Si ottiene così, con considerazioni elementari, quella conclusione alla quale si giunge di solito con calcoli assai complicati, che cioè *gli spostamenti del polo terrestre dovuti a fenomeni istantanei o cataclismi, si riproducono tali e quali nella posizione del polo celeste*. È il caso dello spostamento *par saccades* di cui discorre il dott. Roggero nella Memoria citata dal prof. Cerulli. Ma il limitarsi a considerare una tale specie di spostamenti conduce facilmente in errore.

4. Vogliamo qui indicare come, con un calcolo poco più che elementare, si possa, in casi particolari (che corrispondono probabilmente a fatti fisici assai comuni), mettere in evidenza il grado di mobilità del polo celeste di fronte a fenomeni che danno migrazioni sensibili del polo terrestre.

Supponiamo, generalmente, variabili gli assi e i momenti principali di inerzia della Terra, considerando questa come composta di una parte rigida (alla quale si intendono connessi gli assi  $x_1, y_1, z_1$ ) e di una parte variabile per effetto di maree, di fenomeni meteorici, sismici o simili.

Chiameremo  $A, B, C, D, E, F$  i consueti sei coefficienti d'inerzia rispetto agli assi  $x_1, y_1, z_1$  e supporremo sempre piccolissimi  $D, E, F$  e di pochissimo variabili  $A, B, C$ ; e assai piccole pure si supporranno le componenti  $f, g, h$  della *quantità di moto areale nel moto relativo* della parte variabile rispetto agli assi mobili  $x_1, y_1, z_1$ . Dette  $\omega, \pi, \chi, \varrho$ , la grandezza e le componenti, secondo  $x_1, y_1, z_1$ , della velocità angolare nel moto rotatorio del sistema  $(x_1, y_1, z_1)$  (delle quali componenti supporremo, in accordo coi postulati stabiliti da principio, piccolissime le due prime, e la terza pressapoco eguale alla velocità del moto diurno), le componenti della quantità di moto areale del sistema rispetto agli assi  $x_1, y_1, z_1$  saranno

$$(3) \quad \begin{aligned} A\pi - F\chi - E\varrho + f. \\ B\chi - D\varrho - E\pi + g. \\ C\varrho - E\pi - D\chi + h. \end{aligned}$$

Se dunque indichiamo con  $K$  la grandezza della quantità di moto areale, e con  $i$  una retta orientata secondo la direzione e il senso del vettore quantità di moto areale, l'angolo  $\gamma$  fra la retta  $i$  e l'asse istantaneo (ossia fra la retta  $i$  cui coseni di direzione sono le quantità (3) divise per  $K$  e la retta  $i$  cui coseni sono  $\pi/\omega, \chi/\omega, \varrho/\omega$ ) potrà dedursi dalla formola

$$\text{sen}^2 \gamma = \frac{1}{K^2 \omega^2} [ (B\chi - D\varrho - E\pi + g) \varrho - (C\varrho - E\pi - D\chi + h) \chi ]^2 + \dots + \dots ]$$

dove i due termini non scritti si ottengono del primo con permutazione circolare nelle 4 terne  $(A, B, C)$   $(D, E, F)$   $(\pi, \chi, \varrho)$   $(f, g, h)$ . Possiamo in ogni caso ritenere trascurabili i prodotti delle  $\pi, \chi$  per le  $D, E, F, f, g, h$ , nonchè i quadrati e i prodotti delle  $\pi, \chi$  e, nello stesso ordine di approssimazione, porre al denominatore  $C\varrho$  in luogo di  $K$ . La precedente formola dà allora

$$(4) \quad \text{sen} \gamma = \frac{1}{C\omega} \sqrt{[(B - C) \chi - D\varrho + g]^2 + [(C - A) \pi - E\varrho - f]^2}.$$

L'ordine di grandezza dei differenti termini che figurano sotto il segno radicale dipende naturalmente dalle ipotesi che si fanno sui movimenti delle masse fluide o, generalmente, sulle deformazioni cui si suppone soggetta la massa terrestre, e non è difficile, nei casi particolari, stabilire un limite superiore pei valori numerici dei termini stessi.



Supponiamo trascurabili  $D, g, E, f$ . La formola (4) dà allora

$$\text{sen } \gamma = \frac{1}{C\omega} \sqrt{(B-C)^2 x^2 + (A-C)^2 \pi^2}.$$

Se si considera che l'angolo  $\gamma_1$  fra l'asse istantaneo e l'asse  $z_1$  è dato dalla formola

$$\text{sen } \gamma_1 = \frac{\sqrt{\pi^2 + x^2}}{\omega}$$

e che, d'altra parte, i rapporti  $\frac{B-C}{C}, \frac{A-C}{C}$  nel caso della Terra, sono assai piccoli (<sup>1</sup>), riesce manifesto che, in questo caso, l'angolo  $\gamma$  è piccolissimo di fronte a  $\gamma_1$  e che per conseguenza, se piccoli sono gli spostamenti del polo terrestre, di un ordine assai più piccolo (possiamo dire trascurabili) risultano gli scostamenti del polo celeste da quel punto che, sulla sfera celeste, rappresenta il vettore quantità di moto areale, ossia la retta  $i$  dianzi nominata.

D'altra parte questa retta  $i$  riesce di *direzione invariabile* ogni qualvolta si trascuri l'azione delle forze esterne (praticamente, il momento delle attrazioni del Sole e della Luna rispetto all'origine delle coordinate). Comunque sia, non è difficile, *referendosi agli assi fissi  $x, y, z$* , stabilire un limite superiore delle variazioni che, in un limitato periodo di tempo, le dette forze esterne possono produrre nelle componenti della quantità di moto areale e quindi nella orientazione della retta  $i$ .

Stabiliti tali limiti, e ritenuto trascurabile nelle precedenti ipotesi l'angolo  $\gamma$ , riescono perfettamente stabiliti dei limiti entro cui, nel dato periodo di tempo, può oscillare il polo celeste.

(<sup>1</sup>) Questo è un dato di fatto che si deduce, com'è noto, dalla forma della superficie di livello terrestre.

Matematica. — *Posizione e soluzione di alcune questioni atinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.

La teoria delle distorsioni elastiche, iniziata da Weingarten, cui ne è dovuto il concetto informatore <sup>(1)</sup>, sviluppata e arricchita, fin dal principio, di copiosi e interessanti risultati da Volterra <sup>(2)</sup>, coltivata, in seguito, con successo, sotto vari aspetti, credo non ingannarmi nell'affermare che conseguì il suo definitivo assetto soltanto coi recenti lavori di Somigliana <sup>(3)</sup>.

Difatti, Weingarten, proponendo lo studio delle deformazioni di equilibrio elastico, provocate da discontinuità dello spostamento, ad una data superficie interna, stabilisce la condizione che, alla stessa superficie, siano continui i parametri di dilatazione (componenti di deformazione, caratteristiche di deformazione, ecc.)

$$(1) \quad x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot y_y = \frac{\partial \eta}{dy}, \quad z_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$y_z = z_y = \frac{\partial \zeta}{dy} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{dy}.$$

affinchè siano continue quelle ch'egli chiama tensioni. D'onde risulta che, per esse, si devono intendere i parametri di pressione (componenti di pressione, caratteristiche di pressione, ecc.)

$$(2) \quad X_x, Y_y, Z_z, Y_z = Z_y, Z_x = X_z, X_y = Y_x,$$

funzioni lineari omogenee dei precedenti, che, alla lor volta, riescono funzioni lineari omogenee di essi.

Volterra definisce come deformazione regolare quella per cui, in tutto il campo rappresentato dal corpo elastico, le (1) « sono funzioni finite, continue e monodrome, aventi le derivate del primo e del secondo ordine pure

<sup>(1)</sup> *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Questi Rendiconti (5), X, 1° sem. 1901.

<sup>(2)</sup> Serie di Note in questi Rendiconti (5), XIV, 1° sem. 1905; *Sull'equilibrio dei corpi elastici molteplici e connessi*, in Nuovo Cimento (5), X e XI, 1905-1906; *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplément connexes*, in Annales de l'École Normale (3), XXIV, 1907.

<sup>(3)</sup> *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*, due Note, in questi Rendiconti (5), XXIII, 1° sem. 1914 e Nuovo Cimento (6), XI, 1916; *Sulle discontinuità dei potenziali elastici*, in Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, LI, 1915-16.

finite, continue e monodrome <sup>(1)</sup>; ed è codesta specie di deformazione che fa oggetto delle sue ricerche. Lo spostamento elastico, sotto queste condizioni, prescindendo dal caso che degeneri in spostamenti rigidi, è necessariamente continuo, in un campo semplicemente connesso. La monodromia è sempre da noi ammessa, quando non si affermi il contrario. Invece, in un campo molteplicemente connesso, può riuscire discontinuo, ad ogni superficie rappresentante un « diaframma », atto a diminuire l'ordine di connessione del campo; e la discontinuità risulta definita da uno spostamento rigido infinitesimale delle due faccie di un taglio, che s'immagini praticato lungo il diaframma, l'una per rispetto all'altra. La circostanza che alle superficie di discontinuità si possono assegnare le infinite posizioni diverse, assegnabili al corrispondente diaframma, senza mutare la distribuzione dei parametri di dilatazione, si traduce nella possibilità di rappresentare questo spostamento del corpo elastico sotto la forma di funzione continua e polidroma delle coordinate, attribuitagli da Volterra <sup>(2)</sup>.

Quindi, adottando i termini di Somigliana di « spostamenti di Weingarten » e « spostamenti di Volterra » <sup>(3)</sup>, codesti sono un caso particolare di quelli, a cui conferisce particolare interesse la natura della discontinuità, e l'indifferenza, almeno entro certi limiti, della posizione delle superficie a cui si verifica la discontinuità medesima.

Ora, il discorso con cui Weingarten accompagna la ricordata condizione, sembra affermare la necessità di essa pel mantenimento dell'integrità del corpo considerato <sup>(4)</sup>. Laddove per ciò è puramente necessaria la continuità, attraverso la supposta superficie di discontinuità dello spostamento, della pressione specifica, in ogni punto della superficie medesima, relativa alla semiretta avente la direzione della normale, nello stesso punto, e un senso prestabilito <sup>(5)</sup>. Vale a dire, non è necessaria, a tale scopo, la continuità

<sup>(1)</sup> *Un teorema sulla teoria della elasticità*. Questi Rendiconti (5), X, 1° sem. 1905, e Cap. I, Art. I della citata Memoria nel Nuovo Cimento.

<sup>(2)</sup> Ved. la mia Nota, *Sugli spostamenti elastici discontinui*, in questi Rendiconti (5), XVII, 1° sem. 1908. Ivi ho procurato di dedurre, per la via che reputo più diretta, gli accennati risultati, appartenenti a Volterra. Colgo l'occasione per indicare a pag. 574, linea 17, la correzione di costanti in funzioni, che, del resto, si rileva dal seguito del testo; avvertendo, chi cercasse la ragione della differenza di comportamento delle  $p, q, r$  e delle  $\xi, \eta, \zeta$ , che le circuitazioni relative alle prime preesistono all'applicazione dei diaframmi, mentre, soltanto dopo interrotti con questi i corrispondenti circuiti, si procede al calcolo delle seconde.

<sup>(3)</sup> « Se le tensioni che si hanno nell'interno sono continue in tutto lo spazio occupato dal corpo, esso avrà il carattere di un solo ed unico corpo: ma se le tensioni fossero discontinue ove gli spostamenti sono discontinui, il corpo dovrebbe ritenersi come avente il carattere di più corpi distinti ». Loc. cit.

<sup>(4)</sup> *Sulle deformazioni elastiche non regolari*. Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908.

<sup>(5)</sup> Ved. per es. i miei *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi*, § 405.

delle (2), ma puramente delle

$$(3) \quad \begin{cases} X_n = X_x \cos \widehat{nx} + X_y \cos \widehat{ny} + X_z \cos \widehat{nz}, \\ Y_n = Y_x \cos \widehat{nx} + Y_y \cos \widehat{ny} + Y_z \cos \widehat{nz}, \\ Z_n = Z_x \cos \widehat{nx} + Z_y \cos \widehat{ny} + Z_z \cos \widehat{nz}, \end{cases}$$

componenti della pressione specifica suddetta.

Così, gli stessi spostamenti di Weingarten non rappresentano, fra i possibili, che un caso assai particolare.

Il sostanziale progresso, che la teoria delle distorsioni elastiche deve a Somigliana, consiste nella introduzione della suddetta condizione necessaria, invece della condizione di Weingarten.

In tal modo, indicando con  $D$  la differenza dei limiti, col tendere del punto considerato ad un punto della superficie, dalla parte verso cui il senso della normale è preso come positivo e dalla parte opposta ( $D = \lim_{n>0} - \lim_{n<0}$ ), per una determinata forma della discontinuità dello spostamento, si hanno, ad ogni superficie  $\sigma$  di discontinuità, le sei equazioni

$$(4) \quad D\xi = \xi_\sigma, \quad D\eta = \eta_\sigma, \quad D\zeta = \zeta_\sigma.$$

$$(5) \quad DX_z = 0, \quad DY_z = 0, \quad DZ_z = 0,$$

dove il punto limite è preso per origine e l'asse delle  $z$  è formato colla normale  $n$ , presa col senso positivo. Con che gli assi delle  $x$  e della  $y$  risultano tangenti alla superficie nello stesso punto limite, e le  $\xi_\sigma, \eta_\sigma, \zeta_\sigma$  rappresentano funzioni note, a piacere, o di coordinate curvilinee appartenenti alla superficie, o delle  $x, y$ , dedotte, in questo caso, da funzioni note di  $x, y, z$ , col fare  $z = 0$ .

Somigliana dimostra, in primo luogo, — per ricordare soltanto i risultati che fanno al nostro scopo — come le sei equazioni (4), (5) valgano a determinare la discontinuità  $D$  di ciascuno dei sei parametri di dilatazione (1).

Dall'espressione di queste discontinuità si deducono poi le discontinuità delle derivate prime, rispetto alle coordinate, delle componenti dello spostamento,  $\xi, \eta, \zeta$ . e da queste, col concorso delle equazioni dell'equilibrio, dove le forze limite (forze di massa) si suppongono nulle (o semplicemente continue alla superficie  $\sigma$ ), le discontinuità delle derivate seconde delle stesse funzioni. Per cui Somigliana arriva a quest'altro risultato, sul quale particolarmente insistiamo, che, colle equazioni (4), tenuto conto delle (5) e delle equazioni dell'equilibrio elastico, sono determinate le discontinuità dei parametri di dilatazione, e quelle delle derivate prime e seconde delle componenti dello spostamento (2).

(1) Questi Rendiconti e Nuovo Cimento, 1<sup>a</sup> Nota.

(2) Questi Rendiconti e Nuovo Cimento, 2<sup>a</sup> Nota.

Si riconosce subito come, col concorso delle equazioni che si ottengono, derivando, membro a membro, le equazioni dell'equilibrio, rispetto alle singole coordinate, risultano determinate, allo stesso modo, le discontinuità delle derivate di ordine successivo delle componenti dello spostamento. E conseguenza di tutto ciò, che ci proponiamo qua di esaminare, è che le condizioni precedentemente enumerate, come quelle che, coi termini di Volterra, definiscono la deformazione regolare, si presentano come sovrabbondanti. Poichè, per quanto si è premesso, richiedono la continuità dei parametri di dilatazione e delle derivate prime e seconde dei parametri di dilatazione medesimi: e codesti risultano appartenere ad uno spostamento, provocato da discontinuità di forma prestabilita.

Questa forma, rappresentabile per mezzo di uno spostamento rigido delle due faccie di un taglio, praticato lungo la superficie di discontinuità, l'una per rispetto all'altra, rientra nel tipo che dà luogo agli spostamenti di Weingarten (1). Per cui si può asserire, senz'altro, la continuità dei parametri di dilatazione. Restano da esaminare le derivate prime e seconde, e passiamo ora a dimostrarne la continuità: ossia a dimostrare la continuità delle derivate delle componenti dello spostamento, fino a quelle di terzo ordine, donde essa, senz'altro, scaturisce. Nè credo che le conclusioni di Volterra, relative alla possibilità della deformazione d'equilibrio elastico in discorso, le quali, attraverso a non semplice calcolo, fanno capo ai teoremi di esistenza, applicati a deformazioni ausiliari (2), tolgano opportunità a questa verifica diretta di una proprietà indispensabile, per impostare la teoria matematica di una specie di equilibrio elastico, che l'esperienza concorre a raccomandare alla nostra attenzione.

Manteniamo a  $x, y, z$  e a  $\xi, \eta, \zeta$  il significato attribuitovi nelle (4) e (5), con cui gli assi delle  $x$  e delle  $y$  sono tangenti alla superficie  $\sigma$ , nel punto considerato, assunto come origine. Immaginiamo poi, al noto modo, una rete di linee coordinate, ortogonali, giacenti sulla superficie, e indichiamo con  $u$  e  $v$  i parametri variabili sulle linee delle due famiglie, che, colla loro mutua intersezione determinano i punti della superficie medesima; con che, al solito,

$$E du^2 + G dv^2$$

rappresenti il quadrato del differenziale di un arco, uscente dal punto  $(u, v)$ .

Inteso che gli assi delle  $x$  e delle  $y$  siano rispettivamente tangenti alla prima e alla seconda delle indicate linee coordinate ( $v = \text{cost}$  e

(1) Nota citata.

(2) *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi*. Questi Rendiconti (5), XIV, 1° sem. 1905. e Cap. II, Art. II, della citata Memoria nel Nuovo Cimento.

$u = \text{cost}$ ), si verificano le relazioni <sup>(1)</sup>

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial u} = \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v} = \sqrt{G} \frac{\partial}{\partial y} .$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial u^2} = E \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} = G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \sqrt{EG} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} . \end{array} \right.$$

Indichiamo ora con  $\varphi$  una funzione di  $x, y, z$  o di  $u, v, n$ , come sono le  $\xi, \eta, \zeta$ , alla quale attribuiamo le proprietà che possiedono queste funzioni, almeno in prossimità di  $\sigma$ , e poniamo

$$(8) \quad \lim_{n>0} - \lim_{n<0} = D \quad , \quad D\varphi = \varphi_\sigma ,$$

con che  $\varphi_\sigma$  rappresenterà una funzione di  $u, v$ , o di  $x, y$ , da dedursi da una funzione di  $x, y, z$ , col farvi  $z = 0$ .

Rammentiamo la formola commutativa, dove la funzione  $\varphi$  s'intende soddisfare le condizioni occorrenti per la sua validità <sup>(2)</sup>

$$(9) \quad D \frac{\partial^{\mu+\nu} \varphi}{\partial u^\mu \partial u^\nu} = \frac{\partial^{\mu+\nu} D\varphi}{\partial u^\mu \partial v^\nu} .$$

Con questo, dalle (6) si ricavano

$$(10) \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x} \quad , \quad D \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y}$$

$$(11) \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad , \quad D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial \varphi}{\partial z} ,$$

e dalle (7)

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial x^2} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta , \\ D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial y^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \delta , \quad \delta = \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial z} - D \frac{\partial \varphi}{\partial z} , \\ D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \delta , \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> Cfr. la mia Nota, *Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni*. A pag. 189 del presente volume di questi Rendiconti.

<sup>(2)</sup> Ved. la suddetta mia Nota.

Prendiamo per  $\varphi$  le  $\xi, \eta, \zeta$ . Colle (10) formiamo il salto delle loro derivate prime, rispetto alle coordinate tangenziali  $x$  e  $y$ .

Inteso poi il corpo isotropo, e cioè

$$X_x = -\lambda x - 2\mu x_x, \quad Y_z = -\mu y_z, \quad x = x_x + y_y + z_z.$$

e formole analoghe, dove  $\lambda, \mu$  indicano le « costanti d'elasticità », col concorso delle (5), invocando le (1), si trova subito (1)

$$(13) \quad D \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x}, \quad D \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial \eta_\sigma}{\partial y}, \quad D \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \eta_\sigma}{\partial y} \right).$$

Introduciamo ora la forma particolare di discontinuità dello spostamento, a cui si riferisce il nostro discorso, e poniamo quindi

$$(14) \quad \xi_\sigma = a + qz - ry, \quad \eta_\sigma = b + rx - pz, \quad \zeta_\sigma = c + py - qx \\ (z = 0),$$

dove, fissato il punto limite,  $a, b, c, p, q, r$  rappresentano altrettante costanti.

Ne vengono, per (10) e (13),

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} D \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad D \frac{\partial \xi}{\partial y} = -r, \quad D \frac{\partial \xi}{\partial z} = q, \\ D \frac{\partial \eta}{\partial x} = r, \quad D \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad D \frac{\partial \eta}{\partial z} = -p, \\ D \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -q, \quad D \frac{\partial \zeta}{\partial y} = p, \quad D \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Donde risulta nullo il salto di ciascuno dei parametri di dilatazione [cfr. (1)], conformemente al risultato già ricordato. Per le stesse (14), sono poi nulle tutte le derivate seconde di  $\xi_\sigma, \eta_\sigma, \zeta_\sigma$  rispetto a  $x$  e a  $y$ . Inoltre, per (14) e (15) si verifica, qualunque dello  $\xi, \eta, \zeta$  sia rappresentata da  $\varphi$ ,

$$(16) \quad \delta = \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial z} - D \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

Ne segue, per (11) e (12), che risulta nullo il salto di tutte le derivate seconde di  $\xi, \eta, \zeta$ , rispetto alle coordinate  $x, y, z$ , eccettuate, per momento,  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$ .

(1) Somigliana: la prima delle citate Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*.

Per queste, rammentiamo le equazioni d'equilibrio

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial x}{\partial x} + \mu A_2 \xi + X &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial x}{\partial y} + \mu A_2 \eta + Y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial x}{\partial z} + \mu A_2 \zeta + Z &= 0, \\ x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad A_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \right.$$

dove le  $X, Y, Z$  s'intenderanno continue sulla superficie  $\sigma$ .

Applicando la  $D$  a queste equazioni, diventano tre equazioni, che rispettivamente forniscono  $D \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$ ,  $D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}$ ,  $D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}$ , come funzioni lineari omogenee delle  $D$  delle rimanenti derivate seconde delle  $\xi, \eta, \zeta$ . Le quali sono tutte nulle, per modo che ne segue pure

$$(18) \quad D \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0, \quad D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0, \quad D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0.$$

Si conclude che è nullo il salto di tutte le derivate seconde delle  $\xi, \eta, \zeta$ : e, per conseguenza, conformemente a (1), nullo il salto delle derivate prime dei parametri di dilatazione.

Per dimostrare che è nullo il salto delle derivate seconde degli stessi parametri di dilatazione, si dimostra, in modo analogo, che è nullo il salto di tutte le derivate terze delle  $\xi, \eta, \zeta$ , rispetto alle coordinate  $x, y, z$ .

Serve perciò una serie di formole, che si stabiliscono, proseguendo il procedimento tenuto per formare le (10), (11), (12), nelle quali introdurremo, senz'altro, i precedenti risultati sul salto delle derivate seconde.

Collo stesso significato di  $\varphi$ , valendosi sempre della (9), si ricava, in primo luogo, dalle (6):

$$D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

per cui

$$D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial z^2} = 0, \quad D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial z^2} = 0:$$



in secondo luogo, si ricava dalle (7):

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} D \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{E} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \delta', \\ D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} D \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \delta', & \delta' &= \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial \varphi}{\partial z} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} D \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \delta', \end{aligned}$$

per cui

$$D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} = 0 \quad , \quad D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial z} = 0 \quad , \quad D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z} = 0 :$$

Per le rimanenti derivate terze, si comincia col trovare le formole che succedono alle (6) e (7). Si ottiene così, per esempio,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial u^3} &= E \sqrt{E} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3 \sqrt{E} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial u^3} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial u^3}. \end{aligned}$$

Ne segue, valendosi della (9), e tenendo conto di (10), (11) e (12),

$$D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \varphi_\sigma}{\partial x^3} + \frac{3}{E \sqrt{E}} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) \delta ;$$

per cui, conformemente alle ipotesi e ai risultati precedenti,

$$D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0.$$

E allo stesso modo si trova

$$D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 0 \quad , \quad D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad , \quad D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Rimangono

$$(19) \quad D \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} \quad , \quad D \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^3} \quad , \quad D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial z^3}.$$

Per queste, deriveremo le tre equazioni di equilibrio (17), ordinatamente, rispetto a  $x$ , a  $y$  e a  $z$ ; e supposte le  $\frac{\partial X}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial z}$  continue, alla superficie  $\sigma$ , applicheremo la  $D$  ai due membri delle equazioni così formate. Esse forniranno le (19) come funzioni lineari omogenee delle  $D$  delle derivate terze rimanenti delle stesse  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Le quali sono dimostrate tutte nulle. Per cui, finalmente, ne risultano pure

$$D \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} = 0 \quad , \quad D \frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} = 0 \quad , \quad D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial z^3} = 0.$$

*Meccanica. — Sulla forma dello Sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità. Nota del corrisp. E. ALMANSI.*

1. Se dai valori che assume la gravità sulla superficie fisica della Terra, eseguite le opportune correzioni, si vuol dedurre la forma di una superficie regolare (Sferoide), la quale differisca pochissimo dal Geoide, si è condotti a prendere in esame il seguente problema:

*Una massa limitata dalla superficie  $\sigma$  ruota, con velocità angolare costante  $\omega$ , intorno ad un asse  $z$ . La superficie  $\sigma$  (che durante il movimento si suppone non subisca variazioni di forma) è una superficie di equilibrio; vale a dire il potenziale  $U$  della forza risultante della attrazione newtoniana dovuta alla massa stessa, e della forza centrifuga, è costante sopra  $\sigma$ . Nei punti di  $\sigma$  la grandezza della forza è espressa dalla formula*

$$(1) \quad g = g_0 \{ 1 + \gamma \operatorname{sen}^2 \varphi_1 + \gamma' \operatorname{sen}^2 2\varphi_1 \},$$

ove  $g_0$ ,  $\gamma$  e  $\gamma'$  denotano delle costanti,  $\varphi_1$  è il complemento dell'angolo che la normale a  $\sigma$ , rivolta verso l'esterno, forma coll'asse  $z$ . La costante  $\gamma$  è piccolissima rispetto ad 1, la costante  $\gamma'$  piccolissima rispetto a  $\gamma$ , e precisamente dell'ordine di grandezza di  $\gamma^2$ . Diremo che  $\gamma$  è una quantità piccola del primo ordine,  $\gamma^2$  del secondo, ecc. Oltre ai valori delle costanti  $g_0$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , noi supponiamo di conoscere la lunghezza  $2\pi a$  della linea luogo dei punti di  $\sigma$  pei quali  $\varphi_1 = 0$ ; quindi anche il valore della costante

$$(2) \quad \lambda = \frac{a\omega^2}{g_0},$$

che si supporrà piccola del primo ordine. Con questi dati ci proponiamo di determinare la forma di  $\sigma$ , trascurando nella sua equazione, rispetto all'unità, i termini d'ordine superiore al secondo.

Il risultato a cui si perviene è questo. La superficie  $\sigma$  si può rappresentare mediante l'equazione

$$(3) \quad r = a \{ 1 - \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi - \alpha' \operatorname{sen}^2 2\varphi \},$$

$r$  denotando la distanza di un punto qualunque P di  $\sigma$  da un punto fisso O dell'asse  $z$ ,  $\varphi$  il complemento dell'angolo che il raggio vettore OP forma coll'asse stessa.  $\alpha$  ed  $\alpha'$  due costanti. Posto

$$\alpha_0 = \frac{5}{2} \lambda - \gamma,$$

si ha:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 - \frac{1}{42} (61 \alpha_0 \lambda - 2 \alpha_0^2 + 16 \gamma'), \\ \alpha' = \frac{1}{24} (10 \alpha_0^2 - 5 \alpha_0 \lambda - 8 \gamma') \quad (1). \end{array} \right.$$

Se trascuriamo anche le quantità del secondo ordine avremo  $\alpha' = 0$ , ed  $\alpha = \alpha_0$ , ossia

$$\alpha = \frac{5}{2} \lambda - \gamma,$$

nota formula dovuta al Clairaut.

Per la Terra, ritenendo

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,0034672, \\ \gamma &= 0,005302 \quad , \quad \gamma' = -0,000007, \end{aligned}$$

si trova:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0,003366, \\ \alpha &= 0,0033523 = \frac{1}{298,3} \quad , \quad \alpha' = 0,0000046. \end{aligned}$$

2. Sia  $V$  il potenziale newtoniano della massa rotante. Il potenziale totale sarà

$$(5) \quad U = V + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi.$$

Sulla superficie  $\sigma$  deve essere

$$U = \text{cost.}$$

e, detta  $n$  la normale esterna,

$$g = -\frac{\partial U}{\partial n} = g_0 \{ 1 + \gamma \text{sen}^2 \varphi_1 + \gamma' \text{sen}^2 2\varphi_1 \}.$$

Il procedimento che seguiremo consisterà nell'assegnare al potenziale  $V$  un'espressione particolare, in cui interverranno delle costanti da determinarsi, e nel mostrare come a queste costanti, e a quelle che figurano nella equazione (3) di  $\sigma$ , si possano attribuire valori tali da soddisfare alle condizioni richieste.

Osserviamo perciò che le funzioni

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r^3} (1 - 3 \text{sen}^2 \varphi), \quad \frac{1}{r^5} (3 - 30 \text{sen}^2 \varphi + 35 \text{sen}^4 \varphi),$$

(1) L'Helmert (*Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, Vol. II, Cap. 2°) esamina questo stesso problema, ma non arriva alle formole (4). Del resto il metodo che io seguo non differisce sostanzialmente da quello dell'Helmert.

come è noto dalla teoria delle funzioni sferiche, presentano in tutto lo spazio, esclusa una regione qualunque  $S$  che contenga il punto  $O$  ( $r = 0$ ), i caratteri di potenziali di masse contenute in  $S$ . Lo stesso avverrà di ogni loro funzione lineare omogenea a coefficienti costanti; quindi della funzione:

$$(6) \quad V = ag_0 \left\{ (1 + \eta) \frac{a}{r} + \zeta \frac{a^3}{r^3} (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi) + \right. \\ \left. + \zeta' \frac{a^5}{r^5} (3 - 30 \operatorname{sen}^2 \varphi + 35 \operatorname{sen}^4 \varphi) \right\},$$

ove  $\eta, \zeta, \zeta'$  denotino delle costanti. Supporremo  $\eta$  e  $\zeta$  del primo,  $\zeta'$  del secondo ordine <sup>(1)</sup>. Sia questa, sulla superficie che limita la massa rotante, e nello spazio esterno, il suo potenziale newtoniano.

Sostituendo questa espressione di  $V$  nella formula (5), che, tenendo conto della (2), possiamo scrivere

$$U = V + ag_0 \cdot \frac{\lambda}{2} \frac{r^2}{a^2} (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi),$$

avremo:

$$(7) \quad U = ag_0 \left\{ \frac{a}{r} + \eta \frac{a}{r} + \zeta \frac{a^3}{r^3} (1 - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi) + \right. \\ \left. + \zeta' \frac{a^5}{r^5} (3 - 30 \operatorname{sen}^2 \varphi + 35 \operatorname{sen}^4 \varphi) + \frac{\lambda}{2} \frac{r^2}{a^2} (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) \right\}.$$

Consideriamo una superficie  $\sigma$  rappresentata dall'equazione

$$r = a \{ 1 - \beta \operatorname{sen}^2 \varphi - \beta' \operatorname{sen}^4 \varphi \},$$

ove  $\beta$  denoti una costante del primo,  $\beta'$  una costante del secondo ordine; e cerchiamo, per i punti di questa superficie, l'espressione del potenziale  $U$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ , trascurando i termini d'ordine superiore al secondo.

Per  $\nu$  intero, positivo o negativo, si ha dalla formula precedente, in quest'ordine di approssimazione,

$$\left( \frac{r}{a} \right)^\nu = 1 - \nu (\beta \operatorname{sen}^2 \varphi + \beta' \operatorname{sen}^4 \varphi) + \frac{\nu(\nu-1)}{2} \beta^2 \operatorname{sen}^4 \varphi,$$

ovvero:

$$(8) \quad \frac{r^\nu}{a^\nu} = 1 - \nu \beta \operatorname{sen}^2 \varphi + \left\{ \frac{\nu(\nu-1)}{2} \beta^2 - \nu \beta' \right\} \operatorname{sen}^4 \varphi.$$

In particolare, per  $\nu = -1$ ,

$$\frac{a}{r} = 1 + \beta \operatorname{sen}^2 \varphi + (\beta^2 + \beta') \operatorname{sen}^4 \varphi.$$

<sup>(1)</sup> Tutte le costanti del secondo ordine sono in questa Nota contrassegnate con un apice.

Questa espressione di  $\frac{a}{r}$  la sostituiamo, nella formula (7), al primo termine entro le grandi parentesi. Nel secondo, terzo ed ultimo termine, a causa dei fattori piccoli del primo ordine  $\nu, \zeta, \lambda$ , potremo, ad  $\frac{a}{r}, \frac{a^3}{r^3}, \frac{r^2}{a^2}$ , sostituire i valori dati dalla formula generale (8) trascurando anche il termine in  $\text{sen}^4 \varphi$  che è del secondo ordine; ossia ritenere

$$\frac{a}{r} = 1 + \beta \text{sen}^2 \varphi, \quad \frac{a^3}{r^3} = 1 + 3\beta \text{sen}^2 \varphi, \quad \frac{r^2}{a^2} = 1 - 2\beta \text{sen}^2 \varphi.$$

E finalmente nel termine che contiene il fattore del secondo ordine  $\zeta'$  potremo porre  $r = a$ . Avremo pertanto nei punti di  $\sigma$ :

$$U = ag_0 \left\{ 1 + \beta \text{sen}^2 \varphi + (\beta^2 + \beta') \text{sen}^4 \varphi + \eta(1 + \beta \text{sen}^2 \varphi) + \right. \\ \left. + \zeta(1 + 3\beta \text{sen}^2 \varphi)(1 - 3 \text{sen}^2 \varphi) + \zeta'(3 - 30 \text{sen}^2 \varphi + 35 \text{sen}^4 \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2}(1 - 2\beta \text{sen}^2 \varphi)(1 - \text{sen}^2 \varphi) \right\};$$

ovvero, eseguendo i prodotti e ordinando,

$$U = ag_0 \left\{ 1 + \eta + \zeta + 3\zeta' + \frac{\lambda}{2} + \right. \\ \left. + (\beta + \beta\eta + 3\beta\zeta - 3\zeta - 30\zeta' - \frac{\lambda}{2} - \beta\lambda) \text{sen}^2 \varphi + \right. \\ \left. + (\beta^2 + \beta' - 9\beta\zeta + 35\zeta' + \beta\lambda) \text{sen}^4 \varphi \right\}.$$

Poniamo la condizione che sulla superficie  $\sigma$   $U$  sia costante. Dovranno annullarsi i coefficienti di  $\text{sen}^2 \varphi$  e  $\text{sen}^4 \varphi$ , ossia dovrà essere:

$$(9) \quad \begin{cases} \beta + \beta\eta + 3\beta\zeta - 3\zeta - 30\zeta' - \frac{\lambda}{2} - \beta\lambda = 0, \\ \beta^2 + \beta' - 9\beta\zeta + 35\zeta' + \beta\lambda = 0. \end{cases}$$

3. Consideriamo ora, sulla superficie  $\sigma$ , la gravità  $g$ ; e da prima la proiezione della gravità sul raggio vettore, ossia

$$g_r = - \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Sostituendo ad  $U$  la sua espressione (7) abbiamo:

$$g_r = g_0 \left\{ \frac{a^2}{r^2} + \eta \frac{a^2}{r^2} + 3\zeta \frac{a^4}{r^4} (1 - 3 \text{sen}^2 \varphi) + \right. \\ \left. + 5\zeta' \frac{a^6}{r^6} (3 - 30 \text{sen}^2 \varphi + 35 \text{sen}^4 \varphi) - \lambda \frac{r}{a} (1 - \text{sen}^2 \varphi) \right\}.$$

Su questa formola eseguiremo operazioni analoghe a quelle eseguite sulla (7). Alle potenze di  $\frac{r}{a}$  sostituiremo i valori ricavati dalla formola (8), trascurando i termini che moltiplicati per  $\eta, \zeta, \zeta', \lambda$  darebbero luogo a termini d'ordine superiore al secondo; otterremo così:

$$g_r = g_0 \left\{ 1 + 2\beta \operatorname{sen}^2 \varphi + (3\beta^2 + 2\beta') \operatorname{sen}^4 \varphi + \eta(1 + 2\beta \operatorname{sen}^2 \varphi) + \right. \\ \left. + 3\zeta(1 + 4\beta \operatorname{sen}^2 \varphi)(1 - 3 \operatorname{sen}^2 \varphi) + \right. \\ \left. + 5\zeta'(3 - 30 \operatorname{sen}^2 \varphi + 35 \operatorname{sen}^4 \varphi) - \lambda(1 - \beta \operatorname{sen}^2 \varphi)(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) \right\};$$

eseguendo poi i prodotti e ordinando, avremo:

$$(10) \quad g_r = g_0 \left\{ 1 + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda + \right. \\ \left. + (2\beta + 2\beta\eta - 9\zeta + 12\beta\zeta - 150\zeta' + \lambda + \beta\lambda) \operatorname{sen}^2 \varphi + \right. \\ \left. + (3\beta^2 + 2\beta' - 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \operatorname{sen}^4 \varphi \right\}.$$

Veniamo a considerare  $g$ . Detto  $\varepsilon$ , in un punto qualunque P di  $\sigma$ , l'angolo che la normale esterna forma col raggio vettore, sarà

$$g = \frac{g_r}{\cos \varepsilon}.$$

Ora si ha in generale

$$\operatorname{tag} \varepsilon = -\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi};$$

e nel nostro caso, per la formola (3);

$$\operatorname{tag} \varepsilon = \frac{a}{r} \left\{ 2\beta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 4\beta' \operatorname{sen}^3 \varphi \cos \varphi \right\}.$$

Trascurando quantità d'ordine superiore al secondo, potremo ritenere

$$\cos \varepsilon = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{tag}^2 \varepsilon, \quad \frac{1}{\cos \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tag}^2 \varepsilon,$$

quindi

$$g = g_r \left( 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tag}^2 \varepsilon \right);$$

e in  $\operatorname{tag} \varepsilon$  potremo trascurare i termini d'ordine superiore al primo, ossia tralasciare il termine che contiene il fattore  $\beta'$  e supporre  $r = a$ . Avremo così

$$\operatorname{tag} \varepsilon = 2\beta \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \beta \operatorname{sen} 2\varphi,$$

$$g = g_r \left( 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \operatorname{sen}^2 2\varphi \right).$$

A  $g_r$  dobbiamo sostituire la sua espressione data dalla formula (10). Ma notiamo che i termini di  $g_r$  del 1° e del 2° ordine, moltiplicati per  $1 + \frac{1}{2}\beta^2 \text{sen}^2 2\varphi$ , variano di quantità trascurabili. Basterà dunque moltiplicare per questo fattore, entro le grandi parentesi, il solo termine 1, ossia aggiungere  $\frac{1}{2}\beta^2 \text{sen}^2 2\varphi$ . Nell'ultimo termine sostituiremo, poi a  $\text{sen}^4 \varphi$ , la quantità identicamente uguale  $\text{sen}^2 \varphi - \frac{1}{4}\text{sen}^2 2\varphi$ . In tal modo otterremo:

$$g = g_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \text{sen}^2 2\varphi + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda + \right. \\ \left. + (2\beta + 2\beta\eta - 9\zeta + 12\beta\zeta - 150\zeta' + \lambda + \beta\lambda) \text{sen}^2 \varphi + \right. \\ \left. + (3\beta^2 + 2\beta' - 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \left( \text{sen}^2 \varphi - \frac{1}{4}\text{sen}^2 2\varphi \right) \right\};$$

e ordinando:

$$(11) \quad g = g_0 \left\{ 1 + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda + \right. \\ \left. + (2\beta + 3\beta^2 + 2\beta' + 2\beta\eta - 9\zeta - 24\beta\zeta + 25\zeta' + \lambda) \text{sen}^2 \varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(\beta^2 + 2\beta' + 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \text{sen}^2 2\varphi \right\}.$$

Finalmente in questa formula, invece dell'angolo  $\varphi$ , faremo comparire l'angolo  $\varphi_1 = \varphi + \varepsilon$ . Nel termine che contiene  $\text{sen}^2 2\varphi$ , a causa del fattore del secondo ordine, potremo sostituire senz'altro  $\varphi$  con  $\varphi_1$ . Nel termine che contiene  $\text{sen}^2 \varphi$  basterà calcolare  $\text{sen}^2 \varphi$  trascurando le quantità d'ordine superiore al primo. In questo ordine d'approssimazione abbiamo

$$\text{sen } \varphi = \text{sen } \varphi_1 - \cos \varphi_1 \text{sen } \varepsilon = \text{sen } \varphi_1 - \cos \varphi_1 \text{tag } \varepsilon, \\ \text{sen}^2 \varphi = \text{sen}^2 \varphi_1 - 2 \text{sen } \varphi_1 \cos \varphi_1 \text{tag } \varepsilon = \text{sen}^2 \varphi_1 - \text{sen } 2\varphi_1 \text{tag } \varepsilon, \\ \text{tag } \varepsilon = \beta \text{sen } 2\varphi = \beta \text{sen } 2\varphi_1,$$

quindi

$$\text{sen}^2 \varphi = \text{sen}^2 \varphi_1 - \beta \text{sen}^2 2\varphi_1.$$

Sostituendo nella formula (11) avremo:

$$g = g_0 \left\{ 1 + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda + \right. \\ \left. + (2\beta + 3\beta^2 + 2\beta' + 2\beta\eta - 9\zeta - 24\beta\zeta + 25\zeta' + \lambda) (\text{sen}^2 \varphi_1 - \beta \text{sen}^2 2\varphi_1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(\beta^2 + 2\beta' - 36\beta\zeta + 175\zeta' - \beta\lambda) \text{sen}^2 2\varphi_1 \right\};$$

da cui, ordinando e trascurando la parte del terzo ordine

$$- \beta(3\beta^2 + 2\beta' + 2\beta\eta - 24\beta\zeta + 25\zeta')$$

del coefficiente di  $\text{sen}^2 2\varphi_1$ :

$$g = g_0 \left\{ 1 + \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda + \right. \\ \left. + (2\beta + 3\beta^2 + 2\beta' + 2\beta\eta - 9\zeta - 24\beta\zeta + 25\zeta' + \lambda) \text{sen}^2 \varphi_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (9\beta^2 + 2\beta' - 72\beta\zeta + 175\zeta' + 3\beta\lambda) \text{sen}^2 2\varphi_1 \right\}.$$

Noi vogliamo che questo valore di  $g$  risulti identicamente uguale a quello dato dalla formula

$$g = g_0 \{ 1 + \gamma \text{sen}^2 \varphi_1 + \gamma' \text{sen}^2 2\varphi_1 \}.$$

Ciò richiede che sia :

$$(12) \quad \begin{cases} \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda = 0 \\ 2\beta + 3\beta^2 + 2\beta' + 2\beta\eta - 9\zeta - 24\beta\zeta + 25\zeta' + \lambda = \gamma. \\ 9\beta^2 + 2\beta' - 72\beta\zeta + 175\zeta' + 3\beta\lambda = -4\gamma'. \end{cases}$$

4. Abbiamo così ottenute cinque equazioni, le due (9) e le tre (12), contenenti le cinque incognite

$$\beta, \beta', \eta, \zeta, \zeta'.$$

Ma alle  $\beta, \beta'$  conviene sostituire due nuove incognite  $\alpha, \alpha'$ , ponendo

$$\beta = \alpha + 4\alpha' \quad , \quad \beta' = -4\alpha'.$$

L'equazione di  $\sigma$ ,

$$r = a \{ 1 - \beta \text{sen}^2 \varphi - \beta' \text{sen}^4 \varphi \},$$

tenendo conto della identità

$$\text{sen}^4 \varphi = \text{sen}^2 \varphi - \frac{1}{4} \text{sen}^2 2\varphi,$$

assume allora la forma

$$r = a \{ 1 - \alpha \text{sen}^2 \varphi - \alpha' \text{sen}^2 2\varphi \}$$

in cui  $\alpha$  rappresenta lo schiacciamento di  $\sigma$ .



Notiamo che essendo  $\alpha'$  del secondo ordine, nei termini  $\beta\lambda, \beta\eta, \beta\zeta$  delle equazioni (9) e (12) possiamo sostituire  $\beta$  con  $\alpha$  (anzichè con  $\alpha + 4\alpha'$ ). Avremo pertanto le cinque equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha + 4\alpha' + \alpha\eta + 3\alpha\zeta - 3\zeta - 30\zeta' - \frac{\lambda}{2} - \alpha\lambda &= 0, \\ \alpha^2 - 4\alpha' - 9\alpha\zeta + 35\zeta' + \alpha\lambda &= 0, \\ \eta + 3\zeta + 15\zeta' - \lambda &= 0, \\ 2\alpha + 3\alpha^2 + 2\alpha\eta - 9\zeta - 24\alpha\zeta + 25\zeta' + \lambda &= \gamma, \\ 9\alpha^2 - 8\alpha' - 72\alpha\zeta + 175\zeta' + 3\alpha\lambda &= -4\gamma', \end{aligned}$$

contenenti le cinque incognite

$$\alpha, \alpha', \eta, \zeta, \zeta'.$$

Questo sistema di equazioni, delle quali solo la terza è lineare, dobbiamo risolverlo trascurando le quantità d'ordine superiore al secondo. Scriveremo perciò le equazioni stesse nel modo seguente, portando nei secondi membri i termini noti e tutti i termini che contengono prodotti o quadrati:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \alpha + 4\alpha' - 3\zeta - 30\zeta' &= \frac{\lambda}{2} + \alpha\lambda - \alpha\eta - 3\alpha\zeta, \\ 4\alpha' - 35\zeta' &= \alpha^2 + \alpha\lambda - 9\alpha\zeta, \\ \eta + 3\zeta + 15\zeta' &= \lambda, \\ 2\alpha - 9\zeta + 25\zeta' &= \gamma - \lambda - 3\alpha^2 - 2\alpha\eta + 24\alpha\zeta, \\ 8\alpha' - 175\zeta' &= 4\gamma' + 9\alpha^2 + 3\alpha\lambda - 72\alpha\zeta. \end{aligned} \right.$$

Trascuriamo da prima, nei secondi membri, anche i termini del secondo ordine; e diciamo

$$\alpha_0, \alpha'_0, \eta_0, \zeta_0, \zeta'_0$$

i valori che assumono allora le cinque incognite; ossia scriviamo le equazioni:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + 4\alpha'_0 - 3\zeta_0 - 30\zeta'_0 &= \frac{\lambda}{2}, \\ 4\alpha'_0 - 35\zeta'_0 &= 0, \\ \eta_0 + 3\zeta_0 + 15\zeta'_0 &= \lambda, \\ 2\alpha_0 - 9\zeta_0 + 25\zeta'_0 &= \gamma - \lambda, \\ 8\alpha'_0 - 175\zeta'_0 &= 0. \end{aligned}$$

Dalla seconda e dalla quinta si ricava

$$\alpha'_0 = 0, \quad \zeta'_0 = 0;$$

onde le tre rimanenti diventano

$$\begin{aligned}\alpha_0 - 3\zeta_0 &= \frac{\lambda}{2}, \\ \eta_0 + 3\zeta_0 &= \lambda, \\ 2\alpha_0 - 9\zeta_0 &= \gamma - \lambda,\end{aligned}$$

e risolte dànno

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{5}{2}\lambda - \gamma, \\ \eta_0 = \gamma - \lambda \quad . \quad \zeta_0 &= \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\gamma. \end{aligned} \right.$$

Questi valori  $\alpha_0, \dots, \zeta_0'$  delle incognite  $\alpha, \dots, \zeta'$  saranno esatti *a meno di quantità del secondo ordine*; e per conseguenza nei termini  $\alpha^2, \alpha\lambda, \alpha\eta, \alpha\zeta$  dei secondi membri delle equazioni (13), ad  $\alpha, \eta, \zeta$  potremo sostituire  $\alpha_0, \eta_0, \zeta_0$ , venendosi con ciò a trascurare quantità *d'ordine superiore al secondo*. Otterremo in tal modo le equazioni

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha + 4\alpha' - 3\zeta - 30\zeta' &= \frac{\lambda}{2} + \alpha_0\lambda - \alpha_0\eta_0 - 3\alpha_0\zeta_0, \\ 4\alpha' - 35\zeta' &= \alpha_0^2 + \alpha_0\lambda - 9\alpha_0\zeta_0, \\ \eta + 3\zeta + 15\zeta' &= \lambda, \\ 2\alpha - 9\zeta + 25\zeta' &= \gamma - \lambda - 3\alpha_0^2 - 2\alpha_0\eta_0 + 24\alpha_0\zeta_0, \\ 8\alpha' - 175\zeta' &= 4\gamma' + 9\alpha_0^2 + 3\alpha_0\lambda - 72\alpha_0\zeta_0, \end{aligned} \right.$$

tutte lineari rispetto alle incognite del problema, i secondi membri essendo ora noti.

Se ad  $\alpha_0, \eta_0, \zeta_0$  sostituiamo i loro valori dati dalle formule (14), e risolviamo le equazioni (15), avremo le cinque incognite  $\alpha, \dots, \zeta'$  espresse in funzioni delle tre costanti note  $\lambda, \gamma, \gamma'$ . Si ottengono formule più semplici facendo intervenire la costante  $\alpha_0$ , invece della  $\gamma$ , mediante la relazione

$$\gamma = \frac{5}{2}\lambda - \alpha_0,$$

che è la prima delle (14). Le altre due diverranno, sostituendo a  $\gamma$  questa sua espressione,

$$\eta_0 = \frac{3}{2}\lambda - \alpha_0, \quad \zeta_0 = \frac{1}{3}\alpha_0 - \frac{1}{6}\lambda.$$

**A**  $\gamma, \eta_0, \zeta_0$ , nei secondi membri delle (15), dobbiamo dunque sostituire

questi loro valori. Con semplici riduzioni avremo:

$$\alpha + 4\alpha' - 3\zeta - 30\zeta' = \frac{\lambda}{2},$$

$$4\alpha' - 35\zeta' = -2\alpha_0^2 + \frac{5}{2}\alpha_0\lambda,$$

$$\eta + 3\zeta + 15\zeta' = \lambda,$$

$$2\alpha - 9\zeta + 25\zeta' = \frac{3}{2}\lambda - \alpha_0 + 7\alpha_0^2 - 7\alpha_0\lambda,$$

$$8\alpha' - 175\zeta' = 4\gamma' - 15\alpha_0^2 + 15\alpha_0\lambda.$$

Risolvendo questo sistema di equazioni lineari si ottiene, come è facile verificare,

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{21}\alpha_0^2 - \frac{61}{42}\alpha_0\lambda - \frac{8}{21}\gamma',$$

$$\alpha' = \frac{5}{12}\alpha_0^2 - \frac{5}{24}\alpha_0\lambda - \frac{1}{3}\gamma',$$

$$\eta = \frac{3}{2}\lambda - \alpha_0 - \frac{1}{7}\alpha_0^2 + \frac{6}{7}\alpha_0\lambda + \frac{8}{7}\gamma',$$

$$\zeta = -\frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{3}\alpha_0 - \frac{10}{21}\alpha_0^2 + \frac{4}{21}\alpha_0\lambda - \frac{4}{21}\gamma',$$

$$\zeta' = \frac{11}{105}\alpha_0^2 - \frac{2}{21}\alpha_0\lambda - \frac{4}{105}\gamma'.$$

I valori delle costanti  $\alpha$  ed  $\alpha'$  sono gli stessi che abbiamo riportato nel § 1. I valori delle tre rimanenti, che intervengono nella formula (6), fanno conoscere, nel grado di approssimazione a cui ci siamo attenuti, il potenziale del sistema.

E. M.





## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76) Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche,  
matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali,  
storiche e filologiche.  
Vol. V. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 6°. Sem. 1°.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-XII. Fasc. 2.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.  
ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 18 marzo 1917.*

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Segre.</i> Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli . . . . .	Pag. 341
<i>Piazetti.</i> Sul moto di rotazione della Terra; a proposito di una recente comunicazione del prof. Cerulli . . . . .	” 345
<i>Maggi.</i> Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elasti- stiche . . . . .	” 350
<i>Almansi.</i> Sulla forma dello Sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità . . . . .	” 358

# ATTI

DELLA

## REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

### RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 1° aprile 1917.*

Volume XXVI.° — Fascicolo 7.°

1.° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

SEP 25 1924

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e stranieri, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia, o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorché nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 1° aprile 1917.*

A. RÒTTI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.*  
Nota I del Socio C. SOMIGLIANA.

L'ipotesi più semplice che si può fare, per avere una rappresentazione meccanica delle oscillazioni sismiche, è che si tratti di onde propagantisi in un suolo piano illimitato e infinitamente profondo.

Fu fatta anche l'ipotesi di uno strato piano illimitato, onde accordarsi con alcune vedute, attualmente accettate, intorno alla costituzione interna della terra. Così procede il Love in *Some Problems of Geodynamics*; ed anche il De Marchi nelle due interessanti Note, comunicate lo scorso anno a questa R. Accademia.

Io mi atterrò alla prima ipotesi, e considererò da un punto di vista generale la propagazione di onde piane. Si può così ugualmente arrivare ad alcuni risultati interessanti, da cui dedurre qualche nuovo concetto circa le principali caratteristiche del fenomeno, quale effettivamente si osserva.

Si ammette generalmente dai sismologi, dopo Oldham, che dei tre gruppi di onde, che compongono generalmente un sismogramma, quello che arriva ultimo, detto delle *undae longae*, che sono anche le più ampie e regolari, corrisponda alle *onde superficiali* scoperte da Lord Rayleigh. La velocità di propagazione di queste onde è teoricamente determinata da una delle tre radici reali, la più piccola, di una certa equazione di 3° grado. Per gli altri due gruppi si ammette che siano ordinarie onde piane, rispettivamente longitudinali e trasversali, provenienti dall'interno della terra.

Ora io ho potuto dimostrare che anche alle altre due radici dell'equazione di 3° grado di Lord Rayleigh, finora trascurate, corrispondono onde piane speciali del suolo, le quali risultano dalla sovrapposizione di un'onda longitudinale e di un'onda trasversale. Queste due onde hanno un'identica velocità di propagazione *superficiale*. L'equazione di Rayleigh dà appunto la soluzione del problema della ricerca delle coppie di onde (l'una longitudinale, l'altra trasversale) inclinate fra loro in modo da dar luogo ad una identica velocità di propagazione sulla superficie libera del suolo. Queste onde vengono così a sovrapporsi in superficie, e senza possibilità di interferire, a cagione della ortogonalità delle loro oscillazioni. È perciò anche presumibile che diano luogo agli effetti superficiali più sensibili.

Le onde superficiali di Rayleigh risultano poi, in certo modo, una soluzione singolare del problema enunciato.

Da questi risultati sorge quindi spontanea, e suggestiva, l'idea di far corrispondere alle tre radici dell'equazione di Rayleigh ed ai tre relativi sistemi di onde, i tre gruppi di vibrazioni che la osservazione rivela. Anche numericamente i valori che si ottengono per le velocità di propagazione sono in sufficiente accordo con quelli osservati.

Si avrebbe così una spiegazione meccanica, mai data finora, della formazione dei tre gruppi caratteristici (P), (S), (L) di onde, che quasi sempre si osservano. Tuttavia l'approssimazione che è possibile raggiungere nel problema delle vibrazioni di un suolo piano, rispetto a quelle della sfera, ci induce ad attribuire a tale spiegazione un carattere più qualitativo che quantitativo. Un apprezzamento definitivo non si potrà avere che quando sia possibile trasportare le considerazioni enunciate nel campo della sfera vibrante.

## I.

Consideriamo un suolo piano illimitato, che supporremo orizzontale. L'asse delle  $z$  sia verticale, diretto dal basso verso l'alto, e sia  $z = 0$  la superficie del suolo.

Chiameremo piano di propagazione il piano determinato dalla normale ad un sistema di onde piane e dalla verticale, passanti per uno stesso punto. Fissata l'origine in un punto del piano  $z = 0$ , sceglieremo come piano  $zx$  il piano di propagazione rispetto al sistema di onde piane, che vogliamo studiare. Il piano d'onda sarà allora parallelo all'asse delle  $y$ ; e se indichiamo con

$$\alpha x + \gamma z = \text{cost.}$$

l'equazione di uno qualsiasi dei piani d'onda, e con  $\theta$  l'angolo, che diremo di *emergenza*, che la direzione di propagazione fa coll'asse delle  $x$ , avremo

$$\cos \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad \text{sen } \theta = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

Il vettore rappresentante la vibrazione avrà allora una componente secondo la normale all'onda, che darà luogo ad un movimento longitudinale e sarà rappresentato da

$$(1) \quad \begin{aligned} u_1 &= \alpha \varphi (\alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t) \\ v_1 &= 0 \\ w_1 &= \gamma \varphi (\alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t), \end{aligned}$$

ove  $\varphi$  è una funzione arbitraria, ed  $u, v, w$  rappresentano le solite componenti di spostamento,  $t$  è il tempo ed  $\varepsilon_1$  una costante. Se la funzione  $\varphi$  avesse valori differenti da zero solo per valori dell'argomento

$$\zeta = \alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t$$

compresi fra certi limiti, si avrebbe un'onda *isolata* o *solitaria*, come suol dirsi.

Avremo poi una componente normale alla direzione di propagazione, che alla sua volta potrà decomporre in due: l'una giacente nel piano  $zx$  cioè nel piano di propagazione e rappresentata da

$$(2) \quad \begin{aligned} u_2 &= \gamma \psi (\alpha x + \gamma z - \varepsilon_2 t) \\ v_2 &= 0 \\ w_2 &= -\alpha \psi (\alpha x + \gamma z - \varepsilon_2 t) \end{aligned}$$

e l'altra parallela all'asse  $y$ , normale al piano di propagazione, rappresentata da

$$(3) \quad \begin{aligned} u_3 &= 0 \\ v_3 &= \chi (\alpha x + \gamma z - \varepsilon_3 t) \\ w_3 &= 0 \end{aligned}$$

ove  $\psi, \chi$  sono nuove funzioni arbitrarie,  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  delle nuove costanti.

L'onda piana più generale si avrà dalla sovrapposizione dei tre sistemi di vibrazioni (1) (2) (3), cioè avrà per componenti di vibrazione

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \quad v = v_1 + v_2 + v_3 \quad w = w_1 + w_2 + w_3.$$

Le relazioni che risultano dalle equazioni del moto per le costanti  $\alpha, \gamma, \varepsilon$  sono quelle ben note, che determinano le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali. La vibrazione (1) è longitudinale; la sua velocità normale di propagazione, indicando con  $\lambda, \mu$  le costanti elastiche di Lamé, con  $\rho$  la densità, sarà data da

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Ma se indichiamo con  $V$  la velocità superficiale di propagazione dell'onda (o anche la velocità di propagazione nella direzione dell'asse delle  $x$ ) si ha

$$(4) \quad V = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \quad \text{e quindi} \quad a = V \cos \theta .$$

Da cui deduciamo

$$(5) \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} (\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon_1^2 .$$

In modo analogo, osservando che le onde (2), (3) sono trasversali, si conclude che la loro velocità normale di propagazione sarà

$$b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} .$$

e quindi per le relazioni precedenti  $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$ ,

$$(6) \quad \frac{\mu}{\rho} (\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon_2^2 .$$

Queste relazioni (5), (6) sono le sole necessarie e sufficienti, perchè le (1), (2), (3) possano rappresentare sistemi di onde piane possibili in un mezzo illimitato in ogni senso, le cui costanti d'elasticità siano  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\rho$  la densità.

## II.

Consideriamo ora due onde piane, l'una longitudinale, l'altra trasversale, aventi angoli d'emergenza differenti,  $\theta_a$  e  $\theta_b$ . Siano  $\alpha_1, \gamma_1$  le due costanti  $\alpha, \gamma$  per la prima, ed  $\alpha_2, \gamma_2$  per la seconda. Le rispettive velocità superficiali di propagazione saranno

$$V_a = \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{a}{\cos \theta_a} \quad V_b = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \frac{b}{\cos \theta_b}$$

mentre per (5), (6) dovrà essere

$$(7) \quad \varepsilon_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} (\alpha_1^2 + \gamma_1^2) \quad \varepsilon_2^2 = \frac{\mu}{\rho} (\alpha_2^2 + \gamma_2^2) .$$

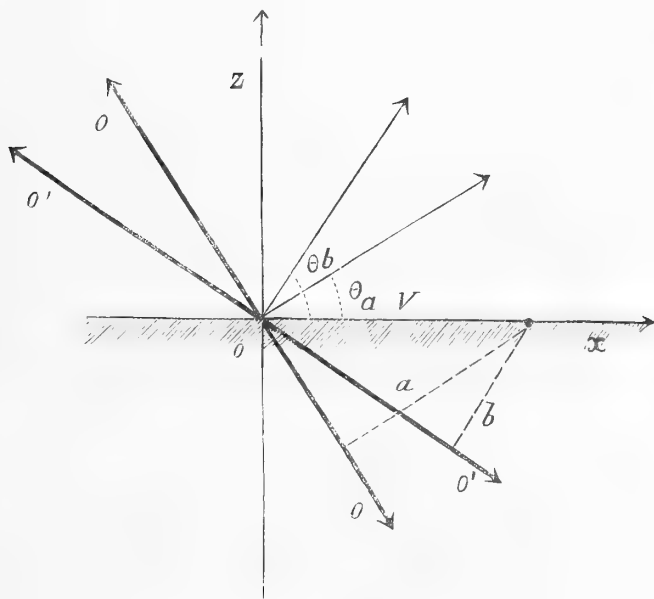
Ora noi possiamo domandarci quali condizioni debbano essere soddisfatte perchè le velocità superficiali delle due onde risultino identiche: cioè perchè

sia  $V_a = V_b$ . Si dovrà avere fra i due angoli di emergenza (vedi la annessa figura) la relazione

$$(8) \quad a \cos \theta_b = b \cos \theta_a$$

ossia

$$(8') \quad \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \gamma_1^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2}}.$$



Possiamo quindi immaginare infinite coppie di onde piane (come le  $oo, o'o'$  della figura annessa) l'una longitudinale, l'altra trasversale, a cui competono velocità identiche di propagazione superficiale. Le rispettive inclinazioni delle due direzioni di propagazione sono determinate dalla (8) o dalla (8').

Però in generale non possiamo dire che una coppia di onde sovrapposte di tal fatta possa effettivamente propagarsi nel suolo che consideriamo, se non teniamo conto anche delle condizioni che devono essere soddisfatte alla superficie.

Noi ci proporremo appunto di determinare quali condizioni debbano essere soddisfatte perchè una coppia di onde sovrapposte, come quelle ora considerate, possa effettivamente propagarsi in un suolo piano. Dovranno, come è ben noto, essere nulle le componenti della tensione elastica relativa a

qualsiasi elemento piano della superficie libera; cioè si dovrà avere, per  $z=0$ ,

$$(9) \quad \begin{aligned} X_z &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ Y_z &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \\ Z_z &= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Ora consideriamo la vibrazione che risulta dalla sovrapposizione delle vibrazioni (1), (2), (3), quando si supponga che in ciascuna di queste le costanti  $\alpha, \gamma$  possano avere valori particolari  $\alpha_1 \gamma_1, \alpha_2 \gamma_2, \alpha_3 \gamma_3$ , sempre supponendo verificate le relazioni corrispondenti alle (5), (6), cioè

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} (\alpha_1^2 + \gamma_1^2) &= \varepsilon_1^2 & \frac{\mu}{\rho} (\alpha_2^2 + \gamma_2^2) &= \varepsilon_2^2 \\ \frac{\mu}{\rho} (\alpha_3^2 + \gamma_3^2) &= \varepsilon_2^2. \end{aligned}$$

Per semplicità di scrittura porremo

$$\zeta_1 = \alpha_1 x + \gamma_1 z - \varepsilon_1 t \quad \zeta_2 = \alpha_2 x + \gamma_2 z - \varepsilon_2 t \quad \zeta_3 = \alpha_3 x + \gamma_3 z - \varepsilon_2 t.$$

Si vede facilmente che le componenti di tensione, dovute alla vibrazione risultante, sopra un elemento superficiale orizzontale, sono date dalle espressioni

$$(11) \quad \begin{aligned} X_z &= 2\mu \alpha_1 \gamma_1 \varphi'(\zeta_1) + \mu (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) \psi'(\zeta_2) \\ Y_z &= \mu \gamma_2 \chi'(\zeta_3) \\ Z_z &= [\lambda (\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + 2\mu \gamma_1^2] \varphi'(\zeta_1) - 2\mu \alpha_2 \gamma_2 \psi'(\zeta_2) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\varphi'(\zeta) = \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} \quad \psi'(\zeta) = \frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} \quad \chi'(\zeta) = \frac{d\chi(\zeta)}{d\zeta}.$$

La vibrazione considerata è la più generale che possiamo dedurre dalle nostre formole relative alle onde piane. Ora dalle formole precedenti per le tensioni, risulta che non è possibile che  $Y_z$  si annulli senza supporre una forma speciale per  $\chi(\zeta)$  che porti come conseguenza  $\chi'(\zeta_3) = 0$ , per  $z = 0$ . Possiamo invece cercare di soddisfare alle altre due condizioni, senza imporre alcuna condizione di questo genere alle funzioni  $\varphi, \psi$ .

Supponiamo infatti che fra le costanti  $\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  si abbia la relazione

$$(12) \quad \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = V$$

cioè che sia identica la velocità di propagazione superficiale delle onde (1) e (2); ed inoltre che sia

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= A \Psi' \left( \frac{\zeta}{\alpha_1} \right) \\ \psi'(\zeta) &= B \Psi' \left( \frac{\zeta}{\alpha_2} \right) \end{aligned}$$

dove  $\Psi'$  è una nuova funzione arbitraria (che per comodità di calcolo poniamo sotto forma di derivata), ed A, B sono delle costanti. È chiaro che per  $z = 0$  avremo

$$\varphi'(\zeta_1) = A \Psi'(x - Vt) \quad \psi'(\zeta_2) = B \Psi'(x - Vt)$$

e quindi la prima e la terza delle equazioni (9) saranno soddisfatte, se le costanti A, B sono determinate in modo che sia

$$(14) \quad \begin{aligned} 2\alpha_1 \gamma_1 A + (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) B &= 0 \\ [\lambda(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + 2\mu \gamma_1^2] A - 2\mu \alpha_2 \gamma_2 B &= 0. \end{aligned}$$

Otterremo così una vibrazione, il cui vettore vibrante giacerà completamente nel piano di propagazione; avrà quindi, in linguaggio sismico, una componente di moto *sussultorio*, ed una componente di moto *ondulatorio*, parallela alla direzione di propagazione; e risulterà dalla sovrapposizione di due onde piane, l'una longitudinale, l'altra trasversale propagantesi con velocità uguale sulla superficie del suolo. Questo moto poi potrà avere i caratteri di una vibrazione qualsiasi, anche non periodica, ed essere anche costituito da un'onda solitaria, se noi supponiamo che la funzione  $\Psi(\zeta)$  abbia valori differenti da zero, soltanto per valori di  $\zeta$  compresi entro certi limiti  $l, L$ ; cioè quando sia

$$l < \zeta < L.$$

Dobbiamo ora vedere se, e come, sia possibile soddisfare a tutte queste condizioni mediante le costanti che entrano nelle nostre formole. Queste condizioni sono rappresentate dalle prime due equazioni (10), e dalle (12), (14).

Innanzi tutto per la compatibilità delle due equazioni (14), dovremo avere, eliminando il rapporto A:B,

$$(15) \quad 4\mu \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + (\lambda \alpha_1^2 + (\lambda + 2\mu) \gamma_1^2) (\gamma_2^2 - \alpha_2^2) = 0.$$

Questa equazione determina una relazione che deve esistere fra le due direzioni di propagazione delle due onde associate. Essendo infatti

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \operatorname{tg} \theta_a \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \operatorname{tg} \theta_b$$

essa può essere scritta anche

$$(15') \quad 4\mu \operatorname{tg} \theta_a \operatorname{tg} \theta_b + (\lambda + (\lambda + 2\mu) \operatorname{tg}^2 \theta_a) (\operatorname{tg}^2 \theta_b - 1) = 0.$$

Inoltre dalle (10) abbiamo

$$(16) \quad \begin{aligned} \rho \left( \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} \right)^2 &= (\lambda + 2\mu) \left( 1 + \left( \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right)^2 \right) \\ \rho \left( \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} \right)^2 &= \mu \left( 1 + \left( \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

e quindi per le (12)

$$(17) \quad \rho V^2 = (\lambda + 2\mu) \left( 1 + \left( \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right)^2 \right) = \mu \left( 1 + \left( \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \right)^2 \right).$$

Mediante queste due relazioni possiamo eliminare i rapporti  $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$  dalla (15) ed ottenere un'equazione che contenga soltanto V. Si arriva facilmente a questa equazione osservando che dalla (15) si ha

$$16 \left( \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \right)^2 \mu^2 = \left( \lambda + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right)^2 \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \right)^2 \right)^2$$

e sostituendo in questa i valori di  $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$  che risultano dalle (17). Si ottiene così

$$16 \left( \frac{\rho V^2}{\lambda + 2\mu} - 1 \right) \left( \frac{\rho V^2}{\mu} - 1 \right) \mu^2 = (\rho V^2 - 2\mu)^2 \left( 2 - \frac{\rho}{\mu} V^2 \right)^2$$

ossia introducendo le costanti  $a, b$  del mezzo

$$(18) \quad \left( \frac{V^2}{b^2} - 2 \right)^4 - 16 \left( \frac{V^2}{a^2} - 1 \right) \left( \frac{V^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

È questa l'equazione che determina V; ed essa coincide esattamente colla equazione a cui è giunto Lord Rayleigh ricercando la velocità di propagazione delle sue onde superficiali. Noi vi siamo giunti per altra via, studiando un problema assai diverso; ma la soluzione di Rayleigh rientra nel quadro generale delle formole che abbiamo stabilito, come vedremo meglio in seguito. Essa si presenta come una soluzione *singolare* del problema della propagazione delle onde sovrapposte, aventi uguale velocità superficiale di propagazione.

Per ogni radice della equazione di Rayleigh (18), le relazioni (16) determinano i corrispondenti valori dei rapporti  $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$  ossia di  $\operatorname{tg} \theta_a, \operatorname{tg} \theta_b$ ,



e danno quindi le due direzioni di propagazione delle due onde associate. Dalle (14) poi si potrà ricavare il valore del rapporto A:B, e quindi tenendo conto delle (13) ottenere le effettive espressioni delle componenti di vibrazione. Conviene pertanto discutere la possibilità di soluzioni reali per tutte queste equazioni.

Ricordiamo anzitutto che l'equazione (18) ammette la soluzione  $V^2 = 0$ , e che togliendo questo fattore  $V^2$  e ponendo

$$V^2 = \eta b^2$$

essa assume la forma

$$(19) \quad f(\eta) = \eta^3 - 8\eta^2 + 8\left(3 - 2\frac{b^2}{a^2}\right)\eta - 16\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 0.$$

E siccome si ha

$$f(0) = -16\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \quad f(1) = 1$$

ed inoltre, per note proprietà,

$$\frac{b^2}{a^2} < 1,$$

essa ha sempre una radice compresa fra 0 ed 1. Il valore corrispondente di  $V$  sarà perciò minore della velocità  $b$  delle onde trasversali. Ora dalle (16) si ottiene

$$(20) \quad \operatorname{tg}^2 \theta_a = \frac{b^2}{a^2} \eta - 1 \quad \operatorname{tg}^2 \theta_b = \eta - 1$$

e perciò, se  $\eta < 1$ , i corrispondenti valori di  $\operatorname{tg} \theta_a$ ,  $\operatorname{tg} \theta_b$  non possono essere reali.

Alla radice considerata della equazione di Rayleigh non corrisponde perciò alcuna soluzione reale del problema da noi posto. Ma *formalmente* le nostre equazioni sono soddisfatte anche dai valori immaginari, che in tal modo si trovano; quindi, separando la parte reale dalla immaginaria, noi possiamo ottenere anche in questo caso delle soluzioni reali delle equazioni delle vibrazioni; le quali non corrisponderanno allo speciale problema meccanico, da cui siamo partiti, ma rappresenteranno sempre delle vibrazioni speciali possibili nel suolo. Le onde superficiali di Lord Rayleigh non sono che un caso particolare di queste vibrazioni. Ce ne occuperemo in seguito.

Consideriamo ora il caso in cui il nostro problema ammette soluzioni reali.

Discuterò in altra occasione quali siano le condizioni perchè le radici dell'equazione (18) siano tutte reali. Qui mi limiterò a considerare il caso,

ammesso come tipico dai sismologi, anzi, si può dire, da essi quasi unicamente preso in considerazione, quello in cui

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$$

che corrisponde al caso in cui pel coefficiente di Poisson si ha  $\sigma = \frac{1}{4}$ , valore che si ritiene abbastanza prossimo al valor medio di questo coefficiente pei materiali che compongono la crosta superficiale terrestre. In questo caso la equazione (19) diviene

$$\eta^3 - 8\eta^2 + \frac{56}{3}\eta - \frac{32}{3} = 0$$

e le sue radici sono tutte reali, e cioè (1)

$$\eta_1 = 4 \quad \eta_2 = 2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \eta_3 = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

L'ultima, minore di 1, è quella di cui abbiamo poco innanzi dimostrata l'esistenza per qualunque valore del rapporto  $b^2:a^2$ .

Lasciando per ora da parte questa radice, che dà le onde di Rayleigh, cerchiamo i valori di  $\theta_a, \theta_b$  corrispondenti alle altre due.

Le equazioni (20) per la prima radice  $\eta_1 = 4$  danno

$$(21) \quad \operatorname{tg} \theta_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \operatorname{tg} \theta_b = \sqrt{3} \quad V_1 = 2b,$$

quindi abbiamo rispettivamente per l'angolo di emergenza dell'onda longitudinale e della trasversale associata i valori

$$\theta_a = 30^\circ \quad \theta_b = 60^\circ.$$

Osserviamo inoltre che colle formole (20) sono compatibili anche i valori

$$\theta_a = -30^\circ \quad \theta_b = -60^\circ$$

i quali corrispondono alle due onde riflesse delle precedenti sulla superficie libera del suolo. Per ogni coppia di onde sovrapposte, che otterremo come possibile dalle nostre equazioni, avremo quindi sempre anche la coppia delle corrispondenti onde riflesse.

(1) V. Galitzin, *Lezioni di Sismometria*, Cap. II.

Consideriamo ora la seconda radice  $\eta_2$ . Abbiamo in questo caso dalle (20)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \theta_a &= \frac{1}{\sqrt{3}} (2 - \sqrt{3}) = 0,0515 b \\ (22) \quad \operatorname{tg}^2 \theta_b &= \frac{1}{\sqrt{3}} (2 + \sqrt{3}) = 2,1547 b \\ V_2 &= b \sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 1,7761 b \end{aligned}$$

da cui si ricava, trascurando i secondi di grado,

$$\theta_a = \pm 12^\circ.47' \quad \theta_b = \pm 55^\circ.44'.$$

Sono questi i valori numerici corrispondenti alla seconda coppia di onde associate, nel caso che pel rapporto di Poisson si assuma il valore solitamente ammesso  $\sigma = \frac{1}{4}$ . Ma ciò che più interessa la nostra teoria è il fatto che questi valori sono tutti reali e dimostrano quindi la reale esistenza delle onde considerate.

Ritorniamo ora alle formole iniziali, da cui siamo partiti, per ricavarne le espressioni effettive delle componenti di vibrazione colla introduzione dei valori trovati per le costanti. Scriveremo queste espressioni sotto forma generale, applicabile tanto alle onde della radice  $\eta_1$  che a quella della radice  $\eta_2$ . Conserveremo cioè le espressioni generiche  $V$ ,  $\operatorname{tg} \theta_a$ ,  $\operatorname{tg} \theta_b$ , per le quali nei due casi si dovranno poi prendere rispettivamente i valori (21) o (22).

Tenendo presenti le equazioni (13) possiamo porre

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta_1) &= A \Psi \left( \frac{\gamma_1}{\alpha_1} z + x - Vt \right) \\ \varphi(\zeta_2) &= B \Psi \left( \frac{\gamma_2}{\alpha_2} z + x - Vt \right). \end{aligned}$$

Mentre dalla prima delle equazioni (14) ricaviamo

$$\frac{A}{B} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b}{2 \operatorname{tg} \theta_a} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}$$

e possiamo quindi porre

$$A = \frac{1}{2\alpha_1^2 \operatorname{tg} \theta_a} \quad B = \frac{1}{\alpha_2^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b)}.$$

Ora sostituendo nelle equazioni

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 \varphi(\zeta_1) & u_2 &= \gamma_2 \psi(\zeta_2) \\ w_1 &= \gamma_1 \varphi(\zeta_1) & w_2 &= -\alpha_2 \psi(\zeta_2) \end{aligned}$$

troviamo per l'onda longitudinale

$$(23) \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} \theta_a} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_a + x - Vt) \\ w_1 &= \frac{1}{2\alpha_1} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_a + x - Vt) \end{aligned}$$

e per la trasversale

$$(23') \quad \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\operatorname{tg} \theta_b}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_b + x - Vt) \\ w_2 &= -\frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_b + x - Vt) \end{aligned}$$

ed abbiamo così la rappresentazione completa di una qualsiasi delle nostre coppie di onde associate, cui compete uguale velocità di propagazione superficiale, come manifestamente risulta dalle formole precedenti.

In queste formole  $\Psi$  è funzione completamente arbitraria. Nessuna limitazione quindi risulta per le onde che si propagano in superficie, cioè sul piano  $z=0$ . Esse possono essere anche *non periodiche*, ed essere anche *onde isolate* se supponiamo che la  $\Psi$  abbia valori nulli quando la variabile da cui dipende esce da certi limiti arbitrariamente fissati. La teoria basata sulle formole precedenti è quindi indipendente da qualsiasi ipotesi circa la lunghezza d'onda delle vibrazioni, e conciliabile con qualsiasi dato di fatto che l'osservazione possa rivelare a questo proposito. La possibilità dell'onda isolata poi ci avvicina notevolmente alla realtà.

Finalmente le costanti  $\alpha_1, \alpha_2$  nelle formole precedenti sono ancora a nostra disposizione. Noi possiamo approfittare di questa arbitrarietà per introdurre un elemento importante.

Il movimento vibratorio sulla superficie del suolo, risultante dalla sovrapposizione delle onde associate (23), (23') sarà dato dalle componenti

$$(24) \quad \begin{aligned} u_0 &= \left[ \frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} \theta_a} + \frac{\operatorname{tg} \theta_b}{\alpha_2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b)} \right] \Psi(x - Vt) \\ w_0 &= \left[ \frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b)} \right] \Psi(x - Vt) \end{aligned}$$

e rappresenta quindi un movimento vibratorio arbitrario, vincolato alla sola

condizione di propagarsi in superficie colla velocità  $V$ , e di mantenere una inclinazione costante, sulla direzione di propagazione.

Possiamo anche determinare  $\alpha_1, \alpha_2$  in modo che l'ampiezza di queste componenti di oscillazione abbia valori assegnati, conformi a quelli osservati effettivamente. Una delle difficoltà che si presentano rispetto alle onde di Rayleigh è appunto il fatto che il rapporto della componente verticale alla orizzontale nella direzione di propagazione risulta determinato, e uguale perciò ad un numero fisso che non sempre concorda colle osservazioni (<sup>1</sup>). Nelle formole precedenti questo rapporto può avere qualsiasi valore, e può essere determinato con opportuna scelta del rapporto  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ . Si ha infatti

$$(25) \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{u_0}{w_0} - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_a}}{\frac{u_0}{w_0} + \operatorname{tg} \theta_b} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b).$$

Può considerarsi con ciò esaurito il problema della rappresentazione analitica di una coppia qualsiasi di onde associate, corrispondenti ad una radice dell'equazione di Rayleigh per cui risultino reali i valori di  $\operatorname{tg} \theta_a$ ,  $\operatorname{tg} \theta_b$ , a cui corrispondono cioè angoli reali di emergenza.

Studierò in una Nota successiva le onde che corrispondono alla radice  $\eta_3$  (minore della unità) dell'equazione di Rayleigh, e dimostrerò che esse costituiscono una generalizzazione delle così dette onde superficiali di Rayleigh. In seguito discuterò della possibilità di applicare i risultati ottenuti ad una interpretazione meccanica delle oscillazioni sismiche, secondo i concetti che ho sommariamente esposti da principio.

*Meccanica. — Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella presente Nota, dopo aver richiamato, per comodo del lettore, l'idea direttiva e l'impostazione matematica della relatività generale, mostro come alcune identità (fra le derivate dei simboli di Riemann) scoperte dal Bianchi offrano un sicuro criterio per introdurre il così detto tensore gravitazionale. Sotto l'aspetto analitico si tratta di un sistema doppio simmetrico  $A_{ik}$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ), i cui dieci elementi caratterizzano completamente il contributo della gravitazione nel comportamento meccanico locale, individuando sì gli sforzi specifici che il flusso e la densità di energia (di origine gravitazionale). Il significato meccanico del sistema implica una struttura analitica dotata di convenienti proprietà invariantive di fronte ad eventuali

(<sup>1</sup>) Cfr. Love, *Some Problems of Geodynamics*, Ch. XI, n. 160, 161.

trasformazioni di coordinate. Tale è in effetti la forma (covariante) delle  $A_{ik}$  fornita dal criterio suaccennato, la quale inoltre dà luogo ad una estensione particolarmente espressiva del principio di d'Alembert.

L'idea di un tensore gravitazionale fa parte della grandiosa costruzione di Einstein. Però la definizione propostane dall'Autore non può risguardarsi definitiva. Anzi tutto, dal punto di vista matematico, le fa difetto quel carattere invariantivo che dovrebbe invece necessariamente competerele secondo lo spirito della relatività generale. E anche più grave è il fatto, avvertito con fine intuito dallo stesso Einstein (1), che se ne trae una conseguenza fisica palesemente inaccettabile a proposito delle onde di gravitazione. Per questo punto egli trova tuttavia un accomodamento nella teoria dei quanti.

In verità la spiegazione è meno riposta: tutto dipende dalla non corretta forma assunta per il tensore gravitazionale. Vedremo che colla nostra determinazione scompare automaticamente ogni possibilità di paradosso.

1. GENERALITÀ. — Nella meccanica ordinaria, lo spazio fisico si considera rigorosamente euclideo, e la rappresentazione analitica dei fenomeni è, per così dire, subordinata alla forma differenziale quadratica (ternaria)  $dl^2$  che esprime il quadrato dell'elemento lineare.

Nella teoria della relatività in senso stretto, si seguita a risguardare lo spazio come euclideo; ma le equazioni della meccanica hanno carattere invariantivo, non più rispetto alla forma  $dl^2$ , sibbene rispetto ad una forma quadernaria  $ds^2$  che involge anche il tempo  $t$  ed ha notoriamente l'espressione

$$(1) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$$

( $c$  costante universale da interpretarsi come velocità della luce nel vuoto).

Ben si intende che, con referenza a coordinate cartesiane, si ha qui ancora

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Nella relatività generale — nuova e più comprensiva concezione delle leggi naturali, dovuta anch'essa ad Einstein — spazio e tempo non costituiscono una semplice localizzazione, inerte e immutabile, dei fenomeni, ma ne sono affetti e reagiscono per guisa che il  $ds^2$  cambia natura.

Al posto di (1), si ha una forma fondamentale

$$(2) \quad ds^2 = \sum_0^3 g_{ik} dx_i dx_k,$$

la quale, con opportuna scelta dei parametri  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , si riduce esat-

(1) *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss., 1916, pag. 696.

tamente alla forma (1) nel caso limite in cui manchi qualsiasi azione fisicamente percettibile (presenza o moto di materia, di elettricità, o più generalmente di qualche forma di energia). Di regola, la (2), pur essendo quantitativamente molto prossima al tipo (1), deve ritenersi non data *a priori* ma intrinsecamente definibile in base alle circostanze di fatto. Fra queste figura naturalmente anche la gravitazione universale, cui compete, secondo Einstein, il privilegio di dipendere esclusivamente dai coefficienti  $g_{ik}$  (e loro derivate).

Le equazioni tutte della nuova meccanica hanno carattere invariante rispetto a quella ben determinata forma (2) che conviene al caso specifico. In questa nuova meccanica la teoria di una data classe di fenomeni comprende necessariamente, accanto a relazioni le quali hanno riscontro nelle precedenti impostazioni (classica e relativistica della prima maniera), ulteriori relazioni destinate a caratterizzare il  $ds^2$ . Tali sono le equazioni gravitazionali di Einstein (in numero di 10 come i coefficienti  $g_{ik}$ ), che considereremo esplicitamente al § 6.

2. TENSORE ENERGETICO. — La meccanica dei sistemi continui — anche secondo lo schema ordinario — porta a ritenere ben conosciuto un fenomeno meccanico (che si svolge in un certo campo di valori di  $x, y, z, t$ ), allorché sono assegnati (in funzione del posto e del tempo) i seguenti elementi: sforzi, quantità di moto, flusso e densità di energia.

Nella meccanica relativistica, il vettore  $\mathbf{q}$ , che rappresenta la densità di quantità di moto, è legato al flusso di energia  $\chi$  dalla relazione

$$\mathbf{q} = \frac{1}{c^2} \chi,$$

e conviene far capo all'unico vettore

$$(3) \quad -\mathbf{f} = c\mathbf{q} = \frac{1}{c} \chi,$$

che si può riguardare come flusso di energia durante un secondo di luce (intervallo di tempo entro cui la luce percorre l'unità di lunghezza). Notiamo del resto, a scanso di equivoci, che non intendiamo con ciò di fissare l'unità di tempo: essa rimane generica al pari delle altre due unità fondamentali.

Poniamo, per brevità di scrittura,

$$(4) \quad y_0 = ct \quad , \quad y_1 = x \quad , \quad y_2 = y \quad , \quad y_3 = z,$$

e introduciamo, con referenza a queste variabili, un tensore simmetrico  $T_{ik}$  così definito: Per  $i, k = 1, 2, 3$ ,  $T_{ik}$  è la componente secondo l'asse delle  $y_k$  dello sforzo specifico che si esercita sopra un elemento superficiale normale

all'asse delle  $y_i$  <sup>(1)</sup> (o viceversa, scambiando  $i$  con  $k$ );  $T_{i0} = T_{0i}$  si identifica colla componente  $f_i$  del vettore  $f$ ; infine  $T_{00}$  è la densità dell'energia.

3. RIFERIMENTO A COORDINATE QUALUNQUE. — Se alle  $y_i$  si sostituiscono quattro combinazioni (indipendenti) qualsivogliano  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , la forma

$$(1') \quad ds^2 = c^2 dy_0^2 - (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2)$$

assume l'aspetto generale (2). Varranno tuttavia le restrizioni qualitative

$$(5) \quad g_{00} > 0, \quad g_{ii} < 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

ogni qualvolta il parametro  $x_0$  (variando da solo) è atto a rispecchiare la nozione intuitiva di tempo, mentre le rimanenti  $x_i$  sono in qualche modo interpretabili come effettive coordinate di spazio.

Ciò ritenuto, per tensore energetico in coordinate qualunque  $x_i$  si intenderà quel sistema covariante doppio  $T_{ik}$ , che, riferito alle  $y$ , si specifica nel modo indicato.

Dalle stesse formule di covarianza con cui rimangono definiti i vari elementi del sistema  $T_{ik}$ , si desume, per ognuno di essi, una interpretazione in coordinate generali  $x$ . E precisamente si trova <sup>(2)</sup> che:

$\frac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}} = \frac{T_{ki}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) rappresenta la componente (ortogonale) secondo la linea  $x_i$  (cioè quella su cui varia la sola  $x_i$ ) dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale perpendicolare alla linea  $x_k$  (o viceversa, scambiando  $i$  con  $k$ );

$\frac{T_{i0}}{\sqrt{-g_{00} g_{ii}}} = \frac{T_{0i}}{\sqrt{-g_{00} g_{ii}}}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) rappresenta la componente di  $f$  secondo la linea  $x_i$  (in quanto si immagini decomposto il vettore  $f$  secondo il triedro delle linee coordinate);

infine  $\frac{T_{00}}{g_{00}}$  è la densità di distribuzione della energia nello spazio ( $x_1, x_2, x_3$ ) [cui si attribuisca la determinazione metrica corrispondente a  $-ds^2$  per  $dx_0 = 0$ ].

4. INVARIANTE LINEARE E DIVERGENZA DEL TENSORE ENERGETICO. — Ci atteniamo al solito simbolismo del calcolo differenziale assoluto. Rappresentiamo perciò con  $g^{(ik)}$  gli elementi reciproci ai coefficienti  $g_{ik}$ ; e con

<sup>(1)</sup> Colla convenzione (abituale in idrodinamica) che sforzo normale positivo corrisponda a pressione.

<sup>(2)</sup> Sarebbe fuor di luogo che io mi indugiassi ora sulle modalità di deduzione. Ma mi permetto di rilevare che non occorrono sviluppi materiali, purchè si ricorra ad un opportuno adattamento dei metodi del calcolo differenziale assoluto ai  $ds^2$  indefiniti che conglobano spazio e tempo.



$T_{ikl}$  ( $i, k, l = 0, 1, 2, 3$ ) il sistema derivato covariante di  $T_{ik}$  secondo la forma fondamentale. Pel momento, come già nel precedente §, riterremo che questa sia la (1'), la quale, riferita a coordinate qualunque  $x$ , assume l'aspetto generico (2).

Ponendo

$$(6) \quad \mathbf{T} = \sum_{ik}^3 g^{(ik)} \mathbf{T}_{ik},$$

si definisce un invariante, detto appunto *invariante lineare o scalare del tensore energetico*.

Si chiama invece *divergenza* dello stesso tensore energetico il sistema covariante semplice (o vettore quadridimensionale)

$$(7) \quad F_i = \sum_{kl}^3 g^{(kl)} T_{ikl} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Il significato meccanico della divergenza (come quello di  $\mathbf{T}$ , che tralascio di rilevare perchè immediato) si rende manifesto, riportandosi alle variabili  $y$ . Rispetto a tali variabili,  $g^{(ik)} = 0$  ( $i \neq k$ ),  $g^{(00)} = 1$ ,  $g^{(ii)} = -1$  ( $i = 1, 2, 3$ ), e la derivazione covariante coincide coll'ordinaria.

Si ha quindi

$$F_i = \frac{\partial T_{i0}}{\partial y_0} - \sum_1^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial y_k} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$F_0 = \frac{\partial T_{00}}{\partial y_0} - \sum_1^3 \frac{\partial T_{0k}}{\partial y_k}.$$

Teniamo presente il § 2 e notiamo che, in forza della (3), le  $T_{i0}$  si identificano con  $-cq_i$  ( $q_i$  componenti della densità di quantità di moto  $\mathbf{q}$ ). Con ciò apparisce ovviamente dalle prime tre equazioni testè scritte (ripetendovi  $ct$  per  $y_0$ ) che  $-F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono componenti della forza esterna  $\mathbf{F}$  applicata al sistema (per unità di volume); l'ultima equazione, qualora [sempre in base alle (3)] si prendano le  $T_{0k}$  sotto la forma  $-\frac{1}{c} \chi_k$  ( $\chi_k$  componenti del flusso di energia  $\chi$ ), mostra poi che  $cF_0$  è la densità di potenza, cioè l'energia comunicata dall'esterno al sistema per unità di tempo e di volume. Si può anche dire, se si vuole, che  $F_0$  rappresenta l'energia comunicata al sistema, per unità di volume, in un secondo di luce. Ne consegue in particolare che, in un sistema isolato, la divergenza è nulla.

Ove ci si riferisca a coordinate qualunque  $x_i$ , il carattere covariante del sistema semplice  $F_i$  consente senz'altro di interpretare  $\frac{-F_1}{\sqrt{-g_{11}}}$ ,  $\frac{-F_2}{\sqrt{-g_{22}}}$ ,  $\frac{-F_3}{\sqrt{-g_{33}}}$  quali componenti di  $\mathbf{F}$  secondo le linee coordinate  $x_1, x_2, x_3$ ;

$\frac{F_0}{\sqrt{g_{00}}}$  quale energia ceduta in un secondo di luce all'unità di volume del sistema.

5. PASSAGGIO ALLA RELATIVITÀ GENERALE. — Pur riferendoci a coordinate generali, abbiamo supposto finora che si tratti di un  $ds^2$  euclideo. Formalmente le cose vanno nello stesso modo anche per un  $ds^2$  essenzialmente irriducibile al tipo (1'), semprechè tuttavia:

a)  $x_0$  sia interpretabile come tempo e le altre tre coordinate come parametri di spazio, valendo in conformità le disuguaglianze (5);

b) si conservino (nell'infinitesimo) le intuizioni meccaniche abituali, sicchè sia possibile attribuire un senso positivo a misure locali di forza, sforzi, flusso e densità di energia. In tali condizioni rimane univocamente definito il tensore energetico pel tramite dei rapporti

$$\frac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad ; \quad \frac{T_{0i}}{\sqrt{-g_{00} g_{ii}}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad ; \quad \frac{T_{00}}{g_{00}},$$

di cui al § 3.

D'ora innanzi il nostro  $ds^2$  si intenderà *a priori* qualunque (salvo le restrizioni suindicate); e si assumerà naturalmente lo stesso  $ds^2$  per forma fondamentale.

6. LE EQUAZIONI DEL CAMPO GRAVITAZIONALE. — Indichino  $g_{ij, hk}$  ( $i, j, h, k = 0, 1, 2, 3$ ) i simboli di Riemann di prima specie spettanti ad un generico  $ds^2$  quadernario (2). Attesa la loro covarianza, le posizioni

$$(8) \quad G_{ik} = \sum_{jh}^3 g^{(jh)} g_{ij, hk} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

definiscono un sistema covariante doppio.

Ove si tengano presenti le formule (1)

$$g_{ij, hk} = \sum_{\nu}^3 g_{j\nu} \{i\nu, hk\}.$$

$$\{i\nu, hk\} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} ih \\ \nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \nu \end{matrix} \right\} + \sum_{\nu}^3 \left[ \left\{ \begin{matrix} ih \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lk \\ \nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lh \\ \nu \end{matrix} \right\} \right],$$

che legano i simboli riemanniani di prima a quelli di seconda specie, e questi ai simboli di Christoffel (pure di seconda specie), si riconosce immediatamente che le (8) equivalgono a

$$(8') \quad G_{ik} = \sum_h^3 \{ih, hk\} =$$

$$= \sum_h^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} ih \\ h \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} ik \\ h \end{matrix} \right\} \right] + \sum_{hl}^3 \left[ \left\{ \begin{matrix} ih \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} kl \\ h \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} lh \\ h \end{matrix} \right\} \right].$$

(1) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 72.

L'invariante lineare del sistema doppio  $G_{ik}$

$$(9) \quad G = \sum_0^3 g^{(ik)} G_{ik}$$

si dirà *curvatura media* del nostro  $ds^2$  <sup>(1)</sup>.

Ciò posto, le equazioni gravitazionali di Einstein sono:

$$(10) \quad G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G = -\kappa T_{ik},$$

dove  $\kappa$  dipende dalla costante  $f$  di attrazione universale e da  $c$  a norma della formula

$$(11) \quad \kappa = \frac{8\pi f}{c^4}.$$

Osservo incidentalmente che si può verificare l'omogeneità dei due membri delle (10), immaginando di riferirsi a parametri  $x_0, x_1, x_2, x_3$  tutti omogenei tra loro, per es. lunghezze, come sono (pei  $ds^2$  euclidei) le  $y$  definite dalle posizioni (4). I coefficienti  $g_{ik}$  sono allora dei puri numeri, e i primi membri hanno manifestamente le dimensioni  $l^{-2}$ . D'altra parte tutti i  $T_{ik}$  (sforzi specifici a meno di fattori numerici, ecc.) hanno in questo caso le stesse dimensioni, e precisamente  $ml^{-1} t^{-2}$ . Si ha poi

$$[f] = m^{-1} l^3 t^{-2}, \quad [\kappa] = m^{-1} l^{-1} t^2,$$

sicchè anche ai secondi membri spettano effettivamente le dimensioni  $l^{-2}$ .

7. GIUSTIFICAZIONE FORMALE DESUNTA DALLE IDENTITÀ DI BIANCHI. — Le derivate covarianti dei simboli di Riemann sono legate da relazioni notevolissime dovute al Bianchi <sup>(2)</sup>, che si possono compendiare nella formula

$$g_{ij, hkl} + g_{jl, hki} + g_{li, hkj} = 0 \quad (i, j, h, k, l = 0, 1, 2, 3),$$

ovvero, per ben note proprietà dei simboli di Riemann, nella formula equivalente

$$g_{ij, hkl} + g_{li, hkj} - g_{lj, hki} = 0.$$

Moltiplichiamo per  $\frac{1}{2} g^{(kl)} g^{(jh)}$  e sommiamo rispetto a  $k, l, j, h$ , avendo cura di scambiare nel secondo termine (a somma eseguita)  $j$  con  $l$  e  $h$  con  $k$ . Questo secondo termine diviene così identico al primo, e risulta

$$\sum_0^3 g_{kljh} g^{(kl)} g^{(jh)} g_{ij, hkl} - \frac{1}{2} \sum_0^3 g_{kljh} g^{(kl)} g^{(jh)} g_{lj, hki} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

D'altra parte la derivazione covariante delle (8) — ricordando il lemma

<sup>(1)</sup> Tale designazione è ovviamente desunta dal significato geometrico che spetterebbe a  $G$ , qualora si trattasse di un  $ds^2$  definito positivo.

<sup>(2)</sup> Cfr. loc. cit., pag. 351.

di Ricci che i coefficienti della forma fondamentale hanno derivata covariante nulla — porge

$$G_{ihl} = \sum_0^3 g^{(jh)} g_{i,j,hhl} ;$$

mentre, dalla espressione (9) di  $G$ , che può essere scritta

$$G = \sum_0^3 g^{(hl)} G_{lh} ,$$

derivando covariantemente, si trae

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = G_i = \sum_0^3 g^{(hl)} G_{lhi} = \sum_0^3 g^{(hl)} g^{(jh)} g_{i,j,hhi} .$$

Le ricavate combinazioni delle identità di Bianchi divengono con ciò

$$(12) \quad \sum_0^3 g^{(kl)} G_{ihl} - \frac{1}{2} G_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) .$$

Esse contengono la giustificazione delle equazioni gravitazionali (10), dal lato matematico. Ed ecco perchè. I secondi membri delle (10) costituiscono un sistema doppio a divergenza nulla <sup>(1)</sup>. Se si richiede che il sistema (10) sia completo [cioè che nessuna condizione sia imposta al  $ds^2$  indipendentemente dalle circostanze esteriori riassunte nelle  $T_{ik}$ ], bisogna che sia identicamente nulla anche la divergenza dei primi membri, ossia del sistema

$$G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G .$$

Questo appunto esprimono le equazioni (12).

8. TENSORE GRAVITAZIONALE O INERZIALE — GENERALIZZAZIONE DEL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT. — Posto per brevità

$$(13) \quad A_{ik} = \frac{1}{x} \left\{ G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G \right\} ,$$

le equazioni gravitazionali (10) si scrivono

$$(10') \quad T_{ik} + A_{ik} = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2, 3) .$$

<sup>(1)</sup> Infatti le  $T_{ik}$  includono il contributo di tutti i fenomeni che si svolgono nel posto e nell'istante considerato (gravitazione a parte). Si tratta comunque di un sistema isolato nel senso ordinario della parola. Debbono perciò annullarsi, per ogni sua porzione elementare, forza e potenza.

Interpretiamovi le  $A_{ik}$  come componenti di un tensore energetico dovuto all'ambiente spaziale e temporale, cioè dipendente esclusivamente dai coefficienti del  $ds^2$ . Un tale tensore si potrà a egual titolo denominare *gravitazionale* oppure *inerziale* <sup>(1)</sup>, poichè dal  $ds^2$  dipendono simultaneamente gravitazione ed inerzia. Le (10') danno luogo in conformità al seguente enunciato:

*La natura del  $ds^2$  è sempre tale da equilibrare ogni azione meccanica, nel senso che si annulla identicamente la somma dei due tensori energetico ed inerziale.*

Vien fatto naturalmente di riavvicinare un tale enunciato al principio di d'Alembert « le forze perdute (cioè forze direttamente applicate e forze di inerzia) si fanno equilibrio ». L'equilibrio espresso dalle (10') è proprio ciò che si può concepire di più completo sotto l'aspetto meccanico, venendo ad annullarsi non soltanto la forza totale applicata ad ogni singolo elemento, ma altresì (col tener conto dell'inerzia pel tramite delle  $A_{ik}$ ) sforzi, flusso e densità di energia.

Ben si intende che questa assenza assoluta di entità meccaniche concerne i sistemi isolati. Se nel campo di un tale sistema si introduce ad esempio un po' di materia (e si suppone per semplicità trascurabile la conseguente modificazione del campo), si ha sulla materia addizionale un complesso di azioni esterne provenienti dal sistema. Nel caso schematico del punto materiale, queste si riassumono in una legge di moto (geodetica rispetto al  $ds^2$  quadridimensionale), che include in particolare l'ordinaria dinamica di un punto sottoposto a forze conservative.

Va notato che le equazioni fondamentali di Einstein, qui riattaccate al principio di d'Alembert, furono già, da Einstein stesso e, in modo più completo, da Lorentz e da Hilbert <sup>(2)</sup>, fatte discendere dalla variazione (debitamente intesa) di un unico integrale, rimanendo così esteso alla nuova meccanica anche il principio di Hamilton.

9. EQUIVOCO DI EINSTEIN CONCERNENTE IL TENSORE GRAVITAZIONALE. — Ricordo, per quanto possa essere superfluo, che da ogni sistema covariante doppio  $A_{ik}$  si ottiene immediatamente un sistema misto  $A_i^{(j)}$  (covariante rispetto all'indice  $i$  e contravariante rispetto all'indice  $j$ ), ponendo

$$A_i^{(j)} = \sum_k^3 g^{(jk)} A_{ik} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Ne consegue che, per individuare il tensore gravitazionale con referenza a

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. W. De Sitter, *On the relativity of rotation in Einstein's theory*, Proc. of K. Ak. van Wet. te Amsterdam, vol. XIX, 1916, pag. 530 (in nota).

<sup>(2)</sup> Cfr. per es. le pp. 707-709 del rapporto di De Sitter, *On Einstein's theory of gravitation.....*, Monthly Notices, vol. LXXVI, 1916.

determinate variabili, è indifferente assegnare gli elementi  $A_{ik}$  ovvero le loro combinazioni lineari  $A_i^{(j)}$ . Ciò premesso, veniamo alle espressioni esplicite proposte da Einstein (1) per le  $A_i^{(j)}$  e da lui designate con  $\sqrt{-g} t_i^j$  ( $g$  discriminante del  $ds^2$ ).

Esse sono

$$(14) \quad \sqrt{-g} t_i^j = \frac{1}{2} \left\{ G^* \varepsilon_{ij} - \sum_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} \right\} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3),$$

dove  $\varepsilon_{ij}$  rappresenta al solito lo zero o l'unità secondochè i due indici sono distinti o coincidono;  $g_j^{(hk)}$  sta per  $\frac{\partial g^{(hk)}}{\partial x_j}$ ; il sommatorio  $\sum_0^3{}_{hk}$  va esteso a tutte le combinazioni con ripetizione degli indici  $h$  e  $k$ ; infine la funzione

$$(15) \quad G^* = - \sum_0^3{}_{ik} g^{(ik)} \sum_0^3{}_{hl} \left[ \begin{matrix} \{ih\} \{kl\} \\ \{l\} \{h\} \end{matrix} - \begin{matrix} \{ik\} \{lh\} \\ \{l\} \{h\} \end{matrix} \right]$$

deve intendersi (come è ovviamente lecito) ridotta a dipendere dai soli argomenti  $g^{(hk)}$ ,  $g_j^{(hk)}$ , prima di sottoporla a derivazione parziale rapporto a questi ultimi.

La inattendibilità delle posizioni (14) dal punto di vista matematico si constata agevolmente. Basta per es. ricavarne l'espressione che dovrebbe avere l'invariante lineare, cioè

$$\sqrt{-g} \sum_0^3 t_i^i = \frac{1}{2} \left\{ 4G^* - \sum_0^3{}_{i} \sum_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} \right\}.$$

Siccome  $G^*$ , a norma della (15) è quadratica omogenea nei simboli di Christoffel e quindi anche nelle  $g_i^{(hk)}$ , così, in virtù del teorema di Eulero,

$$\sum_0^3{}_{i} \sum_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} = 2G^*,$$

e l'invariante in questione dovrebbe ridursi a  $G^*$ .

Ora è ben noto (2) che non esistono invarianti differenziali del 1° ordine, intrinseci, cioè formati esclusivamente coi coefficienti del  $ds^2$  e loro derivate prime, come lo è  $G^*$ . Tanto basta a rendere, almeno in generale, inammissibile la forma del tensore gravitazionale assunta da Einstein. Questi del

(1) Dapprima con referenza a speciali variabili; allargandone poi la validità; e da ultimo attribuendo loro carattere generale. Cfr. in particolare la recente Nota: *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss., 1916, pp. 1111-1116.

(2) Veggasi ad es. Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen, B. 54, 1900, pag. 162.

resto già ne aveva risentito un qualche disagio, specie quando <sup>(1)</sup>, dopo avere con geniale semplicità tratteggiata la teoria delle onde gravitazionali, fu condotto al risultato inattendibile che anche onde *spontanee* dovrebbero di regola dar luogo a dispersione di energia per irraggiamento.

« Siccome questo — sono sue parole — non dovrebbe presentarsi « in natura, così appare verosimile che intervenga la teoria dei quanti a « modificare non soltanto l'elettrodinamica di Maxwell, ma anche la nuova « teoria della gravitazione ».

In realtà non c'è bisogno di arrivare ai quanti. Basta correggere l'espressione formale del tensore gravitazionale nel modo qui esposto. Rimane allora *a priori* esclusa l'eventualità di imbattersi in conseguenze non rispondenti alla intuizione fisica, sia che si tratti di onde libere o d'altro fenomeno *puramente* gravitazionale. Infatti, a norma delle (10'), o, se si vuole, del principio di d'Alembert generalizzato, quando si annulla il tensore energetico  $T_{ik}$ , lo stesso deve avvenire per il tensore gravitazionale  $A_{ik}$ , il che implica assoluta assenza sì di sforzi, che di flusso, o anche di semplice localizzazione dell'energia.

**Astronomia.** — *Osservazioni della nuova cometa Mellish* ≡ 1917 a.  
Nota del Socio E. MILLOSEVICH.

Sembra che l'astro sia stato scoperto dal sig. Mellish, Yerkes Observatory, Williams Bay, probabilmente il 20 marzo.

Una piccola efemeride, calcolata a Copenaghen, sopra elementi difettosi è di grossolana approssimazione.

L'astro è lucente; il nucleo è fra 6<sup>ta</sup> e 7<sup>ma</sup> grandezza, la testa misura circa 0',6 e designasi una lieve codetta; suppongo che possa diventare un bell'oggetto, ma nulla devesi congetturare senza la conoscenza pur approssimata delle distanze.

Io trovai l'astro il 25, e feci le seguenti quattro posizioni:

	t. m. R. C. R.	$\alpha$ app			$\delta$ app.			Stelle di riferimento
		h	m	s	h	m	s	
1917 marzo 25	7 36 19	2	6	45.28 (9.656);	+	16	3 38.0 (0.737)	1
" " 27	7 4 25	2	4	38.13 (9.651);	+	16	44 26.6 (0.721)	2
" " 29	6 58 53	2	1	40.23 (9.655);	+	17	23 26.7 (0.721)	3
" " 30	7 9 1	1	59	45.26 (9.659);	+	17	41 30.7 (0.732)	4

(1) Nella Nota già citata al principio.

1.	Berl A 612;	1917.0;	$2^{\text{h}} 6^{\text{m}} 22.15^{\text{s}}$	;	$+ 15^{\circ} 59' 38.2''$ ;	Rid. al l. a :	$+ 0.60$ ;	$+ 5.6''$
2.	"	606	"	;	$2 4 49.21$	;	$+ 16 50 7.6$ ;	" : $+ 0.58$ ; $+ 5.7$
			( $\mu - \mu'$ )					
3.	"	593	"	;	$2 1 10.73$	;	$+ 17 15 15.9$ ;	" : $+ 0.57$ ; $+ 5.6$
4.	"	587	"	;	$1 59 9.32$	;	$+ 17 51 18.5$ ;	" : $+ 0.57$ ; $+ 5.5$
			(senza $\mu$ e $\mu'$ )					

Il moto dell'astro verso Ovest aumenta e quello verso Nord decresce, donde tende al tramonto in vivo crepuscolo serotino, e fra breve sarà astro del mattino.

**Cristallografia.** — *Il polimorfismo della dinitrotoluidina*  
 $C_6H_2 \cdot NO_2 \cdot NH_2 \cdot CH_3$ . Nota-I del Socio E. ARTINI.

Questa sostanza mi fu affidata per lo studio cristallografico dai professori Körner e Contardi, i quali la ottennero nel corso delle loro ricerche sui trinitroderivati del benzolo e del toluolo, mediante riduzione del trinitrotoluolo  $\alpha$  (*tritolo*) con solfuro ammonico, seguendo il processo che espongo qui, come dai due autori mi fu comunicato.

« Grammi 500 di tritolo, finamente polverizzato, vennero sospesi in gr. 3000 di alcool a 94 %; indi si aggiunse, agitando energicamente mediante un agitatore meccanico, il solfuro ammonico in soluzione acquosa concentrata, nella quantità calcolata per ridurre un solo nitrogruppo. L'introduzione del solfuro era regolata in modo che la temperatura non superasse mai, durante tutto il processo, i 60°. A riduzione finita si distillava l'alcool, e si versava il residuo in molt'acqua (10 litri d'acqua per gr. 500 di tritolo). Il precipitato rimasto indisciolto veniva raccolto su filtro, lavato e cristallizzato da acido cloridrico diluito bollente, affine di separare la dinitrotoluidina dal solfo. Per neutralizzazione della soluzione cloridrica con ammoniaca precipita la toluidina cercata, la quale, ricristallizzata da alcool bollente, fonde a 173°. Evaporando la soluzione acquosa, dalla quale si è separato il prodotto greggio, si ottiene un secondo prodotto, accessorio, che è la nitrotoluilendiamina  $C_6H_2 \cdot NO_2 \cdot NH_2 \cdot NH_2 \cdot CH_3$ , la quale si purifica assai facilmente con ulteriori cristallizzazioni dall'acqua ».

Le proprietà morfologiche e fisiche della dinitrotoluidina così ottenuta variano considerevolmente, come già il prof. Körner aveva potuto notare, secondo le condizioni nelle quali essa vien fatta cristallizzare. Lo studio lungo e accurato che ebbi modo di farne, facilitato grandemente dalla cospicua quantità di sostanza messa gentilmente a mia disposizione dallo stesso prof. Körner, mi permise di riconoscere per questa sostanza ben quattro diverse fasi cristalline; tre di queste ( $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ) che più o meno facilmente



si ottengono e si conservano alla temperatura ordinaria, furono da me studiate morfologicamente e fisicamente; mentre questo non mi è riuscito con la quarta ( $\alpha$ ), ch'è quella che si ottiene per fusione, ed è stabile solo fra 148° e 173° C.

Esporrò prima i risultati delle osservazioni fatte sopra ognuna delle fasi, o modificazioni, prese singolarmente; dirò poi della relativa stabilità e delle trasformazioni dell'una nell'altra.

**FASE  $\delta$ .** — Si ottiene facilmente per evaporazione lenta di una soluzione satura a freddo in miscela di etere ed alcool.

*Sistema rombico (cl. bipyramidale?).*

$$a:b = 0.7935:1.$$

Forme osservate:

$$\{010\}, \{001\}, \{110\}.$$

I cristalli sono prismatici, per lo più sensibilmente allungati, fino ad essere aghiformi, secondo la direzione dell'asse verticale. Alle estremità sono terminati soltanto da una faccetta di base, per modo che non fu possibile determinare il valore del parametro fondamentale sull'asse  $z$ .

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(110). (1 $\bar{1}$ 0)	10	76.42' - 77.9'	76.52'	*
(110). (1 $\bar{1}$ 0)	2	102.53 - 103.6	102.59 1/2	103.8'
(010). (110)	17	51.12 - 52.1	51.36	51.34
(110). (001)	4	89.48 - 90.10	89.58 1/2	90.

Sfaldatura facilissima e perfetta secondo  $\{001\}$ .

La bisettrice dell'angolo acuto degli assi ottici, negativa, coincide, per tutti i colori, con l'asse  $z$ ; ma il piano degli A. O. per la luce rossa è incrociato con quello per la luce azzurra; e precisamente:

per la luce di Li il P. A. O. è  $\{010\}$ ; l'angolo degli A. O. nell'aria è piuttosto piccolo;

per la luce di Na il P. A. O. è  $\{100\}$ ; l'angolo degli A. O. è piccolissimo;

per la luce di Tl il P. A. O. è ancora  $\{100\}$ ; l'angolo degli A. O. è abbastanza grande.

La sostanza appare dunque uniassica per un colore giallo aranciato.

La birifrazione è fortissima. Il valore di  $\alpha$  per la luce di Na è di poco superiore all'indice di rifrazione dell'olio di vaselina, ( $n = 1.476$ ). Il colore d'insieme della sostanza, a luce riflessa, quando sia perfettamente pura, è un bellissimo giallo citrino.

Il pleocroismo è abbastanza sentito: all'asse  $y$  corrisponde il massimo assorbimento (giallo di orpimento, carico); minore è l'assorbimento per le direzioni degli altri due assi ( $x = z =$  giallo citrino chiaro, leggermente traente al verdolino).

P. sp. = 1.524 (media di due determinazioni fatte con la soluzione di Klein: I<sup>a</sup>. p. sp. = 1.523; II<sup>a</sup>. p. sp. = 1.525).

FASE  $\gamma$ . — Si ottiene con tutta facilità per evaporazione da soluzioni sature a freddo in etere acetico o acetone, puri o misti con alcool.

*Sistema triclino, cl. pinacoidale:*

$$a:b:c = 0.8389:1:2.1764$$

A = 86°.33 1/2'	$\alpha = 93°.26'$
B = 91 .2	$\beta = 89 .00$
C = 90 .30 1/2'	$\gamma = 89 .33$

Forme osservate:

$$\{001\}, \{111\}, \{11\bar{3}\}, \{1\bar{1}1\}, \{1\bar{1}3\}, \{1\bar{1}5\}, \{\bar{1}11\}, \{\bar{1}\bar{1}1\}, \{\bar{1}\bar{1}3\}.$$

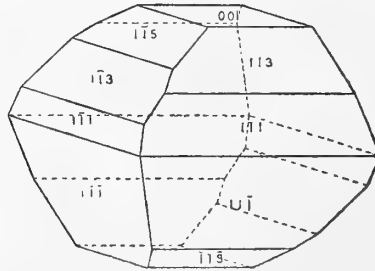


FIG. 1.

L'abito è vario: talora i cristalli sono tozzi, del tipo rappresentato nella fig. 1; altre volte sono invece marcatamente allungati secondo lo spigolo  $[11\bar{1}.1\bar{1}\bar{1}]$ .

Le facce della base sono ordinariamente nitidissime; quelle delle altre forme, pure di solito assai brillanti, sono sempre striate, e le immagini che esse riflettono al goniometro quasi costantemente multiple, per la frequenza di facce vicinali; così che la scelta è spesso difficile e incerta. A questo è dovuta la discordanza, abbastanza sensibile, tra le misure delle forme scelte come fondamentali, e quelle delle altre, a simbolo più complicato.

Abbastanza frequente, specie nei cristalli allungati, e in modo particolare nei meno perfetti, è la geminazione secondo (010); per lo più si tratta di geminazione polisintetica, a lamelle alterne, come fedelmente mostra la fig. 2; caratteristico l'angolo, di circa 7°, tra le basi dei due individui. Il piano di contatto è lo stesso piano di geminazione, come mostra la figura, e come si rileva dalla osservazione microscopica delle lamelle basali.

Facili sono ad ottenersi deformazioni omogenee per azioni meccaniche: nelle lamine basali geminate, per dolce compressione del polpastrello di un dito contro ad un portaoggetti, si riesce p. es. spesso a far scomparire la geminazione, ottenendo una lamina perfettamente omogenea.

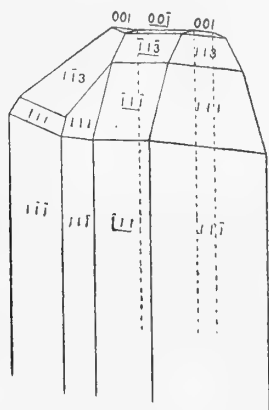


FIG. 2.

Nei cristalli imperfetti, scheletriformi, tabulari secondo la base, che si ottengono per raffreddamento rapido da soluzioni in alcool bollente, si nota invece spesso un altro modo di geminazione, che mi sembra stare al precedente come la legge del periclino sta a quella dell'albite nei plagioclasti: le basi coincidono; il piano di contatto è obliquo alla base, e parallelo alla diagonale lunga ( $y$ ) delle lamine basali: il numero delle lamelle di geminazione è variabilissimo, spesso anche molto grande. Vedremo poi, più avanti, come simile geminazione polisintetica si possa ottenere anche artificialmente.

Anche per gli angoli di geminazione secondo (010) si nota una discrepanza sentita e sistematica tra misura e calcolo, come risulta dagli ultimi valori esposti nella tabella.

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(111). (001)	6	71.58' - 72.18'	72.9'	*
(111). (001)	7	75.37 - 76.48	76.22	*
(111). (001)	6	70.45 - 71.4	70.52	*
(111). (001)	7	73.50 - 75.28	74.47	*
(111). (111)	6	76.14 - 76.42	76.31	*
(111). (111)	4	93.6 - 93.15	93.10	93.12 1/2'
(111). (111)	5	95.36 - 95.51	95.44	95.49
(111). (111)	6	75.40 - 75.56	75.46	75.50 1/2
(113). (001)	5	48.1 - 48.14	48.6	47.30 1/2
(113). (001)	9	49.48 - 51.3	50.37	50.14
(113). (001)	6	49.40 - 49.53	49.46	49.6
(113). (113)	5	58.21 - 58.43	58.34	57.57
(113). (113)	4	72.5 - 72.20	72.11	71.29
(115). (001)	3	35.32 - 35.55	35.46	35.7 1/2
(001). (001)	3	7.21 - 7.35	7.28	6.53
(111). (111)	3	1.36 - 1.50	1.44	0.57
(113). (113)	1	—	4.23	3.31

Sfaldatura facilissima e perfetta secondo {001}.

Le bisettrici acute, negative, del piano degli assi ottici sono quasi normali alla base; i piani degli A. O. per i diversi colori, abbastanza sensibilmente dispersi, non sono molto inclinati (meno per la luce azzurra, più per la rossa) sul piano di (100). Anche otticamente, dunque, questa fase è distintamente pseudorombica, così come è morfologicamente. La direzione di estinzione negativa sulla (001) fa con l'asse  $x$  gli angoli seguenti:

8° per la luce azzurra  
 11° " " gialla  
 16° " " rossa.

Sulle lamine che mostrano la geminazione secondo (010) la inclinazione tra le estinzioni negative dei due individui è, naturalmente, di 16° per la luce azzurra, 22° per la gialla, 32° per la rossa. Questa forte dispersione, la quale fa sì che a luce bianca le lamine di sfaldatura basale non appaiano mai estinte per tutti i colori, permette di riconoscere tosto una laminetta di questa modificazione triclinica da una, pur tanto simile per tutto il resto, della modificazione rombica rossa ( $\beta$ ), della quale sarà detto più avanti. La dispersione asimmetrica è del resto nettamente riconoscibile anche nella figura di interferenza a luce bianca.

L'angolo tra gli assi ottici è piccolo; la dispersione degli assi è forte:  $\rho < \nu$ . In una limpida laminetta di sfaldatura basale misurai:

$$\begin{aligned} 2E_a &= 36^\circ.30' \text{ (luce rossa)} \\ &45.1 \text{ ( " gialla)} \\ &53.10 \text{ ( " azzurra).} \end{aligned}$$

Il colore d'insieme a luce riflessa è per questa fase un bellissimo giallo arancione vivo. Sulla base il pleocroismo è assai evidente: all'estinzione negativa (diagonale corta, all'incirca, della sezione romba basale) corrisponde una tinta aranciata piuttosto chiara; alla positiva (diagonale lunga) un rosso arancione molto più carico.

$$\begin{aligned} P. \text{ sp.} &= 1.497 \text{ (}^1\text{)} \\ P. \text{ M.} &= 197.086 \\ V. &= 131.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi &= 3.4940 \\ \psi &= 4.1650 \\ \omega &= 9.0648. \end{aligned}$$

FASE  $\beta$ . — Si forma spesso, insieme con la  $\gamma$ , da soluzioni in etere acetico o in acetone, alla temperatura ordinaria; si ottiene pure mediante lentissimo raffreddamento di soluzione alcoolica bollente.

*Sistema rombico, cl. bipyramidale:*

$$a:b:c = 0.8557:1:1.1119.$$

Forme osservate:

$$\{001\}, \{110\}, \{111\}, \{112\}; \text{ incerta: } \{441\}.$$

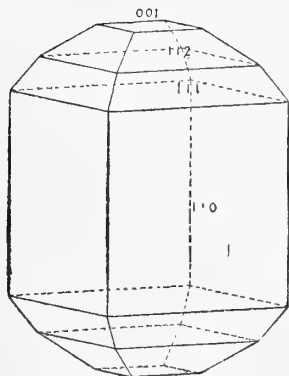


FIG. 3.

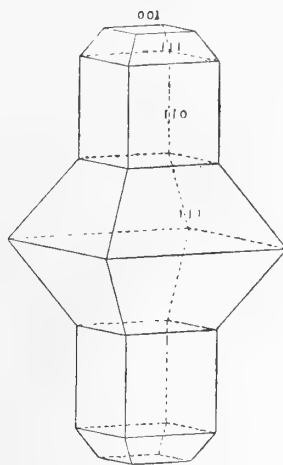


FIG. 4.

Vario è lo sviluppo delle diverse forme; l'abito più comune è quello rappresentato dalla fig. 3; la  $\{112\}$  però manca spesso completamente. Fre-

(<sup>1</sup>) Media di due determinazioni fatte con la soluzione di Klein su limpidissimi cristallini: I. p. sp. = 1.496; II. p. sp. = 1.498.

quenti anche i concrescimenti paralleli di individui di vario tipo, come p. es. quello della fig. 4, dove si vede un cristallo a tipo bipyramidato continuarsi alle due estremità dell'asse verticale in due più sottili individui prismatici.

Le facce della base e delle bipyramidi sono ordinariamente abbastanza nitide e piane: quelle del prisma verticale invece presentano spesso una forte poliedria, e sono striate orizzontalmente, o profondamente rigate per combinazione alternante con  $\{111\}$ , per modo che ben di rado si prestano a misure esatte. Assai dubbia è la forma  $\{441\}$ , osservata in un cristallo come smussamento dello spigolo  $[110.111]$ .

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(111). (001)	13	59.29' - 59.50'	59.41'	*
(111). (111)	7	68.12 - 68.26	68.17	*
(111). (111)	5	81.35 - 82.23	81.56	81.59'
(111). (110)	2	30.12 - 30.36	30.24	30.19
(110). (110)	4	80.50 - 81.5	80.57	81.6
(112). (001)	6	40.18 - 41.5	40.35	40.32
(112). (112)	2	49.53 - 49.55	49.54	49.59
(112). (112)	2	59.5 - 59.6	59.5 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	59.11
(441). (001)	1	—	81.7	81.41

Sfaldatura facilissima e perfettissima secondo  $\{001\}$ .

Il piano degli assi ottici è parallelo a  $\{100\}$ . La bisettrice acuta, negativa, è normale a  $\{001\}$ ; il relativo indice di rifrazione  $\alpha$ , confrontato con quello dell'olio di vaselina, ha un valore  $\approx$  di questo, che è 1.476. La birifrazione è fortissima. L'angolo degli assi ottici è piccolo, con forte dispersione:  $\rho < \nu$ . In una bella lamina di sfaldatura basale misurai:

$$\begin{aligned}
 2 E_{\alpha} &= 32^{\circ}.47' \text{ (luce rossa)} \\
 &42.59 \text{ ( " gialla)} \\
 &52.21 \text{ ( " azzurra)}.
 \end{aligned}$$

Il colore d'insieme, a luce riflessa, è per questa fase un bel rosso aurora: cioè un poco più rosso e più carico di quello della fase  $\gamma$ , ma ad esso abbastanza simile perchè ad un osservatore non pratico possa sfuggire la differenza. Il pleocroismo è distinto: secondo gli assi  $x$  e  $z$  (diagonale corta della sezione basale e allungamento prismatico) l'assorbimento è minore, e il colore è un arancio vivo; secondo  $y$  (diagonale lunga) l'assorbimento è più forte, con una tinta rosso-aurora intensa. In lamine basali molto sottili

i due colori sono, naturalmente, più chiari, e cioè, rispettivamente, giallo chiaro e aranciato vivo.

$$P. \text{ sp.} = 1.495 \text{ (}^1\text{)}$$

$$P. \text{ M.} = 197.086$$

$$V. = 131.83$$

$$\chi = 4.4279$$

$$\psi = 5.1747$$

$$\omega = 5.7535 .$$

#### RELAZIONI MORFOLOGICHE E FISICHE TRA LA FASE $\gamma$ E LA $\beta$ .

La rassomiglianza di aspetto delle due fasi non è soltanto esterna, ma ha le sue basi in profonde analogie morfologiche e fisiche. Anzitutto la fase  $\gamma$  triclina è evidentissimamente pseudorombica; se poi in essa si divide per 2 il parametro fondamentale sull'asse  $z$ , il rapporto parametrico diventa:

$$a:b:c = 0.8389:1:1.0882$$

e gli assi topici:

$$\chi = 4.4022 \quad ; \quad \psi = 5.2476 \quad ; \quad \omega = 5.7105 ;$$

valori molto vicini agli omologhi della fase  $\beta$  rombica, che riporto qui per confronto:

$$a:b:c = 0.8557:1:1.1119$$

$$\chi = 4.4279 \quad ; \quad \psi = 5.1747 \quad ; \quad \omega = 5.7535 .$$

Quanto ai simboli delle forme, per accordare le due fasi è forse meglio, inversamente, moltiplicare per due il parametro fondamentale sull'asse  $z$  della modificazione rombica; allora vediamo che nell'una ( $\gamma$ ) la serie di complicazione è  $\{111\} - \{113\} - \{115\}$ , mentre nell'altra ( $\beta$ ) è  $\{112\} - \{114\}$ . Questa è la causa dell'apparente mancanza di analogie angolari tra le due.

Notevolissima è poi la presenza in entrambe di una perfetta e facilissima sfaldatura basale, e la grandissima rassomiglianza nelle proprietà ottiche: salva la sensibile dispersione dei piani degli assi ottici nella triclina, per tutto il resto che tocca alla orientazione ottica, al valore dell'angolo degli assi ottici, alla dispersione di questi e al pleocroismo, le due fasi non potrebbero presentare più distinte e più chiare analogie. Anche il p. sp. è quasi identico, essendo appena percettibile la differenza in meno per la fase stabile a più alta temperatura.

Altra prova delle relazioni che corrono tra le due modificazioni, malgrado il diverso grado di simmetria, si può trovare nelle frequenti associa-

(<sup>1</sup>) Due determinazioni, in soluzione di Klein, con risultati identici.

zioni regolari di cristalli dell'una su cristalli dell'altra. La norma di queste associazioni è semplicissima: i due cristalli hanno in comune la base, e approssimativamente paralleli i due assi  $x$  e  $y$ ; dico approssimativamente perchè mentre  $x \wedge y = 90^\circ$  nella  $\beta$ , è  $= 89^\circ.33'$  nella  $\gamma$ . Anche il contorno rombico delle due basi è quasi isogono: si ha infatti  $[111.001] \wedge [\bar{1}\bar{1}\bar{1}.001] = 81^\circ.6'$  nella rombica e  $= 79^\circ.59'$  nella triclina. Talune volte i due cristalli sono entrambi allungati; l'uno, il rombico, secondo il prisma verticale; l'altro, il triclino, secondo  $[\bar{1}11.\bar{1}\bar{1}1]$ , come si vede nella fig. 5, nella quale l'individuo inferiore è rombico ( $\beta$ ) e il superiore è triclino ( $\gamma$ ). La precisione di questa associazione, senza essere grandissima, è tuttavia sufficiente, come risulta dai seguenti angoli (i simboli sottolineati sono quelli spettanti alle facce del cristallo triclino):

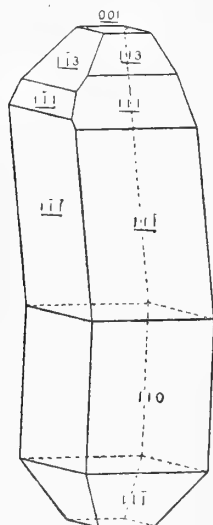


FIG. 5.

Spig. mis.	Ang. osserv.	Ang. calcol.
$(110) . (\underline{11\bar{1}})$	$15^\circ.3'$	$15^\circ.13'$
$(11\bar{1}) . (\underline{11\bar{1}})$	16.13	15.6
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}) . (\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}})$	49.32	49.27
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}) . (\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}})$	44.57	45.32

Nelle soluzioni in etere acetico e acetone capita non di rado che in un primo tempo si formino dei grossi cristalli della fase  $\beta$ , con abito bipiramidato; su questi poi, in un secondo tempo, crescono, in associazione regolare come sopra fu detto, vari sottili individui della fase  $\gamma$ , il cui allungamento è evidentemente obliquo rispetto all'asse verticale dell'individuo-sostegno. La differenza nella intensità del colore tra le due modificazioni è così poco accentuata, che ci vuole una certa attenzione per notare che questi « geminati » sono in realtà associazioni di due diverse fasi cristalline.

**Batteriologia.** — *Ricerche batteriologiche sulle psicosi pel-lagrose.* Memoria del Socio G. TIZZONI.

**Fisiologia.** — *Sul ricambio dei muscoli nelle diverse condizioni meccaniche delle loro contrazioni.* Memoria del Corrisp. G. GALEOTTI.

I due precedenti lavori saranno pubblicati nei volumi delle *Memorie*.



**Matematica.** — *Solution d'un problème remarquable relatif à la nouvelle Table de diviseurs des nombres.* Nota di ERNESTO LEBON, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Soient

$$B = 30\,030 \quad \text{et} \quad B^2 = 901\,800\,900$$

la base adoptée et la limite des nombres dont la *nouvelle Table* donne la composition.

Lorsque l'on divise par  $B$  un nombre  $N$  premier avec  $B$ , on obtient un quotient par défaut  $\alpha$ , appelé *caractéristique*, et un reste par défaut  $I$ , appelé *indicateur*, de sorte que

$$(1) \quad N = B\alpha + I, \quad \text{ou} \quad N = (\alpha; I)$$

en prenant  $B$  pour base du système de numération.

Si l'on prend le quotient par excès, on a

$$(2) \quad N = B\alpha_e - I, \quad \text{ou} \quad N = (\alpha_e; -I).$$

L'ancienne Table devait renfermer 5760 Tableaux désignés chacun par son indicateur, les caractéristiques, dans chaque Tableau  $I$ , allant de  $B$  à  $B^2 - 1$ .

La *nouvelle Table* <sup>(1)</sup> comprend

1° le Tableau des indicateurs, avec les facteurs premiers des indicateurs composés;

2° le Tableau des produits

$$(3) \quad II' = Bk + 1 \quad \text{ou} \quad II' = k; 1 \quad \text{ou} \quad II' \equiv 1 \pmod{B}$$

de deux indicateurs, la caractéristique  $k$  étant par défaut;

3° le Tableau 1, dont la première partie renferme les caractéristiques par défaut des nombres composés allant de 1 à  $B - 1$ , dont la seconde partie renferme des caractéristiques par défaut allant de  $B$  à  $B^2 - 1$ , chaque caractéristique étant suivie des facteurs premiers des nombres ayant cette caractéristique;

(<sup>1</sup>) Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. 159, 5 octobre 1914; t. 160, 14 juin 1915; t. 162, 6 mars 1916; t. 163, 11 septembre 1916; t. 164, 19 mars 1917.

4° la première partie du Tableau — 1 qui renferme les caractéristiques par excès des nombres composés allant de 2 à B.

2. Soit d'abord le nombre  $(\alpha; I)$ .

On cherche le plus grand diviseur commun  $\mathcal{A}$  à I et à  $\alpha$ .

Si  $\mathcal{A} > 1$ , on divise par  $\mathcal{A}$  le nombre  $(\alpha; I)$  et on obtient ainsi le nouveau nombre  $\delta; I_\delta$ .

Quand  $I_\delta = 1$ , le Tableau 1 fait connaître si le nombre  $\delta; I_\delta$  est composé et permet de trouver ses facteurs premiers.

Quand  $I_\delta \neq 1$ , on est conduit à chercher la composition d'un nombre pour lequel  $\delta$  et  $I_\delta$  sont premiers entre eux; on est donc amené à se servir d'un autre Tableau  $I_\delta$ .

Ensuite on écrit

$$N = (\alpha_e; -I_e), \quad \text{où } \alpha_e = \alpha + 1 \quad \text{et } I_e = B - I$$

et l'on opère comme précédemment.

3. MÉTHODE. — 1°. On amène dans le Tableau 1 un nombre  $(\alpha; I)$ ,  $\alpha$  et I étant premiers entre eux, en multipliant les deux membres de l'égalité (1) par un indicateur I' tel que l'égalité (3) soit satisfaite:

*La caractéristique par défaut du nombre NI', substitué à N est*

$$(4) \quad \chi = I\alpha + k.$$

2°. On amène de même dans le Tableau — 1 un nombre  $(\alpha_e; -I)$ ,  $\alpha_e$  et I étant premiers entre eux.

*La caractéristique par excès du nombre NI', substitué à N est*

$$(5) \quad \chi_e = I' \alpha_e - k.$$

3°. On amène dans le Tableau 1 le nombre  $(\alpha_e; -I)$  en multipliant par  $(B - I')$  les deux membres de l'égalité (2).

*La caractéristique par défaut du nombre N (B - I'), substitué à N est*

$$(6) \quad \chi = (B - I') \alpha_e + k - I.$$

Evidemment, les caractéristiques  $\chi$  et  $\chi_e$  sont  $< B^2$ .

4. PROBLÈME. — *Ayant une caractéristique  $\chi$  ou  $\chi_e$ , reconnaître à quelles conditions elle est la caractéristique d'un nombre qui soit le produit de deux nombres appartenant*

1° tous deux au Tableau 1,

2° tous deux au Tableau — 1,

3° l'un au Tableau 1 et l'autre au Tableau — 1,

*les caractéristiques dans ces deux Tableaux étant inférieures à B.*

Les solutions de ce problème sont très remarquables, car elles permettent d'obtenir seulement avec les premières parties du Tableau 1 et du Tableau — 1, la composition de beaucoup de nombres dont les caractéristiques ont été obtenues par la MÉTHODE (n° 3).

Ces solutions pourront servir tant que l'on ne possédera que ces premières parties.

Les solutions du 1° et du 2° de ce problème se trouvant dans les « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences » (t. 162, 6 mars 1916; t. 164, 19 mars 1917), ce travail contient seulement la solution du 3°.

5. SOLUTION DU 3° (n° 4). — Soient deux nombres  $(\varepsilon; 1)$  et  $(\varepsilon_e; -1)$  appartenant respectivement au Tableau 1 et au Tableau — 1.

Le produit de ces deux nombres est dans le Tableau — 1 et il a pour caractéristique

$$(7) \quad K\varepsilon\varepsilon_e = B\varepsilon\varepsilon_e - \varepsilon + \varepsilon_e.$$

Supposons que le produit  $\varepsilon\varepsilon_e$  soit  $< B$ .

$\chi_e$  désignant une caractéristique  $< B^2$  d'un nombre du Tableau — 1, soient  $q$  le quotient par défaut  $< B$  et  $r$  le reste obtenus en divisant  $K_e$  par  $B$ . On a

$$(8) \quad \chi_e = Bq + r.$$

Deux cas se présentent pour le second membre de l'égalité (7), savoir :

$$-\varepsilon + \varepsilon_e > 0 \quad \text{et} \quad -\varepsilon + \varepsilon_e < 0.$$

6. PREMIER CAS DE LA SOLUTION DU 3° (n° 4). — Dans le second membre de l'égalité (7), le terme  $(-\varepsilon + \varepsilon_e)$  est positif.

Identifiant les égalités (7) et (8), on obtient les deux équations

$$(9) \quad \varepsilon\varepsilon_e = q, \quad \varepsilon_e - \varepsilon = r.$$

Les valeurs des inconnues  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_e$  résultent d'une équation du second degré; comme elles doivent être entières et positives, il faut que le discriminant soit un carré entier positif.

Sans résoudre l'équation du second degré, on trouve ainsi les valeurs de  $\varepsilon_e$  et de  $\varepsilon$ . Il est facile de décomposer, de toutes les manières possibles,  $q$  en groupes de deux facteurs entiers positifs. Si la différence de deux facteurs d'un groupe est égal à  $r$ , ces deux facteurs sont les valeurs de  $\varepsilon_e$  et de  $\varepsilon$ . Le facteur  $\varepsilon$  se prend dans le Tableau 1 et le facteur  $\varepsilon_e$  se prend dans le Tableau — 1.

7. Exemple. — Soit

$$\begin{aligned} N &= 624\ 677\ 381 \\ &= 20801 ; 23351 \\ &= 20802 ; -6679 \end{aligned}$$

N est amené à NI' dans le Tableau — 1. On trouve

$$I' = 589 = 19.31, \quad k = 131.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \chi_e &= 589.20802 - 131 \\ &= 12\ 252\ 247. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} q &= 408, & r &= 7 \\ 408 &= 17.24, & 24 - 17 &= 7 \\ \varepsilon_e &= 24, & s &= 17 \\ 24; -1 &= 31.67.347, & 17; 1 &= 19.97.277. \end{aligned}$$

Comme  $I' = 19.31$ , on trouve que

$$N = 67.97.277.347.$$

8. A la valeur

$$\chi_e = 12\ 252\ 247$$

conduisent aussi les nombres suivants, dont les indicateurs sont négatifs et, en valeur absolue,  $< \frac{1}{2}B$  pour les trois premiers et  $> \frac{1}{2}B$  pour les trois derniers :

42 847 907	( $I' = 1427, k = 1402$ );
122 359 487	( $I' = 3007, k = 1278$ );
289 029 833	( $I' = 1273, k = 378$ );
19 825 151	( $I' = 18559, k = 15252$ );
55 806 913	( $I' = 6593, k = 4140$ );
56 614 091	( $I' = 6499, k = 4867$ ).

9. SECOND CAS DE LA SOLUTION DU 3<sup>o</sup> (n<sup>o</sup> 4). — Dans le second membre de l'égalité (7), le terme  $(-s + \varepsilon_e)$  est négatif. On écrit ainsi l'égalité (8)

$$(10) \quad \chi_e = B(q + 1) - (B - r).$$

Identifiant les égalités (7) et (10) on obtient les deux équations

$$(11) \quad \varepsilon\varepsilon_e = q + 1, \quad \varepsilon - \varepsilon_e = B - r.$$

Sans résoudre l'équation du second degré d'où résulteraient les valeurs de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_e$ , on arrive facilement, comme dans le premier cas, à les trouver en décomposant  $q + 1$  en deux facteurs  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_e$  dont la différence  $\varepsilon - \varepsilon_e$  égale  $B - r$ . Le facteur  $\varepsilon$  se prend dans le Tableau 1 et le facteur  $\varepsilon_e$  se prend dans le Tableau — 1.

10. *Exemple.* — Soit

$$\begin{aligned} N &= 243\ 173\ 083 \\ &= 8097 ; 20173 \\ &= 8098 ; -9857 . \end{aligned}$$

$N$  est amené en  $NI'$  dans le Tableau — 1. On trouve

$$I' = 27413 = 79.347, \quad k = 8998 .$$

Par suite

$$\begin{aligned} \chi_e &= 27413.8098 - 8998 \\ &= 221\ 981\ 476 . \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} q + 1 &= 7392, & B - r &= 284 \\ 7392 &= 24.308, & 284 &= 308 - 24 \\ \varepsilon &= 308, & \varepsilon_a &= 24 \\ 308 ; 1 &= 17.71.79.97, & 24 ; -1 &= 31.67.347 . \end{aligned}$$

Comme  $I' = 79.347$ , on trouve que

$$N = 17.31.67.71.97 .$$

11. J'indiquerai ultérieurement comment la solution précédente du problème du n° 4 peut être étendue au cas où le produit de deux caractéristiques des Tableaux 1 et — 1 varie de  $B$  à  $B^2$ .

*Matematica.* — *Un'applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali.* Nota di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Rettifiche e considerazioni sulla velocità del terremoto del 13 gennaio 1915.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Dopo due mie Note <sup>(1)</sup> intorno a questo memorando terremoto, n'è stata pubblicata un'altra sullo stesso argomento dal chmo prof. G. Grablovitz <sup>(2)</sup> il quale, pur non avendo potuto conoscere la 2<sup>a</sup> delle mie predette pubblicazioni, discute alcuni dati orari, ne aggiunge altri pochi, difende l'ora d'Ischia contro il dubbio da me sollevato circa la sua attendibilità e poi dichiara poco corretto il procedimento da me adottato pel calcolo della velocità. Ora che è avvenuta la pubblicazione dei bollettini sismici di numerosi altri Osservatori, ed è quindi reso possibile uno studio meno incompleto sulla propagazione delle onde sismiche, è innanzi tutto vantaggioso l'esame di quei dati pei quali v'è discordanza o rettifica, e infine utile un po' di discussione sulla fondatezza o meno della critica del mio collega.

Per SIENA (Osservanza) l'A. riporta un'ora (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 52<sup>s</sup>) <sup>(3)</sup> notevolmente diversa da quella (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 0<sup>s</sup>) a me comunicata. Da spiegazioni chieste a quell'Osservatorio risulta che l'ora fu, in seguito, rettificata in 7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 12<sup>s</sup>, e tale fu comunicata all'A. il quale forse lesse 52<sup>s</sup> invece di 12<sup>s</sup>. Dal sismogramma originale, inviatomi cortesemente, io ho dedotta come più probabile l'ora: 7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 7<sup>s</sup>; ma dal complesso delle spiegazioni ricevute, appare poco attendibile questo dato orario.

In un supplemento alla sua Nota, l'A. riporta per CATANIA, attingendola dal Boll. sismico di quell'Osservatorio, un'ora (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 55<sup>s</sup>) abbastanza discorde da quella (7<sup>h</sup> 54<sup>m</sup> 18<sup>s</sup>) che era stata a me comunicata. Da spiegazioni chieste all'Osservatorio, risulta che l'ora da me pubblicata era espressa in t. l. anzichè in quello dell'E. C. e che era stato dimenticato di prevenirmene.

L'A. assegna a BOLOGNA l'ora: 7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 35<sup>s</sup>. Io non avevo creduto di utilizzare il dato orario di questa città, sapendo che ivi era in funzione soltanto un sismoscopio. Questa circostanza m'è stata confermata da quell'Osservatorio il quale ha aggiunto che il sismoscopio arrestò l'apposito orologio a 7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 45<sup>s</sup> e che al riguardo non venne mai fatta comunicazione

<sup>(1)</sup> *Il recente terremoto nella Marsica e gli strumenti sismici* (Rend. d. R. Accad. dei Lincei, seduta del 7 febbraio 1915); *Velocità di propagazione del terremoto Marsicano del 13 gennaio 1915* (ivi, seduta del 7 marzo 1915).

<sup>(2)</sup> *Sul terremoto del 13 gennaio 1915* (ivi, seduta del 21 marzo 1915).

<sup>(3)</sup> Nella tabella del Grablovitz sono stati scambiati fra di loro i dati orari dei due Osservatori di Siena.

alcuna all'A. Nell'ipotesi che l'ora alquanto differente da lui riportata, provenisse dal vicino Osservatorio di *S. Luca*, mi sono rivolto a quest'ultimo, ma l'ora che mi è stata comunicata è assai diversa da quella del Grablovitz.

Non volli neppure utilizzare l'ora di FERRARA ( $7^h 53^m 30^s$ ), anzitutto perchè fu data da soli sismoscopi (come a Bologna) e poi perchè incerta per  $\pm 30^s$ , a causa della mancanza d'un esatto tempo campione.

Similmente non presi in considerazione l'ora di SALÒ ( $7^h 53^m$ ) quale fu comunicata all'Ufficio Centr. di Met. e Geod. e poi stampata nell'apposito Bollettino. Dal vedere però che l'A. ha riportata per Salò un'ora diversa ( $7^h 53^m 20^s$ ), mi sono rivolto a quell'Osservatorio, il quale mi ha riconfermata la primitiva ora, incerta però fino a  $\pm 60^s$ , pel fatto d'essere basata sul tempo del locale Ufficio Telegrafico!

A proposito dell'ora di GRANATA ( $7^h 55^m 44^s$ ) che figura nella mia 1<sup>a</sup> Nota e che era scritta sopra una copia del sismogramma di quell'Osservatorio, l'A. la trova troppo in anticipo in confronto d'altre località meno lontane dall'epicentro e dice che è un chiaro indizio dell'aumento della velocità con la distanza. Questo apprezzamento verrebbe completamente a mancare, dopo la spontanea rettifica di quell'Osservatorio. L'ora corretta ( $7^h 56^m 3^s$ ) fu pubblicata nella mia 2<sup>a</sup> Nota, ma non conosciuta in tempo dall'A. Nel Bollettino sismico di Granata figura un'ora quasi identica ( $7^h 56^m 2^s$ ) che certamente rappresenta la definitiva.

E così pure nei Bollettini sismici di PADOVA e MONCALIERI si trovano le ore rispettive:  $7^h 53^m 41^s$  e  $7^h 54^m 7^s$  invece delle altre  $7^h 53^m 39^s$  e  $7^h 54^m 6^s$  che a me furono comunicate e che in seguito furono ritenute suscettibili di sì lieve modificazione.

L'A. riporta per ROMA  $7^h 52^m 54^s$  invece dell'ora definitiva ( $7^h 52^m 53^s$ ) che figura nella mia 2<sup>a</sup> Nota (1).

A TARANTO egli assegna due ore assai diverse: l'una ( $7^h 53^m 11^s$ ) del sismografo « Wiechert », l'altra ( $7^h 53^m 32^s$ ) del microsismografo « Vicentini ». Per la 1<sup>a</sup> dev'esservi qualche equivoco, poichè nella comunicazione all'Ufficio Centr. di Met. e Geod. risulta  $7^h 53^m 31^s$  proprio per il Wiechert, ora che mi fu confermata e che io presi in considerazione.

E vengo all'ora d'ISCHIA che fin dalla mia 1<sup>a</sup> Nota ho ritenuta un po' anomala in confronto di altri Osservatori. L'A. assicura di non doversi temere errore apprezzabile nel tempo campione, basato sopra un'esatta linea meridiana, ed io voglio crederlo; ma una lunga esperienza m'insegua che tante altre cause di errore possono insidiare la precisione dei dati orari,

(1) Colgo l'occasione per riferire che anche alla *Specola Vaticana* si formò, per effetto della scossa, il pendolo a t. m. dell'E. C. e precisamente a  $7^h 53^m 29^s$ , cioè pochi secondi dopo l'arresto dei due orologi a pendolo della Specola del Collegio Romano, ai quali accennai nella mia 1<sup>a</sup> Nota.

anche all'insaputa d'un attento osservatore, e tra le medesime in modo speciale quelle dipendenti dagli strumenti adoperati, o per la loro insufficiente sensibilità o per l'*agitazione microsismica* che talora maschera l'inizio tenuissimo dei sismogrammi. E se nella mia 1<sup>a</sup> Nota ho emesso il dubbio che le ore d'Ischia e di Valle di P. potessero essere alquanto in ritardo, confesso d'averlo fatto in seguito ad altre considerazioni, esposte nella mia 2<sup>a</sup> Nota, che il mio egregio Collega non poteva aver letta quando egli scrisse la sua. E questo dubbio s'è in me vieppiù rafforzato dopo che nella Nota dell'A. ho conosciuta l'ora di NAPOLI (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 7<sup>s</sup>) (1) in anticipo di ben 5 secondi su quella d'Ischia (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 12<sup>s</sup>). Da informazioni assunte recentemente, è risultato che l'ora di Napoli fu determinata nel privato Istituto vulcanologico del sig. J. Friedländer, dove funzionava un sismografo « Mainka » a pendoli orizzontali (Kg. 130) ed un sismografo « Wiechert » (Kg. 80) per la comp. vert. Per il fatto che il tempo era registrato, ogni 1/2 minuto, direttamente sulle zone da un buon pendolo, confrontato giornalmente con l'Osservatorio Astron. di Capodimonte, e di più la velocità delle zone era di ben 14<sup>mm</sup> al minuto, non si può a meno dall'accordare una grande fiducia all'ora di Napoli. È vero che questa città si trova 4-5 Km. più vicina all'epicentro per rispetto ad Ischia; ma, data l'alta velocità delle onde sismiche iniziali, questa tenue differenza di percorso non basta a spiegare la differenza di 5 secondi! Il disaccordo tra Napoli ed Ischia è anche più sintomatico nel vedere che il terremoto sarebbe giunto ad Ischia un paio di secondi più tardi che a Valle di P., sebbene quest'ultima località si trovasse 16 Km. più lontana. Ma v'ha di più, ed è che il direttore dell'Osservatorio di Valle di P. esprime persino il dubbio che l'ora da lui determinata possa essere in ritardo d'un paio di secondi (2). Se ciò fosse, l'ora corretta di Valle di Pompei (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 8<sup>s</sup>) s'accorderebbe benissimo con quella di Napoli (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 7<sup>s</sup>) e anticiperebbe di ben 4 secondi in confronto d'Ischia (7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 12<sup>s</sup>), pur trovandosi Valle di P. di ben 16 Km. più lontana dall'epicentro! Le differenze sono realmente di pochi secondi, ma assurgono a grande importanza per l'enorme velocità delle onde iniziali; ad ogni modo non sono compatibili con la precisione fino a  $\pm 1^s$  almeno, che si presume per ogni Osservatorio.

(1) L'ora comunicata al giornale di Napoli « Il Mattino » fu veramente 7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 15<sup>s</sup>; ma, come ho saputo, si trattava d'un'ora provvisoria, letta alla meglio sulle zone dei sismografi, prima che fossero state fissate.

Trovo in una Memoria del prof. G. B. Alfano, citata appresso, che anche all'Oss. di Capodimonte, al pari di Roma, si arrestarono due pendoli astronomici: l'uno a 7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 40<sup>s</sup> e l'altro a 7<sup>h</sup> 53<sup>m</sup> 42<sup>s</sup>, cioè rispettivamente 33 e 35 sec. dopo l'inizio della scossa registrata dai sismografi nella stessa città.

(2) G. B. Alfano, *Studio delle registrazioni sismiche a Valle di Pompei per il terremoto di Avezzano del 13 gennaio 1915* (Atti dell'Acc. Nap. sc.-lett. S. Pietro in V., vol. II, pag. 224).



Non resta dunque che ad invocare per Ischia qualche ignorata causa d'errore, oppure l'influenza stessa degli strumenti, come ho già sopra accennato. A tale proposito mi piace ricordare il fatto, ormai ben accertato solo da chi possiede apparati assai delicati, che in molti sismogrammi l'inizio spiccato della perturbazione è preceduto, per pochi secondi, da lievissime irregolarità che provano essere già il suolo percorso da onde sismiche debolissime, foriere di altre più energiche. Ne segue che ove si disponga di strumenti poco sensibili, puossi perdere la registrazione delle minime onde precorritrici e non aversi che l'inizio brusco delle altre più forti sopraggiungenti.

\*  
\* \*

In quanto al metodo adottato, nelle mie due Note precedenti, per la ricerca della velocità superficiale del terremoto, non ho esitato a prendere come sicuro punto di partenza l'ora media degli Osservatori di M. Cassino (7<sup>h</sup> 52<sup>m</sup> 50<sup>s</sup>), Rocca di Papa (7<sup>h</sup> 52<sup>m</sup> 54<sup>s</sup>) e Roma (7<sup>h</sup> 52<sup>m</sup> 53<sup>s</sup>) relativa alla distanza media d'una settantina di Km. dal presunto epicentro. Data la rara circostanza che assai vicini al medesimo siansi trovati questa volta ben tre Osservatori muniti di buoni strumenti e d'un esatto tempo campione, mi ritenevo autorizzato a credere sufficientemente preciso l'istante in cui le onde sismiche erano giunte ad una piccola e nota distanza dal loro punto di partenza. L'A. teme, invece, che ponendo per base fondamentale di tutto il conteggio la media di tre dati con le incertezze ammesse, equivale a scaricare sulle stazioni contigue gli errori delle prime. Convengo che l'incertezza, sebbene assai piccola, dell'ora media da me presa a base del calcolo, possa sensibilmente influire per le stazioni poco più lontane; ma è appunto per questa ragione che nelle mie due Note precedenti ho ommesso espressamente il calcolo definitivo della velocità per Ischia e Valle di P. Però, questa influenza non si può più rendere molto sensibile per stazioni ancor più lungi dall'epicentro, e quindi possiamo senz'altro procedere alla determinazione per la velocità per ognuna delle varie stazioni e poi giudicare a colpo d'occhio se la propagazione è stata o no uniforme al crescere della distanza, e se qualcuno dei dati orari lasci più o meno a desiderare. Ripeto che l'incertezza per ognuno dei tre dati, presi a fondamento, è di per sè stessa tenuissima e forse anche minore di quella, sebbene non dichiarata, che compete alla maggior parte delle altre stazioni. Oltracciò, non si può neppure temere per i medesimi un errore sistematico, pel fatto che il tempo campione fu ottenuto in M. Cassino in modo esattissimo e affatto indipendente da quello di Roma; ad ogni modo l'incertezza viene ancora a diminuire nel valore medio, poichè, seppure gli errori non si compensano esattamente nella media, l'errore residuo resta diviso per tre (1).

(1) Tenendo conto degli *errori medi* di  $\pm 3^s$  e  $\pm 2^s$  ammessi rispettivamente per

L'A. crede più corretto d'assumere come incognite l'ora epicentrale e la velocità <sup>(1)</sup> e, pur ammettendo la velocità costante, dare ugual peso a tutti i dati attendibili, trattandoli col metodo de' minimi quadrati. Il chiaro mio Collega non può ignorare che assai spesso io ho adottato il metodo da lui accennato, e precisamente in quei casi in cui mancavano i dati orari perfino in prossimità dell'area epicentrale. Anzi, io stesso ho criticato varie volte chi ha assunto come punto di partenza un solo dato orario, tutt'altro che immune da grave incertezza, e per tal fatto è giunto a velocità notevolmente variabili con la distanza. Se dunque questa volta ho adottato altro metodo, gli è perchè ero convinto che avrebbe condotto a risultati più soddisfacenti. Supponiamo il caso ideale che si potesse conoscere l'ora esatta proprio all'epicentro; forse che l'A. penserebbe a ricorrere ai minimi quadrati? Pel terremoto di Messina del 1908 il Rizzo e l'Omori assunsero senz'altro, come ora epicentrale, quella stessa determinata in detta città. Eppure si potrebbe giustamente osservare che se per caso l'ora di Messina fosse errata, tutte le velocità calcolate risentirebbero dell'errore. Nel caso nostro non possiamo, è vero, conoscere proprio l'ora all'epicentro, bensì quella osservata a piccolissima distanza dallo stesso: ma in compenso si tratta di un'ora assai più garantita, in confronto di quella di Messina, pel fatto che rappresenta il risultato di ben tre Osservatori. Pel terremoto Calabro del 1905 lo stesso Rizzo non esitò a bazarsi sulle sole due ore di Messina e Catania, rispettivamente a 84 e 174 Km. dal presunto epicentro, per determinare

---

Rocca di Papa e Roma, per le ragioni già esposte nella mia 1<sup>a</sup> Nota, e volendo anche supporre che l'ora di M. Cassino possa contenere un errore di  $\pm 2^s$ , i pesi dei dati orari di questi tre osservatori sarebbe rispettivamente: 4, 9, 9; e perciò l'ora media, tenendo conto dei pesi, sarebbe appunto:

$$\frac{4 (7^h 52^m 54^s) + 9 (7^h 52^m 53^s) + 9 (7^h 52^m 50^s)}{22} = 7^h 52^m 52^s \text{ c. ,}$$

alla quale spetterebbe un peso = 22 ed un errore medio di neppure  $\pm 1^s \frac{1}{3}$ .

Da ciò si vede come l'ora media, da me presa fin qui a base del calcolo, possa ispirare una sufficiente fiducia la quale crescerebbe ancora se, come non è improbabile, fosse ancor più piccolo l'errore medio attribuito a M. Cassino.

In generale, per un amor proprio fuori di luogo e sempre dannosissimo alla scienza, si è portati ad esagerare la precisione dei dati ricavati nel proprio osservatorio. Da parte mia, credo di peccare nel senso opposto, ed è meglio. Tenuto conto della bontà del tempo campione in Roma, utilizzato eziandio a Rocca di Papa, della concordanza delle ore ricavate dai vari strumenti, e poi della registrazione del tempo sulle zone, di minuto in minuto, per mezzo d'un cronometro di marina, infine della notevole velocità di scorrimento delle stesse zone, forse un altro direttore non avrebbe esitato a ritenere esatte fino a  $\pm 1^s$  le ore di Roma e Rocca di Papa.

(<sup>1</sup>) Veramente, l'incognita *y*, assunta dall'A. non è la velocità, ma l'inverso della stessa.

l'ora epicentrale e poi confrontare con essa quelle osservate alle varie distanze. Ognun vede come il procedimento sia stato assai meno legittimo del nostro: anzitutto perchè l'ora epicentrale era appoggiata a soli due Osservatori, poi perchè questi si trovavano a maggior distanza dall'epicentro, infine perchè la posizione di quest'ultimo era senza paragone più incerta in confronto del terremoto Marsicano (<sup>1</sup>). Infine, il metodo de' minimi quadrati, sia per l'ipotesi che si deve immancabilmente fare sulla propagazione costante o variabile delle onde sismiche, sia per gli errori, anche notevoli, che possono inquinare i dati orari osservati alle varie distanze, potrebbe pur darci un'ora epicentrale assai diversa dalla vera e quindi anche una falsa idea della velocità cercata (<sup>2</sup>).

In una prossima Nota mi riservo di far conoscere il risultato d'uno studio meno incompleto sulla velocità del terremoto Marsicano in base alle ore già note, debitamente rettificata, ed a quelle di molti altri Osservatori, specialmente esteri.

*Fisiologia. — Influenza dell'attenzione su la secrezione dei succhi digerenti.* Nota di B. BRUNACCI, presentata dal Socio LUIGI LUCIANI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(<sup>1</sup>) Ed ugualmente il Rizzo, pel terremoto di Feruzzano del 1907, dedusse l'ora epicentrale dalle sole ore di Messina e Catania, distanti rispettivamente 50 e 107 Km. dal presunto epicentro.

(<sup>2</sup>) E pare che ciò sia avvenuto proprio nel calcolo dell'A., poichè se ci basiamo sulla velocità da lui trovata di m. 8379, s'otterrebbe per il suo epicentro l'ora: 7<sup>h</sup> 52<sup>m</sup> 50<sup>s</sup>, identica a quella stessa di M. Cassino che se ne trova distare per ben 57 Km., e inferiore di soli 3 secondi a quella di Roma, distante 89 Km. Nel 1° caso si avrebbe una velocità infinita, nel 2° caso una velocità di quasi 30000 m. al secondo! E poichè l'ora di Roma presenta un errore probabile di  $\pm 2^s$ , così anche ammettendo il peggior caso, che sia cioè errata di 2<sup>s</sup> in meno, e dovendola perciò rettificare in 7<sup>h</sup> 52<sup>m</sup> 55<sup>s</sup>, si otterrebbe sempre una velocità troppo alta (c. 18000 m.). Ma anche basandosi sull'altra velocità di m. 7875 trovata dall'A. coll'esclusione dell'ora di Granata, si otterrebbe per l'epicentro: 7<sup>h</sup> 52<sup>m</sup> 47<sup>s</sup>, la quale anticipa di soli 3 secondi rispetto a M. Cassino e di 6 rispetto a Roma e condurrebbe perciò alle rispettive velocità di 19000 e c. 15000 m. al secondo. Dunque il risultato dell'A. è in opposizione alla realtà, in quanto che la sua ora epicentrale è, in ogni caso, in disaccordo tanto con quella di Roma, quanto con quella probabilmente più sicura di M. Cassino.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÒRITI dà il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. LUIGI BALBIANO, e commemora con affettuose parole il compianto Collega, di cui ricorda il carattere integro e l'alto valore scientifico; aggiunge che il defunto ha espresso nel suo testamento la ferma volontà di non essere commemorato in alcuno dei sodalizi scientifici ai quali apparteneva.

Lo stesso PRESIDENTE dà comunicazione di una lettera inviata dal Segretario perpetuo dell'Accademia delle scienze di Parigi, colla quale quest'ultima ringrazia per le manifestazioni di cordoglio dell'Accademia dei Lincei in occasione della morte del prof. GASTONE DARBOUX.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalandone alcune inviate dal Corrisp. G. ARCANGELI. Richiama inoltre l'attenzione della Classe sul volume edito a cura della Specola Vaticana: *Aggiunte al Catalogo dell' « Atlas Stellarum variabilium »* del P. J. G. HAGEN; sul *Catalogo stellare; zona 52°-60°*, vol. III, dell'Osservatorio astronomico di la Plata; sulla pubblicazione del Ministero d'Agricoltura: *Carta idrografica d'Italia: il Tanaro*, per E. PERRONE; e sui fascicoli 48 e 49 contenenti i risultati delle Campagne scientifiche del Principe di Monaco, fatte a bordo dell' « Hirondelle » e della « Princesse-Alice ».

Il Segretario MILLOSEVICH presenta, a nome dell'autore, l'opera del prof. ANTONIO BALDACCÌ, intitolata: *Itinerari Albanesi (1892-1902)*. Della grande competenza del Baldacci in riguardo all'Albania nei riflessi etnografici, geografici, corografici e toponomastici discorre il Segretario, accennando alle ragioni scientifiche e nazionali che spinsero la Reale Società Geografica Italiana a raccogliere in un unico volume tutti gli scritti del Baldacci riguardanti i suoi viaggi e i suoi studi sull'Albania; viaggi e studi, che oggidì sono utilizzati dal Comando Supremo nelle nostre contingenze di guerra, nelle quali il Baldacci è strumento prezioso trovandosi presentemente appunto a Vallona.

M. E.

---

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA  
*presentate nella seduta del 1° aprile 1917.*

- ARCANGELI G. — Alcune altre osservazioni sulla *Victoria regia* Lindl. (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXV). Pisa, 1916. fol.
- ARCANGELI G. — Di nuovo sulle piante di *Pinus Pinea* var. *fragilis*, coltivate nell'Orto botanico pisano (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze Naturali », vol. XXV). Pisa, 1916. fol.
- ARCANGELI G. — Sopra alcune varietà del *Diospyros Kaki* e sopra una malattia riscontrata in una di esse (Estr. dai « Processi verbali della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXV, pp. 1-12). Pisa, 1916. 8°.
- ARCANGELI G. — Sopra alcuni fossili della Sardegna e di Jano (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze Naturali », vol. XXV, pp. 1-6). Pisa, 1916. 8°.
- ARCANGELI G. — Sull'esplorazioni polari e sui ghiacci polari (Estr. dai « Processi verbali della Soc. toscana di Scienze naturali », vol. XXIV, pp. 1-10). Pisa, 1915. 8°.
- BALDACCI A. — Itinerari Albanesi (1892-1902). Roma, 1917. 4°, pp. 1-541.
- Carta Idrografica d'Italia. — Tanara Ministero di Agricoltura). Roma, 1916. 8°, pp. 1-370.
- HAGEN S. I. G. — Aggiunte al Catalogo dell' « Atlas Stellarum variabilium » (Specola Astronomica Vaticana, vol. XI). Roma, 1916. 4°, pp. 1-269.
- MALENOTTI E. — *Metalaptus Torquatus* n. gen. e n. specie di calcedite (Estr. dal « Redia » vol. XII, pp. 339-340). Firenze, 1917. fol.
- Resultado de las observaciones en la zona. — 52° A — 56° durante los años 1913, 1914. y 1915 y en la zona — 57° A — 61 durante el año 1915 (Observatorio astronomico, vol. III). La Plata, 1916. 4°, pp. 1-451.
- VALLANZI G. — Sul funzionamento dei tubi a vuoto a tre elettrodi (audion), usati nella radiotelegrafia (Estr. dal Giornale « L'Elettrotecnica » pp. 1-18). Milano, 1917. 4°.
-



## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76) Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche  
matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali,  
storiche e filologiche.
- Vol. V. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 7°. Sem. 1°.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XII. Fasc. 3.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 8.00; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° aprile 1917.

MÉMOIRES ET NOTES DE SOCIÉTIÉ PRÉSENTÉES PAR SOCI

<i>Somigliana</i> . Sulla propagazione delle onde sismiche . . . . .	Pag. 369
<i>Levi-Civita</i> . Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein . . . . .	" 381
<i>Millosevich</i> . Osservazioni della nuova cometa Mellish $\equiv$ 1917 <i>a</i> . . . . .	" 391
<i>Artini</i> . Il polimorfismo della dinitrotoluidina $C_6H_3(NO_2)_2.NH_2.CH_3$ . . . . .	" 392
	(1) (3) (5) (2)
<i>Tizzoni</i> . Ricerche batteriologiche sulle psicosi pellagrose (*) . . . . .	" 400
<i>Galeotti</i> . Sul ricambio dei muscoli nelle diverse condizioni meccaniche delle loro contrazioni (*) . . . . .	" "
<i>Lebon</i> . Solution d'un probleme remarquable relatif a la nouvelle Table de diviseurs des nombres. (pres. dal Socio <i>Volterra</i> ) . . . . .	" 401
<i>Vergerio</i> . Un'applicazione del metodo di somministrazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali (pres. dal Socio <i>Levi-Civita</i> ) (*) . . . . .	" 405
<i>Agamennone</i> . Rettifiche e considerazioni sulla velocità del terremoto del 13 gennaio 1915 (pres. dal Socio <i>E. Millosevich</i> ) . . . . .	" 406
<i>Brunacci</i> . Influenza dell'attenzione su la secrezione dei succhi digerenti (pres. dal Socio <i>Luciani</i> ) (**) . . . . .	" 411

PERSONALE ACCADEMICO

<i>Rolti</i> (Presidente). Da annuncio della morte del Corrisp. prof. <i>Luigi Balbiano</i> e commemora, con parole di rimpianto, il defunto <i>Collega</i> . . . . .	" 412
<i>Id.</i> Comunica i ringraziamenti inviati dal Segretario dell'Accademia delle scienze di Parigi per le manifestazioni di cordoglio dell'Accademia dei Lincei in occasione della morte del prof. <i>Gastone Darboux</i> . . . . .	" "

PRESENTAZIONE DI LIBRI

<i>Millosevich</i> (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle del Corrisp. <i>Arcangeli</i> , del P. <i>J. G. Hagen</i> , del prof. <i>E. Perrone</i> , ecc. . . . .	" "
<i>Id.</i> Fa omaggio di una pubblicazione del prof. <i>Antonio Ballarín</i> e ne parla . . . . .	" "
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . .	" 413

(\*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

(\*\*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.



ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXIV.  
1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 15 aprile 1917.*

Volume XXVI.° — Fascicolo 8°

1° SEMESTRE.



ROMA  
TIPOGRAFIA DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

SEP 25 1924

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratuiti ai Soci e Corrispondenti, 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il costo, a più della spesa di posta, è suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si svolgono nell'Accademia; tuttavia, se i Soci o Corrispondenti hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare, prima della seduta seguente, una Nota, non oltre le 12 pagine di

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta di rinviare la Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenta una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che l'Accademia non si assume la spesa retribuita agli autori, fuorché nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, ai Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più di quelle retribuite è a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 15 aprile 1917.*

F. D' OVIDIO Presidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare.* Nota del Corresp. F. ENRIQUES.

Nell'intorno di un punto singolare  $O = (OOO)$  una curva gobba  $C$  si lascia separare in rami rappresentabili mediante serie di potenze, intere e positive, di un parametro  $t$ . L'analisi di questi sviluppi ha permesso ad Halphen di risolvere gli elementari problemi numerativi che concernono le singolarità delle curve gobbe, determinando la loro influenza sulla classe ecc. Ma vi è qui un ordine di problemi che non è stato toccato, e che dà origine a qualcosa di nuovo per chi si volga dalla considerazione delle curve piane a quella delle curve gobbe: si tratta di determinare i successivi punti multipli (e semplici) che appartengono ad un ramo di cui è data la rappresentazione parametrica e di esaminare le posizioni notevoli di questi punti, estendendo alle curve gobbe il concetto dei « punti satelliti » che ho recentemente introdotto nella teoria delle singolarità delle curve piane <sup>(1)</sup>.

Quando si tratta di un ramo di curva piana

$$\begin{cases} x = t^v \\ y = at^v + bt^{v+v'} + ct^{v+v'+v''} + \dots, \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Cfr. la mia Nota comunicata a codesta Accademia il 7 maggio 1916. Un più ampio sviluppo della teoria delle singolarità delle curve piane e gobbe, basata su tali concetti, si troverà nel secondo volume delle mie *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, redatte colla collaborazione del dott. O. Chisini.

la determinazione dei punti successivi all'origine, colle loro molteplicità, dipende dall'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri  $\nu, \nu', \nu'', \dots$ ; si procede qui a determinare il massimo comun divisore dei primi due numeri, tenendo conto dei quozienti e dei resti successivi, poi si applica lo stesso procedimento nel confronto del m. c. d. ( $\nu\nu'$ ) e di  $\nu''$ , e così di seguito: è ovvio che, così facendo, apparisce la particolare importanza di certi (*termini* e) *numeri caratteristici* che non riescono multipli del massimo comun divisore dei numeri precedenti; ai quali (*termini* e) numeri si riferiscono appunto le teorie di Halphen e di Noether (<sup>1</sup>).

Ora si consideri un ramo di curva gobba C, nell'intorno dell'origine; sia  $\nu$  l'ordine del ramo, cioè la molteplicità dell'origine O, e sieno  $\nu + \mu$  e  $\nu + \mu + \lambda$  le intersezioni del ramo colla tangente e col piano osculatore, sicchè  $\mu$  e  $\lambda$  designeranno i caratteri cui Halphen ha dato il nome di « rango » e di « classe », la « prima e seconda classe » come anche possono chiamarsi, per non introdurre nomi nuovi rispetto alla teoria delle curve piane.

Orientando opportunamente gli assi coordinati, il nostro ramo si potrà rappresentare, nella forma normale di Halphen, scrivendo:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t^\nu \\ y = at^{\nu+\mu} + \dots \\ z = bt^{\nu+\mu+\lambda} + \dots \end{array} \right.$$

i punti (semplici e multipli) del ramo successivi all'origine dipenderanno, in generale, dai termini successivi che compariscono negli sviluppi precedenti; in particolare vi è un gruppo di punti dipendenti dai primi termini degli sviluppi di  $y$  e  $z$ , e dai numeri  $\nu, \nu + \mu, \nu + \mu + \lambda$ ; la determinazione di codesti punti e delle loro molteplicità costituisce il passo elementare nel problema che ci occupa, e la soluzione più generale di questo si lascia ricondurre a quel passo.

Orbene, per estendere l'analisi delle singolarità delle curve piane, occorre anzitutto estendere convenientemente la nazione aritmetica dell'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore fra due numeri (interi e positivi): qui occorre considerare una terna in luogo di una coppia di numeri, e in questa terna non si deve distinguere alcun ordine dei tre numeri.

La definizione dell'algoritmo più generale che abbiamo in vista viene portata senz'altro quando si tenga presente il procedimento euclideo, ove in luogo di divisioni successive si parli di sottrazioni successive: è chiaro che dati tre numeri  $\alpha, \beta, \gamma$ , si potrà procedere alla ricerca del massimo comun

(<sup>1</sup>) Cfr. in specie la Nota di questi nei Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, T. IX, pag. 89 (1890).

divisore di essi sottraendo il minore dei detti numeri dagli altri due, e così operando di seguito. Il procedimento ha un termine naturale quando si giunge a tre resti uguali, che porgono allora il massimo comun divisore della terna. Ma pei nostri fini occorre arrestarsi innanzi, quando si trovino due resti uguali minori del terzo numero e perciò non possa più proseguirsi l'operazione senza che nasca ambiguità sulla scelta del numero da sottrarre (scelta fra due uguali che è indifferente per la questione aritmetica, ma non per la nostra questione geometrica).

Il procedimento sopra definito, che possiamo denominare *procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore*, applicato ai tre numeri  $v$ ,  $v + \mu$ ,  $v + \mu + \lambda$ , permette di definire un gruppo di punti successivi del ramo, in dipendenza dai primi termini delle serie, ed anche di calcolarne le molteplicità. I punti così definiti appaiono strettamente determinati dall'origine del ramo,  $O$ , dalla sua tangente e dal piano osculatore; perciò essi potranno ritenersi come satelliti del primo punto successivo ad  $O$  che si trovi su codesto piano, fuori della detta tangente. Nel caso  $\mu < v$  (che può assumersi come caso elementare tipico) i punti nominati figurano come satelliti del terzo punto  $O_2$  che s'incontra sul nostro ramo.

Ora, dovendo esaminare le circostanze a cui dà luogo l'arresto del nostro procedimento, supporremo — per semplicità di discorso — che manchi la unicità del minimo fra i tre numeri  $\mu$ ,  $v - \mu$ ,  $\lambda$  che si ottengono con due sottrazioni successive del minimo a partire dalla terna  $v$ ,  $v + \mu$ ,  $v + \mu + \lambda$ . Anzitutto se quei tre numeri sono uguali fra loro, si riconosce che il punto  $O_3$  successivo ad  $O_2$  sul nostro ramo (1) riesce un punto libero, dipendente da due parametri: cioè dai coefficienti  $a$  e  $b$ .

Infatti si eseguiscano sul ramo (1) due trasformazioni quadratiche successive prendendo la prima volta  $O$  e la seconda (il trasformato di)  $O_1$  come punti fondamentali isolati; in tal guisa il ramo (1) si trasforma in un altro avente come origine il punto (trasformato di)  $O_2$ , e per questo ramo si trova appunto che la tangente nell'origine dipende dai due parametri-coordinate  $a$  e  $b$ . Per il calcolo effettivo si può servirsi della particolare trasformazione quadratica che consiste nel lasciar fermo  $x$  e cambiare  $y$  e  $z$  in  $y/x$  e  $z/x$ ; si trova come ramo trasformato di (1) di origine  $O_2$ :

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{a} t^{v-\mu} + \dots \\ y = a t^\mu + \dots \\ z = \frac{b}{a} t^\lambda + \dots; \end{cases}$$

onde, se  $v - \mu = \mu = \lambda$ , la tangente di codesto ramo è la retta

$$a^2 x - y = 0 \quad , \quad b x - z = 0 \quad ,$$

che dipende appunto da entrambi i parametri  $a$  e  $b$ .

Suppongasi invece che i tre numeri  $\mu$ ,  $\nu + \mu$ ,  $\lambda$  non sieno tutti e tre uguali, ma pur manchi fra loro l'unicità del minimo essendo uguali fra loro, e non al terzo, i più piccoli fra i due numeri. In questo caso la tangente al ramo (3), e quindi il punto  $O_3$ , non dipenderà più da due parametri essenzialmente distinti, ma da un solo parametro, oltrechè dalla natura aritmetica dei numeri di cui sopra si discorre. Questo caso non ha riscontro nella teoria delle curve piane: il punto  $O_3$  non può considerarsi qui come un vero punto libero, ma nemmeno come un punto satellite di  $O_2$ ; piuttosto esso deve ritenersi come semilibero o semisatellite.

L'analisi della relazione di semisatellitismo conduce a distinguere varie specie di punti semisatelliti, dei quali si può dare anche una semplice definizione in rapporto alla trasformazione quadratica. In questa Nota riassuntiva non mi fermerò a spiegare la distinzione accennata; ma voglio avvertire — a scampo di possibili errori in cui potrebbe esser tratto il lettore — che le relazioni di satellitismo e semisatellitismo a cui danno luogo i punti di una curva gobba non possono dedursi dalle relazioni analoghe cui danno luogo i punti di una proiezione piana generica.

Le cose dette contengono virtualmente l'analisi dei punti successivi appartenenti ad un ramo di curva gobba, imperocchè il procedimento riduttore della trasformazione quadratica permette di estendere ai punti successivi ciò che si è visto per i primi punti.

Così si è tratti a concludere: *l'analisi dei punti successivi di un ramo di curva gobba (1), e delle loro molteplicità, dipende dal procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore; si deve operare su successive terne caratteristiche di numeri, i quali vengono forniti dagli esponenti che figurano nei termini delle serie (1).*

In luogo di spiegare partitamente l'applicazione del metodo, terminerò questa Nota con un esempio che — per un lettore esercitato — darà lume su tutto quanto è detto nella presente Nota. Spiegazioni particolareggiate, accessibili a tutti gli studiosi, si troveranno nel volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, come sopra è annunciato,

L'esempio scelto qui per l'applicazione del nostro procedimento si riferisce al ramo

$$\begin{cases} x = ab t^{18} + bt^{21} \\ y = ab t^{23} + bt^{31} \\ z = ab^2 t^{32} + b^2 t^{35}; \end{cases}$$

L'analisi della singolarità viene illustrata dal seguente quadro:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = abt^{28} + bt^{31} \\ z = ab^2t^{32} + b^2t^{35} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{prima terna} \\ \text{caratteristica} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 18 & 28 & 32 \end{array} \quad O_1^{18}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = t^{10} \\ z = bt^{14} \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} 18 & 10 & 14 \end{array} \quad O_1^{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = abt^8 + bt^{11} \\ y = t^{10} \\ z = bt^4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} 8 & 10 & 4 \end{array} \quad O_2^4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = at^4 + t^7 \\ y = \frac{1}{b} t^6 \\ z = bt^4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 4 \end{array}$$

cambiamento d'assi coordinati per ridurre  
la rappresentazione del ramo a forma  
normale

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^7 \\ y = \frac{1}{b} t^6 \\ z = bt^4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{seconda terna} \\ \text{caratteristica} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 7 & 6 & 4 \end{array} \quad O_3^4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{b} t^3 \\ y = \frac{1}{b^2} t^2 \\ z = bt^4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 4 \end{array} \quad O_4^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = bt \\ y = \frac{1}{b^2} t^2 \\ z = b^3 t^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \end{array} \quad O_5^1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = bt \\ y = \frac{1}{b^3} t \\ z = b^2 t \end{array} \right. \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} \quad O_6^1$$

Nella colonna verticale a destra figurano i punti successivi all'origine  $O$  coll'indicazione delle rispettive molteplicità, che vengono designate con esponenti. Il gruppo dipendente dalla seconda terna di numeri caratteristici è legato al primo da una relazione di semisatellitismo; in questo gruppo si incontrano anche due punti semplici a cui seguono punti (semplici e) liberi del ramo. Ciò è d'accordo colla circostanza che l'ultimo ramo trasformato è lineare (e precisamente una retta).

Cristallografia. — *Il polimorfismo della dinitrotoluidina*  
 $C_6H_2 \cdot NO_2 \cdot NO_2 \cdot NH_2 \cdot CH_3$ . Nota II del Socio E. ARTINI.  
(1) (3) (5) (2)

FORMAZIONE E CONDIZIONI DI STABILITÀ DELLE DIVERSE FASI. TRASFORMAZIONI DELL'UNA NELL'ALTRA. FASE  $\alpha$ . — In testa alla descrizione morfologica delle singole fasi  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ , ho già dato un cenno affatto sommario e incompleto dei processi di cristallizzazione mediante i quali si possono ottenere. Vediamo ora di precisare, esponendo succintamente i risultati delle numerosissime prove di cristallizzazione che ebbi agio di fare a diverse temperature, dai vari solventi. Premetto, rispetto ai solventi da me usati, che la solubilità della sostanza è minima nel benzolo, piuttosto scarsa nell'etere, alquanto più grande nell'alcool, assai maggiore nell'etere acetico, grandissima in acetone.

La fase  $\delta$  è metastabile sempre, certo almeno fino a temperature di qualche grado inferiori a  $0^\circ$ . Essa però si forma con tutta facilità da soluzioni in benzolo o in etere, oppure in miscela di etere ed alcool, a temperature non superiori a  $20^\circ$ ; in queste condizioni è anzi la fase che si forma esclusivamente, o almeno in grandissima prevalenza, insieme a minime quantità di  $\gamma$ , più raramente di  $\beta$ , fino a che il recipiente di cristallizzazione resti aperto e l'evaporazione non sia ostacolata. Se però, invece che in un bicchiere aperto, si opera in una bevuta, per esempio con soluzioni in miscela di etere e alcool, e, quando la cristallizzazione è proceduta abbastanza, la bevuta si tappa, conservandola alla temperatura ordinaria, cioè tra  $10^\circ$  e  $20^\circ$ , si vedono gli aghi gialli della  $\delta$  lentamente corrodersi, disciogliendosi, e al loro posto formarsi, crescendo gradatamente, individui triclini della  $\gamma$ , fino a che la trasformazione è completa. Il processo può durare vari giorni nella miscela di alcool ed etere, e più è lento quanto più è bassa la temperatura; in tale miscela anzi, a  $0^\circ$ , la velocità di trasformazione, dipendente dalla diversità di solubilità delle due fasi, è già praticamente nulla. Viceversa, a  $35^\circ$ , in alcool, o, meglio, in etere acetico, la trasformazione totale, in vaso chiuso, è questione di pochi minuti.



Usando il benzolo, nel quale, come già accennammo, minima è la solubilità della sostanza, la apparente stabilità della  $\delta$  alla temperatura ordinaria aumenta singolarmente. Ho tenuto per qualche mese una provetta ben tappata, nella quale aghi gialli  $\delta$  e cristallini  $\gamma$  aranciati erano conservati insieme, in soluzione benzolica satura: dopo tanto tempo, solo affatto incipiente si poteva dire la trasformazione della fase  $\delta$  in  $\gamma$ .

Viceversa, anche a bassa temperatura, non sono mai riuscito ad ottenere spontaneamente la  $\delta$  da soluzioni in acetone; anzi, seminando la  $\delta$  in soluzione acetonica satura, con grande rapidità se ne osserva la scomparsa, con formazione di  $\gamma$ . Solo a temperature vicine a  $-10^\circ$  son riuscito a conservare per qualche tempo una accanto all'altra le due fasi in soluzione acetonica. Credo però che questo, anzi che dal fatto di aver raggiunto un punto di trasformazione  $\gamma \xrightleftharpoons{-10^\circ} \delta$ , derivi piuttosto dalla grande diminuzione di solubilità, e conseguente rallentamento della trasformazione; nè in acetone nè in altro solvente, nemmeno a  $-12^\circ$ , sono riuscito mai a constatare che avvenga, almeno con velocità apprezzabile, la trasformazione di  $\gamma$  in  $\delta$ .

La stessa fase  $\delta$  si ottiene anche spesso, come formazione metastabile accidentale, da soluzioni alcooliche calde, bruscamente raffreddate, specialmente ricorrendo a semina. Si sottintende che, lasciando i cristalli immersi nel liquido, avviene poi la trasformazione in  $\gamma$ , secondo quanto dissi più sopra; il fenomeno procede assai più rapido se si impedisce l'evaporazione del solvente: altrimenti può accadere, come nelle cristallizzazioni da etere, che la velocità di accrescimento essendo superiore alla velocità di trasformazione, lo stato di falso equilibrio duri a lungo, con formazione contemporanea di  $\delta$  e di  $\gamma$ , talvolta anche di  $\beta$ .

Anche a secco la fase  $\delta$  si dimostra metastabile, e i suoi prismetti giallo-citrini, anche chiusi in un tubo, specialmente se esposti alla luce, alla temperatura ordinaria, lentamente finiscono per diventare opachi e aranciati, per paramorfosi di  $\gamma$  su  $\delta$ . La velocità di trasformazione, al solito, aumenta molto con la temperatura; quasi nulla tra  $0^\circ$  e  $+15^\circ$ , essa incomincia a diventare sollecita fra  $35^\circ$  e  $40^\circ$ , e se si scalda rapidamente, verso  $50^\circ$  la trasformazione stessa avviene tutta d'un tratto, con brusco mutamento di colore.

La fase  $\gamma$  è indubbiamente la più stabile alla temperatura ordinaria, o a temperatura più bassa; essa è quella che si forma normalmente, almeno in gran prevalenza, da soluzioni in etere acetico e in acetone, puri o mescolati con alcool.

Riscaldando lentamente in apposita stufetta, sotto al microscopio, lamine di sfaldatura basale di questa modificazione triclinica, si assiste alla sua trasformazione enantiotropa in una fase rombica, che io ritengo identica alla  $\beta$  quale si ottiene per diretta cristallizzazione. Verso  $60^\circ$  C. si nota chiaramente

(l'osservazione riesce particolarmente istruttiva tra nicols incrociati sulle lamine geminate) una diminuzione della dispersione dei piani degli assi ottici, diminuzione che rapidamente si accentua con l'aumento della temperatura, fin che a  $63^\circ$  la sostanza è perfettamente rombica, otticamente identica alla  $\beta$ , con totale scomparsa di ogni traccia di geminazione. Col raffreddamento, avviene con perfetta enantiotropia la trasformazione inversa: lamine nuove di geminazione  $\{010\}$  si formano ordinariamente, in posizione diversa e per lo più in numero minore di quello che si osservava originariamente. Di pari passo con la trasformazione ottica procede quella morfologica: a  $63^\circ$  le basi dei due individui triclinali geminati si riuniscono in un unico piano; col raffreddamento si riforma tra di esse il caratteristico angolo di circa  $7^\circ$ .

Quanto alla fase  $\beta$ , essa non si ottiene dai solventi sopra citati con tanta facilità e regolarità quanto la precedente, rispetto alla quale è indubbiamente metastabile, alla temperatura ordinaria. Di solito, i suoi cristalli compaiono per i primi, specie dalle soluzioni in etere acetico o in acetone; ma in un secondo tempo essi copronsi di individui triclinali in concrescimento regolare; poi lentamente cedono del tutto il campo alla fase triclina. Per raffreddamento lentissimo di soluzioni in alcool bollente, o per evaporazione di soluzioni alcooliche in stufa, a temperature vicine a  $+65^\circ$ , si può talora averla pura; ma anche in questi casi, abbandonando i cristalli nel liquido, col progressivo raffreddamento comincia a formarsi la  $\gamma$ , che finisce poi per prevalere.

Riscaldando, a secco, nella sopra ricordata stufetta, lamine di sfaldatura basale della fase  $\gamma$ , nella maggior parte dei casi non si nota alcun cambiamento, fino che si arrivi a  $148^\circ$ . Talvolta però, fra  $35$  e  $45^\circ$  si osserva una brusca trasformazione in  $\gamma$ , con divisione delle lamine in quattro settori, limitati dalle diagonali, con le basi non più contenute in un unico piano, ma formanti tra loro angoli molto sentiti, così da costituire una specie di piramide romba ottusa da una parte, e una corrispondente incavatura dall'altra. Che si tratti di individui della fase  $\gamma$  è provato dalle proprietà ottiche: l'estinzione non è più contemporanea per tutti i colori, e i piani degli assi ottici sono dispersi come già si descrisse per la fase triclina; tra due settori adiacenti per la diagonale corta l'angolo d'estinzione a luce gialla è di circa  $20^\circ - 22^\circ$ . A  $+63^\circ \text{C.}$  la distinzione ottica scompare, e l'estinzione torna contemporanea per tutti i colori secondo le diagonali.

Anche le lamine della  $\beta$  che a  $40^\circ$  non subiscono alcuna alterazione (e sono le più numerose, come accennai già) quando la temperatura, dopo aver raggiunto  $70^\circ - 80^\circ \text{C.}$ , si abbassi lentamente, presentano verso  $60^\circ$  (talora con qualche ritardo, dovuto a surfusione cristallina) la trasformazione enantiotropa nella fase  $\gamma$ , che è veramente la stabile tra  $0^\circ$  e  $+63^\circ$ . Solamente, invece della geminazione  $\{010\}$ , con tracce parallele alla diagonale

corta, o accanto a questa, tali lamine sottoposte prima a riscaldamento e poi a raffreddamento, presentano di solito numerose e sottili lamelle secondo l'altra legge, meno precisamente definita, che io ritengo simile a quella del periclino nei plagioclasti, così da lasciar riconoscere, a nicols incrociati, una caratteristica rigatura parallela alla diagonale lunga. Non occorre dire che, riscaldando nuovamente, a 63° scompare ogni traccia di geminazione, e la lamina torna rombica ( $\beta$ ), per ridiventare nuovamente triclinica ( $\gamma$ ) ad un ulteriore raffreddamento, con perfetta reversibilità.

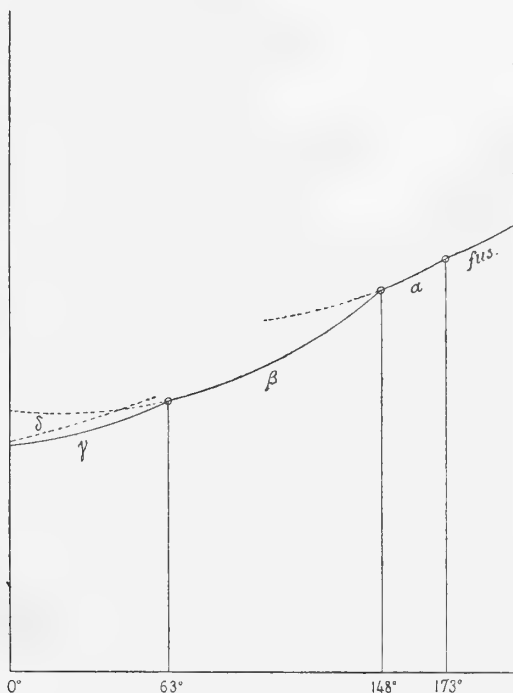


FIG. 6.

Quando poi, riscaldando la sostanza nella stufetta, qualunque sia la modificazione dalla quale si è partiti in origine, si raggiunga la temperatura di 148° C., si assiste ad una nuova trasformazione enantiotropa, con produzione di una quarta fase ( $\alpha$ ), ben distinta da  $\gamma$  e da  $\beta$  per il colore, che è un giallo d'orpimento chiaro. La trasformazione, se l'innalzamento della temperatura è lento, avviene gradatamente: si forma in un punto della lamina aranciata trasparente una macchia torbida giallo-chiara, formata da un aggregato cristallino di  $\alpha$ ; la macchia s'allarga poi gradatamente, fino ad occupare tutta la lamina. Se si interrompe il riscaldamento prima che la trasformazione sia completa, appena la temperatura scenda sotto 148°

avviene la trasformazione inversa; le apparenze del fenomeno sono le stesse, notissime, della trasformazione enantiotropa  $\alpha$ -solfo  $\rightleftharpoons$   $\beta$ -solfo.

A 173° la sostanza fonde in un liquido limpido, di color giallo chiaro; per raffreddamento, da questo si segregano individui cristallini scheletriformi della stessa fase  $\alpha$ , i quali presto si riuniscono a formare un fitto aggregato. Poco posso dire sulle proprietà di questa modificazione, perchè essa è stabile solo ad alta temperatura, e le osservazioni sono assai malagevoli in tali condizioni. I cristalli si presentano in forma tabulare romba, con angolo che non mi pare molto diverso da quelli delle sezioni basali delle fasi  $\gamma$  e  $\beta$ ; le estinzioni sono diagonali; l'assorbimento è maggiore per la diagonale lunga (giallo aranciato chiaro) e minore per la corta (giallo citrino).

Col raffreddamento, questa fase  $\alpha$  si trasforma nella  $\beta$ , come si rileva facilmente dal brusco cambiamento di colore, dal giallo d'orpimento all'arancione; ma se il raffreddamento avviene entro la stufa, senza la presenza di germi di  $\beta$  e di  $\gamma$ , d'ordinario si osserva (come frequentemente accade in casi analoghi) un sensibile ritardo nella trasformazione, dovuto al fenomeno detto surfusione cristallina; la formazione della fase rossa avviene cioè a temperature inferiori a 148° (fino a 120°, secondo le mie osservazioni).

Nel diagramma della fig. 6, dove, secondo la consuetudine, le pressioni sono portate in ordinate, e in ascisse le temperature, ho tentato di rappresentare, secondo i risultati delle osservazioni qui sopra esposte, le condizioni di equilibrio tra le diverse fasi; occorre appena avvertire che il diagramma è, per la parte delle pressioni, affatto schematico, e tracciato solo in base al principio fondamentale che la tensione di vapore aumenta con la temperatura, e che essa ha per la fase stabile un valore minore che per la labile.

Nel comportamento di questa sostanza si osservano varî fenomeni interessanti; ma ciò che vi ha di più notevole, a parer mio, non è tanto il numero relativamente grande delle fasi, e la facilità con cui due di esse si formano insieme, una accanto all'altra, o anche in concrescimento regolare, perchè di questi falsi equilibri, dovuti a scarsa velocità di trasformazione, sono ormai abbastanza numerosi gli esempi; ma piuttosto la evidente influenza della natura del solvente sulla formazione dell'una piuttosto che dell'altra modificazione. Così, da etere si ottiene normalmente, per lenta evaporazione, la  $\delta$ , mentre questa in identiche condizioni non si ha mai da acetone, dove si forma invece ordinariamente solo la  $\gamma$ , accidentalmente talora anche la  $\beta$ .

Sulla natura di questa influenza nulla ancora oserei affermare; ma essa è innegabile, e io credo che non sarebbe inutile se esperienze di questo genere venissero ripetute sopra altre sostanze artificiali, poi che in queste il polimorfismo si può studiare con ben maggiore comodità che non sulla maggior parte dei minerali in natura.

Fisica terrestre. — *Onde interne nell' Adriatico*. Risposta al prof. E. ODDONE <sup>(1)</sup>. Nota del Corrisp. LUIGI DE MARCHI.

Rispondo al prof. Oddone, perchè la Memoria ch'egli sottopone a critica, e della quale nega i risultati, può essere sconosciuta ai lettori di questi Rendiconti, essendo pubblicata altrove <sup>(2)</sup>. Mi limito a pochi appunti:

1°. L'illazione che le onde sommerse da me segnalate siano onde di marea non è fondata soltanto sul valore del periodo medio da me dedotto *in prima approssimazione*, come afferma il prof. Oddone, ma sui singoli periodi delle tre onde successive riscontrate, e sul calcolo dell'epoca del loro arrivo alla spiaggia, *messa in rapporto coi dati di marea di quel giorno e del successivo a Venezia*.

2°. La spiegazione, che il prof. Oddone crede di poter sostituire, è basata, per sua stessa confessione, su una semplice *analogia* col fenomeno di oscillazione di due pendoli verticali sovrapposti, cioè con un movimento a due soli gradi di libertà. Spetta a lui dimostrare che il problema si può ragionevolmente ridurre a quello schema semplicista, tanto da poter senz'altro applicare ad esso le formole relative.

3°. Secondo il prof. Oddone le onde sommerse sarebbero la risultante, per somma e differenza, di due sistemi d'onda di sessa, del periodo di circa mezz'ora, molto veloci, propagantisi nei due strati superiore e inferiore; ma di queste onde bisognerebbe dimostrare l'esistenza, trattandosi di onde *di parecchi metri d'altezza*, poichè l'ampiezza dell'onda interna è di circa 8 m. La curva mareografica, regolarissima, di quei giorni non ne ha dato il più piccolo indizio.

4°. Che il prof. Oddone non creda a tale ampiezza è curioso, perchè i dati di salsedine e di temperatura furono raccolti coi metodi rigorosissimi del Comitato internazionale oceanografico. Ch'egli poi la spieghi *in parte* come effetto della convettività, in una condizione così spiccata di equilibrio stabile, e confronti l'effetto di una oscillazione del periodo di 12 ore sull'acqua sovrastante con quello della vibrazione di una corda elastica sulla polvere che la riveste, è almeno strano. Il fatto è che questa ampiezza disturba la sua ipotesi, mentre risponde così bene alla teoria delle onde interne di Stokes.

5°. Dato il salto di densità, onde interne *dovevano* formarsi, e formata è la loro teoria: non vedo quindi l'opportunità di ricorrere a semplici analogie con altri fenomeni. Potrà darsi che dell'origine di quelle onde si possa dare una spiegazione diversa dalla mia, ma finora credo che i fatti mi diano ragione.

<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti, vol. XXVI, fasc. 4°, seduta del 18 febbraio 1917.

<sup>(2)</sup> Atti del R. Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti, vol. LXXV, parte 2ª (1915-16).

**Matematica.** — *Un'applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali.* Nota di **ATTILIO VERGERIO**, presentata dal Socio **T. LEVI-CIVITA**.

1. Le formole risolutive dell'equazione integrale di seconda specie

$$[1] \quad u(s) = h(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) h(t) dt,$$

date dal Fredholm <sup>(1)</sup>, dallo Schmidt <sup>(2)</sup>, come pure quelle date da me in una recente Memoria <sup>(3)</sup> presentano, nella loro applicazione, delle difficoltà spesso non lievi, derivanti dalla determinazione delle funzioni e delle costanti che in esse figurano <sup>(4)</sup>.

Difficoltà analoghe, se non anche maggiori, s'incontrano nella risoluzione dell'equazione integrale di prima specie

$$[2] \quad g(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) dt,$$

per la quale poi, a differenza di quella di seconda, non si conosce alcuna formula risolutiva, che rappresenti incondizionatamente una soluzione della [2], nei casi in cui questa ne ammetta.

Però tanto l'equazione [1] quanto la [2] ammettono una soluzione *formale* molto semplice, che per la [1] è data da

$$[3] \quad h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n u_n(t),$$

<sup>(1)</sup> *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Acta Math., t. XXVII, 1903.

<sup>(2)</sup> *Entwicklung willkürlicher Funktionen etc.* Inaugural-Dissert., Göttingen, 1905.

<sup>(3)</sup> *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm.* Rend. Circolo Matem. Palermo, XLI, 1916.

<sup>(4)</sup> Invero la formola del Fredholm è di laboriosissima applicazione; quella dello Schmidt esige la conoscenza degli autovalori e delle autofunzioni del nucleo simmetrico; infine quella data da me, nella citata Memoria, richiede la conoscenza delle funzioni caratteristiche, la cui determinazione è tutt'altro che facile, anche nei casi in cui il nucleo abbia forma semplicissima, come la seguente:  $K(s, t) = s + t$ .

dove

$$u_n(t) = \int_a^b K_n(t, r) \dot{u}(r) dr ; u_0(t) = u(t) :$$

e per la [2], nel caso che il nucleo sia simmetrico, da (1)

$$[4] \quad h(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{G_1^{(v)}(t)}{\Gamma_v} .$$

Disgraziatamente però, tanto per la [3] che per la [4], ben di rado sono soddisfatte le condizioni di convergenza e di integrabilità, termine a termine, senza le quali le suddette espressioni non possono rappresentare una soluzione *effettiva*; si è così quasi sempre costretti a rinunciare ai vantaggi derivanti dalla loro semplicità.

Mi sono perciò proposto di vedere se sia possibile di utilizzare le [3] e [4] per la risoluzione delle [1] e [2] rispettivamente, nel caso in cui esse non siano convergenti; ed ho trovato che, se esse sono *sommabili*, nel senso dato a tale vocabolo dal Borel (2), esse rappresentano una soluzione dell'equazione proposta. Oggetto della presente Nota è appunto quello di esporre questo risultato, il quale parmi presentare qualche interesse.

2. Diremo che una serie di funzioni  $v_n(s)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), continue in un intervallo finito  $(ab)$ , è *sommabile* in esso se

1°) la serie

$$S(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(s) \frac{x^n}{n!} \quad (\sigma_n(s) = v_0(s) + v_1(s) + \dots + v_n(s))$$

è convergente per ogni  $x \geq 0$  finito e per ogni valore di  $s$  in  $(ab)$ ;

2°) l'espressione  $e^{-x} S(s, x)$  tende, per  $x \rightarrow \infty$ , ad un limite  $S(s)$ , determinato e finito.

Il limite  $S(s)$ , quando esiste, sarà la *somma* della serie data  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(s)$ .

Ricorderemo il seguente teorema di Hardy (3) di cui faremo uso:

*Se  $f(x)$  è una funzione continua assieme alla sua derivata prima  $f'(x)$  per  $x \geq 0$ , e se l'integrale improprio*

$$[\alpha] \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f'(x) dx$$

(1) Vergerio, loc. cit. cap. III, § 1, pag. 22.

(2) *Leçons sur les séries divergentes*, cap. III. Paris. Gauthier-Villars, 1901.

(3) *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 35, 1903.

è convergente, è pure convergente l'integrale

$$(\beta) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx;$$

si ha inoltre

$$(\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} f(x) = 0.$$

Il teorema è evidentemente valido anche nel caso in cui la  $f(x)$  sia funzione, oltre che di  $x$ , anche di un parametro  $s$  variabile in un intervallo finito  $(ab)$ ; potremo perciò dire che, se, per ogni valore di  $s$  in  $(ab)$ , l'integrale  $[\alpha]$  converge, convergerà del pari l'integrale  $[\beta]$  e sarà inoltre valida la  $[\gamma]$ .

3. Supposto che le funzioni  $K(st)$  ed  $u(s)$  siano entrambe limitate e continue, la prima entro il campo  $a \leq s \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$  e la seconda entro l'intervallo finito  $(ab)$ , si dimostra con facilità che la serie  $S(s, x)$  del numero precedente, relativa alla serie  $[3]$ , è sempre convergente, per ogni  $x \geq 0$  finito, in modo assoluto ed indipendentemente da  $s$ . Si ha invero, se  $M$  è un numero finito e positivo,

$$\begin{aligned} |K(s, t)| &< M, \\ |K_2(s, t)| &\leq \int_a^b |K(s, r)| |K(r, t)| dr < M^2 (b - a), \\ |K_3(s, t)| &\leq \int_a^b |K(s, r)| |K_2(r, t)| dr < M^3 (b - a)^2, \end{aligned}$$

ed, in generale,

$$|K_n(s, t)| < M^n (b - a)^{n-1}.$$

Se quindi è  $|u(s)| < m$ , avremo

$$|u_n(s)| \leq \int_a^b |K_n(st)| |u(t)| dt < M^n (b - a)^n m;$$

ed anche posto  $|\lambda| M (b - a) = \varrho$ ,

$$\sigma_n(s) \leq \sum_{r=0}^n |\lambda|^r |u_r(s)| < m \sum_{r=0}^n \varrho^r = m \frac{1 - \varrho^{n+1}}{1 - \varrho};$$

ed ancora, se  $p$  è un numero intero e positivo qualunque,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=n}^{n+p} \sigma_r(s) \frac{x^r}{r!} \right| &\leq \sum_{r=n}^{n+p} |\sigma_r(s)| \frac{x^r}{r!} < \frac{m}{1 - \varrho} \sum_{r=n}^{n+p} (1 - \varrho^{r+1}) \frac{x^r}{r!} = \\ &= \frac{m}{1 - \varrho} \sum_{r=n}^{n+p} \frac{x^r}{r!} - \frac{m\varrho}{1 - \varrho} \sum_{r=n}^{n+p} \frac{(\varrho x)^r}{r!}; \end{aligned}$$



da cui risulta che per la serie [3] è sempre soddisfatta la prima delle due condizioni poste per la sua sommabilità in  $(ab)$ , ed inoltre che la serie  $S(s, x)$  è convergente uniformemente rispetto ad  $s$ , per ogni  $x \geq 0$  finito, e perciò integrabile termine a termine, rispetto a questa variabile, nell'intervallo  $(ab)$ .

Gioverà poi qui notare che la serie

$$v(sx) = u_0(s) - \lambda u_1(s)x + \lambda^2 u_2(s) \frac{x^2}{2!} - \lambda^3 u_3(s) \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

che il Borel chiamò *associata*, converge anch'essa in modo assoluto ed uniforme rispetto ad  $s$ , per ogni valore finito di  $x \geq 0$ , come si vede subito dalla relazione

$$|v(s, x)| \leq \sum_{r=0}^{\infty} |\lambda|^r |u_r(s)| \frac{x^r}{r!} < m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\rho x)^r}{r!} = m e^{\rho x}.$$

È poi evidente che si potrà applicare ad essa la derivazione termine a termine rispetto ad  $x$ : sarà cioè

$$[5] \quad v'(s, x) = -\lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s)x - \lambda^3 u_3(s) \frac{x^2}{2!} + \dots$$

4. Supposto che la funzione  $e^{-x} S(s, x)$  convenga al suo limite  $S(s)$  indipendentemente da  $s$ , sostituiamo nel secondo membro della [1] l'espressione  $e^{-x} S(s, x)$  alla funzione incognita  $h(s)$ ; osservando che

$$\lambda \int_a^b K(s, t) \sigma_n(t) dt = -\sigma_{n+1}(s) + \sigma_0(s),$$

avremo:

$$\begin{aligned} e^{-x} S(s, x) - \lambda \int_a^b K(s, t) e^{-x} S(t, x) dt &= \\ &= e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} \sigma_r(s) \frac{x^r}{r!} - e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} (\sigma_{r+1}(s) - \sigma_0(s)) \frac{x^r}{r!} = \\ &= \sigma_0(s) - e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} [\sigma_{r+1}(s) - \sigma_r(s)] \frac{x^r}{r!} = \\ &= u_0(s) - e^{-x} \left[ -\lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s)x - \lambda^3 u_3(s) \frac{x^2}{2!} + \dots \right]; \end{aligned}$$

e quindi, per la [5],

$$[6] \quad e^{-x} S(s, x) - \lambda \int_a^b K(s, t) e^{-x} S(t, x) dt = u_0(s) - e^{-x} v'(s, x).$$

Poichè la [3], per le ipotesi fatte, è sommabile in  $(ab)$ , esisterà finito e determinato il limite per  $x \rightarrow \infty$  del primo membro, potendosi inver-

tire i segni di limite e di integrale, in grazia della supposta convergenza uniforme della funzione  $e^{-\alpha} S(s, x)$  verso il suo limite; esisterà quindi, pure determinato e finito, il  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha} v'(s, x)$ .

5. Indicando ora con  $S'(s, x)$  la derivata della funzione  $S(s, x)$  rispetto ad  $x$ , si può scrivere

cioè 
$$e^{-\alpha} [S'(s, x) - S(s, x)] = e^{-\alpha} v'(s, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha} S(s, x) = e^{-\alpha} v'(s, x);$$

ed essendo

$$[e^{-\alpha} S(s, x)]_{x=0}^{\infty} = S(s) = u_0(s),$$

avremo anche

$$[7] \quad S(s) - u_0(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha} v'(s, x) dx;$$

da cui integrando per parti

$$S(s) - u_0(s) = - [e^{-\alpha} v(s, x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha} v''(s, x) dx,$$

dove  $v''(s, x)$  indica la derivata della  $v'(s, x)$  rispetto ad  $x$ .

Esistendo, per quanto osservammo più sopra, finito e determinato il  $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-\alpha} v'(s, x)]$ , l'integrale improprio del secondo membro sarà convergente; pel citato teorema di Hardy sarà allora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-\alpha} v'(s, x)] = 0;$$

e la funzione  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha} S(s, x)$  sarà per la [6] una soluzione della [1].

6. Integrando per parti l'integrale del secondo membro della [7], si ottiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} v'(s, x) dx = [e^{-\alpha} v(s, x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha} v(s, x) dx;$$

e poichè l'integrale del primo membro è finito, convergerà, pel teorema di Hardy, anche quello del secondo; sarà inoltre

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha} v(s, x) = 0.$$

Si ha così dalla [7]:

$$[8] \quad S(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha} v(s, x) dx.$$

Possiamo quindi affermare che se la funzione  $e^{-x} S(s, x)$ , relativa alla serie [3], tende per  $x \rightarrow \infty$  ad un limite determinato e finito indipendentemente da  $s$ , questo limite sarà una soluzione dell'equazione [1].

7. Come esempio, consideriamo l'equazione

$$\cos s = h(s) + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} (s + \cos t) h(t) dt.$$

Essendo

$$u_0(s) = \cos s; \quad u_1(s) = \pi; \quad u_n(s) = (2\pi^2)^{n-1} s \quad (n = 2, 3, \dots),$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n u_n(s) = \cos s - \frac{1}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2} - \frac{s}{2\pi^2} + \frac{s}{2\pi^2} - \frac{s}{2\pi^2} + \dots$$

è indeterminata. Essa però soddisfa alla condizione enunciata al numero precedente; e poichè si ha

$$\begin{aligned} v(s, x) &= \cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2} \left( \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) = \\ &= \cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2} (e^{-x} + x - 1), \end{aligned}$$

la [8] ci darà la soluzione

$$\begin{aligned} h(s) &= S(s) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left[ \cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2} (e^{-x} + x - 1) \right] dx = \cos s - \frac{1}{2\pi} + \frac{s}{4\pi^2}, \end{aligned}$$

la quale, come facilmente si verifica, soddisfa la [1].

8. Per dimostrare che la sommabilità della serie [4] è condizione sufficiente affinchè questa possa rappresentare una soluzione della [2], basterà provare che ogni serie di funzioni convergente in modo assoluto ed uniforme in un intervallo finito  $(ab)$  è sempre sommabile in esso; e la sua nuova somma coincide con l'antica.

Abbiasi infatti la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(s)$  di funzioni definite in  $(ab)$  convergente in modo assoluto ed uniforme; e sia  $V(s)$  la sua somma secondo l'antica definizione.

Consideriamo la funzione corrispondente  $S(s, x)$ :

$$\begin{aligned} S(s, x) &= \alpha_0(s) + [\alpha_0(s) + \alpha_1(s)]x + [\alpha_0(s) + \alpha_1(s) + \alpha_2(s)] \frac{x^2}{2!} + \dots = \\ &= \alpha_0(s) e^{x^2} + \alpha_1(s) \left[ x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] + \\ &\quad + \alpha_2(s) \left[ \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] + \dots = \\ &= \alpha_0(s) e^{x^2} + \alpha_1(s) (e^{x^2} - 1) + \alpha_2(s) (e^{x^2} - 1 - x) + \\ &\quad + \alpha_3(s) \left( e^{x^2} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} \right) + \dots \end{aligned}$$

Essendo, per  $x \geq 0$ , i coefficienti delle  $\alpha_n(s)$  tutti positivi e minori di  $e^\infty$ , avremo

$$|S(s, x)| < e^\infty \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n(s)|,$$

la funzione  $S(s, x)$  sarà quindi convergente per ogni  $x \geq 0$  e finito; e poichè

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-x} S(s, x)| < \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n(s)|,$$

la serie data è sommabile (n (a b)).

Ora essendo

$$\begin{aligned} V(s) - e^{-x} S(s, x) &= e^{-x} \left[ \alpha_1(s) + \alpha_2(s) (1+x) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3(s) \left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right) + \alpha_4(s) \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right) + \dots \right] = \\ &= e^{-x} \left[ \left\{ V(s) - \alpha_0(s) \right\} + \left\{ V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s) \right\} x + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \right\} \frac{x^2}{2!} + \dots \right], \end{aligned}$$

posto

$$V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s) - \dots - \alpha_n(s) = R_n(s),$$

sarà anche

$$V(s) - e^{-x} S(s, x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r!};$$

la quale può anche scriversi, se  $m$  è un numero finito qualunque,

$$V(s) - e^{-x} S(s, x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{r=m} R_r(s) \frac{x^r}{r!} + e^{-x} \sum_{r=m+1}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r!}.$$

Per la convergenza uniforme della serie data, potrà determinarsi un numero  $m$  positivo e finito tale che, per ogni  $r \geq m$ , sia  $|R_r(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; essendo  $\frac{\varepsilon}{2}$  una quantità positiva arbitrariamente piccola; sarà, con ciò, per ogni  $x \geq 0$  e finito,

$$\left| e^{-x} \sum_{r=m+1}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r!} \right| < e^{-x} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, essendo, per ogni  $r$  finito,  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^r = 0$ , si potrà trovare un valore finito  $x_1$  di  $x$  tale che per  $x > x_1$ , si abbia, qualunque sia  $s$ ,

$$\left| e^{-x} \sum_{r=0}^{r=m} R_r(s) \frac{x^r}{r!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarà quindi per  $x > x_1$ :

$$|V(s) - e^{-x} S(s, x)| < \varepsilon;$$

cioè la nuova somma coincide coll'antica.

9. Ritornando alla questione propositaci, supposto che [4] sia sommabile in  $(a, b)$ , che la [2] ammetta soluzione e che esista un numero finito e positivo  $\nu$  tale da aversi, per ogni valore di  $\nu$ ,

$$\left| \frac{G^{(\nu)}(s)}{\Gamma_\nu} \right| < e^\nu$$

la serie  $S(s, x)$ , relativa alla [4] sarà, per quanto vedemmo al n. 3, uniformemente convergente rispetto ad  $s$ ; sarà inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} S(s, x) = S(s).$$

Supposto ancora che la convergenza al limite per  $x = \infty$  sia uniforme, avremo:

$$\begin{aligned} \int_a^b K(s, t) \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} S(t, x) \right\} dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^b K(s, t) e^{-x} S(t, x) dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ G^{(1)}(s) + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) \} x + \right. \\ &\quad \left. + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) + G^{(3)}(s) \} \frac{x^2}{2!} + \dots \right] e^{-x}. \end{aligned}$$

Ma ammettendo la [2] soluzione, dev'essere <sup>(1)</sup>

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}(s),$$

dove la serie del secondo membro è sommabile in  $(a, b)$ , in grazia della sua convergenza assoluta ed uniforme; dovrà perciò aversi:

$$\begin{aligned} g(s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left[ G^{(1)}(s) + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) \} x + \right. \\ &\quad \left. + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) + G^{(3)}(s) \} \frac{x^2}{2!} + \dots \right]; \end{aligned}$$

il che prova che la [4] è una soluzione della [2].

(<sup>1</sup>) Vergerio, loc. cit., pag. 19.

Fisica-chimica. — *Sul potere rotatorio dei tartrati di amine sostituite* <sup>(1)</sup>. Nota di LUIGI CASALE, presentata dal Corrisp. ARNALDO PIUTTI.

A. Kannonikow <sup>(2)</sup> in uno studio sul potere rotatorio specifico dell'acido tartarico e dei suoi sali trovò che i tartrati di basi organiche deboli, come l'anilina, l'*o*- e *p*-toluidina, la chinolina, ecc., hanno in soluzione acquosa lo stesso potere rotatorio specifico dell'acido tartarico libero e concluse che questi sali in soluzione acquosa sono completamente idrolizzati.

Più recentemente J. Minguin e H. Wohlgemuth <sup>(3)</sup> studiarono i tartrati di amine grasse ed aromatiche in soluzione per mezzo del potere rotatorio. Essi, per vedere se i tartrati di queste basi sono dissociati, esaminavano soluzioni acquoso-alcooliche equimolecolari di acido tartarico in presenza di quantità crescenti di amine. Per le basi alifatiche il potere rotatorio raggiungeva un massimo quando in presenza di una molecola di acido si trovavano due molecole di amina, nè più aumentava per ulteriore aggiunta di questa. Ciò avrebbe provato che i tartrati neutri di queste basi non sono idrolizzati. Per le amine aromatiche il potere rotatorio cresceva gradualmente a partire dal sale acido col crescere della base fino ad otto e più molecole di questa per una di acido. E, poichè agli autori non riuscì di preparare tartrati neutri di queste amine, essi conclusero che il sale acido formantesi per la unione di una molecola di acido tartarico con una molecola di amina aromatica è notevolmente idrolizzato e che l'aggiunta di ulteriori quantità di base rende sempre minore la dissociazione idrolitica fino ad annullarsi.

Le affermazioni di Kannonikow e quelle di Minguin e Wohlgemuth relative alla idrolisi dei tartrati non sono in accordo coi risultati da me ottenuti nello studio di questi sali.

I lavori di Landolt <sup>(4)</sup> e di Oudemans <sup>(5)</sup> hanno stabilito che per i sali in soluzione diluita anche il potere rotatorio è una proprietà addittiva, e la legge si può esprimere nella seguente forma: *sali contenenti lo stesso ione*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Napoli.

(2) J. russ.-chem. Gesellsch., 1890 [1], 369.

(3) C. r. 147, 998.

(4) B. VI. 1073.

(5) Beibl. IX. 635.

*otticamente attivo devono, allo stato di completa dissociazione in soluzioni equivalenti, avere lo stesso potere rotatorio.* È naturale che non seguiranno questa legge quei sali i quali in soluzione diluita si dissociano idroliticamente. In tal caso la diminuzione del numero degli ioni otticamente attivi per formare altrettante molecole attive indissociate provocherà una variazione nel potere rotatorio molecolare del composto in soluzione proporzionale alla differenza fra i poteri rotatori delle due specie molecolari attive ed alla quantità di sale idrolizzato. Nel caso dell'acido tartarico e dei tartrati questa differenza è notevole giacchè mentre l'acido, pochissimo dissociato, in soluzione diluita mostra una rotazione molecolare di  $+ 22.5^\circ$ , i tartrati acidi dei metalli alcalini nelle stesse condizioni hanno una rotazione di circa  $+ 42^\circ$  ed i tartrati neutri di circa  $+ 63^\circ$ .

Partendo da sali puri io ho preparato soluzioni equimolecolari diluite di tartrati acidi di amine grasse ed aromatiche, ed ho constatato che il loro potere rotatorio molecolare è pressochè identico per tutti e precisamente è uguale a quello già osservato per i sali acidi dei metalli alcalini, pei quali non è ammissibile una dissociazione idrolitica. E così pure partendo da tartrati neutri anidri di amine grasse ed aromatiche ho preparato soluzioni equimolecolari di questi sali: ma i valori trovati in tal caso non sono più identici fra loro, giacchè, mentre i derivati delle amine alifatiche ruotano il piano della luce polarizzata come i tartrati neutri alcalini, i derivati delle amine aromatiche provocano una rotazione quasi sempre minore. Ciò è dovuto alla idrolisi di questi sali.

Si dimostra che la costante di equilibrio della dissociazione idrolitica può essere calcolata mediante le costanti di dissociazione elettrolitica delle sostanze reagenti; cioè nel nostro caso sarebbe la costante di idrolisi

$$K = \frac{C_{H_2O}}{C_{acido} C_{base}}$$

dove con C è indicata la costante di dissociazione elettrolitica. Questa costante ha per le amine grasse un valore medio di  $1 \times 10^{-2}$ , mentre per le amine aromatiche ha un valore medio di  $1 \times 10^{-10}$ ; vale a dire la costante di dissociazione idrolitica nei sali delle amine aromatiche dovrebbe essere in media 100.000.000 di volte più grande di quella dei sali corrispondenti delle amine grasse. Che poi questa minor rotazione sia veramente dovuta ad idrolisi del sale neutro si può dimostrare applicando a queste soluzioni la legge dell'equilibrio omogeneo. Infatti, ammettendo tale dissociazione, deve esistere fra le concentrazioni dei componenti il nostro sistema la relazione

$$\frac{[\text{sale acido}] \cdot [\text{base}]}{[\text{sale neutro}]} = \text{Costante};$$

dovrebbe quindi ad un aumento di concentrazione della base corrispondere un aumento di concentrazione del sale neutro e quindi un aumento di potere rotatorio. Ciò è appunto verificato (v. Tabella n. 1) per il sale neutro di anilina ed è pure dimostrato per i sali di *o*- *m*- e *p*- toluidina dai dati di Minguin e Wohlgemuth, da essi erroneamente interpretati.

Nella Tabella n. 1 sono raccolti i valori da me trovati per i sali delle amine e per l'acido tartarico libero in soluzioni contenenti un centesimo di grammo-molecola del composto in 100 cc. di soluzione alla temperatura di 15°, fatta eccezione per il tartrato acido di pseudocumidina la cui solubilità ha un valore inferiore. Le osservazioni furono fatte con un polarimetro Laurent, grande modello, impiegando un tubo lungo 5 decimetri.

TABELLA N. 1.

Composto	C	$[\alpha]_D^{15}$	$[M]$
Tartrato acido di anilina . . . . .	2,43	+ 17,42°	+ 42,35°
"    " <i>o</i> -toluidina . . . . .	2,57	16,34	42,0
"    " <i>m</i> -toluidina . . . . .	2,57	16,47	42,35
"    " <i>p</i> -toluidina . . . . .	2,57	16,60	42,7
"    " <i>p</i> -amidofenolo . . . . .	2,59	16,2	42,0
"    " <i>p</i> -anisidina . . . . .	2,73	15,4	42,0
"    " <i>p</i> fenetidina . . . . .	2,87	14,75	42,4
"    "    chinolina . . . . .	2,79	14,95	41,7
"    "    piridina . . . . .	2,29	18,5	42,35
"    "    pseudocumidina . . . . .	1,14	14,92	42,5
"    "    benzilamina . . . . .	2,57	16,6	42,7
"    "    dietilamina . . . . .	2,23	18,98	42,35
"    "    metilamina . . . . .	1,81	23,4	42,35
"    "    ammonio . . . . .	1,67	25,55	42,7
"    neutro di anilina . . . . .	3,36	17,1	57,5
"    "    " . . . . .	3,36 + 0,93 di anilina	17,6	59,0
"    "    " . . . . .	3,36 + 1,86 " "	17,24	57,9
"    " <i>o</i> -toluidina . . . . .	3,64	15,6	56,7
"    " <i>m</i> -toluidina . . . . .	3,64	15,8	57,6
"    " <i>p</i> -toluidina . . . . .	3,64	15,85	57,7
"    "    chinolina . . . . .	4,08	13,5	55,9
"    "    piridina . . . . .	3,08	19,2	59,2
"    "    benzilamina . . . . .	3,64	17,4	63,4
"    "    dietilamina . . . . .	2,96	21,1	62,6
"    "    metilamina . . . . .	2,12	29,7	63,1
"    "    ammonio . . . . .	1,84	34,6	63,7
Acido tartarico . . . . .	1,50	15,0	22,5



TABELLA N. 2.

Composto	C	$[\alpha]_D^{20}$	$[M]$
Tartrato acido di ammonio (Landolt)	1,712	+ 25,65°	+ 42,8°
” ” litio ”	7,998	27,43	42,8
” ” sodio ”	4,409	23,95	41,2
” ” potassio ”	0,615	22,61	42,5
” ” tallio (Long)	1,000	12,02	42,5
” neutro di ammonio (Landolt)	9,433	34,26	63,0
” ” litio ”	8,305	35,84	58,1
” ” sodio ”	9,946	30,85	59,9
” ” potassio ”	11,597	28,48	64,4
” ” Na NH <sub>4</sub> ”	9,690	32,65	61,7
” ” K NH <sub>4</sub> ”	10,515	31,11	63,8
” ” Na K (Long)	5,000	29,73	62,5

Nella Tabella n. 2 sono invece raccolti i valori dei poteri rotatori trovati da Landolt e da Long per i tartrati acidi e neutri dei metalli alcalini nelle condizioni indicate di temperatura e di concentrazione.

Si noti (Tabella n. 1) come, aumentando la concentrazione dell'anilina nella soluzione del tartrato neutro di questa base, il potere rotatorio dapprima cresce per poi diminuire senza tuttavia raggiungere il valore trovato per i sali neutri delle amine grasse. Questo è dovuto al fatto che l'aumento di concentrazione della base, mentre fa decrescere la dissociazione idrolitica, fa pure decrescere la dissociazione elettrolitica cosicchè, quando la prima è divenuta trascurabile, in soluzione esiste un sale neutro meno dissociato dei corrispondenti sali di amine alifatiche in soluzioni equimolecolari. In conseguenza della legge di Oudemans-Landolt verificata da Th. Thomsen per i tartrati <sup>(1)</sup> il sale neutro di anilina deve avere in tali condizioni un potere rotatorio molecolare alquanto minore e l'abbassamento deve accentuarsi per l'ulteriore aggiunta di base.

Dalla Tabella n. 1 si vede che, come aveva osservato il Kannonikow, i tartrati neutri di anilina, toluidina, chinolina hanno un potere rotatorio specifico vicino a quello dell'acido tartarico. Ad esempio, per il tartrato neutro di *o*-toluidina si è trovato  $[\alpha]_D^{15} = + 15,6^\circ$ , mentre per l'acido libero si era trovato  $[\alpha]_D^{15} = + 15,0^\circ$ . Ma se invece di riferire le rotazioni ottiche alle quantità in peso delle sostanze noi le riferiamo al numero delle molecole attive, considerando i poteri rotatori molecolari, noi troviamo rispettivamente i valori  $[M]_D^{15} = + 56,7^\circ$  ed  $[M]_D^{15} = + 22,5^\circ$ . Cioè in soluzione acquosa la molecola di tartrato neutro di *o*-toluidina fa ruotare il piano della luce polarizzata più del doppio della molecola di acido tartarico. È dunque completamente infondata l'affermazione fatta da A. Kannonikow circa

<sup>(1)</sup> J. pr. Ch. [2] 35, 145.

la completa dissociazione idrolitica dei tartrati neutri delle basi deboli basandosi sulla uguaglianza dei loro poteri rotatori specifici col potere rotatorio specifico dell'acido tartarico. Egli non tenendo conto di lavori già pubblicati da Landolt (1873) e da Oudemans (1876-1885) aveva attribuito ai poteri rotatori specifici dei tartrati acidi e dei tartrati neutri quella costanza di valore che gli autori ora ricordati, avevano invece già riconosciuto ai poteri rotatori molecolari dei sali attivi. Ed era naturale che egli trovasse deviazioni dalla sua legge, specialmente nei sali delle basi aromatiche di alto peso molecolare.

L'applicazione della legge di Andeman-Landolt avrebbe pure evitato a Minguin e Wohlgemuth l'erronea deduzione circa la dissociazione idrolitica dei tartrati acidi delle basi deboli. Infatti, questi autori avrebbero constatato dai dati polarimetrici da loro stessi trovati che i poteri rotatori molecolari delle soluzioni dei tartrati acidi di anilina, di *m*- e *p*-toluidina erano identici ai poteri rotatori molecolari dei sali corrispondenti di propilamina, di butilamina, di dietilamina, di trietilamina, per i quali essi escludevano ogni dissociazione idrolitica. Ed avrebbero pure constatato che i poteri rotatori molecolari osservati per i tartrati delle amine aromatiche in presenza di un eccesso di base si avvicinavano al valore trovato per i sali neutri delle amine grasse.

Del resto i sali neutri delle amine aromatiche, contrariamente all'affermazione di Minguin e Wohlgemuth, si possono facilmente preparare dalle loro soluzioni acquose contenenti un eccesso di base. Questi tartrati già prima ottenuti e studiati, furono di recente descritti da Th. Percy Hilditch <sup>(1)</sup>. Sono sostanze ben cristallizzate, incolore, aventi generalmente, a differenza dei sali acidi, acqua di cristallizzazione.

I valori dei poteri rotatori molecolari trovati per i sali soprascritti, permettono di concludere:

1° I tartrati acidi delle basi organiche in soluzione acquosa diluita, a temperatura ordinaria, posseggono un potere rotatorio molecolare identico a quello trovato per i tartrati acidi dei metalli alcalini; essi quindi non sono idrolizzati.

2° I tartrati neutri delle amine grasse, nelle stesse condizioni di temperatura e concentrazione, hanno un potere rotatorio molecolare uguale a quello trovato per i corrispondenti sali alcalini; essi pure non subiscono adunque dissociazione idrolitica.

3° I tartrati neutri delle amine aromatiche in condizioni identiche mostrano un potere rotatorio molecolare notevolmente inferiore a quello osservato per i sali corrispondenti delle amine grasse che cresce coll'aumentare della concentrazione della base nella soluzione; essi sono quindi parzialmente idrolizzati.

<sup>(1)</sup> C. 1911, I, 114.

Fisica. — *Una nuova determinazione della costante della legge di Stefan-Boltzmann* <sup>(1)</sup>. Nota della dott.<sup>ssa</sup> MARYA KAHANOWICZ, presentata dal Corrisp. M. CANTONE.

Intrapresi questa ricerca, perchè il metodo prometteva qualche vantaggio rispetto a quelli fin'ora adoperati nelle varie determinazioni della costante suddetta. Il fatto che non si sia ancora riuscito a verificare sperimentalmente la legge stessa di Stefan-Boltzmann, poichè in ogni serie di esperienze eseguite dai diversi sperimentatori si è sempre riscontrata una dipendenza sistematica dei valori di  $\sigma$  dalla temperatura, dalla distanza e dalle dimensioni delle aree raggianti, come anche la circostanza non insignificante che i valori medii di  $\sigma$  sono stati dedotti dai vari sperimentatori da valori abbastanza discordanti, crea dei dubbi intorno al buon funzionamento tanto dei ricevitori integrali adoperati, quanto dei radiatori messi in prova.

Come apparecchi più perfetti si presentano il bolometro di Kurlbaum <sup>(2)</sup>, e la pila Paschen, modificata da Gerlach <sup>(3)</sup>, perchè in essi i due processi — il radiometrico e l'elettrico — avvengono in condizioni identiche, risultando la medesima lamina ricevitrice sede dell'assorbimento dell'energia raggiante e della produzione dell'energia elettrica, il che assicura la condizione che per la compensazione vi sia una spesa di energia uguale a quella da compensare, condizione non raggiunta rigorosamente in nessun altro ricevitore integrale. L'apparecchio di Gerlach presenta però l'inconveniente che non si realizza con esso un regime stabile per il funzionamento del sistema termometrico, essendo difficile ammettere che la posizione della pila affacciata colle saldature alla lamina ricevitrice e tenuta da essa a distanza mantenga inalterata la sua posizione rispetto alla lamina, onde risultano condizioni non stazionarie per la trasmissione del calore. D'altronde la piccola prontezza dell'apparecchio, il quale richiede un tempo di esposizione di 2 minuti, mentre col bolometro di Kurlbaum si raggiunge l'equilibrio dopo 20 o 30 secondi, fa temere che nasca un'azione efficace anche da parte degli schermi esterni. Perciò questo metodo non è il più adatto per l'uso di un ricevitore del tipo termoelettrico. Condizioni certamente migliori si realizzano col ricevitore integrale di Amerio <sup>(4)</sup>, nel quale la saldatura della coppia termoelettrica è applicata direttamente sulla lamina ricevitrice, raggiungendo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

(2) Wied. Ann. 46, 1892, pag. 204; Wied. Ann. 65, 1898, pag. 746.

(3) Ann. d. Phys. 38, 1912, pag. 1.

(4) Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. X, fascicolo 9, pag. 337. V. anche Corso di Fisica sperimentale del prof. M. Cantone, vol. III, pag. 429.

dosi così lo scopo che la trasmissione di calore avvenga sempre nelle identiche condizioni e rapidamente.

Il forno elettrico costituisce certamente il migliore artificio per realizzare il principio della cavità con pareti a temperatura uniforme, ma soltanto nel caso in cui il fascio è limitato ai raggi emergenti dalla parte centrale del tubo, ove la temperatura si mantiene sensibilmente uniforme. Le dimensioni delle finestre nel caso delle esperienze di Lummer e Kurlbaum, di Valentiner e di altri per la loro grandezza non garantivano affatto che si ricevesse energia solo dalla regione centrale, giacchè i diaframmi interni, se limitano il fascio, costituiscono in parte sorgenti di energia a temperatura non uniforme. Nè a togliere il dubbio spontaneo vale l'asserzione dei signori Lummer e Kurlbaum fondata sull'osservazione visuale<sup>(1)</sup>, perchè i giudizi su questa base sono assai grossolani.

Un'altra causa di errore sta nel modo come i diversi sperimentatori computavano la temperatura. Essi seguivano le vicissitudini del forno in tutto il regime crescente, assegnando volta per volta il valore della costante alla temperatura osservata, senza arrivare ad un regime costante<sup>(2)</sup>. Come ho potuto accertare nelle mie esperienze, nelle quali sono riuscita a raggiungere caso per caso le condizioni di regime, la temperatura dedotta in condizioni variabili risulta maggiore di quella ottenuta a regime costante, e ciò si spiega col fatto che, data la piccola conducibilità della sostanza refrattaria del tubo, il processo verso la temperatura uniforme si compie troppo rapidamente per essere risentito dall'elemento termoelettrico, sicchè lo stato termico di quest'ultimo è in ritardo rispetto a quello delle pareti.

In quanto poi al radiatore di Puccianti<sup>(3)</sup>, è da notare che l'energia da esso irradiata non può considerarsi come dovuta ad un corpo nero, 1° perchè le pareti della cavità difficilmente potevano assumere temperatura uniforme, per quanto si cercasse di mantenere il pallone nell'aria liquida fino al collo; 2° perchè lo schermo che limitava l'area emittente non era mantenuto alla temperatura del ricevitore, nel quale caso, come risulta da alcune mie esperienze (ved. pag. 7), dove si faceva fluire lentamente il liquido nella scatola in cui era praticata la finestra, funzionano da sorgente anche le pareti che limitano l'apertura, aggiungendo dell'energia a quella emessa dal radiatore.

Nel ricevitore integrale fatto costruire dal prof. Cantone è applicato il sistema di Amerio: una lamina di manganina di cm. 0,013, di spessore sufficientemente uniforme, ricoperta dai due lati di nerofumo, porta saldata

(1) Ann. d. Phys., 5, 1901, pag. 829.

(2) V. p. es. il procedimento sperimentale di Valentiner (Ann. de Phys., 31, 1910, pag. 304 e seguenti).

(3) Nuovo Cimento (6), 4, 1912, pag. 36.

nel centro una coppia termoelettrica ferro-nichel. Il sistema è racchiuso in un involucro sferico di ottone, con argentatura elettrolitica all'interno, di cm. 12 di diametro esterno e di cm. 10 di diametro interno. La finestra rettangolare praticata nell'involucro in corrispondenza alla lamina, risulta tanto in larghezza (cm. 0,335), che in lunghezza (cm. 1,410) un poco più piccola della lamina, onde il fascio, che proviene da altra finestra presso a poco della stessa area a distanza di cm. 35, o di cm. 56, colpisce integralmente la lamina interna annerita. Con questo ci avviciniamo, più che nelle ricerche degli altri sperimentatori, ad una radiazione normale, e si realizza inoltre la condizione di un'apertura assai piccola rispetto alla superficie interna dell'involucro, condizione che si verifica in modo ben grossolano in molti ricevitori usati con una certa pretesa di grande rigore. D'altra parte si può essere sicuri che le grosse pareti dell'involucro conservano una temperatura uniforme e quasi costante, poichè la quantità di calore che viene da esse assorbita nel breve tempo di azione dell'involucro è talmente piccola da non produrre una sensibile variazione di temperatura.

Assumendo per il potere assorbente del nerofumo 0,96 e per il potere riflettente dell'argento 0,95, si deduce per il potere assorbente<sup>(1)</sup> del nostro ricevitore 0,998; donde segue che anche in condizioni molto sfavorevoli l'energia viene assorbita da questo ricevitore quasi totalmente, avendosi una perdita di solo 0,2%. In condizioni più favorevoli, cioè nell'ipotesi che il potere assorbente del nerofumo sia 0,98, si avrebbe la perdita di solo 0,1%. Si vede pertanto che il ricevitore da me usato, pur non essendo di grande sensibilità rispetto alle temperature relativamente basse della sorgente, presenta qualche vantaggio sugli altri messi in opera nelle varie ricerche per la determinazione di  $\sigma$ , in quanto che un fascio sensibilmente cilindrico penetra nel ricevitore, dove è assorbito quasi per intero, e determina nella saldatura attaccata alla laminetta un effetto termico nello stesso modo che col passaggio della corrente fornita dall'accumulatore nel tempo brevissimo (30 secondi) necessario a raggiungere il regime stazionario.

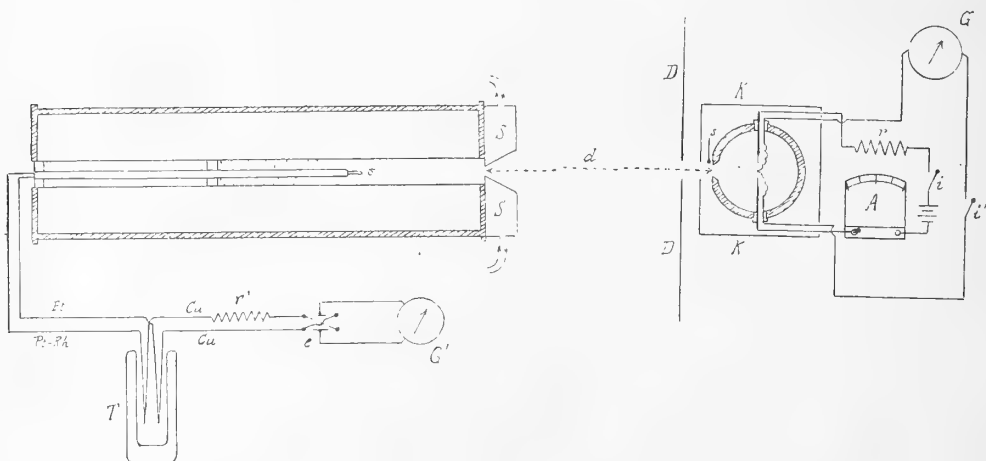
Il ricevitore era chiuso in una scatola di latta *R* seguita da uno schermo riflettente *D* abbastanza grande; e lo sportellino *s*, manovrabile per trasmissione a distanza, serviva per intercettare la radiazione negli intervalli di riposo.

Come si cennò, per il radiatore si fece uso di una piccola area raggianti; e si cercò di ottenere nel miglior modo possibile l'uniformità di temperatura nella regione da cui direttamente emanava il fascio penetrante nel ricevitore. Si ricorse a tale scopo ad un forno elettrico modello Heraeus, di 60 cm. di lunghezza, alla cui estremità anteriore fu applicato uno schermo *S* a scatola con circolazione di acqua, ed avente un'apertura rettangolare interna.

(1) V. Amerio, loc. cit., pag. 337.

larga cm. 0,370 ed alta cm. 1,432. Affinchè il tubo potesse funzionare da corpo nero, fu operata dallà parte posteriore la chiusura con un disco di amianto sciolto, impastato nel biossido di manganese; la saldatura  $\sigma$  di un elemento Le Chatelier occupava la parte centrale del tubo.

La laminetta del ricevitore era chiusa in circuito con un accumulatore, con una cassetta di resistenze  $r$ , con un milliamperometro di precisione di Hartmann e Braun  $A$ , e con un interruttore a mercurio  $i$ . La coppia termoelettrica formava circuito con un galvanometro tipo Deprez-d'Arsonval  $G$  avente la sensibilità di  $6 \times 10^{-10}$  Amp. a due metri di distanza, e con un interruttore a mercurio  $i'$ . La perfetta simmetria di questo galvanometro indusse a ritenere trascurabile l'azione disturbatrice per effetto Peltier, quindi



si rese superflua l'inversione della corrente. Nel circuito dell'elemento Le Chatelier i fili di rame che partivano dalle saldature fredde, riparate in un pallone Dewar  $T$ , riempito di ghiaccio, si univano al galvanometro  $G'$  del tipo Deprez-d'Arsonval di sensibilità di  $8 \times 10^{-9}$  Amp. a due metri di distanza, mediante una cassetta di resistenze  $r'$  ed un commutatore a mercurio  $c$ .

La taratura dei galvanometri fu eseguita con due elementi Weston e con resistenze misurate col ponte di Wheatstone. Alla stessa unità di resistenza del ponte furono riportate le resistenze della cassetta  $r'$  e del galvanometro  $G'$ . Fu controllata anche la graduazione del milliamperometro  $A$ , adoperando in questa taratura la stessa unità di f. e. m. dell'elemento Weston e la stessa unità di resistenza del ponte. Le dimensioni delle aree raggianti vennero determinate con la macchina a dividere.

Si eseguì la taratura del ricevitore parecchie volte durante il lavoro e si accertò sempre la medesima sensibilità dell'apparecchio. Per la resistenza della laminetta, misurata col ponte di Wheatstone la cui unità fu confron-

tata coll'Ohm Internazionale, si ebbe costantemente il valore di ohm internazionali 0,0802.

Per dedurre la costante  $\sigma$ , si applicava la formola

$$(1) \quad \frac{\sigma (T^4 - T_0^4) \mathcal{A}_s \mathcal{A}_s'}{\pi d^2} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2}{d^2} \right) = i^2 r,$$

dove si denota con  $T$  la temperatura del radiatore, con  $T_0$  quella del ricevitore; con  $a, b$  e  $a', b'$  le dimensioni delle aree raggianti  $\mathcal{A}_s$  e  $\mathcal{A}_s'$ , poste alla distanza  $d$ ; con  $i$  l'intensità di corrente data dal milliamperometro e con  $r$  la resistenza della laminetta.

Per la graduazione dell'elemento Le Chatelier si ricorse ad un bagno ad acqua fino a  $100^\circ$  e ad un bagno ad olio di lino fino a  $300^\circ$ , procedendo per piccoli intervalli termici, poichè in questa regione la linea figurativa della f. e. m. in funzione della temperatura presenta una curvatura molto pronunziata. Precisato così l'andamento della curva nella regione di notevole curvatura, bastava un punto piuttosto distante per ottenere i dati necessari alla interpolazione e ad una leggiera estrapolazione. Fu scelto a tale scopo il punto di ebollizione dello zolfo ( $444^\circ, 55$ ).

Volendo rappresentare la f. e. m. dell'elemento con una funzione di 2° grado della temperatura, si ottiene l'espressione:

$$(2) \quad E = -114,33 + 7,262 t + 0,0020 t^2,$$

dove  $E$  indica la f. e. m. espressa in mikrovolta e  $t$  la temperatura della saldatura Pt, Pt-Rh riferita alla scala normale, supponendo gli altri punti di unione a  $0^\circ$ . Come si rileva dall'annessa tabella, il punto di ebollizione dello zolfo e le temperature vicine alla iniziale si accordano male col ramo ascendente della curva; inoltre si ha l'inconveniente che presentano tutte le funzioni di 2° grado di Holborn e Day <sup>(1)</sup>, dedotte per gli elementi termoelettrici accoppiati col platino, risultando una f. e. m. negativa per la temperatura  $0^\circ$  della saldatura calda. Ciò importa per l'elemento normale da me adoperato un errore di quasi  $16^\circ$  per la temperatura iniziale. Bisogna quindi concludere che per questo elemento, o meglio per questa categoria di elementi, la legge sperimentale di Avenarius si verifica piuttosto male.

La f. e. m. del detto elemento si rappresenta invece molto bene con la seguente funzione di 3° grado della temperatura:

$$(3) \quad E = -20 + 5,573 t + 0,00894 t^2 - 0,0000076 t^3$$

colla quale non solo si riesce ad allacciare bene tutti i punti di riferimento nella graduazione, ma si rendono molto più piccoli gli errori residui e si fa

(1) Ann. d. Phys. 2, 1900, pag. 520.

acquistare ad essi il vero carattere di errori accidentali. Per la temperatura iniziale risulta all'ora un errore di soli 3,5°, che porta effetto quasi trascurabile nella valutazione delle temperature utilizzate, che furono tutte superiori ai 250°.

$t_{oss.}$	E	Funzione di secondo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$	Funzione di terzo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$	$t_{oss.}$	E	Funzione di secondo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$	Funzione di terzo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$
0,0	0,0	— 15,7	— 3,5	175,9	1209,4	+ 2,0	— 1,7
25,8	132,3	— 7,9	— 0,5	200,5	1407,7	+ 1,8	— 1,4
50,6	279,7	— 2,9	+ 0,6	228,1	1629,5	+ 2,1	— 0,4
77,3	457,8	0,0	+ 0,4	254,7	1846,0	+ 2,3	+ 1,0
100,0	622,5	+ 1,2	— 0,5	280,8	2067,7	+ 1,8	+ 1,7
125,7	813,4	+ 2,2	— 0,9	306,3	2296,2	+ 0,2	+ 1,3
150,8	1006,7	+ 2,5	— 1,2	444,4	3560,5	— 5,7	— 0,3

Le temperature del forno furono dedotte colla formola (3), riferendosi all'indicazione del galvanometro quando essa diveniva stazionaria o quasi. Si faceva funzionare il forno per 8 o 9 e talvolta per 10 ore, e si seguiva il regime crescente per le ultime 3 o 4 ore. L'esperienza si faceva ad intervalli di un'ora, leggendo consecutivamente il galvanometro annesso al forno e quello del ricevitore e ripetendo l'esperienza due volte. La costante poi si deduceva dalle medie dei valori dedotti nel periodo stazionario dei galvanometri.

I valori così ottenuti, raccolti nella tabella, non mostrano nessun andamento sistematico nè in dipendenza dalla temperatura, nè in dipendenza dalla distanza. Perciò si è indotti a ritenere: 1° che la (3) permette l'estrapolazione della temperatura per lo meno fino a 540°; 2° che l'energia assorbita dal ricevitore non è influenzata in modo sensibile dalla radiazione diffusa dagli schermi. E per quanto riguarda l'assorbimento atmosferico, ritenuto da alcuni come causa di errore non lieve, devo notare che, sebbene avessi operato a temperature basse per le quali l'assorbimento dovrebbe essere notevole, l'accordo fra i risultati ottenuti alle distanze di 35 e di 56 cm. porterebbe ad escludere una sensibile influenza di questa causa di errore.



$$d = 35 \text{ cm}$$

DATA	$t$	$\sigma$	DATA	$t$	$\sigma$
18 ottobre 1916	326,9	$5,7 \times 10^{-12}$	24 novembre 1916	373,3	$5,8 \times 10^{-12}$
19 " "	323,9	5,6	28 " "	511,2	5,5
24 " "	317,3	5,7	29 " "	537,2	5,5
25 " "	381,2	5,6	30 " "	323,9	5,6
26 " "	381,2	5,6	1 dicembre 1916	376,1	5,7
27 " "	378,1	5,7	2 " "	433,0	5,7
30 " "	457,7	5,5	4 " "	523,9	5,5
10 novembre 1916	447,8	5,4	6 " "	532,5	5,4
13 " "	469,4	5,5	7 " "	520,8	5,5
20 " "	464,7	5,5	8 " "	256,1	5,7
22 " "	437,6	5,7	9 " "	260,8	5,6
23 " "	502,7	5,5	11 " "	287,1	5,7

$$d = 56,2 \text{ cm}$$

13 dicembre 1916	529,6	$5,7 \times 10^{-12}$	15 dicembre 1916	434,4	$5,5 \times 10^{-12}$
14 " "	512,5	5,7	16 " "	452,5	5,7

$$\text{Media: } \sigma = 5,60$$

La media di tutti i valori è 5,60, e resterebbe inalterata se anche si volessero scartare i valori estremi 5,4 e 5,8. Colla correzione del 0,2%, essa diverrebbe 5,62, ma ciò, come si è visto, corrisponderebbe a condizioni molto sfavorevoli; il valore più probabile che risulta dalle mie esperienze è quindi 5,61.

Il vantaggio delle piccole aree raggianti risulta anche dal fatto, che il termine di correzione per la non perfetta normalità di tutti gli elementi di superficie diventa trascurabile. Nelle mie esperienze esso importa quattro unità nella terza cifra decimale per la prima distanza, ed un'unità per la seconda; il mio valore risulta perciò indipendente da questa causa di errore.

DATA	$t$	$\sigma$
21 ottobre 1916 . . . . .	326,3	$5,8 \times 10^{-12}$
23 " " . . . . .	349,1	5,8
28 " " . . . . .	361,3	5,8
16 novembre 1916 . . . . .	488,7	5,7

Dall'esperienze con efflusso lento, riassunte nel precedente specchietto, si deduce che, se la temperatura non è uniforme in tutto l'ambiente esterno, si ha azione efficace anche da parte delle pareti che limitano l'area emittente.

Riferendomi ai valori ottenuti coi metodi che si presentano come più rigorosi, credo che il mio offra maggiore garanzia di attendibilità, sia perchè, come risulta dal presente specchietto

Sperimentatore	Metodo	Temperatura	Distanza fra le aree raggianti	$\sigma \times 10^{12}$	
				Valori diretti	Valori corretti per la riflessione
Kurlbaum	Bolometro	100°	19cm; 48cm	5,32	5,45
Valentiner	"	100°; 829°-1433°	26cm - 124cm	5,38	5,58
Gerlach	Ricevitore di Paschen	100°	30cm - 43cm	5,803	5,9
Coblentz	Ricevitore di Paschen modificato	1056°-1084°	37cm - 52cm	5,68	5,72
Kahanowicz	Ricevitore di Amerio modificato	256°-537°	35cm; 56cm	5,60	5,61

è ottenuto con un ricevitore che funziona da corpo nero, mentre il bolometro di Kurlbaum ed i ricevitori di Paschen e di Coblentz hanno un potere riflettente non trascurabile, sia perchè, come si è visto, esso risulta indipendente dalla temperatura e dalla distanza.

Al prof. Cantone, che mi ha indirizzato in questa ricerca, rivolgo vivissimi ringraziamenti.

M. E.

## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76). Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche,  
matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali,  
storiche e filologiche.
- Vol. V. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 8°. Sem. 1<sup>o</sup>.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XII. Fasc. 3.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

I Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese, il primo e il secondo volume, corrispondenti ognuno ad una classe.

Il prezzo di associazione per l'anno è di lire 10.000 per tutti l'Italia e di lire 12.000 per l'estero, in più per le spese di spedizione.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO BERTHOLD & C. — *Firenze, Torino e Livorno.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

I N D I C E

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 15 aprile 1917.*

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Enriques.</i> Sul rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare . . . . .	Pag. 415
<i>Artini.</i> Il polimorfismo della dinitrotoluidina $C_6H_4(NO_2)_2.NH_2.CH_3$ . . . . .	" 420
	(1)    (3)    (5)    (2)
<i>Dé Marchi.</i> Onde interne nell'Adriatico. Risposta al prof. <i>E. Oddone</i> . . . . .	" 425
<i>Vergerio.</i> Un'applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali (pres. dal Socio <i>Levi-Civita</i> ) . . . . .	" 426
<i>Casale.</i> Sul potere rotatorio dei tartrati di amine sostituite (pres. dal Corrisp. <i>Piutti</i> ) . . . . .	" 434
<i>Kahanowicz.</i> Una nuova determinazione della costante della legge di Stefan-Boltzmann (pres. dal Corrisp. <i>Cantone</i> ) . . . . .	" 439

ERRATA CORRIGE

---

Alla pag. 191 linea 10 dal basso leggasi La (6)  
 " " " 8 " " la (7) mostra  
 " 318 " 22 invece di 2,24 si legga 2,34  
 " 320 " 19 " 12,72 " 12,82  
 " 321 " 1<sup>a</sup> " « verticale » si legga « vorticale ».

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 6 maggio 1917.*

Volume XXVI.<sup>o</sup> — Fascicolo 9<sup>o</sup>

1<sup>o</sup> SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e stranieri, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di stranieri presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli stranieri; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da stranieri la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni: - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in tutto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenta una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorché nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se stranieri. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 6 maggio 1917.*

A. RÖTTI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Rappresentazioni normali uniformi e sistemi di Weingarten.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. In una mia Nota inserita nel vol. XXV di questi Rendiconti (seduta del 6 febbraio 1916), ho posto il concetto di *rappresentazioni normali uniformi* di due spazii qualunque  $S_n, S'_n$ , di equal numero  $n$  di dimensioni, l'uno sull'altro; e nel caso che i due spazii abbiano curvatures costanti  $K, K'$  (differenti od eguali) ho dimostrato che esistono infinite rappresentazioni della specie, dipendenti da  $n(n-1)$  funzioni arbitrarie. Ogni tale rappresentazione dà luogo a due sistemi  $n^{pi}$  ortogonali, l'uno nello spazio  $S_n$ , l'altro nello spazio  $S'_n$ , che diciamo i sistemi principali della rappresentazione, le loro linee coordinate seguendo in ogni punto una delle  $n$  direzioni principali.

La ricerca di questi notevoli sistemi  $n^{pi}$  ortogonali, nell'ipotesi che i moduli principali di dilatazione  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  siano costanti diseguali, viene a dipendere dal sistema di equazioni a derivate parziali stabilito al n. 5 della Nota [sistema (B)], che lega i coefficienti  $H_i$  del  $ds^2$

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \dots + H_n^2 du_n^2$$

e le corrispondenti rotazioni  $\beta_{ik}$ . Se si pone

$$c_1 = \frac{1}{\mu_1^2}, c_2 = \frac{1}{\mu_2^2}, \dots, c_n = \frac{1}{\mu_n^2}.$$

questo sistema differenziale fra le  $H_i$  e le  $\beta_{ik}$  si scrive:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad , \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda}^{(i, k)} \frac{c_k - c_\lambda}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K c_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k \quad (1). \end{array} \right.$$

Le (I) formano un sistema di Bourlet-Darboux *completamente integrabile*, e la sua soluzione generale comprende quindi  $n(n-1)$  funzioni arbitrarie.

L'integrazione effettiva del sistema (I) è un problema manifestamente molto complicato in generale; però dimostreremo che anche qui, come in tante altre questioni di analisi applicata alla geometria, si possono stabilire dei metodi ricorrenti che, partendo da una soluzione nota, permettono di trovarne infinite nuove coll'integrazione di equazioni differenziali ordinarie. E spingendo più in là la ricerca si potrebbe dimostrare un *teorema di permutabilità* che permette di risparmiare ogni integrazione.

2. L'accennato metodo *d'integrazione successiva* del sistema (I) dipende geometricamente dalle *trasformazioni di Ribaucour* per involuipi di ipersfere dei sistemi  $n^{plo}$  ortogonali. Per le formole relative a queste trasformazioni mi riporto all'altra Nota nello stesso volume dei Rendiconti (19 marzo 1916), le formole ivi stabilite per lo spazio  $S_n$  euclideo valendo ancora nel caso generale con leggere modificazioni, dovute alla curvatura dello spazio.

Abbiasi nello spazio  $S_n$ , di curvatura costante  $K$ , un sistema  $n^{plo}$  ortogonale  $(\Sigma)$ , definito dalla corrispondente forma del  $ds^2$

$$(2) \quad ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \dots + H_n^2 du_n^2.$$

I coefficienti  $H_i$  e le relative rotazioni  $\beta_{ik}$  sono legati dalle equazioni caratteristiche:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad , \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_h} + \sum_{\lambda}^{(i, k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + K H_i H_k = 0. \end{array} \right.$$

Ora le trasformazioni di Ribaucour per involuipi di ipersfere dei sistemi  $n^{plo}$  ortogonali  $(\Sigma)$  in altri sistemi  $(\Sigma')$  derivati corrispondono biunivocamente ai sistemi di  $n+1$  funzioni

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \varphi,$$

(1) Per il significato delle segnature veggasi la Nota citata.



che diremo le *funzioni trasformatrici*, assoggettate a soddisfare al sistema differenziale

$$(4) \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i.$$

sistema che ammette soluzioni dipendenti da  $n$  funzioni arbitrarie. Scelta una soluzione  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi)$  delle (4), dal sistema  $(\Sigma)$  supposto noto si avrà *in termini finiti* il sistema  $(\Sigma')$  derivato con formole che non occorre qui trascrivere. Solo importa osservare che la relazione fra  $(\Sigma)$ ,  $(\Sigma')$  è involutoria, onde avremo  $n$  funzioni trasformatrici  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n, \bar{\varphi}$  pel passaggio inverso da  $(\Sigma')$  a  $(\Sigma)$ , e queste sono date dalle semplici formole (ibi, n. 4):

$$(5) \quad \bar{\gamma}_1 = \varrho \gamma_1, \quad \bar{\gamma}_2 = \varrho \gamma_2, \dots, \bar{\gamma}_n = \varrho \gamma_n, \quad \bar{\varphi} = -\varrho \varphi,$$

con  $\varrho$  fattore di proporzionalità (funzione delle  $u_i$ ).

3. Ciò premesso, dimostriamo che si arriva allo stesso sistema fondamentale (I) proponendosi la questione seguente:

*Quali sono i sistemi  $n^{\text{th}}$  ortogonali  $(\Sigma)$  dello spazio  $S_n$ , a curvatura costante  $K$ , che ammettono trasformazioni di Ribaucour colle funzioni trasformatrici  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi$  legate da un'identità quadratica*

$$(6) \quad c_1 \gamma_1^2 + c_2 \gamma_2^2 + \dots + c_n \gamma_n^2 + K' \varphi^2 = \text{cost.},$$

dove  $c_1, c_2, \dots, c_n, K'$  sono costanti, le prime  $n$  inoltre differenti da zero e fra loro?

Avvertiamo che qui ed in seguito escluderemo sempre i casi, di più ovvia trattazione, nei quali si annulli qualche rotazione  $\beta_{ik}$ . Ora dalla (6), derivata rapporto ad una qualunque  $u_i$ , abbiamo

$$\gamma_i \left\{ c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_{\lambda} \beta_{\lambda i} \gamma_{\lambda} + K' H_i \varphi \right\} = 0,$$

ed essendo  $\gamma_i \neq 0$ , ne dedurremo le

$$(4') \quad c_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_{\lambda}^{(i)} c_{\lambda} \beta_{\lambda i} \gamma_{\lambda} + K' H_i \varphi = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Aggregando queste  $n$  equazioni alle (4), dobbiamo esaminare le relative condizioni d'integrabilità

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} \gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{\lambda}^{(i)} c_{\lambda} \beta_{\lambda i} \gamma_{\lambda} + K' \frac{\partial}{\partial u_k} (H_i \varphi) = 0.$$

che possiamo scrivere

$$c_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{ik} \gamma_k) + c_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta_{ki} \gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_{\lambda} \beta_{\lambda i} \gamma_{\lambda} + K' \frac{\partial}{\partial u_k} (H_i \varphi) = 0.$$

Eseguendo le derivazioni colle (4), (3) e raccogliendo i termini che contengono  $\gamma_k$ , otteniamo:

$$(7) \quad \gamma_k \left\{ c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_{\lambda} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + K' H_i H_k \right\} + \Omega = 0,$$

avendo posto

$$\Omega = c_i \beta_{ik} \beta_{ki} \gamma_i + \beta_{ki} c_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \beta_{ki} \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_{\lambda} \beta_{\lambda k} \gamma_{\lambda} + K' \beta_{ki} H_k \varphi,$$

ed anche

$$\Omega = \beta_{ki} \left\{ c_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_{\lambda} \beta_{\lambda k} \gamma_{\lambda} + K' H_k \varphi \right\}.$$

Ora per la (4') è  $\Omega = 0$ , indi la (7) resta

$$c_i \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + c_k \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} c_{\lambda} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + K' H_i H_k = 0,$$

e questa, combinata colla (3) della seconda linea, ci dà

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_k - c_{\lambda}}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K c_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k,$$

che è precisamente l'equazione della seconda linea nel sistema (I). Adunque se le funzioni trasformatrici  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \varphi$  sono legate dall'identità quadratica (6), il sistema  $n^{\text{to}}$  ortogonale ( $\Sigma$ ) appartiene necessariamente alla classe caratterizzata dal sistema differenziale (I).

4. Viceversa, se il sistema ( $\Sigma$ ) appartiene a questa classe, aggregando le (4') alle (4), si ha il sistema di equazioni lineari ai differenziali totali per le funzioni incognite  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \varphi$ :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = - \sum_{\lambda}^{(i)} \frac{c_{\lambda}}{c_i} \beta_{\lambda i} \gamma_{\lambda} - \frac{K' H_i \varphi}{c_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i. \end{array} \right.$$

Ora il calcolo stesso sopra eseguito dimostra che, a causa delle (I), questo è un sistema completamente integrabile, ed ammette l'integrale quadratico (6). La sua soluzione generale contiene quindi  $n + 1$  costanti arbitrarie per le quali possiamo assumere i valori iniziali  $\gamma_i^{(0)}, \varphi^{(0)}$  delle fun-

zioni trasformatrici per un sistema iniziale  $u_i^{(0)}$  di valori delle variabili indipendenti.

Ora di più scegliamo i valori iniziali  $\gamma_i^{(0)}$ ,  $\varphi^{(0)}$  per modo che si annulli nella (6) la costante del secondo membro, indi si abbia <sup>(1)</sup>

$$(II^*) \quad c_1 \gamma_1^2 + c_2 \gamma_2^2 + \dots + c_n \gamma_n^2 + K' \varphi^2 = 0.$$

Applicando allora al sistema ( $\Sigma$ ) la corrispondente trasformazione ( $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n; \varphi$ ) di Ribaucour, è facile vedere che il sistema derivato ( $\Sigma'$ ) apparterrà alla medesima classe. Ed infatti le funzioni trasformatrici  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n; \bar{\varphi}$  nel passaggio inverso da ( $\Sigma'$ ) a ( $\Sigma$ ) soddisferanno ancora, per le (5), alla relazione quadratica (II\*) che caratterizza, come si è visto, i sistemi  $n^{pi}$  ortogonali ( $\Sigma$ ) corrispondenti alle formole (I). Concludiamo quindi:

*Nota una rappresentazione normale uniforme di uno spazio  $S_n$  a curvatura costante  $K$  sopra un altro spazio  $S'_n$  di curvatura costante (negativa)  $K'$ , se ne ottengono infinite nuove integrando il sistema lineare ai differenziali totali (II), colla condizione (II\*) ai limiti.*

5. Nei risultati ottenuti è essenziale l'ipotesi che i moduli di dilatazione siano tutti diversi e resta a vedersi quali modificazioni vi si introducono per l'eguaglianza di due o più dei moduli.

Limitiamo qui la ricerca al caso  $n=3$  degli spazii a tre dimensioni, sempre escludendo i casi di più facile trattazione in cui si annulli qualche  $\beta_{ik}$ , chè allora nel sistema triplo una famiglia è composta di superficie parallele e le altre due di sviluppabili. Siano

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 &= H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2 \\ ds^2 &= a^2 H_1^2 du_1^2 + a^2 H_2^2 du_2^2 + c^2 H_3^2 du_3^2 \end{aligned} \right.$$

i due elementi lineari di  $S_3, S'_3$ , le costanti  $a^2, c^2$  essendo supposte naturalmente diseguali.

Indicando con accenti le quantità relative al secondo spazio, si ha

$$H'_1 = a H_1, \quad H'_2 = a H_2, \quad H'_3 = c H_3,$$

e conseguentemente

$$\beta'_{12} = \beta_{12}, \quad \beta'_{21} = \beta_{21}; \quad \beta'_{13} = \frac{c}{a} \beta_{13}, \quad \beta'_{23} = \frac{c}{a} \beta_{23}; \quad \beta'_{31} = \frac{a}{c} \beta_{31}, \quad \beta'_{32} = \frac{a}{c} \beta_{32}.$$

<sup>(1)</sup> Si avvertirà che se il sistema ( $\Sigma$ ) corrisponde ad una rappresentazione normale uniforme di  $S_n$  sopra  $S'_n$ , le costanti  $c_i$  sono per le (1) tutte positive, e per ciò deve essere  $K' < 0$ , ossia lo spazio  $S'_n$  deve essere pseudosferico.

Se scriviamo l'equazione della terza linea in (3) per lo spazio  $S_3$

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} + K H_1 H_2 = 0,$$

insieme all'analogia per  $S'_3$

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \frac{a^2}{c^2} \beta_{31} \beta_{32} + K' a^2 H_1 H_2 = 0,$$

sottraendo abbiamo

$$\left( \frac{a^2}{c^2} - 1 \right) \beta_{31} \beta_{32} = (K - K' a^2) H_1 H_2,$$

indi

$$\frac{\beta_{31} \beta_{32}}{H_1 H_2} = \frac{c^2 (K - K' a^2)}{a^2 - c^2}.$$

Ora il primo membro rappresenta appunto la curvatura totale *relativa*  $k_0$  delle superficie  $u_3 = \text{cost.}$ , cioè il prodotto delle due curvature principali

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{\beta_{31}}{H_1}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{\beta_{32}}{H_2},$$

e la formola ottenuta si scrive

$$(8) \quad k_0 = \frac{c^2 (K - K' a^2)}{a^2 - c^2}.$$

La famiglia  $u_3 = \text{cost.}$  nel sistema triplo ortogonale è formata dunque di superficie colla medesima curvatura costante, cioè:

*In qualunque rappresentazione normale uniforme di due spazii a tre dimensioni ed a curvatura costante, l'uno sull'altro, quando due dei moduli di dilatazione sono eguali, il sistema triplo ortogonale principale è un sistema di Weingarten.*

Si vede così come si presentano spontaneamente i sistemi di Weingarten in questi problemi geometrici di rappresentazione. Dalle mie antiche ricerche su questi sistemi <sup>(1)</sup> è facile d'altronde dedurre inversamente che: *Ogni sistema di Weingarten in uno spazio a curvatura costante è il sistema principale in una rappresentazione normale uniforme di questo spazio sopra un altro spazio di curvatura costante.*

6. Siamo ricondotti ancora ai sistemi di Weingarten trattando la questione seguente, corrispondente a quella del n. 3, ove si suppongono eguali due delle costanti  $c_i$ :

<sup>(1)</sup> Annali di matematica, tomo XIII della serie 2<sup>a</sup> (1885) e Memorie dei Lincei, vol. IV, serie 4<sup>a</sup> (1887).

Quali sono i sistemi tripli ortogonali dello spazio  $S_3$ , di curvatura costante  $K$ , che ammettono trasformazioni di Ribaucour, colle funzioni trasformatrici  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varphi$  legate da un'identità quadratica della forma

$$(9) \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + a\gamma_3^2 + b\varphi^2 = 0,$$

con  $a, b$  costanti?

Questa, derivata rapporto ad  $u_1, u_2, u_3$ , osservando le (4), dà

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} + \beta_{21} \gamma_2 + a\beta_{31} \gamma_3 + b H_1 \varphi = 0 \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial u_2} + \beta_{12} \gamma_1 + a\beta_{32} \gamma_3 + b H_2 \varphi = 0 \\ a \frac{\partial \gamma_3}{\partial u_3} + \beta_{13} \gamma_1 + \beta_{23} \gamma_2 + b H_3 \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Paragonando la prima di queste coll'altra  $\frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} = \beta_{12} \gamma_2$ , ne deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} \gamma_2) + \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} \gamma_2) + a \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{31} \gamma_3) + b \frac{\partial}{\partial u_2} (H_1 \varphi) = 0,$$

che sviluppata colla precedente diventa

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + a\beta_{31} \beta_{32} + b H_1 H_2 = 0.$$

D'altra parte abbiamo anche

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} + K H_1 H_2 = 0,$$

indi sottraendo

$$(a - 1) \beta_{31} \beta_{32} = (K - b) H_1 H_2.$$

Ora, escludendo che si abbia  $a = 1, b = K$ , caso che per le trasformazioni di Ribaucour è privo di significato, ne deduciamo

$$(11) \quad k_0 = \frac{\beta_{31} \beta_{32}}{H_1 H_2} = \frac{K - b}{a - 1} = \text{cost.},$$

e quindi: *I sistemi tripli ortogonali cercati debbono essere sistemi di Weingarten.*

E inversamente si può dimostrare che per ogni sistema di Weingarten esistono trasformazioni di Ribaucour le cui funzioni trasformatrici sono legate da un'identità quadratica (9), una delle due costanti  $a, b$  restando arbitraria, e l'altra desumendosi dalla (11).

Supponiamo ora in aggiunta di scegliere i valori iniziali (arbitrarii) di  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \varphi$  per modo che s'annulli la costante del secondo membro nella (9). Allora, per le (5), anche le funzioni trasformatrici  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3; \bar{\varphi}$  pel passaggio inverso soddisfano alla stessa condizione

$$\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_2^2 + a\bar{\gamma}_3^2 + b\bar{\varphi}^2 = 0,$$

e per ciò: *I sistemi tripli ortogonali derivati sono ancora sistemi di Weingarten colla stessa curvatura costante.*

7. Da ultimo vogliamo esaminare il caso particolare dei sistemi di Weingarten in uno spazio pseudosferico, la cui curvatura  $K$  si assumerà  $= -1$ , supponendo che la curvatura (relativa)  $k_0$  delle  $u_3 = \text{cost.}$  sia costante positiva e  $< 1$ , onde porremo

$$K = -1 \quad , \quad k_0 = \text{sen}^2 \sigma,$$

con  $\sigma$  angolo reale <sup>(1)</sup>. Secondo le formole stabilite nella mia Memoria sopra citata del 1887, il  $ds^2$  dello spazio avrà la forma

$$ds^2 = \cosh^2 \theta du_1^2 + \text{senh}^2 \theta du_2^2 + \frac{1}{\text{sen}^2 \sigma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2,$$

la funzione  $\theta = \theta(u_1, u_2, u_3)$  essendo assoggettata a soddisfare al seguente sistema differenziale:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2^2} = \cos^2 \sigma \text{senh} \theta \cosh \theta \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \right) = - \frac{1}{\text{senh} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \frac{\partial \theta}{\partial u_2} + \cos^2 \sigma \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \right) = \frac{1}{\text{senh} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{1}{\text{senh} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \right) = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \frac{\partial \theta}{\partial u_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{1}{\text{senh} \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \right) = - \frac{1}{\cosh \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \frac{\partial \theta}{\partial u_1} + \cos^2 \sigma \text{senh} \theta \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \end{array} \right.$$

La soluzione generale di questo sistema contiene *quattro* funzioni arbitrarie, il che corrisponde geometricamente al fatto che per definire un tale sistema triplo ortogonale si può dare ad arbitrio: 1° una delle superficie

(1) Si osservi che la formola (8) diventa

$$K' = - \left( \frac{\cos^2 \sigma}{a^2} + \frac{\text{sen}^2 \sigma}{c^2} \right),$$

e però anche il secondo spazio  $S'_3$  è pseudosferico.

$u_3 = \text{cost.}$  (a curvatura  $k_0 = \text{sen}^2 \sigma$ ); 2° una delle curve coordinate ( $u_3$ ).  
 Notiamo poi che il sistema (A) ammette l'integrale primo quadratico:

$$(B) \quad \frac{1}{\cosh^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \right)^2 - \cos^2 \sigma \left( \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 = \text{cost.}$$

Nel caso attuale la relazione (11) da porsi fra le costanti  $a, b$  al n. 7 diventa

$$b + \cos^2 \sigma + a \text{sen}^2 \sigma = 0$$

e viceversa dando qui ad  $a$  un qualunque valore (diverso però da 0, 1) il sistema ai differenziali totali per  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ;  $\varphi$  formato dalle generali (4) e dalle (10) è completamente integrabile. Scelti i valori iniziali per modo che sia

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + a \gamma_3^2 + b \varphi^2 = 0,$$

il sistema ( $\Sigma'$ ) derivato per trasformazione di Ribaucour sarà un nuovo sistema di Weingarten colla stessa curvatura costante (n. 6).

8. Se si suppone nulla la costante del secondo membro nella relazione (B), si ha una classe particolare molto notevole di questi sistemi di Weingarten, pei quali

$$\frac{\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2}{H_3^2} = \cos^2 \sigma,$$

ossia  $\frac{1}{\varrho_3} = \cos \sigma$ , essendo  $\frac{1}{\varrho_3}$  la flessione delle curve coordinate ( $u_3$ ); si tratta qui adunque dei sistemi di Weingarten a flessione costante.

In tal caso il sistema differenziale (A) si semplifica coll' introduzione di una funzione ausiliaria  $\omega$  e si scrive (cfr. Mem. cit.):

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial u_1} + \frac{\partial \omega}{\partial u_2} = \cos \sigma \sinh \theta \cos \omega, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} = \cos \sigma \cosh \theta \cos \omega \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u_2} - \frac{\partial \omega}{\partial u_1} = \cos \sigma \cosh \theta \text{sen} \omega, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} = \cos \sigma \sinh \theta \text{sen} \omega \frac{\partial \theta}{\partial u_3} \end{array} \right.$$

Le trasformazioni di Ribaucour che abbiamo sopra considerato cangiano questi sistemi a flessione costante in altri della stessa specie.

Ora, mediante la rappresentazione conforme di Poincaré dello spazio pseudosferico ( $K = -1$ ) sul semispazio  $z > 0$  euclideo, definita dalla forma

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

pel  $ds^2$ , trasportiamo i sistemi ( $\Sigma$ ) a flessione costante  $\frac{1}{\varrho_3} = \cos \sigma$  nello

spazio euclideo. Le curve immagini coordinate ( $u_3$ ) avranno la proprietà che i loro cerchi osculatori taglieranno il piano limite  $z = 0$  sotto l'angolo fisso  $\sigma$ , e le superficie immagini  $u_3 = \text{cost.}$  saranno altrettanti integrali dell'equazione del 2° ordine (cfr. *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, § 222, formola (54):

$$(D) \quad z^2 \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} + z \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^2} + \frac{1}{1 + p^2 + q^2} = \text{sen}^2 \sigma.$$

9. Suppongasi inversamente di avere, nell'ordinario spazio euclideo, un sistema triplo ortogonale ( $u_1, u_2, u_3$ ) tale che i cerchi osculatori delle curve coordinate ( $u_3$ ) taglino sotto l'angolo costante  $\sigma$  ( $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ ) un piano fisso, sia  $z = 0$ . In metrica iperbolica, questi sono cerchi non euclidei a centro ideale o di curvatura geodetica  $\cos \sigma$ , onde le curve ( $u_3$ ) hanno in questa metrica la flessione costante

$$\frac{1}{\rho_3} = \cos \sigma.$$

Ora sussiste in generale il teorema:

*Se in un sistema triplo ortogonale ( $u_1, u_2, u_3$ ) dello spazio  $S_3$ , a curvatura costante  $K$ , le curve ( $u_3$ ) hanno la flessione costante  $\frac{1}{\rho_3} = c$ , il sistema è di Weingarten, e la curvatura relativa  $k_0$  della superficie  $u_3 = \text{cost.}$  è data dalla formola*

$$(12) \quad k_0 = -(K + c^2).$$

Per ipotesi si ha

$$\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2 = c^2 H_3^2,$$

e derivando rapporto ad  $u_1, u_2$ , osservando le formole

$$\frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12} \beta_{23}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21} \beta_{13},$$

otteniamo le altre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = c^2 H_1 H_3 - \beta_{21} \beta_{13} \\ \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = c^2 H_2 H_3 - \beta_{12} \beta_{23} \end{array} \right.$$



Paragonando colle precedenti, costruiamo la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} \beta_{23}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} \beta_{13}) - c^2 \frac{\partial}{\partial u_2} (H_1 H_3) = 0,$$

che sviluppata dà

$$\beta_{23} \left\{ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} - c^2 H_1 H_2 \right\} + \\ + \beta_{12} \beta_{21} \beta_{13} + \beta_{21} (c^2 H_2 H_3 - \beta_{12} \beta_{13}) - c^2 \beta_{21} H_2 H_3 = 0.$$

I termini che non contengono  $\beta_{23}$  si elidono, e poichè  $\beta_{23} \neq 0$  resta

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} - c^2 H_1 H_2 = 0;$$

d'altronde

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31} \beta_{32} + K H_1 H_2 = 0$$

e paragonando

$$\beta_{31} \beta_{32} + (K + c^2) H_1 H_2 = 0,$$

che è precisamente la (12).

Se in questo risultato generale facciamo

$$K = -1, \quad c = \cos \sigma,$$

abbiamo  $k_0 = \text{sen}^2 \sigma$ , e perciò il sistema  $(u_1, u_2, u_3)$  dello spazio iperbolico è un sistema di Weingarten della classe considerata al n. 7, colla flessione costante  $\frac{1}{\rho_3} = \cos \sigma$ .

Concludiamo quindi: *Esistono infinite famiglie di Lamé le cui traiettorie ortogonali hanno cerchi osculatori che tagliano sotto un angolo costante  $\sigma$  un piano fisso. La loro ricerca dipende dal sistema (C) di equazioni a derivate parziali, la cui soluzione generale contiene tre funzioni arbitrarie.*

Si osservi che le superficie  $u_3 = \text{cost.}$  di queste famiglie di Lamé sono tutte integrali dell'equazione del 2° ordine (D), del tipo di Monge-Ampère. È le superficie delle altre due famiglie  $u_1 = \text{cost.}$ ,  $u_2 = \text{cost.}$ , che con la prima completano il sistema triplo ortogonale, hanno la proprietà che i cerchi osculatori delle linee di curvatura di un sistema tagliano sotto l'angolo costante o il piano  $z = 0$ . Come superficie isolate queste ultime furono studiate direttamente dal Razzaboni <sup>(1)</sup>, con riferimento alle mie antiche ricerche sopra citate, ma nel caso opposto a quello sopra considerato, e cioè quando i cerchi osculatori non tagliano realmente il piano fisso ( $\sigma$  puramente immaginario).

(1) Memorie della R. Accademia di Bologna, serie VII, tomo I (1913).

**Meccanica. — Statica einsteiniana.** Nota del Socio T. LEVI-CIVITA.

Mi propongo di studiare sia quel caso particolare delle equazioni gravitazionali di Einstein, che corrisponde a fenomeni statici, sia (sempre dal punto di vista della relatività generale) il movimento di un punto materiale entro un campo statico, nell'ipotesi che sia trascurabile la modificazione del campo provocata dal moto del punto.

Nei §§ 1-2 attribuisco alle equazioni ricordate una forma invariantiva rispetto al  $ds^2$  dello spazio ambiente. Con ciò rimane direttamente collegata la natura metrica di questo spazio ai fenomeni di equilibrio che vi hanno sede, mentre nella forma generale di Einstein (valida per fenomeni comunque variabili col posto e coll'istante) si presentano fuse insieme le misure dello spazio e del tempo in una metrica quadridimensionale.

Un'immediata conseguenza delle equazioni così trasformate si è che, in regime statico, la curvatura media dello spazio fisico è necessariamente *positiva o nulla*.

Passo quindi (§§ 3-4) alle equazioni del moto di un punto materiale. Anche qui si tratta semplicemente di lumeggiare le particolari proprietà dovute al regime statico del campo. Tra queste figura la equazione variazionale delle traiettorie, che è in sostanza l'espressione appropriata al caso del principio della minima azione. La trasformazione, con cui vi si giunge eliminando il tempo, è perfettamente applicabile anche nell'ordinaria meccanica dei sistemi olonomi, e serve a passare (supposte le forze conservative) dal principio di Hamilton a quello della minima azione con qualche maggiore spontaneità e semplicità che non si riscontri nei procedimenti classici <sup>(1)</sup>.

**I. — LE EQUAZIONI DI EINSTEIN NEL CASO STATICO.**

Quando si tratta di fenomeni statici, la forma differenziale quaternaria  $ds'^2$ , che congloba le misure dello spazio e del tempo, si presenta sotto la forma

$$(1) \quad \sum_0^3 g_{ik} dx_i dx_k = V^2 dx_0^2 - ds^2,$$

<sup>(1)</sup> Veggansi ad es. i trattati seguenti: Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, tomo 2 (3<sup>a</sup> ediz.) [Paris, Gauthier-Villars, 1911], nn. 483-487; Maggi, *Principii di stereodinamica* [Milano, Hoepli, 1903], §§ 102-103; Whittaker, *Analytical Dynamics* [Cambridge, University Press, 1904], sez. 99-100.

dove  $x_0$  rappresenta il tempo e

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{ik}^3 a_{ik} dx_i dx_k$$

è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico ambiente. I coefficienti  $a_{ik}$  vanno ritenuti, al pari di  $V$ , funzioni soltanto di  $x_1, x_2, x_3$ ; la  $V$  si interpreta come velocità della luce e si considera quindi essenzialmente positiva.

Con manifesto significato dei simboli, si ha

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{ik} = -a_{ik} \quad , \quad g_{0i} = 0 \quad , \quad g_{00} = V^2; \\ \quad \quad \quad g = -aV^2; \\ g^{(ik)} = -a^{(ik)} \quad , \quad g^{(0i)} = 0 \quad , \quad g^{(00)} = \frac{1}{V^2} \\ \quad \quad \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Converrà contrassegnare con un apice i simboli di Christoffel e di Riemann relativi alla forma quaternaria (1), riservando la ordinaria notazione senza apice agli analoghi simboli relativi alla (2).

Dalle formule di definizione si ricava subito, in base alle (3),

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} ik \\ l \end{array} \right\}' = \left\{ \begin{array}{l} ik \\ l \end{array} \right\}; \\ \left\{ \begin{array}{l} ik \\ 0 \end{array} \right\}' = \left\{ \begin{array}{l} 0i \\ k \end{array} \right\}' = \left\{ \begin{array}{l} 00 \\ 0 \end{array} \right\}' = 0; \\ \left\{ \begin{array}{l} i0 \\ 0 \end{array} \right\}' = \frac{V_i}{V}; \\ \left\{ \begin{array}{l} 00 \\ i \end{array} \right\}' = VV^{(i)}, \end{array} \right.$$

dove  $i, k, l$  possono assumere i valori 1, 2, 3,  $V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$ , e  $V^{(i)} = \sum_j^3 a_{ij} V$  ne è il sistema reciproco rispetto al  $ds^2$ .

Nella teoria di Einstein ha importanza fondamentale il sistema covariante doppio

$$(5) \quad G'_{ik} = \sum_h^3 \left\{ \begin{array}{l} ih \\ h \end{array} \right\}' \left\{ \begin{array}{l} hk \\ h \end{array} \right\}' = \sum_h^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{array}{l} ih \\ h \end{array} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{array}{l} ik \\ h \end{array} \right\}' \right] + \\ + \sum_h^3 \left[ \left\{ \begin{array}{l} ih \\ l \end{array} \right\}' \left\{ \begin{array}{l} kl \\ h \end{array} \right\}' - \left\{ \begin{array}{l} ik \\ l \end{array} \right\}' \left\{ \begin{array}{l} lh \\ h \end{array} \right\}' \right] \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Introducendo l'analogo sistema

$$(6) \quad G_{ik} = \sum_h^3 \{ ih, hk \} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

relativo alla forma ternaria (2), si trova, dopo ovvie riduzioni,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} G'_{ik} = G_{ik} + \frac{V_{ik}}{V}, \\ G'_{0i} = 0 \\ G'_{00} = -V \mathcal{A}_2 V, \end{array} \right. \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

in cui le  $V_{ik}$  rappresentano derivate seconde covarianti e il  $\mathcal{A}_2$  parametro differenziale di 2° ordine con referenza al  $ds^2$  spaziale (2).

In base a queste formule e alle (3), si ha, per l'invariante lineare del sistema  $G'_{ik}$ ,

$$\begin{aligned} G' &= \sum_{ik}^3 g^{(ik)} G'_{ik} = g^{(00)} G'_{00} - \sum_{ik}^3 a^{(ik)} G'_{ik} = \\ &= -\frac{\mathcal{A}_2 V}{V} - \sum_{ik}^3 a^{(ik)} G_{ik} - \frac{\mathcal{A}_2 V}{V}. \end{aligned}$$

Se quindi si pone

$$(8) \quad -2 \mathfrak{K} = \sum_{ik}^3 a^{(ik)} G_{ik},$$

con che, come verificheremo al § 3,  $\mathfrak{K}$  rappresenta la *curvatura media* dello spazio ambiente, risulta

$$(9) \quad \frac{1}{2} G' = \mathfrak{K} - \frac{\mathcal{A}_2 V}{V},$$

che fornisce l'espressione statica dell'invariante  $G'$ .

Ciò premesso, ricordiamo <sup>(1)</sup> che le equazioni gravitazionali sono

$$G'_{ik} - \frac{1}{2} G' g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

dove  $\kappa$  è costante e  $T_{ik}$  designa il tensore energetico.

In condizioni statiche, le  $T_{ik}$  sono, come tutto il resto, indipendenti dal tempo  $x_0$ ; inoltre le  $T_{i0} = T_{0i}$  si annullano, rappresentando (previa divisione per  $-\sqrt{-g_{00} g_{ii}} = -V \sqrt{a_{ii}}$ ) componenti di flusso dell'energia. Perciò, avuto riguardo alle (3) e (7), tre delle richiamate equazioni si ridu-

<sup>(1)</sup> Cfr. p. es. la Nota *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, in questo volume dei Rendiconti, pp. 381-391.

cono a pure identità; e ne rimangono sette: le sei (corrispondenti ai valori non nulli degli indici)

$$(10) \quad G_{ik} + \mathfrak{M} a_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{A_2 V}{V} a_{ik} = -x T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

nonchè (per  $i = k = 0$ )

$$-V A_2 V - \frac{1}{2} G'_{00} = -x T_{00},$$

ossia, badando alla (9),

$$(I) \quad \mathfrak{M} = x \frac{T_{00}}{V^2}.$$

Queste sette equazioni (10) ed (I) riducono, come è nella natura delle cose, la statica einsteiniana alle tre dimensioni dello spazio ambiente. Esse hanno forma invariante rispetto alla metrica di questo spazio, fungendo — colla nomenclatura del calcolo differenziale assoluto — da forma fondamentale il relativo  $ds^2$ . Vi figurano inoltre, come elementi associati alla forma fondamentale, le due funzioni (invarianti)  $V$  e  $T_{00}$ , e il sistema covariante doppio  $T_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Quest'ultimo caratterizza la distribuzione degli sforzi; mentre  $\frac{T_{00}}{V^2}$  si interpreta quale densità d'energia [cfr. il § 3 della mia Nota, testè citata], rappresentando  $V$ , come è stato detto in principio, la velocità della luce.

Nei riguardi della densità di energia giova rilevare che, almeno nell'ambito dei fenomeni oggi meglio conosciuti (sia materiali che elettromagnetici in senso lato), non c'è esempio di densità negativa <sup>(1)</sup>, sicchè si può ritenere il secondo membro della (I)  $\geq 0$ . Ne viene questo corollario geometrico: *La curvatura media  $\mathfrak{M}$  (somma delle tre curvature principali) che si determina nello spazio fisico per effetto di fenomeni puramente statici, è in ogni caso positiva o nulla.*

## 2. — LE $\alpha_{ik}$ DI RICCI — FORMA DEFINITIVA DELLE EQUAZIONI DELLA STATICA.

Per le varietà a tre dimensioni i simboli di Riemann (di prima specie)  $a_{ij, hk}$  ( $i, j, h, k = 1, 2, 3$ ) si riducono sostanzialmente allo schema

<sup>(1)</sup> Infatti, se in un dato posto, c'è materia in riposo distribuita con densità  $\mu$ , ciò importa una energia di origine materiale  $V^2\mu$ , che (in condizioni ordinarie) prepondera di gran lunga su tutti gli altri eventuali contributi. D'altra parte il contributo alla densità d'energia di origine elettromagnetica è esso pure  $\geq 0$ . Perciò, anche in assenza di materia, la densità di energia non sembra suscettibile di valori negativi.

$a_{i+1, i+2, k+1, k+2}$  (colla convenzione di riguardare equivalenti due indici che differiscono per multipli di 3), e vengono opportunamente sostituiti dai rapporti

$$(11) \quad \alpha^{(ik)} = \frac{a_{i+1, i+2, k+1, k+2}}{a} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

introdotti dal Ricci, che costituiscono, come egli ha mostrato (e come si verifica materialmente in modo ovvio), un sistema doppio simmetrico contra-variante.

Con  $\alpha_{ik}$  si intende naturalmente il sistema covariante reciproco, mercè cui le  $\alpha^{(ik)}$  si esprimono sotto la forma

$$(12) \quad \alpha^{(ik)} = \sum_{jh}^3 a^{(ij)} a^{(hk)} \alpha_{jh}.$$

Vogliamo stabilire le relazioni che legano le  $\alpha_{ik}$  alle  $G_{ik}$  (1).

Procedendo per via diretta, si può partire dalle (6) e sostituire nei secondi membri i simboli  $\{ih, hk\}$  mediante quelli di prima specie, scrivendo

$$(6') \quad G_{ik} = \sum_{jh}^3 a^{(jh)} a_{ij, hk}.$$

Il secondo membro si sviluppa, attribuendo a  $j$  i valori  $i, i+1, i+2$  e ad  $h$  i valori  $k, k+1, k+2$ . Tenendo conto delle identità

$$a_{ij, hk} = a_{ji, hk} = -a_{ij, hh},$$

e delle (11), si ha

$$G_{ik} = a \{ -a^{(i+1, k+1)} a^{(i+2, k+2)} + a^{(i+1, k+2)} a^{(i+2, k+1)} + \\ + a^{(i+2, k+1)} a^{(i+1, k+2)} - a^{(i+2, k+2)} a^{(i+1, k+1)} \},$$

ossia, in base alle (12),

$$G_{ik} = a \sum_{jh}^3 \alpha_{jh} \{ -a^{(i+1, k+1)} a^{(i+2, j)} a^{(k+2, h)} + a^{(i+1, k+2)} a^{(i+2, j)} a^{(k+1, h)} + \\ + a^{(i+2, k+1)} a^{(i+1, j)} a^{(k+2, h)} - a^{(i+2, k+2)} a^{(i+1, j)} a^{(k+1, h)} \}.$$

Nel sommatorio giova raggruppare il primo col secondo termine e il terzo col quarto, attribuendo ad  $h$  i valori  $i, i+1, i+2$ .

Dacchè il complemento algebrico di  $a^{(ik)}$  nel determinante di queste quantità vale  $\frac{a_{ik}}{a}$ , risulta

$$G_{ik} = \sum_j^3 \{ \alpha_{ji} a_{i+2, k} a^{(i+2, j)} - \alpha_{ji+2} a_{ik} a^{(i+2, j)} + \\ + \alpha_{ji} a_{i+1, k} a^{(i+1, j)} - \alpha_{ji+1} a_{ik} a^{(i+1, j)} \},$$

(1) Relazioni già indicate dal Ricci nella Nota *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIII, 1904, pag. 1235.

la quale, aggiungendo e togliendo (sotto il sommatorio)  $\alpha_{ji} a_{ik} a^{(ij)}$ , si scrive più semplicemente

$$G_{ik} = \alpha_{ik} - a_{ik} \sum_1^3 \alpha_{ij} a^{(ij)}.$$

Moltiplichiamo per  $a^{(ik)}$  e sommiamo rispetto ai due indici  $i$  e  $k$ . Tenuto conto che  $\sum_1^3 a^{(ik)} a_{ik} = 3$ , il confronto colla (8) porge

$$(13) \quad \mathfrak{N} = \sum_1^3 a^{(ik)} \alpha_{ik},$$

sicchè le ottenute relazioni fra le  $G_{ik}$  e le  $\alpha_{ik}$  assumono l'aspetto:

$$(14) \quad \alpha_{ik} = G_{ik} + \mathfrak{N} a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

che più conviene al nostro scopo <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Si può arrivarvi in modo più elegante, ricorrendo ai sistemi E spettanti al nostro  $ds^2$  ternario [cfr. Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann., B. 54, 1900, pag. 135; Ricci, *Sulle superficie geodetiche*..., in questi Rendiconti vol. XII, 1° semestre 1903, pag. 410]. In primo luogo, mediante l'E covariante si scrivono le (12) sotto la forma

$$a_{ij, h k} = \sum_1^3 \alpha^{(pq)} \varepsilon_{p i j} \varepsilon_{q h k},$$

con che le (6') assumono l'aspetto

$$G_{ik} = \sum_1^3 \alpha^{(pq)} \varepsilon_{p i j} \varepsilon_{q h k} = - \sum_1^3 \alpha^{(pq)} \varepsilon_{p i j} \varepsilon_{q k h}.$$

D'altra parte la definizione delle  $a^{(ik)}$  si traduce, mediante l'E contravariante, nelle formule

$$a^{(ij)} = \frac{1}{2} \sum_1^3 \varepsilon^{(p q)} \varepsilon^{(\tau h)} a_{p \sigma} a_{q \tau}.$$

Sostituiamo in  $G_{ik}$ , badando alle identità (di verificaione immediata)

$$\sum_1^3 \varepsilon_{p i j} \varepsilon^{(p q)} = \varepsilon_{p v} \varepsilon_{i q} - \varepsilon_{p q} \varepsilon_{i v} \quad (p, i, v, q = 1, 2, 3),$$

e a quest'altre (che ne differiscono solo per la designazione degli indici)

$$\sum_1^3 \varepsilon_{q k h} \varepsilon^{(\tau h)} = \varepsilon_{q \sigma} \varepsilon_{k \tau} - \varepsilon_{q \tau} \varepsilon_{k \sigma} \quad (q, k, \sigma, \tau = 1, 2, 3),$$

nelle quali le  $\varepsilon$  a due indici stanno, secondo il solito, a rappresentare lo zero quando gli indici sono distinti, e l'unità quando coincidono.

Ove si noti che l'espressione (13) di  $\mathfrak{N}$  equivale a

$$\mathfrak{N} = \sum_1^3 \alpha_{pq} \alpha^{(pq)},$$

risultano appunto le (14).

La (13) poi rende ragione del significato di  $\mathfrak{M}$  come curvatura media della varietà. Infatti le curvature principali sono, per definizione, le radici (necessariamente reali)  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  della equazione cubica (1)

$$\|\alpha_{ik} - \omega a_{ik}\| = 0,$$

e il secondo membro della (13) è precisamente la somma di queste radici (coefficiente di  $\omega^2$  diviso per  $-a$ , essendo  $-a$  il coefficiente di  $\omega^3$  nel primo membro della equazione cubica).

Mercè le (14), si introducono le  $\alpha_{ik}$  nelle equazioni gravitazionali (10). Trascrivendo anche la (I), si ha in definitiva il sistema

$$(I) \quad \mathfrak{M} = \kappa \frac{T_{00}}{V^2},$$

$$(II) \quad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{A_2 V}{V} a_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove la curvatura media  $\mathfrak{M}$  ha l'espressione (13).

Una notevole conseguenza delle (II) si ha moltiplicandole per  $a^{(ik)}$  e sommando rispetto ai due indici. Avuto riguardo alle (13) e (I), si ottiene

$$(14) \quad \frac{A_2 V}{V} = \frac{1}{2} \kappa \left( \mathfrak{S} + \frac{T_{00}}{V^2} \right),$$

dove

$$(15) \quad \mathfrak{S} = \sum_{ik}^3 a^{(ik)} T_{ik}$$

rappresenta evidentemente l'invariante lineare del sistema degli sforzi rispetto al nostro  $ds^2$  (dello spazio ambiente). Tale invariante — sia detto per incidenza — non deve confondersi collo scalare del tensore quadridimensionale

$$T = \sum_{ik}^3 g^{(ik)} T_{ik},$$

cui, a norma delle (3), spetta invece l'espressione

$$T = \frac{T_{00}}{V^2} - \mathfrak{S}.$$

### 3. — MOTO DI UN PUNTO MATERIALE. — TRAIETTORIE. — EQUIVALENZA A GEODETICHE E A FASCI CONSERVATIVI DEL TIPO ORDINARIO.

Secondo la teoria generale di Einstein, qualunque sia il  $ds'$  quadridimensionale, le equazioni del moto di un punto materiale si compendiano nel principio variazionale

$$(16) \quad \delta \int ds' = 0.$$

(1) Ricci et Levi-Civita, loc. cit., pag. 163.



In condizioni statiche, vale pel  $ds'$  la forma (1), talchè, pósto, per comodità di confronto colle notazioni abituali,

$$(17) \quad x_0 = t \quad , \quad \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \quad (i=1, 2, 3) \quad , \quad \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 \quad ,$$

la precedente può essere scritta

$$\delta \int \sqrt{V^2 - v^2} dt = 0 \quad (1) \quad .$$

Per restare nel campo reale e regolare, giova escludere i movimenti in cui la velocità attraversa il valore critico  $V$ , e porre (col valore aritmetico del radicale)

$$(18) \quad L = \begin{cases} \sqrt{V^2 - v^2} & \text{per } v < V \quad (2), \\ \sqrt{v^2 - V^2} & \text{per } v > V \quad , \end{cases}$$

valendo in entrambi i casi l'equazione variazionale del moto

$$(16') \quad \delta \int L dt = 0 \quad .$$

Ne conseguono notoriamente le equazioni differenziali di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad .$$

Si noterà che, nella (16), e quindi nella equivalente (16'), anche  $t$  deve essere sottoposto a variazione, trattandolo alla stessa stregua delle coordinate di spazio, e supponendo in conformità  $\delta t$  nullo agli estremi (dell'intervallo di integrazione). Ciò dà luogo (mercè la solita integrazione per parti) ad una quarta equazione

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad ,$$

che è però una conseguenza delle prime tre.

(1) Sotto questa forma essa venne già proposta e discussa da Abraham, però limitatamente all'ipotesi che il  $ds^2$  sia euclideo. Cfr. in particolare *Le equazioni di Lagrange nella nuova meccanica*, Ann. di Mat., tomo XX (dedicato alla memoria di Lagrange), 1913, pp. 29-36.

(2) Si potrebbe anche limitarsi a questo primo caso, che è il solo fisicamente interessante per un effettivo punto materiale. Stimo tuttavia preferibile — giacchè l'occasione si presenta — di trattare la questione in modo completo.

Nella recente Memoria di Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (seconda parte) [Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1917], dove sono precisati i postulati della relatività generale, si trova, a proposito dei movimenti dei punti materiali, una specificazione qualitativa, che, in condizioni statiche, equivale appunto a  $v < V$ .

Quando in particolare, come nel caso attuale,  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , essa si identifica coll' integrale tipico dei sistemi lagrangiani (delle forze vive, allorchè L ha la forma quadratica rispetto alle velocità, che le compete nella meccanica ordinaria)

$$(19) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L = V_0 \quad (V_0 \text{ costante}).$$

Sfruttando questa equazione, si può, *colle dovute modalità*, eliminare  $dt$  dalla (16'), e ottenerne una formula, anch'essa variazionale, che corrisponde al principio della minima azione, compendiando le equazioni delle traiettorie. Ecco come conviene procedere.

Si premette che, nella (16'), le variazioni  $\delta x_i, \delta t$  vanno ritenute arbitrarie, ma nulle ai limiti. Si nota poi che, risguardando  $V_0$  come una costante prefissata ( $\delta V_0 = 0$ ), si può sostituire alla (16') la formula

$$(16'') \quad \delta \int (L + V_0) dt = 0,$$

sostanzialmente equivalente, perchè dà luogo alle stesse equazioni di Lagrange. Essa però presenta sulla (16') il vantaggio che non occorre più imporre a  $\delta t$  la condizione di annullarsi agli estremi (semprechè si intenda che, nell'integrale (19), la costante del secondo membro abbia il valore prefissato  $V_0$ ). Questo risulta subito dall'osservare che, portando il  $\delta$  sotto il segno, si ha, materialmente, come contributo proveniente dalla variazione di  $t$ ,

$$\int \delta dt \left[ - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + L + V_0 \right],$$

che si annulla, in virtù della (19).

Così stando le cose, diviene lecito di considerare, nella (16''), le  $x_i, t$ , e subordinatamente le loro variazioni, legate dalla (19), anzichè indipendenti. In verità, nulla vieta *a priori* di introdurre vincoli a piacimento, sia nella (16') che nella (16''), purchè soltanto rimangano rispettate le condizioni ai limiti per le  $\delta x_i, \delta t$ . Come si comporta la (19) a tale riguardo? La sua variazione fornisce, possiamo dire, il  $\delta dt$ , o, ciò che è lo stesso, il  $d\delta t$  in termini delle  $\delta x_i$  che rimangono (funzioni di  $t$ ) arbitrarie, salvo l'annullamento ai limiti. Il  $\delta t$  risulta in conformità da una quadratura, e quindi si può renderlo zero ad *uno* degli estremi dell'intervallo di integrazione, ma non in generale anche all'altro. Perciò l'introduzione del vincolo (19) è perfettamente legittima nella (16''), la quale non richiede l'annullarsi ai limiti di  $\delta t$ ; ma non lo sarebbe invece nella (16').

Chiarito il concetto, esplicitiamo il calcolo.

La (19), moltiplicando per  $L$ , si scrive

$$\frac{1}{2} \sum_i^3 \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L^2 = V_0 L.$$

In virtù della (18),

$$L^2 = \pm (V^2 - v^2),$$

il segno dovendo essere scelto in modo che  $L^2$  risulti positivo. Ne deduciamo (per essere  $v^2$  omogeneo di 2° grado nelle  $\dot{x}_i$ , e  $V^2$  funzione soltanto delle  $x_i$ )

$$\frac{1}{2} \sum_i^3 \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = \mp \frac{1}{2} \sum_i^3 \frac{\partial v^2}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = \mp v^2,$$

dovendosi adottare il segno superiore o l'inferiore, secondochè vale l'uno o l'altro per  $L^2$ . Con questa stessa convenzione, la precedente, cioè in sostanza l'integrale (19), si scrive

$$(19') \quad \mp V^2 = V_0 L.$$

Perciò, badando alla (18) stessa, si vede che *la costante  $V_0$  è necessariamente negativa e in valore assoluto  $> V$ , nei moti che seguono con velocità  $v < V$ ; è invece positiva e può assumere qualsiasi valore fra 0 e  $\infty$  nell'ipotesi opposta.*

Dalla (19'), dividendo per  $V_0$  ed elevando al quadrato, si ha

$$v^2 = V^2 \mp \frac{V^4}{V_0^2},$$

colla solita discriminazione del segno, sicchè, in tutte le formule simultaneamente, vale il segno superiore, ovvero l'inferiore.

Dacchè  $v = \frac{ds}{dt}$  (con  $ds$  e  $dt$  positivi), si ricava ulteriormente

$$dt = \frac{ds}{V} \left( 1 \mp \frac{V^2}{V_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'altra parte la (19') dà

$$L \mp V_0 = V_0 \left( 1 \mp \frac{V^2}{V_0^2} \right).$$

Sostituendo in (16''), sopprimendo il fattore costante  $V_0$ , e ponendo

$$(20) \quad 2U = \frac{1}{V^2} \left( 1 \mp \frac{V^2}{V_0^2} \right) = \frac{1}{V^2} \mp \frac{1}{V_0^2},$$

risulta l'equazione comprensiva delle traiettorie

$$(21) \quad \delta \int \sqrt{2U} ds = 0.$$

Queste appaiono in conformità coincidenti (ben si intende per ciascun valore della costante  $V_0$ , che compare implicitamente in  $U$ ) colle geodetiche di uno spazio di elemento lineare  $\sqrt{2U} ds$ , od anche <sup>(1)</sup> con un fascio di traiettorie di un problema conservativo di meccanica ordinaria nello spazio fisico di elemento lineare  $ds$ . Il fascio è caratterizzato come segue: forza viva  $\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^{*2}}$ ,  $t^*$  designando una variabile ausiliaria che funge da tempo; funzione delle forze  $c^4 U$ , con  $c$  costante arbitraria; energia totale  $\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^{*2}} - c^4 U = 0$ . Si può anche dire, badando alla espressione (20) di  $U$ : funzione delle forze  $\frac{c^4}{2V_0^2}$ ; energia totale  $\pm \frac{c^4}{2V_0^2}$ .

#### 4. — CASI LIMITI. — INTERPRETAZIONE OTTICA.

1°. *Attrazione newtoniana.* — Nell'ipotesi che la forma quadridimensionale  $ds'^2 = V^2 dt^2 - ds^2$  sia molto prossima al tipo euclideo, si può porre

$$(22) \quad V = c(1 + \gamma) \quad , \quad ds^2 = \sum_{i,k}^3 (\epsilon_{ik} + \gamma_{ik}) dx_i dx_k,$$

dove  $c$  è costante (velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice), e le  $\gamma$ , che sono tutte puri numeri, vanno trattate come quantità di primo ordine.

La funzione lagrangiana, per moti dotati di velocità  $v < V$ , è, a norma della (18),

$$\sqrt{V^2 - v^2}.$$

ossia, moltiplicando per  $-c$  (ciò che è lecito senza alterare le equazioni del moto) badando alla prima delle (22), e trascurando  $\gamma^2$ ,

$$-c^2 \sqrt{1 + 2\gamma - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Supposto che (come avviene di regola pel moto dei corpi ponderabili) si possa trascurare anche il quadrato del rapporto  $\frac{v^2}{c^2}$ , sviluppando il radicale e prescindendo dalla inessenziale costante additiva  $-c^2$ , la detta funzione lagrangiana assume la forma

$$L = \frac{1}{2} v^2 - c^2 \gamma.$$

(1) Veggasi ad es. il già citato *Traité de mécanique rationnelle* di Appell, n. 487.

Per  $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$  si deve intendere, a norma della (21),

$$\sum_{ik}^3 (\epsilon_{ik} + \gamma_{ik}) \dot{x}_i \dot{x}_k = \sum_i^3 \dot{x}_i^2 + \sum_{ik}^3 \gamma_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k,$$

ma è subito visto che le  $\gamma_{ik}$  si possono porre senz'altro eguali a zero, poichè porterebbero, nelle equazioni del moto, solo contributi di secondo ordine.

Ci troviamo pertanto ricondotti, in prima approssimazione, all'ordinaria dinamica di un punto materiale nello spazio euclideo sotto l'azione di un potenziale unitario (intendo funzione delle forze riferita all'unità di massa)

$$-c^2\gamma.$$

Attesa l'espressione  $c(1 + \gamma)$  di  $V$ , la (14), colla convenuta approssimazione, diviene

$$\Delta_2\gamma = \frac{1}{2} \kappa \left( \mathfrak{C} + \frac{T_{00}}{V^2} \right),$$

riducendosi in sostanza alla equazione di Poisson-Laplace caratteristica dei potenziali newtoniani. Infatti, nell'interno dei corpi ponderabili, l'energia intrinseca prepondera di gran lunga su tutte le altre forme, sicchè la densità di energia vale sensibilmente  $c^2\mu$  ( $\mu$  densità della materia), e  $\mathfrak{C}$  risulta trascurabile di fronte a  $c^2\mu$ ; negli spazi vuoti ( $\mu = 0$ ), tutta la somma  $\mathfrak{C} + \frac{T_{00}}{V^2}$  è trascurabile di fronte all'ordine di grandezza dei valori che le competono entro la materia. Si può così ritenere in tutto lo spazio

$$\Delta_2\gamma = \frac{1}{2} \kappa c^2\mu.$$

Dacchè, a meno di termini di second'ordine, il  $\Delta_2\gamma$  si può riportare al  $ds^2$  euclideo, e

$$\kappa = \frac{8\pi f}{c^4} \quad (f \text{ costante di attrazione}),$$

si ritrova effettivamente la equazione di Poisson-Laplace per il potenziale  $-c^2\gamma$ .

Fu appunto mediante questa considerazione che Einstein fissò il valore numerico della sua costante universale  $\kappa$ .

2°.  $|V_0|$  grandissimo. — *Confronto coi raggi luminosi.* — Se  $v$  assume, nel corso del moto, un qualche valore molto prossimo a  $V$ , il corrispondente valore di  $L$  è piccolissimo, e quindi, in base alla (19'), la costante  $V_0$  deve ritenersi grandissima in valore assoluto (negativa o positiva secondochè  $v \leq V$ ).

Supponendo trascurabile  $\frac{V^2}{V_0^2}$  di fronte all'unità, si ha dalla (20)

$$2U = \frac{1}{V^2},$$

talchè, per il teorema di equivalenza del precedente paragrafo, le traiettorie coincidono sia colle geodetiche dell'elemento lineare  $\frac{ds}{V}$ , sia (nello spazio di elemento lineare  $ds$ ) con un fascio spettante alla funzione delle forze  $\frac{c^4}{2V^2}$ .

Il primo risultato dà luogo ad un interessante ravvicinamento ottico, già rilevato per altra via dal sig. Caldonazzo (1) a proposito della teoria di Abraham. Per conseguirlo, basta ricordare che si è attribuito a  $V$  il significato di velocità della luce entro il nostro spazio (sede di fenomeni statici) di elemento lineare  $ds$ . Conservando, anche nella nuova meccanica, il principio di Fermat, l'andamento dei raggi luminosi rimane compendiato nella formula

$$\delta \int \frac{ds}{V} = 0.$$

A questa stessa formula (cioè alle geodetiche dell'elemento lineare  $\frac{ds}{V}$ ) si riduce, come s'è notato or ora, la (20) per  $|V_0|$  grandissimo. Le traiettorie d'un punto materiale tendono pertanto a confondersi coi raggi luminosi al crescere indefinito di  $V_0$ , o, ciò che è lo stesso, al convergere della velocità del moto verso la velocità della luce.

3°.  $V_0$  *piccolissimo*. — Questo caso può presentarsi, a norma delle (19') e (18), soltanto per  $v > V$  e grandissimo. La (20) mostra che  $\sqrt{2U}$  è allora sensibilmente costante, sicchè l'equazione (21) delle traiettorie si riduce a

$$\delta \int ds = 0.$$

Se ne inferisce che (come nella meccanica ordinaria, quando l'azione acceleratrice delle forze è trascurabile di fronte all'inerzia) le traiettorie, entro un campo gravitazionale, tendono a diventare geodetiche al crescere indefinito della velocità.

(1) *Traiettorie dei raggi luminosi e dei punti materiali nel campo gravitazionale*, Nuovo Cimento, serie VI, vol. V, 1913, pp. 267-300.

**Meccanica.** — *A proposito di una recente Nota del prof. Almansi.* Nota del Socio P. PIZZETTI.

Nella sua Nota, *Sulla forma dello Sferoide terrestre, dedotta dalle misure di gravità*, il prof. Almansi dichiara (a piedi della pagina 359 di questi Rendiconti) che ai risultati da lui ottenuti non è giunto il prof. Helmholtz nella sua opera sulle teorie fisiche e matematiche della figura della Terra, discutendo lo stesso problema e seguendo, su per giù, il metodo da lui, Almansi, seguito.

Questa dichiarazione può far sorgere il dubbio che vi sia contraddizione fra i risultati dati dai due egregi studiosi. Vale la pena, quindi, di far vedere come le formole dell'Almansi si deducano, immediatamente e senza sforzo alcuno, da quelle date dal Helmholtz a pag. 83 del 2° volume della citata sua opera. Scriviamo le formole (1) (2) (3) (4) di Helmholtz come segue:

$$(1) \quad g = g_a \left( 1 + b \operatorname{sen}^2 B - \frac{b_4}{4} \operatorname{sen}^2 2B \right)$$

$$(2) \quad r = a \left\{ 1 - \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{\alpha(b - \alpha) + \delta}{4} \operatorname{sen}^2 2\varphi \right\}$$

$$(3) \quad \alpha = \frac{5}{2} c - b - a \left( a + \frac{1}{2} c \right) + \frac{2}{7} \delta$$

$$(4) \quad \delta = \frac{1}{3} (7a^2 - 4ab + b_4)$$

dove  $g_a$  indica la gravità all'equatore e  $B$  la latitudine geografica (che Almansi indica rispettivamente con  $g_0$  e con  $\varphi_1$ ),  $\varphi$  indica la latitudine geocentrica, e dove, per comodità di paragone, ho sostituito a  $\operatorname{sen}^2 B$  e  $\operatorname{sen}^2 \varphi$ , che figurano nelle formole di Helmholtz, le loro espressioni per mezzo dei seni quadrati degli archi  $B$ ,  $2B$ ,  $\varphi$ ,  $2\varphi$ .

Il paragone delle formole (1) e (2) colle (1) e (3) a pag. 358 di questi Rendiconti, mostra che fra i simboli del Helmholtz e quelli dell'Almansi, passano le seguenti relazioni:

$$(5) \quad \alpha = \alpha \quad b = \gamma \quad - \frac{1}{4} b_4 = \gamma' \quad \frac{\alpha(b - \alpha) + \delta}{4} = \alpha'.$$

Di più il simbolo  $c$  del primo corrisponde al  $\lambda$  del secondo.

Posto, coll'Almansi,

$$\frac{5}{2} \lambda - \gamma = \alpha_0.$$

la (3) dimostra che, a meno di termini piccoli del 2° ordine, la costante  $\alpha$  equivale alla  $\alpha_0$ , e una tale espressione si può, trascurando termini piccoli del 3° ordine, sostituire nel 2° membro della (4). Si ha così

$$(6) \quad \delta = \frac{1}{3} (7\alpha_0^2 - 4\alpha_0 \gamma - 4\gamma') = \frac{11}{3} \alpha_0^2 - \frac{10}{3} \alpha_0 \lambda - \frac{4}{3} \gamma'.$$

Sostituendo nel 2° membro della (3) questa espressione di  $\delta$  e ponendo, nello stesso 2° membro, per  $\alpha$  il valore approssimato  $\alpha_0$  (con che l'errore commesso sarà del 3° ordine) si ottiene:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\alpha_0^2}{21} - \frac{61}{42} \alpha_0 \lambda - \frac{8}{21} \gamma'$$

che coincide colla espressione di  $\alpha$  data dalla prima delle formole (4) di Almansi. Sostituendo poi nel 1° membro della nostra formola (5) per  $\delta$  la espressione (6), per  $\alpha$  la  $\alpha_0$  (colla solita approssimazione), e per  $\gamma$  la  $\gamma = \frac{5}{2} \lambda - \alpha_0$ , si ottiene la espressione di  $\alpha'$ , identica a quella data da Almansi:

$$\alpha' = \frac{5}{12} \alpha_0^2 - \frac{5}{24} \alpha_0 \lambda - \frac{1}{3} \gamma'.$$

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.*  
Nota II del Socio C. SOMIGLIANA.

I.

Come abbiamo già osservato nella Nota precedente, le equazioni che determinano gli angoli di emergenza di due onde associate

$$(1) \quad \operatorname{tg}^2 \theta_a = \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{b^2}{a^2} \eta - 1, \quad \operatorname{tg}^2 \theta_b = \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2^2} = \eta - 1,$$

non hanno soluzioni reali quando  $\eta < 1$ , come avviene per la terza radice  $\eta_3$  della equazione di Rayleigh. Dobbiamo ora esaminare quale possa essere il significato delle nostre soluzioni delle equazioni del moto in questo caso.

Se noi al posto delle costanti  $\alpha_1, \alpha_2$  introduciamo due nuove costanti  $\alpha'_1, \alpha'_2$  mediante le relazioni

$$(2) \quad \alpha_1 = i\alpha'_1 \quad \alpha_2 = i\alpha'_2 \quad (i = \sqrt{-1})$$

le equazioni (1) si possono scrivere, ponendo al posto di  $\eta$ , la radice  $\eta_3$ ,

$$(3) \quad \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1'^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \eta_3 \quad \frac{\gamma_2^2}{\alpha_2'^2} = 1 - \eta_3$$



e determinano quindi dei valori reali pei rapporti  $\gamma_1:\alpha'_1$  e  $\gamma_2:\alpha'_2$ . Inoltre noi possiamo in tutte le nostre formole sostituire alle costanti  $\alpha_1, \alpha_2$  le  $\alpha'_1, \alpha'_2$  mediante le relazioni (2). Otterremo con ciò delle onde immaginarie, le quali soddisferanno *formalmente* alle equazioni del moto ed alle condizioni superficiali, al pari delle onde reali già considerate. Ma poichè tanto le equazioni del moto, che le condizioni superficiali sono omogenee, separando la parte reale dalla immaginaria noi potremo dedurre, da ciascuna di queste soluzioni immaginarie, due soluzioni reali. Queste soluzioni rappresenteranno quindi dei nuovi moti vibratorii di un suolo piano, e non avranno più in generale il carattere di onde piane, poichè il primitivo piano d'onda diventa immaginario. Avranno però tutte un nuovo carattere cinematico comune, quello di conservare la rigidità delle rette di un sistema di rette parallele, come le onde piane conservano la rigidità dei piani di un sistema di piani paralleli. Ciò risulta immediatamente dalla osservazione che le soluzioni che abbiamo considerate sono tutte indipendenti dalla variabile  $y$ ; le rette che vibrano rigidamente sono perciò le parallele all'asse delle  $y$ .

Nelle formole (23), (23') della Nota precedente possiamo eliminare le tangenti degli angoli di emergenza  $\theta_a, \theta_b$ , ed esprimere le componenti di vibrazione in funzione di una qualunque delle radici dell'equazione di terzo grado di Lord Rayleigh. Notando anche che, indicando con  $\eta$  genericamente una di queste radici, per la velocità superficiale di propagazione si ha

$$V^2 = \eta b^2,$$

troviamo per l'onda longitudinale

$$(4) \quad u_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1}} \Psi \left( z \sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1} + x - tb \sqrt{\eta} \right)$$

$$w_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \Psi \left( z \sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1} + x - tb \sqrt{\eta} \right),$$

e per la trasversale

$$(4') \quad u_2 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\sqrt{\eta - 1}}{2 - \eta} \Psi \left( z \sqrt{\eta - 1} + x - tb \sqrt{\eta} \right)$$

$$w_2 = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{2 - \eta} \Psi \left( z \sqrt{\eta - 1} + x - tb \sqrt{\eta} \right).$$

Queste espressioni soddisfanno *formalmente* a tutte le condizioni, cioè alle equazioni del moto ed alle equazioni alla superficie del suolo, quando  $\eta$  sia una radice qualsiasi dell'equazione di Lord Rayleigh. Se

$$(5) \quad \eta > \frac{a^2}{b^2}$$

i radicali che compaiono nelle formole precedenti sono reali, e quindi se la funzione arbitraria  $\Psi$  è reale, tutto è reale, come abbiamo già visto. Ma, anche quando la condizione (5) non è soddisfatta, come avviene per  $\eta = \eta_3$ , le equazioni del moto ed alla superficie non cessano di essere soddisfatte. È appunto questo il caso che ora dobbiamo studiare. Per mettere in evidenza le quantità immaginarie, che allora compaiono, possiamo scrivere le espressioni (4), (4') nella forma seguente

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{1}{2\alpha'_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\eta}} \Psi \left( iz \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\eta} + x - tb \sqrt{\eta} \right) \\
 (6) \quad w_1 &= -\frac{i}{2\alpha'_1} \Psi \left( iz \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\eta} + x - tb \sqrt{\eta} \right) \\
 u_2 &= \frac{1}{\alpha'_2} \frac{\sqrt{1-\eta}}{2-\eta} \Psi \left( iz \sqrt{1-\eta} + x - tb \sqrt{\eta} \right) \\
 w_2 &= \frac{i}{\alpha'_2} \frac{1}{2-\eta} \Psi \left( iz \sqrt{1-\eta} + x - tb \sqrt{\eta} \right),
 \end{aligned}$$

ove le costanti  $\alpha'_1, \alpha'_2$  sono legate alle  $\alpha_1, \alpha_2$  dalle relazioni (2) e quindi sono determinate dalle equazioni (3).

Sono queste le soluzioni immaginarie che si hanno in questo caso, e la cui esistenza risulta dimostrata in ogni caso, cioè qualunque sia il valore del rapporto  $\frac{b^2}{a^2}$  (sempre minore di 1) poichè, come si è visto, la radice  $\eta_3$  esiste sempre. Esse esistono quindi indipendentemente dalla scelta del valore  $\sigma = 1/4$  pel coefficiente di Poisson. Noi potremo poi dedurne delle soluzioni reali separando la parte reale dalla immaginaria nella funzione  $\Psi(\zeta)$  e prendendo per  $u, w$  le parti reali dei secondi membri, od i coefficienti dell'unità immaginaria.

I piani d'onda risultano in questo caso dalle equazioni

$$iz \sqrt{1 - \eta \frac{b^2}{a^2}} + x = \text{cost.} \qquad iz \sqrt{1 - \eta} + x = \text{cost.}$$

sono quindi immaginari; perciò si ha la proprietà già notata, che durante la vibrazione si conservano rigide le rette

$$z = \text{cost.} \qquad x = \text{cost.}$$

cioè le rette normali al piano di propagazione. I piani d'onda degenerano in un sistema di rette parallele.

Per ottenere da questi sistemi di onde le cosiddette onde superficiali di Rayleigh, basta specializzare la funzione  $\Psi$  ponendo

$$\Psi(\zeta) = e^{i\eta\zeta},$$

ove  $k$  è una costante reale, e porre  $\sigma = 1/4$ , cioè  $b^2/a^2 = 1/3$ . Ma infiniti altri sistemi di onde potremmo avere, analoghe alle onde di Rayleigh, prendendo per  $\Psi$  un'altra funzione qualsiasi.

Nel caso di Lord Rayleigh, si ha

$$\Psi(\xi) = e^{-2kz} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \eta} (\cos k(x - tb \sqrt{\eta}) + i \operatorname{sen} k(x - tb \sqrt{\eta}))$$

ove si deve porre

$$\eta = 0,8453.$$

Prendendo le parti reali delle formole precedenti troviamo

$$u_1 = \frac{1}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \eta}} e^{-2kz} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \eta} \cos k(x - tb \sqrt{\eta})$$

$$w_1 = -\frac{1}{2\alpha_1} e^{-2kz} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \eta} \operatorname{sen} k(x - tb \sqrt{\eta})$$

E analogamente

$$u_2 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\sqrt{1 - \eta}}{2 - \eta} e^{-2kz} \sqrt{1 - \eta} \cos k(x - tb \sqrt{\eta})$$

$$w_2 = -\frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{2 - \eta} e^{-2kz} \sqrt{1 - \eta} \operatorname{sen} k(x - tb \sqrt{\eta}).$$

Si hanno quindi delle vibrazioni armoniche smorzate verso la profondità, (se l'asse delle  $z$  è diretto verso l'interno della terra) di cui  $k$  determina la frequenza. Per questa costante non si ha alcuna condizione; potremmo perciò costruire delle soluzioni più generali composte dalla somma di un numero qualunque di soluzioni di diversa frequenza. I fattori di smorzamento

$$k \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \eta} \quad k \sqrt{1 - \eta}$$

invece risultano determinati, quando sia data la frequenza. Finalmente le costanti  $\alpha_1, \alpha_2$  si possono determinare in modo che le ampiezze delle oscillazioni risultanti dalla sovrapposizione delle due onde, cioè le oscillazioni

$$u = u_1 + u_2 \quad w = w_1 + w_2$$

abbiano valori assegnati, sulla superficie del suolo.

Possiamo fare in generale questa determinazione, valendoci delle formole (4) (4'), di cui quelle che seguono sono una conseguenza. Per la vibrazione risultante superficiale  $u_0, w_0$  si ha dalle (4)

$$u_0 = \left\{ \frac{1}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1}} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\sqrt{\eta - 1}}{2 - \eta} \right\} \Psi(x - \mathbf{V}t)$$

$$w_0 = \left\{ \frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{2 - \eta} \right\} \Psi(x - \mathbf{V}t),$$

quindi se  $\Psi(\xi)$  è funzione periodica oscillante fra  $-A$  e  $+A$ , mentre  $2U_0$  e  $2W_0$  sono le ampiezze assegnate per  $u_0, w_0$  avremo per determinare  $\alpha_1, \alpha_2$  le equazioni lineari

$$\left( \frac{1}{2\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1}} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\sqrt{\eta - 1}}{2 - \eta} \right) A = U_0$$

$$\left( \frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{2 - \eta} \right) A = W_0$$

il cui determinante

$$-\frac{A^2}{2(2 - \eta)} \left[ \frac{1}{\sqrt{\eta \frac{b^2}{a^2} - 1}} + \sqrt{\eta - 1} \right]$$

è sempre diverso da zero.

Quando  $\Psi(\xi)$  non sia periodica, è possibile determinare il rapporto  $\alpha_1 : \alpha_2$  in funzione dell'angolo costante che la vibrazione superficiale fa con la verticale, come già si è visto nella precedente Nota.

Osserviamo infine che nell'istante iniziale sulla superficie libera del suolo si ha

$$u_0 = C\Psi(x) \quad w_0 = D\Psi(x),$$

ove  $C, D$  sono delle costanti. Ora se noi supponiamo che la  $\Psi(x)$  abbia valori diversi da zero soltanto entro l'intervallo

$$x_0 < x < x_1$$

avremo che nell'istante iniziale la superficie è tutta in quiete eccettuata una striscia normale all'asse delle  $x$ , nella quale si ha una perturbazione arbitraria. Le formole trovate danno quindi la soluzione generale del problema della propagazione, sia in superficie, che in profondità, di una perturbazione superficiale comunque determinata in grandezza, nell'interno della striscia. Essa deve però soddisfare alla condizione di avere un'inclinazione costante sulla verticale. Si ha così in superficie un'onda isolata rettilinea, propagantesi normalmente alla striscia iniziale.

## II.

Volendo ora basare una rappresentazione meccanica delle oscillazioni sismiche sulla soluzione del problema delle oscillazioni di un suolo piano che abbiamo precedentemente studiato, si possono fare le considerazioni seguenti.

Noi possiamo immaginare le onde, approssimativamente sferiche, che partono dal *focus* del terremoto, posto ad una certa profondità nel sotto-

suolo, come composte ciascuna di un numero grandissimo di elementi di onde piane, propagantesi in tutte le direzioni, e involuppati una di queste onde sferiche. È naturale allora di pensare che il suolo eserciti in certo modo un'azione selettiva sopra queste onde, così da trasmettere a grandi distanze soltanto quelle che sono compatibili colla superficie piana che lo limita e colle sue proprietà fisiche. Verranno quindi rapidamente smorzate quelle onde che non soddisfanno alle condizioni generali della propagazione in un suolo piano, e rimarranno in particolare quelle la cui velocità di propagazione è la stessa determinata dalla forma piana della superficie libera. È anche ammissibile che sulla superficie libera debbano manifestarsi con effetti più intensi quelle onde, che avendo identica velocità di propagazione superficiale, vengono in certo modo a sovrapporre i loro effetti.

La teoria delle onde associate, che abbiamo svolta, riproduce un tale stato di cose in modo abbastanza conforme a quanto l'intuizione ci suggerisce. Noi abbiamo considerato invero un unico piano di propagazione. Ma le proprietà ben note circa la sovrapposizione dei piccoli modi, ci permette di ammettere che i risultati, trovati per uno di questi piani, possano simultaneamente verificarsi per tutti i piani passanti per la verticale dell'epicentro. Avremo così che le coppie di direzione di propagazione associate daranno luogo a coni associati, luoghi di queste direzioni, generanti in superficie delle onde circolari, come loro involuppo, che si propagheranno intorno all'epicentro.

Per quanto abbiamo dimostrato, una qualsiasi perturbazione darà luogo a tre gruppi di queste onde, di cui i due aventi maggiori velocità di propagazione, risultano dalla sovrapposizione di due onde piane ordinarie, l'una longitudinale e l'altra trasversale; il terzo, di velocità minore, è formato da onde superficiali di Rayleigh generalizzate. Siccome l'esperienza ha constatato che ordinariamente tre sono i gruppi di onde che successivamente perturbano una determinata località, a notevole distanza dall'epicentro, noi possiamo ragionevolmente fare l'ipotesi che essi rappresentino precisamente i tre gruppi di onde, di cui la nostra teoria ci ha dimostrato l'esistenza. I sismologi ammettono già che il terzo gruppo (L) rappresenti onde di Rayleigh; noi veniamo a riattaccare all'equazione di Rayleigh anche gli altri due gruppi. Questa equazione diviene in tal modo il centro unico di tutta la teoria.

I due primi sistemi di onde, le onde (P) ed (S), sono comunemente considerate dai sismologi, come onde piane rispettivamente longitudinali e trasversali. È chiaro che sostituendo a queste onde le coppie associate, veniamo a soddisfare meglio alle leggi della meccanica, in quanto queste coppie di onde sono realmente possibili nel suolo, mentre la teoria, ora accettata, non tien conto per le onde (P), (S) delle condizioni alla superficie.

Esiste quindi attualmente, per così dire, una sconcordanza di metodo, poichè le condizioni alla superficie, di cui si tien conto per le onde (L),

sono invece trascurate per le onde (P) ed (S). Queste vengono così trattate come onde piane di uno spazio illimitato; il che è cosa ben diversa. Anche Lamb del resto nella sua Memoria: *On the propagation of Tremors over the Surface of an elastic Solid* (1), osserva: . . . . *Lord Rayleigh's discovery of a special type of surface waves has made it evident, that the influence of the free surface in modifying the character of the vibrations is more definite and more serious than had been suspected.*

Noteremo qualche altra circostanza a favore della nostra ipotesi, senza naturalmente alcuna pretesa, che essa sia l'unica, o la migliore possibile.

L'osservazione ha dimostrato che le onde (L) hanno assai maggiore ampiezza e regolarità che le onde dei primi due gruppi. Ora, secondo il nostro modo di vedere, esse provengono da onde piane, nelle quali i piani d'onda degenerano in rette oscillanti, si perdono cioè alcuni vincoli del movimento, e si può quindi pensare che questa maggiore libertà permetta alle singole masse di oscillare più ampiamente e più regolarmente.

Ricordiamo, inoltre, che le onde fin qui considerate avvengono per intero nel piano di propagazione. Da ciò segue che il moto ondulatorio superficiale avviene soltanto nella direzione di propagazione, mentre l'osservazione rivela notevoli movimenti ondulatori anche nella direzione normale alla direzione di propagazione. Ora la maggiore generalità che abbiamo introdotto da principio per le onde piane permette, fino ad un certo punto, di far scomparire la limitazione indicata. Riprendiamo infatti gli integrali (3) della Nota precedente, di cui non ci siamo più occupati:

$$u_3 = 0 \quad v_3 = \chi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon t) \quad w_3 = 0$$

colla condizione per le costanti

$$b^2(\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon^2$$

ed alla superficie, cioè per  $z = 0$ ,

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Ora poniamo

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = b\sqrt{\eta} \quad \text{e quindi} \quad \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \eta - 1,$$

ove  $\eta$  indica una qualunque delle radici dell'equazione di Rayleigh, maggiori dell'unità. Potremo allora porre

$$v = \chi(z\sqrt{\eta-1} + x - tb\sqrt{\eta}) + \chi(-z\sqrt{\eta-1} + x - tb\sqrt{\eta})$$

(1) Philosophical Transactions. vol. 203, 1904.

e saranno allora verificate le due condizioni a cui la  $v$  deve soddisfare. Avremo così un'onda che si propaga con velocità uguale ad una qualunque delle nostre coppie associate, e che darà luogo in superficie ad un movimento ondulatorio normale alla direzione di propagazione. Essa è composta di due onde piane; per l'una il piano d'onda coincide con quello delle onde (4'); per l'altra con quello dell'onda riflessa.

Analogamente potremo sovrapporre ad un'onda generalizzata di Rayleigh, un moto vibratorio dato da

$$v = \chi(is\sqrt{1-\eta} + x - tb\sqrt{\eta}) + \chi(-is\sqrt{1-\eta} + x - tb\sqrt{\eta})$$

che sarà anche reale se  $\chi$  è reale.

Viene così a scomparire la limitazione precedentemente indicata.

Veniamo finalmente a qualche confronto numerico.

La teoria che abbiamo svolto non porta ad una determinazione numerica delle velocità di propagazione, anche quando sia dato il valore del rapporto di Poisson, che è il parametro variabile dell'equazione di Rayleigh. Essa ne assegna i valori all'infuori del fattore  $b$ , che rappresenta la velocità di propagazione delle onde trasversali. Risultano così determinati numericamente i valori dei rapporti delle tre velocità superficiali, quando sia dato il valore di  $\sigma$ . Prendendo per  $\sigma$  il valore comunemente ammesso  $1/4$ , abbiamo visto che i valori delle radici dell'equazione di Rayleigh sono

$$\eta_1 = 4 \quad \eta_2 = 3.1547 \quad \eta_3 = 0.8453.$$

Indicando perciò con  $V_1, V_2, V_3$  i valori delle corrispondenti velocità di propagazione superficiale, troviamo

$$(7) \quad \frac{V_1}{V_2} = 1,12 \quad \frac{V_1}{V_3} = 2,17 \quad \frac{V_2}{V_3} = 1,93.$$

Ora se prendiamo i valori medi delle velocità di propagazione delle onde (P), (S), (L) riportati da De-Marchi (1) nella seconda delle sue Note, che sono, in chilometri per secondo,

$$V_P = 10,47 \quad V_S = 6,12 \quad V_L = 4,02$$

troviamo

$$(8) \quad \frac{V_P}{V_S} = 1,71 \quad \frac{V_P}{V_L} = 2,60 \quad \frac{V_S}{V_L} = 1,52.$$

Il valore precedente per  $V_L$  rappresenta una media di massimi valori osservati. Prendendo invece il valore  $V_L = 3,10$  che rappresenta una media di minimi, si trova

$$(9) \quad \frac{V_P}{V_L} = 3,37 \quad \frac{V_S}{V_L} = 1,97.$$

(1) Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1916, pag. 506

Possiamo quindi dire che l'accordo fra i valori (7) ed i valori (8) o (9) è abbastanza soddisfacente. Lo è certamente per quanto riguarda l'ordine di grandezza. Nè possiamo pretendere molto di più, poichè conviene osservare che il confronto avviene fra quantità, di cui non sappiamo bene entro quali limiti siano paragonabili, poichè non conosciamo con precisione l'influenza della curvatura della terra sulla velocità di propagazione.

Inoltre dobbiamo tener presente che non grande è la precisione raggiungibile nella determinazione sperimentale delle velocità. E più ancora l'altra circostanza che i valori precedenti delle  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  sono calcolati nell'ipotesi  $\sigma = 1/4$ , che non è punto obbligatoria. Noi potremmo quindi cercare di migliorare l'accordo coi dati d'osservazione, con piccole variazioni di questo valore del coefficiente di Poisson. Anzi potrebbe essere questa una via per determinare effettivamente il valore di questo coefficiente per la terra, presa nel suo insieme, in base ai dati delle osservazioni sismiche, anzichè dedurlo dai valori che esso ha pei materiali componenti la superficie terrestre, come si fa ordinariamente.

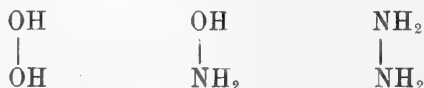
Ad ogni modo ci sembra che dal confronto coi dati d'osservazione per le velocità di propagazione non possano sorgere serie obiezioni contro il modo di vedere esposto nella presente ricerca.

E finalmente, all'infuori di qualsiasi ipotesi, o interpretazione dei risultati meccanici ottenuti, ci sembra fuori di discussione il fatto, che se si ammette l'esistenza delle onde superficiali di Lord Rayleigh nel suolo, come è comunemente accettata, sia pur necessario ammettere l'esistenza nel suolo anche delle nuove onde, di cui abbiamo studiato le principali caratteristiche.

Spetta ai sismologi il decidere quale sia il posto che conviene di assegnare ad esse, nella teoria meccanica delle oscillazioni del suolo.

Chimica. — *Analogie fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto.*  
Nota II del Socio A. ANGELI.

Le considerazioni che formano argomento della presente Nota rappresentano un seguito di quelle che qualche anno addietro ho comunicate a questa Accademia, in una Nota che porta lo stesso titolo <sup>(1)</sup>, e che si riferiscono alle sorprendenti analogie di comportamento che presentano l'acqua ossigenata, idrossilammina, idrazina:

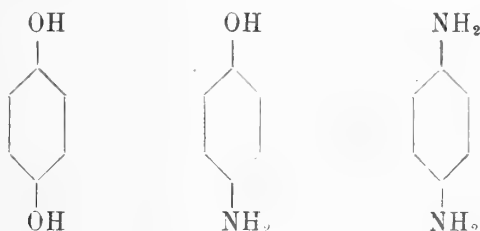


ed i loro derivati.

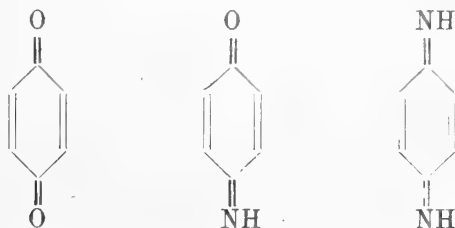
<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti, 19 (1910), 2° sem., 94. Conf. anche O. Diels e M. Paquin, Berliner Berichte, 46 (1913), 2002.



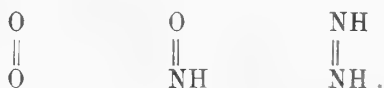
In questi casi i gruppi (OH) ed (NH<sub>2</sub>), come ognuno vede, sono uniti fra di loro direttamente; ma un attento esame dei fatti finora conosciuti dimostra che queste analogie sussistono ancora quando tali residui sono separati gli uni dagli altri, e precisamente quando si trovano in posizione para ovvero orto di un anello aromatico. Considerando p. e. i termini (1):



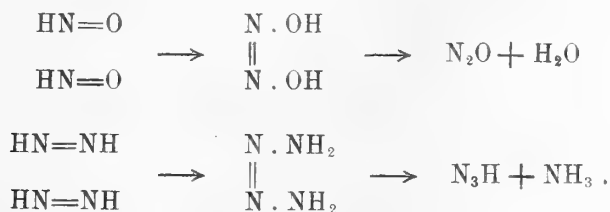
si nota che queste sostanze, ossidate nelle opportune condizioni, forniscono i prodotti:



vale a dire i chinoni, le chinonimmine e le chinondiimmidi, che corrispondono a quelli che forniscono i termini più semplici:



Questi due ultimi sono instabilissimi ed hanno una grande tendenza a polimerizzarsi e successivamente a scindersi in vario modo; infatti si ha:



(1) Queste sostanze agiscono da rivelatori fotografici, e come rivelatori si comportano anche acqua ossigenata, idrossilammina ed idrazina, ma non trovano impiego a questo scopo perchè il processo di riduzione è accompagnato da sviluppo di gas che deforma lo strato sensibile e quindi l'immagine.

Come ha trovato E. v. Bandrowsky <sup>(1)</sup> anche la chinonimmina può dare un polimero, di cui ancora non è stata fissata la costituzione, e come hanno dimostrato le belle ricerche di R. Willstätter ed A. Pfannenstiel <sup>(2)</sup> l'o-chinondiimide fornisce con tutta facilità l'o-azoanilina:



I derivati chinonici, come è noto, si aggiungono all'acido benzolsolfonico <sup>(3)</sup> ed i composti:



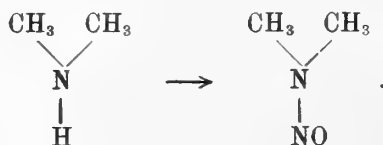
si possono a loro volta considerare come prodotti di addizione dell'acido benzolsolfonico ai termini:



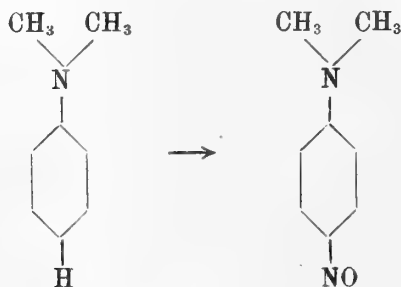
Questi pochi esempi dimostrano perciò che in questi casi tali gruppi, situati in posizione para ovvero orto, si comportano in alcune reazioni come se fossero direttamente uniti fra di loro; la stessa regola vale pure per altri residui, che si trovano nelle stesse condizioni, ed anche quando l'anello aromatico non assume la forma chinonica.

Citerò qualche esempio.

La dimetilammina per azione dell'acido nitroso fornisce la nitrosammina:



In modo identico si comporta la dimetilanilina:

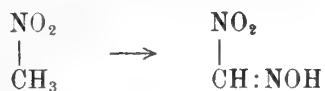


<sup>(1)</sup> Monatshefte, 10 (1889), 127.

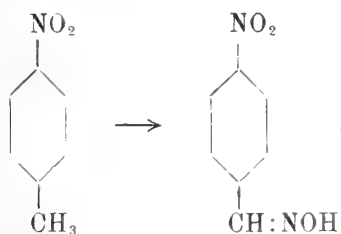
<sup>(2)</sup> Berliner Berichte, 38 (1905), 2350.

<sup>(3)</sup> O. Hinsberg, B. Berichte, 27 (1894), 3259 e seg.

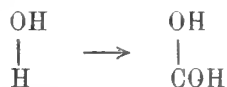
Il nitroetano fornisce l'acido metilnitrico:



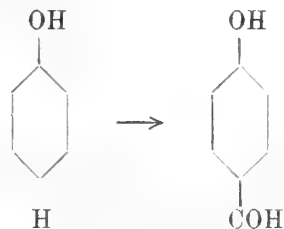
nello stesso modo che dal p-nitrotoluolo si ha l'ossima (1):



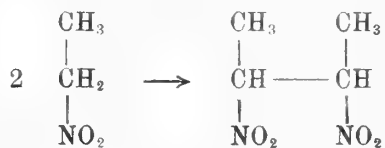
Cloroformio ed alcali danno acido formico:



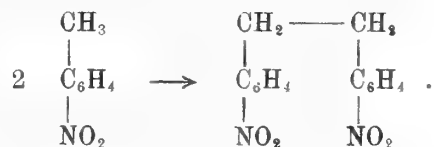
e la reazione è analoga alla sintesi delle ossialdeidi aromatiche di Tiemann:



Qualche anno addietro venne realizzata anche la trasformazione (2):



la quale corrisponde all'altra che si può effettuare partendo dal p-nitrotoluolo:



(1) Angeli e Angelico. Questi Rendiconti, 8 (1899), 2° sem., 32.

(2) Angeli e Alessandri. Questi Rendiconti, 19 (1910), 1° sem., 784.

Gli esempî si potrebbero continuare, ma i pochi che ho riportati mi sembra che sieno sufficienti per dimostrare che, nei casi considerati, i due residui sostituenti, per quanto separati fra di loro dall'anello aromatico, si comportano come se fossero congiunti direttamente fra di loro. Mi sembra questo un carattere dei composti aromatici che, a quanto io sappia, finora da nessuno è stato posto in rilievo e che, molto probabilmente, permetterà di stabilire ulteriori analogie e di realizzare nuove trasformazioni.

Biologia. — *Nuovo contributo allo studio del gozzismo*. Nota preliminare del Socio B. GRASSI e di G. ZANONI.

Nella Memoria pubblicata dal prof. Grassi e dalla dott. Miraldi<sup>(1)</sup> nel 1915, si accertava che le tiroidi di ratti albinì allevati a Losanna, le quali erano state giudicate normali, si presentavano in realtà più grosse di quelle dei ratti albinì allevati a Roma. Per vedere se questo fenomeno occorresse anche altrove, furono esaminati sei ratti albinì nati e cresciuti a Zurigo e ottenuti dal prof. Grassi per mezzo del prof. Silberschmidt. Si è verificato che anche questi ratti, in confronto con altri pure albinì nati e cresciuti a Roma, presentavano tutti, *per quanto molto lieve, un ingrossamento della tiroide*. Tali osservazioni, sebbene ancora in numero non sufficiente, pur sembrano confermare come anche a Zurigo le tiroidi siano normalmente alquanto ingrossate, in confronto a quelle di Roma, che non hanno dato mai accenno di gozzo, e anzi restano sempre entro limiti determinati, come è risultato da numerosi dati raccolti a più riprese.

Nel proseguimento delle iniziate ricerche, uno di noi (Grassi), essendosi assentata la Miraldi, credette opportuno di associarsi un'altra collaboratrice (Zanoni). Essa intraprese anche lo studio istologico delle tiroidi dei ratti albinì e selvatici di località gozzigena, comparativamente a quelli di Roma. Queste indagini sono ormai avanzate, e saranno da essa riassunte in una prossima Nota. Qui si tratta di riferire i nuovi esperimenti fatti in comune.

Nella Memoria sopra citata, gli esperimenti del Messerli a Losanna, in seguito alla constatazione che in quella città le tiroidi sono già normalmente ingrossate, furono interpretati nel senso che « per sè stessa, l'acqua che si beve non è gozzigena: essa però può esagerare molto la tumefazione di una tiroide già ingrossata e, se si vuole, già lesa: coloro che hanno creduto di ottenere lo sviluppo del gozzo col solo uso dell'acqua potabile in

(<sup>1</sup>) *Nuova contribuzione all'etiologia del gozzismo*. Annali d'Igiene sperimentale, vol. XXV, fasc. 3<sup>o</sup>, anno 1915.

località gozzigena, non hanno tenuto presente questo ingrossamento che precede, ovvero sorge per proprio conto contemporaneamente all'uso dell'acqua sospetta, se si tratta di mammiferi provenienti da località indenne ».

Per dare a tale interpretazione una conferma o meno, nello stesso paese (Montecelio) e nel medesimo locale, in cui si erano fatti i precedenti sperimenti, riferiti nella Memoria del prof. Grassi e della dott. Miraldi, ne furono intrapresi altri, somministrando però cibo e acqua del luogo. In tutti e quattro i ratti albini trattati in tal modo dalla fine di giugno 1915 alla fine di gennaio 1916, si ottenne un ingrossamento della tiroide *relativamente enorme*, quale non si era mai constatato in precedenza. Altri cinque ratti della stessa serie, in cui l'esperimento si prolungò fino al principio dell'aprile (1916), presentarono un ingrossamento ancora alquanto superiore. È vero che già nei primi quattro ratti la prova era durata qualche settimana di più che quelle precedenti, ma tale piccola differenza di tempo non basta da sola a spiegare la grandissima differenza dei risultati.

Abbiamo tuttavia ritenuto opportuno ripetere la prova; senonchè i ratti tenuti a Montecelio da gennaio a luglio del 1916 diedero alla sezione un esito inaspettato, in quanto, tranne un caso in cui vi era evidente ingrossamento, presentavano tiroidi solo lievissimamente ingrandite, coincidendo il peso di queste coi massimi riscontrabili a Roma. Risultato analogo presentava pure un altro ratto della stessa serie mantenuto a Montecelio fino al novembre dello stesso anno, ed un altro nato da esso in giugno e vissuto pure fino al novembre.

Nuove indagini fatte nel frattempo sui ratti selvatici viventi in libertà a Montecelio, per poter definitivamente stabilire se presentassero o no la tiroide un po' ingrossata, hanno dato anch'essi risultati negativi, come pure quelle eseguite su alcuni di tali ratti mantenuti in gabbia dal maggio al novembre.

Contemporaneamente si mantenevano a Roma ratti albini in un ambiente chiuso, poco aereato, dove era stata accumulata gran copia di spazzatura ed altro materiale di rifiuto raccolto a Montecelio, onde vedere se fosse in tal modo possibile provocare a Roma lo sviluppo del gozzo. I risultati ottenuti furono negativi, ma ad essi non si può dare un valore decisivo, poichè il materiale usato è stato raccolto a Montecelio nel periodo in cui, come sopra si è detto, anche sul luogo non si poterono ottenere che molto scarsi risultati.

Quanto qui abbiamo riferito, mentre ci ricordava fenomeni analoghi verificatisi a Zurigo [come risulta dalla Memoria di L. Hirschfeld e R. Klinger: 1915 (1)], ci faceva supporre che l'ambiente, dove sperimentavamo, fosse in un certo senso esaurito; onde si è cercato di rinnovare l'esperimento, ma in

(1) *Experimentelle Untersuchungen über dem endemischen Kropf*. Archiv für Hygiene. Bd. 85, 4 Heft.

altro locale, mentre si mantenevano però anche nel primo, per poter seguire con sicurezza l'andamento del fenomeno, due nuove serie di ratti, la seconda delle quali riceveva giornalmente, oltre alla comune dieta di pane, piccole dosi di latte. Di tali ratti, quelli finora esaminati (cinque della prima e tre della seconda serie) tornarono a presentare un gozzo spiccatissimo e molto più grande (tranne un sol caso) di quelli ottenuti dal Grassi colla Miraldi, usando l'acqua e il pane di Roma in esperimenti di durata non inferiore.

Bisogna inoltre ricordare che recentemente l'Arcangeli <sup>(1)</sup> annunciava, come semplice ipotesi di lavoro, senza alcun corredo di osservazioni proprie, che il gozzo endemico possa essere prodotto da un parassita, trasmissibile per via di ospiti intermedi, come le cimici; ma contro tale supposizione già presa da uno di noi (prof. Grassi) come punto di partenza nelle ricerche precedenti e poi abbandonata, si vengono a trovare in opposizione tutti i dati epidemiologici, primo quello che il gozzo è nettamente localizzato, trovandosi per es. a Montecelio e non a Roma. In ogni modo i ratti in esperimento furono seguiti anche da questo punto di vista, riguardo, cioè, ai loro parassiti, ma sempre con esito negativo.

Concludendo, i risultati qui brevemente riassunti conducono la nostra mente verso ricerche di microrganismi viventi nell'ambiente esterno e di influssi che essi possono eventualmente esercitarvi; veniamo così a trovarci in una direzione, fino a un certo punto, convergente con quella seguita da Hirschfeld e Klinger. Per continuare queste ricerche occorre coltivare i vari microrganismi dell'ambiente gozzigeno, ciò che abbiamo appunto iniziato in questo tempo particolarmente favorevole per lo sviluppo del gozzo, come risulta da quanto sopra si è riferito.

**Botanica.** — *Sulle forme fungine incluse nel ciclo di sviluppo della Lepiota cepaestypes Sow. e in quello della Lepiota (Agaricus) cretacea Bull.* Memoria del Socio **ORESTE MATTIROLLO.**

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

**Matematica.** — *Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1<sup>a</sup> specie tra spazi ad  $n$  dimensioni.* Nota di **EUGENIO G. TOGLIATTI**, presentata dal Socio **C. SEGRE.**

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

<sup>(1)</sup> *Sull'etiologia del gozzo endemico e del cretinismo.* Rivista Ospedaliera (Sezione scientifica), anno 1916.

**Matematica.** — *Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann.* Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Mineralogia.** — *Cianotrichite e dioplasia di Traversella* <sup>(1)</sup>. Nota di LUIGI COLOMBA, presentata dal Socio C. VIOLA.

In una delle mie ultime gite alle miniere di Traversella ebbi occasione di raccogliere alcuni esemplari di un minerale di tinta verde azzurra; essi provenivano dalla parte più interna di una galleria del giacimento di Riondello <sup>(2)</sup> ed erano in parte costituiti da minuscole stalattiti appese al tetto della galleria ed in parte da sottili incrostazioni ricoprenti alcuni frammenti di roccia. Tanto le une quanto le altre provenivano dallo stesso punto della galleria e, poichè era certa la loro origine secondaria dovuta a deposito da acque di infiltrazione, dovevano derivare dallo stesso stillicidio.

Sebbene gli esemplari apparissero fortemente inquinati da depositi contemporanei o posteriori argillosi e limonitici, potei tuttavia ricavarne alcuni frammenti sufficientemente sani e puliti che mi permisero di compiere alcuni saggi ed alcune osservazioni bastanti per determinare la loro composizione chimica ed i loro caratteri; essi anzi mi persuasero che tanto le stalattiti quanto le incrostazioni dovevano riferirsi alla stessa specie minerale.

Il minerale, trattato con acido cloridrico anche non concentrato e freddo, si scioglie completamente colorando la soluzione in verde; in detta soluzione si può facilmente riconoscere la presenza del rame, dell'alluminio, del calcio e dell'acido solforico. Per riscaldamento esso perde una grande quantità di acqua, dando contemporaneamente luogo ad un abbondante sviluppo di vapori acidi dovuti ad anidride solforica; continuando il riscaldamento fino alla completa eliminazione dei prodotti volatili, rimane un residuo brunastro che si scioglie parzialmente nell'acido cloridrico, dando una intensa colorazione verde alla soluzione e lasciando un residuo pulverulento bianco.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena.

(2) L. Colomba, *Ricerche sui giacimenti di Brosso e Traversella.* Parte 2<sup>a</sup>. Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie II, vol. LXVI, n. 3 (1915).

Trattando il minerale con ammoniacca, esso si colora in azzurro: in seguito si scioglie parzialmente colorando la soluzione in azzurro e lasciando un residuo bianco, gelatinoso che va però a poco a poco rapprendendosi. Tanto questo residuo quanto quello prima accennato, opportunamente trattati, rivelano essenzialmente la presenza dell'alluminio.

Alcuni saggi quantitativi mi diedero i seguenti risultati:

Cu O	=	47,64
Ca O	=	3,32
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	=	7,83
SO <sub>3</sub>	=	15,62
H <sub>2</sub> O	=	[25,59]
		<hr/>
		100,00

Non posso però affermare per quanto riguarda l'acqua, determinata semplicemente per differenza, che i risultati da me ottenuti debbano essere considerati come esatti in modo assoluto, per il fatto che, pur avendo scelto con la massima cura il materiale impiegato nell'analisi, non potei eliminare completamente le impurezze e le sostanze estranee; ne consegue che la quantità di acqua deve essere, sebbene di poco, inferiore. Non credo invece che esistano differenze apprezzabili nei rapporti reciproci degli altri componenti.

Riguardo ai caratteri strutturali si hanno alcune differenze negli esemplari, a seconda che si tratti di stalattiti o di incrostazioni; nelle prime il minerale è sempre in laminette molto sottili, aggregate in modo da dar luogo ad una struttura raggiata intorno all'asse delle stalattiti; nelle seconde invece si hanno prevalentemente minutissimi cristalli aciculari, i quali però, quando hanno dimensioni maggiori, tendono anch'essi ad assumere un abito lamellare; si può quindi concludere che le differenze esistenti fra i due tipi di esemplari non sono affatto sostanziali, dipendendo esclusivamente dalle speciali condizioni nelle quali avvenne il loro deposito.

Al microscopio le lamelle e gli aghetti si presentano perfettamente trasparenti e pressochè incolori; solo quando si tratta di aggregati di un certo spessore comparisce in essi la caratteristica tinta verde-azzurra, senza alcuna traccia di pleocroismo. La birifrazione è molto debole ed i colori di polarizzazione non superano mai il grigio anche nelle lamelle di un certo spessore. Le estinzioni sono sempre rette, avvenendo sempre parallelamente ai lati delle lamelle, tanto sulle loro facce di maggiore sviluppo, quanto normalmente ad esse; si può quindi ammettere che il minerale appartenga al sistema rombico.

Sebbene la perfetta trasparenza ed il comportamento ottico dei cristalli lamellari ed aghiformi non lasciasse alcun dubbio sulla loro omogeneità, ho creduto utile di compiere alcune osservazioni chimico-microscopiche per accertarmi se la composizione chimica piuttosto complicata rivelata dall'ana-



lisi, dovesse realmente considerarsi come corrispondente ad essi e non ad una miscela meccanica di varie sostanze, una delle quali sarebbe appunto stata rappresentata dalle lamelle e dagli aghetti.

A questo scopo ho studiato al microscopio il comportamento dei detti cristalli in presenza all'ammoniaca ed in presenza all'acido cloridrico; in questo secondo caso, dopo averli sottoposti ad un forte riscaldamento. In tal modo mi sarebbe stato possibile di stabilire se il residuo bianco insolubile gelatinoso o pulverulento ottenuto nelle dette reazioni e riferibile a composti di alluminio, dovesse considerarsi come veramente faciente parte dei cristalli oppure di qualche altra sostanza meccanicamente mescolata con essi.

Le mie osservazioni, mentre per un lato mi hanno condotto alla conclusione che il detto residuo deve, a seconda dei casi, riferirsi ad idrato oppure ad ossido di alluminio, per altro lato mi hanno persuaso che esso è da considerarsi come un vero componente del minerale verde azzurro.

Esaminando al microscopio il modo di comportarsi delle lamelle sotto l'azione dell'ammoniaca ho notato che esse dapprima si colorano in azzurro in modo perfettamente uniforme su tutta la loro superficie; in seguito la sostanza azzurra, dovuta, come è noto, ad un solfato cupri-ammonico, si scioglie rimanendo un residuo bianco, gelatinoso, molto leggero, costituito da idrato di alluminio, il quale mantiene completamente la forma iniziale delle lamelle; a nicols incrociati si nota che contemporaneamente a detta reazione, la birifrazione diminuisce rapidamente ed in poco tempo scompare, essendo il residuo bianco isotropo.

Scaldando le lamelle esse assumono dapprima una tinta verde-gialliccia nettamente visibile anche in quelle che per la loro sottigliezza in condizioni ordinarie sembrano incolori; continuando il riscaldamento, la tinta diviene gradatamente più cupa e, passando per il verde-brunastro e per il bruno-giallastro, giunge al bruno schietto; in tali condizioni le lamelle perdono completamente la trasparenza ed incominciano a fessurarsi in causa della eliminazione dei prodotti volatili; la tinta delle lamelle poi, in ogni momento, è sempre uniforme su tutta la loro superficie.

Trattando le lamelle così scaldate con acido cloridrico, esse si sciolgono parzialmente e, mentre la soluzione si colora in verde, rimane un residuo bianco, isotropo il quale, al pari del precedente, mantiene la forma delle lamelle e dei loro frammenti; esso però non ha l'aspetto gelatinoso ed è formato da ossido di alluminio.

Per ciò che si riferisce alle piccole quantità di ossido di calcio rivelate dall'analisi, pur non potendo escludere che almeno in parte costituiscano un vero componente del minerale, credo più logico di ammettere, in conseguenza di alcuni saggi da me compiuti, che esse provengano da piccole quantità di gesso meccanicamente mescolate; fatto questo per nulla straordinario quando si pensi alla facilità con la quale il gesso può formarsi, come pro-

dotto secondario, in un giacimento minerario così ricco di solfuri e di calcari, quale è appunto quello di Riondello.

In base a queste considerazioni, eliminando contemporaneamente al calcio anche le corrispondenti quantità di anidride solforica e di acqua richieste per formare il gesso, la composizione centesimale del minerale da me analizzato verrebbe ad essere la seguente:

Cu O	=	53,05	0,666	7,83
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	=	8,72	0,085	1,00
SO <sub>3</sub>	=	12,11	0,151	1,89
H <sub>2</sub> O	=	[26,12]	1,451	17,07
		100,00		

Da questi rapporti molecolari si deduce che il detto minerale, malgrado la complessità della sua formola, può riferirsi, come varietà, alla *cianotrichite*.

Se si considerano le analisi note per la detta specie, è facile di osservare come i rapporti molecolari da esse desunti siano molto variabili. Queste analisi, che, per quanto mi consta, sono cinque, hanno dato i risultati seguenti:

	CuO	CaO	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SO <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O	res. ins.	Totale
1) Moldavia [Percy (1)]	48,16	—		11,70	15,39	23,06	—	98,30
2) " " "	46,59		11,06	1,18	14,12	23,06	2,35	98,36
3) Cap Garonne [Pisani (2)]	49,00	2,97	11,21	1,41	12,10	22,50	—	99,19
4) Arizona [Genth (3)]	46,71	—	16,47	1,34	12,49	21,89	0,44	99,34
5) Utah	49,54	—	15,45	0,91	12,60	[21,50]	—	100,00

Ad esse anzi, date le grandi analogie chimiche, si possono anche aggiungere le tre analisi di *woodwardite* della Cornovaglia, dovute a Church ed a Warington, poichè, sebbene la detta specie sia stata da taluno considerata come derivante da una miscela di langite e di idrato di alluminio, nulla giustifica una tale ipotesi, risultando invece molto chiari i suoi rapporti colla cianotrichite se si ammette che l'alluminio costituisca un vero componente. Queste analisi hanno dato i risultati seguenti:

	CuO	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SO <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O	Totali
1) Church (4)	48,34	17,97	13,95	18,48	98,74
2) Warington (5)	48,67	18,64	13,04	[19,65]	100,00
3) " "	46,80	17,63	12,54	[22,73]	100,00

(1) Phyl. Magaz. (1850), 36, pag. 100.

(2) C. R. de l'Ac. de France (1878), 86, pag. 1418.

(3) Am. Journ. of Science (1890), 40, pag. 118.

(4) Chem. News (1866), XIII, 85, pag. 113. Journ. of Chem. Soc. (1866), XIII, pag. 130.

(5) Id. id.

Ricavando da queste otto analisi di cianotrichite e di woodwardite i rapporti molecolari e disponendole in ordine ai valori che in esse assume l'ossido di rame in rapporto ai sesquiossidi uguagliati all'unità, si ottiene la seguente tabella nella quale ho pure riportato i rapporti molecolari corrispondenti al minerale di Traversella (nell'analisi n. 3 ho calcolato tutti i sesquiossidi allo stato di  $Al_2O_3$ ):

	CuO	CaO	$Al_2O_3$	$Fe_2O_3$	$SO_3$	$H_2O$	$\overset{''}{R}O$	$\overset{'''}{R}_2O_3$	$SO_3$	$H_2O$
1) Minerale di Traversella	0,666	—	0,085	—	0,151	1,451	7,83	1,00	1,89	17,07
2) Cianotrichite di Cap Garonne . . . . .	0,615	0,053	0,109	0,009	0,151	1,250	5,66	"	1,28	10,60
3) Id. di Moldavia (an. 1 <sup>a</sup> )	0,605	—	0,114	—	0,192	1,281	5,30	"	1,68	11,24
4) Id. " (an. 2 <sup>a</sup> )	0,585	—	0,108	0,007	0,176	1,281	5,09	"	1,53	11,14
5) Id. dell'Utah . . . . .	0,622	—	0,151	0,006	0,157	1,194	3,96	"	1,00	7,60
6) Woodwardite (an. 1 <sup>a</sup> ) .	0,607	—	0,176	—	0,174	1,027	3,50	"	0,99	5,90
7) Cianotrichite dell'Arizona	0,587	—	0,161	0,008	0,156	1,216	3,47	"	0,86	7,19
8) Woodwardite (an. 2 <sup>a</sup> ) .	0,612	—	0,182	—	0,163	1,092	3,36	"	0,90	6,00
9) Id. (an. 3 <sup>a</sup> ) .	0,590	—	0,175	—	0,157	1,263	3,35	"	0,90	7,20

Da questa tabella, a mio parere, risulta chiaramente che il minerale di Traversella costituisce una varietà di cianotrichite, differente dalle altre attualmente note sotto il nome di cianotrichite e di woodwardite, per una maggiore ricchezza in acqua ed una minore ricchezza in alluminio. Nè credo che la mancanza in esso di pleocroismo, mentre invece sono sempre pleocroiche le altre varietà di cianotrichite, sia sufficiente per escludere l'esistenza di affinità fra i due minerali, potendo tale differenza di comportamento dipendere dal fatto che nel minerale di Traversella mancano quelle piccole ma non trascurabili quantità di sesquiossido di ferro presenti invece nelle altre cianotrichiti.

Raramente ho notato nelle stalattiti la presenza, sotto forma di individui isolati oppure di forme dendritiche, di un minerale di color verde smeraldo in cristalli prismatici, dotati di estinzioni rette. Questi cristalli hanno una discreta durezza, non sono intaccati dall'ammoniaca, l'acido cloridrico li scioglie parzialmente lasciando un residuo di silice gelatinosa; scaldati fortemente imbruniscono e, mentre perdono la trasparenza, si fessurano dando luogo a sviluppo di vapor d'acqua.

Sebbene non abbia potuto compiere altri saggi ed altre osservazioni, credo si possa ammettere che essi siano da riferirsi alla *dioplasia*.

**Paleontologia.** — « *Zuffardia* », nuovo genere di Echinide del Senoniano della Tripolitania<sup>(1)</sup>. Nota di G. CHECCHIA-RISPOLI, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Durante i lavori delle varie Missioni incaricate dal Ministro delle Colonie di studi agro-geologici in Libia, negli anni 1912-1914, venne raccolto un abbondante materiale paleontologico comprendente tra l'altro una ricca collezione di Echinidi del Cenomaniano e del Senoniano. Il dottor Pietro Zuffardi dell'Istituto Geologico dell'Università di Torino, che fu aggregato a queste Missioni, si proponeva di compiere, insieme allo studio dei Coralli, anche quello degli Echinidi raccolti. Ma egli aveva appena iniziato il suo lavoro quando dovette interromperlo perchè richiamato sotto le armi. Purtroppo, dopo oltre un anno di vita al fronte, dove fu ferito già una prima volta, in seguito a gravi ferite riportate nell'aspro attacco notturno di Zugna Torta del 1° luglio dello scorso anno Egli serenamente si spegneva nell'Ospedale militare di Verona nel 28 dello stesso mese.

Per questa fatale circostanza tutto il materiale echinologico, con tanta cura raccolto dal compianto Collega, si trova ora nelle mie mani, affidatomi dalla benevolenza del prof. C. F. Parona, che io sento il dovere di ringraziare qui pubblicamente.

Il mio studio è pressochè ultimato; ma per le difficili circostanze del momento esso non potrà certamente venire pubblicato così presto, come sarebbe mio desiderio; perciò mi son deciso a pubblicare per ora la presente breve Nota destinata alla descrizione di un nuovo genere di *Cassidulidae*, che io avevo di già intravvisto studiando gli Echinidi raccolti dal Sanfilippo nella Tripolitania nel 1911 e che ora ho potuto definitivamente stabilire grazie al materiale messo a mia disposizione dal prof. Parona. Chiamo il nuovo genere *Zuffardia*, credendo di sciogliere in parte il mio debito di ammirazione verso la gloriosa memoria del Collega Zuffardi.

#### Gen. **Zuffardia**. Checchia-Rispoli

*Guscio di medie dimensioni e sottile.*

*Contorno ovale; faccia superiore elevata, convessa o subconica, rapidamente declive sui fianchi; faccia inferiore pianeggiante o debolmente convessa; margine arrotondato.*

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Paleontologia del R. Ufficio Geologico.

*Apparecchio apicale centrale, monobasale, di forma pentagonale un po' allungata, munito di quattro pori genitali leggermente ovali, rigettati in parte negli interambulacri. Ocellari piccolissime situate ai vertici del pentagono.*

*Ambulacri subeguali, nettamente petaloidi, larghi, un po' aperti verso le estremità. Zone porifere sviluppate, formate di pori diseguali, disposti a paia obliqui separati da una costa sporgente e granulosa.*

*Peristoma un po' spostato avanti, piccolo, superficiale, pentagonale, stretto, allungato nel senso dell'asse antero-posteriore, circondato da fortissime e sporgenti protuberanze interambulacrali e da fillodi bene sviluppati.*

*Periprocto piccolo, superficiale, trigonale, appuntito in alto, situato nel mezzo della faccia posteriore.*

*Tubercoli piccolissimi, scrobicolati, stipati sulla faccia superiore, un po' più distanti e più grossi sulla inferiore.*

**Tipo:** *Zuffardia Sanfilippo* Checchia-Rispoli del Senoniano della Tripolitania (sub *Pseudocatopygus*) <sup>(1)</sup>. Un'altra specie appartenente allo stesso genere è *Zuffardia Rohlfsi* Krumbeck sp. anche del Senoniano della Tripolitania (sub *Catopygus*) <sup>(2)</sup>.

*Rapporti e differenze.* — Nel 1906 il Krumbeck nella descrizione del suo *Catopygus Rohlfsi* mise giustamente in rilievo la differenza che la nuova specie tripolina presentava con tutti gli altri *Catopygus* per la forma del periprocto caratteristicamente trigonale, in luogo di essere circolare od ovale. In seguito nel 1914 ho avuto occasione di occuparmi anch'io di questa specie, che ritrovai nel materiale raccolto dal Sanfilippo; inoltre facevano parte di detto materiale alcuni altri Echinidi, che non si potevano separare genericamente dal *C. Rohlfsi* Krumbeck. Tra gli altri caratteri, tanto i primi che i secondi, mostravano perfettamente identici l'apparecchio apicale, il peristoma, il periprocto e gli ambulacri. Credetti allora di separare gli uni e gli altri dai *Catopygus*, per riferirli, almeno provvisoriamente, al gen. *Pseudocatopygus* Cotteau et Gauthier, il di cui periprocto sembrava molto più vicino per forma a quello degli esemplari da me esaminati. Il nuovo materiale avuto ora a mia disposizione mi ha permesso di riprendere lo studio di queste specie e, per le ragioni che verrò esponendo, mi sento facoltato a separarle dai *Pseudocatopygus* ed a riunirle nel nuovo genere da me proposto.

<sup>(1)</sup> Checchia-Rispoli G., *Sopra alcuni Echinidi del Cretaceo superiore della Tripolitania raccolti dal cav. Ignazio Sanfilippo*. Giorn. Sc. Nat. ed Econ. di Palermo, vol. XXX, pag. 5 (dell'estratto), tav. I, fig. 8-8e. Palermo, 1914.

<sup>(2)</sup> Krumbeck L., *Beiträge zur Geologie und Palaeontologie von Tripolis*. Palaeontographica, vol. LIII, pag. 87, tav. VII, fig. 4a-d, 1906-1907; vedi anche Checchia-Rispoli, loc. cit., pag. 5, tav. I, fig. 3-3 b.

Il gen. *Zuffardia* infatti si distingue da *Pseudocatopygus* <sup>(1)</sup> innanzi tutto per la costituzione dell'apparecchio apicale, che è centrale e *monobasale*, mentre nell'altro, oltre ad essere spostato avanti, risulta formato di quattro placche ben distinte, di cui l'anteriore di sinistra o 3 è più avanzata delle altre.

In *Pseudocatopygus* il peristoma pur essendo pentagonale non è mai stretto ed allungato come in *Zuffardia*, e non presenta affatto le fortissime sporgenze interambulacrali talmente pronunciate, che i fillodi vi si trovano ad essere come compressi. Notisi poi che il periprocto dei *Pseudocatopygus*, pur non essendo per la forma quello dei *Catopygus*, che è rotondo od ovale, è sempre ovalare e non triangolare e si apre alla sommità della faccia posteriore, seguito in basso da un solco liscio, poco marcato, sino al margine inferiore del guscio.

Noto infine che gli ambulacri di *Pseudocatopygus* sono sempre subpetaloidi, poco sviluppati e con pori subeguali, mentre quelli di *Zuffardia* sono nettamente petaloidi, grandi e con pori diseguali.

Nè meno importanti sono le differenze con il gen. *Catopygus* Ag. Questo ha l'apparecchio apicale *etmofracto*, il periprocto rotondo od ovale, situato alla sommità di un'area verticale ben delimitata e gli ambulacri subpetaloidi, sempre molto aperti verso le estremità e con le zone porifere diritte e strette. Il *C. laevis* Agassiz di Maestricht <sup>(2)</sup>, che più si avvicina per la forma del guscio a *Z. Sanfilippoï*, ha il peristoma più spostato avanti, il periprocto nettamente circolare situato alla sommità di un'area triangolare ben definita, l'apparecchio apicale conforme a quello del genere, cioè *etmofracto*, gli ambulacri del tutto aperti all'estremità e le zone porifere composte di pori poco dissimili.

I rapporti di *Zuffardia* con altri generi di *Cassidulidae* sono sempre più lontani e l'insistere sulle differenze può tornare del tutto superfluo.

(1) Cotteau et Gauthier. *Mission scientifique en Perse par J. de Morgan, Échinides fossiles*, pp. 63-65, 1895.

(2) D'Orbigny A., *Terrain Crétacé, Échinoïdes irréguliers*, pag. 442, tav. 971, 1853-1860.

**Geologia.** — *Sulla nozione del carreggiamento continuato.*  
Nota di G. ROVERETO, pres. dal Corrisp. ARTURO ISSEL.

Tutte le più recenti sintesi tettoniche, fra le quali mi sia permesso includere quelle di cui è parola in una mia Nota precedente, presentata a questa Accademia nella seduta del 17 dicembre 1916, inducono a credere che l'Appennino sia, almeno per gran parte, una regione di falde di ricoprimento; che in esso le parti autoctone si riscontrino limitate ai terreni neogenici, e, forse, a qualche regione dell'eocene.

Dopo questo, numerosi altri problemi tettonici si affacciano, che fra noi non sono ancora stati trattati, non ultimi quelli di stabilire: quali influenze e rapporti intercedono fra le circoscritte parti radicate e le trasportate; quali influenze modificatrici hanno avuto sulle falde di ricoprimento tutti i movimenti posteriori, che sono assai più complicati di quanto comunemente si ammette, perchè di più categorie, fra le quali da ricordarsi, in modo particolare, quelle dell'orogenesi attenuata, dell'epeirogenesi, degli affondamenti e degli smembramenti.

Le falde affioranti, e quindi direttamente constatabili, della Liguria, di cui sono esempi: la cerniera che, partendosi dal Colle di Tenda, da noi segnalata come zona di accavallamento sin dal 1903 <sup>(1)</sup> — prima discussione in Italia della teoria che ci interessa, e ciò anche a séguito di un lavoro di R. Baldacci e Franchi <sup>(2)</sup> sulla galleria ferroviaria attraverso tale colle —, attraversa diagonalmente lo spartiacque, continuandosi lungo la costiera di M. Bertrand-M. Saccarello; la finestra della valle della Neva sopra Albenga; la finestra del Santuario sopra Savona; le cerniere e il piano di carreggiamento del golfo della Spezia; poste in rapporto con i depositi oligocenici, indicano chiaramente che la loro traslazione è avvenuta prima del deposito degli strati dell'oligocene inferiore. Nell'Appennino Centrale, invece, gli strati dell'oligocene, e, con tutta probabilità, dell'oligocene medio o superiore, perchè a sole e piccole lepidocieline, come quelli stampiani della Liguria, sono inflessi conformemente agli eocenici; di modo che, se qui l'eocene è stato trasportato, lo fu dopo che in Liguria.

Però in Liguria, tale corrugamento post-stampiano non ha mancato di farsi sentire; perchè, contemporaneamente ad esso, si è iniziato quel grande sollevamento in curva, cui è dovuta la spartizione crinalica dell'Appennino; e la prova di ciò consiste nell'ingressione del mare aquitaniano, ben visi-

<sup>(1)</sup> Boll. Soc. Geol. Ital., pag. 415, 1903.

<sup>(2)</sup> Boll. R. Comit., Geol., n. 1, 1900.

bile fra Ponzone e Bagnasco, e che avvenne su di un'area continentale, racchiudente i vari bacini lignitiferi del cattiano o *firmitiano*, tra i quali, il più noto, quello di Cadibona. Questa curva di sollevamento, che ora si chiama epeirogenetica, è stata da me per la prima volta segnalata nel 1893 <sup>(1)</sup>, ossia, un anno prima che il Gilbert ne riconoscesse altre simili nella regione dei Grandi Laghi, e introducesse il vocabolo che uso per designarla.

Dopo l'aquitano, tale curva si è a mano a mano accentuata, e ciò è provato dal fatto, che gli strati della serie neogenica, come tipicamente si osserva lungo la valle della Scrivia, aumentano di inclinazione col farsi più antichi; perchè i più antichi presentano sommati gli spostamenti, ossia le inclinazioni, di ciascun gruppo dei posteriori: ciò spiega, almeno in parte, se ai 10° di inclinazione del pliocene, ne succedono 15-25° per il miocene, 30-35° per l'oligocene.

Con queste premesse possiamo ammettere, che le superficie di carreggiamento debbono aver subito delle deformazioni; e se le particolari condizioni del rilievo non ci permettono constatazioni come quelle fattesi attorno al massiccio autoctono dell'Aar, — dove il piano di scorrimento delle falde è stato posteriormente raddrizzato ed anche rovesciato, perchè tale massiccio si è a sua volta, verosimilmente per epeirogenesi, sollevato in massa, — non manca però in Liguria l'esempio di una condizione tettonica particolare, che deve essere il risultato di una deformazione, e di una rimessa in movimento della massa carreggiata.

Alle falde meridionali del massiccio serpentinoso di M. Pennello, alla distanza di alcuni chilometri dalla costa che si estende fra Voltri e Pegli, esiste una zona di breccie, stabilita fra i calcescisti del littorale e il massiccio stesso, che risulta molto addentro incuneata, perchè da essa scaturiscono, in parecchi punti, delle acque subtermali, che verosimilmente ne seguono il contatto. Ora, il nucleo di queste breccie è miocenico, perchè all'Acquasanta, come già ho segnalato, vi ho trovato un fossile di tale età; ma ai lati si hanno breccie di frizione, date da diverse specie rocciose, che, tritrandosi, poco si son miste con le contermini; per di più, nella valle del Branega, a monte della ferrovia, le breccie sono coperte dal massiccio serpentinoso, che ha carreggiato su di esse.

Quindi noi abbiamo qui il caso di un carreggiamento postmiocenico; e siccome non è ammissibile, per quello stesso ora dettosi, che di tale età sia avvenuta la produzione di falde, è necessario supporre, che una falda di ricoprimento antica, abbia ripreso il suo movimento, a sèguito del continuato sollevamento del rilievo montuoso, e che siasi più o meno comportata come una frana gigantesca.

(1) Atti Soc. Ligustica di Sc. natur. e geogr., vol. IV, tav. II, sez. 3<sup>a</sup>, 1893.



È da questo fatto che io parto per stabilire la nozione del *carreggiamento continuato*, il quale rappresenta un terzo stadio nella evoluzione tettonica delle falde di ricoprimento; ritenendo con lo Schardt, che gli altri due stadi consistano nello scorrimento in profondità delle falde, e nelle successive compressioni orogeniche laterali e più superficiali. La nuova nozione può avere importanza, non solo come fatto tettonico a sè, ma anche come spiegazione genetica di movimenti sismici, di spostamenti con componente orizzontale delle masse montuose, e simili.

Non per nulla, nelle aree italiane di maggiore sismicità, ad esempio, attorno ai Peloritani e lungó la valle del Liri, affiorano delle superficie di carreggiamento, profondamente troncate dall'erosione.

Per dare maggior base al concetto, è utile riferirsi ad un'altra fronte di carreggiamento, assai più importante ed evidente di quella da me scoperta, ed è la falda che interessa i terreni miocenici del Veneto, i cui anormali rapporti con l'eocene, e con gli altri terreni più antichi, erano in passato spiegati con una faglia, ed ora lo sono con una piega-faglia: il Dainelli<sup>(1)</sup> ne ha in questi ultimi tempi messo in luce con cura i particolari.

Abbiamo colà l'eccezione che gli strati miocenici, a vece di coprire, non piegati, la base del rilievo alpino, sono in questo incuneati profondamente, ripetendosi il caso di Voltri; e formano un ristretto sinclinale, in varie foggie pressato, sino ad essere in qualche tratto ricoperto dalla serie del mesozoico e dell'eocene. Da ciò mi pare fondato trarre la supposizione, che il mare miocenico abbia troncato una falda di ricoprimento, e che questa in séguito, per l'innalzarsi del rilievo alpino, si sia posta in movimento, e che premendo sui nuovi depositi contro di essa accumulati, gli abbia piegati in sinclinale: continuando lo spostamento, la falda passò parzialmente su di essi, rigurgitando in contropendenza dal suo piano di carreggiamento.

Con la cognizione del carreggiamento continuato si viene inoltre a spiegare, come in alcuni casi si sia attribuito lo appilarsi delle falde di ricoprimento ad una età più recente del periodo orogenico propriamente detto, incorrendo con ciò in una apparente contraddizione.

Così, quando il Lugeon<sup>(2)</sup> constata per la prima volta, che al piede del versante settentrionale delle Alpi, sulla fine del miocene medio, le falde provenienti dal centro della catena giungono a ricoprire la molassa distruggendone, salvo brevi tratti, come nel Friuli, la linea di costa, tutto ciò è spiegabile, in modo assai semplice, ammettendo, che l'innalzamento epeirogenetico della massa alpina, posteriore a tali strati miocenici, abbia rimesso in moto, sul loro letto antico, anche da questa parte della catena, le falde formatesi durante l'eocene.

<sup>(1)</sup> Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXIX, 1910.

<sup>(2)</sup> Compt. Rend. IX Congr. Géol. Intern., pag. 491, Vienna, 1904.

Non è improbabile, che al carreggiamento continuato possa essere qualche volta dovuto se le fronti o cerniere delle falde si impuntano, si ritorecono verso il basso, ed anche si accartocciano; fatto non isfuggito al Suess<sup>(1)</sup>, che lo attribuiva, difatti, ad influenze di movimenti posteriori; nè è da tralasciarsi di ricordare che l'Arbenz<sup>(2)</sup> ha riconosciuto, come la resistenza esercitata sulla fronte delle falde da masse di *Nagelfluh* abbia prodotto, in tali falde, delle ondulazioni longitudinali; e che le culminazioni delle Alpi Elvetiche e Pennine, siano situate sul davanti dei centri di accumulazione del *Nagelfluh* stesso.

Botanica. — *Ulteriori ricerche intorno alla variazione di alcune specie di micromiceti* (3). Nota II della dott. ELISA MUTTO e del dott. GINO POLLACCI, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

In una prima Nota (4) abbiamo pubblicato alcuni risultati ottenuti con culture di *Phyllosticta pirina* Sacc. e di *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon, concludendo: che la specie *Coniothyrium pirinum* istituita da Sheldon va considerata come un sinonimo del *Coniothyrium tirolense* Bubàk, che la *Phyllosticta pirina* Sacc. invece non è sinonimo del *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon e che i mezzi di cultura usati (decotto di foglie di melo; di patata; di agar glucosato; di barbabietola) influiscono semplicemente sopra le dimensioni, ma non sul colore delle spore delle due sopradette specie.

C. H. Crabill (5) studiò egli pure la *Phyllosticta pirina* Sacc. e ne isolò 4 tipi. Secondo questo autore, i 4 tipi sono somigliantissimi.

I conidi unicellulari, ellittici, jalini sono identici; solo il micelio può essere differenziato per caratteri culturali.

In due di questi tipi si produssero clamidospore. Crabill si occupò anche del *Coniothyrium pirinum* (Sacc.) Sheldon, ossia del *C. tirolense* Bubàk, concludendo che è radicalmente diverso dalla *Phyllosticta pirina*; il che venne da noi confermato nella I<sup>a</sup> nostra Nota.

Per la *Phyllosticta pirina* Sacc. in parecchi casi il detto autore osservò la formazione di organi speciali, somigliantissimi a spore di *Macro-*

(1) C. R. Acad. d. Scienc., 7 nov. 1904.

(2) Archiv. d. Sc. phys. et natur., pag. 422. Genève, 1912.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico di Pavia.

(4) *Ricerche intorno alle specie: Coniothyrium pirina* (Sacc.) Sheldon; *Phyllosticta pirina* Sacc. e *Coniothyrium tirolense* Bubàk, R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, serie V, 2° sem., fascicolo 1° (luglio 1915).

(5) C. H. Crabill, *Studies on Phyllosticta and Coniothyrium occurring on apple foliage*. Ann. Rep. Virginia Agric. Exp. Stat., 1911-12 pubbl. 1913, pp. 95-115, figg. 18-33.

*sporium*, bruni, clavati, plurisetati, ai quali dette il nome di *apressoria*, senza peraltro precisarne la funzione.

Durante lo studio da noi fatto di numerosissime culture di micromiceti di specie diverse sopra svariati mezzi culturali, allo scopo di studiare le loro variazioni morfologiche a seconda dell'ambiente, osservammo variazioni importanti nella specie *Phyllosticta pirina* Sacc., che qui riferiamo.

Il metodo da noi usato nelle nostre ricerche è sommariamente il seguente :

Abbiamo fatte culture con materiale pervenutoci dall' « *Association des Botanistes* » di Amsterdam ad essa inviato direttamente da C. H. Crabill; abbiamo confermato la determinazione della specie ed inoculato poi le spore nei seguenti mezzi culturali: patata, carota, barbabietola; mezzi gelatinizzati solidi: agar glucosato, mosto di birra, succo di limone neutralizzato con idrato di sodio (secondo gli insegnamenti di Duggar <sup>(1)</sup> con 20 % di gelatina; mezzi gelatinizzati semi-solidi: succo di limone con 15 % di gelatina; succo di limone diluito con eguale volume d'acqua e con 15 % di gelatina.

Le culture da noi fatte erano lasciate alla temperatura di laboratorio 15°-18°-20° C, e alla luce alternata del giorno e della notte.

I mezzi semisolidi si mostrarono in generale poco favorevoli allo sviluppo dei funghi studiati, i quali male vi vegetavano.

Gli altri mezzi si mostrarono ottimi e in un periodo variabile che faremo noto ogni volta, ottenemmo le relative fruttificazioni. Per seguire giorno per giorno la biologia dei micromiceti usammo pure delle camere umide Van Tieghem, dove sul vetrino copri-oggetti una piccola porzione di mosto di birra gelatinizzato costituiva il terreno culturale su cui era inoculato il fungo da studiare.

Anzi che chiuso ermeticamente con vasellina o altro, il vetrino poteva (evitando con cura l'inquinamento) venir sollevato per deporre al fondo della camera umida una gocciolina di acqua sterilizzata che avrebbe mantenuto l'ambiente nella voluta umidità. Queste camere si mostrarono ottime; in esse potemmo seguire il completo svilupparsi della *Phyllosticta* in poco tempo ed osservare tutti i particolari dello sviluppo.

Riassumiamo per brevità nelle seguenti tabelle i risultati da noi ottenuti:

(<sup>1</sup>) B. M. Duggar, *Fungous diseases of plants* (Ginn and Company, Boston).

*Culture di Coniothyrium tirolense, Bubak.*

Mezzo culturale	Data inoculazione	Data osservazione	Spore formatesi	Misure in $\mu$	Osservazioni
Patata . . . .	6-4-15	25-1-16	olivaceo-chiaro	7 × 4,5	
Carota . . . .	9-4-15	26-1-16	ombrine . . . .	4,6 × 2,3	Spore ellittiche; alcune più ovoidali (5 × 3,5 $\mu$ ).
<i>Agar glucos.</i>	31-3-15	26-1-16	brune . . . . .	4,6 × 3,5	Spore ovoidali; poco più grandi (5,7 × 4 $\mu$ ).
Barbabietola.	9-4-15	26-1-16	olivaceo-bruno	7 × 3,5	Alcune spore più piccole e più ovoidali (4,6 × 3,2 $\mu$ ).
Carota . . . .	26-1-16	17-3-16	ombrine . . . .	11,5 × 7	Spore normali ombrine (7-7,5 × 4,6-5 $\mu$ ). Alcune anormali molto grandi; altre più piccole e più chiare non ancora completamente sviluppate.
				7,5 × 5	
				7 × 4,6	
				4,6 × 3,5	
Barbabietola.	26-1-16	20-3-16	olivaceo bruno	11 × 7	Spore normali <i>olivaceo-brune</i> grandi (11 × 7 $\mu$ ), altre più piccole non completamente sviluppate.
				7,2 × 4,6	
				4,6 × 2,3	
Mosto di birra	26-1-16	27-3-16	ombrino chiaro	6 × 5	Spore normali molto chiare (6 × 5 $\mu$ ).
				4,6 × 3,5	

*Culture di Phyllosticta pirina Sacc.*

Mezzo culturale	Data inoculazione	Data osservazione	Spore formatesi	Misure in $\mu$	Osservazioni
<i>Agar glucos.</i>	26-1-16	28-3-16	jaline bacillari	4 × 1,5 10 × 2,3	
Gelatina di limone neutral.	26-1-16	11-4-16	jaline continue jaline settate 2-3 %	4,5-5 × 2,5-3	Nel micelio si differenziano forme speciali plurisetate-brune somiglianti a spore di <i>Macrosporium</i> ( <i>apressoria</i> di Crabill).
Carota e patata . . . . .	26-1-16	13-4-16	—	—	Non pienidi. Nel micelio abbondantissimi corpi plurisetati-bruni ( <i>formazioni macrosporioidi</i> )
Mosto di birra (N. 1).	11-4-16	25-4-16	jaline continue	4,5-5 × 3,5	Spore debolmente colorate con un setto trasversale. Nel micelio abbondanti formazioni <i>macrosporioidi</i> .
			jaline settate	9-9,5 × 4,5-5	
			gialle settate	" "	

*Culture di Phyllosticta pirina* Sacc. da spore  
provenienti da culture in mosto di birra.

Mezzo culturale	Data inoculazione	Data osservazione	Spore formatesi	Misure in $\mu$	Osservazioni
Carota . . . .	3-5-16	9-5-16	jaline continue	$7 \times 3$	Spore normali. Non si osservano formazioni <i>macrosporioidi</i> .
<i>Agar glucos.</i>	3-5-16	10-5-16	jaline continue	$9,5 \times 4,5$ $7 \times 3,5$	
Gelatina di limone neutral.	3-5-16	11-5-16	jaline continue	—	Spore settate 2%.
	3-5-16	3-6-16	jaline settate 2%		
Patata . . . .	3-5-16	13-5-16	jaline continue	—	Spore normali. Formazioni <i>macrosporioidi</i> nel micelio.
Barbabietola.	3-5-16	15-5-16	jaline continue	$12 \times 4$	Spore normali.
				$7,8 \times 3,4$	
Mosto di birra (N. 2) . . . .	3-5-16	12-5-16	jaline continue	—	Spore debolmente colorate con un setto trasversale. Formazioni <i>macrosporioidi</i> sul micelio.
	3-5-16	3-6-16	jaline settate olivaceo chiare		
In mosto di birra (N. 3) da colt. mosto di birra N. 2 . . . .	5-6-16	16-6-16	jaline continue olivaceo chiare	—	Spore debolmente colorate. Formazioni <i>macrosporioidi</i> nel micelio.

CONCLUSIONI.

1. I vari mezzi di cultura usati influirono sulle dimensioni e sulle tonalità di colore delle spore di *Coniothyrium tirolense* Bubák.

2. Con determinato mezzo nutritivo (mosto di birra gelatinizzato) la specie che attualmente viene classificata come *Phyllosticta pirina* Sacc. produsse spore settate e debolmente colorate; cioè si trasformò in una specie avente i caratteri del genere *Ascochyta*. Anche in culture di gelatina di limone neutralizzato con idrato di sodio si ottennero alcune spore jaline settate.

3. Le spore si mantengono settate e debolmente colorate anche nelle nuove generazioni ottenute nello stesso mezzo culturale.

Restando identiche tutte le altre condizioni, ma cambiando il mezzo nutritizio, il carattere acquisito andò invece perduto, cioè nelle generazioni successive la specie ritornò a produrre spore non settate.

4. Durante la vita della cultura, mai però prima della formazione delle picnidiospore, la *Phyllosticta pirina* diede forme speciali clavate, plurisetate longitudinalmente e trasversalmente (*apressoria* di Crabill) che noi chiamiamo *macrosporiodi* per la loro stretta somiglianza con le spore del genere *Macrosporium*. Il Mercer W. B. che osservò per il *Phoma Richardiae* Mercer forme analoghe alle nostre, le attribuì invece al genere *Alternaria* e non a *Macrosporium*.

Le forme da noi studiate sono generalmente solitarie (perciò abbiamo creduto bene chiamarle *macrosporiodi*); se talvolta si riunivano in catene, apparivano *direttamente* clavate.

Ci riserbiamo di ritornare su tali ultimi speciali corpi per meglio stabilirne la natura e la funzione.

Fisiologia. — *Influenza dell'attenzione su la secrezione di succhi digerenti* (1). Nota riassuntiva di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio LUIGI LUCIANI.

Le presenti ricerche sono state eseguite sulla mia parotide di sinistra e su quelle degli studenti Tullio De Sanctis e Antonio Galamini che volenterosamente si sono prestati. In esse ho voluto ricercare se in luogo di un complesso lavoro psichico che in mie esperienze precedenti aveva provocato la diminuzione o l'arresto della secrezione glandolare (2), stimoli sensoriali semplici applicati contemporaneamente a quello gustativo avessero manifestato un'influenza simile sulla secrezione della saliva parotidea.

Lo *stimolo gustativo* usato fu per lo più una soluzione di acido acetico all'1% e talvolta soluzioni di minore e di maggiore concentrazione (circa 10 emc. introdotti e mantenuti in bocca e regolarmente rinnovati ogni 2').

Gli *stimoli olfattivi* erano costituiti da odori *piacevoli* e *spiacevoli*. Tra i primi ho usato l'essenza di orchidee, l'essenza di ambra e quella di garofani applicate nel naso mediante un tubicino di vetro introdotto dentro

(1) Ricerche eseguite nel febbraio e marzo 1915 e nel novembre e dicembre 1916 nell'Istituto fisiologico di Roma diretto dal prof. sen. L. Luciani.

(2) Brunacci e De Sanctis, *Sulla funzione secretoria della Parotide nell'uomo*. Nota II: *Influenza dell'attività psichica sulla quantità e qualità della saliva secreta*. Arch. di Fisiol. vol. XII, 1914, pag. 441 segg. In tali ricerche il soggetto in esperienza, mentre aveva nella bocca la soluzione di acido acetico, scriveva in italiano, traducendole mentalmente dal francese, le Leçons, *Sur les propriétés des liquides de l'organisme*, di Cl. Bernard, che gli erano dettate.

la narice dello stesso lato della glandola in esame. In tale tubicino era un piccolo rigonfiamento olivare nel quale veniva collocato un batuffoletto di ovatta imbevuto dell'essenza che si voleva sperimentare. Tra gli odori *spiacevoli* ho adoperato il solfuro di carbonio e l'assa fetida.

Per gli stimoli *acustici* mi sono servito di diapason (diapason da 55 V.D. e da 615 V.D.) eccitati regolarmente ogni 5" ed applicati dallo stesso lato della glandola in esame; oppure di stimoli *melodici* (suono di armonium e di violino).

Gli stimoli *luminosi* furono di intensità debole e forte, mentre la qualità di essi rimaneva la stessa (luce bianca di lampade elettriche da 10 e da 100 candele).

Inoltre, volendo precisare se il fenomeno inibitore sulla secrezione della parotide fosse più dovuto ad un fatto psichico di attenzione, anzichè all'intensità dell'eccitamento periferico, ho stimolato l'organo visivo dapprima con una intensa luce bianca omogenea (lampada Auer), e, dopo avere osservato l'effetto inibitore prodotto, ho notato l'effetto inibitore dovuto all'osservazione dell'immagine postuma cromatica che la lunga fissazione della luce bianca omogenea aveva provocato.

Come è noto le immagini postume cromatiche che si hanno in seguito alla fissazione della luce bianca sono ben visibili e proiettabili, per così dire, su schermi grigi debolissimamente illuminati. Tali immagini perdurano a lungo attraversando periodi di cromatismo più o meno intenso e periodi di totale scomparsa. L'individuo quindi che vuol vederle, seguendone le varie fasi di luminosità cromatiche e di oscuramenti deve rivolgere ad esse la propria attenzione nel modo più intenso.

Allo scopo, infine, di ricercare l'influenza di altri stimoli sensoriali applicati contemporaneamente a quello gustativo non solo sulla *quantità* del liquido secreto, ma anche sulla sua *qualità*, ho praticato su ciascuna specie di saliva, cioè su quella secreta durante la semplice applicazione dello stimolo gustativo, che per comodità di esposizione chiamerò *normale*, e su quella secreta durante l'applicazione contemporanea dei due stimoli che chiamerò *da inibizione*, l'analisi dell'alcalinità determinata con una soluz.  $\frac{N}{10}$

di HCl (indicatore: arancio di metile); la conducibilità elettrica a 37° col ponte di Wheatstone; ed in fine l'azoto totale con il metodo di Kjeldhal.

Mi limito, per brevità, a riportare soltanto le medie delle *velocità di secrezione* (= dcc. al l') ottenute durante l'applicazione del solo stimolo gustativo (*saliva normale*) e durante l'applicazione dei due stimoli (*saliva da inibizione*); e quelle delle analisi eseguite su le due differenti specie di saliva durante l'applicazione dello stimolo acustico melodico.

TABELLA 1<sup>a</sup>. — Stimoli olfattivi.

<p>Saliva normale (Sol. ac. acetico 0,03-0,05 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>2,6</b> (media di 6 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Ac. acetico 0,03-0,05 ‰ + olfattivo piacevole)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>1,4</b> (media di 6 esperienze).</p>
<p>Saliva normale (Sol. ac. acetico 1 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>8,0</b> (media di 7 esperienze)</p>	<p>Saliva da inibizione (Ac. acetico 1 ‰ + stimolo olfattivo piacevole)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>3,6</b> (media di 7 esperienze).</p>
<p>Saliva normale (Ac. acetico 1 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>11,8</b> (media di 6 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Ac. acetico 1 ‰ + olfattivo spiacevole)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>5,2</b> (media di 6 esperienze).</p>

TABELLA 2<sup>a</sup>. — Stimoli acustici.

<p>Saliva normale (Sol. ac. acetico 1 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>10</b> (media di 6 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Stimolo acustico debole Diapason 55 V. D. + ac. acet. 1 ‰).</p> <p>Velocità di secrezione = <b>4,9</b> (media di 6 esperienze).</p>
<p>Saliva normale (Sol. ac. acetico 1 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>9,9</b> (media di 6 esperienze)</p>	<p>Saliva da inibizione (Stimolo acustico intenso Diapason 615 V. D. + ac. acet. 1 ‰).</p> <p>Velocità di secrezione = <b>5,8</b> (media di 6 esperienze).</p>
<p>Saliva normale (Sol. ac. acetico 1 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>9,8</b> (media di 6 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Stimolo acustico melodico + ac. acet. 1 ‰).</p> <p>Velocità di secrezione = <b>3,7</b> (media di 6 esperienze).</p>

TABELLA 3<sup>a</sup>. — Stimoli luminosi (Cfr. Grafica 1<sup>a</sup>).

<p>Saliva normale (Ac. acetico 0,75 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>7,3</b> (media di 4 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Lampada elettrica da 10 candele + ac. acet. 0,75 ‰).</p> <p>Velocità di secrezione = <b>4,2</b> (media di 4 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Lampada elettrica da 100 candele + ac. acet. 0,75 ‰).</p> <p>Velocità di secrezione = <b>3,3</b> (media di 4 esperienze).</p>
<p>Saliva normale (Sol. ac. acetico 1 ‰)</p> <p>Velocità di secrezione = <b>9,00</b> (media di 6 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Lampada Auer + acido acetico 1 ‰).</p> <p>Velocità di secrezione = <b>5,3</b> (media di 6 esperienze).</p>	<p>Saliva da inibizione (Immagine postuma + acido acetico 1 ‰).</p> <p>Velocità di secrezione = <b>3,8</b> (media di 6 esperienze).</p>



TABELLA 4<sup>a</sup> (Cfr. Grafica 2<sup>a</sup>).

SALIVA NORMALE (Soluzione acido acetico 1 o/o)						SALIVA DA INIBIZIONE (Soluzione acido acetico 1 o/o + suono d'armonium)					
T in minuti primi	Q in dec.	$V = \frac{Q}{T}$ in dec.	Alcalinità in gr. o/o di KOH	Conduttiv. elettrica 10 <sup>5</sup> . K <sub>37</sub>	Azoto totale gr. o/o	T in minuti primi	Q in dec.	$V = \frac{Q}{T}$ in dec.	Alcalinità in gr. o/o di KOH	Conduttiv. elettrica 10 <sup>5</sup> . K <sub>37</sub>	Azoto totale gr. o/o
6,6	64.8	9.55	0.376	825	0.150	6,6	26	3.7	0.329	637	0.151

(Medie di 6 esperienze)

Dal complesso delle esperienze risulta dunque che *la velocità di secrezione diminuisce di circa la metà durante l'applicazione contemporanea dei due stimoli (gustativo e altro sensoriale) e che tale diminuzione non è tanto in rapporto alla intensità degli stimoli applicati quanto all'attenzione rivolta sopra di essi.* Ciò risulta evidentemente nelle esperienze eseguite con lo stimolo acustico melodico e quelle fatte durante la fissazione di una luce bianca omogenea (lampada Auer) ed osservando poi l'immagine postuma cromatica provocata da essa.

Relativamente alle *variazioni qualitative* della saliva normale rispetto a quella da inibizione è risultato dall'insieme delle ricerche che l'alcalinità e la conducibilità elettrica diminuiscono col diminuire della velocità di secrezione, mentre il contenuto in azoto totale o non presenta variazioni, oppure se ne nota un leggero aumento nella saliva da inibizione. Ciò si vede chiaramente nella Tabella 4<sup>a</sup> e nella Grafica 2<sup>a</sup>, le quali si riferiscono alle esperienze eseguite applicando lo stimolo acustico melodico.

Un fatto importante osservato durante l'applicazione dei vari stimoli è stato che *quando la secrezione salivare era grandemente diminuita o anche del tutto sospesa, bastava che l'individuo in esperimento rivolgesse la sua attenzione allo stimolo gustativo che aveva in bocca perchè la secrezione ricomparisse.* Questo fatto è rappresentato chiaramente nelle due grafiche annesse (fig. 1, 2), le quali sono state ottenute iscrivendo su di un cilindro girante le gocce di saliva parotidea che cadevano dalla canula introdotta nel condotto di Stenone contemporaneamente ad un segnale che indicava il momento nel quale si diceva all'individuo di rivolgere la sua attenzione sull'uno piuttosto che sull'altro stimolo. Un contagocce elettrico connesso con un segnale elettromagnetico Desprez ed un tasto interruttore connesso con un secondo segnale Desprez hanno servito allo scopo, mentre il tempo veniva segnato in secondi da un orologio Jaquet.

Dall'analisi grafica del fenomeno si vede dunque *come il risultato inibitorio complessivo* rappresentato dalla riduzione a circa la metà della velo-

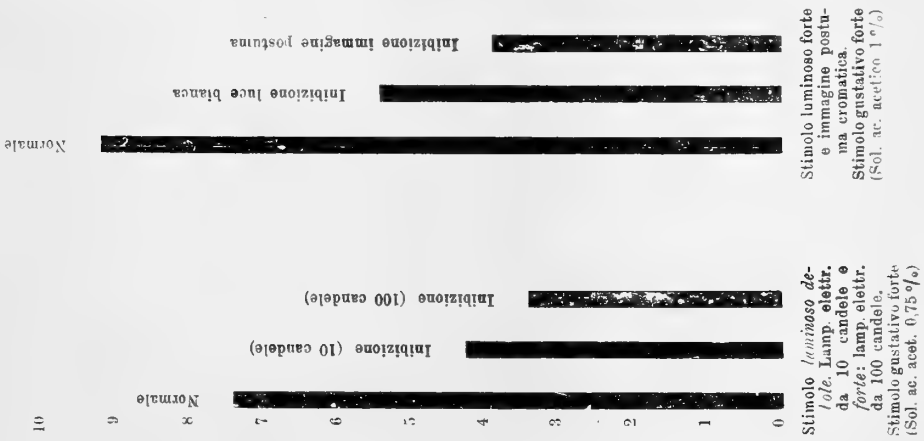
cià di secrezione, si possa scindere *in due fasi*, cioè in una fase nella quale la secrezione glandolare è più o meno vivace quando l'attenzione dell'individuo è rivolta sullo stimolo gustativo (*fase dell'effetto positivo dello stimolo adeguato e di agevolazione psichica*); ed in una seconda fase nella quale la secrezione glandolare è fortemente diminuita o anchè del tutto sospesa allorchè, cioè, l'attenzione dell'individuo in esperimento viene rivolta sull'altro stimolo sensoriale (*fase di inibizione psichica*).

Riflettendo ora al comportamento assai simile alle glandole salivari delle altre principali glandole dell'apparato digerente di fronte agli *stimoli psichici agevolatori* (stomaco, pancreas), come hanno fatto rilevare soprattutto gli studi del Pawlow (<sup>1</sup>), si può logicamente pensare che esse si comportino anche similmente di fronte *agli stimoli psichici inibitori* e che quindi i risultati sperimentali ottenuti da me dalla glandola parotide dell'uomo siano con moltà probabilità estensibili alle altre glandole digestive sulla cui secrezione avrebbe così una grande importanza anche l'*attenzione*.

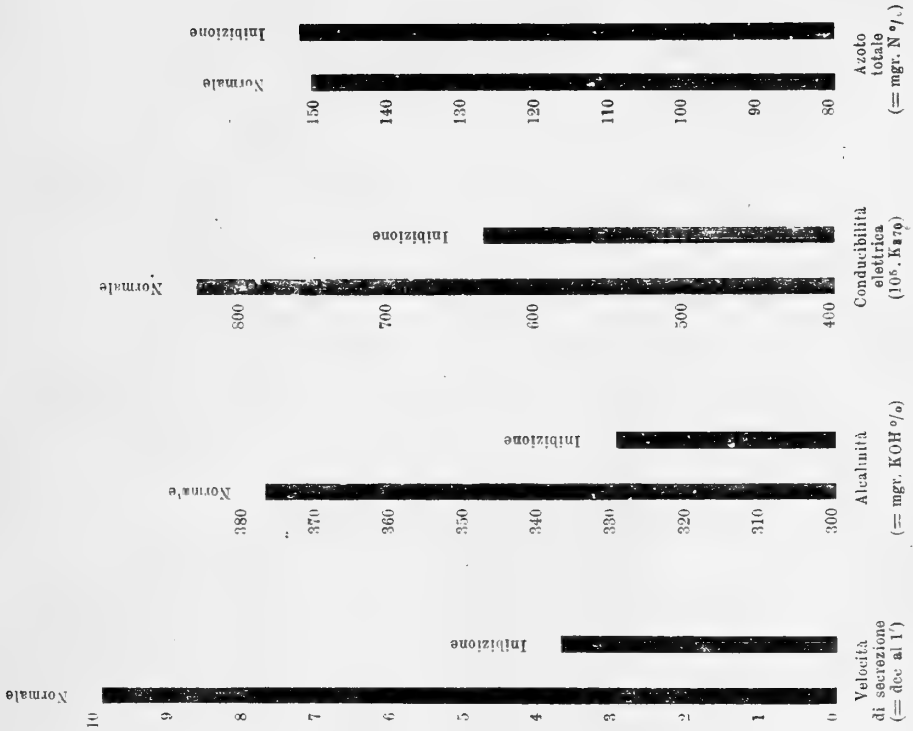
(<sup>1</sup>) Pawlow J. P., *Die Arbeit der Verdauungsdrüsen*, Wiesbaden, 1898; id., *Die äussere Arbeit der Verdauungsdrüsen und ihr Mechanismus*, Nagel's Handb. d. Physiol., II, 660, 1907; id., *Sur la sécrétion psychique des glandes salivaires*, Arch. intern. de physiol., I, 119, 1904; id., *Psychische Eregung der Speicheldrüsen*, *Ergebn. d. Physiol.*, III-I, 177, 1904.

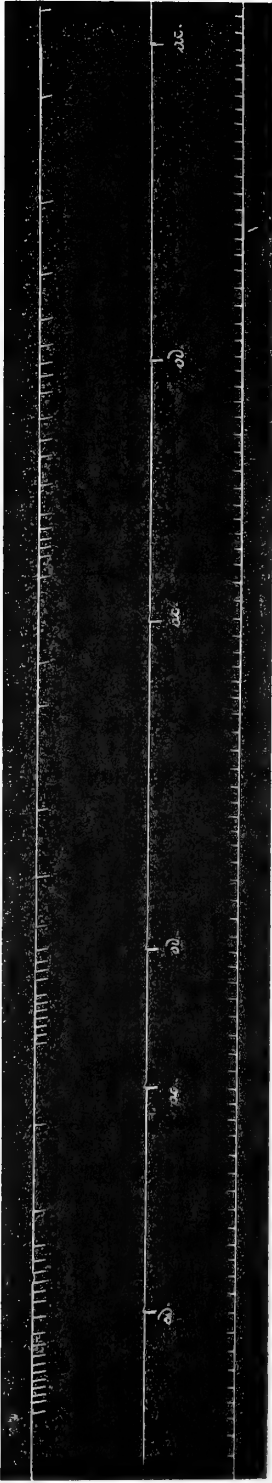
GRAFICA 1<sup>a</sup>. — Stimoli luminosi.

(Velocità di secrezione = dec al l')



GRAFICA 2<sup>a</sup>. — Stimoli acustici armonici.





(T. D. S.)  
 Stimolo gustativo = soluzione di acido acetico all' 1 % } *ac.* = attenti all'acido!  
 Stimolo olfattivo = essenza di orchidee. } *od.* = attenti all'odore!  
 Tempo in secondi.

Fig. 1.



(B. Br.)  
 Stimolo gustativo = soluzione di acido acetico 1 % } *ac.* = attenti all'acido!  
 Stimolo acustico = diapason da 55 V. D. } *su.* = attenti al suono!  
 Tempo in secondi.

Fig. 2.

Patologia vegetale. — *Un parassita delle patate nuovo per l'Italia: Spondylocladium atrovirens* Harz. Nota del dott. BENIAMINO PEYRONEL<sup>(1)</sup>, presentata dal Socio G. CUBONI.

Nel novembre scorso, allo scopo di coltivare *Chalaropsis thielavioides* Peyron. sui tuberi vivi di patata, lavai accuratamente un certo numero di questi in acqua corrente, poi li immersi successivamente per parecchi minuti in una soluzione di sublimato corrosivo all'1‰, quindi in alcool etilico a 95°, li sciacquai in acqua sterilizzata in autoclave a 125° e ancora bollente, e li chiusi in altrettanti recipienti sterilizzati. Nonostante questi trattamenti fui non poco stupito di vedere, dopo qualche tempo, apparire sulla superficie di alcuni dei tuberi delle chiazze d'un nero-olivaceo molto intenso, prodotte da un ifomicete che mi fu facile determinare per *Spondylocladium atrovirens* Harz.

Durante l'inverno ritrovai lo stesso fungo su altri tuberi di patata provenienti dal mercato di Roma.

Questa demaziacea fu per la prima volta scoperta dal Harz su tuberi di patata a Vienna<sup>(2)</sup>, ove la ritrovava più tardi lo Zukal, che la descrisse sotto il nome di *Cladosporium abietinum*<sup>(3)</sup>. Saccardo riconduce la specie di Zukal al genere *Spondylocladium*<sup>(4)</sup> ed alla diagnosi latina aggiunge quest'osservazione: « Etsi conidia breviora descripta, species fere absque dubio est *Sp. atrovirens* Harz ». E difatti il Lindau<sup>(5)</sup> dà giustamente *Spondylocladium abietinum* (Zukal) Sacc. quale sinonimo di *Sp. atrovirens* Harz.

Dopo Zukal, Frank<sup>(6)</sup> descriveva sotto il nome di *Phellomyces sclerotiophorus* un fungo da lui osservato su numerose varietà di patate di moltissime regioni della Germania e che sarebbe capace talora di produrre una specie di marciume, che egli chiama « Phellomyces-Fäule ».

<sup>(1)</sup> Lavoro fatto nella R. Stazione di Patologia Vegetale di Roma.

<sup>(2)</sup> Harz, *Einige neue Hyphomyceten Berlins und Wiens* etc., Bull. soc. imp. des sc. natur. de Moscou, 64, pag. 129 (1872); cfr. Sacc., *Syll.* IV, pag. 142.

<sup>(3)</sup> Zukal, *Neue Ascomyc.* etc., Verh. zool. bot. Ges. Wien, 37, pag. 44 (1887), tab. I, fig. 8.

<sup>(4)</sup> Saccardo, *Sylloge fung.* X, pag. 662 (1892).

<sup>(5)</sup> Lindau, *Hyphom.* II, pag. 142.

<sup>(6)</sup> Frank, *Kampfbuch*, pp. 182-185, 197-198 (1897); *Berichte Deutsche Bot. Ges.* 16, pag. 275 (1898).

Più recentemente Appel e Laubert <sup>(1)</sup> dimostrarono l'identità del *Phelomyces sclerotiophorus* collo *Sp. atrovirens*, di cui quello rappresenta semplicemente la forma vegetativa, cioè micelio ed ammassi sclerozoidi. Essi fecero uno studio assai accurato del fungo e lo illustrarono con belle figure. Un bello studio biologico e morfologico ne fece pure Eichinger <sup>(2)</sup>.

Quasi certamente devesi pure riferire a questa stessa specie un fungo descritto e figurato dal Sorauer sotto il nome di *Helminthosporium* sp., e che produrrebbe sui tuberi di patata una malattia che l'autore chiama « Kartoffelgrind » (Scabbia delle patate) <sup>(3)</sup>. Infatti l'*Helminthosporium* non è più descritto nella 3<sup>a</sup> edizione del « Handb. der Pflanzenkrankheiten » (1908), mentre lo è lo *Spondylocladium*.

Oltrechè in Austria e in Germania, il fungo è stato trovato anche in Danimarca <sup>(4)</sup>, in Inghilterra, ove fu segnalato per la prima volta in Irlanda dal Johnson <sup>(5)</sup> e più tardi ritrovato in Iscozia e studiato dal Masee <sup>(6)</sup>; negli Stati Uniti d'America, ove se ne occuparono Clinton <sup>(7)</sup>, Melhus <sup>(8)</sup>, Orton <sup>(9)</sup>, Rees <sup>(10)</sup>, Bailey <sup>(11)</sup>, e finalmente in Australia <sup>(12)</sup>.

In Italia non era ancora stato fin qui segnalato e non è perciò descritto negli « Hyphales » del Ferraris in « Flora italica cryptogama ». Esso non deve, però, essere raro neanche da noi, ma è probabilmente sfuggito ai nostri patologi e micologi, sia perchè non è molto appariscente, sia perchè non sembra avere una grande importanza patologica.

Ecco in breve i principali caratteri del fungo quale ho potuto osservarlo sopra parecchi tuberi di patata.

<sup>(1)</sup> Appelund Laubert, in Ber. Deutsch. Bot. Gesellsch. 23, pp. 218-220 (1905); e in Arb. Kaiserl. Biol. Anst. 5, pag. 435 (1907).

<sup>(2)</sup> Eichinger, *Zur Kenntnis einiger Schalenpilze der Kartoffel*. Ann. Myc. 7, pag. 356 (1909).

<sup>(3)</sup> Sorauer, *Handb. Pflanzenkrankh., Zweite Aufl.*, 2, p. 359 (1886); Zeitschrift f. Pflanzenkr. 6, pag. 5 (1896).

<sup>(4)</sup> Rostrup, *Oversigt over Landbrugsplanternes Sygdomme i 1904*. Tidsskr. f. Landbrug. Planteavl. XII, pp. 352-376 (Kjöbenhavn, 1905), XIII, pp. 79-105 (1906).

<sup>(5)</sup> Johnson, in Econom. Proc. Roy. Soc. Dublin, I, pag. 161 (1903).

<sup>(6)</sup> Masee, in Kew Bull., Jan. 1909; *Diseases of cult. plants and trees*, pag. 438 (1910).

<sup>(7)</sup> Clinton, *Report of the botanist*. Connect. Agr. Expt. Sta. Rept. 1907-1908, pp. 357-359 (1908).

<sup>(8)</sup> Melhus, *Silver scurf, a disease of the potato*. U. S. Dept. Agr., B. P. I. Circ. 127, pp. 15-25 (1913).

<sup>(9)</sup> Orton, *Potato-tuber diseases*. U. S. Dep. Agric. Farm. Bull. 544, pag. 16, fig. 16 (1913).

<sup>(10)</sup> Rees, *Silver scurf disease*. West. Wash. Exp. Sta. Mo. Bull. I, pp. 15-16 (1914).

<sup>(11)</sup> Bailey, *Notes on diseases from the northwest*. Phitopathology, 4, pag. 321 (1914).

<sup>(12)</sup> Brittlebank, in The Journ. of the Dep. Agric. Victoria, Australia, 12, pp. 400-403 (1914).

Sull'epidermide dei tuberi si osservano delle aree di varia grandezza, da pochi mm. a parecchi cm. di larghezza, ricoperte di numerosissimi puntini formanti una macchia nero-olivacea affatto superficiale. Se si esaminano con una lente o sotto il microscopio a debole ingrandimento, si vede che esse sono formate talora esclusivamente da minuti puntini oscuri, ma più spesso da una foresta di minuscoli alberetti simili a conifere: sono i conidiofori.

Le ife miceliche sono generalmente di due sorta: le une, più sottili, grosse appena 2-4,5  $\mu$ , sono in parte immerse nelle cellule peridermiche ed ivi ialine o subialine, in parte superficiali e bruno-fuliginee, settate, ramoso; le altre sono più grosse, 9-12  $\mu$ , generalmente superficiali, bruno-fuliginee: queste presentano per lo più dei setti ravvicinati, degli articoli rigonfi, s'intrecciano e si saldano a formare dei minuti ammassi stromatici o sclerozi che si vogliono chiamare, ora costituiti da poche cellule rotondegianti o poligonali, ora invece occupanti un'intera cellula peridermica. Questi stromi sono ora affatto superficiali, ora annidati parzialmente o totalmente nel lume delle cellule peridermiche esterne. Anche le ife miceliche più sottili possono, benchè più di rado, intrecciarsi, rigonfiare e saldare i loro articoli a formare di questi minuscoli stromi. I conidiofori s'innalzano tanto isolatamente dalle ife miceliche scorrenti alla superficie, quanto a cespuglietti dagli ammassi stromatici. Essi sono cilindrici, eretti settati, nero-olivacei o fuliginei, hanno un'altezza assai variabile, che va dai 220 ai 450  $\mu$ , ma per lo più misurano 250-350  $\approx$  6, 5-8. Queste misure si avvicinano a quelle date da Zukal (250-350  $\approx$  4-8) e da Massee (lunghezza fino a 400  $\mu$ ), mentre sono un po' inferiori a quelle date da Harz e da Appel e Laubert (500  $\mu$  circa). La base dei conidiofori presenta spessissimo un rigonfiamento più o meno pronunciato, di 9 a 12  $\mu$  di diametro.

I conidi hanno una forma che varia tra l'obpiriforme e l'obclavata (questa è più frequente) a seconda che sono più o meno allungati. Essi sono dapprima nero-olivacei, più tardi bruno-fuliginei, possiedono un episporio molto grosso e presentano 5-8, per lo più 5-6 setti. Misurano 25-60  $\approx$  7-10, ma le dimensioni più frequenti sono 40-50  $\approx$  8-9,5.

Riguardo all'importanza patogena di questa demaziacea, non tutti gli autori che l'hanno studiata sono d'accordo. Secondo il Frank, il micelio potrebbe penetrare anche negli strati amiliferi, intaccare i granuli d'amido e produrre un vero marciume delle patate; il Massee ed il Clinton dicono che esso produce delle depressioni e un marciume secco (dry rot). Appel e Laubert ed Eichinger, invece, affermano che il fungo è del tutto superficiale e incapace di intaccare l'amido.

Per parte mia ho osservato che il micelio invade le cellule peridermiche a parete suberizzata, ma non ho mai potuto rintracciarlo negli strati amiliferi sottostanti. Ritengo molto probabile che il fungo si sviluppi soprattutto

a spese della membrana suberificata delle cellule della buccia: ciò è confermato dal fatto che i primi abbozzi degli ammassi stromatici sono quasi sempre addossati alla parete cellulare; essi crescono dalla periferia verso l'interno e finiscono generalmente per riempire totalmente il lume cellulare e forse anche per fare screpolare la membrana. Certo si è che nelle aree invase dal fungo la buccia presenta numerosissime minute spaccature, le quali facilitano certamente la penetrazione di altri parassiti più potenti. È probabilmente solo dopo che questi hanno ucciso le cellule amilifere che il micelio dello *Spondylocladium* può invadere anche la polpa delle patate. Questa è, del resto, anche l'opinione di Appel e Laubert.

Tutto sommato, l'importanza patogena di questo fungillo sembra assai limitata e probabilmente solo in casi eccezionali può assumere qualche gravità.

Come già ho accennato, non tutti i tuberi da me esaminati presentavano la forma conidica: alcuni di quelli tenuti semplicemente nel laboratorio senza aver subito alcun trattamento, presentavano solo i minuscoli sclerozi; su quelli, invece, che erano stati trattati nel modo prima descritto ed erano tenuti in ambiente molto umido, si osservava un grande sviluppo di conidiofori, mentre gli sclerozi erano meno abbondanti e assai poco sviluppati. Evidentemente questi si formano principalmente quando le condizioni d'ambiente sono poco propizie e soprattutto quando scarseggia l'umidità; quando l'ambiente torna ad essere favorevole producono dei conidiofori con conidi che, trasportati dal vento, dall'acqua o dagli animali, diffondono la malattia.

Non è il caso, per ora, di preoccuparci della presenza in Italia di questo fungillo abbastanza grazioso. Sarà sempre ottima cosa, in ogni modo, eliminare i tuberi presentanti le caratteristiche macchie punteggiate e all'occorrenza, ove la malattia dovesse assumere qualche gravità, evitare per qualche anno la coltura delle patate nei campi da cui essi provengono, poichè il terreno può esser rimasto infetto dagli sclerozi del fungo.

Il fatto che il micelio e gli stromi sono in parte immersi nella buccia ci spiega come il fungo abbia potuto svilupparsi sui tuberi, benchè trattati successivamente con sublimato corrosivo, alcool a 95° e acqua bollente! (1).

(1) Nello scorso Aprile, quando già questa Nota era pronta per la stampa, ho trovato lo *Spondylocladium atroviens* su numerosi tuberi di patata anche a Ricalaretto nelle Valli Valdesi del Piemonte.



**Microbiologia** — *Sopra una alterazione del pane prodotta da lievito infetto con Oospora variabilis*, Lindner. Nota di G. FICAI e R. PEROTTI (<sup>1</sup>), presentata dal Socio G. CUBONI.

Durante la esecuzione di alcune nostre ricerche nel Laboratorio consorziale di igiene e di agraria della provincia di Arezzo, nel giugno 1915, venne presentato all'esame un campione di pane fortemente attaccato da un micete, in condizioni tali da esser reso entro breve tempo immangiabile.



L'alterazione del campione, di cui presentiamo, qui unita, la fotografia di una sezione, offriva un aspetto caratteristico, in quanto che il fungo tappezzava uniformemente ogni alveolo del pane con un abbondante velo di colore bianco-latte.

Fino dal primo esame microscopico del fungo si rilevò trattarsi di una specie appartenente al genere *Oospora*, che noi ci proponemmo di determinare, nonchè di studiare dal punto di vista biologico e colturale ed infine d'inoculare artificialmente nella pasta per riprodurre l'alterazione nel pane e stabilire le condizioni in cui essa potesse verificarsi.

Riuscimmo nello scopo prefissoci, e qui appresso riferiamo succintamente i risultati delle nostre ricerche.

**I. MORFOLOGIA E RIFERIMENTO SISTEMATICO.** — Trattasi di conidi subglobosi od ellipsoidei, nucleati, di  $\mu$   $1,5-4,5 \times 1,5-3,5$ . Sono disposti in catene ramificate, molto facilmente scissili.

(<sup>1</sup>) Ricerche eseguite nel R. Laboratorio di batteriologia agraria di Roma e nel Laboratorio consorziale di igiene ed agraria di Arezzo.

La forma è riferibile alla specie *Oospora variabilis* Lindner (*Monilia variabilis*, Lind.) da lui rinvenuta su pane bagnato in Berlino (1).

La specie è nuova per l'Italia.

II. PROPRIETÀ BIOLOGICHE E CARATTERI COLTURALI. — In acqua peptonizzata, sia a 37° C., sia a temperatura ambiente, non si ha in fondo alla provetta che un minimo sviluppo, senza intorbidamento del terreno colturale.

In brodo ordinario lo sviluppo è insignificante, come sopra. Il terreno rimane alcalino. In brodo saccarato si ottiene un tenue sviluppo in fondo alla provetta ove si nota, dopo 24<sup>h</sup> di termostato a 37° C., un deposito granuloso, biancastro, fioccoso e polverulento. Il terreno non s'intorbida e rimane alcalino.

Le colture in brodo saccarosato, lasciate per tre mesi chiuse in un armadio alla temperatura ambiente, sono poi rigogliosissime. Non si osserva intorbidamento, ma pellicola bianco-lattea in superficie e sedimento fioccoso, bianco, abbondantissimo. Non si ha sviluppo di gas.

In brodo lattosato lo sviluppo è abbondante in superficie, ove si osserva un ammasso fioccoso, abbastanza compatto, biancastro. Con lo scuotimento si distaccano fiocchi che cadono al fondo. Il terreno rimane alcalino: nessuno sviluppo di gas.

In brodo glucosato si ottiene abbondante sviluppo della colonia in superficie, ove si osserva un ammasso fioccoso, biancastro, compatto. Il terreno sottostante rimane limpido. Si osserva evidente sviluppo di gas, e il terreno da alcalino è divenuto acido.

Su gelatina ordinaria si ha assenza di sviluppo, o quasi. Le colture, lasciate in armadio a temperatura ambiente, si sono mostrate bene sviluppate lungo il tramite d'infissione, senza fluidificazione.

Su agar ordinario e su agar di albumosa lo sviluppo fu nullo o quasi

Invece, su agar di fagioli fu abbondante, rapido, esuberante. Le colonie, piccole, rotonde, con il centro sollevato, hanno superficie rugosa, bianca asciutta; i margini, ne sono filamentosi, stellati e, ad un piccolo ingrandimento, risultano costituiti da un intreccio di filamenti che si ramificano dicotomicamente. Con il tempo le colonie divengono confluenti, rigogliose e si conservano bianche alla periferia, leggermente roseo-arancio pallido al centro.

Su patata semplice o glicerinata lo sviluppo, rigoglioso, abbondante, rapido, dà luogo in superficie ad un intonaco asciutto, rugoso a margini finalmente radiati, di aspetto d'intonaco di calce. Con l'invecchiare delle colture, non si ha sviluppo di pigmento.

(1) Rabenhorst L., *Die Pilze Deutschlands, Oesterreichs u. der Schweiz*, VIII Abt., pag. 34.

Concludiamo, adunque, come l'ifomicete attacca fra gl'idrati di carbonio soltanto il glucosio con sviluppo di anidride carbonica e probabile formazione di acido lattico. Soltanto su agar di fagioli, dopo due o tre settimane, si sviluppa un pigmento roseo-arancio pallido.

III. PROVE D'INFEZIONE. — Prima di tentare la riproduzione artificiale dell'alterazione del pane attraverso la via che i caratteri dell'infezione ci avevano fatto supporre la più verosimile, e, cioè, mediante lievito contenente oospora, abbiamo voluto determinare la temperatura di uccisione delle spore ed eseguire alcune prove d'infezione preliminari.

In tubetti sterilizzati si posero 2 cmc. di abbondante sospensione in soluzione fisiologica delle colonie sviluppate su agar di fagioli. I tubetti si tennero per 20 minuti alle temperature di + 150°, 130°, 120°, 110°, 100° C.

Le prime due prove furono fatte in stufa a secco e dimostrarono che a tale temperatura l'ifomicete è ucciso. Le prove a + 120° e + 110° C. furono fatte in autoclave ed anche a questa temperatura i conidi rimasero uccisi. La prova a + 100° C. fu fatta a vapore fluente e si ebbero i risultati del seguente prospetto, dove, in funzione della temperatura (T) e della sua durata (t), +++ indica conidi vivi; --- indica conidi morti.

T	t	Risultati	Controlli
100° C	5'	+++	+++
100° "	10'	---	+++
100° "	20'	---	+++
100° "	30'	---	+++
100° "	60'	---	+++

Su fette di pane ordinario, poste entro scatole Petri grandi e sterilizzate in autoclave a + 115° C. per 20', fu seminato l'ifomicete, il quale si sviluppò rigogliosamente alla temperatura ordinaria, con aspetto però differente da quello su agar di fagioli. La superficie di sezione del pane si viene, poco a poco, rivestendo di un intonaco uniforme, bianco che fa rassomigliare il pane ad un pezzo di pomice bianca spugnosa, oppure ad un intonaco di gesso aderente alla mollica. Nessuno sviluppo si osserva sulla crosta od in vicinanza, ove la colonia bruscamente si arresta.

Lo sviluppo nel pane avviene uniformemente in superficie, senza sollevamenti, cosicchè la colonia sviluppandosi s'insinua negli alveoli del pane, li tappezza, rimonta alla superficie e continua così negli alveoli contigui.

IV. RIPRODUZIONE ARTIFICIALE DELL'ALTERAZIONE. — Queste ricerche possiamo distinguerle in positive e negative: tanto le une, quanto le altre

ci hanno egregiamente servito per fissare le cause dell'alterazione da noi riscontrata e le condizioni nelle quali essa può verificarsi.

*Prove negative.* — Ad un chilo di pasta (farina ed acqua) si aggiunge il lievito necessario e s'impasta il tutto con 100 cmc. di acqua sterile nella quale è stata sospesa abbondante quantità di coltura, in modo da distribuire le spore uniformemente in tutta la pasta. Questa viene divisa in cinque panini di 100 gr. ciascuno ed in un pane da 500 gr. Dopo il necessario periodo di lievitazione i pani sono portati in forno e vi sono tenuti per quasi un'ora alla temperatura di oltre 150° C. (si tratta di un forno modello, sistema Stella). Dopo 24 e 48 ore si tagliano i pani, ma non si osserva alcuno sviluppo dell'ifomicete.

Due panini aperti dopo cinque giorni non dimostrano alcuno sviluppo. Il pane da 600 gr., dopo sei giorni, dà il medesimo risultato.

*Prove positive.* — Dopo eseguito l'impasto di una notevole quantità di farina, al momento in cui la pasta è frazionata in pani e innestata con lievito, s'inocula ogni pane di circa un chilo con 10-20 cmc. di emulsione acquosa di coltura di oospora, rimpastando accuratamente.

Il forno, riscaldato a fascine di legna, non era ad alta temperatura; ed il pane, dopo due ore di cottura, fu tolto in apparenza sufficientemente cotto, però con un contenuto in umidità, determinata 8 ore dopo lo sfornamento, del 38-42 %.

Di quattro pani, lasciati a sè, dopo tre giorni, in due l'oospora all'interno era bene sviluppata; negli altri due lo era discretamente a zone. Tutti i pani, lasciati a sè, si sono poi ricoperti della patina bianca.

CONCLUSIONE. — L'elevata temperatura del forno, la buona cottura, specialmente se trattasi di pani di piccolo peso, impediscono lo sviluppo di *O. variabilis*; mentre la cottura incompleta, che lascia un elevato contenuto di umidità, in forno non convenientemente riscaldato, specie con grossi pani, porta all'alterazione di questi per sviluppo di detto ifomicete.

I germi di questo si trovano nel lievito; e non v'ha dubbio che esso rappresenti il veicolo d'infezione nel caso da noi riscontrato ed illustrato.

Dovrà, quindi, porsi ogni cura nella buona conservazione del lievito e generalizzarsi l'uso nella panificazione di lieviti razionalmente preparati.

**MEMORIE**  
**DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI**

GIANNULI F. *Sulla Istopatologia della Nevroglia nella Sclerosi a Placche post-infettiva.* Pres dal Corrisp. LO MONACO.

**PRESENTAZIONE DI LIBRI**

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando le seguenti di Soci e Corrispondenti: TARAMELLI, *Descrizione geologica della Provincia di Pavia — La sabbia dell'isola di Sansego e le aspirazioni italiane nell'Adriatico*; GUARESCHI, *Storia della chimica. Petroli ed emanazioni terrestri e loro origine.* Fa poi particolare menzione del vol. 1° della *Ristampa delle opere pubblicate a cura della Fondazione G. W. Hooper per ricerche mediche.*

Il Socio REINA offre il n. 2 del *Bollettino* del Comitato glaciologico italiano, pubblicato sotto gli auspici della Società Italiana per il Progresso delle Scienze e del Club Alpino Italiano, e dà notizia dei lavori nel fascicolo stesso contenuti.

**AFFARI DIVERSI**

Il Presidente RÒITI presenta due pieghi suggellati, inviati dal prof. SALVATORE MALTESE e dal dott. GIUSEPPE TALLARICO, perchè siano conservati negli Archivi accademici.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA  
*presentate nella seduta del 6 maggio 1917.*

- AMODEO F. — Aritmetica generale ed algebra conforme ai programmi del Liceo moderno. Napoli, 1917. 8°. pp. 1-419.
- BERLESE A. — Leopoldo Chinaglia (Estr. dal « Redia », vol. XII, pp. 361-366). Firenze, 1917. 8°.
- BERTOLINI A. — Prima nota di piante ancor inedite dell'erbario della Flora italica (Estr. dagli « Atti della Società italiana di scienze naturali », vol. LV, pp. 252-277). Pavia, 1917. 8°.
- Bollettino del Comitato glaciologico italiano, n. 2. Roma, 1917. 8°. pp. 1-65.
- CERROLAZA A. — Clave del Universo. (Scienza y Filosofia). Avila, 1917. 8°. pp. 1-48.
- CHINAGLIA L. — Revisione del gen. *Hydrasetaes*. Berl. (Estr. dal « Redia », vol. XII, pp. 343-359). Firenze, 1917. 8°.
- Collected reprints from the George Williams Hooper Foundation for Medical Research. San Francisco, 1916. 8°. pp. 1-738.
- GUARESCHI I. — Storia della chimica. XII: Petroli ed emanazioni terrestri e loro origine. Torino, 1917. 4°. pp. 1-175.
- LEONE S. — Il *Tracoma* nella provincia di Siracusa. Siracusa, 1916-17, 8°. pp. 1-17.
- PASSERINI N. — Esperienze di alimentazione maidica sui maiali e sulle larve del *Tenebrio molitor* L. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Georgofili », vol. XIII, pp. 1-40). Firenze, 1916. 8°.
- PUTTI V. — La chirurgia degli organi di movimento, vol. I. Bologna, 1917, 8°. pp. 1-159.
- TARAMELLI T. — Descrizione geologica della provincia di Pavia. Novara, 1916. 4°. pp. 1-139.
- TARAMELLI T. — La sabbia dell'isola di Sansego e le aspirazioni Italiane nell'Adriatico (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e lettere », vol. L, pp. 1-12). Milano, 1917. 8°.
- TARAMELLI E. — Risultati di uno studio geologico della provincia di Pavia (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e lettere », vol. L, pp. 88-91). Milano, 1917. 8°.
-

## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).

Vol. II. (1874-75).

Vol. III. (1875-76). Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.

2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII (1876-84).

MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.

MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-XIII.

Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).

MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-VII.

MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-X.

Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 9<sup>a</sup>. Sem. 1<sup>o</sup>.

Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.

Vol. I-XIII. Fasc. 4.

Vol. I-XIII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

### CONDIZIONI DI VENDITA

Al RENDICONTI...  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Il Rendiconto della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblica due volte all'anno. Il primo volume di ogni anno contiene i rendiconti di ciascuna delle due classi.

Il prezzo di associazione per ogni volume è per tutta l'Italia di L. 100; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Bianchi</i> . Rappresentazioni normali uniformi e sistemi di Weingarten. . . . .	Pag. 447
<i>Leo-Civita</i> . Statica einsteiniana. . . . .	" 458
<i>Pizzetti</i> . A proposito di una recente Nota del prof. Almansi. . . . .	" 471
<i>Somigliana</i> . Sulla propagazione delle onde sismiche. . . . .	" 472
<i>Angelo</i> . Analogie tra derivati dell'ossigeno e dell'azoto. . . . .	" 480
<i>Grassi e Zanoni</i> . Nuovo contributo allo studio del gozzismo. . . . .	" 484
<i>Mattirolo</i> . Sulle forme fungine incluse nel ciclo di sviluppo della <i>Lepiota cepaestypes</i> Sow. e in quello della <i>Lepiota (Agaricus) cretacea</i> Bull. (*) . . . . .	" 486
<i>Togliatti</i> . Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1 <sup>a</sup> specie tra spazi ad <i>n</i> dimen- sioni (pres. dal Socio <i>Segre</i> )(**). . . . .	" "
<i>Cherubino</i> . Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann (pres. dal corrisp. <i>Ca- stelnuovo</i> )(**). . . . .	" 487
<i>Colombo</i> . Cianotrichite e diptasia di Traversella (pres. dal Socio <i>Viola</i> ) . . . . .	" "
<i>Cecchra-Rispoli</i> . «Zuffardia», nuovo genere di Echinile del Senoniano della Tripolitania (pres. dal Socio <i>Parona</i> ) . . . . .	" 492
<i>Rovereto</i> . Sulla nozione del carreggiamento continuato (pres. dal corrisp. <i>Issel</i> ). . . . .	" 495
<i>Mattoe Pollacci</i> . Ulteriori ricerche intorno alla variazione di alcune specie di micromiceti (pres. dal Socio <i>Briosi</i> ) . . . . .	" 498
<i>Brunacci</i> . Influenza dell'attenzione su la secrezione di succhi digerenti (pres. dal Socio <i>Lucioni</i> ). . . . .	" 502
<i>Peyronel</i> . Un parassita delle patate nuovo per l'Italia: <i>Spondylocadium atrovirens</i> Härz. (pres. dal Socio <i>Cuboni</i> ). . . . .	" 509
<i>Ficai e Perotti</i> . Sopra una alterazione del pane prodotta da lievito infetto con <i>Oospora</i> <i>variabilis</i> Lindner (pres. <i>Id.</i> ) . . . . .	" 513

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

<i>Giannuli</i> . Sulla Istopatologia della Nevrogia nella Sclerosi a Placche post-infettiva (pres. dal CorrISP. <i>Lo Monaco</i> ). . . . .	" 517
---	-------

PRESENTAZIONE DI LIBRI

<i>Milosevich</i> (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle dei Soci <i>Taramelli, Guareschi</i> ecc. . . . .	" "
<i>Reina</i> . Ofre il n. 2 del <i>Bollettino</i> del Comitato glaciologico italiano e ne parla . . . . .	" "

AFFARI DIVERSI

<i>Ratti</i> (Presidente). Presenta due pieghi suggellati, inviati dal prof. <i>Salvatore Maltese</i> e dal dott. <i>Giuseppe Tallarico</i> , perchè siano conservati negli Archivi accademici . . . . .	" "
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO. . . . .	" 518

(\*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

(\*\*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.



ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI  
ANNO CCCXIV.  
1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 20 maggio 1917.*

Volume XXVI.° — Fascicolo 10.°

1.° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BERANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinqu* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richieste, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 20 maggio 1917.*

F. D' OVIDIO Presidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Fisica matematica. — Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA.

Le equazioni gravitazionali di Einstein sono state integrate rigorosamente da Schwarzschild <sup>(1)</sup> in un caso di fondamentale importanza (simmetria attorno ad un centro), che rispecchia (colla correzione derivante dalla relatività generale) l'attrazione newtoniana del Sole, rendendo esatto conto del secolare spostamento dei perielii dei pianeti, e segnatamente del perielio di Mercurio: risultato celeberrimo, già in precedenza ottenuto da Einstein mediante una integrazione approssimata (perfettamente bastevole per la valutazione numerica della disuguaglianza).

Indicherò qui un nuovo caso di integrazione non privo di interesse fisico, ponendo a base della mia deduzione le equazioni gravitazionali già ridotte a quella forma (spazialmente invariante) che conviene al caso statico e che fu oggetto di una mia precedente comunicazione <sup>(2)</sup>.

Concettualmente si tratta di questo: Supposto che esista nel vuoto un campo elettrico ovvero magnetico uniforme (e costante anche rispetto al tempo), si domanda se e come un tale campo influisce sulla natura geome-

<sup>(1)</sup> *Ueber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*, Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss., 1916, pp. 189-196. Veggasi altresì la recente Memoria di Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung), Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1917.

<sup>(2)</sup> *Statica einsteiniana*, in questo volume dei Rendiconti, pp. 458-470.

trica dello spazio ambiente. Si trova che lo spazio non resta euclideo (come sarebbe in assenza del campo), ma si atteggia a varietà normale di Bianchi <sup>(1)</sup> con due curvatures principali nulle, e la terza (quella corrispondente alle giaciture normali alle linee del campo) positiva e proporzionale al quadrato dell'intensità del campo. Il fattore di proporzionalità è, naturalmente, assai piccolo. Detta  $\frac{1}{R^2}$  la curvatura non nulla, risulta ad es., per un campo magnetico di 25000 gauss, R dell'ordine di una decina di siriametri (siriametro = un milione di volte la distanza media fra la Terra e il Sole). Con tutto ciò non è escluso che qualche conseguenza (per es. il modo di variare della velocità della luce lungo le linee di forza) divenga controllabile con osservazioni di fisica cosmica.

Ad un ulteriore tipo, anche più elementare, di soluzione rigorosa si è condotti (n. 5), prefiggendosi che lo spazio assuma curvatura costante e che vi si esercitino sforzi puramente normali. Questo tipo si collega (n. 6) ad una questione molto dibattuta di statistica stellare, su cui si è testè rivolta l'attenzione di Einstein <sup>(2)</sup>.

#### 1. — CAMPI ELETTROMAGNETICI STAZIONARI.

Sia

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{ik}^3 a_{ik} dx_i dx_k$$

l'espressione, in coordinate generali  $x_1, x_2, x_3$ , del quadrato dell'elemento lineare dello spazio fisico in una regione che si suppone sede di fenomeni elettromagnetici. Secondo la teoria di Einstein, questi fenomeni influiscono sulla natura metrica dello spazio, sicchè il  $ds^2$  non sarà, in generale, rigorosamente euclideo. Comunque, in condizioni statiche, seguita a valere, anche nella detta teoria, lo schema elettromagnetico ordinario riferito alla metrica (1).

Ci atterremo al caso elementare in cui il campo consta di una sola delle due forze: elettrica ovvero magnetica. Indichi  $X_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) il sistema coordinato covariante di questa forza. Le sue componenti (in generale non ortogonali) secondo il triedro delle linee coordinate saranno in conformità  $\frac{X_i}{\sqrt{a_{ii}}}$ . Introdotti anche gli elementi reciproci

$$X^{(i)} = \sum_j^3 a^{(ij)} X_j \quad (i = 1, 2, 3),$$

<sup>(1)</sup> *Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvatures principali costanti*, in questi Rendiconti, vol. XXV, 1° semestre 1916, pp. 59-68.

<sup>(2)</sup> *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss., 1917, pp. 142-152.

porremo

$$(2) \quad 8\pi u = \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}^{(i)} \mathbf{X}_i.$$

Le misure si intenderanno riferite al sistema elettrostatico assoluto, nel senso di Gauss-Hertz <sup>(1)</sup> (in cui la costante dielettrica e la permeabilità magnetica si considerano puri numeri, eguali all'unità per il vuoto). Con ciò, in seno ad un mezzo impolarizzabile (aria o vuoto),  $u$  rappresenta la densità di energia dovuta alla forza  $\mathbf{X}_i$ , mentre il relativo tensore maxwelliano degli sforzi rimane definito dal sistema (covariante)

$$(3) \quad T_{ik} = u a_{ik} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

I singoli sforzi specifici (trattati come pressioni) risultano dai rapporti  $\frac{T_{ik}}{\sqrt{a_{ii} a_{kk}}}$ , il cui significato, per una data coppia di indici  $i, k$ , è: componente ortogonale secondo la linea  $x_k$  dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale normale alla linea  $x_i$  (o viceversa).

Dacchè il campo in questione si suppone essenzialmente stazionario, dovremo ritenere le  $\mathbf{X}_i$  derivanti da un potenziale  $\varphi$  ( $\mathbf{X}_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ), escludendo dalle nostre considerazioni, se si tratta di forza magnetica, quelle eventuali porzioni di campo in cui ci sono correnti.

Assumiamo in particolare  $\varphi = -Cx_1$  con  $C$  costante. Avremo

$$X_1 = C \quad , \quad X_2 = X_3 = 0,$$

il che corrisponde ad una forza di intensità  $|C|$  diretta secondo le linee  $x_1$ .

Se si suppone inoltre che le linee coordinate sieno ortogonali, ossia che il  $ds^2$  abbia la forma

$$H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + H_3^2 dx_3^2,$$

si ha dalle (2) e (3)

$$(2') \quad u = \frac{C^2}{8\pi H_1^2},$$

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{11}}{H_1^2} = -u \quad , \quad \frac{T_{22}}{H_2^2} = \frac{T_{33}}{H_3^2} = u, \\ T_{ik} = 0 \quad \quad \quad (i \neq k), \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, B. I, § 61 [Leipzig, Teubner, 1912 (4<sup>a</sup> edizione)].

ciò che rispecchia la caratteristica distribuzione degli sforzi maxwelliani, i quali sono tensioni sugli elementi normali e pressioni sugli elementi paralleli alle linee di forza, colla comune intensità  $u$ .

## 2. — SPAZI B) DEL BIANCHI.

Il Bianchi ha chiamato spazi *normali* quelli in cui le tre congruenze costituite dalle linee principali di curvatura risultano normali (ad altrettante famiglie di superficie), ed ha caratterizzato tutti gli spazi normali colle tre curvature principali costanti. Fra questi, a prescindere dal caso classico delle tre curvature eguali (spazi a curvatura costante), ce n'è un solo tipo che diremo B), cui spetta curvatura media  $\mathfrak{K}$  positiva (<sup>1</sup>).

In esso due curvature principali sono nulle, e la terza, positiva, si identifica quindi con  $\mathfrak{K}$ . Posto

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{R^2} \quad (\text{con } R > 0),$$

si può attribuire al quadrato dell'elemento lineare l'espressione

$$B) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + \sin^2 \frac{x_2}{R} dx_3^2,$$

con riferimento al sistema triplo ortogonale, le cui linee coordinate formano le congruenze principali.

Ciò premesso, ricordo in generale che, ogniquale volta le congruenze principali sono normali, ove si indichino con  $\omega_i$  le tre curvature principali e con  $H_i^2$  i coefficienti del  $ds^2$  nella forma ortogonale corrispondente alle dette congruenze, valgono per le  $\alpha_{ik}$  del Ricci (<sup>2</sup>) le espressioni canoniche

$$\alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad , \quad \alpha_{ii} = \omega_i H_i^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Per il  $ds^2$  B), cui spettano le curvature  $\omega_1 = \frac{1}{R^2}$ ,  $\omega_2 = \omega_3 = 0$ , si ricava in particolare

$$(4) \quad \alpha_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad , \quad \alpha_{11} = \frac{1}{R^2} \quad , \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0.$$

Ci sarà comodo immaginare rappresentato uno spazio B) nell'ordinario spazio euclideo, interpretando  $x_1, x_2, \frac{x_3}{R}$  come coordinate cilindriche: ordinatamente  $z, \varrho, \vartheta$ , il significato di queste ultime lettere essendo manifesto.

(<sup>1</sup>) Bianchi, loc. cit., pag. 68.

(<sup>2</sup>) Negli spazi a tre dimensioni, queste  $\alpha_{ik}$  sostituiscono con vantaggio i simboli di Riemann a quattro indici. Già ho avuto occasione di richiamarlo nel § 2 della Nota precedente.

Si stabilisce così una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due spazi, pur essendo diverse le loro due metriche. Alla espressione B) del  $ds^2$  fa riscontro, per lo spazio rappresentativo, la determinazione euclidea in coordinate cilindriche

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{x_2}{R}\right)^2 dx_3^2.$$

Le due forme tendono a coincidere per  $R$  molto grande; in modo più preciso, risulta trascurabile il divario, allorchè il rapporto  $\frac{x_2}{R}$  è abbastanza piccolo perchè si possa confondere il seno coll'arco. In ogni caso, le linee  $x_1$  ed  $x_2$  (rette parallele all'asse delle  $z$  e rette che lo incontrano normalmente, nello spazio rappresentativo) sono geodetiche anche nella metrica B).

3. — PRODUZIONE MAGNETICA OVVERO ELETTROSTATICA  
DI UNO SPAZIO B).

Supponiamo che, in una porzione dello spazio ambiente, priva di materia ponderabile, si provochi un campo uniforme, per es. magnetico, come si realizza comodamente nell'interno di un solenoide percorso da corrente costante. Dobbiamo aspettarci (ammessa la relatività generale di Einstein) che lo spazio occupato dal campo non resti rigorosamente euclideo, tale modificazione di struttura geometrica dello spazio potendo implicare a sua volta una qualche (tenuissima) distorsione delle linee di forza, finchè si ristabilisce un completo equilibrio. Si tratta di determinare la natura dello spazio e l'assetto finale del fenomeno, a equilibrio raggiunto.

La risoluzione del problema va naturalmente desunta dalle equazioni generali della statica einsteiniana, in cui si attribuiscono alla densità di energia e agli sforzi le determinazioni corrispondenti al caso specifico.

Ecco in primo luogo le equazioni statiche (sotto la forma spazialmente invariante, di cui il § 2 della Nota precedente):

$$(I) \quad \mathfrak{D}\mathfrak{C} = \kappa u,$$

$$(II) \quad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\mathcal{A}_2 V}{V} a_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove  $u$  è la densità di energia (indicata nella precedente comunicazione con  $\frac{T_{00}}{V^2}$ );  $V$  la velocità di propagazione della luce;  $V_{ik}$  e  $\mathcal{A}_2 V$  designano derivate covarianti e parametro di second'ordine riferiti al  $ds^2$  dello spazio ambiente; le  $\alpha_{ik}$  sono i corrispondenti simboli di Ricci;  $\mathfrak{D}\mathfrak{C} = \sum_{ik}^3 a^{(ik)} \alpha_{ik}$

la curvatura media; infine le  $T_{ik}$  costituiscono il tensore degli sforzi; e la costante

$$(5) \quad \kappa = \frac{8\pi f}{c^4},$$

essendo  $f$  la costante di attrazione universale e  $c$  la velocità della luce nel vuoto, in assenza d'ogni azione perturbatrice.

*Dico che, a regime stabilito, la sede del nostro campo uniforme è uno spazio B), di cui le linee di forza (sensibilmente rette) costituiscono la congruenza principale (geodetica)  $x_1$ , corrispondente alla curvatura non nulla.*

Per dimostrarlo, basterà verificare che le (I), (II) rimangono soddisfatte, qualora:

1°) vi si introducano per le  $a_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$  le espressioni che loro competono nella metrica B);

2°) si attribuiscono alla densità di energia  $u$  e agli sforzi  $T_{ik}$  — che, nella supposta assenza di materia, provengono *esclusivamente* dal campo — le espressioni (2') e (3') coi valori  $1, 1, \sin^2 \frac{\alpha_2}{R}$  di  $H_1^2, H_2^2, H_3^2$ ;

3°) si determini in modo opportuno la funzione V.

In base alla (2'), in cui si faccia  $H_1 = 1$ , la (I) porge, coincidendo ora  $\mathfrak{K}$  con  $\frac{1}{R^2}$ ,

$$(6) \quad \frac{1}{R^2} = \kappa u = \frac{\kappa C^2}{8\pi},$$

e determina così, in funzione dell'intensità del campo, la curvatura dello spazio normalmente alle linee di forza (l'unica che non rimane nulla). Atteso il valore (5) di  $\kappa$ , si ricava

$$(6') \quad R = \frac{c^2}{\sqrt{f} C}.$$

Dalla espressione generale delle derivate seconde covarianti

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_l^3 \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} \frac{\partial V}{\partial x_l}$$

segue che, per la forma fondamentale B) e per una funzione della sola  $x_1$ , il sommatorio si annulla, talchè le derivate seconde covarianti non differiscono dalle ordinarie, e queste vanno tutte a zero ad eccezione di  $V_{11}$  che si riduce a  $V''$  (l'apice indicando derivazione rispetto all'argomento  $x_1$ ). Si ha poi [coi valori delle  $a^{(ik)}$  corrispondenti a B)]

$$\mathcal{A}_2 V = \sum_{ik}^3 a^{(ik)} V_{ik} = V''.$$



Con ciò, quelle delle (II) che corrispondono a indici  $i, k$  distinti risultano pure identità. Le altre tre, ossia

$$\alpha_{ii} + \frac{V_{ii}}{V} - \frac{A_2 V}{V} H_i^2 = -x T_{ii} \quad (i = 1, 2, 3),$$

danno, in base alle (3') e (4),

$$\frac{1}{R^2} = xu \quad (i = 1) \quad ; \quad \frac{V'}{V} = xu \quad (i = 2, 3).$$

La prima coincide colla (6), e la seconda, introducendovi per  $xu$  il suo valore  $\frac{1}{R^2}$  ed integrando, porge

$$(7) \quad V = c_1 e^{\frac{\alpha_1}{R}} + c_2 e^{-\frac{\alpha_1}{R}} \quad (c_1, c_2 \text{ costanti}).$$

#### 4. — ORDINE DI GRANDEZZA DI R.

*Campi magnetici.* — L'intensità  $C$  praticamente raggiungibile può ammontare a qualche decina di migliaia di gauss. Prendiamo 25000 a titolo di apprezzamento. Esprimendo anche  $c$  ed  $f$  in unità C. G. S., la (6') dà  $R$  in centimetri. Ora  $c = 3 \cdot 10^{10}$ ,  $f = 6,6 \cdot 10^{-8}$ , sicchè, arrotondando, risulta  $R = \frac{3}{2} \cdot 10^{20}$  cm.  $= \frac{3}{2} 10^{15}$  Km. Se si nota che  $\frac{3}{2} 10^8$  Km. è la distanza media Sole-Terra, si arriva alla conclusione che, per un campo di 25000 gauss, il raggio di curvatura vale dieci milioni di volte la distanza media fra la Terra e il Sole, ossia dieci siriametri. Esso varia in ragione inversa dell'intensità del campo; ma rimane comunque al di fuori d'ogni attuale possibilità sperimentale il ridurlo a dimensione apprezzabile entro un laboratorio. Non è invece da escludere che qualche altra previsione della teoria, per es. la variazione esponenziale della velocità  $V$  della luce lungo le linee di forza, quale risulta dalla (7), divenga osservabile in fisica cosmica.

*Campi elettrostatici.* — Per la valutazione numerica di  $R$ , seguita a valere la formola (6'), purchè l'intensità  $C$  del campo sia espressa in unità elettrostatiche. Indichiamo con  $C_v$  l'intensità in questione espressa in volt per centimetro. Sarà  $10^8 C_v$  la sua misura in unità elettromagnetiche, C. G. S.; quindi  $C = \frac{1}{c} 10^8 C_v = \frac{1}{300} C_v$  è il numero da introdurre nella (6'), ricavandone, come sopra,  $R$  in cm.

Quando pur si attribuiscono a  $C_v$  valori tra i più alti finora raggiunti, diciamo  $5 \cdot 10^5$  (il che può essere giustificato, pensando che si tratta di campi nel vuoto, sì che non c'è da preoccuparsi delle scariche disruttive), si ha

per  $C$  il valore  $\frac{5}{3} 10^3$ , che è appena la quindicesima parte di quello considerato nel precedente esempio di campo magnetico. Il raggio  $R$  risulterebbe in conformità 15 volte più grande.

5. — SOLUZIONI PARTICOLARI NELL'IPOTESI CHE LO SPAZIO  
ASSUMA UNA CURVATURA COSTANTE  $K$ .

Varranno anzitutto le relazioni geometriche fondamentali

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha_{ik} = K a_{ik} \\ \mathfrak{K} = 3K, \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

con che la (I) diviene

$$(9) \quad 3K = \kappa u.$$

Ne desumiamo  $K \geq 0$ , il che rientra nell'osservazione generale della Nota precedente che, in condizioni statiche, la curvatura media  $\mathfrak{K}$  è sempre positiva o nulla. La (9) stessa mostra poi che  $u$  è necessariamente costante assieme a  $K$ , ossia che il mezzo deve presentare una distribuzione uniforme di energia.

Nell'ipotesi che sia uniforme anche la distribuzione degli sforzi e che questi si esplichino normalmente, avremo altresì

$$(10) \quad T_{ik} = p a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

con  $p$  costante positiva o negativa, secondochè lo sforzo normale cui si trova sottoposto ogni elemento del mezzo ha carattere di pressione ovvero di tensione.

Tenuto conto delle (9) e (10), le (II) divengono

$$(11) \quad \frac{V_{ik}}{V} + \left( K + \kappa p - \frac{A_2 V}{V} \right) a_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

a cui si può soddisfare in due modi diversi.

1°.  $V$  costante. — In tal caso è necessario e basta aggiungere alla (9) la condizione

$$(12) \quad K + \kappa p = 0.$$

Dal loro confronto segue  $p = -\frac{1}{3} u$ , e si è condotti al seguente enunciato:

Entro un mezzo omogeneo uniformemente stirato con una trazione  $\frac{1}{3} u$  ( $u$  densità dell'energia), lo spazio assume curvatura costante positiva  $K = \frac{\kappa}{3} u$ , la velocità della luce conservandosi costante.

Si noterà tuttavia che un tale mezzo non potrebbe essere costituito da materia ordinaria, nè allo stato fluido, nè allo stato solido. Non allo stato

fluido, perchè gli sforzi interni in tale stato hanno sempre carattere di pressioni; e nemmeno allo stato solido, perchè l'ordine di grandezza della trazione  $\frac{u}{3}$  è ben superiore ai limiti di rottura. Un apprezzamento numerico si ha immediatamente, pensando che, detta  $\mu$  la densità materiale di un eventuale mezzo solido nelle condizioni supposte, sarebbe sensibilmente  $u = c^2 \mu$  e si tratterebbe quindi di una trazione di  $\frac{1}{3} c^2 \mu = 3 \cdot 10^{20} \cdot \mu$  dine per  $\text{cm}^2$ .

2°.  $V$  variabile. — Dalle (11), moltiplicate per  $a^{(ih)}$  e sommate rispetto ai due indici  $i$  e  $k$ , segue in primo luogo

$$\frac{\Delta_2 V}{V} + 3 \left( K - \frac{\Delta_2 V}{V} + x p \right) = 0,$$

ossia

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{3}{2} (K + x p).$$

Le (11) stesse equivalgono quindi a

$$(13) \quad \frac{V_{ik}}{V} + K^* a_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

dove si è posto per brevità

$$K^* = K - \frac{1}{2} (3K + x p).$$

È facile riconoscere che le (13) risultano effettivamente compatibili, per  $V$  non costante, anzi costituiscono un sistema completo rispetto alla stessa  $V$ , considerata come funzione incognita, allora e allora soltanto che  $K^* = K$  (1).

(1) Per stabilirlo, conviene ricordare [Ricci e Levi-Civita, Math. Ann., vol. 54, 1900, pag. 143] che le derivate seconde covarianti d'ogni sistema semplice  $V_i$  verificano le relazioni

$$V_{ikl} - V_{ilk} = \sum_{jh}^3 a_{h,ji} a^{(jh)} V_h \quad (i, k, l = 1, 2, 3),$$

Ricorriamo ai sistemi E, e da un lato sostituiamo, ai simboli di Riemann, le  $\alpha^{(pq)}$  di Ricci, a norma della formula

$$a_{h,ji} = \sum_{pq}^3 \alpha^{(pq)} \varepsilon_{phl} \varepsilon_{qji};$$

teniamo conto d'altro lato che, nel caso presente,  $\alpha^{(pq)} = K a^{(pq)}$ , talchè si può anche porre

$$\alpha^{(pq)} = \frac{K}{2} \sum_{\nu\sigma\tau}^3 a_{\nu\sigma} a_{\rho\tau} \varepsilon^{(p\nu\rho)} \varepsilon^{(q\sigma\tau)}.$$

Avuto riguardo alle identità

$$\sum_{\nu}^3 \varepsilon^{(p\nu\rho)} \varepsilon_{\nu kl} = \varepsilon_{\nu k} \varepsilon_{\rho l} - \varepsilon_{\nu l} \varepsilon_{\rho k} \quad (\nu, \rho, k, l = 1, 2, 3),$$

Ciò richiede

$$(14) \quad 3K + xp = 0,$$

che, associata alla (9), porge  $p = -u$ , e dà luogo alle stesse considerazioni qualitative di poc'anzi.

Per l'integrazione delle (13), giova prendere il  $ds^2$  (che ha per ipotesi la curvatura costante  $K$ ) sotto la forma tipica (1)

$$(15) \quad \frac{1}{\psi^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

con

$$(16) \quad \psi = 1 + \frac{1}{4} K \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Per le derivate covarianti  $V_{ik}$  si ricavano subito (dalla formula di definizione) le espressioni esplicite

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_k} \right) - \frac{\varepsilon_{ik}}{\psi} \sum_{\tau=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_\tau}$$

col solito significato delle  $\varepsilon_{ik}$  (0 per  $i \neq k$ , 1 per  $i = k$ ).

che giova aver presenti anche sotto la forma

$$\sum_{\tau=1}^3 \varepsilon^{(q\sigma\tau)} \varepsilon_{qji} = \varepsilon_{\sigma j} \varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i} \varepsilon_{\tau j} \quad (\sigma, \tau, j, i = 1, 2, 3),$$

e in cui, ben si intende, le  $\varepsilon$  a due indici valgono zero o uno secondochè questi indici sono distinti o coincidono, risulta

$$V_{ikl} - V_{ilk} = \frac{K}{2} \sum_{\tau=1}^3 \sum_{\rho\sigma} \varepsilon_{j\tau\rho\sigma} a_{\nu\sigma} a_{\rho\tau} a^{(j\kappa)} V_\kappa (\varepsilon_{\nu k} \varepsilon_{\rho l} - \varepsilon_{\nu l} \varepsilon_{\rho k}) (\varepsilon_{\sigma j} \varepsilon_{\tau i} - \varepsilon_{\sigma i} \varepsilon_{\tau j}) = K (a_{il} V_k - a_{ik} V_l)^{\dagger}$$

Nell'ipotesi che le  $V_i$  sieno le derivate d'una funzione  $V$  che verifica le (13), si ha, dalle (13) stesse, moltiplicando per  $V$  e derivando covariantemente,

$$V_{ikl} = -K^* a_{ik} V_l,$$

che, introdotte nelle precedenti, danno luogo alle condizioni di integrabilità:

$$(K - K^*) (a_{il} V_k - a_{ik} V_l) = 0,$$

per ogni terna di indici  $i, k, l$ .

Dacchè, per ipotesi,  $V$  è un'effettiva funzione, una almeno delle sue derivate, diciamo per es.  $V_k$ , sarà diversa da zero. Fissiamo, nelle equazioni testè stabilite, questo valore di  $k$  e un valore di  $l$  diverso da  $k$ ; e moltiplichiamo per  $a^{(ik)}$ , sommando rispetto all'indice  $i$ . Ricaveremo

$$(K - K^*) V_k = 0,$$

donde appunto  $K - K^* = 0$ ,

c. d. d.

(1) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, pag. 345 [Pisa, Spoerri, 1902].

Portando nelle (13) e badando alla forma (15) del  $ds^2$ , nonchè alla (16), si ha in primo luogo

$$\frac{\partial^2(\psi V)}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (i \neq k),$$

donde apparisce che

$$W = \psi V$$

dev'essere a variabili separate (somma di tre funzioni, una della sola  $x_1$ , una della sola  $x_2$  e una della sola  $x_3$ ).

Le rimanenti (13), in cui, ben si intende, si faccia  $K^* = K$ , danno

$$\psi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \psi \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \frac{\partial V}{\partial x_l} + KV = 0,$$

ossia

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} W - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x_l} + \left\{ K + \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 \right\} \frac{W}{\psi} = 0.$$

In virtù della (16),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} K \quad . \quad K + \sum_{l=1}^3 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \right)^2 = K\psi,$$

talchè in definitiva l'ausiliaria  $W$  (a variabili separate) si trova sottoposta alle tre condizioni

$$\psi \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} - \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x_l} + \frac{1}{2} KW = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

con  $\psi = 1 + \frac{1}{4} K \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ . Data questa forma di  $\psi$ , ogni  $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2}$  deve ridursi ad una costante, e risulta subito che la più generale soluzione è

$$W = b_0 \left\{ \frac{1}{4} K \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1 \right\} + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$

le  $b$  designando costanti arbitrarie. Con tale espressione di  $W$ ,

$$V = \frac{1}{\psi} W$$

costituisce in conformità l'integrale generale delle (13).

#### 6. — TERMINE ADDIZIONALE RECENTEMENTE PROPOSTO DA EINSTEIN.

Riflessioni statistiche sulla distribuzione asintotica della materia nell'universo stellare hanno indotto Einstein<sup>(1)</sup> a saggiare l'introduzione di un

(1) La stessa ipotesi di una distribuzione quasi uniforme di materia nel mondo suggerì all'Almansi interessanti specificazioni positive e formali, inquadrabili nell'ordinario schema newtoniano. Cfr. *Le equazioni fondamentali della Dinamica e la legge di gravitazione* nelle Memorie di questa Accademia (Vol. IX, 1913, pp. 473-502).

piccolo termine correttivo (perfettamente compatibile coi postulati della relatività generale) nelle sue equazioni fondamentali. Queste erano (con referenza al  $ds^2$  quadridimensionale)

$$(E) \quad G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3);$$

e dovrebbero modificarsi come segue:

$$(E') \quad G_{ik} - \left(\frac{1}{2} G + \lambda\right) g_{ik} = -\kappa T_{ik},$$

$\lambda$  designando una costante universale positiva.

In condizioni statiche, la forma quaternaria

$$\sum_0^{ik} g_{ik} dx_i dx_k$$

si riduce a

$$V^2 dx_0^2 - ds^2 = V^2 dx_0^2 - \sum_1^3 a_{ik} dx_i dx_k,$$

ed è opportuno mettere in evidenza la metrica spaziale.

Se, in luogo delle (E), si accettano le (E'), si hanno, in luogo delle (I) e (II), queste equazioni statiche (1):

$$(I') \quad \mathfrak{O} - \lambda = \kappa u,$$

$$(II') \quad a_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \left(\frac{\mathcal{A}_2 V}{V} + \lambda\right) a_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Dacchè  $\lambda > 0$ , la (I') mostra che il termine complementare rende verificata *a fortiori* (escludendo il caso limite  $\mathfrak{O} = 0$ ) la proprietà generale dello spazio fisico (da noi rilevata al § 1 della precedente Nota) di non poter mai assumere in condizioni statiche curvatura media negativa.

Se poi si introducono le ipotesi particolari del n. 5, supponendo che si tratti di spazio a curvatura costante  $K$ , sottoposto a sforzi normali, con che valgono le (8) e (10), le (I') e (II') assumono l'aspetto

$$(9') \quad 3K - \lambda = \kappa u,$$

$$(11') \quad \frac{V_{ik}}{V} + \left(K + \kappa p - \frac{\mathcal{A}_2 V}{V} - \lambda\right) a_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Queste corrispondono manifestamente alle (9) e (11) del n. prec., identificandosi con esse per  $\lambda = 0$ . La discussione si fa nello stesso modo, col

(1) Il passaggio dalle (E') alle (I'), (II') si fa esattamente come dalla forma originaria (E) alle (I), (II) [§§ 1-2 della Nota prec., già più volte citata]: basta soltanto tener conto del termine addizionale in  $\lambda$ .

vantaggio che la presenza della costante  $\lambda$  lascia un certo margine a valori positivi di  $p$ .

Occupiamoci in particolare delle soluzioni, per cui  $V$  è costante. Alla (9') dovremo associare la

$$(12') \quad K + \kappa p = \lambda,$$

talchè, eliminando  $K$ , otteniamo

$$(17) \quad 3 \kappa p = 2\lambda - \kappa u.$$

Per  $p = 0$ , si ha la soluzione particolare di Einstein

$$\bar{u} = \frac{2\lambda}{\kappa}, \quad \bar{K} = \lambda,$$

che caratterizza la distribuzione media  $\bar{u}$  di energia (e quindi di materia) nell'intero spazio, supposto che esso sia (tranne divergenze locali) dotato di una curvatura costante, e riempito (in modo statisticamente uniforme) di materia incoerente, tra le cui particelle non si esercitano sforzi molecolari.

La (17) mostra che si può generalizzare la soluzione di Einstein, assumendo a piacere il valore di  $u$  (costante e  $\geq 0$ ). Con ciò si conserva la piena uniformità delle caratteristiche geometriche e meccaniche, ma non l'assenza di sforzi normali. Questi si esplicano come pressioni per  $u < \bar{u}$ , come tensioni per  $u > \bar{u}$ . Ragionevoli induzioni sul comportamento della materia, per quanto diffusa, portano ad escludere la seconda eventualità:  $\bar{u}$  si presenta quindi come un limite superiore della densità media di energia attribuibile all'universo stellare. Sia per ciò, che per l'assenza di sforzi che la caratterizza, la soluzione di Einstein presenta senza dubbio il maggior interesse speculativo.

**Matematica.** — *Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

1. In altre Note (questi Rend. a. c.) ci siamo occupati di certe equazioni integrali singolari i cui nuclei sieno funzioni di combinazioni lineari delle variabili.

In questa Nota tratteremo delle equazioni che si riattaccano alla precedente classe, essendo l'estensione di un particolare tipo di essa.

Noi considereremo dunque le equazioni:

$$\{A\} \quad \varphi(x) + \lambda \sum a'_r \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b_r |x - \varepsilon'_r s'_r|} \varphi(s'_r) ds'_r = f(x)$$

ove le  $s'_r$  sieno della radice  $\nu_r$ -esima dell'unità,  $a_r, b_r$ , costanti e la  $s'_r$  varii da  $-\infty$  a  $+\infty$  in modo che  $\varepsilon'_r s'_r$  resti sempre reale.

2. Cominciamo dal trattare il caso più semplice: che cioè le  $\varepsilon'_r$  sieno tutte eguali all'unità e che  $f(x) \equiv 0$ .

Premettiamo perciò il

TEOREMA I. — *Se esiste la funzione  $\varphi$  (che sarà derivabile almeno due volte, allora) tale che:*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s) ds = 0,$$

essa è eguale ad una certa combinazione di esponenziali

$$\varphi(x) = \sum k_r e^{\nu_r x}.$$

Infatti, noi abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s) ds &= \\ &= \varphi(x) + \lambda \int_x^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s) ds + \lambda \int_{-\infty}^x e^{b|x-s|} \varphi(s) ds = \\ &= \varphi(x) + \lambda e^{-b} \int_x^{+\infty} e^{bs} \varphi(s) ds + \lambda e^{bx} \int_{-\infty}^x e^{-bs} \varphi(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Derivando una volta, si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \lambda \left\{ -b e^{-bx} \int_x^{+\infty} e^{bs} \varphi(s) ds + \right. \\ \left. + b e^{bx} \int_{-\infty}^x e^{-bs} \varphi(s) ds - e^{-bx} \cdot e^{bx} \varphi(x) + e^{bx} e^{-bx} \varphi(x) \right\} = 0, \end{aligned}$$

da cui, riducendo:

$$\varphi'(x) + \lambda \left\{ -b e^{-bx} \int_x^{+\infty} e^{bs} \varphi(s) ds + b e^{bx} \int_{-\infty}^x e^{-bs} \varphi(s) ds \right\} = 0.$$

Derivando una seconda volta, avremo:

$$\begin{aligned} \varphi''(x) + \lambda \left\{ b^2 e^{-bx} \int_x^{+\infty} e^{bs} \varphi(s) ds + \right. \\ \left. + b^2 e^{bx} \int_{-\infty}^x e^{-bs} \varphi(s) ds + b e^{-bx} e^{bx} \cdot \varphi(x) + b e^{bx} e^{-bx} \varphi(x) \right\} = 0, \end{aligned}$$

cioè:

$$\varphi''(x) + \lambda \left\{ b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(s) ds + 2b \varphi(x) \right\} = 0$$



ed infine, per l'equazione da cui siamo partiti:

$$\varphi''(x) - b^2 \varphi(x) + 2\lambda b \varphi(x) = 0$$

che dimostra l'assunto.

Ne segue il

TEOREMA II. — *L'equazione*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma a_r e^{b_r |x-s|} \varphi(s) ds = 0$$

ammette soltanto soluzioni della forma:

$$\varphi(x) = \Sigma h_r e^{\gamma_r x}$$

ove le  $\gamma_r$  soddisfano all'equazione:

$$1 - \lambda \Sigma \frac{2b_r a_r}{b_r^2 - \gamma^2} = 0 \quad ; \quad -b_r > \gamma > b_r.$$

Si potrebbe poi mostrare facilmente che, se una delle  $\gamma$  fosse multipla d'ordine  $\nu + 1$ , al posto della costante  $h$  relativa, subentra un polinomio arbitrario d'ordine  $\nu$ .

La prima parte del teorema II è immediata. Per dimostrare la seconda, si osservi che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} e^{\gamma s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx} e^{(b+\gamma)s} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{bx} e^{(-b+\gamma)s} ds.$$

Per la convergenza degli integrali (e perchè quindi l'integrale primitivo sia proprio) occorre e basta che  $b + \gamma$  sia negativo e  $-b + \gamma$  positivo: ciò che dà appunto

$$-b > \gamma > b.$$

Se qualcuna delle  $b$  fosse positiva, non vi sarebbero valori reali (e complessi anche) di  $\gamma$  soddisfacenti a tali condizioni: epperò le  $b$  devono necessariamente essere negative.

Se poi le  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  fossero complesse, nelle disequaglianze precedenti figurerebbero le loro parti reali.

Intanto, gli integrali dianzi scritti sono rispettivamente eguali a:

$$-\frac{e^{-bx} e^{(b+\gamma)x}}{b + \gamma} = -\frac{e^{\gamma x}}{b + \gamma} \quad ; \quad \frac{e^{bx} e^{(-b+\gamma)x}}{\gamma - b} = \frac{e^{\gamma x}}{\gamma - b}.$$

Ne segue quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} e^{\gamma s} ds = \left\{ \frac{-1}{b + \gamma} + \frac{1}{\gamma - b} \right\} e^{\gamma x} = \frac{-2b}{b^2 - \gamma^2} e^{\gamma x}.$$

Quest' ultima formola trae seco, come agevole conseguenza, la seconda parte del teorema.

3. Se dunque abbiamo:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\alpha-s|} \varphi(s) ds = 0,$$

l'equazione algebrica caratteristica sarà

$$1 + \frac{2\lambda}{1-\gamma^2} = 0 \quad ; \quad \gamma = \sqrt{1+2\lambda} \quad , \quad -1 < \gamma < 1.$$

Se  $\lambda > -1/2$ , le due radici sono reali; ma per la diseuguaglianza scritta si vede che per  $\lambda > 0$  non vi possono essere soluzioni.

Quindi, per

$$0 > \lambda > -\frac{1}{2}$$

la soluzione dell'equazione dianzi scritta è  $e^{-\sqrt{1+2\lambda}x}$ .

Se  $\lambda < -1/2$ ,  $\gamma$  sarà immaginario; quindi la soluzione generale sarà  $c_1 \text{ sen}(i\gamma x + c_2)$  con  $c_1, c_2$  costanti arbitrarie.

Per  $\lambda > 0$  gli integrali non convergono.

Quindi, mentre per  $|\lambda| > 1/2$  può esistere una soluzione limitata, per  $|\lambda| < 1/2$  essa certamente non esiste.

Ed in effetto, se applichiamo le considerazioni svolte nella già citata Nota, si trova che la costante  $k$ , è data da:

$$k = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-|\alpha-s|}| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\alpha-s|} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} ds = 2 \int_{-\infty}^0 e^s ds = 2.$$

Quindi la  $|\lambda k| < 1$ , dà proprio  $|\lambda| < 1/2$  come condizione sufficiente, ma non necessaria, per la non esistenza di soluzioni limitate dell'equazione omogenea scritta.

4. Passiamo ora a trattare le equazioni più generali (A). In esse si deve implicitamente supporre che  $f(x), \varphi(x)$  sieno definite oltre che sull'asse reale, su tutte le rette  $\varepsilon_r \sigma$  ( $\sigma$  reale).

Con una semplice trasformazione di variabili, potremo poi ridurre la (A) al tipo:

$$(B) \quad \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \sum a_r e^{b_r |\alpha-s|} \varphi(\varepsilon_r s) ds = f(x) \quad [s \text{ reale}; \varepsilon_r^2 = 1].$$

Vale allora il

TEOREMA III. — *Se esiste una soluzione dell'equazione omogenea:*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|\alpha-s|} \varphi(\varepsilon s) ds = 0 \quad (\varepsilon^2 = 1),$$

*essa è una combinazione lineare di esponenziali.*

Infatti, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(\varepsilon s) ds = \\ = \varphi(x) + \lambda \left\{ e^{-bx} \int_x^{\infty} e^{bs} \varphi(\varepsilon s) ds + e^{bx} \int_{-\infty}^x e^{-bs} \varphi(\varepsilon s) ds \right\} = 0, \end{aligned}$$

da cui, derivando:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \lambda \left\{ -be^{-bx} \int_x^{\infty} e^{bs} \varphi(\varepsilon s) ds + \right. \\ \left. + be^{bx} \int_{-\infty}^x e^{-bs} \varphi(\varepsilon s) ds - e^{-bx} e^{bx} \varphi(\varepsilon x) + e^{bx} e^{-bx} \varphi(\varepsilon x) \right\} = 0, \end{aligned}$$

cioè

$$\varphi'(x) + \lambda \left\{ -be^{-bx} \int_x^{\infty} e^{bs} \varphi(\varepsilon s) ds + be^{bx} \int_{-\infty}^x e^{-bs} \varphi(\varepsilon s) ds \right\} = 0.$$

Con una seconda derivazione otteniamo agevolmente:

$$\varphi''(x) + \lambda b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b|x-s|} \varphi(\varepsilon s) ds + 2\lambda b \varphi(\varepsilon x) = 0,$$

cioè

$$\varphi''(x) - b^2 \varphi(x) + 2\lambda b \varphi(\varepsilon x) = 0.$$

Indicando con

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x) = \varphi_0(x), (\varphi_{r+h} = \varphi_h),$$

rispettivamente le funzioni:

$$\varphi(x), \varphi(\varepsilon x), \varphi(\varepsilon^2 x), \dots, \varphi(\varepsilon^r x) = \varphi(x),$$

tale equazione diventa:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2\rho}} \varphi''_\rho(x) - b^2 \varphi_\rho(x) + 2\lambda b \varphi_{\rho+1}(x) = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, r).$$

Si vede quindi che  $\varphi(x)$  soddisfa ad un certo sistema di equazioni differenziali: ed è, anzi, una particolare combinazione lineare di esponenziali, a coefficienti legati da certe relazioni, a causa delle relazioni assegnate fra le  $\varphi_\rho$ .

In modo del tutto analogo si dimostrerebbe il

TEOREMA IV. — *Se esiste una funzione  $\varphi(x)$ , soluzione della:*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \sum a_r e^{b_r|x-s|} \varphi(\varepsilon_r s) ds = 0$$

essa è una certa combinazione lineare (i cui coefficienti sono legati da

date relazioni) di esponenziali  $e^{\gamma x}$ . Le  $\gamma$  soddisfano alla lor volta una certa equazione algebrica, e certe disequaglianze.

La prima parte di questo teorema è immediata. Per la seconda sostituiamo a  $\varphi(x)$ ,  $e^{\gamma x}$ .

Avremo che:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b_r |x-s|} \varphi(\varepsilon_r s) ds &= \int_x^{+\infty} e^{-b_r x} e^{b_r s} e^{\varepsilon_r \gamma s} ds + \int_{-\infty}^x e^{b_r x} e^{-b_r s} e^{\varepsilon_r \gamma s} ds = \\ &= -\frac{e^{-b_r x} e^{b_r x} e^{\varepsilon_r \gamma x}}{b_r + \varepsilon_r \gamma} + \frac{e^{b_r x} e^{-b_r x} e^{\varepsilon_r \gamma x}}{-b_r + \varepsilon_r \gamma} = e^{\varepsilon_r \gamma x} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r \gamma - b_r} - \frac{1}{\varepsilon_r \gamma + b_r} \right\}. \end{aligned}$$

Ciò mostra che se la soluzione contiene un termine  $e^{\gamma x}$ , dovrà contenere anche tutti i termini  $e^{\varepsilon_r \gamma x}$ , e dà il modo per formare il sistema di equazioni — algebrico per le  $\gamma$ , e lineare pei coefficienti — da soddisfare.

Le limitazioni, poi, necessarie alla convergenza degli integrali, sono date dalle

$$\begin{aligned} \text{parte reale di } (b_r + \varepsilon_r \gamma) &< 0 \quad ; \quad \text{parte reale di } (-b_r + \varepsilon_r \gamma) > 0. \\ (r = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

valevoli contemporaneamente per tutte le  $\gamma$  che figurano nella soluzione.

5. Infine, nel caso, che non sia  $f(x) \equiv 0$ , le equazioni integrali sovra scritte, si ridurrebbero ad equazioni differenziali-funzionali non omogenee, usando sempre tale procedimenti. Tali equazioni poi, con l'introduzione di  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(\varepsilon x)$ ,  $\varphi(\varepsilon^2 x)$ , ... si ridurrebbero a sistemi di equazioni differenziali non omogenee, con delle condizioni accessorie.

Quindi, il tipo della soluzione generale, in tale caso, resta fissato in modo non dubbio.

Se però, in particolare, la  $f(x)$  si può rappresentare con:

$$f(x) = \sum_{\rho} p_{\rho} e^{h_{\rho} x},$$

si avrà subito (trascurando le quistioni di convergenza) che;

$$\varphi(x) = \sum_{\rho} q_{\rho} e^{h_{\rho} x} + H(x),$$

ove  $H(x)$  sia soluzione della corrispondente equazione singolare omogenea.

Devono però essere soddisfatte le relazioni derivanti dall'equazione data; si deve dunque avere:

$$\sum_{\rho} q_{\rho} e^{h_{\rho} x} + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r, \rho} a_r e^{b_r |x-s|} q_{\rho} e^{h_{\rho} \varepsilon_r s} ds = \sum_{\rho} p_{\rho} e^{h_{\rho} x}.$$

Ma, uno dei termini sotto integrale, dà luogo (eseguendo l'integrazione) al termine:

$$a_r q_p \cdot e^{k_p \varepsilon_r x} \cdot \left\{ -\frac{1}{b_r + \varepsilon_r k_p} + \frac{1}{-b_r + \varepsilon_r k_p} \right\}.$$

Occorre quindi che il sistema di quantità  $h_p$  sia compreso nel sistema  $k_p$ ;  $\varepsilon_r k_p$ ; le relazioni intercedenti poi fra i coefficienti si vedono facilmente. Condizioni simili si otterrebbero sostituendo alle funzioni  $f$  rappresentabili mediante serie di Fourier, altre rappresentabili mediante integrali di Fourier.

6. Ad esempio di quanto precede, trattiamo l'equazione:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x+s|} \varphi(s) ds = 0.$$

Avremo cioè:

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \cdot e^{-s} \varphi(s) ds + \lambda \int_{-\infty}^{-x} e^x e^s \varphi(s) ds = 0.$$

Derivando due volte avremo quindi:

$$\varphi''(x) - \varphi(x) + 2\varphi(-x) = 0,$$

da cui:

$$\varphi''(-x) - \varphi(-x) + 2\varphi(+x) = 0$$

poichè  $\varepsilon = -1$ ;  $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ ;  $\varphi_1(x) = \varphi(-x)$ .

Si vede subito che bisogna porre, come soluzione del sistema:

$$\varphi(x) = me^{\gamma x} + ne^{-\gamma x}$$

ed avere quindi:

$$(m\gamma^2 e^{+\gamma x} + n\gamma^2 e^{-\gamma x}) - (me^{+\gamma x} + ne^{-\gamma x}) + 2(ne^{+\gamma x} + me^{-\gamma x}) = 0$$

$$(m\gamma^2 e^{-\gamma x} + n\gamma^2 e^{+\gamma x}) - (me^{-\gamma x} + ne^{+\gamma x}) + 2(me^{-\gamma x} + ne^{+\gamma x}) = 0.$$

Tali equazioni sono soddisfatte sempre e solo quando è soddisfatto il sistema indeterminato:

$$m\gamma^2 - m - 2n = 0$$

$$n\gamma^2 - n - 2m = 0.$$

Posto  $m = \mu n$ , si ha subito l'altro sistema determinato:

$$\mu\gamma^2 - \mu - 2 = 0$$

$$\gamma^2 - 1 - 2\mu = 0.$$

Tale sistema impone che  $\frac{1}{\mu} = \mu$ : e quindi  $\mu = \pm 1$ .

In corrispondenza si hanno per  $\gamma$  i valori  $\gamma = \pm \sqrt[3]{3}$  ;  $\gamma = \pm i$ .

Epperò la soluzione generale dell'equazione singolare scritto si otterrà con tali elementi.

Le condizioni per la convergenza sono:

parte reale di  $(-1 - \gamma) < 0$  ; parte reale di  $(+1 - \gamma) > 0$ .

Le radici  $\gamma = \pm i$  soddisfano a tali condizioni, essendo nulla la parte reale; non vi soddisfano invece le altre due.

Resta quindi, come soluzione generale della equazione scritta unicamente una combinazione lineare di  $\sin x$  e  $\cos x$ : e precisamente, tenuto conto delle relazioni fra i coefficienti, dedotte dall'equazione differenziale, resta il solo  $\cos x$ .

In altri lavori tratteremo delle equazioni integro-differenziali di tale tipo, e del caso che le  $\ast$  non sieno radici dell'unità.

**Matematica.** — *Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann.* Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Secondo un teorema recentemente stabilito dal Rosati, ad ogni corrispondenza algebrica *speciale*, situata sopra una curva di genere  $p > 1$ , sono *associati* due sistemi regolari di integrali abeliani riducibili (di 1<sup>a</sup> specie). Se la *specie* della corrispondenza è  $p - q$ , questi due sistemi hanno le dimensioni rispettive  $p - q - 1$  e  $q - 1$  <sup>(1)</sup>.

Ora, suppongasì di avere una curva di genere  $p > 1$  con due sistemi regolari di integrali riducibili aventi le dimensioni rispettive  $p - q - 1$  e  $q - 1$ . Esisteranno su di essa corrispondenze algebriche di specie  $p - q$  aventi per sistemi associati i sistemi dati?

Se alla considerazione della curva si sostituisce quella della matrice riemanniana (unica, dal punto di vista della relazione di equivalenza) collegata ad essa, e alla considerazione delle corrispondenze situate su di essa, si sostituisce quella delle omografie riemanniane della matrice che ne danno le *immagini*, il teorema di Rosati apparisce come caso particolare del teorema di Scorza <sup>(2)</sup> affermate che un'omografia riemanniana singolare di una matrice di Riemann ha per assi due assi della matrice, e la questione posta più sopra si riduce a quest'altra, più generale:

<sup>(1)</sup> Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica.* ecc. Annali di Matematica, serie III, tomo XXV, pp. 1-32, n. 3.

<sup>(2)</sup> Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*, ecc. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XLI (1916), pp. 1-118, n. 14.

*Se una matrice di Riemann di genere  $p > 1$  ammette due assi delle dimensioni rispettive  $2(p - q) - 1$  e  $2q - 1$  esisteranno per essa delle omografie riemanniane singolari aventi per primo e secondo asse i due assi dati?*

La risposta è certo affermativa se i due assi sono indipendenti e cioè *complementari*, come è stato già osservato dal Rosati e dallo Scorza (1); ma non è tale senz'altro se i due assi sono dipendenti.

Ebbene noi vogliamo appunto esaminare in questa Nota sotto quali condizioni la risposta è affermativa anche per assi dipendenti, e quindi, in sostanza, vogliamo caratterizzare le coppie di assi di una matrice di Riemann che possono essere riguardate come coppie di assi di sue omografie riemanniane singolari.

I risultati a cui perveniamo sono raggiunti molto semplicemente: ma non ci sembrano privi di interesse perchè ed essi e le considerazioni che li forniscono si collegano intimamente con la teoria generale delle matrici di Riemann (2).

1. Cominciamo dal dimostrare che:

*Se due matrici riemanniane sono isomorfe e un asse della prima è isomorfo ad uno della seconda, i complementari del primo asse sono isomorfi ai complementari del secondo (3).*

Siano, infatti,  $\omega$  e  $\omega'$  le due matrici isomorfe,  $A_1$  ed  $A_2$  due assi complementari di  $\omega$ ,  $A'_1$  ed  $A'_2$  due tali per  $\omega'$  e supponiamo  $A_1$  isomorfo ad  $A'_1$ .

Siano

$$(1) \quad B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{1,n} \quad \text{e} \quad B_{2,1}, B_{2,2}, \dots, B_{2,m}$$

due gruppi fondamentali di assi puri di  $A_1$  e  $A_2$  rispettivamente. Il gruppo di tutti gli assi  $B_{1,j}$  e  $B_{2,h}$  sarà un gruppo fondamentale di assi puri di  $\omega$ . Allo stesso modo, siano

$$(2) \quad B'_{1,1}, B'_{1,2}, \dots, B'_{1,n'} \quad \text{e} \quad B'_{2,1}, B'_{2,2}, \dots, B'_{2,m'}$$

due gruppi fondamentali di assi puri di  $A'_1$  e  $A'_2$ , per modo che tutti gli assi (2) costituiranno un gruppo fondamentale di assi puri di  $\omega'$ .

Se due matrici sono isomorfe, gli assi di ciascun gruppo fondamentale dell'una si riflettono in assi ad essi rispettivamente isomorfi, di un gruppo fondamentale dell'altra; inoltre dati due gruppi fondamentali di assi puri di una stessa matrice, essi possono esser sempre ordinati in modo che gli

(1) Rosati, loc. cit., n. 4; Scorza, loc. cit., n. 41 d).

(2) Mi sia qui consentito di ringraziare vivamente il prof. Scorza per i preziosi consigli e per gli aiuti prestatimi nella ricerca di cui è oggetto questa Nota.

(3) È già noto che i complementari di uno stesso asse di una matrice riemanniana sono tutti isomorfi tra di loro. Ved. Scorza, Mem. cit., n. 43.

assi dell'uno siano isomorfi a quelli corrispondenti dell'altro <sup>(1)</sup>: dunque per l'isomorfismo delle matrici  $\omega$  e  $\omega'$  deve essere  $n + m = n' + m'$  e poi gli assi (1) e (2) debbono distribuirsi in  $m + n$  coppie, ciascuna coppia contenendo due assi isomorfi e appartenenti l'uno alla serie (1), l'altro alla serie (2). Ma intanto, per l'isomorfismo di  $A_1$  e  $A'_1$  deve essere  $n = n'$  e gli assi  $B_{1,j}$  e  $B'_{1,j}$  si debbono poter distribuire in  $n$  coppie di assi della specie ora detta, dunque dovrà essere pure  $m = m'$  e poi gli assi  $B_{2,h}$  e  $B'_{2,h}$  dovranno potersi distribuire anch'essi in  $m$  coppie della solita specie.

Segue <sup>(2)</sup> che gli assi  $A_2$  e  $A'_2$  sono, come volevasi, isomorfi.

Nel teorema ora dimostrato è contenuto implicitamente quest'altro che, in certo senso, può ritenersi come l'inverso della proposizione sulle matrici riemanniane composte ultimamente invocata:

*Se la matrice riemanniana composta  $\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{vmatrix}$  è isomorfa alla matrice riemanniana composta  $\begin{vmatrix} \omega'_1 & 0 \\ 0 & \omega'_2 \end{vmatrix}$  ed è  $\omega_1$  isomorfa ad  $\omega'_1$ , è anche  $\omega_2$  isomorfa ad  $\omega'_2$ .*

Benchè evidente, non è forse inutile rilevare pure che se  $\omega$  ed  $\omega'$  coincidono, la proposizione stabilita si enuncia:

*Se due assi di una matrice riemanniana sono isomorfi, sono tali anche i loro complementari.*

2. È bene qui subito osservare che: *la totalità degli assi di una matrice riemanniana fra loro isomorfi non è necessariamente formata da tutti e soli i complementari di uno stesso, ossia che esistono matrici riemanniane possedenti coppie di assi non complementari tali che l'uno sia isomorfo ai complementari dell'altro asse.*

Si consideri, ad es., una matrice riemanniana impura priva di assi isolati, i cui assi puri, che sono tutti isomorfi fra di loro <sup>(3)</sup>, siano del genere  $p'$ . Il genere della matrice sarà un multiplo di  $p'$ , poniamo  $rp'$ , e due assi della matrice saranno isomorfi non appena avranno la stessa dimensione o, ciò che fa lo stesso, lo stesso genere <sup>(4)</sup>. Ma allora, come è evidentemente possibile, basta prendere due assi di questa matrice non indipendenti, l'uno del genere  $sp'$  (con  $s$  intero e minore di  $r$ ) e l'altro del genere  $(r - s)p'$ , per avere due assi non complementari, ma tali che l'uno sia isomorfo ai complementari dell'altro.

3. Ciò posto, possiamo subito dimostrare che:

*Se un'omografia riemanniana di una matrice di Riemann è singolare, ciascuno dei suoi due assi è isomorfo ai complementari dell'altro.*

<sup>(1)</sup> Scorza, Mem. cit., n. 49.

<sup>(2)</sup> Scorza, Mem. cit., n. 27.

<sup>(3)</sup> Scorza, Mem. cit., n. 46.

<sup>(4)</sup> Scorza, Mem. cit., n. 50.



E infatti, sia  $\Omega$  un'omografia riemanniana singolare, di specie  $2(p - q)$ , della matrice di Riemann  $\omega$  di genere  $p$ , e siano  $S_{2(p-q)-1}^*$  ed  $S_{2q-1}^*$  i suoi assi, 1° e 2° rispettivamente, i quali sono anche assi della matrice.

L'omografia  $\Omega$ , degenerare nello spazio ambiente, è invece non degenerare, ma sempre razionale, fra gli  $S_{2(p-q)}$  della stella avente per centro  $S_{2(p-q)-1}^*$  ed i punti di  $S_{2q-1}^*$ . Dunque  $\Omega$  subordina fra un qualsiasi complementare di  $S_{2(p-q)-1}^*$  ed  $S_{2q-1}^*$  una omografia *razionale non degenerare* che muta i punti del primo spazio situati sull'immagine della matrice, nei punti del secondo situati sulla stessa immagine.

Cioè, i complementari di  $S_{2(p-q)-1}^*$  sono isomorfi ad  $S_{2q-1}^*$ ; e allora, per quanto è stabilito nel n. 1, anche i complementari di  $S_{2q-1}^*$  sono isomorfi ad  $S_{2(p-q)-1}^*$ .

Viceversa: Se  $S_{2(p-q)-1}^*$ ,  $S_{2q-1}^*$  sono due assi di una matrice riemanniana ed è l'uno di essi isomorfo ai complementari dell'altro, detto  $h$  l'indice di moltiplicabilità di  $S_{2q-1}^*$ , esistono  $h + 1$ , ma non più, omografie riemanniane linearmente indipendenti della matrice, singolari di specie  $2(p - q)$  aventi per primo asse  $S_{2(p-q)-1}^*$  e per secondo asse  $S_{2q-1}^*$ .

Sia infatti  $S_{2q-1}$  un complementare di  $S_{2(p-q)-1}^*$ . Poichè  $S_{2q-1}^*$  è isomorfo ad  $S_{2q-1}$ , l'indice di moltiplicabilità di  $S_{2q-1}$  è ancora  $h$  e il *carattere simultaneo* di  $S_{2q-1}^*$  ed  $S_{2q-1}$  è  $h + 1$  <sup>(1)</sup>; quindi esistono  $h + 1$ , e non più, omografie razionali indipendenti e non degeneri che portano  $S_{2q-1}^*$  in  $S_{2q-1}$  e che mutano lo spazio  $s_{q-1}^*$  ( $\bar{s}_{q-1}^*$ ) di appoggio di  $S_{2q-1}^*$  con l'immagine  $\tau$  ( $\bar{\tau}$ ) della matrice, nello spazio  $s_{q-1}$  ( $\bar{s}_{q-1}$ ) di appoggio di  $S_{2q-1}$  con l'immagine stessa.

Ognuna di queste  $h + 1$  omografie, moltiplicata a destra per la prospettività tra  $S_{2q-1}$  e la stella di vertice  $S_{2(p-q)-1}^*$ , dà luogo ad una omografia, anch'essa razionale e non degenerare, fra i punti di  $S_{2q-1}^*$  e gli  $S_{2(p-q)}$  passanti per  $S_{2(p-q)-1}^*$ , la quale, a sua volta, ne determina una, singolare di specie  $2(p - q)$ , di  $S_{2p-1}$  in se stesso ed avente per primo asse  $S_{2(p-q)-1}^*$  e per secondo asse  $S_{2q-1}^*$ . E quest'ultima essendo una omografia riemanniana per la data matrice, il teorema enunciato ne risulta dimostrato senz'altro.

4. Sia ora  $\Omega$  una omografia di Riemann, degenerare o non, della matrice riemanniana  $\omega$  ed indichiamo con  $I$  l'omografia identica dello spazio rappresentativo, che è anch'essa riemanniana. Le omografie  $\Phi \equiv \Omega + \lambda I$ , con  $\lambda$  razionale, sono tutte omografie riemanniane della matrice  $\omega$ . Se  $\Omega$  ha qualche spazio di punti uniti razionale, questi spazii rispondono ad altrettante radici razionali distinte dell'equazione caratteristica  $D(\rho) = 0$  della  $\Omega$ , e sono assi della matrice <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Scorza, Mem. cit., n. 16.

<sup>(2)</sup> Scorza, Mem. cit., n. 23

Ed allora, ponendo  $\lambda$  successivamente eguale a queste radici, si ottengono altrettante omografie riemanniane degeneri  $\Phi$  le quali ammettono come assi precisamente i due spazii fondamentali coniugati corrispondenti a ciascuna di quelle radici, nella omografia  $\Omega$ .

Dunque, per quanto è stato dimostrato al n. 3, si ha che:

*In ogni omografia riemanniana, uno spazio di punti uniti che sia razionale ed il suo coniugato sono 2 assi della matrice l'uno isomorfo ai complementari dell'altro.*

5. Supponiamo ora che la matrice riemanniana  $\omega$  sia quella dei periodi normali di certi  $p$  integrali abeliani di 1<sup>a</sup> specie indipendenti di una curva di genere  $p > 1$ , su  $2p$  cicli lineari indipendenti.

Tenendo presente che per ogni asse della matrice riemanniana si ha un sistema regolare di integrali riducibili sulla curva, e che ogni omografia riemanniana di  $\omega$  è immagine di una classe di corrispondenze algebriche situate sulla curva, le proposizioni stabilite si traducono immediatamente in altrettante sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili e sulle corrispondenze algebriche della curva stessa.

Enunciamo soltanto queste ultime:

1° *Ad ogni corrispondenza algebrica di specie  $p - q$ , sopra una curva algebrica di genere  $p > 1$ , sono associati due sistemi regolari di integrali riducibili di prima specie, uno  $\infty^{q-1}$ , l'altro  $\infty^{p-q-1}$ , ciascuno isomorfo ai complementari dell'altro: in particolare, i 2 sistemi predetti possono esser complementari.*

2° *Dati, sopra una curva algebrica di genere  $p > 1$ , due sistemi regolari di integrali riducibili l'uno isomorfo ai complementari dell'altro e detto  $h$  l'indice di moltiplicabilità di uno dei 2 sistemi, esistono  $h + 1$ , e non più, corrispondenze algebriche linearmente indipendenti, speciali di specie eguale alla dimensione dell'altro sistema accresciuta di 1 ed aventi associati i sistemi stessi.*

Nelle quali proposizioni è contenuta quest'altra:

3° *Se sopra una curva algebrica di genere  $p > 1$  esistono corrispondenze algebriche di specie  $p - q$  aventi associati, ordinatamente, i sistemi regolari riducibili A e B, vi esistono anche corrispondenze di specie  $q$  aventi associati B ed A.*

4° *Ad ogni corrispondenza algebrica ad  $r$  valenze parziali <sup>(1)</sup> (semplici o multiple) sopra una curva algebrica di genere  $p > 1$ , sono associate  $r$  coppie di sistemi regolari di integrali riducibili, i sistemi di ciascuna coppia essendo l'uno isomorfo ai complementari dell'altro.*

(1) Per la definizione di valenza parziale di una corrispondenza, vedi Rosati, *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica*, Atti dell'Accademia di Torino, vol. 51 (1915-16).

Matematica. — *Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia.* Nota di OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

1. Se una superficie algebrica

$$f_c(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

possiede una curva doppia, C, l'equazione del suo involuppo

$$F_c(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$$

ottenuta eliminando le  $x_i$  e il fattore di proporzionalità,  $\varrho$ , fra le cinque equazioni

$$(I) \quad f_c(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0, \quad \varrho u_i = \frac{\partial f_c(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

svanisce identicamente, giacchè il sistema (I) riesce compatibile per qualunque quaterna di valori assegnati alle  $u_i$  (il che sta ad esprimere il fatto geometrico che ogni piano può essere considerato come tangente ad  $f_c$ , segandola  $f_c$  stessa secondo una curva dotata di punto doppio).

Tuttavia, se si considera la superficie  $f_c$  come limite di una superficie  $f$ , dello stesso ordine  $m$ , priva di singolarità, per es. limite entro un fascio  $f_c + \lambda f_0 = 0$ , l'involuppo  $F_c$  risulterà il limite dell'involuppo  $F$  relativo alla  $f$ : così concepito l'involuppo  $F_c$  appare come un involuppo ben determinato, e solo in apparenza evanescente, di guisa che, dividendo per un fattore numerico che diviene nullo, è possibile ottenere un'equazione non identica: il che sembra contraddire a quanto sopra abbiamo osservato. Ma, considerando più da vicino la cosa, si riconosce come l'involuppo limite di  $F$  dipenda dal modo con cui, entro il sistema delle superficie d'ordine  $m$ , ci si avvicina alla  $f_c$ , sicchè i varî involuppi limiti hanno solo una parte comune; così  $F_c$  risulta decomponibile in un *fattore determinato*, diverso da zero, e in un *fattore indeterminato essenzialmente nullo*, dal quale non si può più estrarre — per una conveniente divisione — alcun altro fattore determinato. Più precisamente: *data una superficie  $f_c(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ , dotata di una curva doppia C (che per semplicità supporremo esser priva di punti multipli e presentar solo punti cuspidali ordinari per  $f_c$ ) l'involuppo  $F_c(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$ , ottenuto eliminando le  $x_i$  e  $\varrho$  fra le (I), si decompone in quattro fattori:*

*il primo fattore rappresenta l'involuppo dei piani propriamente tangenti ad  $f_c$ ;*

*il secondo fattore, che compare al quadrato, rappresenta i piani tangenti alla curva C;*

*il terzo fattore, che compare al cubo, rappresenta l'insieme delle stelle che hanno per vertici i punti cuspidali della curva doppia;*

*il quarto fattore, a cui è dovuto l'annullamento identico di  $F_c$ , è il fattore indeterminato: esso rappresenta un insieme di stelle i cui centri appartengono alla C, ma sono del resto variabili dipendentemente dal modo di tendere al limite.*

Scopo della presente Nota è appunto quello di esaminare le circostanze in cui avviene lo svanimento identico, e la relativa riduzione in fattori, dell'involuppo  $F_c$ ; dalle quali circostanze seguono facilmente le note formule numeriche che danno la classe della superficie  $f_c$  e il numero dei suoi punti cuspidali.

2. Il problema della degenerazione dell'involuppo di una superficie algebrica  $f$ , la quale acquisti una curva nodale C, è intimamente connesso al problema della degenerazione dell'involuppo di una curva piana dalla quale si stacchi una parte (luogo) contata due volte; infatti i piani tangenti ad  $f$  passanti per un punto, O, dello spazio, involuppano il cono che proietta il contorno apparente di  $f$ , relativo ad O: quando  $f$  acquista la curva nodale C, dal suddetto cono si stacca come parte doppia il cono O(C). Pertanto conviene esaminare a cosa si riduce l'involuppo di una curva piana  $k=0$ , d'ordine  $2n+r$ , quando essa viene a spezzarsi in una  $c=0$ , d'ordine  $n$ , contata due volte, e in una parte residua, d'ordine  $r$ ,  $h=0$  <sup>(1)</sup>.

Supponiamo dapprima che la curva  $c$  non abbia singolarità e che incontri la curva  $h$  in  $nr$  punti distinti; allora se si considera la  $c^2h=0$  come limite di una curva  $k$  variabile in un fascio  $c^2h - \lambda l = 0$ , dove  $l=0$  è una curva generale d'ordine  $2n+r$ , l'involuppo limite di  $k$  si compone:

- α) dell'involuppo di  $h$ ;*
- β) dell'involuppo di  $c$ , contato due volte;*
- γ) dei  $(2n+r)n$  fasci aventi come centri i punti base P, comuni alla  $c$  ed alla  $l$ , ciascuno contato una volta;*
- δ) degli  $nr$  fasci aventi come centri i punti Q comuni alla  $c$  ed alla  $h$ , ciascuno contato tre volte.*

Le prime due asserzioni seguono subito ove si consideri il limite delle tangenti alla curva variabile  $k$  condotte parallelamente all'asse  $y$ , i cui punti di contatto sono dati dalle intersezioni di

$$k(xy) = c^2(xy) h(xy) + \lambda l(xy) = 0$$

<sup>(1)</sup> La considerazione di una curva che si riduce ad una retta multipla, con certi punti di diramazione, conservando così un involuppo determinato, s'incontra in Zeuthen, *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie*, § 29, dove tuttavia non si trova un'analisi del problema qui trattato.

con la polare

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 2ch \frac{\partial c}{\partial y} + c^2 \frac{\partial h}{\partial y} + \lambda \frac{\partial l}{\partial y} = 0.$$

Per riconoscere invece che una tangente (almeno) va a cadere in ciascuno dei  $(2n+r)n$  punti P comuni a  $c$  e  $l$ , basta osservare che sopra una retta  $p$ , passante per P, le curve del fascio  $c^2h + \lambda l = 0$  segano una  $g_{2n+r}^1$  che ha in P un punto fisso, il quale — per un noto teorema <sup>(1)</sup> — appare doppio oltre che per il gruppo  $\lambda = 0$ , anche per il gruppo infinitamente vicino. Segue che la retta  $p$  è limite di una tangente condotta alla  $k$  da uno qualunque dei suoi punti.

Resta ora da dimostrare che un punto Q, comune a  $c$  e  $h$ , è limite di tre intersezioni della curva  $k(xy) = 0$  con la sua polare  $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$ . A tale oggetto poniamo  $\lambda = z$  e consideriamo le due superficie

$$\varphi = c^2(xy) h(xy) + z l(xy) = 0$$

$$\psi = 2c(xy) h(xy) \frac{\partial c(xy)}{\partial y} + c^2(xy) \frac{\partial h(xy)}{\partial y} + z \frac{\partial l(xy)}{\partial y} = 0:$$

queste hanno a comune oltre la curva piana  $c$ , una curva residua  $\gamma$ , passante per Q. Le intersezioni di  $k$  e della sua polare che — per  $\lambda = 0$  — tendono a Q sono tante quante le intersezioni del piano  $z = \lambda$  e della curva  $c + \gamma$  che tendono al punto Q; ma le intersezioni di  $c$  col piano  $z = \lambda$  restano fisse nei punti all'infinito di  $c$ , sicchè restano a considerarsi solo le intersezioni di  $\gamma$ . Ora la curva  $\gamma$ , appartenendo alla superficie  $\varphi$  passante semplicemente per Q e segata dal piano  $z = 0$  secondo una curva dotata del punto triplo Q, ha tre intersezioni (almeno) riunite in Q col piano  $z = 0$ .

Si esclude poi che per un punto P venga a passare più di una tangente, e così pure più di tre per un punto Q, osservando che la classe di  $k$  vale:

$$(2n+r)(2n+r-1) = 2n(n-1) + r(r-1) + (2n+r)n + 3rn.$$

Ciò che si è detto si estende in generale, in qualunque modo varî la  $k$ , e qualunque siano le particolarizzazioni di  $c$ ,  $h$ ; basta osservare che se  $k$  tende a  $c^2h$  in una serie continua  $\Sigma$ , semplicemente infinita, l'involuppo limite di  $k$  non varia sostituendo a  $\Sigma$  il fascio determinato dalla  $c^2h$  e dalla  $k$  infinitamente vicina; inoltre all'involuppo di  $c$  e  $h$  vanno sommati i fasci corrispondenti ai loro punti multipli, e dall'involuppo limite vanno tolti invece i fasci relativi ai punti singolari della curva  $k$ .

<sup>(1)</sup> Cfr. Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. I, libro 2<sup>o</sup>, § 5, pp. 179-180.

3. Veniamo ora all'esame dell'inviluppo,  $F_c$ , di una superficie  $f_c$  dotata di una curva doppia  $C$  (che supporremo essere priva di singolarità e presentare soltanto punti cuspidali ordinari per la  $f_c$ ); considereremo  $f_c$  come limite di una superficie  $f$ , dello stesso ordine  $m$ , del resto generale. Si fissi nello spazio un punto  $O$ : il contorno apparente di  $f$ , vista da  $O$ , sarà una curva  $K$  (segata su  $f$  dalla polare del punto  $O$ ) d'ordine  $m(m-1)$ , la cui proiezione, fatta da  $O$  è una curva,  $k$ , dotata di

$$\frac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3)$$

nodi e di

$$m(m-1)(m-2)$$

cuspidi, corrispondenti alle bitangenti e alle tangenti principali che escono da  $O$  <sup>(1)</sup>. Se  $n$  è l'ordine di  $C$ , il contorno apparente di  $f_c$  sarà composto della curva  $C$ , contata due volte, e di una curva residua,  $H$ , d'ordine  $m(m-1) - 2n$ ; sicchè, quando  $f$  tende a  $f_c$ , la curva  $k$  si riduce a una curva  $c$ , proiezione di  $C$ , contata due volte, più una curva  $h$ , proiezione di  $H$ . Pertanto, in base a ciò che si è veduto al n. 2, possiamo dire che *quando  $f$  tende a  $f_c$ , il suo inviluppo  $F$  si riduce al limite all'inviluppo proprio di  $f_c$ , più l'insieme dei piani tangenti a  $C$ , contato due volte, più un certo numero di stelle coi centri su  $C$* : un esame più minuto occorre per riconoscere quali di queste stelle siano indipendenti dal modo con cui  $f$  tende a  $f_c$ , figurando così nel fattore determinato di  $F_c$ , e quale ne sia la relativa molteplicità.

A tale oggetto si faccia tendere  $f$  ad  $f_c$  entro un fascio  $f_c + \lambda f_0 = 0$ ,  $f_0 = 0$  essendo una generica superficie d'ordine  $m$ . Ora, se un punto  $A$  di  $C$  è centro di una delle stelle che fan parte dell'inviluppo limite di  $f$ , la sua proiezione  $A'$ , che — essendo  $O$  generico — possiamo supporre essere un punto semplice della  $c$ , dovrà cadere in un punto  $P$  comune a  $c$  e alla  $k$  (proiezione del contorno apparente della  $f_c + d\lambda f_0 = 0$ ) infinitamente vicina alla  $c^2h$ , oppure dovrà coincidere con un punto  $Q$ , intersezione di  $c$  e  $h$ . Nella prima ipotesi si osserverà che la retta  $OA = OP$  risulta tangente (impropriamente) alla  $f_c$  e alla superficie infinitamente vicina  $f_c + d\lambda f_0 = 0$ , sicchè la radice  $\lambda = 0$  risulta doppia per l'equazione in  $\lambda$  che serve a determinare i gruppi dotati di punto doppio entro la  $g_m^1$  segata sulla  $OA$  dalle superficie del fascio. Poichè la  $f_c$  sega la retta  $OA$  secondo un gruppo di  $m$  punti di cui due soli coincidono in  $A$ , gli altri restando fra loro distinti, si deduce <sup>(2)</sup> che il punto  $A$  è un punto fisso per la  $g_m^1$  suddetta, appartenendo così alla superficie  $f_0$ .

<sup>(1)</sup> Formule di Salmon. Cfr. per es. Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, parte II, n. 67.

<sup>(2)</sup> Cfr. Enriques-Chisini, op. cit. ibidem.

Pertanto le stelle  $A$ , appartenenti al fattore determinato di  $F_c$ , hanno il centro in punti la cui proiezione  $A'$  risulta un punto comune a  $c$  e  $h$ , e quindi — essendo  $O$  generico — un tale punto  $A$  è un punto comune a  $C$  e a tutte le  $\infty^3$  curve  $H$  (segate su  $f_c$  dalle sue polari): segue che dette stelle hanno il centro nei punti cuspidali di  $C$ .

Per riconoscere poi che una stella  $A$ , col centro in un punto cuspidale di  $C$ , figura esattamente tre volte nel fattore determinato di  $F_c$ , basterà dimostrare che la proiezione di un tal punto è un punto  $A' = Q$  comune a  $c$  e  $h$ , che non è limite di un punto doppio di  $k$ , e che in esso non cade alcun punto  $P$  base per il fascio determinato dalla  $c^2h$  e da una  $k$  a questa infinitamente vicina. La prima affermazione segue dal fatto che la retta  $OA$  non è bitangente nè tangente principale alla  $f_c$ ; la seconda invece si deduce osservando che — in base al ragionamento svolto poco sopra — se in  $A'$  cadesse un punto  $P$ , il punto  $A$  sarebbe un punto appartenente alla curva base di un fascio  $f_c + \lambda f_o = 0$  in cui si supponga variare la  $f$ .

E così l'enunciato del n. 1 è completamente stabilito, potendosi sempre considerare la  $f_c$  come limite di una superficie variabile in un fascio.

4. Ove si vogliano applicare le considerazioni precedenti alla determinazione della classe e del numero dei punti cuspidali di una superficie  $f_c = 0$ , dotata di una curva doppia  $C$ , occorre anzitutto riconoscere con precisione ove cadano i punti base comuni alla  $c^2h$  e alla  $k$  a questa infinitamente vicina. A tale scopo si supponga la  $f$  variabile entro il fascio  $f_c + \lambda f_o = 0$ , e si consideri il fascio di curve determinato dalla  $k$  relativa a una  $f$  generica e da quella relativa alla  $f$  infinitamente vicina: questo fascio di curve ha  $[m(m-1)]^2$  punti base dei quali

$$2 \left[ \frac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3) \right]$$

cadono nei punti doppi di  $k$ ,  $3[m(m-1)(m-2)]$  nelle cuspidi di  $k$ , e infine  $m^2(m-1)$  nei punti proiezione dei punti comuni al contorno apparente di  $f$  e alla curva base del fascio di superficie  $f_c + \lambda f_o = 0$ .

Le affermazioni precedenti seguono dal fatto (la cui scoperta si può far risalire a De Jonquières) che due curve infinitamente vicine, dotate di nodi e cuspidi, hanno due intersezioni riunite in ogni nodo e tre in ogni cuspidale (1), e dalla osservazione svolta innanzi che una tangente alla superficie  $f$  in un punto della linea base del fascio è tangente anche alla  $f$  infinitamente vicina.

Ciò posto sulla curva  $c$  si distingueranno quattro specie di punti particolari:

$\alpha$ ) I punti  $A'$ , proiezioni dei punti cuspidali della curva  $C$ : in  $A'$  la  $c$  e la  $h$  si tagliano senza oscularsi, e — come si è già osservato — non si ha sovrapposizione di alcun punto  $P$ .

(1) Ofr. per es. Enriques-Chisini, op. cit., vol. I, pag. 328.

$\beta$ ) I punti  $B'$ , proiezioni dei punti B comuni alla curva C e alla curva H ulteriore intersezione di  $f_c$  con la polare di O (si escludono i punti A). La retta OB avendo in B un contatto tripunto con la superficie  $f_c$ , B è un punto comune a C e alla seconda polare di  $f$ , la quale ha ivi tre intersezioni con la curva  $2C + H$ , contorno apparente di  $f_c$ : pertanto i punti  $B'$  sono in numero di  $n(m-2)$  e ciascuno di essi è limite di 3 cuspidi della curva variabile  $k$ ; inoltre in  $B'$  la  $c$  e la  $h$  sono fra loro tangenti (essendo il piano per O tangente alla H in B propriamente tangente alla  $f_c$ ). In un punto  $B'$  confluiscono due punti Q (ciascuno dei quali abbiamo visto assorbire tre fasci dell'involuppo limite di una curva che tenda a  $c^2h$ ); essendo  $B'$  limite di 3 cuspidi di  $k$  (e quindi al limite centro di 9 fasci, almeno) in esso devono cadere almeno 3 punti P. Si riconosce che cadono esattamente 3 punti P osservando che la  $c^2h$  ha proprio 9 intersezioni in  $B'$  con la  $k$  infinitamente vicina, e che questa non può avere 4 intersezioni con  $c$  senza averne 2 con  $h$ .

$\gamma$ ) I punti  $I'$ , che sono i punti comuni a  $c$  e  $h$  diversi dagli  $A'$  e  $B'$ : essi sono le traccie delle rette per O incidenti a C e tangenti (propriamente) altrove alla  $f_c$ . Così appare che un punto  $I'$  è limite di due punti doppi della  $k$ , e — tenuto conto che  $I'$  è un punto Q — si riconosce, come sopra, che in  $I'$  cade uno e uno solo dei punti P.

$\delta$ ) I punti  $A'$ , doppi per la  $c$ . Ed è chiaro come ciascuno di questi sia limite di 4 punti doppi della  $k$  e assorba 4 punti P.

Poichè nessun altro punto di  $c$  può esser limite di un nodo e di una cuspidi della curva variabile  $k$ , gli altri punti P, diversi dai punti  $A'$ ,  $B'$ ,  $I'$ ,  $A'$ , sono gli  $mn$  punti proiezione delle intersezioni di C con la  $f_0$ . Si deduce che i punti  $I'$  sono in numero di

$$x = nm(m-1) - nm - 3n(m-2) - 4d,$$

essendo  $d$  il numero dei punti doppi apparenti della curva C.

Conosciuto così il numero dei punti doppi della curva  $k$  che cadono sulla  $c$  ( $2x + 4d$ ) e quello ( $3n(m-2)$ ) delle cuspidi, si valuta immediatamente la classe della curva residua  $h$ , cioè la classe di  $f_c$ , che trovasi essere espressa dalla formula

$$m(m-1)^2 - [n(7m-4n-8) + 8d];$$

similmente — in base ai numeri sopra determinati — si calcola il numero dei punti  $A'$ , e quindi quello dei punti cuspidali di C, che è

$$y = n[m(m-1) - 2n] - 2n(m-2) - x = 2n(m-n-1) + 4d.$$



Geodesia. — *La base geodetica di Vallona.* — Nota del prof. LUIGI CARNERA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Nei giorni 17, 20, 21, 22 e 23 aprile ultimi decorsi è stata misurata dal personale della R. Marina nella pianura del fiume Ducati, presso allo sbocco nella baia di Vallona, una base geodetica di 3458.7 metri, destinata a servire di fondamento alla triangolazione progettata per il rilievo cartografico dell'Albania, ed a venir collegata con la rete italiana nei pressi di Lecce. Riservando a speciale pubblicazione, che apparirà appena sia possibile negli Annali del R. Istituto Idrografico di Genova, la dettagliata relazione delle operazioni, ritengo non privo di interesse dare fin d'ora un cenno sommario dei lavori, e comunicare i risultati ottenuti dai primi calcoli.

Sembrami però anzitutto doveroso accennare qui che l'iniziativa di tali lavori è merito dell'ammiraglio Enrico Millo. Egli, coadiuvato dal tenente di vascello A. Zunino, volle si pensasse non solo a fare opera provvisoria, quale poteva esser richiesta dalle esigenze dell'attuale momento, ma si procedesse addirittura coi criteri della maggior precisione, onde provvedere anche ai bisogni futuri, accogliendo in ciò le vedute del direttore dell'Istituto Idrografico comm. Domenico Marchini. Questi poi apprezzando l'importanza dell'opera, volle aiutarla mettendo a disposizione della squadra non solo gli strumenti, ma inviando anche lo scrivente per dirigere quella parte dei lavori che richiedono speciale importanza, fra i quali appunto la misura della base.

La linea della base geodetica corre per un buon tratto quasi parallela alla strada che da Vallona si dirige verso la località di Ducati, e svolgendosi su di un terreno piano, attraversa il fiume stesso, e giunge alle prime colline ove sembra chiudersi la parte più orientale della vasta conca. Le catene di monti che corrono ai due lati della linea di base, quasi parallele, offrono ottimi punti di stazione per il rapido e razionale sviluppo della triangolazione. Misurato preventivamente il terreno con una cinta metrica da cento metri, nei punti fissati a distanza opportuna quali estremi di base, si costruirono, in apposite fosse, due monoliti in pietra e cemento, aventi una base quadratica di metri 1,50 di lato, e di un metro di altezza, in modo che il piano superiore risultasse circa 50 cm. al di sotto del livello del suolo. Nel centro della faccia superiore vennero murati i segnali individuanti i vari e propri estremi della base, costituiti da una scatola cilindrica di bronzo recante sul suo fondo un disco di agata. L'estremo è segnato dal centro di una croce incisa sull'agata stessa, nel quale si erge un sottile cilindretto di argento, di circa un centimetro di altezza. L'intervallo compreso fra questi due estremi venne diviso in sei sezioni di lunghezza

press'a poco eguale, in modo da riuscire misurabili con 24 successivi riporti dei fili di acciaio « invar » aventi una lunghezza di 24 metri. A segnare i termini di queste lunghezze vennero costruiti dei blocchi di calcestruzzo di forma pressochè cubica di 50 cm. di lato in modo che la faccia superiore risultasse a fior di terra, e nel centro loro venne murato un picchetto di legno duro, recante nella parte superiore una vite, dotata di un forellino verticale, atto a reggere una sottile punta metallica di un centimetro circa di altezza. Il forellino venne fatto in modo che la punta avesse a risultare esattamente nel piano verticale passante per gli estremi di base. Ognuna delle sezioni venne poi divisa alla sua volta in due parti eguali mediante piccoli, ma robusti banchetti di legno, destinati a reggere i teodoliti di allineamento.

Analoghi banchetti di legno vennero costruiti preventivamente ai lati della base in corrispondenza degli estremi di base e di sezione, per riferire mediante teodoliti laterali i punti mobili di riferimento ai punti a terra. Durante i lavori preparatori venne segnata su ogni banchetto l'esatta posizione in cui avrebbe dovuto trovarsi l'asse di rotazione verticale del teodolite per essere nel piano di allineamento della base, o nel piano ad essa normale a seconda che si trattava dei banchetti di allineamento o di quelli laterali. Così si rese facile e spedito il lavoro durante le operazioni di misura.

Il procedimento seguito nelle operazioni fu il seguente. Disposto un teodolite su di un banco di allineamento, e rettificato in modo da far segnare al filo centrale del reticolo il piano della base si disponevano i treppiedi portanti i punti mobili di riferimento in modo che questi fossero esattamente nel piano del filo. Si procedeva poi, mediante apposito livello a cannocchiale, alla determinazione dei dislivelli fra i successivi punti mobili di riferimento: indi servendosi successivamente di quattro fili, tenuti sospesi sugli appositi picchetti tensori, si misurava la distanza compresa fra i punti mobili, e finita la misura del segmento, se uno dei punti mobili si trovava al di sopra dei punti individuanti sul terreno gli estremi di sezione, con osservazioni angolari fatte mediante i teodoliti laterali si riferivano ai punti a terra le misure fatte sui punti mobili.

Non è qui il caso di accennare ai dettagli di queste singole operazioni, chè troppo sarebbe lunga la descrizione, mentre sommariamente la si trova già in relazioni di analoghi lavori fatti in altri paesi.

Dirò unicamente che le singole operazioni venivano eseguite da personale distinto, che attendendo sempre alle stesse cose assicurava grande rapidità di esecuzione, e precisione di risultati. All'allineamento dei treppiedi attesero il sottotenente di vascello Mezzadra, ed il tenente del genio ing. Ippolito, unitamente al disegnatore dell'Istituto Idrografico O. Nasi. Il dislivello dei punti di riferimento venne determinato dal guardiamarina

di complemento S. Mereghini; le misure con i fili furono fatte dai tenenti di vascello Fr. Toscano e Br. Brivonesi, mentre le osservazioni per le riduzioni ai punti a terra vennero fatte dai tenenti del genio ing. Meloni ed ing. Alimento.

I fili di acciaio " invar " usati in queste operazioni furono quelli forniti anni or sono (nel 1913) dalla ditta J. Carpentier di Parigi portanti i numeri 412, 436, 437 e 451, di cui preventivamente era stata fatta una campionatura all'Ufficio internazionale di pesi e misure di Parigi. Essendosi usati però questi fili in molte occasioni, fra cui anche per misure speditive in Affrica, non sarebbe stato prudente considerare ancor validi i valori allora trovati, e si preferì, come è costante abitudine dell'Istituto Idrografico, eseguire una speciale campionatura preventiva sulle basi sperimentali di Marola (Spezia) e Genova, per assicurarsi, con le misure di controllo da eseguire a lavoro finito nelle stesse località, anche contro le eventuali e sempre temibili variazioni. Partendo dai valori delle lunghezze risultanti per i singoli fili da quelle campionature, si ottennero i seguenti valori per le lunghezze delle sezioni:

**Misura di andata:**

	Filo 412	Filo 436	Filo 437	Filo 451
	metri	metri	metri	metri
Sezione I	576.35824	576.35537	576.35488	576.35574
id. II	576.33242	576.33147	576.33218	576.33173
id. III	576.28156	576.28261	576.28069	576.27985
id. IV	576.24532	576.24465	576.24582	576.24584
id. V	576.70125	576.70094	576.70199	576.70180
id. VI	576.82706	576.82658	576.82825	576.82854

**Misura di ritorno:**

Sezione VI	576.82765	576.82805	576.83113	576.82655
id. V	576.70322	576.70357	576.70386	576.70369
id. IV	576.24820	576.24917	576.24948	576.25108
id. III	576.28590	576.28593	576.28477	576.28484
id. II	576.32718	576.32710	576.32651	576.32700
id. I	576.35467	576.35419	576.35523	576.35566

Da queste si ricavano per l'intera base i seguenti valori:

	Andata:	Ritorno:	A.-R.
	metri	metr	
Filo 412	3458.74585	3458.74682	— 0.97 millimetri
436	.74162	.74801	— 6.39 id.
437	.74381	.75098	— 7.17 id.
451	.74350	.74882	— 5.32 id.
MEDIA	3458.74370	3458.74866	— 4.96 id.

Considerando le lunghezze ottenute coi singoli fili, come valori indipendenti della lunghezza della base, e gli scarti del valore medio quali errori accidentali di misura, mentre in realtà contengono ancora quello sistematico della non esatta campionatura dei fili, si ottiene quale lunghezza definitiva della base il valore: metri 3458.74618, con un errore medio di  $\pm 1.09$  millimetri, che mentre è ancor lontano dal vero e proprio errore medio assoluto, perchè in esso non si è tenuto conto del grado di incertezza di cui è affetta la lunghezza accolta per i singoli fili, dà però un criterio sufficiente per giudicare della precisione, con cui vennero eseguite le misure sul terreno, e che è conseguibile con tali metodi. Paragonando questo valore con quelli analogamente ottenuti sia in Italia, che all'estero, facendo uso dei diversi tipi di strumenti (Bessel, Brunner, Ibañez, Repsold-Comstock, ecc.) si può asserire che solo in pochi e rari casi si è ottenuto valori così bassi per l'error medio accidentale di misura (Ivice:  $\pm 0.32$  mill. per chilometro di base misurata; Makon:  $\pm 0.43$  mill.; Madridejos:  $\pm 0.40$  mill.; Strehlen:  $\pm 0.76$  mill.; Catania  $\pm 0.85$  e  $\pm 0.47$  ecc.). Nel tempo stesso poi, essendo stata fatta la misura di andata e ritorno in sole 33 ore di lavoro effettivo di misura, risulta che la velocità media è stata di circa 210 metri all'ora, superata solo in occasione della base di Meppen, mentre si ebbero velocità di soli 86 metri in quella di Grossenhain, di 125 e 187 in quelle di Königsberg e Gottinga, di 40 in quella di Strehlen, di 120 in quelle di Mahon ed Ivice, di 70 in quelle americane del nord, e di 56 nelle più recenti francesi. Questi due fatti giustificano pienamente l'uso dei fili di acciaio "invar" anche nelle misure di basi geodetiche di precisione, essendo apparso evidente che pur di usare le precauzioni necessarie a tali generi di lavori, l'errore che può risultare per ciò che riguarda le misure non è di ordine di grandezza superiore a quello che si può avere con altri sistemi. La parte più debole del sistema rimane sempre nella sicurezza relativa che si può avere nella invariabilità assoluta della lunghezza dei fili: l'aver usato però contemporaneamente quattro fili ritengo possa esser sufficiente a svelare va-

riazioni di tal genere: e lo studio accurato dei risultati offrirà campo nella relazione definitiva di chiarire questo punto.

Per ora si può asserire ad ogni modo, che per opera della Marina italiana è stata compiuta, anche in mezzo al fragore delle armi, una delle operazioni più delicate della geodesia operativa, conseguendo risultati che non sono per nulla inferiori ai lavori più precisi fatti sia da noi che presso le altre nazioni del mondo.

**Matematica.** — *Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1<sup>a</sup> specie tra spazi ad  $n$  dimensioni.* Nota di EUGENIO G. TOGLIATTI, presentata dal Socio C. SEGRE (1).

1. Una reciprocità tra un  $S_n$  ed un  $S'_n$ :

$$(1) \quad \sum a_{ij} x_i y_j = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

si dice *degenere di specie  $h+1$*  (e la chiameremo una  $S_n$ -reciprocità) quando il determinante  $|a_{ij}|$  è di rango  $n-h$ ; essa possiede allora, in  $S_n$  ed  $S'_n$  rispettivamente, un  $S_h$  ed un  $S'_h$  di punti singolari. Se  $a_{ij}$  sono forme lineari di parametri  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  e se  $|a_{ij}|$  è di rango  $n-h$  per valori generici di questi, la (1) rappresenta un sistema lineare di  $S_h$ -reciprocità, che diremo di specie  $h+1$ . Esso si dirà *completo* quando non esiste un sistema lineare della stessa specie e di dimensione maggiore che lo contenga.

Dei teoremi delle due Note citate riportiamo i seguenti:

*Per un fascio di  $S_h$ -reciprocità tra  $S_n$  ed  $S'_n$  esistono in  $S_n$  ed  $S'_n$  due spazi  $S_m, S'_m$ , tali che  $S_m(S'_m)$  contiene tutti gli  $S_h(S'_h)$  singolari ed ha, in tutte le reciprocità del fascio, lo stesso  $S'_{n-m+h}(S_{n-m+h})$  corrispondente passante per  $S'_m$  (per  $S_m$ ). Ed i luoghi degli spazi singolari (supposti variabili sì in  $S_n$  che in  $S'_n$ ) sono rispettivamente una  $U_{h+1}^{m-h}$  ed una  $V_{h+1}^{m'-h}$  appartenenti ad  $S_m$  ed  $S'_m$ .*

Ad es. per  $h=0$ , si ottengono, come luoghi dei punti singolari, delle curve razionali normali; per  $h=1$ , i luoghi delle rette singolari sono delle rigate razionali normali; ecc.

*I sistemi lineari completi di reciprocità degeneri tra due piani  $\pi, \pi'$  sono i seguenti: 1°) sistema  $\infty^2$ , di 2<sup>a</sup> specie, delle reciprocità che hanno in  $\pi$  (o  $\pi'$ ) una data retta singolare; 2°) sistema  $\infty^5$ , di 1<sup>a</sup> specie, delle reciprocità che hanno in  $\pi$  (o  $\pi'$ ) un dato punto singolare; 3°) sistema  $\infty^4$ , di 1<sup>a</sup> specie, delle reciprocità in cui si corrispondono due rette, date rispettivamente in  $\pi, \pi'$ ; 4°) rete delle  $S_0$ -reciprocità definite dalle*

(1) Questa Nota si collega ad altre due, in corso di stampa negli Atti dell'Acc. di Torino, vol. 52 (1916-17): *Sui fasci di reciprocità degeneri tra spazi ad  $n$  dimensioni; Su alcune classi di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazi ad  $n$  dimensioni.*

$\infty^2$  proiettività tra fasci di rette che son contenute in un'omografia non degenerare tra  $\pi$  e  $\pi'$ .

Per un sistema lineare di  $S_n$ -reciprocità ha importanza il tipo del fascio generico in esso contenuto; se  $m, m'$  sono gli spazi d'immersione delle varietà costituite, in  $S_n$  ed  $S'_n$ , dagli spazi singolari delle reciprocità di quel fascio, indicheremo il sistema col simbolo  $(m, m')_h$ . Ci occuperemo in questa Nota delle reti  $(1, n-1)_0$ , supponendo  $n > 2$ .

2. Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tre reciprocità della rete (fra loro linearmente indipendenti), di punti singolari  $A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3$ ; che supporremo distinti e non allineati sì in  $S_n$  che in  $S'_n$  (<sup>1</sup>). Alla retta  $r_{ij} \equiv A_i A_j$  deve corrispondere, in  $\alpha_i$  ed  $\alpha_j$ , uno stesso iperpiano  $q'_{ij}$ , che passa per  $A'_i$  ed  $A'_j$ ; questi tre iperpiani, supposti in posizione generica, si segano a due a due in tre  $S'_{n-2}: \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , omologhi del piano  $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$  in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  rispettivamente, ed hanno in comune un  $S'_{n-3}, \pi'$  (situato su  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ ).

In  $S_n$ , il luogo dei punti singolari delle reciprocità della rete è il piano  $\sigma$ , che risulta anzi riferito omograficamente alle reciprocità della rete; perciò gli  $S'_{n-1}$  omologhi d'un punto generico  $P$  di  $\sigma$  nelle  $\infty^2$  reciprocità della rete formano solo un fascio, di asse un  $S'_{n-2}$  passante per  $\pi'$ . Questo sta sugli  $S'_{n-1}$  omologhi, in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  rispettivamente, delle rette  $PA_1, PA_2, PA_3$ , i quali, al variare di  $P$  in  $\sigma$ , descrivono, intorno a  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , fasci proiettivi ai fasci di rette (di  $\sigma$ ) di centri  $A_1, A_2, A_3$ ; e due di queste proiettività individuano tra i punti di  $\sigma$  e gli  $S'_{n-1}$  per  $\pi'$  un'omografia  $\omega$  che contiene anche la terza. Viceversa, se questo fatto si verifica, alle rette  $PA_i$  corrispondono, nelle tre proiettività anzidette, tre  $S'_{n-1}$  di un fascio, e perciò  $P$  è singolare per una reciprocità della rete  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ . Dunque: *Affinchè tre  $S_3$ -reciprocità generiche  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tra  $S_n, S'_n$ , di punti singolari  $A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3$ , determinino una rete  $(1, n-1)_0$ , è necessario e sufficiente che i fasci di iperpiani omologhi, in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  rispettivamente, dei tre fasci di rette  $A_1\sigma, A_2\sigma, A_3\sigma$  (con  $\sigma \equiv A_1 A_2 A_3$ ), corrispondano a quei fasci in tre proiettività contenute in una stessa omografia tra il piano  $\sigma$  ed una stella  $\infty^2$  di iperpiani.*

3. Il luogo dei punti singolari in  $S'_n$  è una superficie razionale  $F'$ , incontrata in un sol punto variabile dagli  $S'_{n-2}$  passanti per  $\pi'$ , e che perciò

(<sup>1</sup>) Non ci fermiamo su casi troppo particolari. Così, se  $A_1, A_2, A_3$  sono allineati, tutte le reciprocità della rete fanno corrispondere alla retta  $A_1 A_2 A_3$  uno stesso  $S'_{n-1}$  passante per  $A'_1, A'_2, A'_3$ ; allora, per  $n = 3$  il luogo dei punti singolari, in  $S'_3$ , delle  $S_0$ -reciprocità della rete è il piano omologo della retta  $A_1 A_2 A_3$ ; mentre per  $n > 3$  è la superficie (razionale), in generale di ordine  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ , che si ottiene trasformando (con  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) la stella degli  $S_{n-1}$  di  $S_n$  che passano per  $A_1, A_2$  nelle stelle di rette di  $S'_{n-1}$  di centri  $A'_1, A'_2, A'_3$ , e considerando il luogo dei punti per cui passano tre piani omologhi di queste stelle: a uno di tali punti corrispondono infatti tre  $S_{n-1}$  di  $S_n$  formanti fascio, e viceversa.

si può proiettare biunivocamente da  $\pi'$  sul piano  $A'_1 A'_2 A'_3$ , ad es. Un  $S'_{n-1}$  generico per  $\pi'$  corrisponde in  $\omega$  ad una retta di  $\sigma$ , quindi sega  $F'$  in una  $C'^{n-1}$  (luogo dei punti singolari, in  $S'_n$ , delle reciprocità di un fascio contenuto nella rete), ed in una curva fissa  $c'$ , giacente in  $\pi'$ , che ora determineremo <sup>(1)</sup>.

Osserviamo perciò che gli  $\infty^{n-3}$  iperpiani di  $S_n$  passanti per  $\sigma$  sono mutati da  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  nelle rette delle stelle di centri  $A'_1, A'_2, A'_3$  e sostegni rispettivamente  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , le quali segano su  $\pi'$  tre  $S'_{n-3}$  omografici sovrapposti; se esiste in  $\pi'$  un punto  $A'$  (di  $F'$ ) singolare per una reciprocità della rete, i suoi tre  $S_{n-3}$  omologhi in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  formano fascio intorno ad un  $S_{n-2}$  passante per  $\sigma$ , al quale corrispondono in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tre piani per  $A'_1, A'_2, A'_3$ , seganti  $\pi'$  in rette (omologhe nelle omografie anzidette e) passanti per  $A'$ ; e viceversa. Dunque  $c'$  è luogo dei punti per cui passano tre rette omologhe di tre  $S'_{n-3}$  omografici sovrapposti. Per determinarne l'ordine, scriviamo le equazioni di tre  $S'_{n-4}$  corrispondenti dei tre spazî omografici:

$$(2) \quad \sum u'_i y_i = 0, \quad \sum u''_i y_i = 0, \quad \sum u'''_i y_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-3);$$

si rappresenterà l'omografia dando  $u'_i, u''_i, u'''_i$  come forme lineari di  $n-2$  parametri  $t_0, t_1, \dots, t_{n-3}$ . per modo che le (2) divengono lineari nei parametri, coi coefficienti forme lineari delle  $y_i$ . Sostituendo alle  $y_i$  le coordinate di un punto di  $c'$ , per il quale passino le rette omologhe  $r', r'', r'''$ . le equazioni stesse devono essere verificate da  $n-4$  sistemi di valori delle  $t_i$  fra loro linearmente indipendenti (perchè per  $r'$  passano  $\infty^{n-5}$  iperpiani i cui omologhi passano essi pure per il punto  $y_i$ ); e viceversa. Dunque le  $y_i$  annullano tutti i determinanti di 3° ordine della matrice (di 3 linee ed  $n-2$  colonne) dei coefficienti di  $t_0, t_1, \dots, t_{n-3}$ ; ossia  $c'$  è, in generale, di ordine  $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$  <sup>(2)</sup>; ed  $F'$  quindi di ordine

$$(n-1) + \frac{1}{2}(n-2)(n-3) = \frac{1}{2}n(n-3) + 2 \quad (3).$$

<sup>(1)</sup> Nel ragionamento che segue si supponga  $n > 4$ . Per  $n = 3$ , lo spazio  $\pi'$  si riduce ad un punto, che sta su  $F'$ , perchè ha per omologo il piano  $\sigma$  in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (anzi, esso sarà singolare per  $\infty^1$  reciprocità della rete, formanti un fascio, contenente due  $S_1$ -reciprocità). Per  $n = 4$ ,  $\pi'$  è una retta che sta su  $F'$ , perchè ad ogni suo punto corrispondono in  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tre  $S_3$  passanti per  $\sigma$ , quindi formanti fascio.

<sup>(2)</sup> Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Lincei, (5) 9<sub>s</sub> (1900), pp. 253-260, n. 3. Si veda pure: Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, § 112; Lorenzola, *Sul luogo di un punto base comune a  $k+1$  sistemi lineari di forme di dimensione  $h+1$  corrispondenti in altrettanti sistemi lineari omografici di specie  $k+h+1$* , Rend. Ist. Lomb., (2) 36 (1903), pp. 162-176.

<sup>(3)</sup> Da qui in poi si includano di nuovo i valori 3, 4 di  $n$ , per i quali  $c'$  diviene rispettivamente un punto od una retta.

La curva  $C'^{n-1}$  luogo dei punti singolari, in  $S'_n$ , delle reciprocità del fascio  $\alpha_1, \alpha_2$  (che è generico entro la rete) si appoggia a  $c'$  in  $n - 2$  punti, perchè gli spazî  $\sigma'_1, \sigma'_2$  si corrispondono nella proiettività fra le stelle  $A'_1, A'_2$  che genera  $C'^{n-1}$ ; perciò proiettando  $F'$  da  $\pi'$  su un piano generico, le  $\infty^2 C'^{n-1}$  di  $F'$  date dagli  $\infty^2$  fasci della rete (le quali formano su  $F'$  una rete omaloidica), si proiettano nelle rette del piano, e le sezioni iperpiane di  $F'$  in curve di ordine  $n - 1$ , incontrantisi a due a due in  $\frac{1}{2}n(n-3) + 2$  punti variabili. La curva  $c'$ , che forma una sezione iperpiana di  $F'$  insieme con una qualunque di quelle  $C'^{n-1}$ , ha per immagine una curva di ordine  $n - 2$ ,  $\gamma$ , segante le immagini delle sezioni iperpiane in  $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$  punti variabili ed in  $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$  punti fissi. Sono questi ultimi i punti base del sistema lineare L rappresentativo di  $F'$ ; ognuno di essi è immagine d'una retta di  $F'$ , parte di  $(\infty^1) C'^{n-1}$  della rete omaloidica, perciò singolare per una  $S_1$ -reciprocità contenuta nella rete (la cui retta singolare in  $S_n$  è incidente al piano  $\sigma$ ).

Gli  $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$  punti base del sistema L possono, in casi speciali (dipendenti da particolarità della curva  $c'$ ), non essere distinti; possono anche 3 o più di essi venir sostituiti da un punto base multiplo di L, ed allora l'ordine di  $F'$  si abbassa; però  $F'$  è sempre normale, se no la curva  $c'$  farebbe parte d'un sistema infinito di curve, ognuna delle quali starebbe in un iperpiano con ciascuna delle  $\infty^2 C'^{n-1}$  della rete omaloidica.

4. Viceversa, si prendano in un piano dei punti  $P_1, P_2, \dots, P_j$  (distinti o no), e si assegnino per ciascuno delle molteplicità  $s_1, s_2, \dots, s_j$ , in modo che sia:

$$\sum \frac{1}{2} s_i (s_i + 1) = \frac{1}{2} (n - 2) (n + 1),$$

e che esista una curva di ordine  $n - 2$ ,  $\gamma$ , passante per essi con le date molteplicità. Il gruppo base considerato rappresenterà  $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$  condizioni lineari indipendenti anche per curve di ordine  $> n - 2$ ; quindi definirà un sistema lineare (*regolare*) di curve di ordine  $n - 1$ , di dimensione:  $\frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \frac{1}{2}(n-2)(n+1) = n$ , e di grado:  $(n-1)^2 - \sum s_i^2$ ; immagine di una superficie razionale normale  $F'$  di un  $S'_n$ . Su questa esiste una curva di ordine  $(n-1)(n-2) - \sum s_i^2$ , di immagine  $\gamma$ , appartenente ad un  $S'_{n-3}, \pi'$ , e gli iperpiani per  $\pi'$  segano su  $F'$   $\infty^2 C'^{n-1}$  d'una rete omaloidica, ognuna delle quali ha  $n - 2$  punti su  $\pi'$ . Costruiremo tra  $S'_n$  ed un  $S_n$  una rete di  $S_0$ -reciprocità i cui punti singolari in  $S'_n$  abbiano per luogo  $F'$ .

Perciò consideriamo le  $\infty^{3n-1}$  quadriche di  $S'_n$  passanti per  $\pi'$ ; quelle di esse che contengono due  $C'^{n-1}$  generiche della rete omaloidica esistente su  $F'$  ed un punto generico ulteriore di  $F'$  sono sottoposte a  $2n + 2$  condizioni lineari indipendenti, per modo che le quadriche contenenti  $\pi'$  ed  $F'$  sono *al più*  $\infty^{n-3}$ . D'altra parte, le quadriche per  $\pi'$  segano su  $F'$ , fuori



di  $c'$ , un sistema lineare la cui immagine sul piano sta nel sistema  $\infty^{2n+1}$  di  $C^n$  definito dal gruppo dei punti  $P_i$ ; perciò le quadriche contenenti  $\pi'$  ed  $F'$  sono *almeno*  $\infty^{n-3}$ . Si conclude che  $F'$  sta su  $n-2$  quadriche, linearmente indipendenti, che passano per  $\pi'$ .

Assunto  $\pi'$  come spazio fondamentale  $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ , le coordinate dei punti di  $F'$  verificheranno perciò le equazioni:

$$y_0 L_r + y_1 M_r + y_2 N_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-2),$$

ove:

$$L_r \equiv \sum L_{ri} y_i, \quad M_r \equiv \sum M_{ri} y_i, \quad N_r \equiv \sum N_{ri} y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Ora, tali equazioni provengono dall'eliminazione di  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  tra le seguenti:

$$\begin{aligned} \lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0, \quad \lambda_0 y_2 - \lambda_2 y_0 = 0, \quad \lambda_1 y_0 - \lambda_0 y_1 = 0, \\ \lambda_0 L_r + \lambda_1 M_r + \lambda_2 N_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-2). \end{aligned}$$

E ciò prova che  $F'$  è luogo dei punti singolari, in  $S'_n$ , per le reciprocità della rete il cui determinante è:

0	$\lambda_2$	$-\lambda_1$	0	.	0
$-\lambda_2$	0	$\lambda_0$	0	.	0
$\lambda_1$	$-\lambda_0$	0	0	.	0
$\lambda_0 L_{1,0} + \lambda_1 M_{1,0} + \lambda_2 N_{1,0}$	.	.	.	.	$\lambda_0 L_{1,n} + \lambda_1 M_{1,n} + \lambda_2 N_{1,n}$
.	.	.	.	.	.
$\lambda_0 L_{n-2,0} + \lambda_1 M_{n-2,0} + \lambda_2 N_{n-2,0}$	.	.	.	.	$\lambda_0 L_{n-2,n} + \lambda_1 M_{n-2,n} + \lambda_2 N_{n-2,n}$

Concludendo: *Il luogo dei punti singolari di una rete generale  $(1, n-1)_0$  è in  $S_n$  un piano  $\sigma$ , ed in  $S'_n$  una superficie razionale normale  $F'$  di ordine  $\frac{1}{2}n(n-3) + 2$ , rappresentata sul piano dal sistema lineare di tutte le curve d'ordine  $n-1$  che passano per  $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$  punti generici. La rete contiene  $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$   $S_1$ -reciprocità, le cui rette singolari in  $S'_n$  stanno su  $F'$  ed in  $S_n$  sono incidenti a  $\sigma$ .*

Ad es., in  $S_3$ , come superficie  $F'$  si ottiene una quadrica; in  $S_4$  una  $F^4$  intersezione di due quadriche, oppure una rigata cubica normale; ecc.

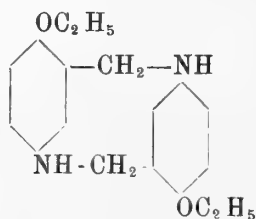
**Astrofisica.** — *Il Sole emette radiazioni di altissima frequenza.* Nota di MENTORE MAGGINI, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Gruppi di basi ottenute da amine aromatiche e formaldeide.* Nota di ROBERTO LEPETIT e CARLO MAIMERI, presentata dal Socio A. ANGELI.

In una Nota precedente uno di noi ha menzionato <sup>(1)</sup> la trasformazione profonda che subisce una soluzione di nevralteina (para-etossifenilamido-metan-solfonato di sodio) per ebollizione prolungata con l'aggiunta di acido cloridrico e la formazione fra altri corpi di una base dal P. F. 140° i cui sali sono dotati di proprietà anestetiche ed alla quale venne assegnata la formola  $C_{18}H_{20}N_2O_2$ .

Indagando la letteratura abbiamo trovato menzionata da G. Goldschmidt <sup>(2)</sup> la formazione di una base fondente a 140° C. il cui salicilato ha proprietà anestetiche, base che si ottiene facendo reagire un eccesso di formaldeide su una soluzione fortemente acida di cloridrato di p-fenetidina e ci venne il dubbio che tale base potesse essere identica a quella sopra-mentzionata. Il Goldschmidt le attribuisce la formola  $C_{18}H_{22}N_2O_2$  e propone la formola di costituzione



e spiega la formazione della base per l'azione di due molecole di formaldeide su due molecole di fenetidina con l'eliminazione di due molecole di acqua, ammettendo la formazione intermediaria di un alcool per addizione di una molecola di formalina ad una di fenetidina.

Facendo reagire, analogamente alla fenetidina, della p.anisidina con formaldeide in soluzione cloridrica, Goldschmidt ottenne due sostanze di carattere basico fondenti a 122° l'una, a 170° l'altra di cui afferma che siano isomere e attribuisce loro la formola  $C_{16}H_{20}O_2N_2$ .

Si trova inoltre nella letteratura menzionata, in un lavoro del Tröger <sup>(3)</sup>, una sostanza di carattere basico a cui viene dall'autore attribuita la for-

<sup>(1)</sup> Atti R. Acc. Lincei, vol. XXVI, 1° sem., fasc. 3° (1897).

<sup>(2)</sup> Chemiker Zeitung, 27, pag. 395 (1917).

<sup>(3)</sup> Journ. für prakt. Chemie 36, pag. 225, anno 1887.

omola  $C_{17}H_{18}N_2$  fondente a  $131^\circ C.$  ottenuta riscaldando p.toluidina con metilale e acido cloridrico.

Finalmente è descritta dall'Erdmann (1) la formazione di una base cristallina fondente a  $188^\circ C.$ , base di cui non è data l'analisi e che l'autore ottiene per azione della formaldeide pure in soluzione fortemente cloridrica sulla p.cloranolina.

Siccome avevamo ottenuto fra i prodotti di decomposizione della nevralteina con acidi una base anestetica dal P. F.  $140^\circ$  e da un analogo trattamento dell'acido p.metossifenilamidometansolfonico (che chiameremo nevralteina della p.anisidina) una base dal P. F.  $122^\circ C.$ , nonchè fra i prodotti di decomposizione dell'acido tolilamidometansolfonico (nevralteina della p.toluidina) una base dal P. F.  $137^\circ C.$ , era interessante di indagare se i prodotti summenzionati erano o no identici a quelli di punto di fusione eguale ottenuti direttamente dai vari autori citati dalla p.toluidina, dalla p.fenetidina o p.anisidina con formalina e acido cloridrico.

Dobbiamo anzitutto rilevare che supponendo una semplice differenza di omologia tra le basi  $C_{18}H_{22}N_2O_2$  e  $C_{16}H_{22}N_2O_2$  ottenute dal Goldschmidt dalla fenetidina e dall'anisidina, almeno una delle due formole deve essere errata. Il Goldschmidt infatti ammette la formazione della base  $C_{18}H_{22}N_2O_2$  mediante eliminazione di due molecole di acqua da due molecole di fenetidina e due di formaldeide. Ragionando analogamente per l'anisidina, supponendo che la reazione anisidica abbia pure luogo con eliminazione di due molecole d'acqua, ossia



rimarrebbe  $C_{16}H_{13}N_2O_2$  come formola della base dal P. F.  $122^\circ$  e non  $C_{16}H_{22}N_2O_2$ : una differenza cioè di 2 atomi di carbonio e di 4 atomi di idrogeno in meno della base della fenetidina, essendovi due metossili al posto di due etossili. Ad una formola  $C_{16}H_{18}N_2O_2$  per il derivato della p.anisidina dovrebbe per analogia corrispondere  $C_{16}H_{18}N_2$  per la base ottenuta dal Tröger dalla toluidina ed egli le attribuì invece la formola  $C_{17}H_{18}N_2$ !

Volendo quindi stabilire fra le già citate basi ottenute dalle nevralteine mediante l'azione degli acidi, l'identità con le basi di Tröger e di Goldschmidt, occorre anzitutto preparare quest'ultime e verificare accuratamente le formole, sia per rettificare quelle presumibilmente erronee introdottesi nella letteratura, sia per poter stabilire che la reazione avviene identicamente nei vari casi e dimostrare che essa dà luogo alla formazione di una nuova classe di sostanze derivate da un determinato tipo.

(1) D. R. P. (Brev. germanico) Kl. 12, n. 121506 del 1901.

PREPARAZIONI DI BASI MEDIANTE TRATTAMENTO DI AMINE AROMATICHE  
SOSTITUITE IN PARA.

Data la mancanza d'indicazioni precise nella pubblicazione di Goldschmidt <sup>(1)</sup>, abbiamo operato nelle nostre esperienze adoperando i cloridrati dell'amina con l'acqua strettamente necessaria per tenerli disciolti ad una temperatura non superiore a 60° C. aggiungendo una molecola di formaldeide agitando; lasciavamo quindi in riposo durante 48 ore.

Dalla p.fenetidina ottenemmo 4 basi distinte di cui una liquida; dalla p.anisidina ottenemmo 5 basi di cui una liquida; dalla p.toluidina 2 basi solide ed una liquida; dalla p.cloranilina sinora una sola base solida la quale non esclude che altre siano pure contenute nel miscuglio di reazione.

AZIONE DELLA FORMALDEIDE SUL CLORIDRATO DI PARA FENETIDINA.

Avendo a nostra disposizione forti quantità di fenetidina, ci occupammo particolarmente dello studio delle basi ottenute da questa, anche perchè fra esse primeggiava quella base dal P. F. di 140° ottenuta da Goldschmidt, il cui salicilato è dotato di proprietà anestetiche notevoli e perchè la supponevamo identica alla base dello stesso punto di fusione già ottenuta da uno di noi dalla nevralteina.

Procedendo per cristallizzazione frazionata si ottiene in quantità trascurabile un cloridrato quasi insolubile " A " mentre è predominante un cloridrato (" B ") meno solubile, anestetico senza sapore amaro ed in quantità minori un cloridrato (" C ") più solubile amarissimo.

Concentrando le acque madri ottenute dalla reazione dopo aver separato il miscuglio greggio dei tre cloridrati sopra enumerati, si ottiene dapprima una cristallizzazione di poco cloridrato B e C, separata la quale si ha una cristallizzazione di un cloridrato (" D "). Dal cloridrato D venne messa in libertà la base che si deposita come liquido oleoso.

BASE DAL CLORIDRATO D — MONOMETILFENETIDINA.

La base liquida ottenuta dal cloridrato D, trattata con nero animale ed essiccata, distilla quasi interamente tra 102 e 104° C. a 4 mm. di pressione; è incolore ed ha un odore aromatico pronunciato che ricorda quello del finocchio L'analisi diede:

(1) Loc. cit.

Sostanza gr. 0,2319: N 18,8 cc. a 22° C. e 758 mm. — Sostanza gr. 0,1235: CO<sub>2</sub> gr. 0,3238 e H<sub>2</sub>O gr. 0,0940. — Sostanza gr. 0,1986: CO<sub>2</sub> gr. 0,5203 e H<sub>2</sub>O gr. 1536.

	N	C	H
Trovato per cento . . . . .	9,35	—	—
" " " . . . . .	—	71,51	8,51
" " " . . . . .	—	71,45	8,65
Calcolato per C <sub>9</sub> H <sub>13</sub> N (Metilfenetidina) . . . . .	9,27	71,47	8,66

Benchè l'analisi corrisponda benissimo a metilfenetidina, per identificare in modo certo la nostra base ne paragonammo il nitrosocomposto con quello della metilparafenetidina preparata da p.metilformilfenetidina (1). Entrambi avevano eguali caratteri e fondevano a 47° C.

CLORIDRATI A, B, C, E RELATIVE BASI.

*Cloridrato A.*

Date le piccolissime quantità (3 a 4 gr.) di questo cloridrato (molto poco solubile anche in acqua bollente) che si ottengono facendo reagire 200 gr. di fenetidina, ne abbiamo tralasciato per ora lo studio dopo aver determinato che gli corrisponde una base che ricristallizzata dall'alcool fonde a 146-147° C. ed è certamente diversa dalle seguenti

CLORIDRATI ANESTETICI B E C.

*Cloridrato anestetico insipido B.*

Da questo ricavammo, come già detto, una base che fonde a 140° C. come la base di Goldschmidt e come la base fondente a 140° C che forma il principale prodotto di decomposizione della nevralteina. I cloridrati, bromidrati, jodidrati, lattati, salicilati, nonchè le basi stesse ottenute dalla nevralteina hanno identici caratteri, uguali sono le loro reazioni, non vi ha dubbio sulla identità, ma si trattava di verificare anzitutto la formola di Goldschmidt: C<sub>18</sub>H<sub>22</sub>O<sub>2</sub>N<sub>2</sub>.

*Analisi:* Sostanza gr. 0,2734: N 22,6 a 18° C. e 749 mm. — Sostanza gr. 0,1847: CO<sub>2</sub> gr. 0,4940; H<sub>2</sub>O gr. 0,1142. — Sostanza gr. 0,2183: CO<sub>2</sub> gr. 0,5851; H<sub>2</sub>O gr. 0,1300.

	N	C	H
Trovato per cento . . . . .	9,55	—	—
" " " . . . . .	—	72,93	6,92
" " " . . . . .	—	73,09	6,66
Calcolato per C <sub>18</sub> H <sub>20</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> . . . . .	9,46	72,92	6,80
" " C <sub>18</sub> H <sub>22</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub> . . . . .	9,39	72,43	7,43
Goldschmidt trovò . . . . .	9,67	72,85	7,00

(1) Wedekind e Fröhlich, Berichte, 40, 1003 (1907).

Come si scorge, gli stessi dati analitici di Goldschmidt quadrano meglio per la nostra formola con 2H di meno, cioè:  $C_{18}H_{20}N_2O_2$ , che non per quella da lui calcolata.

Per trovare omologhi di peso molecolare più basso ove una differenza di due atomi d'idrogeno in meno fosse meglio rivelata dall'analisi, ricorremmo alla base che costituisce il prodotto di reazione predominante del cloridrato di anisidina con formaldeide e che fonde a 136° C. ed a quella ottenuta dal cloridrato di p.toluidina con formalina dal P. F. 131° secondo il Tröger; supponendo, come era lecito per analogia, che entrambe queste basi corrispondessero a quella dal P. F. 140° C. dalla p.fenetidina.

La base della p.anisidina dovrebbe, secondo noi, avere la formola  $C_{16}H_{16}N_2O_2$  con 8,01 % di H, mentre la formola secondo Goldschmidt sarebbe  $C_{18}H_{18}N_2O_2$  con 6,71 % di H. La base dalla p.toluidina dovrebbe avere, secondo noi, la formola  $C_{16}H_{16}N_2$  con 6,83 % di H, mentre secondo Goldschmidt darebbe 7,51 % di H.

Rileveremo che una formola  $C_{16}H_{16}N_2O_2$  è attribuita da Goldschmidt, senza dare dati analitici, ad una base dal P. F. 122° C. da lui ottenuta dalla p.anisidina, mentre non ci riuscì di separare una base fondente a 122° C. dal gruppo di quelle da noi ottenute dalla p.anisidina stessa. Per noi, fra queste, è una base fondente a 136° C. quella che corrisponde alla sovracitata base anestetica insipida fondente a 140° C. ottenuta dal cloridrato B.

*Analisi della base P. F. 136° della p.anisidina:* I) Sostanza gr. 0,2065: N 19,2 cc. a 22°,5 C. e 765 mm. — II) Sostanza gr. 0,1705: N 16 cc. a 23° C. e 756 mm. — III) Sostanza gr. 0,2156: CO<sub>2</sub> gr. 0,5666 e H<sub>2</sub>O gr. 0,1170. — IV) Sostanza gr. 0,1857: CO<sub>2</sub> gr. 0,4860 e H<sub>2</sub>O gr. 0,1010.

	N	C	H
I) Trovato per cento . . . . .	10,67	—	—
II) " " " . . . . .	10,39	—	—
III) " " " . . . . .	—	71,67	6,07
IV) " " " . . . . .	—	71,36	6,08
Calcolato per $C_{16}H_{16}O_2N_2$ . . . . .	10,44	71,60	6,01
" " $C_{18}H_{18}O_2N_2$ (Goldschmidt) . . . . .	10,37	71,07	6,71

*Analisi della base P. F. 137° dalla p.toluidina.* — Fra le varie basi ottenute dalla p.toluidina ve n'è una che fonde a 137° C. e che rappresenta, secondo noi, quella che corrisponde alla base dal P. F. 140° C. dalla fenetidina ed a quella dal P. F. 136° C. dall'anisidina testè discusse.

Quattro analisi accurate (1) diedero:

- I) Per sostanza gr. 0,1776: CO<sub>2</sub> gr. 0,5275 e H<sub>2</sub>O gr. 0,1086. — II) Per sostanza gr. 0,1776: CO<sub>2</sub> gr. 0,5287 e H<sub>2</sub>O gr. 0,1083. — III) Per sostanza gr. 0,1952: CO<sub>2</sub> gr. 0,5816 e H<sub>2</sub>O gr. 0,1196. — IV) Per sostanza gr. 0,1333: CO<sub>2</sub> gr. 0,3968 e H<sub>2</sub>O gr. 0,0820.

	C	H	N
I) Trovato per conto . . . . .	81,01	6,81	—
II) " " " . . . . .	81,19	6,82	—
III) " " " . . . . .	81,25	6,85	—
IV) " " " . . . . .	81,18	6,88	—
Calcolato per C <sub>16</sub> H <sub>16</sub> N <sub>2</sub> . . . . .	81,31	6,83	11,86
" " C <sub>16</sub> H <sub>18</sub> N <sub>2</sub> . . . . .	80,28	7,51	11,71

Con la scorta dei tre gruppi di analisi eseguite per le tre basi analoghe ottenute rispettivamente dalla fenetidina, anisidina, toluidina, ci riteniamo autorizzati ad assegnare a quelle tre basi le formole C<sub>18</sub>H<sub>20</sub>O<sub>2</sub>N<sub>2</sub>, C<sub>16</sub>H<sub>16</sub>O<sub>2</sub>N<sub>2</sub>, C<sub>16</sub>H<sub>16</sub>N<sub>2</sub>. Ciò dato, devono venire cancellate definitivamente dalla letteratura chimica le formole C<sub>18</sub>H<sub>22</sub>N<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, C<sub>16</sub>H<sub>20</sub>N<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, attribuite dal Goldschmidt a due delle basi ottenute con formalina e HCl dalla p.fenetidina e dalla p.anisidina, nonché la formola C<sub>17</sub>H<sub>18</sub>N<sub>2</sub> attribuita dal Tröger (2) ad una base ottenuta dalla p.toluidina con metilale e HCl.

L'equazione per la reazione ammessa dal Goldschmidt per spiegare la formazione della base anestetica insipida che ha il punto di fusione 140° C, è quindi anch'essa erronea. Questa base non può formarsi che attraverso un processo di riduzione con messa in libertà d'idrogeno.

Daremo in seguito la piena conferma che ciò avviene realmente, e diremo quale sia la funzione dei due atomi d'idrogeno disponibili i quali concorrono alla formazione della base.

II

*Cloridrato anestetico amaro C*

che farà oggetto di una Nota ulteriore, data la mancanza di spazio per il maggiore sviluppo della presente Nota.

(1) Le determinazioni furono limitate a C e H poichè quella di N dà per le due formole C<sub>16</sub>H<sub>16</sub>N<sub>2</sub> e C<sub>16</sub>H<sub>18</sub>N<sub>2</sub> in discussione una differenza di solo 0.15 per cento di azoto contenuta nei limiti di errore.

(2) Journ. für prakt. Chemie, già citato

Geologia. — *Di alcune alghe calcaree provenienti dall'isola di Malta.* Nota I della dott.<sup>ssa</sup> CATERINA SAMSONOFF-ARUFFO, presentata dal Socio DE STEFANI.

Ho avuto a mia disposizione diversi campioni di colonie calcaree di *Lithothamnium*, raccolte dal prof. De Stefani in differenti località dell'Isola di Malta, specialmente nei calcari Elveziani del Miocene medio (<sup>1</sup>).

Di questo materiale ho studiato quattro campioni che formeranno l'oggetto di queste Note.

Il primo campione che forma l'oggetto di queste Note fu raccolto dal prof. De Stefani nell'Elveziano, a Kala (Gozo) nella zona a *Nulliporae* (*Lover coralline Limestone* Murray) nell'arcipelago di Malta; esso è rappresentato da un conglomerato calcareo formato da numerose lamine (2,4 mm.) variamente ripiegate e contorte, cementate fra loro da sabbia e frammenti di conchiglie, anastomizzate o anche sovrapposte in modo da formare croste più spesse. Fra queste croste si trovano numerose cavità irregolari. Alla sua superficie questo tallo crostoso è ricoperto di protuberanze mammillari, molto brevi, arrotondate, ma non rigonfiate all'apice.

Di queste protuberanze non ve n'è che una integra di 2 mm. di diametro, le altre sono tutte in parte rotte o consumate. La superficie esterna delle croste, quanto la loro superficie di frattura — sono bianche qualche volta striate di giallognolo; le protuberanze fratturate appaiono spesso giallognole nell'interno. Ho visto qualche concettacolo ad occhio nudo sulle superfici di frattura del conglomerato; essi sono piuttosto grandi ed hanno forma ovale. Passando ora allo studio microscopico di questo esemplare vediamo che nel nostro preparato sono stati sezionati diversi rami dell'alga inclusa nel conglomerato calcareo. Osservando la preparazione alla luce riflessa vediamo subito anche a occhio nudo che uno dei rami si presenta affatto differente da tutti gli altri — bianco, compatto uniforme con 2 o 3 piccole cavità ovali, mentre gli altri rami sono assai meno compatti, presentano nel centro un piccolo nucleo bianco opaco e verso la periferia un'altra striscia di tessuto denso. mentre la gran massa del tallo è formata da un tessuto meno compatto più trasparente e più scuro, solcato da numerose e sottili linee concentriche. Al microscopio vediamo che la parte centrale chiara (alla luce riflessa) appare scura perchè più compatta; essa è formata da cellule

(<sup>1</sup>) C. De Stefani, *L'Arcipelago di Malta.* Rend. Acc. Lincei, Cl. di sc. fis. 5 e 19 gennaio 1913.



arrotondate di media grandezza, sezionate trasversalmente. Non avendo io nessuna sezione longitudinale del tallo non so se posso considerare questa parte midollare come formata dall'ipotallo; ad ogni modo mi pare che vi sia somiglianza notevole — se forse non identità — fra il tessuto del midollo e quello della corteccia. Con un'ingrandimento maggiore si vede che le cellule del midollo sono poligonali, chiare, con punto scuro nel mezzo, molto stipate fra loro; mancano le cellule doppie del Pilger. Il diametro di queste cellule, che ho potuto misurare col micrometro oculare, è abbastanza ampio e varia poco. Il midollo è unito alla porzione corticale da una zona di passaggio, dove le cellule sono tagliate obliquamente. La porzione corticale rappresenta una zonatura concentrica molto evidente.

Le zone *chiare* e *scure* si alternano: più larghe le prime, strette le seconde. Le zone chiare sono formate di cellule rettangolari, un po' più lunghe che larghe, di dimensione media poco variabile (le misure non si sono potute prendere visto lo stato poco buono di conservazione del tallo). Le cellule sono disposte in serie radiali molto evidenti, ma manca però l'aspetto a grata o reticolo. Il tessuto è compatto e regolare, le pareti cellulari sono sottili; il lume è grande e molto rifrangente: nella zona senza le cellule sono molto più piccole, quadrate, a pareti più spesse. Lo sviluppo singolo e relativo delle zone scure e chiare è molto variabile a seconda dei punti del tallo, ma quasi sempre la zona chiara è molto più sviluppata di quella scura, specialmente nella parte profonda del tallo.

La disposizione concentrica delle zone è spesso disturbata da irregolarità; le zone si accavalcano reciprocamente o hanno un'andamento ondulato.

Verso la periferia le zone diventano sempre meno evidenti. Il tessuto forma verso la superficie del ramo una sola massa scura traversata da linee più o meno parallele; le cellule sono piccole, quadrate (come nella zona scura), a pareti spesse. Il tallo diventa meno regolare e racchiude delle cavità e delle discontinuità dovute certamente ad azioni traumatiche esterne. Uno dei rami più piccoli presenta nel suo interno due nuclei midollari, circondati da una corteccia comune a zone concentriche, ciò che indicherebbe l'esistenza della ramificazione dicotomica.

Non ho potuto trovare nel tallo dei concettacoli maturi e sviluppati, ma nella corteccia di uno dei rami in tre punti differenti ho trovato delle cavità (?) ellittiche, riempite totalmente o in parte da elementi assai più grandi delle cellule ordinarie, molto allungati, disposti in due o tre strati sovrapposti e formanti delle file verticali molto evidenti. Il passaggio fra questi elementi e le cellule vegetative laterali è graduale. Considero questi elementi come cellule-madri di spore e le cavità o corpi ellittici come concettacoli tetrasporici in via di sviluppo. Uno di questi giovani concettacoli si troverebbe ad un grado più avanzato di sviluppo che non gli altri due.

Come abbiamo già detto uno dei rami più grossi, sezionati nella preparazione, si presenta affatto diverso da tutti gli altri. In questo ramo sono presenti e ben distinti fra loro ambo le specie di tessuti: l'*ipotallo* ed il *peritallo*. Questi due tessuti si sovrappongono reciprocamente e si alternano in tutto lo spessore del tallo. Nella parte più importante del ramo intorno agli organi di riproduzione lo sviluppo del peritallo è considerevole; in genere si può dire che il peritallo è maggiormente sviluppato dell'ipotallo, però in molti punti lo sviluppo dei due tessuti è equivalente. Ciò che distingue questo ramo dagli altri rami della preparazione è il volume rilevante degli elementi cellulari, la loro forma quasi quadrata, la mancanza di zone colorate e l'aspetto poco regolare del tessuto in paragone con gli altri rami.

L'ipotallo è formato di cellule rettangolari, leggermente allungate o quasi quadrate. La lunghezza delle cellule varia assai di più che non la loro larghezza che è molto più uniforme; il rapporto  $\frac{\text{larghezza}}{\text{lunghezza}}$  varia fra  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{4}$ .

Nell'ipotallo si trovano qua e là delle cellule più grandi, pentagonali dove il rapporto è  $\frac{1}{2}$ . Però dalle misure prese possiamo vedere che in complesso le cellule variano poco nelle loro dimensioni, che perciò il tessuto dell'ipotallo ha un'aspetto regolare ed uniforme.

La *linea del Rosanoff* (in cui le file cellulari corrono più o meno parallele fra loro) è molto bassa e spesso poco o punto distinta. Generalmente le file cellulari si inarcano subito dirigendosi verso il peritallo. L'aspetto caratteristico *a ventaglio* manca o è pochissimo sviluppato. La distinzione fra i due tessuti è molto netta ma il passaggio non è tanto brusco. In un punto della preparazione ho potuto osservare due striscie di ipotallo, che si erano accresciute in direzioni opposte, dirigendosi l'una contro l'altra. Nel punto d'incontro delle due striscie esse, mettendosi in contatto, non si fondono (come fu già rilevato dal Rosanoff nel 1866) ma si inarcano dirigendosi in alto e continuano a crescere in questa direzione. Questo modo interessante di accrescimento è ben evidente nella nostra preparazione. Nell'ipotallo, come abbiamo detto, si trovano sparse poche cellule pentagonali più voluminose, gli *eterocisti*. Nei punti dove l'ipotallo è stato sezionato trasversalmente si possono osservare numerose e grosse *cellule doppie e triple* del Pilger; in genere le cellule dell'ipotallo in sezione trasv. sono arrotondate o poligonali, le pareti sono spesse e rinfrangenti ed il lume è piccolo.

Le cellule del peritallo non differiscono molto per la loro forma e dimensione da quelle dell'ipotallo: esse sono soprattutto più corte ma quasi ugualmente larghe che queste ultime; il loro volume varia poco. Considerando questa uniformità nelle dimensioni delle cellule del peritallo, vediamo

che la poca regolarità del tessuto è dovuta alla loro disposizione reciproca ed al modo del loro accrescimento. Infatti i setti tangenziali e radiali non si trovano in continuazione fra loro, manca completamente l'aspetto a grata o reticolo; malgrado la poca variabilità delle cellule l'aspetto del tessuto è poco regolare. Le pareti delle cellule sono sottili e poco evidenti, specialmente quelle radiali. Nel peritallo si trovano non di rado delle cellule più grosse pentagonali, gli *eterocisti*. Intorno ai concettacoli il peritallo sembra diventare più compatto, le cellule leggermente più piccole e più allungate. Alla periferia il tallo è limitato da uno strato di cellule molto regolari, quadrate, strettamente unite fra loro ed aventi la loro parete esterna ispessita.

Nella porzione mediana del ramo troviamo quattro cavità ellittiche, le quali per la loro forma regolare, per la loro disposizione entro il tallo e per l'aspetto del tessuto che le circonda debbono essere considerate come concettacoli. Uno di questi concettacoli ha una forma particolare, esso è cioè provvisto di una prominenza piuttosto voluminosa nella parte centrale del pavimento e di un collo breve, ristretto nella sua porzione basale e dilatato a forma di bottone verso l'apice. I concettacoli (salvo l'ultimo) hanno una forma ellittica assai schiacciata, con l'asse trasversale molto allungato, col pavimento piano o leggermente sollevato nel mezzo, tetto pianeggiante o un po' concavo, pareti laterali arcuate.

I concettacoli sono vuoti o riempiti di calcare; in uno di essi si vedono le file cellulari del tetto un po' piegate all'infuori a modo di ventaglio. Il tetto è spesso, specialmente nel mezzo, ed assai ben delimitato.

Riassumendo tutte queste osservazioni, vediamo che in questo esemplare, di Kala, si trovano riunite nello stesso conglomerato due alghe ramificate, appartenenti a *due generi differenti*.

Una di queste specie, rappresentata nella preparazione da diversi rami sezionati, possiede una struttura zonata in cui non si distingue che una sola specie di tessuto. La sua struttura è quella di un *Lithothamnium*, e ricorda molto il *Lithothamnium tophiforme* Unger, che ho già trovato <sup>(1)</sup> nel calcare ad *Amphistegina Pliocenica* in diverse località (Nettuno, Pianosa e Bagni di Casciana). Però la nostra alga non è una specie esclusivamente (o quasi) ramificata come il *Lithothamnium tophiforme* Unger; essa è rappresentata da un tallo crostiforme abbastanza sviluppato e di discreto spessore, traversato da numerose cavità e munito alla sua superficie di piccole prominente tubercolari o verruciformi. Questo fatto avvicina molto la nostra specie tanto nel suo aspetto esterno, come anche nella sua struttura anato-

(1) Caterina Samsonoff-Aruffo, *Il Lithothamnium tophiforme di Unger nel calcare ad Amphistegina di Nettuno, di Pianosa e dei Bagni di Casciana* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. XXV, serie 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 5<sup>o</sup> (1916).

mica al *Lithothamnium intermedium* Kjell (<sup>1</sup>). L'esemplare raccolto è abbastanza logorato alla sua superficie, malgrado ciò esso si avvicina assai alla descrizione data dal Kjellmann della sua specie, come anche alla fig. 1 della tavola 4, del suo lavoro sopracitato. Oltreciò nella nostra pianta ho trovato tre giovani concettacoli in via di sviluppo, completamente affondati e rinchiusi entro il tessuto vegetativo: ora nel *L. tophiforme* Unger i concettacoli non sono mai affondati, come si può vedere dalla descrizione data per questa specie dal Kjellmann ed anche da me (<sup>2</sup>); mentre nel *Lithothamnium intermedium* i concettacoli sono affondati (<sup>3</sup>).

Del resto vi è grande affinità fra il *Lithothamnium tophiforme* Unger ed il *Lithothamnium intermedium* Kjell. (vedi Lemoine pag. 52), e questa grande affinità verrebbe aumentata dalla presenza di quest'ultima specie in terreni press'a poco della stessa età del *Leithakalk*, dove per la prima volta fu trovata la specie descritta da Unger.

Visto la corrispondenza della mia preparazione e del mio esemplare colle figure e la descrizione del Kjellmann considero che la specie di Kaia (Gozo) sia il

### **Lithothamnium intermedium** Kjell.

Nella stessa preparazione come abbiamo già visto è stato sezionato un ramo di struttura affatto diversa dagli altri rami, appartenenti al *Lithothamnium intermedium* Kjell. In questo ramo sono presenti e ben distinti tanto l'ipotallo che il peritallo, che si sovrappongono reciprocamente e si alternano in tutto lo spessore del tallo. Le cellule sono piuttosto grandi, quasi quadrate, mancano le zone colorate; il tessuto è poco regolare, malgrado che le dimensioni delle cellule sieno piuttosto uniformi. L'ipotallo si avvicina al tipo *Lithophyllum*, contiene degli eterocisti e delle cellule doppie e triple del Pilger; gli eterocisti si trovano anche nel peritallo. In uno dei concettacoli ho trovato che il collo era ristretto verso la base e che la parte mediana del pavimento era prominente. Considerando tutti questi caratteri riuniti insieme, vediamo che la nostra specie deve essere riportata al gen. *Goniolithon*. Ho trovato già questo genere nel miocene medio di Rakoviča (Albania) (<sup>4</sup>). Il ramo di *Goniolithon*, sezionato in questa preparazione, somiglia assai alla sopracitata descrizione della struttura anatomica del *Goniolithon Martelli* Sam.; anche le dimensioni delle cellule del peri-

(<sup>1</sup>) Kjellmann, *The Algae of the Aretich* Sca. già citato, vedi pag. 97.

(<sup>2</sup>) Vedi lavoro sopracitato.

(<sup>3</sup>) Vedi Kjellmann (figg. 4 e 5, tav. 4).

(<sup>4</sup>) Dott. Caterina Samsonoff, *Sopra due alghe calcaree fossili della famiglia delle corallinaceae* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, serie 5<sup>a</sup>, 2° sem, fasc. 6°, 1914).

tallo e dell'ipotallo, misurate col micrometro oculare sono identiche. Le differenze che si possono scorgere, come il maggiore sviluppo dell'ipotallo e la sua più grande regolarità nell'esemplare proveniente dall'Albania ecc., sono dovute al fatto che nell'esemplare trovato dal prof. Martelli fu studiata la struttura anatomica della crosta, mentre in quello raccolto dal prof. De Stefani fu studiata la struttura anatomica delle ramificazioni.

Visto tutto questo, come anche il fatto che i terreni dai quali provengono queste alghe fossili sono della stessa età considero che l'altra pianta raccolta dal prof. De Stefani a Kala (Gozo) sia il

**Goniolithon Martellii Sam.**

da me per la prima volta descritto.

Chimica fisiologica. — *Sulla genesi dell'urea*. I. *Può il tessuto muscolare generare l'urea?* Nota del dott. UGO LOMBROSO, presentata dal Socio L. LUCIANI.

La letteratura che riguarda la genesi dell'urea è assai estesa ed interessante: ma io tralascio per ora di farne cenno, perchè intendo svolgerla ampiamente, quando saranno completate le indagini che mi sono proposto di eseguire in base al risultato di alcune osservazioni fatte durante lo svolgimento di precedenti ricerche.

Credo però interessante di riferire senz'altro i dati di fatto da me osservati, in quanto essi sono sufficienti per dimostrare erronea l'opinione accolta dalla gran maggioranza degli autori, che l'urea abbia come sede di formazione esclusiva o prevalente il fegato.

In una serie già pubblicata di ricerche sul comportamento degli aminoacidi nell'organismo <sup>(1)</sup>, avevo notato che, facendo circolare in tessuto muscolare funzionante sangue contenente aminoacidi (glicocollo-asparagina-alanina), una notevole parte di essi scompariva, senza che alla loro diminuzione facesse riscontro un corrispondente aumento di  $\text{NH}_3$  che giustificasse la loro scomparsa come dovuta a disaminazione.

Potevasi supporre che, o gli aminoacidi scomparsi avessero formato complessi non titolabili al formolo, o che avessero formato urea. Per controllare quest'ultima ipotesi, avevo iniziato studî particolari, atti a determinare la percentuale di urea esistente nel sangue contenente vari aminoacidi, prima e dopo la circolazione eseguita in tessuto muscolare funzionante. I primi risultati raccolti apparivano assai contraddittori, in quanto

<sup>(1)</sup> *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo*. R. Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 57-148-1870 (1915).

che in qualche caso ottenni notevole aumento di urea, mentre in altri casi, pur usando lo stesso amino acido non avvertivo nessun aumento (persino talvolta una lieve diminuzione dell'urea del sangue).

Lo stesso fenomeno, relativo alle variazioni nelle quantità dell'urea, venne da me ottenuto in ricerche di controllo eseguite adoperando sangue senza aggiunta di amino-acidi. Ed essendosi dato il caso che l'aumento più notevole di urea si avvertisse in una esperienza nella quale avevo usato un cane da poco alimentato con pasto di carne, mi sorse il dubbio che questa condizione (di trovarsi cioè l'animale da cui si preleva il materiale sperimentale in istato di digestione ed assorbimento di sostanze proteiche) fosse la causa dell'ottenuto aumento di urea in così cospicua misura. Le esperienze eseguite sino ad ora in questa condizione confermano tale ipotesi.

Riferisco nella presente Nota, oltre ad esse, alcune delle esperienze precedenti, nelle quali non avevo preso in considerazione le condizioni alimentari dell'animale, perchè esse servono a dimostrare come la presenza di aminoacidi nel sangue circolante, non è di per sè una condizione sufficiente alla produzione di urea da parte del muscolo, anche quando, durante la circolazione, buona parte degli aminoacidi si trasformano per azione del muscolo, in corpi non titolabili al formolo.

Tutte le esperienze vennero eseguite con cani di piccola taglia (5-8 kg.). Il sangue veniva liberato dall' $\text{NH}_3$  secondo il metodo di Folin, quindi trattato con acido tricloroacetico, e nel filtrato si dosava l'urea coll'apposito apparecchio di Ambard-Binet. Per tessuto muscolare si usava un arto posteriore.

Per le modalità dell'atto operatorio, pel dosaggio degli aminoacidi ecc., valgono le avvertenze date nelle precedenti Note. Nelle presenti ricerche non fu determinato il contenuto in urea del tessuto muscolare prima e dopo la circolazione. Sarebbe stato vantaggioso colmare questa lacuna, e così pure controllare i risultati ottenuti col dosaggio dell'urea, adoperando il metodo dell'ureasi, vantato nei recenti lavori come il più esatto. Non mi è stato possibile di far ciò per ragioni indipendenti dalla mia volontà <sup>(1)</sup>. Ma come ho già detto, ritengo utile il riferire le esperienze fatte, perchè, se anche le future potranno modificare in qualche dettaglio la misura dei fenomeni riscontrati, non è probabile che infirmeranno i concetti generali che se ne possono trarre.

I.

Cane kg. 4,60. 20. XI. 1915; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 260. Sangue + Soluzione Ringer cc. 400 con 2,0 gr.  $\alpha$  alanina. Durata della circo-

(1) L'Autore fu allontanato da Roma per servizio militare.

lazione 1 ora. Stimolazioni elettriche per  $\frac{1}{2}$  ora al nervo sciatico, quindi direttamente ai muscoli. Pressione 200-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione — 6-8 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,28 ‰

” ” dopo ” ” = 0,46 ‰.

(Diminuzione degli amino acidi durante la circolazione = 17,5 ‰).

## II.

Cane kg. 5,600. 26. XI. 1915; ore 20. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 320. Sangue + soluzione di Ringer cc. 500 + 2,5 gr.  $\alpha$  alanina. Durata della circolazione ore 1,15. Stimolazioni elettriche continue alternate al nervo sciatico ed ai muscoli nella prima ora. Pressione 180-200 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-10 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,16 ‰

” ” dopo ” ” = 0,16 ‰.

(Diminuzione degli amino acidi durante la circolazione = 12 ‰).

## III.

Cane kg. 6,200. 9. II. 1916; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 320. Sangue + soluzione Ringer cc. 500 + 3 gr. asparagina neutralizzata. Durata della circolazione ore 1  $\frac{1}{2}$ . Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo nella prima ora. Pressione 180-200 mm. mercurio. Velocità della circolazione 5-6 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,22 ‰

” ” dopo ” ” = 0,28 ‰.

(Non si determina la diminuzione degli amino acidi).

## IV.

Cane kg. 5,600. 12. II. 1916; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 300. Sangue + soluzione Ringer cc. 500 + 2 gr. glicocola. Durata della circolazione ore 1,15. Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo nella prima ora. Pressione 180-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-10 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,25 ‰

” ” dopo ” ” = 0,42 ‰.

(Non si determina la diminuzione degli amino acidi).

## V.

Cane kg. 6,600. 26. II. 1916; ore 10. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 360. Sangue + soluzione Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1  $\frac{1}{2}$ . Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo per 40 minuti. Pressione 180-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-12 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,18 ‰

” ” dopo ” ” = 0,18 ‰.

## VI.

Cane peso kg. 7,100. 18. III. 1916; ore 16. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 420. Cane alimentato alla mattina con pasto di carne. Sangue + soluzione Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1  $\frac{1}{4}$ . Stimolazioni elettriche alternate al nervo

sciatico ed al muscolo per 45 minuti. Pressione 200-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 10-12 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,32 ‰  
" " dopo " " = 0,70 ‰.

#### VII.

Cane kg. 6,800. 26. III. 1916; ore 9. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 370. Cane alimentato alla sera precedente con pasto di carne. Sangue + soluzione di Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1  $\frac{1}{2}$ . Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo per 45 minuti. Pressione 180-200 mm. mercurio. Velocità della circolazione 8-10 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,30 ‰  
" " dopo " " = 0,58 ‰.

#### VIII.

Cane kg. 7,400. 8. IV. 1916; ore 9. — Peso arto sottoposto alla circolazione gr. 400. Cane alimentato alla sera precedente con pasto di carne. Sangue + soluzione Ringer cc. 500. Durata della circolazione ore 1. Stimolazioni elettriche alternate al nervo sciatico ed al muscolo per 40 minuti. Pressione 200-220 mm. mercurio. Velocità della circolazione 6-8 cc. al minuto.

Urea nel sangue prima della circolazione = 0,34 ‰  
" " dopo " " = 0,62 ‰.

Dalle esperienze riferite risulta che:

1° Il sangue circolando nel tessuto muscolare funzionante può aumentare, e notevolmente, il suo contenuto in urea.

2° L'aggiunta di aminoacidi al sangue non costituisce una condizione necessaria, o quanto meno favorevole, affinché si avverta tale aumento dell'urea: tanto è vero che in alcune esperienze nelle quali essi erano stati aggiunti in cospicua misura, ed anche scomparsi in elevata percentuale, non si ottenne l'aumento di urea (e neppure di  $\text{NH}_3$  in misura sufficiente a giustificare completamente il deficit di aminoacidi, onde risulta probabile che essi abbiano costituito dei complessi non titolabili al formolo).

3° L'aumento di urea più elevato si ottenne sperimentando con tessuto muscolare e sangue di cane precedentemente alimentato con carne.

Questi risultati appaiono assai interessanti in quanto forniscono anzitutto un argomento positivo diretto della possibilità di formare urea da parte del tessuto muscolare, ciò che dai più è negato, specialmente in base alle osservazioni cliniche, secondo le quali nelle affezioni epatiche l'urea scompare progressivamente dall'urina parallelamente alla gravità dell'affezione.

Lasciando ad ulteriori indagini il compito di meglio confortare i risultati già ottenuti, io credo che fra i dati di fatto esposti dai clinici e quelli riferiti nella presente Nota, non ci sia quella contraddizione irriducibile che a prima vista può apparire.



Infatti abbiamo avvertito nelle nostre ricerche che, per ottenere una cospicua formazione di urea, è necessario adoperare tessuto muscolare e sangue di animale alimentato con carne (se con ambedue contemporaneamente o se con uno solo di questi fattori si possa raggiungere uguale risultato decideranno ulteriori apposite ricerche). Ciò dimostra che in questa condizione si deve essere immesso nel sangue o nel muscolo un qualche cosa dal quale ha origine l'urea.

Si può supporre che questo qualche cosa, che per ora non possiamo ancora indicare più esattamente, si produca nel fegato, salvo poi a trasformarsi in urea nel tessuto muscolare e magari anche negli altri tessuti. Per cui pur essendo il muscolo capace di formare l'urea, si renderebbe pur sempre necessaria l'azione del fegato per generare le sostanze dalle quali il muscolo può svolgere l'urea stessa.

Non dò naturalmente a questa ipotesi altro valore che quello di ipotesi di lavoro; essa pertanto ci avverte che fatti apparentemente contraddittori si possono comprendere ed integrare quando non ci si limiti a considerarli isolatamente.

In quanto al fatto che l'aggiungere aminoacidi al sangue circolante non basta da solo a determinare un aumento di urea, esso non deve venir senz'altro interpretato come la dimostrazione che queste sostanze non prendono parte alcuna alla genesi dell'urea stessa.

Alcune ricerche riguardanti (1) il consumo del glicosio da parte di tessuti isolati, mi dimostrarono che alcuni di essi (fegato, rene, ecc.) distruggono in gran copia il glicosio quando questo vien fatto circolare in un organo asportato da un animale ucciso durante l'assorbimento di idrati di carbonio, mentre se l'organo fu asportato da un animale da qualche giorno digiunante, poco o nulla del glicosio viene consumato. Per analogia si potrebbe supporre che per utilizzare gli aminoacidi e generare l'urea, si rendano necessarie condizioni simili.

Ma di tutti i problemi che sorgono in base alle ricerche qui riferite, di tutte le deduzioni e affermazioni più recise che se ne possono trarre, riferiremo appiamente solo quando ci sarà possibile di completarle in modo soddisfacente, estendendo il dosaggio dell'urea anche al tessuto muscolare, modificando il metodo del dosaggio dell'urea stessa ecc. ecc.

Riuscendomi però impossibile per ora il dedicarmi a questi particolari studi, credo utile riferire questi primi risultati ottenuti, per l'interesse che essi assumono, pur mantenendo alla presente Nota il valore di una semplice Nota preventiva.

(1) *Sul metabolismo del glicosio in organi sopravvivenenti. Nota V. Influenza del digiuno sull'attitudine del fegato a consumare il glicosio in esso circolante.* In corso di stampa pel prossimo fascicolo dei Rendiconti della R. Acc. dei Lincei.



## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76). Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*  
3<sup>a</sup> MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
- Vol. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*  
Vol. I-VII.  
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 10°. Sem. 1°.  
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*  
Vol. I-XII. Fasc. 4.  
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 100; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 20 maggio 1917.*

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Levi-Civita.</i> Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi	Pag. 519
<i>Andreoli.</i> Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari (pres. dal Socio <i>Volterra</i> )	531
<i>Cherubino.</i> Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann (pres. dal Corrisp. <i>Castelnuovo</i> )	538
<i>Chisini.</i> Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia (pres. dal Corrisp. <i>Enriques</i> )	543
<i>Carnera.</i> La base geodetica di Vallona (pres. dal Socio <i>Millosevich</i> )	549
<i>Togliatti.</i> Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1 <sup>a</sup> specie tra spazi ad $n$ dimensioni (pres. dal Socio <i>Segre</i> )	553
<i>Maggini.</i> Il Sole emette radiazioni di altissima frequenza (pres. dal Corrisp. <i>Garbasso</i> ) (*)	557
<i>Lepetit e Maimeri.</i> Gruppi di basi ottenute da amine aromatiche e formaldeide (pres. dal Socio <i>Angeli</i> )	558
<i>Samsonoff-Aruffo.</i> Di alcune alghe calcaree provenienti dall'isola di Malta (pres. dal Socio <i>De Stefani</i> )	564
<i>Lombroso.</i> Sulla genesi dell'urea. I. Può il tessuto muscolare generare l'urea? (pres. dal Socio <i>Luciani</i> )	569

---

(\*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 3 giugno 1917.*

Volume XXVI.° – Fascicolo 11.°

1.° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

**ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE**

**I.**

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

**II.**

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice posta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 3 giugno 1917.*

A. RÒTTI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie della classe*  $K = - \frac{1}{\{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)\}^2}$ . Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1, Le superficie a curvature opposte per le quali la curvatura totale  $K$ , espressa pei parametri  $\alpha, \beta$  delle linee asintotiche, assume la forma

$$A) \quad K = - \frac{1}{\{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)\}^2}$$

si presentano, come è noto, in diverse questioni di geometria <sup>(1)</sup>. Ciascuna superficie  $S$  di questa classe appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità congruenze rettilinee  $W$ , la cui seconda falda  $S'$  ha in ogni punto la stessa curvatura come la  $S$  nel punto corrispondente, ed appartiene alla medesima classe  $A$ ). Ne scaturiscono per le superficie della classe  $A$ ) dei *metodi di trasformazione*, che si riducono a quelli delle superficie pseudosferiche quando in particolare  $\varphi(\alpha)$  e  $\psi(\beta)$  si riducono a costanti. Mi propongo di mostrare in questa Nota che l'esistenza di queste trasformazioni basta già a caratterizzare le superficie della classe  $A$ ). Per questo partiamo da un problema di *ordinamento di faccette piane*, al quale arriviamo nel modo seguente.

<sup>(1)</sup> Cfr. la mia Memoria del 1890: *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (Annali di matematica, ser. 2<sup>a</sup>, tomo XVIII). Ved. anche il volume 2<sup>o</sup> delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, §§ 249-252.

Data una superficie  $S$ , descriviamo attorno ad ogni suo punto  $P$  come centro, e nel relativo piano tangente  $\pi$ , un circolo  $C$  di raggio  $R$  variabile con  $P$ . Facciamo poi corrispondere a ciascuna faccetta  $f \equiv (\pi, P)$  di  $S$ , costituita da un piano  $\pi$  tangente di  $S$  e dal suo punto  $P$  di contatto, una semplice infinità di faccette  $f' \equiv (\pi', P')$  trasformate, i cui centri  $P'$  siano allogati sulla circonferenza  $C$  e i cui piani  $\pi'$  passino pel centro  $P$  di  $f$ , e siano inclinati sul suo piano  $\pi$  di un medesimo angolo  $\sigma$  (che sarà variabile in generale col punto  $P$  di contatto).

Domandiamo allora: *Come deve assumersi la superficie  $S$ , e quale deve essere la legge di variabilità pel raggio  $R$  e per l'angolo  $\sigma$ , affinché le  $\infty^3$  faccette trasformate  $f'$  si distribuiscano in  $\infty^1$  superficie  $S'$  (trasformate di  $S$ )?*

Si vedrà che il problema così enunciato ammette soluzioni allora ed allora soltanto che la  $S$  sia a curvatures opposte ed appartenga alla classe  $A$ ), e in tal caso, fissata  $S$ , ammette  $\infty^1$  soluzioni, restando una costante arbitraria nelle equazioni di  $R$  e  $\sigma$ . Ogni volta poi le superficie trasformate  $S'$  sono ancora della classe  $A$ ), e coincidono appunto con quelle a cui conducono gli indicati metodi di trasformazione.

2. Riferiamo la superficie data  $S$  ad un sistema coordinato curvilineo  $(u, v)$ , che supporremo per semplicità *ortogonale* ma del resto qualunque, e si abbia nelle usuali notazioni (ved. *Lezioni ecc.*, vol. II, § 254):

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E} X_1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}} X_2, \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G} X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}} X_2. \end{array} \right.$$

Scriviamo inoltre le relative equazioni di Codazzi

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D}{\sqrt{E}} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{D'}{\sqrt{E}} \right) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{D'}{\sqrt{G}} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \frac{D''}{\sqrt{G}} \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{D''}{\sqrt{G}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{D'}{\sqrt{G}} \right) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \frac{D'}{\sqrt{E}}, \end{array} \right.$$

e l'equazione di Gauss

$$(3) \quad \frac{DD'' - D'^2}{EG} = K,$$



dove  $K$  indica la curvatura totale di Gauss:

$$(3^*) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\}.$$

Ora, attorno ad ogni punto  $P \equiv (u, v)$  di  $S$  come centro e nel piano tangente  $\pi$ , descriviamo un cerchio di raggio  $R$ , dove  $R$  è da pensarsi come una funzione *data* di  $u, v$ , sia  $R = R(u, v)$ . Le coordinate  $x', y', z'$  di ogni punto  $P'$  del detto circolo saranno date dalla formola

$$(4) \quad x' = x + R(\cos \theta X_1 + \sin \theta X_2),$$

colle due analoghe per  $y', z'$ , significando  $\theta$  l'angolo d'inclinazione del raggio  $PP'$  sulla direzione  $(X', Y', Z')$ . Le (4) ci danno le coordinate del centro  $P'$  di una faccetta  $f'$ , e poichè il piano  $\pi'$  di questa passa per  $PP'$ , ed è inclinato di un certo angolo  $\sigma = \sigma(u, v)$  sul piano  $\pi$ , i coseni di direzione  $X', Y', Z'$  della normale a  $\pi'$  potranno assumersi dati dalla formola

$$(5) \quad X' = \sin \sigma (\sin \theta X_1 - \cos \theta X_2) + \cos \sigma X_3,$$

colle altre due analoghe.

Per risolvere il nostro problema conviene che nelle (4), (5) si pensino  $R$  e  $\sigma$  come funzioni *date* di  $u, v$  e si cerchi se è possibile scegliere per  $\theta$  una conveniente funzione di  $u, v$  e di una costante *arbitraria*  $c$ :

$$\theta = \theta(u, v, c),$$

per modo che si verifichino le due equazioni

$$(6) \quad SX' \frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad SX' \frac{\partial x'}{\partial v} = 0.$$

Queste esprimono infatti che le  $\infty^3$  faccette  $f'$  si ordinano in  $\infty^1$  superficie  $S'$ , date dalle (4), quando vi si ponga  $\theta = \theta(u, v, c)$ .

3. Se deriviamo le (4), osservando le (1), abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} = & \left\{ \sqrt{E} + \frac{\partial R}{\partial u} \cos \theta - R \sin \theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} X_1 + \\ & + \left\{ \frac{\partial R}{\partial v} \sin \theta + R \cos \theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\} X_2 + \\ & + R \left\{ \cos \theta \frac{D}{\sqrt{E}} + \sin \theta \frac{D'}{\sqrt{G}} \right\} X_3, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial v} = & \left\{ \frac{\partial R}{\partial v} \cos \theta - R \sin \theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \right\} X_1 + \\ & + \left\{ \sqrt{G} + \frac{\partial R}{\partial v} \sin \theta + R \cos \theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \right\} X_2 + \\ & + R \left\{ \cos \theta \frac{D'}{\sqrt{E}} + \sin \theta \frac{D''}{\sqrt{G}} \right\} X_3. \end{aligned} \right\}$$

Con queste formiamo le (6), ponendo inoltre

$$(7) \quad \mathcal{A} = \cot \sigma,$$

e troveremo per la funzione incognita  $\theta$  il sistema differenziale seguente:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \mathcal{A} \left( \frac{D}{\sqrt{E}} \cos \theta + \frac{D'}{\sqrt{G}} \sin \theta \right) + \frac{\sqrt{E}}{R} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} = \mathcal{A} \left( \frac{D'}{\sqrt{E}} \cos \theta + \frac{D''}{\sqrt{G}} \sin \theta \right) - \frac{\sqrt{G}}{R} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}; \end{cases}$$

questo dovrà riuscire, nelle nostre ipotesi, completamente integrabile.

Ora, se scriviamo dapprima le (1) sotto la forma generica

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} = A \cos \theta + B \sin \theta + C \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} = A' \cos \theta + B' \sin \theta + C', \end{cases}$$

le condizioni d'illimitata integrabilità sono le tre:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial A'}{\partial u} + BC' - CB' = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u} + CA' - AC' = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial C'}{\partial u} + BA' - AB' = 0. \end{cases}$$

Per le equazioni (I) i valori di  $A, B, C; A', B', C'$  sono

$$\begin{cases} A = \mathcal{A} \frac{D}{\sqrt{E}}, B = \mathcal{A} \frac{D'}{\sqrt{G}} + \frac{\sqrt{E}}{R}, C = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \\ A' = \mathcal{A} \frac{D'}{\sqrt{E}} - \frac{\sqrt{G}}{R}, B' = \mathcal{A} \frac{D''}{\sqrt{G}}, C' = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \end{cases}$$

e sostituendo nelle prime due (8), coll'osservare le formole (2) di Codazzi, otteniamo le due seguenti:

$$(9) \quad \begin{cases} D \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial v} - D' \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u} + \sqrt{EG} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R} \right) = 0 \\ D' \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial v} - D'' \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u} + \sqrt{EG} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{R} \right) = 0. \end{cases}$$

Calcolando in fine la (8<sub>3</sub>), con riguardo alle (3), (3\*), otteniamo

$$K(\mathcal{A}^2 + 1) = -\frac{1}{R^2},$$

cioè per la (7)

$$(10) \quad K = -\frac{\text{sen}^2 \sigma}{R^2}.$$

Quest'ultima formola dimostra intanto che:

*Le soluzioni reali del problema sono da cercarsi soltanto fra le superficie a curvature opposte (asintotiche reali).*

4. Proseguiamo nell'analisi del problema supponendo soddisfatte le condizioni d'integrabilità (9), (10), nel qual caso il sistema (I) ammette una soluzione  $\theta(u, v, c)$  con una costante arbitraria, onde esistono  $\infty^1$  superficie  $S'$  trasformate della  $S$ . Ciascuna di queste  $S'$ , insieme colla  $S$ , forma, pei dati stessi del problema, la superficie focale della congruenza rettilinea costituita dalle congiungenti  $PP'$  i punti corrispondenti di  $S, S'$ , e invero la  $PP'$  è anche l'intersezione dei due piani tangenti  $\pi, \pi'$ .

Ora dimostriamo che sopra  $S, S'$  si corrispondono le asintotiche, che cioè la congruenza è  $W$ . Per questo basterà provare (*Lezioni*, vol. II, § 243) che la falda focale  $S$  ammette una flessione infinitesima nella quale ciascun suo punto  $P$  si sposta nella direzione  $(X', Y', Z')$  della normale nel punto corrispondente  $P'$  all'altra falda  $S'$ .

Se con  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  indichiamo le componenti dello spostamento (infinitesimo) cercato, potremo porre per le (5), indicando  $T$  un fattore di proporzionalità

$$(11) \quad \bar{x} = T(\text{sen } \theta X_1 - \cos \theta X_2 + \mathcal{A}X_3),$$

colle analoghe  $\bar{y}, \bar{z}$ . Si tratterà di determinare  $T$  in guisa da soddisfare alle tre equazioni

$$S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0, \quad S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0, \quad S \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + S \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0.$$

Sostituendo in queste i valori (11), e tenendo conto delle formole precedenti, si trova che le condizioni per  $T$  si riducono alle due seguenti:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log T}{\partial u} &= \mathcal{A} \left( \frac{D}{\sqrt{E}} \text{sen } \theta - \frac{D'}{\sqrt{G}} \cos \theta \right) - \frac{\sqrt{E}}{R} \cos \theta \\ \frac{\partial \log T}{\partial v} &= \mathcal{A} \left( \frac{D'}{\sqrt{E}} \text{sen } \theta - \frac{D''}{\sqrt{G}} \cos \theta \right) - \frac{\sqrt{G}}{R} \text{sen } \theta. \end{aligned} \right.$$

Basta dunque provare che la condizione d'integrabilità per le (12) è identicamente soddisfatta. A questo arriviamo nel modo più semplice ricor-

dando che il sistema (I) ammette una soluzione  $\theta^* = \theta(u, v, c)$  con una costante arbitraria  $c$ . Se deriviamo le (I) rapporto al parametro  $c$ , che entra soltanto in  $\theta$  e poniamo

$$\frac{\partial \theta}{\partial c} = \psi,$$

ne deduciamo subito

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \log \psi}{\partial u} = -A \left( \frac{D}{\sqrt{E}} \operatorname{sen} \theta - \frac{D'}{\sqrt{G}} \cos \theta \right) + \frac{\sqrt{E}}{R} \cos \theta \\ \frac{\partial \log \psi}{\partial v} = -A \left( \frac{D'}{\sqrt{E}} \operatorname{sen} \theta - \frac{D''}{\sqrt{G}} \cos \theta \right) + \frac{\sqrt{G}}{R} \operatorname{sen} \theta. \end{array} \right.$$

Confrontando colle (12), vediamo che in effetto queste si soddisfano ponendo, a meno di un fattore costante di proporzionalità

$$T = \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial c}}.$$

5. Abbiamo così dimostrato che: *la congruenza formata dalle congiungenti i punti corrispondenti di S, S' è una congruenza W, che ha S, S' come falde focali.*

Ed ora potremo subito completare il risultato dimostrando che: *le curvature K, K' di S, S' in punti corrispondenti sono eguali.*

E infatti, siccome R rappresenta la distanza focale e  $\sigma$  l'angolo dei piani focali, la formola di Ribaucour per le congruenze W (*Lezioni*, vol. II, § 243) ci dà

$$KK' = \left( \frac{\operatorname{sen} \sigma}{R} \right)^4 :$$

dunque per la (10) sarà

$$K' = K = - \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{R^2}.$$

A questo punto possiamo invocare i teoremi noti sulle congruenze W, a falde focali di eguale curvatura, e dedurne che la curvatura di S, espressa pei parametri  $\alpha, \beta$  delle asintotiche, avrà necessariamente la forma A)

$$K = - \frac{1}{\{g(\alpha) + \psi(\beta)\}^2}.$$

Viceversa per ogni superficie S di questa classe il problema proposto è risolubile, ed anzi in  $\infty^1$  modi poichè sappiamo che, una volta fissata S

nella classe A), resta ancora nelle espressioni del raggio  $R$  e dell'angolo  $\sigma$  una costante arbitraria.

Dopo ciò si vede che le formole (9), (10) rappresentano, in coordinate ortogonali qualunque, le condizioni necessarie e sufficienti affinché una superficie  $S$  appartenga alla classe A). Si avverta poi che, mentre la condizione (10) dipende solo dall'elemento lineare di  $S$ , le altre due (9) contengono invece elementi variabili per flessione. In generale dunque una superficie  $S$  della classe A) perde, se si flette, questa sua proprietà, salvo nel caso ben noto delle superficie pseudosferiche, ove  $A$  ed  $R$  sono costanti e le (9) si risolvono in identità.

6. Nel numero precedente abbiamo invocato le proprietà note delle congruenze  $W$  a falde focali di eguale curvatura per completare la risoluzione del nostro problema. Ma possiamo anche, senza ricorrere a queste, proseguire coll'esame diretto delle condizioni (9), (10), e dedurne anzi, in nuovo modo, gli antichi risultati. Per questo conviene prima di tutto trasformare le (9) in coordinate curvilinee qualunque ( $u, v$ ), che diano al  $ds^2$  la forma generale

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2.$$

Semplici considerazioni invariantive dimostrano che le (9) si scrivono nel modo più generale sotto la forma:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{D' \frac{\partial A}{\partial u} - D \frac{\partial A}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{D'' \frac{\partial A}{\partial u} - D' \frac{\partial A}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \end{array} \right.$$

mentre la (13), posto  $K = -\frac{1}{\rho^2}$ , si scrive sempre

$$\frac{\sin \sigma}{R} = \frac{1}{\rho}, \quad \text{e} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho \sin \sigma},$$

e si ha  $A = \cot \sigma$ .

Ora se a linee coordinate prendiamo le asintotiche ( $\alpha, \beta$ ), avremo

$$D = D'' = 0, \quad \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\rho},$$

onde le (13) diventano

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = \cot \frac{1}{2} \sigma \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \end{array} \right.$$

Qui la condizione d'integrabilità è semplicemente  $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$ , da cui

$$\varrho = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \text{e} \quad K = - \frac{1}{\{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)\}^2}.$$

Viceversa se  $\varrho$  ha questa forma, le (14) sono completamente integrabili, e però nella espressione di  $\sigma$ , indi di  $R$ , entra una costante arbitraria.

Così abbiamo provato direttamente chè per ogni superficie  $S$  della classe  $A$ , e per queste soltanto, il problema proposto al n. 1 ammette soluzioni, anzi ne ammette  $\infty^1$ .

7. Dimostriamo da ultimo come questi risultati, ottenuti nell'ipotesi dello spazio euclideo, si estendono facilmente alla geometria non euclidea, dove il problema consente una risoluzione del tutto analoga. Eseguiamo qui i calcoli pel caso dello spazio ellittico, la cui curvatura  $K_0$  si assumerà semplicemente  $= 1$ , e basterà poi indicare le leggieri variazioni da introdursi nelle formole se lo spazio è invece iperbolico.

Qui per utilizzare subito le formole date in altra mia Memoria <sup>(1)</sup> riferiremo la superficie data  $S$  alle sue linee di curvatura  $(u, v)$ , e indicheremo con  $r_1, r_2$  i raggi principali (ridotti) di curvatura, legati ai coefficienti  $E, G$  del  $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$  dalle equazioni di Codazzi

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) = \frac{1}{r_2} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\sqrt{E}}{r_2} \right) = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

e dalla relazione di Gauss:

$$(16) \quad \frac{1}{r_1 r_2} + 1 = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\}.$$

Indicando, come al n. 1, con  $R = R(u, v)$  il raggio del circolo, con  $\sigma = \sigma(u, v)$  l'angolo d'inclinazione del piano delle faccette  $f'$  sul piano della corrispondente faccetta  $f \equiv (u, v)$ , ed avendo ancora  $\theta$  il significato del n. 2, dai calcoli eseguiti al § 1 della Memoria ora citata dedurremo per l'incognita  $\theta$  il sistema differenziale:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \sqrt{E} \cot R \cdot \sin \theta - \frac{\sqrt{E}}{r_2} \cot \sigma \cdot \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} = - \sqrt{G} \cot R \cdot \cos \theta - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cot \sigma \cdot \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazi di curvatura costante* (Annali di matematica, tomo X della serie 3<sup>a</sup>, 1904).

Per esprimere le condizioni d'illimitata integrabilità dovremo qui porre, nelle notazioni del n. 3:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{\sqrt{E}}{r_2} \cot \sigma, & B &= \sqrt{E} \cot R, & C &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \\ A' &= -\sqrt{G} \cot R, & B' &= -\frac{\sqrt{G}}{r_2} \cot \sigma, & C' &= -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \end{aligned} \right.$$

e sostituire questi valori nelle (8). Le due prime ci danno, a causa delle (15):

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{G} \frac{\partial \cot R}{\partial u} &= \frac{\sqrt{E}}{r_2} \frac{\partial \cot \sigma}{\partial v} \\ \sqrt{E} \frac{\partial \cot R}{\partial v} &= -\frac{\sqrt{G}}{r_1} \frac{\partial \cot \sigma}{\partial u}, \end{aligned} \right.$$

mentre la terza (8) diventa per la (16)

$$(19) \quad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 R}.$$

Questa ultima dice intanto che la curvatura *relativa*

$$k_0 = \frac{1}{r_1 r_2}$$

dalla superficie S deve essere negativa (asintotiche reali).

8. Supposte soddisfatte le condizioni (18), (19), *necessarie e sufficienti* per la solubilità del problema, avremo che le  $\infty^3$  faccette derivate  $f'$  si distribuiranno in  $\infty^1$  superficie trasformate  $S'$ , e ciascuna di queste formerà colla S, come al n. 5, le due falde della congruenza costituita dalle congiungenti  $PP'$  i punti corrispondenti. Dimostriamo anche qui che: *sopra S, S' si corrispondono le asintotiche (congruenza W)*.

Per questo basterà provare che i coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale della S' sono proporzionali ai corrispondenti della S, che sussistono cioè le relazioni

$$(20) \quad D' = 0 \quad \frac{G}{r_1} D - \frac{E}{r_2} D'' = 0.$$

In effetto, dai calcoli eseguiti al § 1 della detta Memoria, abbiamo in generale le formole:

$$\begin{aligned}
 D &= \sqrt{E} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} R} \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\partial R}{\partial u} + \sqrt{E} \cos \theta \right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{E} \operatorname{sen} R}{r_2 \operatorname{sen} \sigma} \cos \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \operatorname{sen} \theta \right) \\
 D' &= -\sqrt{G} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} R} \cos \theta \left( \frac{\partial R}{\partial u} + \sqrt{E} \operatorname{sen} \theta \right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{E} \operatorname{sen} R}{r_2 \operatorname{sen} \sigma} \cos \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_2} \cos \theta \right) \\
 D'' &= \sqrt{E} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} R} \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\partial R}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen} \theta \right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{G} \operatorname{sen} R}{r_1 \operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \operatorname{sen} \theta \right) \\
 D''' &= -\sqrt{G} \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} R} \cos \theta \left( \frac{\partial R}{\partial v} + \sqrt{G} \operatorname{sen} \theta \right) + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{G} \operatorname{sen} R}{r_1 \operatorname{sen} \sigma} \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \cos \theta \right),
 \end{aligned}$$

e nel caso nostro, sussistendo le (18), (19), si verifica subito che ne seguono le (20).

Dimostrato così che la congruenza a falde focali  $S, S'$  è una congruenza  $W$ , basterà ora invocare il teorema generalizzato di Ribaucour (Mem. cit., § 16), che nello spazio ellittico assume la forma

$$k_0 k'_0 = \left( \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} R} \right)^4,$$

essendo  $k_0, k'_0$  le curvature (relative) delle due falde focali  $S, S'$ , e dalla (19) risulterà

$$k'_0 = k_0 = -\frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\operatorname{sen}^2 R}.$$

Si conclude che: *le due falde focali  $S, S'$  hanno in punti corrispondenti eguali curvature.*

Si sa che le superficie  $S$  dello spazio ellittico che formano le falde focali di siffatte congruenze  $W$  sono *caratterizzate* dalla proprietà (Mem. cit., § 17) che la loro curvatura relativa  $k_0$ , espressa pei parametri  $\alpha, \beta$  delle asintotiche, prende la forma

$$B) \quad k = -\left\{ \frac{1 + \varphi(\alpha) \psi(\beta)}{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)} \right\}^2,$$



da sostituirsi nello spazio ellittico alla formola euclidea A). Viceversa ogni superficie S dello spazio ellittico di questa classe B) è falda focale di  $\infty^2$  congruenze dello spazio, onde per ogni tale S il problema proposto ammette  $\infty^1$  soluzioni.

Risultati del tutto analoghi si hanno nel caso iperbolico  $K_0 = -1$ , dove le funzioni circolari di R sono da mutarsi nelle corrispondenti iperboliche, e la formola B) è da sostituirsi coll'altra

$$k_0 = - \sqrt{\frac{1 + \varphi(\alpha) \psi(\beta)}{\varphi(\alpha) - \psi(\beta)}}^2.$$

**Fisiologia.** — *Innervazione del ricambio.* Memoria del Socio A. STEFANI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

**Meccanica celeste.** — *Sulla Polodia.* Nota di G. BOCCARDI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti <sup>(1)</sup> si critica un articolo del dott. E. Roggero (*Bulletin Astronomique* 1913) che ha per oggetto alcune formole per determinare la polodia.

In assenza del Roggero (attualmente al fronte) ho giudicato opportuno di dettare altrove alcune pagine per spiegare il punto di vista nel quale egli si è probabilmente messo, non senza rilevare anche io che la esposizione del Roggero si presta all'equivoco ed è incompleta. Ho stimato doveroso dettar quelle pagine anche per ispiegare la fiducia con la quale ho senz'altro ripetute le conclusioni di lui. Credo però prezzo dell'opera il riassumere in questi stessi *Rendiconti* le cose principali da me pubblicate altrove.

Io non credo che le osservazioni sulla variazione della latitudine sieno destinate, come le esperienze di gabinetto nei corsi di fisica o chimica, a conferma di una qualche teoria <sup>(2)</sup> sulla rotazione terrestre. Ogni teoria di matematica applicata richiede il sostrato di ipotesi fisiche, ed ha tanto valore per quanto i fatti confermano siffatte ipotesi.

<sup>(1)</sup> V. Cerulli, *Sulla determinazione della polodia* (4 febr. 1917).

<sup>(2)</sup> L'impostazione varia da teoria a teoria. Così per es., in un primo tipo, si considera la Terra rigida (Euler), ovvero costituita da un nucleo rigido, entro cui avvengono ciclici trasporti di massa (Volterra); in un secondo tipo, si tien conto di deformazioni elastiche (Lord Kelvin, Larmor) conservative, oppure (Darwin) dissipative, con speciale riguardo all'azione delle maree.

Se i dati di osservazione contrastano con la teoria, questo deve far pensare ad altre ipotesi fisiche e modifiche nella teoria stessa.

Il dott. Roggero, poggiandosi su i risultati delle osservazioni, ha considerato la direzione dell'asse istantaneo di rotazione della Terra come non assolutamente fissa nello spazio. Egli però avrebbe dovuto accennare altresì a quegli spostamenti nell'interno della Terra, dell'asse istantaneo di rotazione, che sono certo elemento integrante del fenomeno: tale ad es., supponendo la Terra rigorosamente rigida, quello che dà luogo al *ciclo euleriano*.

Ma anche dalla sola teoria di Euler, ammettendo per vere le ipotesi su cui essa riposa, risulta che l'asse istantaneo, oltre al muoversi nell'interno della Terra per lo spostarsi di questa, è soggetto ad una piccola *nutazione diurna*, ossia ad un piccolo moto oscillatorio nello spazio, siccome lo stesso asse d'inerzia ha esso pure una nutazione diurna molto più notevole, nutazione che produce variazioni nella latitudine nel corso di un giorno sidereo, ed alla quale non si è badato nel tracciamento della polodia col metodo fin qui seguito. Inoltre l'asse d'inerzia subisce una nutazione semidiurna. L'insieme di tutte queste nutazioni può giungere ad una ampiezza tre volte maggiore di quella del termine  $\varepsilon$  di Kimura, al quale si è invece avuto riguardo.

Il dott. Roggero avrebbe dovuto accennare alla complessità del problema e non affermare che con le osservazioni di una sola stazione si può tracciare la polodia. Il Cerulli fa vedere come ciò sarebbe possibile soltanto con osservazioni di precisione quale oggi non si può raggiungere, e di più, supposti noti gli spostamenti dello zenit nel senso perpendicolare al meridiano. Io invece aggiungo che nemmeno questo basterebbe, perchè occorrerebbe avere riguardo alle nutazioni diurne ed a molte altre cose. Troppe incognite presenta il problema. Del resto, le ricerche del Roggero gli sono servite soltanto per la sua tesi di laurea, e nell'Osservatorio di Pino non ci occupiamo, come sembra che pensi il dott. Cerulli, di tracciare la polodia, nè col metodo del Roggero nè con altro. Noi siamo rimasti nel campo delle osservazioni, di cui altri ha fatto risaltare la precisione, ed abbiamo messo in luce variazioni della latitudine a breve periodo, anche esse sfuggite nel tracciamento ordinario della polodia.

In conclusione, mi sembra che il meglio si possa fare sia di seguire il consiglio del Poincot (*Précession des équinoxes*):

..... dans des problèmes de cette nature, la difficulté des intégrations nous force de négliger, presque à chaque pas, quelque terme qui nous arrête; ce qui revient au fond à négliger une partie des causes du phénomène tandis que l'observation qui ne s'attache qu'au résultat, tient tacitement compte de toutes les causes, connues ou inconnues, qui peuvent y concourir ».

Geofisica. — *Ancora sulla polodia.* Nota del Corrispondente V. CERULLI.

Fra le varie pretensiose ed erronee asserzioni contenute nella Nota di questo Rendiconto, dettata dal sig. Boccardi — della quale è piaciuto alla cortesia dell'illustre Consocio Levi-Civita farmi leggere il manoscritto — l'Accademia mi consentirà di rilevare, senza indugio, per dimostrarlo insussistente, l'appunto che il sig. Boccardi fa al metodo fin qui tenuto nel tracciamento della polodia, l'appunto, dico, di *non aver badato alla nutazione diurna.*

Si sa che i calcoli fatti finora in questo campo non erano intesi a descrivere tutte le accidentalità della curva polodica, bensì solo il suo *corso medio*, abbastanza complicato esso pure; ma potrebbe nascere il dubbio che trascurando tali accidentalità, oltre che nella rappresentazione grafica, anche nel calcolo delle coordinate medie del polo, giorno per giorno, queste ultime abbiano potuto risentirne qualche alterazione, cosicchè la polodia, quale la vediamo disegnata dal 1900 in qua, possa non essere in tutto e per tutto la genuina espressione del cammino del polo sopra la Terra.

La nutazione di cui qui si tratta è l'epiciclo che il polo dovrebbe descrivere, secondo la teoria, giornalmente attorno ad una posizione media, movendosi, non in senso diretto, come fa in generale il polo medio, bensì in senso contrario a quello in cui si compie la rotazione della Terra, vale a dire nel senso in cui sono contati gli angoli orari delle stelle e le longitudini terrestri. Se riferiamo quindi le coordinate del polo di rotazione ad un sistema cartesiano centrato nel polo geografico, ed il cui asse positivo delle  $x$  sia tangente al meridiano di Greenwich e l'asse positivo delle  $y$  tangente al meridiano che sta  $90^\circ$  ad occidente di Greenwich, e se indichiamo, inoltre, con  $\mu$  il raggio dell'epiciclo polare e con  $\nu$  la sua fase nell'istante in cui una qualunque delle stelle <sup>(1)</sup> impiegate per la misura della latitudine nelle 6 stazioni boreali, passa pel meridiano di Greenwich, le variazioni diurne delle coordinate del polo medio saranno da scrivere sotto la forma:

$$dx_0 = \mu \cos(\nu + K\lambda) \quad dy_0 = \mu \sin(\nu + K\lambda)$$

dove  $\lambda$  è la longitudine rispetto a Greenwich, e contata verso Occidente,

<sup>(1)</sup> Per semplificare il discorso parlo di *stelle*, anzichè di *coppie talcottiane di stelle* poichè in sostanza la coppia equivale alla stella unica zenitale, osservata in entrambe le posizioni del Zenit-telescopio, ossia invertendo questo durante il passaggio.

della stazione in cui la stella culmina, e  $K$  un coefficiente numerico poco maggiore di 1.

La differenza  $\varphi - \varphi_0$  fra l'altezza polare osservata in detta stazione e la latitudine geografica <sup>(1)</sup> dovrà, ciò posto, verificare l'equazione:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= x \cos \lambda + y \sin \lambda = \\ &= [x_0 + \mu \cos(\nu + K\lambda)] \cos \lambda + [y_0 + \mu \sin(\nu + K\lambda)] \sin \lambda = \\ &= x_0 \cos \lambda + y_0 \sin \lambda + \mu \cos[\nu + (K - 1)\lambda] \end{aligned}$$

$x_0$  ed  $y_0$  denotando le coordinate del *polo medio del giorno*. L'ultimo termine per la piccolezza di  $\mu$  e di  $K - 1$  non si differenzia sensibilmente da  $\mu \cos \nu$ . È dunque una costante comune a tutte le stazioni internazionali nord, e che solo dipende dalla stella osservata. Chiamata  $z$  questa costante, le 6 stazioni forniscono quotidianamente, per ciascuna stella, 6 equazioni della forma:  $A\varphi = x_0 \cos \lambda + y_0 \sin \lambda + z$ , ed è chiaro che questa forma non si altera, cioè il terzo termine resta sempre una costante, anche quando per ogni stazione si formi la media delle  $n$  equazioni rispondenti alle  $n$  stelle di latitudine osservate.

Risolvendo dunque le 6 equazioni di tipo

$$\varphi - \varphi_0 = x \cos \lambda + y \sin \lambda + z$$

troveremo le coordinate  $x$  ed  $y$  del polo medio di ciascun giorno senza verun pericolo che i loro valori abbiano a riuscir falsati per effetto della nutazione. Il pericolo ci sarebbe solo se la nutazione introducesse altri termini, oltre la costante  $z$ , paragonabili a questa ed agli altri due, e che noi li trascurassimo; mentre ponendo  $\mu \cos[\nu + (K - 1)\lambda] = \mu \cos \nu$  noi non trascuriamo che un termine in  $\mu(K - 1)$ , vale a dire di secondo ordine.

Ora la formola dianzi scritta per  $\varphi - \varphi_0$  è precisamente quella che si impiega per tracciare la polodia nel metodo delle stazioni internazionali. Il metodo stesso è dunque, almeno per quanto riguarda la nutazione, perfettamente corretto.

Ma l'elaborazione delle latitudini in base alla formola trinomia, oltre darci le coordinate del polo medio diurno indipendentemente dalla nutazione, ci ha anche insegnato che quest'ultima non ha un'amplitudine tale da poter essere avvertita, nello stato attuale della tecnica astronomica. In altre pa-

<sup>(1)</sup> La latitudine  $\varphi_0$ , costante per ogni stazione, è il valore che prenderebbe l'altezza polare se il polo di rotazione venisse a coincidere con l'origine fissa delle coordinate  $x, y$ . Questa origine è scelta in modo da star presso da poco nel centro delle spire della polodia, ed in essa si colloca il *polo geografico*, la cui posizione, per la indeterminazione che le è propria, può, entro certi limiti, esser fissata ad arbitrio. Il polo geografico si chiama di solito *polo medio*, locuzione che nel testo abbiamo evitata per non far nascere confusione col polo medio diurno.

role: la polodia *vera* non si distingue dalla polodia *media*. Infatti, la fase  $\nu$  variando rapidamente, di  $15^\circ$  circa in un'ora, se il  $z$  effettivamente risultante dal detto calcolo, ossia il termine di Kimura, provenisse dalla nutazione, o anche solo fosse  $\mu \cos \nu$  parte cospicua di  $z$ , converrebbe che ogni giorno il  $z$  calcolato in media dal primo gruppo di stelle accennasse ad una differenza sistematica con quello dedotto dal secondo gruppo: ciò che non è affatto risultato finora essere il caso, tuttochè gli  $z$  si assoggettassero al più rigoroso e minuto esame, appunto per studiarne il periodo. Un periodo fu scoperto infatti, ma assai lento, di circa un anno.

È poi facilissimo vedere che le coordinate  $x$  ed  $y$  si determinano indipendentemente anche dalle variazioni del polo a periodo più corto di un giorno, nonchè dall'infusso lunare sulla verticale. Le prime, appunto per il corto periodo, si eliminano automaticamente dalle equazioni normali, ove si sommano, con completo pareggio delle più minute onde, i  $\Delta\varphi$  delle diverse stazioni <sup>(1)</sup>: il secondo, per essere sensibilmente eguale in tutte le stazioni internazionali, che lavorano sotto eguale latitudine e con le stesse stelle, si riversa, come la nutazione diurna, per intero sul termine  $z$  <sup>(2)</sup>.

Anzichè, dunque, criticare il metodo di tracciamento della polodia, seguito fin qui, dobbiamo riconoscere che non sarebbe facile concepirne un altro che più sapientemente provvedesse a rendere innocue tutte le benchè minime e le problematiche cause di errore.

La polodia così tracciata ha il pregio eminente di rappresentare il cammino del polo in modo del tutto sperimentale, *indipendentemente* cioè da tutte le teorie della rotazione terrestre, onde è un acquisto veramente prezioso così per la geofisica che per la meccanica celeste, cui porge il mezzo

(1) Si eliminerebbe anche una eventuale nutazione diurna in senso opposto al sopra considerato, che è proprio della Terra rigida.

(2) Per i periodi lunari della verticale può ripetersi lo stesso ragionamento fatto sopra per la nutazione. Se le loro amplitudini fossero accessibili ai nostri telescopi zenitali, il termine  $z$  risulterebbe diverso secondo che dedotto dall'una o dall'altra stella di ciascun giorno, e l'andamento degli  $z$  medi, in più di un decennio di lavori, avrebbe messi i detti periodi nella più perfetta evidenza. Così, l'opera internazionale delle latitudini ha creato nel termine  $z$  di Kimura un nuovo interessante problema, che non si risolve nè con l'ipotesi che il termine provenga dalla nutazione, nè con quella che lo facesse dipendere dall'azione lunare sulla verticale, o da entrambe queste cause unite insieme, entrambe le cause essendosi mostrate incapaci di dare effetti sensibili agli attuali mezzi di misura. Questo ultimo risultato potevamo aspettarcelo. Il zenit-telescopio non è il pendolo orizzontale, e nulla di più stolto del credere che quando un istrumento è impari ad un certo ordine di grandezze, si possa nondimeno arrivare a scoprir queste moltiplicando le misure. Vero è che il sig. Boccardi ci fa sapere di aver messo in luce variazioni di latitudine a breve periodo, sfuggite nel tracciamento della polodia, ma non ci dice come si assicurò che — almeno — gli *errori probabili* di tali variazioni, che vorremmo dire *osservate*, non superassero le variazioni stesse.

rigoroso di verificare teorie e calcoli, e presenta nuovi problemi *reali* da affrontare.

Il sig. Boccardi estende la sua obiezione, relativa alla nutazione diurna, anche al metodo, cui io accennava nella mia Nota del febbraio u. s., di determinar la polodia in base alle due componenti dello spostamento del Zenit in un'unica stazione. Ma se le misure si distribuiscono con qualche uniformità lungo il corso della giornata, facendole p. es. di 6 in 6, o di 8 in 8 ore ecc., è pur chiaro che la nutazione, anche supponendone percettibile l'ampiezza, viene a restare, nel medio, eliminata. Io chiamai questo metodo *puramente teorico*, ma seppi poi che ha già dato buoni risultati pratici a Pulkova ed a Leida, in epoche nelle quali il metodo tanto più sicuro delle stazioni internazionali non era stato ancora messo in opera.

Matematica. — *Affinità e superficie applicabili*. Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Corrispondente CASTELNUOVO.

1. Nel costruire la teoria delle superficie applicabili di specie qualsiasi <sup>(1)</sup> mi sono imbattuto nella seguente questione:

« Dati due spazi affini, esistono in essi superficie corrispondenti applicabili di una determinata specie? ».

Si prevede che, fissata la specie  $\nu$  dell'applicabilità, l'esistenza di tali superficie dipende dalla dimensione degli spazi che si pongono in corrispondenza affine, perchè se gli spazi hanno dimensioni abbastanza piccole, le condizioni poste dall'applicabilità possono portare all'uguaglianza dei due spazi, quindi delle due superficie. Il problema consiste dunque nel determinare un limite per la dimensione  $r + 1$  dei due spazi tale che al di sotto di esso non possano esistere superficie corrispondenti applicabili di specie  $\nu$ .

Nella nostra teoria vedremo che il caso più interessante è quello in cui la risposta alla domanda formulata è negativa; ma anche prescindendo da questa teoria, per la quale il teorema che abbiamo in vista è fondamentale, mi pare che la questione abbia per sè interesse e d'altra parte il metodo è abbastanza semplice perchè se ne possa comprendere l'esposizione staccata dal resto della teoria.

2. Cominciamo da alcune osservazioni affatto elementari sull'affinità fra due  $S_{r+1}$ , siano  $S$  ed  $\bar{S}$ .

Scelti due  $(r + 1)$ -edri ortogonali corrispondenti (come si può), le equazioni della trasformazione fra  $S$  ed  $\bar{S}$  sono del tipo

$$\bar{X}_i = l_i X_i \quad (i = 1, \dots, r + 1).$$

(<sup>1</sup>) Per le deformazioni di specie  $\nu$  vedi la mia Nota: *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore* [Rendic. Acc. dei Lincei, vol. XXV, serie 5<sup>a</sup>, fasc. 9 (1916), pp. 627-634].

Punteggiate corrispondenti sono simili; il rapporto di similitudine dipende solo dalla direzione; in particolare sono uguali alle corrispondenti le rette di  $S$  che hanno le loro direzioni (che diremo *direzioni di uguaglianza*) sulla quadrica all'infinito:

$$\sum_1^{r+1} (l_i^2 - 1) X_i^2 = 0 \quad X_{r+2} = 0.$$

L'indice di specializzazione di questa quadrica si dirà anche *indice di specializzazione dell'affinità*.

È evidente che se in un piano vi sono tre rette uguali alle corrispondenti, i due piani corrispondenti sono uguali. Un piano contiene in generale due direzioni di rette uguali alle corrispondenti: se il loro angolo è uguale a quello delle corrispondenti, il loro piano è uguale al corrispondente. Da ciò segue che:

*Se in uno  $S_k$  vi sono  $\infty^{k-2}$  direzioni di uguaglianza non tutte di un  $S_{k-1}$ , e se una di esse forma con le altre angoli uguali ai corrispondenti, lo  $S_k$  è uguale al corrispondente nell'affinità.*

4. Esistono superficie applicabili in due  $S_3$  affini?

Consideriamo punti corrispondenti delle due superficie  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  applicabili ed affini: le rette uscenti da quei punti e situate nei piani tangenti si corrispondono per uguaglianza, essendo uguali su di esse gli elementi lineari delle superficie.

Il cono delle rette d'uguaglianza col vertice in un punto della superficie  $\sigma$  contiene il piano ivi tangente: è dunque spezzato e per ragioni di continuità tutti i piani tangenti dovrebbero passare per la traccia di uno di essi sul piano all'infinito.

Ciò è impossibile se la superficie stessa non è un piano e proprio un dei piani uguali ai corrispondenti.

*Se due spazi  $S_3$  riferiti in modo affine possiedono due superficie corrispondenti applicabili, i due spazi, quindi le due superficie, si ottengono l'uno dall'altro con un movimento.*

4. Esaminiamo la stessa questione in  $S_4$ .

I piani tangenti alla superficie di  $S$  devono passare per le generatrici di un sistema della quadrica delle direzioni di uguaglianza; cioè nel caso generale vi sarebbero  $\infty^1$  piani tangenti per ogni generatrice: assurdo. Se poi esistessero soli  $\infty^1$  piani tangenti (la superficie sarebbe sviluppabile) le loro rette all' $\infty$  dovendo essere incidenti se infinitamente vicine, non possono appartenere alla quadrica.

Se la quadrica all'infinito si specializza, cioè se l'affinità è speciale e possiede  $\infty^1$  giaciture d'uguaglianza, aventi in comune una direzione,  $\infty^1$  piani aventi quelle giaciture involuppano un cilindro applicabile sul corrispondente.

Infatti, se le equazioni dell'affinità speciale sono

$$\bar{X}_i = l_i X_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ e } \bar{X}_4 = X_4$$

assunta nello  $S_3$  ( $X_1, X_2, X_3$ ) una *curva*

$$X_i = X_i(u)$$

tale che

$$\sum_{i=1}^3 (l_i^2 - 1) \left( \frac{dX_i}{du} \right)^2 = 0,$$

ogni cilindro per essa con le generatrici parallele ad  $X_4$  è applicabile sul corrispondente, senza essere affatto uguale ad esso. Tutte le curve nominate si sanno costruire perchè si ottengono con l'affinità

$$X'_i = \sqrt{l_i^2 - 1} X_i$$

dalle curve isotrope dello spazio  $S_3$  ( $X'_1, X'_2, X'_3$ ).

Se poi la quadrica di uguaglianza si spezza in due piani, i piani tangenti debbono tutti incidere lungo rette uno di essi. Da ciò si deduce subito che la superficie sta in  $S_3$ ; siamo quindi nel caso di prima. Quindi:

*Neppure in due  $S_4$  affini esistono superficie corrispondenti applicabili (esclusi i cilindri involuppati da piani uguali se l'affinità è speciale).*

5. In  $S_5$ . Consideriamo in un punto della superficie il piano osculatore ad una linea a prima curvatura invariante <sup>(1)</sup>. Anche questo è (oltre il piano tangente) uguale al suo corrispondente: quindi l'affinità fra i due piani fa corrispondere alla tangente e alla prima normale principale alla curva gli elementi analoghi della curva trasformata. D'altronde, come vedremo subito, l'angolo della prima normale principale detta con una tangente assegnata è uguale al corrispondente: per l'osservazione fatta sull'affinità, lo  $S_3$  che congiunge il piano tangente al piano osculatore ad una curva di prima curvatura invariante, è uguale al corrispondente.

Da quanto abbiamo detto risulta che in ogni punto della superficie esiste *almeno* uno  $S_3$  uguale al corrispondente. Cioè la quadrica dello  $S_4$  all'  $\infty$  di  $S_5$  che dà le direzioni d'uguaglianza contiene dei piani.

Perchè ciò sia, la quadrica dev'essere specializzata.

Se è specializzata una volta si compone di  $\infty^1 S_2$  per un punto:  $\infty^1$  di quegli  $S_3$  passano per un  $S_2$ , quindi  $\infty^1 S_2$  tangenti tagliano uno  $S_2$  della quadrica in rette e per ciò stanno in uno  $S_3$ . Dunque la superficie ha  $\infty^2$  curve in  $S_3$ : ma i piani tangenti lungo una di esse stanno in  $S_3$ , quindi ogni  $S_3$  contiene due di queste curve infinitamente vicine e, perciò, se la

(1) *Basi analitiche ecc.*, ultimo alinea del n. 5.



superficie non sta in  $S_3$  (nel qual caso sarebbe rimasta rigida) le curve stanno in  $S_2$  osculatori ad una curva. Le rette all'infinito di due di questi piani infinitamente vicini s'incidono: ciò non è possibile che se tutte queste rette stanno in un piano della quadrica di  $S_4$  (e si avrebbero di nuovo superficie uguali alle corrispondenti), o se passano per il vertice: in questo caso, l'unico che risponda al nostro problema, la superficie è un cilindro involupato dai piani uguali ai corrispondenti.

Se la quadrica fosse due volte specializzata, si vedrebbe analogamente che la superficie contiene  $\infty^1$  curve in piani passanti per la sua retta vertice; contiene altresì  $\infty^1$  curve negli  $S_3$  normali a questa giacitura: le tangenti a queste curve vanno ad appoggiarsi alla conica segata dallo  $S_2$  all'infinito degli  $S_3$  sulla quadrica.

*Se due  $S_5$  sono riferiti in un'affinità non speciale e contengono superficie applicabili di prima specie corrispondenti, essi, come pure le superficie corrispondenti, sono uguali.*

*Se l'affinità è una o due volte specializzata, possono aversi risp. cilindri e superficie con  $\infty^1$  curve in un sistema di piani paralleli, delle particolari specie sopra descritte, applicabili e non uguali ai corrispondenti.*

6. Una deformazione di specie  $\nu$  di una superficie lascia inalterati gli elementi lineari e le prime  $\nu - 1$  curvatures di tutte le sue curve. Riferiti i punti corrispondenti di due superficie applicabili di specie  $\nu$  alle stesse coordinate curvilinee  $u, v$ , i simboli

$$[hklm] = \sum_i^n \frac{\partial^{h+k} X_i}{\partial u^h \partial v^k} \frac{\partial^{l+m} X_i}{\partial u^l \partial v^m} = [lmhk]$$

per

$$h + k \leq \nu \quad , \quad l + m \leq \nu$$

sono uguali in punti corrispondenti delle due superficie <sup>(1)</sup>. Se  $h + k \geq l + m$  si dice che  $h + k$  è l'ordine del simbolo; si dimostra che sono anche uguali i simboli *dedotti* d'ordine  $\nu + 1$ , per i quali

$$\nu + 1 = h + k > l + m.$$

7. Consideriamo una curva (sulla quale assumeremo variabile la sola  $u$ ) di una superficie ed un suo punto P: determiniamo l'angolo della sua prima normal principale con una tangente alla superficie in P. I coseni direttori della prima retta sono proporzionali a

$$\left| \begin{array}{cc} \sum_i \left( \frac{\partial X_i}{\partial u} \right)^2 & \frac{\partial X_i}{\partial u} \\ \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial u} \frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2} \end{array} \right|$$

(1) Nota citata, n. 5.

e quelli della seconda a  $\frac{\partial X_i}{\partial u} + \lambda \frac{\partial X_i}{\partial v}$  ( $\lambda$  è il parametro che individua la tangente fissata). Il coseno del loro angolo è funzione di  $\lambda$ , di simboli del primo ordine, di simboli dedotti del secondo ordine e del simbolo [2020]. Per due superficie applicabili, siccome la rappresentazione è conforme, tangenti corrispondenti sono individuate dallo stesso valore di  $\lambda$ : i simboli nominati, eccetto al più [2020], sono pure uguali per le due superficie. Se poi la curva di cui trattasi è a prima curvatura invariante, anche [2020] è invariante.

Si ha dunque:

*In una deformazione di prima specie è invariante l'angolo che la normale principale in un punto di una curva a prima curvatura invariante forma con il piano tangente.*

Questa è l'osservazione già applicata al n. 5.

Se poi la deformazione è di seconda specie, ogni curva conserva la prima curvatura; quindi:

*In una deformazione di seconda specie è invariante l'angolo che la normale principale ad una curva qualsiasi in un suo punto forma col piano ivi tangente.*

8. Ricordiamo ora la definizione di spazio  $h$ -tangente,  $S(h)$ , ad una superficie in un suo punto <sup>(1)</sup>: esso è lo spazio definito dal punto  $(X_i)$  stesso e dai suoi derivati  $\left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right), \left(\frac{\partial X_i}{\partial v}\right), \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial u^2}\right), \dots$  fino a quelli di ordine  $h$ . Lo  $S(h)$  contiene gli  $S_h$  osculatori alle curve della superficie nel punto, ma in generale non coincide col loro luogo. La sua dimensione per  $h > 1$ , ed escluse le ordinarie sviluppabili, è compresa fra  $h + 2$  ed  $\frac{h(h+3)}{2}$ ; due  $S(h)$   $h$ -tangenti in due punti successivi, si tagliano in uno  $S(h-1)$ .

Vogliamo dimostrare che *in una deformazione di specie  $v$  fra due superficie affini gli  $S(v)$  corrispondenti sono uguali.*

Consideriamo una curva qualsiasi di una superficie ed un suo punto, la tangente ivi, il piano osculatore, ..., lo  $S_v$  osculatore. È subito visto che questi spazi sono uguali ai corrispondenti.

Gli  $S_v$  osculatori alle curve di una superficie uscenti da un suo punto formano un cono algebrico entro lo  $S(v)$ , ma in generale non lo riempiono; quindi l'uguaglianza degli  $S_v$  osculatori corrispondenti non basta, se lo  $S(v)$  è abbastanza ampio, ad assicurare l'uguaglianza dei due  $S(v)$  corrispondenti.

Pensiamo allora due curve uscenti da un punto della superficie, i loro  $S_v$  ivi osculatori e una retta in ciascuno di essi. L'angolo di queste rette di-

<sup>(1)</sup> Cfr. la mia Nota *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* [Atti Acc. di Torino, vol. XLVIII, 1913], n. 5, ove questo spazio è indicato con  $S(h, 0)$ .

pende dai parametri che servono a fissare ciascuna di esse entro il proprio  $S_\nu$  e, come si vede subito, da simboli d'ordine  $\leq \nu$ .

Siccome quei due  $S_\nu$  sono uguali ai corrispondenti nell'affinità, i parametri che individuano una retta entro uno di essi sono uguali a quelli che individuano la retta corrispondente entro lo  $S_\nu$  corrispondente. I simboli di ordine  $\leq \nu$  rimangono invariati in una deformazione di specie  $\nu$ , quindi gli angoli di quelle due rette sono invarianti per deformazione. Siccome queste due rette sono arbitrarie, sempre per la stessa osservazione fatta sull'affinità, anche lo spazio congiungente quei due  $S_\nu$  è uguale al corrispondente.

Su questi nuovi spazi, uguali ai corrispondenti, ragioniamo come prima. O essi riempiono lo  $S(\nu)$  e allora questo è uguale al corrispondente; o essi non riempiono lo  $S(\nu)$  e allora consideriamo due di quegli spazi e dimostriamo, come sopra, che il loro congiungente è uguale al corrispondente. Con questo procedimento si vengono ad ampliare ogni volta la dimensione degli spazi che si dimostrano uguali ai corrispondenti e il loro sistema. Quando questo riempie lo  $S(\nu)$  allora la dimostrazione è terminata.

9. Siamo giunti a questo; che *gli  $S(\nu)$  tangenti a due superficie affini ed applicabili di specie  $\nu$  in punti corrispondenti sono uguali.*

Quindi il cono quadrico passante per un punto della superficie data, formato dalle rette uguali alle corrispondenti, contiene lo  $S(\nu)$  tangente ivi alla superficie.

Se escludiamo il caso delle ordinarie sviluppabili, nel qual caso lo  $S(\nu)$  è uno  $S_{\nu+1}$  e ne esistono soli  $\infty^1$  per una superficie <sup>(1)</sup>, lo  $S(\nu)$  è almeno un  $S_{\nu+2}$ : in tal caso lo  $S(\nu-1)$  è uno  $S_{\nu+1}$  (se  $\nu > 2$ ; per  $\nu = 2$  si ha  $S(1) = S_2$ ).

Il nostro problema ci porta dunque a questa domanda:

Quand'è che la quadrica delle direzioni uguali nello  $S_r$  all'infinito di  $S_{r+1}$  contiene  $\infty^2$   $S_{\nu+1}$  e in tal posizione che quelli infinitamente vicini ad uno di essi passano per uno  $S_\nu$ ?

Applicando al nostro caso formole note <sup>(2)</sup> nell'ipotesi che la quadrica di  $S_r$  non sia specializzata, si vede che ciò è possibile solo se  $r > 2\nu + 4$  per  $\nu > 2$ , e se  $r > 7$  per  $\nu = 2$ . Quindi:

*In due spazi affini di dimensione  $\leq 2\nu + 5$ , se l'affinità è generale, non esistono superficie applicabili di specie  $\nu (> 2)$ .*

*Se  $\nu = 2$  non esistono superficie applicabili in due spazi affini di dimensione  $\leq 8$ .*

<sup>(1)</sup> Per le sviluppabili il problema si risolve subito: basta cercare le curve di una quadrica di  $S_r$  i cui  $S_\nu$  osculatori appartengono alla quadrica stessa; si trova subito che dev'essere  $r \geq 2\nu + 2$ . Del resto, dal punto di vista dell'applicabilità, le sviluppabili costituiscono un caso banale il cui interesse è minimo.

<sup>(2)</sup> Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri 1907), pag. 131, nn. 17 e 18.

Se poi l'affinità è specializzata  $h$  volte, la superficie si compone di  $\infty^1$  curve giacenti in  $S_h$  paralleli (passanti per lo  $S_{h-1}$  vertice della quadrica): le curve sezioni degli  $S_h$  con gli  $S_{r-h+1}$  ad essi normali, hanno i loro  $S_v$  osculatori uguali ai corrispondenti: quindi gli  $S_{v-1}$  all'infinito appartengono alla quadrica non degenera dello  $S_{r-h}$  all'infinito degli  $S_{r-h+1}$ . Di qua si ha la limitazione  $h < 3$ .

**Matematica.**— *I moti relativi nel calcolo assoluto.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sull'estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

1. Fin dal 1882 il prof. Volterra <sup>(1)</sup>, partendo dal teorema di Green generalizzato da Thomson e Tait, ha stabilito il seguente teorema di reciprocità: « Se in un conduttore a due o a tre dimensioni di cui la conducibilità varia con continuità da punto a punto si fa passare una corrente « di intensità  $I$  da un punto  $A$  ad un punto  $B$ , e in due punti  $C$  e  $D$  si « ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i poten- « ziali dei punti  $A$  e  $B$  quando si faccia entrare da  $C$  e uscire da  $D$  la « stessa corrente di intensità  $I$  ».

Questo interessante teorema ebbe nello stesso anno la conferma sperimentale dalle esperienze fatte in proposito dal prof. G. Poloni <sup>(2)</sup>.

Nel 1915, in seguito alle ricerche del prof. O. M. Corbino <sup>(3)</sup> sul movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico, il prof. Volterra estese il suo teorema al caso di una lamina conduttrice isotropa, piana o curva, omogenea o non omogenea, di-

<sup>(1)</sup> Vito Volterra, *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, anno 1882, pag. 188.

<sup>(2)</sup> G. Poloni, *A proposito della Nota del prof. V. Volterra sulla reciprocità delle correnti e delle temperature*, Nuovo Cimento, ser. III, vol. XII, anno 1882, pag. 58.

<sup>(3)</sup> O. M. Corbino, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*, Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 213.

sposta secondo una superficie di livello di un campo magnetico uniforme o non uniforme, munito di quattro elettrodi puntiformi, o di area finita e resistenza trascurabile, inseriti nell'interno o al contorno della lamina (1).

Anche sotto questa forma il teorema fu pienamente confermato dai risultati sperimentali ottenuti dal dott. G. Tasca Bordonaro (2) e dai professori O. M. Corbino e G. C. Trabacchi (3).

Più recentemente la dott. E. Freda (4) è riuscita ad estendere, sotto certe condizioni, il detto teorema al caso di un conduttore a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo, fornito di quattro elettrodi e disposto comunque in un campo magnetico qualsiasi, eseguendo anche delle prove sperimentali che hanno dato risultati positivi.

In questa Nota io mi propongo di trovare, in modo nuovo, rapido e semplice, e nel caso più generale, sia le equazioni che individuano il movimento dell'elettricità, sia quelle che dimostrano il detto teorema di reciprocità.

2. Supponendo, come nella teoria elettronica del Drude, che la corrente sia trasportata con meccanismo convettivo dagli ioni positivi e negativi liberamente vaganti in seno ai metalli, siano  $N_1, N_2$  i numeri di ioni positivi e negativi per centimetro cubo;  $e$  il valore assoluto della carica elettrica comune per le due specie di ioni;  $P_1, P_2$  due ioni generici di cui uno positivo e l'altro negativo;  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  i vettori delle forze elettromotrici totali che sollecitano i detti ioni;  $\mathbf{h}$  il vettore del campo magnetico;  $\mathbf{F}$  il vettore della forza elettrica che supponiamo ammetta un potenziale  $\varphi$ . Allora la densità elettrica della corrente sarà espressa dal vettore

$$(1) \quad \mathbf{u} = e(N_1 P'_1 - N_2 P'_2)$$

dove  $P'_1$  e  $P'_2$ , derivate di  $P_1$  e  $P_2$  rispetto al tempo, rappresentano rispettivamente le velocità degli ioni positivi e negativi.

Indicando con  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  le due omografie, funzioni del punto generico  $P$ , che caratterizzano le proprietà specifiche del conduttore, per la legge di Ohm relativa ai mezzi anisotropi si hanno le relazioni:

$$(2) \quad P'_1 = e\gamma_1 \mathbf{E}_1 \quad ; \quad P'_2 = -e\gamma_2 \mathbf{E}_2$$

(1) Vito Volterra, *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pp. 220, 289, 378, 533.

(2) G. Tasca Bordonaro, *Su alcune conseguenze della teoria generale del fenomeno di Hall*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 336; *La verifica del principio di reciprocità di Volterra, nel caso generale*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 709.

(3) O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, *Sulla resistenza elettrica di una lamina in un campo magnetico*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. V, vol. XXIV, 1° sem. 1915, pag. 806.

(4) Elena Freda, *Sopra un teorema di reciprocità relativo alla propagazione di correnti elettriche in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. V, vol. XXV, 2° sem. 1916, pp. 28 e 60.

da cui, supposte  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  invertibili, si ricava

$$(2') \quad e\mathbf{E}_1 = \gamma_1^{-1} \mathbf{P}'_1 \quad ; \quad e\mathbf{E}_2 = -\gamma_2^{-1} \mathbf{P}'_2.$$

Si può ritenere che i coefficienti  $N_1$  ed  $N_2$  e le omografie  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  possano eventualmente dipendere dal campo magnetico  $\mathbf{h}$ , ma che non mutino al variare del senso del campo; ciò è conforme ai risultati sperimentali i quali inducono ad ammettere che le proprietà specifiche del conduttore siano alterate dall'azione del campo magnetico, ma che tali alterazioni non dipendano dal senso del campo.

D'altra parte, supposto il conduttore mantenuto a temperatura costante, la forza elettromotrice totale che sollecita ogni ione è data solamente dalla forza elettrica, dipendente dalla distribuzione dei potenziali, e dalla f. e. m. che si genera per il movimento dello ione nel campo magnetico, e quindi si può scrivere:

$$(3) \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{h} \wedge \mathbf{P}'_1 \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{F} + \mathbf{h} \wedge \mathbf{P}'_2.$$

Eliminando fra le (2') e le (3) le forze elettromotrici, si ha:

$$(\gamma_1^{-1} - e\mathbf{h} \wedge) \mathbf{P}'_1 = e\mathbf{F} \quad ; \quad (\gamma_2^{-1} + e\mathbf{h} \wedge) \mathbf{P}'_2 = -e\mathbf{F},$$

onde, supposte invertibili queste due omografie,

$$\mathbf{P}'_1 = e(\gamma_1^{-1} - e\mathbf{h} \wedge)^{-1} \mathbf{F} \quad ; \quad \mathbf{P}'_2 = -e(\gamma_2^{-1} + e\mathbf{h} \wedge)^{-1} \mathbf{F}.$$

Ponendo per brevità:

$$(4) \quad \alpha = (\gamma_1^{-1} - e\mathbf{h} \wedge)^{-1} \quad ; \quad \beta = (\gamma_2^{-1} + e\mathbf{h} \wedge)^{-1}$$

ed osservando che, per l'ipotesi fatta,

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \varphi$$

si ricavano le espressioni delle velocità  $\mathbf{P}'_1$  e  $\mathbf{P}'_2$  in funzione del potenziale, cioè:

$$(5) \quad \mathbf{P}'_1 = -e\alpha \text{ grad } \varphi \quad ; \quad \mathbf{P}'_2 = e\beta \text{ grad } \varphi.$$

Sostituendo queste nella (1), si ha immediatamente la densità della corrente espressa per mezzo di  $\varphi$ :

$$(6) \quad \mathbf{u} = -e^2(N_1 \alpha \text{ grad } \varphi + N_2 \beta \text{ grad } \varphi).$$

Inoltre, dalla condizione di continuità, cui deve soddisfare la corrente,

$$(7) \quad \text{div } \mathbf{u} = 0,$$

si ricava, mediante la (6), l'equazione differenziale cui deve soddisfare il potenziale  $\varphi$ .

Indicando, infine, con  $\mathbf{n}$  un vettore unitario, normale alla superficie del conduttore in un suo punto qualunque e rivolto verso l'esterno, si ha evidentemente:

$$(8) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0,$$

da cui si deduce per  $\varphi$  una condizione al contorno.

3. Stabilite così le relazioni tra la densità di corrente ed il potenziale, si dimostra facilmente il teorema di reciprocità del Volterra, che, *nella sua forma più generale*, può enunciarsi:

« In un conduttore elettrico a tre dimensioni, anisotropo, non omogeneo, « munito di quattro elettrodi A, B, C, D di resistenza trascurabile, man- « tenuto a temperatura costante e disposto comunque in un campo magne- « tico qualsiasi, la differenza di potenziale che si stabilisce tra C e D, al « passaggio di una corrente elettrica che entra per A ed esce per B, è « uguale alla differenza di potenziale che si stabilisce tra A e B quando, « col campo invertito, una corrente d'intensità eguale alla precedente entra « per C ed esce per D ».

Siano  $\varphi_1$  e  $\mathbf{u}_1$  il potenziale e la densità di corrente quando, col campo diretto, la corrente entra per A ed esce per B;  $\varphi_2$  e  $\mathbf{u}_2$  gli stessi elementi quando, col campo invertito, la corrente entra per C ed esce per D;  $\sigma$  il contorno completo del conduttore; S lo spazio, una o più volte connesso, racchiuso dalla superficie  $\sigma$ . Supponiamo che le funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  siano regolari in tutto lo spazio S e che il vettore normale  $\mathbf{n}$  precedentemente considerato sia rivolto verso l'esterno di S.

Applicando il noto teorema della divergenza, si ha:

$$\int_{\sigma} \varphi_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int_S \operatorname{div} (\varphi_2 \mathbf{u}_1) dS$$

ossia

$$\int_{\sigma} \varphi_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int_S (\varphi_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \operatorname{grad} \varphi_2 \times \mathbf{u}_1) dS$$

e per la (7)

$$(9) \quad \int_{\sigma} \varphi_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int_S \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{u}_2 \cdot dS.$$

In modo analogo si ricava l'uguaglianza

$$(10) \quad \int_{\sigma} \varphi_1 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int_S \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{u}_2 \cdot dS,$$

e da (9) e (10) si ha subito, per differenza:

$$\int_{\sigma} (\varphi_2 \mathbf{u}_1 - \varphi_1 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = \int_S (\mathbf{u}_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \mathbf{u}_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) dS.$$

Sostituendo nel secondo membro di questa eguaglianza, al posto dei vettori  $\mathbf{u}$ , le corrispondenti espressioni date dalla (6) e indicando con  $\alpha'$  e  $\beta'$  le omografie definite dalle (4) quando al posto di  $\mathbf{h}$  si ponga  $-\mathbf{h}$ , cioè

$$(4') \quad \alpha' = (\gamma_1^{-1} + e \mathbf{h} \wedge)^{-1} \quad , \quad \beta' = (\gamma_2^{-1} - e \mathbf{h} \wedge)^{-1} ,$$

risulta:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma} (\varphi_2 \mathbf{u}_1 - \varphi_1 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} . d\sigma = \\ & = -e^2 \int_S \left[ N_1 (\alpha \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \alpha' \operatorname{grad} \varphi_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) + \right. \\ & \quad \left. + N_2 (\beta \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 - \beta' \operatorname{grad} \varphi_2 \times \operatorname{grad} \varphi_1) \right] dS \end{aligned}$$

ossia, per il teorema di commutazione:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \int_{\sigma} (\varphi_2 \mathbf{u}_1 - \varphi_1 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} . d\sigma = \\ & = -e^2 \int_S \left[ N_1 (\alpha - K\alpha') + N_2 (\beta - K\beta') \right] \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2 . dS . \end{aligned}$$

Dalla (11) segue che, se in ciascun punto del conduttore è soddisfatta la condizione

$$(12) \quad N_1 (\alpha - K\alpha') + N_2 (\beta - K\beta') = 0$$

ossia, data l'arbitrarietà di  $N_1$  ed  $N_2$ , sono soddisfatte le condizioni

$$(12') \quad \alpha - K\alpha' = 0 \quad ; \quad \beta - K\beta' = 0$$

risulta:

$$(13) \quad \int_{\sigma} (\varphi_2 \mathbf{u}_1 - \varphi_1 \mathbf{u}_2) \times \mathbf{n} . d\sigma = 0$$

eguaglianza perfettamente analoga a quella da cui il prof. Volterra ha dedotto il teorema di reciprocità per la lamina.

Ora, perchè le (12') siano soddisfatte, qualunque sia il campo magnetico  $\mathbf{h}$ , è necessario e basta ammettere che in ogni punto del campo, per qualunque valore di  $\mathbf{h}$ , le omografie  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , che definiscono le proprietà specifiche del conduttore, siano *dilatazioni*, ossia che si abbia

$$(14) \quad \gamma_1 - K\gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 - K\gamma_2 = 0 .$$

Ciò si dimostra molto facilmente, osservando che dalle (4) e (4') si ha:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= \gamma_1^{-1} - e \mathbf{h} \wedge \quad ; \quad \beta^{-1} = \gamma_2^{-1} + e \mathbf{h} \wedge \\ K\alpha'^{-1} &= K\gamma_1^{-1} - e \mathbf{h} \wedge \quad ; \quad K\beta'^{-1} = K\gamma_2^{-1} + e \mathbf{h} \wedge \end{aligned}$$



da cui, per differenza, si ricava:

$$(15) \quad \alpha^{-1} - K\alpha'^{-1} = \gamma_1^{-1} - K\gamma_1'^{-1} \quad ; \quad \beta^{-1} - K\beta'^{-1} = \gamma_2^{-1} - K\gamma_2'^{-1} .$$

Ne segue che, se sono verificate le (14), i secondi membri delle (15) risultano nulli e da qui si trae subito che sono soddisfatte le (12').

Reciprocamente, se le (12') sono verificate, le (15) dimostrano che saranno pure verificate le (14).

Nel caso del campo magnetico nullo, cioè  $\mathbf{h} = 0$ , risulta:

$$\alpha = \alpha' = \gamma_1 \quad ; \quad \beta = \beta' = \gamma_2$$

e quindi le (12') si identificano con le (14).

Supposto dunque che per il conduttore in esame siano verificate le condizioni (14), che cioè le omografie che definiscono le proprietà specifiche del conduttore siano *dilatazioni*, basta scegliere convenientemente nella (13) il contorno completo  $\sigma$  perchè sia applicabile l'enunciato teorema di reciprocità.

Nel caso di quattro elettrodi A, B, C, D puntiformi, basta assumere come contorno completo  $\sigma$  la superficie del conduttore più quella di quattro piccole sfere (o porzioni di sfere se trattasi di elettrodi situati sulla superficie del conduttore) aventi i centri nei punti occupati dagli elettrodi.

Difatti, osservando che per la superficie libera ed isolata del conduttore si ha per la (8):

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \times \mathbf{n} = 0 ,$$

si vede facilmente, con un procedimento analogo a quello adoperato dal prof. Volterra per la lamina, che, facendo tendere a zero i raggi delle sfere, se l'intensità della corrente che attraversa il conduttore è la stessa col campo magnetico diretto e col campo invertito, dalla (13) si deduce l'egualianza

$$(16) \quad \varphi_{1C} - \varphi_{1D} = \varphi_{2A} - \varphi_{2B}$$

che esprime il teorema di reciprocità. Occorre però ammettere che, detta  $d$  la distanza di un punto generico da un punto occupato da un elettrodo, le funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  siano in quest'ultimo punto finite o presentino un infinito di ordine inferiore a quello di  $1 : d^2$ .

Nel caso poi di quattro elettrodi non puntiformi ma di resistenza trascurabile, se sono a tre dimensioni e inseriti nella massa del conduttore, per dedurre la (16) basta assumere per  $\sigma$  la superficie del conduttore più quella che esso ha in comune con gli elettrodi; se invece sono laminari e al contorno si prende  $\sigma$  uguale alla sola superficie del conduttore.

4. Tra i casi, che si possono facilmente stabilire, per i quali sono verificate le (14), è particolarmente interessante quello di un conduttore iso-

tropo che, sottoposto all'azione di un campo magnetico, acquisti una temporanea anisotropia solo per effetto del campo.

Per vedere come in tal caso le omografie  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che caratterizzano le proprietà specifiche del conduttore siano effettivamente *dilatazioni*, consideriamo la superficie di livello del campo magnetico passante per un punto P qualunque del conduttore ed un sistema unitario, ortogonale, destrorso di tre vettori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , avente il piano  $\mathbf{ij}$  tangente in P alla detta superficie di livello. Poichè, per evidenti ragioni di simmetria, tutte le direzioni uscenti da P ed appartenenti al piano  $\mathbf{ij}$  sono equivalenti dal punto di vista elettromagnetico, si conclude che le velocità degli ioni e le rispettive forze elettromotrici devono essere complanari con la forza magnetica, cioè

$$\mathbf{P}'_1 \wedge \mathbf{E}_1 \times \mathbf{k} = 0 \quad \mathbf{P}'_2 \wedge \mathbf{E}_2 \times \mathbf{k} = 0$$

essendo evidentemente il vettore  $\mathbf{h}$  parallelo a  $\mathbf{k}$ .

Di qui si trae facilmente che le velocità  $\mathbf{P}'_1$  e  $\mathbf{P}'_2$  degli ioni positivi e negativi possono scriversi sotto la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_1 &= e(a_1 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_1 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + b_1 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \\ \mathbf{P}'_2 &= e(a_2 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_2 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + b_2 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

dove  $a_1, a_2, b_1, b_2$  sono delle quantità reali.

Tenendo presenti le (2), si vede immediatamente che le omografie  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono in tal caso definite dalle seguenti uguaglianze <sup>(1)</sup>:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 \mathbf{i} & a_1 \mathbf{j} & b_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} ; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} a_2 \mathbf{i} & a_2 \mathbf{j} & b_2 \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

onde si conclude che le omografie  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono effettivamente *dilatazioni* aventi per *direzioni principali* quelle dei vettori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sopra considerati.

<sup>(1)</sup> Cfr. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*. T. I, p. 21, Pavia 1912.

**Matematica.** — *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA <sup>(1)</sup>, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. Accanto ad ogni serie numerica

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

consideriamo la serie di potenze

$$(2) \quad u(x) = u^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$$

e quelle che se ne deducono mediante derivazione o integrazione ripetuta, cioè

$$u^{(r)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} \quad (r \text{ intero}),$$

convenendo che sia

$$u_n = 0 \quad \text{per } n < 0.$$

Diremo che la serie (1) è *sommabile col metodo di Borel di ordine r*, e scriveremo *è sommabile (B, r)*, se la (2) è una trascendente intera e l'integrale improprio

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx$$

è convergente. Allora diremo *somma* della (1) il valore di questo integrale aumentato di

$$U_{r-1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{r-1}.$$

2. Abbiamo così definita una successione (indefinita in due sensi) di metodi di sommazione

$$(4) \quad \dots, (B, -2), (B, -1), (B, 0), (B, 1), (B, 2), \dots$$

tutti analoghi a quello ben noto del Borel (o metodo *esponenziale*) che corrisponde al nostro metodo (B, 0).

Ciascuno di essi è *più potente* del metodo classico di sommazione, poichè:

*Ogni serie convergente con somma u è anche sommabile (B, r) qualunque sia r, e con ugual somma (ma non viceversa).*

<sup>(1)</sup> I risultati contenuti in questa Nota saranno dimostrati e sviluppati in una prossima Memoria.

Inoltre ciascuno dei metodi (4) è più potente di tutti i seguenti ed è meno potente di tutti i precedenti, poichè:

*Ogni serie sommabile (B, r) con somma u è anche sommabile (B, r-1) e con ugual somma (ma non viceversa).*

Tutto ciò assicura che i metodi (4) non sono contraddittorii, nè col metodo classico di somministrazione, nè tra di loro, e rende inoltre legittima la seguente

**DEFINIZIONE.** Diremo che una serie è sommabile col metodo di Borel generalizzato, e scriveremo è sommabile  $Bg$ , quando è sommabile con *qualcuno* dei metodi (4) (ed allora è sommabile con tutti i precedenti e con ugual somma); e diremo *somma* della serie quella somma che tal metodo le conferisce.

3. Evidentemente il nuovo metodo  $Bg$  è molto più potente del metodo originario  $(B, 0)$  del Borel.

Ma il fatto più notevole, e che lo rende passibile di larghissima applicazione, è che esso ammette tutto l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti <sup>(1)</sup>, come risulta dai teoremi seguenti.

I. *Se delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \dots$$

una è sommabile  $(B, r)$ , tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima aumentata di  $k$ .

II. *Se delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad ku_0 + ku_1 + ku_2 + \dots \quad (k \neq 0)$$

una è sommabile  $(B, r)$ , tale è anche l'altra, e la somma della seconda è uguale a quella della prima moltiplicata per  $k$ .

III. *Se le due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono sommabili  $(B, r)$  e  $(B, s)$  ed hanno per somma  $u$  e  $v$  rispettivamente, la serie

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots$$

è sommabile  $(B, r)$ , se  $r \geq s$ , ed ha per somma  $u + v$ .

<sup>(1)</sup> Lo stesso non può dirsi del metodo  $(B, 0)$  del Borel. Cfr. in proposito le nostre recenti Note: *Nuova trattazione del metodo di Borel per la somministrazione delle serie* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LII, 1916-1917, pag. 67); *Sul metodo di Borel per la somministrazione delle serie* (questi Rendiconti, vol. XXVI, serie 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 3<sup>o</sup>).

IV. Se la serie (1) è sommabile  $(B, r)$  ed ha per somma  $u$ , la serie

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

è sommabile  $(B, r-n)$  ed ha per somma  $u - (u_0 + \dots + u_{n-1})$ ; e viceversa.

COROLLARIO 1°. (Proprietà commutativa). — Cambiando l'ordine di un numero finito di termini di una serie sommabile  $(B, r)$ , essa non si altera, cioè si ha una serie che è pure sommabile  $(B, r)$  e con ugual somma.

COROLLARIO 2°. — Inserendo in una serie sommabile  $(B, r)$  un numero finito  $n$  di termini, si ha una serie sommabile  $(B, r-n)$ , la cui somma è uguale a quella della prima aumentata della somma dei termini inseriti; sopprimendo da una serie sommabile  $(B, r)$  un numero finito  $n$  di termini, si ha una serie sommabile  $(B, r+n)$ , la cui somma è uguale a quella della prima diminuita della somma dei termini soppressi.

COROLLARIO 3° (Proprietà associativa). — Se in una serie sommabile  $(B, r)$  si sostituisce a un numero finito  $n$  di termini la loro somma, si ha una serie sommabile  $(B, r-n+1)$  avente ugual somma.

COROLLARIO 4° (Proprietà dissociativa). — Se in una serie sommabile  $(B, r)$  si sostituisce un termine con  $n$  altri ( $n$  finito) dei quali esso sia la somma, si ha una serie sommabile  $(B, r+n-1)$  avente ugual somma.

V. Se le due serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

sono sommabili  $(B, r)$  e  $(B, s)$  ed hanno per somma  $u$  e  $v$  rispettivamente, la serie di Cauchy

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

ove

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0,$$

è sommabile  $(B, t)$  ed ha per somma  $w = uv$ , ove  $t$  vale  $r+s-1$  se  $r$  ed  $s$  non sono positivi, ed è uguale al non maggiore dei numeri  $r$  ed  $s$  in ogni altro caso.

Tutti questi teoremi ci assicurano che, applicando a serie sommabili  $Bg$  le operazioni lecite sulle serie assolutamente convergenti, si hanno ancora serie sommabili  $Bg$  (1).

4. Il metodo  $Bg$  è, in certo senso, il metodo limite dei  $(B, r)$  per  $r = -\infty$ .

È naturale considerare anche il metodo limite dei  $(B, r)$  per  $r = +\infty$ ,

(1) È solo vietato di applicare la proprietà commutativa al di là di qualunque posto.

che indicheremo con  $Bt$ : una serie è *sommabile*  $Bt$  quando è sommabile con uno dei metodi (4) e con tutti i seguenti (1).

Risulta facilmente dai teoremi del n. 3 che, applicando a serie sommabili  $Bt$  le operazioni lecite sulle serie assolutamente convergenti, si hanno ancora serie sommabili  $Bt$ ; dunque: *anche il metodo  $Bt$  ammette l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti.*

Il metodo  $Bt$  è meno potente di ciascuno dei metodi (4) evidentemente, e quindi è molto meno potente del metodo  $Bg$ ; tuttavia esso riesce a sommare tutte le serie convergenti e le serie *assolutamente sommabili* del Borel. Ciò mette ancor meglio in evidenza la grande potenza del metodo  $Bg$ .

**Fisica terrestre.** — *Singolare precipitazione acqua osservata al Vesuvio.* Nota di C. CHISTONI ed A. MALLADRA, presentata dal Corrisp. MICHELE CANTONE.

Il giorno 26 aprile 1917 si discendeva dall'orlo del cratere vesuviano, ed arrivati al Caposaldo n. 23 della « Linea di livellazione geometrica di precisione Resina-Cratere » eseguita nel 1913 dall'Istituto Geografico Militare (m. 1134,75 sul mare) che sta infisso sulla Stazione superiore della Funicolare Cook (2) alle ore 11<sup>h</sup> 32<sup>m</sup> del Meridiano a 15° E da Greenwich, siamo stati sorpresi dalla neve, mentre pochi minuti prima splendeva il sole. Il vento soffiava moderatamente da NW e su di noi non mancava la nube di nebbia e di fumo proveniente dal cratere del Vesuvio.

Raccolta la neve su di una stoffa di lana molto pelosa (*loden*) ed esaminate le varie parti con una lente di ingrandimento, trovammo che la precipitazione era costituita da classiche stelle di neve esagonali, semplici e trasparenti; da nevischio assai piccolo (meno di un millimetro di diametro), e da corpuscoli di ghiaccio, faccettati ed angolosi, che non corrispondevano alla pioggia gelata, la quale, come è noto, assume forma sferica o pressochè sferica. Le dimensioni massime di questi corpuscoli, che avevano l'apparenza di particelle di ghiaccio infranto, erano da un quarto a mezzo millimetro.

La caduta contemporanea di queste tre forme di acqua solida è un fenomeno singolare, che va notato e che per noi torna nuovo; come nuova ci torna la caduta di minuzzoli di ghiaccio trasparenti dal cielo.

(1) E quindi (pel secondo teorema del n. 2) anche con tutti i precedenti. Perciò una tal serie l'abbiamo chiamata *totalmente sommabile* nella seconda Nota citata più innanzi.

(2) *R. Comm. Geod. Italiana. Livellazione geometrica di precisione Isola d'Ischia e Vesuvio* (Firenze, tipografia Barbèra, 1914). A. Malladra, *Sulle modificazioni del Vesuvio dopo il 1906 e la livellazione geometrica del vulcano* (Boll. della R. Società geogr. Italiana, dicembre, 1914).

Le particelle di acqua solida perduravano intatte per circa un quarto di minuto dalla loro caduta sul panno, e tale precipitazione durò per quasi quattro minuti.

Nelle goccioline di acqua dovute alla fusione di questi corpuscoli di ghiaccio faccettati e ad angoli vivi, non abbiamo osservato alcun nucleo solido interno e non ci è dato di potere assicurare se essi fossero costituiti da pura acqua, come di certo lo erano la neve ed il nevischio.

Non escludiamo quindi il caso che questi apparenti corpuscoli di ghiaccio potessero avere per nucleo un cristallino trasparente di qualche sale sublimato, solubilissimo nell'acqua, che dapprima rivestito di ghiaccio, si sia in seguito completamente disciolto nell'acqua di fusione.

Ripetiamo che per noi il fenomeno è nuovo e che speriamo che possa essere da noi o da altri meglio esaminato, se si presenterà in altra circostanza.

All'Osservatorio Vesuviano, il cui pozzetto barometrico è a 632 m. sul livello del mare, non si notò nè pioggia, nè neve. Il diagramma del barometrografo segnò in tale giorno all'Osservatorio Vesuviano una pressione di 710 mm. (media normale) alle ore undici; dopo di che si ebbe regolare diminuzione di pressione fino alle ore 15 (circa tre quarti di millimetro in totale); dopo tale ora la curva risale, con lievi ondulazioni, fino alle ore 23 (mm. 710,50).

**Meteorologia.** — *Correlazione tra la temperatura dell'Italia e dell'Egitto.* Nota di FILIPPO EREDIA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

I fenomeni meteorologici non si presentano ovunque con le medesime particolarità: e sembra che vi siano delle regioni del globo, in cui periodi di temperatura e di precipitazioni si susseguono con intensità diversa, legati però da una certa dipendenza.

Edward Fry, esaminando i dati termometrici dell'estate 1911, segnalò che nell'Europa occidentale le temperature si erano mantenute più elevate di quelle avutesi in Egitto, venendosi in tal modo ad avvalorare il fatto, altre volte constatato, che cioè al Cairo si erano osservate temperature più fredde che non a Londra; e ciò metteva maggiormente in rilievo l'esistenza di una connessione meteorologica tra l'Egitto e l'Inghilterra. L'esame delle temperature relative al periodo 1877-1910 pel Cairo (Abbassia) e per l'Inghilterra occidentale e paese di Galles, diede il coefficiente di correlazione  $-0,427 \pm 0,096$ . Craig, in una recente Nota<sup>(1)</sup>, riprendendo la trattazione

<sup>(1)</sup> Craig I., *A See-Saw of temperature between England and Egypt*. Quarterly Journal of the R. Meteorological Society, vol. XLI, pag. 89. London, 1915.

dell'interessante argomento, si propone di analizzare con maggiore particolarità le dette relazioni e di determinare la posizione della linea correlativa zero; e l'oggetto finale della ricerca, aggiunge l'A., era, in pratica, quella di apportare una certa utilità alla previsione del tempo.

Craig considera, per diverse annate, le temperature relative ai quattro mesi tipici di ciascuna stagione, e i risultati dei calcoli vengono riuniti nella seguente tabella ove indichiamo con  $r$  i coefficienti di correlazione.

	ANNATE di osserva- zioni	GENNAIO			APRILE			LUGLIO			OTTOBRE		
		Media temperatura	Deviazione media	$r$	Media temperatura	Deviazione media	$r$	Media temperatura	Deviazione media	$r$	Media temperatura	Deviazione media	$r$
Beirut . . . .	1879-1907	13.1	± 1.10	+ 0.39	18.3	± 0.78	+ 0.52	26.7	± 0.65	+ 0.61	23.9	+ 0.90	+ 0.78
Tripoli . . . .	1892-1911	12.2	1.06	+ 0.40	18.2	1.03	+ 0.38	25.9	0.70	+ 0.32	23.4	1.11	+ 0.23
Atene . . . . .	1870-1903	9.0	1.65	+ 0.67	15.8	1.46	+ 0.70	27.8	1.14	+ 0.38	19.9	1.24	+ 0.29
Odessa . . . .	1870-1912	— 3.1	3.19	+ 0.12	8.7	1.46	+ 0.39	22.9	1.38	+ 0.28	11.4	1.92	+ 0.13
Roma . . . . .	1870-1889	6.8	1.22	- 0.32	13.7	0.81	- 0.02	24.8	0.89	+ 0.01	16.2	1.41	- 0.30
S. Fernando . .	1870-1906	11.2	1.13	- 0.04	15.5	1.10	- 0.50	23.8	0.94	- 0.31	18.5	1.30	- 0.22
Sud Francia . .	1871-1906	5.0	1.89	- 0.14	12.2	1.03	- 0.19	21.9	1.19	- 0.34	13.4	1.54	- 0.30
Vienna . . . .	1870-1907	— 1.7	2.58	- 0.19	9.5	1.70	- 0.14	19.8	1.34	- 0.05	9.8	1.74	- 0.21
SW. Inghilterra	1872-1911	6.1	1.51	- 0.56	8.6	0.85	- 0.24	15.7	0.95	- 0.19	11.0	1.13	- 0.40
Basso Egitto .	1870-1912	13.0	1.01	—	19.3	1.18	—	26.9	0.69	—	23.2	0.93	—

I dati della Francia meridionale risultano dalla media delle osservazioni termometriche delle seguenti città: Lione, Tolosa, Marsiglia, Montpellier, Perpignano; e quelli di SW Inghilterra dalla media delle osservazioni di Falmouth, Plymouth e Pembroke.

L'A. inoltre rappresenta graficamente i coefficienti di correlazione  $+$  e  $-$ , di cui i primi mostrano come ad una deviazione positiva dalla temperatura normale di una stazione corrisponde una simile deviazione in un'altra, mentre i coefficienti negativi indicano deviazioni dissimili. Risulta chiaramente, aggiunge l'A., che delle regioni europee considerate, alcune presentano omonomia con l'Egitto relativamente alle deviazioni della temperatura media dalle rispettive normali, altre eteronomia. La linea di correlazione zero non passa molto lontano da Roma, va da SW a NE, ma presenta variazioni a seconda delle stagioni. Essa ha tendenza a spostarsi verso E e W in inverno, e verso S e N in estate. La presenza delle fluttuazioni così dimostrata, assume un interesse pratico, in quanto ci mostra che siamo lontani dall'avere deviazioni simultanee e che è da aspettarsi un certo numero di giorni acciocchè una data variazione verificatesi in Inghilterra possa manifestarsi nell'Egitto. Alla determinazione di tale intervallo di tempo può giungersi coll'esaminare le temperature diurne, come l'A. ha fatto per un periodo di due anni.



Si è già detto avanti che l'A. esamina, per l'Italia, solo i dati di Roma per un limitato periodo di anni: viene pertanto di pensare che una più ampia utilizzazione delle osservazioni italiane, avrebbe forse consentito di maggiormente determinare l'andamento delle diverse linee di uguale correlazione e specialmente della linea di correlazione zero attraverso la nostra penisola.

Scopo della presente Nota è adunque quello di completare l'interessante ricerca del Craig relativamente all'Italia, utilizzando un esteso e identico periodo di anni di osservazioni per tutte le località considerate. A tale intento, abbiamo preso in esame le osservazioni termometriche raccolte nelle seguenti città: Torino, Padova, Bologna, Firenze, Roma, Napoli, Palermo, per il periodo 1871-1910, e per un analogo periodo abbiamo considerato le osservazioni dell'Egitto, desumendo quest'ultime dalla citata pubblicazione del Craig.

Diamo nella tabella seguente il risultato dei calcoli relativi (indicando con  $r$  i coefficienti di correlazione) agli stessi quattro mesi esaminati dall'A.; avvertendo che per l'Egitto abbiamo ottenuto le seguenti temperature medie: gennaio 13,1, aprile 19,7, luglio 26,9, ottobre 23,1.

	GENNAIO			APRILE			LUGLIO			OTTOBRE		
	Media temperatura	Deviazione media	$r$	Media temperatura	Deviazione media	$r$	Media temperatura	Deviazione media	$r$	Media temperatura	Deviazione media	$r$
Torino	0.4	± 2.02	-0.084	11.8	± 1.14	-0.190	22.9	± 1.12	-0.019	12.3	± 1.27	-0.370
Padova	1.5	1.88	+0.188	12.3	1.05	+0.080	23.5	1.12	+0.085	13.5	1.38	-0.358
Bologna	1.7	1.85	0.000	12.7	1.09	+0.017	24.7	1.08	+0.192	14.5	1.39	-0.264
Firenze	4.6	1.70	+0.120	13.2	1.09	+0.094	24.3	1.24	+0.037	15.0	1.54	-0.349
Roma	6.6	1.32	+0.312	13.7	1.04	+0.286	24.7	1.05	+0.028	16.4	1.25	-0.181
Napoli	8.1	1.41	+0.196	13.6	1.15	+0.305	24.0	1.06	+0.201	17.3	1.32	-0.191
Palermo	10.2	1.16	+0.430	14.8	1.03	+0.443	24.4	0.88	+0.374	19.6	1.24	-0.206

Comparando i dati di Roma da noi ottenuti con quelli di Craig, risulta una sensibile differenza in ottobre e in aprile, mentre in luglio si manifesta quasi una concordanza e in gennaio la divergenza sta nel segno ed è certamente dovuta a errore di stampa incorso nella pubblicazione inglese. Dai nostri dati risulta che la linea zero passa in gennaio per Bologna, si sposta in aprile alquanto al disopra di Bologna, in luglio è nelle vicinanze di Roma e in ottobre si trasporta a latitudini minori, verificandosi su tutta la penisola coefficienti negativi di correlazione.

Concludiamo adunque che la linea di correlazione zero presenta un andamento ben diverso da quello segnalato dal Craig, ed un'oscillazione nell'anno molto più ampia e tale da comprendere tutta la penisola.

Geolog'ia. — *Di alcune alghe calcaree provenienti dall'isola di Malta.* Nota II della dott.<sup>ssa</sup> CATERINA SAMSONOFF-ARUFFO, presentata dal Socio DE STEFANI.

Il secondo esemplare, raccolto dal prof. De Stefani a Ta Bingemma in Malta nell'Elveziano superiore (*Upper coralline Limestone* di Murray) si presenta quasi sotto l'aspetto schistoso: il tallo forma numerose lamine sottili, sovrapposte le une alle altre e riunite da piccole striscie di sabbia cementata.

Queste lamine hanno circa 1 mm. ed anche meno di spessore e sono spesso leggermente ondulate; esse si adattano alle accidentalità del substrato e probabilmente avvolgono di frequente altri corpi organici, perchè nel nostro campione si trovano numerose cavità. Il calcare è bianco, piuttosto friabile. Non mancano le tracce del lavoro di organismi perforanti. Nei punti di frattura le lamine mostrano un tessuto denso ed omogeneo. Il tallo sembra sterile, soltanto in un punto ho trovato un piccolo cono con un poro all'apice. Ho trovato unita all'alga un briozoo ed una foraminifera.

Passando ora all'esame microscopico vediamo in sezione verticale che il tallo è formato da sottili croste sovrapposte; l'*ipotallo* ed il *peritallo* sono ben evidenti. L'*ipotallo* è più sviluppato del *peritallo* ed è formato di elementi piuttosto ampî, disposti in zone concentriche trasversali, caratteristiche per il gen. *Lithophyllum*.

Però la struttura tipica a ventaglio non è molto evidente (forse per la direzione poco buona in cui fu fatta la sezione) e soprattutto i setti trasversali delle cellule non si trovano che di rado allo stesso livello.

Le serie cellulari radiali sono più evidenti; esse proseguono diritte lungo la linea di Rosanoff che si trova nella parte mediana dell'*ipotallo*, si incurvano in giù verso il substrato — dalla parte inferiore — ed in su — dalla parte superiore — per formare il *peritallo*. Il tessuto è piuttosto denso e regolare. Le cellule dell'*ipotallo* sono grandi, rettangolari, circa due volte più lunghe che larghe. Nei punti dove l'*ipotallo* è stato sezionato trasversalmente si osservano spesso delle cellule doppie del Pilger; qualche volta anzi più di due cellule possono fondersi insieme.

Il *peritallo* è assai meno sviluppato e forma delle esili striscie sovrastanti all'*ipotallo*; in alcuni punti esso sembra mancare del tutto; però qualche volta il *peritallo* è piuttosto sviluppato e presenta una leggera zonatura.

Nel *peritallo* le cellule sono più piccole e soprattutto più corte, quasi quadrate; la loro lunghezza è di poco superiore alla larghezza.

Il passaggio fra l'ipotallo ed il peritallo è molto netto ed evidente. Le cellule del peritallo sono spesso disposte in serie verticali; qualche volta anche i setti trasversali sono allo stesso livello, però manca l'aspetto a grata o reticolo; il tessuto è denso, compatto, scolorito e senza zone. Verso la periferia le cellule diventano spesso più piccole. Manca la sovrapposizione dell'ipotallo al peritallo: ogni lamella è individualizzata e formata inferiormente da una striscia piuttosto spessa di ipotallo e superiormente da una striscia più o meno sottile di peritallo.

Il tallo è sterile. Ho trovato talvolta sulla superficie del tallo una pellicola formata da 3-5 strati di grosse cellule, probabilmente appartenente ad una *Mastophora*; in un punto di questa pellicola ho visto un concettacolo.

L'esemplare, dunque, malgrado che sia sterile, deve essere riportato al gen. *Lithophyllum* per la struttura caratteristica a ventaglio del suo ipotallo.

Prendendo in esame le varie specie di questo genere troviamo una grande somiglianza fra la nostra pianta ed il *Lithophyllum lichenoides* Ellis. Ambo le specie sono caratterizzate da uno sviluppo assai grande dell'ipotallo, formato di cellule allungate, rettangolari, piuttosto grandi e da una considerevole riduzione del peritallo. Anche esternamente queste specie debbono somigliarsi assai, essendo rappresentate da talli crostiformi, sottili, spesso ondulati. Vi sono però anche delle differenze: nella nostra pianta la disposizione concentrica delle cellule a modo di ventaglio, per quanto evidente, non è così tipica e spiccata come nel *L. lichenoides* Ellis, secondo la descrizione della signora Lemoine (pag. 128) <sup>(1)</sup> e le figure molto dimostrative di Rosanoff <sup>(2)</sup>.

Oltre ciò nel *L. lichenoides* Ellis le cellule dell'ipotallo sono tre volte più lunghe che larghe, mentre nella nostra specie la lunghezza è soltanto doppia della larghezza. Il peritallo è maggiormente sviluppato nella nostra pianta e formato di cellule quadrate, mentre esse sono rettangolari nel *L. lichenoides* Ellis.

La nostra pianta si avvicinerrebbe anche di più al *Lithophyllum Fosliei* Heydrich, appartenente alla seconda sezione del genere *Lithophyllum*, soprattutto per la frequente disposizione delle cellule del peritallo allo stesso livello in piani orizzontali. Però vi sono fra le due forme anche delle differenze notevoli. Nella nostra specie mancano totalmente gli eterocisti, così frequenti e numerosi secondo Heydrich (Melob. 1897. pag. 59, fig. 1, e 1897 pag. 410) e Foslie (ma non osservati dalla Lemoine, come manca anche la sovrapposizione dell'ipotallo al peritallo (carattere assai importante secondo

<sup>(1)</sup> Madame Paul Lemoine, *Structure anatomique des Mélobésiées* (Annales de l'Institut Océanographique, tome II, fasc. 2, Monaco 1911).

<sup>(2)</sup> S. Rosanoff, *Recherches anatomiques sur les Mélobésiées* (Mém. Soc. sc. nat. Cherbourg, 1866, pp. 1-112).

la mia opinione): le cellule del peritallo sono quadrate o leggermente allungate nel senso radiale, mentre nel *L. Fostiei* Heydrich esse sono stirate tangenzialmente.

Non posso dunque riportare la specie di Malta a nessuna delle due specie alle quali si avvicina di più, e la considero una specie nuova. Propongo di chiamarla

### **Lithophyllum Destefanii.**

Il terzo esemplare raccolto dal prof. De Stefani nel Calcarea inferiore a Nullipore a Kala (Gozo) nell'Arcipelago di Malta pure nei Miocene medio Elveziano inferiore (*Lover coralline Limestone* di Murray), è formato da un impasto di croste e di brevissimi rami tubercolari intimamente uniti fra loro dalla massa calcarea fondamentale. Le croste sono piuttosto spesse (2-3 mm.) irregolari, ripiegate; in alcuni punti però presentano una certa stratificazione. La parte più voluminosa del fallo è rappresentata da numerose escrescenze tubercolari, molto brevi, arrotondate all'apice, che ricuoprono completamente la crosta. Queste ramificazioni sono formate da un tessuto bianco-avorio molto compatto; la loro superficie è liscia; qua e là ho trovato qualche piccolo poro. Non mancano i Briozoi. Il conglomerato di colore bianco giallognolo presenta poche cavità; esso è assai compatto; la sua superficie tubercolare rinverdisce sotto l'acqua in molti punti per la presenza di alghe viventi.

Passando ora all'esame microscopico di questa specie vediamo che il nostro preparato è formato da un impasto di frammenti di alga calcarea, sabbia cementata e pezzetti di conchiglie.

Fra questi frammenti se ne trova *uno*, che perfettamente coincide con il tipo dell'alga, descritto sopra, proveniente da Ta Bingemma. Esso è, cioè, crostato e formato di due tessuti: ipotallo e peritallo; l'ipotallo è molto più sviluppato e presenta nettamente le caratteristiche del tipo *Lithophyllum*; la struttura a ventaglio è assai evidente.

In molti punti i frammenti sono così piccoli, mal conservati o troppo spessi, da non potere trarre nessuna conclusione dal loro aspetto. In altri punti della preparazione si trovano dei frammenti più grandi e meglio conservati: essi sono a cellule molto piccole. L'*ipotallo* è poco sviluppato, ma pur sempre presente; esso è del tipo *Lithothamnium*, formato di poche serie di cellule che subito si inarcano per formare il peritallo. La distinzione fra i due tessuti è poco netta; si ha spesso la sovrapposizione dell'ipotallo al peritallo. Il *peritallo* è maggiormente sviluppato, molto compatto e regolare, formato di *pile cellulari verticali* evidentissime; le cellule sono molto piccole, i setti tangenziali poco evidenti. L'*ipotallo* è meno compatto, esso è formato di elementi leggermente più grandi e perciò è più chiaro. Per quanto scavato da numerose cavità (probabilmente dovute all'azione di orga-

nismi perforanti ed al modo di accrescimento dell'alga). Questo tallo mi sembrò sterile; almeno non ho trovato nella preparazione nessun concettacolo. Qualche volta le serie cellulari radiali (verticali) del peritallo sono *un poco ondulate*. Ho trovato sulla superficie del tallo una pellicola formata da due strati di cellule grandi, forse si tratta di una *Mastophora*.

In un punto della preparazione ho trovato un frammento di un ramo sezionato, che presenta una disposizione a zone evidentissima; le cellule sono rettangolari, più grandi che non nell'altra specie, però non abbastanza ben conservate per poterle misurare; le zone sono piuttosto ampie, specialmente quelle chiare, le scure sono strette.

Questa seconda specie, che si trova in prevalenza, si avvicina in modo notevole al *Lithothamnium compactum* Kjell., specie nordica, appartenente alla terza sezione di questo genere, secondo la classificazione della signora Lemoine.

In ambo le specie troviamo un ipotallo ridottissimo formato di poche serie di cellule che subito si inarcano per formare il peritallo. Il peritallo a sua volta è formato di cellule piccole disposte in *pile verticali* evidenti; la differenza fra i due tessuti è poco netta. La nostra specie è sterile, perciò non è possibile il confronto fra gli organi di riproduzione. Vi sono però anche delle differenze fra la nostra ed il *L. compactum* Kjell.; quest'ultimo è a forma di *crosta*, mentre la nostra pianta presenta delle brevissime ramificazioni tubercolari; però tanto Foslie (1894-95) quanto la signora Lemoine parlano di piccole excrescenze nel *L. compactum* Kjell.

Ad ogni modo vi è una grandissima somiglianza fra il nostro preparato in questione e la fig. 9 della tavola n. 6 nell'opera del Kjellmann <sup>(1)</sup> rappresentante una sezione del tallo del *L. compactum* Kjell. Studiando le alghe calcaree fossili, raccolte nel Museo geologico di Firenze, ho indicato <sup>(2)</sup>, nello strato più alto del post-pliocene di Brindisi, un'alga che ho potuto riconoscere per il *Lithothamnium compactum* Kjell.; però ne ho fatto una forma nuova per alcune differenze che presenta dalle forme conosciute.

Ho spiegato la sua presenza nel post-pliocene di Brindisi con l'invasione delle specie nordiche nelle regioni più temperate durante la massima estensione glaciale.

Potrebbe darsi che invece di essere migrato dal nord il *Lithothamnium compactum* avesse avuto origine durante il post-pliocene da una forma vicina, preesistente durante il miocene medio nel Mediterraneo. Questa forma avrebbe variato durante il periodo glaciale adattandosi alle nuove condizioni di

<sup>(1)</sup> Kjellmann; *The Algae of the Arctic sea* (Kongel. Svenska Vet. Akademie Handl. Band XX, no 5. 344 pages, 31 planches, 1833).

<sup>(2)</sup> C. Samsonoff-Aruffo, *Sopra una nuova forma di Lithothamnium del post-pliocene di Brindisi* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXV, serie 5<sup>a</sup>, 2° sem., fasc. 12°).

esistenza ed avrebbe dato origine al *Lithothamnium compactum* Kjell., il quale col ritiro dei ghiacci sarebbe emigrato verso il nord. Così si spiegherebbe tanto la sua presenza nel post-pliocene di Brindisi, come la presenza di una forma ad esso molto vicina nel Miocene medio dell'Isola di Malta. Io farei dunque l'ipotesi che forse la pianta raccolta dal prof. De Stefani a Gozo sia la pianta-stipite del *Lithothamnium compactum* Kjell., ed abbia dato poi origine durante il post-pliocene alla forma da me studiata e proveniente da Brindisi.

Ad ogni modo con qualunque ipotesi si tenti di spiegare la sua presenza nel miocene medio di Malta, io considero la pianta raccolta dal prof. De Stefani a Gozo come una *forma nuova* sebbene vicinissima al *Lithothamnium compactum* Kjell. e propongo di chiamarla

### Lithothamnium miocenum.

Il quarto campione da me studiato ed appartenente al miocene medio di Malta fu raccolto dal prof. De Stefani in Malta a Fomm-ir-rih o Bocca del vento, e precisamente nella marna gialla subito sotto il calcare a Nulipore dell'Elveziano inferiore (*Lover coralline Limestone* di Murray) e sopra le Argille di tipo Tortoniano.

La nostra alga incrosta internamente ed esternamente delle valve di *Pecten*; essa forma delle croste di qualche millimetro di spessore, munite alla loro superficie di tubercoli brevissimi arrotondati, da 3,4 mm. a 5,8 mm. di diametro. Spesso questi tubercoli vengono ricoperti da nuova crosta. In alcuni punti l'alga è incrostata da briozoi.

Nella preparazione microscopica possiamo distinguere due parti: un *nucleo centrale* formato da un impasto di cristalli di calcare, frammenti di alghe, piccole conchiglie e sabbia cementata ed una *porzione periferica*, formata da un tallo *crostiforme* libero. Occupiamoci prima di quest'ultimo. Il tallo *crostiforme* si presenta formato soprattutto da *una sola specie di tessuto* (il peritallo) compatto, uniforme ad elementi di mediocre grandezza e regolari. Nel tessuto si possono nettamente distinguere le zone di accrescimento, limitate da linee più scure; in alcuni pochi punti della preparazione si vede l'alternarsi di zone scure più strette e di zone chiare larghe. Però, in genere, la zonatura per quanto distinta è poco accennata; le zone hanno un'andamento molto irregolare; sono ripiegate, contorte, molto variabili nella loro estensione e nel loro spessore. Alle volte la zonatura sparisce completamente. Le dimensioni delle cellule sono assai uniformi e la loro forma è quadrata o quasi; questa poca variabilità nel volume delle cellule conferisce un aspetto molto omogeneo al tessuto. Il tallo è compatto, però in esso si trovano delle cavità e delle inclusioni eterogenee (sabbia cementata, conchiglie ecc.). I concettacoli sono molto numerosi; essi variano poco

nelle loro dimensioni; sono generalmente due volte più lunghi che larghi ed in alcuni punti un po' più di due volte. La forma dei concettacoli è ellittica con il pavimento ed il tetto quasi piani e paralleli fra loro ed i fianchi uniformemente arrotondati. I concettacoli sono generalmente raccolti in gruppi e disposti in piani sovrapposti. Il tetto è formato da uno strato di tessuto piuttosto spesso; al disopra del tetto il tessuto è qualche volta un po' lasso, contenente delle discontinuità. Il tetto è poi ricoperto da poche file di ipotallo secondario, che si sovrappongono al peritallo più anziano e contribuiscono all'affondamento del concettacolo. La forma dei concettacoli sarebbe quella del gen. *Lithothamnium*; però non ho potuto trovare i canalicoli d'uscita delle spore. Non sempre il tetto del concettacolo viene ricoperto dall'ipotallo che si sovrappone; qualche volta lo ricuopre il solo peritallo. Come abbiamo visto il nostro tallo crostiforme si distingue per una struttura uniforme, che per la sua semplicità si avvicinerrebbe al gen. *Archaelithothamnium*; i concettacoli e l'ipotallo sono di un *Lithothamnium*, probabilmente si tratta di una specie nuova.

Nel nucleo centrale della preparazione troviamo diversi *rami* di alghe, sezionati trasversalmente. Il tessuto di questi rami presenta numerose cavità e lacune; esso è poco compatto ed è formato di elementi cellulari piuttosto grandi, disposti in serie radiali; però non manca qua e là l'accento alla struttura zonata. Non ho potuto distinguere che una specie di tessuto, forse questo è dovuto alla cattiva conservazione del tallo. La struttura dei rami è più o meno eccentrica.

Il tessuto di questi rami non è abbastanza ben conservato per potere misurare le dimensioni delle cellule col micrometro oculare; esse sono poco uniformi per la loro forma e per la loro grandezza; possono essere quadrate o leggermente allungate nel senso radiale, e rettangolari. Mancano gli eterocisti e le cellule doppie; le file cellulari sono spesso arcuate all'in fuori.

Questi rami sono fertili: ho trovato nel tallo di due rami dei concettacoli ellittici. In media questi concettacoli sono due volte più lunghi che larghi, ma i loro diametri sono piuttosto variabili. Il pavimento ed il soffitto sono piani, il tetto è formato da una sottile striscia di tessuto e malgrado che i concettacoli sieno affondati, al disopra del tetto si trova spesso una cavità a forma di fessura trasversale che corrisponde più o meno a tutta la superficie del tetto. I concettacoli sono vuoti o riempiti di cristalli di carbonato di calce. Mi pare di intravedere un porocanale.

Nella parte centrale della preparazione oltre a questi rami appartenenti probabilmente ad un *Lithothamnium*, si trova un grosso cristallo di carbonato di calce, raccolto da un tallo crostiforme. Alla formazione di questa crosta hanno contribuito diverse specie e probabilmente diversi generi di alghe calcaree.

Grossolanamente si potrebbero distinguere due forme: una ad elementi più piccoli che ricorda il tallo della parte periferica della preparazione, l'altra ad elementi più grandi che per questo carattere e per la sua struttura si avvicina ai rami trovati nella parte centrale della preparazione. Nel tallo ad elementi più piccoli ho potuto distinguere tanto l'ipotallo che il peritallo. L'ipotallo è formato di file cellulari che si innalzano obliquamente per formare il peritallo; il passaggio fra i due tessuti non è brusco per quanto dis tinto. Le cellule dell'ipotallo sono più grandi e soprattutto più lunghe che non quelle del peritallo. Il carattere dell'ipotallo è quello del gen. *Lithothamnium*. Nel tallo ad elementi più grandi troviamo una struttura molto irregolare ed una distinta disposizione a zone. Più che di zone si tratta di striscie di tessuto sovrapposte, accavallate, ripiegate ed ondulate. Il tallo contiene numerose cavità e lacune riempite di sabbia cementata. In sezione trasversale le cellule appaiono piuttosto voluminose, poligonali a pareti molto rinfrangenti.

Riassumendo dunque abbiamo trovato:

Specie	Località
<i>Lithophyllum Destefanii</i> sp. nov.	Ta Bingemma (Malta) Elveziano superiore e Kala (Gozo) (Elveziano inferiore).
<i>Lithothamnium miocenum</i> sp. nov.	Kala (Gozo) (Elveziano inferiore).
<i>Lithothamnium intermedium</i> Kjell.	" " " "
<i>Goniolithon Martellii</i> Sam.	" " " "
<i>Lithothamnium</i> sp.	Fomm-ir-Rih (Malta) Elveziano inferiore.
<i>Archaeolithothamnium</i> (?) sp.	Fomm-ir-Rih (Malta) Elveziano inferiore.

Da questa descrizione delle specie raccolte dal prof. De Stefani nelle Isole di Malta vediamo che in questa località nel miocene medio vi era una notevole varietà di specie ed anche di generi appartenenti alle *Coralinaceae* fossili non articolate.



Geologia. — *Le argille mioceniche ed il pliocene di San Marino*. Nota del dott. BINDO NELLI, presentata dal Socio CARLO DE STEFANI.

Il compianto prof. De Gasperi, che gloriosamente cadde combattendo per la Patria sul monte Maronia il 16 maggio 1916, raccolse nelle argille turchine di San Marino molti fossili che formano oggetto di un mio studio paleontologico di quei terreni, studio da pubblicarsi insieme con una carta geologica del De Gasperi. Le località indicate per questi giacimenti argillosi sono: E e NE di Casa Gessi; E di Casa della Riva, NE di Casa Moraccino, Ca' Melone, pressi di Monte Olivo, Monteolivo e Cimitero di San Marino.

Il primo che precisò l'età di questa formazione argillosa fu il Fuchs, il quale avendo visitato una località posta al piede occidentale del Monte Titano, trovò una perfetta corrispondenza con gli strati di Baden, Gainfahren, Neudorf e Pötzleinsdorf del secondo piano mediterraneo del Bacino di Vienna. In seguito il Trabucco dalla posizione delle marne sabbiose, delle marne e delle sabbie posanti sopra i calcari elveziani, dei quali io pure ebbi già occasione d'occuparmi, deduce anche in base ai fossili da lui raccolti in posto che questi terreni sono da riferirsi al Tortoniano.

Le specie da me determinate sono le seguenti:

*Protula firma* Seg., *Limopsis (Pectunculina) anomala* (Eichw.); *Ostrea edulis* L., *Pecten (Chlamys) Tauroperstriatus* Sacco, *Pecten (Flabellipecten) flabelliformis* Brocchi, *Pecten (Amussium) corneum* Sow., *Pecten Gentoni* Font., *Arca (Anadara) diluvii* Lam., *Pectunculus (Axinaea) cor* Lam. (= *P. violacescens* Lam. et anct.), *Chama gryphoides* L., *Venus (Chamaelaea) gallina* L., *Cytherea multilamella* Lam., *Cytherea (Callista) pedemontana* Lam., *Amiantis Gigas* Lam., *Corbula gibba* Olivi, *Dentalium inaequale* Bru., *Dentalium sexangulum* Schr., *Antale novemcostatum* (Lam.) var. *mutabilis* Dod., *Turritella tricarinata* (Brocchi), *Scalaria (Hirtoscala) elegans* Risso var. (aff. *Scalaria spinifera* Seg. var. *foliacea* Sow.), *Vermetus Deshayesi* (Mayer), *Tenagodes anguinus* var. *Ligustica* Della Camp., *Natica epiglottina* Lam., *Natica Josephinia* Risso, *Cerithium tuberculiferum* Cocconi, *Cerithium italicum* Mayer, *Cerithium nodosoplicatum* Hörn., *Chenopus Uttingerianus* (Risso), *Dorsanum* sp. n. (aff. *Dorsanum Haueri* (Micht.) var. *excellens*, var. *scalata* Schaffer), *Nassa gigantula* (Bon.), *Nassa semistriata* Brocchi, *Nassa instabilis* Bell. e var. non striata), *Nassa (Hinia) reticulata* Lam. var., *Nassa (Niotha) Schönni* Hörnes et Auinger var., *Columbella (Anachis) corrugata* (Brocchi), *Murex (Hadriana) craticu-*

*latus* (Brocchi), *Clavatula Aradasi* Bell. var., *Clavatula turbinata* Bell., *Drillia pustulata* Brocchi.

Se si tiene conto anche delle specie citate dal Trabucco, che sono, come pare assai numerose, abbiamo in complesso una *facies* di mare poco profondo, di zona coralligena, ma non certamente di zona litorale, qual'è appunto la *facies tortoniana*. È indubbia la corrispondenza fra la fauna delle argille del Monte Titano con quelle di Monte Gibio nel Modenese, di Vigoleno, di Sant'Agata nel Tortonese, di Stazzano, dell'alta valle dell'Idice, dei Monti Livornesi, di Sogliano al Rubicone, di Benestare in Calabria. Fatta eccezione di poche, le più delle nostre specie non arrivano più in basso del Tortoniano ed alcune non furono trovate, almeno fino ad oggi, che in questo, quindi in base anche a criteri paleontologici non può esserci dubbio sulla perfetta corrispondenza di questi strati con quelli di Baden, Neudorf ecc. del Bacino di Vienna del 2° piano mediterraneo.

Debbo però notare che le sabbie che trovansi presso il Cimitero, nelle quali furono pure raccolti dal De Gasperi alcuni fossili, non possono unirsi ai depositi argillosi tortoniani, secondo, come pare, l'opinione del Trabucco e del Fuchs; poichè, per quanto non si abbiano che poche specie, pure mi sembrano sufficienti per farci ritenere questi depositi superiori come pliocenici.

Queste sabbie a *Nucule*, a *Lede* ed a *Corbule* mostrano difatti le seguenti specie: *Modiola intermedia* For., *Arca diluvii* Lam., *Nucula nucleus* L., *Leda pella* L., *Corbula gibba* Olivi, *Cardium echinatum* L., *Tellina elliptica* (Br.), *Gastrana fragilis* (L.), *Natica epiglottina* Lam.

### Patologia vegetale. — *Intorno alla peronospora della canapa.*

Nota del prof. VITTORIO PEGLION, presentata dal Socio G. CUBONI.

Le ripetute osservazioni intorno alla presenza ed al comportamento della peronospora della canapa, compiute durante un decennio all'incirca nelle floride coltivazioni del Ferrarese, confermano che, salvo casi eccezionali come quelli che segnalai qualche anno fa, questo parassita praticamente non presenta importanza alcuna. Tuttavia la notevole frequenza con cui esso si rinviene nella forma molto appariscente caratterizzata dalle fruttificazioni conidiali mi ha indotto a riprenderne lo studio, tanto più che il parassita essendosi notevolmente sviluppato in una piccola parcella di canepajo impiantato nell'orto sperimentale di questa Scuola Agraria era agevole seguirne le vicende.

Ho avvertito le prime macchie caratteristiche su piante che avevano già emesso il terzo ed il quarto palco di foglie: macchie relativamente ampie e non accompagnate da deformazione sulle foglie del primo nodo, circoscritte spesso ad una porzione longitudinale della fogliolina che s'incurva a falce nelle infezioni che si verificano nelle foglie dei nodi successivi. Estirpando

accuratamente le piantine che presentano tracce di peronospora sulle prime foglie e collocandole in ambiente molto umido e buio, dopo 24 ore si manifestano ampie efflorescenze di conidiofori anche sui palchi superiori di foglie: soltanto dopo parecchie ore l'area occupata dai conidiofori stessi accenna a clorotizzarsi ed imbrunire.

Mantenute invece in condizioni normali di sviluppo non accade mai di osservare queste copiose fruttificazioni del parassita su altre foglie che non siano quelle già palesemente infette.

Abbandonando per 3-4 giorni le piante nelle condizioni suddette di ambiente, nei tessuti peronosporati imbruniti ed in incipiente disorganizzazione, l'esame microscopico rivela la presenza di *oospore*, che, per i caratteri morfologici e le dimensioni corrispondono a quelle di cui segnalai la presenza nelle piantine di canapa soggiacenti a incappucciamento e peronospora; anche conservando in camera umida foglie peronosporate staccate, la formazione delle oospore avviene in brevissimo tempo sebbene in numero limitato.

Ma dove, anche in condizioni normali d'ambiente, vi ha regolare formazione di oospore si è nelle foglie cotiledonali che perdurano abbastanza lungamente: in tutte le piante in cui ho osservato macchie di peronospora nelle foglie di successiva evoluzione, l'esame microscopico degli avanzi cotiledonali ha rivelato la presenza di oospore oltrechè di una fitta efflorescenza di conidiofori.

Ciò induce a ritenere che l'infezione della piantina avvenga durante la fase germinale: se essa sia dovuta ad oospore disseminate nel terreno o se esse siano trasportate dalla canapuccia è difficile stabilire. Certo si è che il terreno investito a canepaio nell'orto della Scuola nella corrente primavera non era stato mai in passato assoggettato a tale coltivazione ed esso può considerarsi praticamente isolato dai canepai dei dintorni cioè dai presumibili focolai d'infezione.

Ho eseguito pertanto delle prove d'infezione su piantine di canapa appena germinate valutando dei conidi: prescindendo per un momento dalle modalità secondo cui avviene la germinazione di questi organi, le prove d'infezione eseguite su numerose piantine allevate in vaso sono pienamente riuscite: dopo 3-4 giorni dalla semina dei conidi, non pochi individui presentano i cotiledoni rivestiti su entrambe le pagine da una fitta efflorescenza bruna, formata dai conidiofori del parassita.

La presenza di una papilla all'apice dei conidi, segnalata dal Massalongo, mi aveva fatto sorgere il dubbio che questo fungo fosse impropriamente collocato nel genere *Peronospora*: difatti seguendone la germinazione si constata che essi si comportano come veri *zoosporangi*. Per seguirne l'andamento, avendo delle piantine di canapa in germinazione sotto campana ho seminato i conidi su gocce d'acqua condensatesi sui cotiledoni e contemporaneamente ho fatto delle semine in gocce d'acqua distillata nelle con-

suete camere umide montate su portaoggetti di vetro. In entrambi i casi dopo un periodo di tempo variabile da una a due ore, si avverte un accenno di frammentazione del contenuto protoplasmatico, la papilla apicale scompare e bruscamente le zoospore ben differenziate ed agilmente moventisi entro la parete conidiale fuoriescono, insinuandosi attraverso il ristretto foro apertosi all'apice del conidio: ogni conidio dà generalmente origine a 3 zoospore, biciliate, agilissime che percorrono in tutti i sensi la massa limpida. Seguendone l'ulteriore comportamento nelle goccioline d'acqua disseminate sui cotiledoni, dopo un'ora o due dall'uscita esse si fissano, perdono le ciglia, assumono forma sferoidale differenziando una sottile parete, quindi sviluppano un tubo germinale indiviso o ramoso che striscia contro l'epidermide sino alla più prossima apertura stomatica.

La ramificazione dei conidiofori secondo il tipo dicotomico e la germinazione dei conidi papillati per zoospore ravvicinano questo parassita della canapa alla peronospora delle cucurbitacee: questa è stata staccata dal genere *Plasmopara* dal Berlese<sup>(1)</sup> che propose di raccoglierla assieme a *Pl. Cellidis* in un sottogenere, *Peronoplasmopara* (pro conidiophoris Peronospora; pro conidiis Plasmopara). Il Rostowzew<sup>(2)</sup> noncurando le precedenti osservazioni del Berlese creò il genere *Pseudoperonospora* per porre in rilievo le caratteristiche di detto fungo; ma come giustamente osserva il Clinton<sup>(3)</sup> nel suo esauriente studio sulla peronospora delle cucurbitacee, per la priorità di pubblicazione e per i ben definiti caratteri il sottogenere *Peronoplasmopara* del Berlese, da elevarsi a genere, merita la precedenza. Pertanto anche il parassita della canapa cessa dal far parte del genere *Peronospora* e va riferito al gen. *Peronoplasmopara*.

In base ai risultati forniti dallo studio della *Peronoplasmopara cannabina* (Oth.) Pegl. ritengo sia possibile completare le conoscenze intorno al ciclo biologico dell'affine *Per. Cubensis*, di cui non si conoscono le oospore. Forse ricercando tali organi di svernamento del parassita negli avanzi cotiledonari sarà possibile risolvere il problema.

(<sup>1</sup>) Berlese, *Monogr. Peron.* Riv. Pat. veg. 1900.

(<sup>2</sup>) Rostowzew, *Flora*, 92, 1903.

(<sup>3</sup>) Clinton, Conn. Agr. Exp. St. 1904.

**Batteriologia.** — *Contributo all'accertamento della spirochetosi umana* (1). Nota preventiva dei dott. A. ZIRONI e G. CAPONE, presentata dal Socio MARCHIAFAVA.

Scopo della presente Nota riassuntiva è di mettere in evidenza il fatto, ripetutamente da noi osservato, del reperto positivo dei parassiti nel sangue in casi di itteri spirochetici anche durante il periodo itterico.

È ammesso dalla maggioranza degli autori che la *sp. nodosa* si rinvenga con grande difficoltà nel sangue e scompare dal circolo con l'inizio dell'ittero. Si accetta pure che il metodo più sensibile di diagnosi etiologica in casi di ittero infettivo epidemico sia dato dalla inoculazione intraperitoneale in cavia di qualche cm<sup>3</sup> di sangue preso nel periodo preitterico, o di urina, a partire dal 12° o 15° giorno di malattia.

Alcune osservazioni da noi fatte ci permettono di affermare che anche in casi lievi di ittero (condizioni generali buone, apiressia, scarso o nullo risentimento del fegato e della milza, sistema linfatico normale) si possono trovare, parecchi giorni dopo l'inizio dell'ittero, spirocheti nel sangue.

Riportiamo in riassunto i casi osservati:

1) S. Ten. U. D. di a. 23 del ... fant. che, ammalato ..... il 20/4 è itterico dai primi di maggio, ha setticemia spirochetica dimostrabile con grande facilità al paraboloide e col metodo Burri il 5 maggio.

2) M. G. di a. 22 del .... fant. Si rinvennero coi soliti metodi numerosi parassiti con tutti i caratteri delle spirochete di Ido e Inada 4 giorni dopo l'inizio dell'ittero e 12 giorni dopo l'inizio della malattia.

3) B. G. a. 31 ... fant. Si rinviene la spirocheta al paraboloide e col metodo Burri 2 giorni dopo l'inizio dell'ittero e 9 dall'inizio della malattia.

Non rientrano nella categoria surriferita, quantunque abbiano grandissima analogia per la facile dimostrazione del parassita nel sangue ad ittero in corso, i seguenti gravi ammalati:

4) A. G. operaio, proveniente da Monfalcone. Non è possibile raccogliere alcun dato anamnestico perchè l'i. versa in istato comatoso. L'ittero è spiccato, l'infermo è ipotermico. Il 7 aprile si raccoglie il materiale per l'esame. Si allestiscono preparati di sangue e di sedimento di urine alla Burri, ed in tutti si rinvennero rare spirochete. Il parassita, esile filamento con 2 o 3 larghe ondulazioni, ha lunghezza di 6-8 micron e spessore di 0.2. Si inoculano in una cavia 5 cm<sup>3</sup> di sangue e in un'altra 5 di urina, entrambe

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio batteriologico militare di Muscoli, 8 maggio 1917.

in peritoneo. L'i. morì al mattino dell'8 e l'autopsia pose in evidenza ittero universale, lesioni emorragiche delle sierose e degli organi interni, degenerazione grassa del fegato. Nel sangue del cadavere, nell'urina, e nella bile si rinvennero numerose spirochete morfologicamente identiche a quelle osservate nel vivo. 5 cm<sup>3</sup> di sangue del cadavere furono inoculati in peritoneo ad una cavia. Il 15 aprile si esaminano gli animali e si rinvennero spirochete solo nella cavia inoculata con sangue di cadavere. Il 23 aprile, con un nuovo esame si rinvennero, in tutti e due gli animali inoculati con sangue spirochete, identiche per forma e per grandezza a quelle descritte nel sangue del paziente.

5) Z. G. a. 33 ... fant. Ammalò a Monfalcone il 26/4. L'ammalato versa in gravi condizioni. Psiche obnubilata, sensorio ottuso, ittero spiccato. Linfoglandole normali. Catarro bronchiale diffuso. Nulla di notevole al cuore. Addome leggermente tumido, dolente. Fegato debordante e dolente: milza grossa e dura. Tremore degli arti nei movimenti. Kernig accennato. Riflessi cutanei e tendinei esagerati. Pupille torpide alla luce. Si praticano gli esami l'8 maggio e si rinviene la spirocheta specifica al paraboloide e col metodo Burri nel sangue e nel liquido cefalo-rachideo. Si inocula una cavia in peritoneo.

In base alla nostra esperienza dobbiamo quindi concludere che è riuscita con facilità la dimostrazione della spirocheta anche nel periodo dell'ittero nella totalità dei casi da noi osservati.

L'iniezione a cavia, data da quasi tutti gli autori come il metodo più sicuro di diagnosi dell'ittero spirochetico, in due nostri casi si dimostrò malfida. Ricordiamo il caso 5°. Le cavie inoculate col sangue del vivo e del cadavere il giorno 7 e il giorno 9 vivono tuttora e non sono mai state itteriche.

6) M. A. operaio proveniente da Monfalcone. Ammalò con ittero il 25 marzo, il 30 si poté prelevare il materiale. L'esame del sedimento delle urine, ottenuto con centrifugazione di mezz'ora e colorato con fucsina fenica, previo mordenzamento tannico, svelò rare spirochete. Si inocularono 5 cm<sup>3</sup> di urina fresca in cavia, si ripeté l'esame del sedimento dell'urina il 4 aprile e si osservò un numero di spirochete maggiore della prima volta. Il 7 si poterono inoculare 5 cm<sup>3</sup> di sangue del paziente a una cavia. L'animale dopo 9 giorni pareva abbattuto. Se ne guardò il sangue preparato con inchiostro di china ed all'ultramicroscopio, ma nulla si poté mettere in evidenza. Il 6 maggio nuovamente si esaminarono le cavie: quella inoculata con sangue aveva in circolo rare spirochete coi caratteri morfologici dei parassiti osservati nell'urina del paziente. Con l'esame in campo oscuro si videro in forma di esili filamenti dotati di vivace movimento oscillatorio. Nulla si ebbe dagli esami della cavia inoculata con urina.

Concludendo:

1) Anche nel periodo itterico di casi lievi di spirochetosi è facile la dimostrazione del parassita nel sangue degli infermi.

2) L'iniezione all'animale suscettibile (cavia) può far rilevare la presenza di spirochete nel sangue senza che si determini alcun quadro morboso.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio NASINI, relatore, a nome anche del Socio VOLTERRA, legge la seguente Relazione sulla Memoria presentata dal dott. U. PRATOLONGO: *Studi di Chimica cinetica*.

Nella Memoria presentata dal dott. Pratolongo si tratta un interessante capitolo della chimica cinetica. L'A., dopo avere notato che le condizioni di reagibilità della molecola non possono essere studiate completamente colle attuali dottrine termodinamiche e cinetiche, ma bensì ricercate nel campo della variabilità interna delle molecole, mette in evidenza che la soluzione del problema venne intraveduta da R. Marcelin, il quale, in molte pubblicazioni, riassunte poi nella « Tesi » stampata nel 1915, emise e sviluppò il concetto di una energia critica molecolare connessa colla reagibilità molecolare. E poichè il Marcelin si limitò ad applicare ad un piccolo dominio del campo chimico cinetico il valore delle sue deduzioni, l'A. si propone in questa Memoria di dare a tale concetto uno sviluppo più esteso e profondo. Questo è appunto lo scopo del lavoro presentato, nel quale l'A., con ampio sviluppo matematico, perviene al calcolo della energia critica relativa in determinate trasformazioni chimiche, e fornisce diversi esempi tratti da reazioni già studiate da altri, e tenta, in base ai concetti svolti, la spiegazione di alcuni fenomeni, come p. es. il rapporto fra l'attività chimica e lo stato nascente. I fenomeni che vengono principalmente studiati dall'A. sono quelli catalitici, i fotochimici, e le influenze mediali, che vengono tutti esaminati da un punto di vista unico.

La Commissione ritiene che la Memoria del dott. Pratolongo, che illustra e sviluppa con profondità di concetti e con largo corredo matematico un capitolo importante e nuovo della meccanica chimica, meriterebbe di essere inserita integralmente negli Atti della nostra Accademia: ma, tenuto conto delle circostanze presenti, e del fatto che la Memoria stessa può essere stampata per intero e con maggiore rapidità in riviste scientifiche italiane e francesi, è di avviso che il dott. Pratolongo potrebbe intanto presentare un sunto della sua Memoria da pubblicarsi nei nostri Rendiconti.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando le seguenti: *Su di un derivatore polare da servire nella radiotelegrafia*, del Corrisp. PASCAL; *Materiali per una revisione dei *Diploda oniscomorpha**, del Corrisp. SILVESTRI; *Principes de Géométrie analytique*, del Socio straniero DARBOUX. Lo stesso Segretario fa omaggio di un suo lavoro intitolato: *Il sorgere eliaco di Sirio con qualche accenno di paleo-cronologia egizia*, dando ampia notizia del contenuto e dello scopo di questo suo studio. Infine fa menzione di alcune altre pubblicazioni: *Bibliografia dell'aria* di G. BOFFITO e P. NICCOLARI; *Applicazioni della geologia. XXIII: Utilizzazione del fiume Aniene e bonifica idraulica della sua valle*, di G. DE ANGELIS D'OSSAT; e di una raccolta di Memorie di botanica offerte dall'autore prof. A. BÉGUINOT, direttore del R. Istituto botanico di Padova.

Il Socio VOLTERRA presenta le seguenti pubblicazioni del prof. E. LEBON: *Sur la construction de la nouvelle Table de base 30 030 des diviseurs des nombres inférieurs a 90 1800 900* — *Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres*.

Il Socio REINA, a nome anche dei collaboratori ingegneri CORTELLINI e DUCCI, offre una copia dell'opera: *Livellazione degli antichi acquedotti romani*, della quale discorre, descrivendo i lavori compiuti e i risultati ottenuti.

## COMUNICAZIONI DIVERSE

Il Presidente RÖRRI, nel dichiarare chiuso l'anno accademico per le sedute delle Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, rivolge un cordiale saluto ai Colleghi e pronuncia patriottiche parole, augurando che la piena vittoria venga presto a coronare gli eroici sforzi dei nostri combattenti e compensi i mirabili sacrifici del nostro paese. Rileva come il continuo progredire degli studi positivi fra noi, non miri alla preminenza della forza bruta, come vogliono i nostri nemici, ma favorisca l'intenso svolgersi delle energie latenti del nostro paese, delle quali i giovani danno oggi splendidi esempi. È questo un fatto che riempie di gioia, di soddisfazione e di fiera maestria, i quali veggono rivivere nei loro allievi gli antichi entusiasmi giovanili.



Il Presidente RÒTTI chiude il suo discorso tra gli applausi e le unanimi approvazioni dei presenti, proponendo l'invio del seguente telegramma di ossequio a S. M. il RE, alto Patrono dell'Accademia.

Eccellenza Generale Brusati, Aiutante di campo generale Sua Maestà

Zona di Guerra.

Vostra Maestà in questo giorno onorava di Sua presenza la Reale Accademia dei Lincei quale Alto patrono. La Classe di Scienze fisiche e matematiche oggi nell'ultima Sua Seduta annuale presenta rispettosì omaggi a Vostra Maestà e s'augura che la piena vittoria per i nostri alti ideali ridia all'Accademia l'ambito onore di presto ospitare il suo Alto Patrono.

Presidente RÒTTI.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA  
*presentate nella seduta del 3 giugno 1917.*

- AMODEO F. — Aritmetica ed algebra, volumi I-II, parte I, parte 2.<sup>a</sup> Napoli, 1910-15. 8°, pp. I-VIII 719; I-XII 381.
- BÉGUINOT A. — I distretti floristici della regione littoranea dei territori Circumadriatici (Estr. dalla « Rivista Geografica italiana », vol. XXIII, pp. 1-44). Firenze, 1916. 8°.
- BÉGUINOT A. — L'orto e l'Istituto botanico della R. Università di Padova. Padova, 1916. 8°, pp. 1-29.
- BÉGUINOT A. — La flora delle mura e delle vie di Padova (Estr. dalla « Rivista Malpighia », vol. XXIV, pag. 413; XXV, pag. 61; XXVII, pp. 244, 439, 547). Catania, 1911-16. 8°.
- BÉGUINOT A. — Le avventizie esotiche della flora italiana e le leggi che ne regolano l'introduzione (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXIII, pp. 1-100). Firenze, 1916. 8°.
- BÉGUINOT A. — Ricerche culturali sulle variazioni delle piante (Estr. dal « Bollettino di Studi ed informazioni del R. Orto botanico di Palermo », vol. III, pp. 1-16). Palermo, 1916. 8°.
- BÉGUINOT A. — Sopra alcune deformazioni tuberoidi. Sulle radici del comune girasole (*Helianthus Ansuicus* L.) e sulle cause delle stesse (Estr. dagli « Atti e Memorie », vol. XXXII, pp. 227-242). Padova, 1916. 8°.
- BÉGUINOT A. — Sulla genetica di alcune entità del ciclo di *Solanum nigrum* L. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto veneto di Scienze, lettere ed arti », vol. LXXV, pp. 538-556). Venezia, 1916. 8°.
- BÉGUINOT A. — Studi sul genere *Bellis* L. con speciale riguardo alle specie europeo-africane (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Veneto-Trentino-Istriana », vol. IX, 1916, pp. 1-64). Padova, 1916. 8°.
- BÉGUINOT A. — Un manipolo di piante raccolte nella penisola Balcanica (Estr. dal « Bullettino, della Soc. botanica italiana di Firenze », pp. 1-3). Firenze, 1916. 8°.
- BOFFITO GIUSEPPE — Bibliografia dell'aria, ossia Repertorio bio-bibliografico italiano di Meteorologia e di Magnetismo terrestre. Firenze, 1916. 4°, pp. 1-152.
- CORBELLINI G. — Livellazione degli antichi acquedotti Romani (Estr. delle « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL », vol. XX, pp. 1-77). Roma, 1917. 4°.
- DARBOUX G. — Principes de Géométrie analytique. Paris, 1917. 8°, pp. I-VI, 1-519.
- DE ANGELIS D'OSSAT G. — Applicazioni della Geologia, XXIII. Utilizzazione del fiume Aniene e bonifica idraulica della sua valle. Perugia, 1917. 8°, pp. 1-12.
- DUCCI G. — Livellazione degli antichi acquedotti Romani (Estr. delle « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL », vol. XX, pp. 1-77). Roma, 1917. 4°.
- DURANTE D. — Contributo alla conoscenza biologica della *Tingris pyri* L (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia gener. e agrar. », vol. XI, pp. 282-290). Portici, 1917. 8°.
- LEBON E. — Sur la construction de la nouvelle table de base 30030 des diviseurs des nombres inférieurs à 901 800 900 (Extr. de « Bulletin de la Société philomathique de Paris », t. X, pp. 1-12). Paris, 1917. 8°.
- LEBON E. — Théorie des nombres — Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres (Extr. des « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. 164, pp. 482-483). Paris, 1917. 4°.

- MARTINEZ G. — I moderni sistemi di ricezione radiotelegrafica (Estr. dal Giornale « L'Elettrotecnica », n. 15, pp. 1-7). Milano, 1917. 4°.
- MAZZA A. — Le avventizie esotiche della Flora italiana e le leggi che ne regolano l'introduzione e la naturalizzazione (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXIII, pp. 1-100). Firenze, 1916. 8°.
- MILLOSEVICH E. — Il sorgere eliaco di Sirio con qualche accenno di paleocronologia egizia (Estr. dalle « Memorie del R. Osservatorio Astronomico al Collegio Romano », vol. VII, pp. 1-25). Roma, 1917. 4°.
- NICCOLARI P. — Bibliografia dell'aria ossia Repertorio bio-bibliografico italiano di meteorologia o di magnetismo terrestre. Firenze, 1916. 4°, pp. 1-152.
- PASCAL E. — Su di un derivatore polare. Napoli, 1917. 8°, pp. 1-4.
- REINA V. — Livellazione degli antichi acquedotti Romani (Estr. delle « Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL », tomo XX, pp. 1-77). Roma, 1917. 4°.
- Rendiconti delle esperienze e degli studi eseguiti nell'Istituto (Istituto idrotecnico di Stra). Vol. I, fasc. 2°. Venezia, 1917. 8°, pp. 1-55.
- SILVESTRI F. — Materiali per una revisione dei *Diplopoda Oniscomorpha* (Estr. del « Bollettino del Laboratorio di Zoologia gen. e agraria », vol. XII, pp. 61-85). Portici, 1917. 8°.
-



## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76). Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. V. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 11<sup>o</sup>. Sem. 1<sup>o</sup>.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XII. Fasc. 4.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER C.° — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

	PAG.
<i>Bianchi</i> . Sopra una proprietà caratteristica delle superficie della classe $K = -\frac{1}{\{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)\}^2}$	575
<i>Stefani</i> . Innervazione del ricambio (*)	585
<i>Boccardi</i> . Sulla polodia	"
<i>Cerulli</i> . Ancora sulla polodia	587
<i>Bompiani</i> . Affinità e superficie applicabili (pres. dal Corrisp. <i>Castelnuovo</i> )	590
<i>Burali-Forti</i> . I moti relativi nel calcolo assoluto (pres. dal Corrisp. <i>Marcolongo</i> ) (**)	596
<i>Lazzarino</i> . Sull'estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque (pres. <i>Id.</i> )	"
<i>Sannia</i> . Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione della serie (pres. dal Socio <i>E. D'Ovidio</i> )	603
<i>Chistoni e Malladra</i> . Singolare precipitazione acquee osservata al Vesuvio (pres. dal Corrisp. <i>Cantone</i> )	606
<i>Eredia</i> . Correlazione tra la temperatura dell'Italia e dell'Egitto (pres. dal Socio <i>E. Millosevich</i> )	607
<i>Samsonoff-Aruffo</i> . Di alcune alghe calcaree provenienti dall'isola di Malta (pres. dal Socio <i>De Stefani</i> )	610
<i>Nelli</i> . Le argille mioceniche ed il pliocene di San Marino (pres. <i>Id.</i> )	617
<i>Peglion</i> . Intorno alla peronospora della canapa (pres. dal Socio <i>Cuboni</i> )	618
<i>Zironi e Capone</i> . Contributo all'accertamento della spirochetosi umana (pres. dal Socio <i>Marchiafava</i> )	621

RELAZIONI DI COMMISSIONI

<i>Nastri</i> (relatore) e <i>Volterra</i> . Relazione sulla Memoria del dott. <i>U. Pratalongo</i> : « Studi di chimica cinetica »	623
---	-----

PRESENTAZIONE DI LIBRI

<i>Millosevich</i> (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle dei Corrispondenti <i>Pascal, Silvestri</i> , del Socio straniero <i>Darboux</i> , dei sigg. <i>G. Boffito, P. Nicolari, G. De Angelis d'Ossat e A. Béguinot</i> .	624
<i>Volterra</i> . Fa omaggio di alcune pubblicazioni del prof. <i>E. Lebon</i>	"
<i>Reina</i> . Offre, a nome anche degli ingegneri <i>Cortellini e Ducci</i> , una copia dell'opera: « <i>Livellazione degli antichi acquedotti romani</i> » e ne discorre	"

COMUNICAZIONI DIVERSE

<i>Rotti</i> . Pronuncia parole di saluto ai Colleghi e propone l'invio di un telegramma di ossequio a S. M. il Re	625
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO	625

(\*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

(\*\*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**ATTI**  
DELLA  
**REALE ACCADEMIA DEI LINCEI**  
ANNO CCCXIV.  
1917

SERIE QUINTA

**RENDICONTI**

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 17 giugno 1917.*

**Volume XXVI.° – Fascicolo 12.°  
e Indice del volume.**

1.° SEMESTRE.



ROMA  
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO  
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonché il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - a) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - b) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - c) Con un ringraziamento all'autore. - d) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.







$Q_{n-1}^2$  contenente un  $S_{n-2}$  è un cono proiettante da un  $S_{n-1}$  una superficie di 2° ordiné, e quindi contenente due sistemi di  $S_{n-2}$ ).

Risulta dall'anzidetta proprietà fondamentale, anzitutto (con ragionamento induttivo da  $n$  a  $n + 1$ ) che i punti uniti, intersezioni delle quadriche (2) fuori di  $\beta$ , sono in generale  $n + 1$ ; in secondo luogo che, se vi sono varietà continue di punti uniti, queste sono lineari.

Ora, se la nostra omografia possiede un  $S_h$  di punti uniti, le varietà  $V_h$ , intersezioni di  $n - h - 1$  fra le nostre  $Q_{n-1}^2$ , conterranno  $S_h$  come parte; le residue  $V'_h$  s'incontreranno generalmente in  $n - h$  punti fuori dello  $S_h$ . In ogni caso codeste  $V'_h$ , soddisferanno ancora alla proprietà fondamentale delle  $V_h$ , e, in conseguenza di ciò, avranno a comune sempre varietà lineari; questa conclusione si estende al caso in cui le dette  $V'$  abbiano comune una varietà entro lo  $S_h$ : si definirà così un  $S_h$ , di *punti uniti doppi* ecc.

Questo rapido cenno è sufficiente a fare comprendere la definizione generale degli spazi di punti uniti multipli, di cui si riconosce tosto l'accordo colla definizione di Predella.

Ma vorrei rilevare la precisione che si ottiene nel concetto degli *spazi di punti uniti infinitamente vicini*. Qui tale locuzione s'introduce nel senso proprio che le spetta secondo la teoria generale delle singolarità: infatti *l'esistenza di spazi di punti uniti dell'omografia corrisponde a quella di spazi di contatto o d'osculatione per le quadriche (2) e quindi per le varietà, V, intersezioni di esse, che sono generate da spazi lineari.*

Emerge in pari tempo come nella teoria delle omografie si presenti soltanto il caso di spazi (di punti uniti) infinitamente vicini, che risponde ai *punti infinitamente vicini su rami lineari*, di guisachè ci si riduce infine a caratterizzare le omografie di un  $S_r$ , aventi  $r + 1$  punti infinitamente vicini sopra un ramo lineare; le quali posseggono, come invarianti, delle curve razionali normali di  $S_r$  (1).

Può apparire a prima vista strano che non si possano avere omografie con punti uniti infinitamente vicini, all'infuori dei casi in cui questi punti si lasciano definire mediante rami lineari. Ma la ragione di ciò apparisce chiara già dall'esame delle omografie piane: se si fanno avvicinare due punti uniti B e C ad un punto unito A, in direzioni diverse, l'omografia si riduce ad un'omologia speciale di centro A, il cui asse passa per A; altrettanto avviene se si fanno avvicinare ad A i due punti uniti B e C, movendosi sopra un ramo di second'ordine.

(1) Già parecchi anni or sono, il sig. Fano ed io avemmo occasione di scambiarci verbalmente questa proposizione, che avevamo indipendentemente osservata, e che può servire di fondamento e d'illustrazione alla riduzione dell'omografia a forma canonica. Una verifica analitica diretta della proposizione anzidetta, fu data dalla sig.<sup>ra</sup> Maria Sostegni nella sua tesi di laurea presentata all'Università di Bologna nel 1914 (e non pubblicata).

Matematica. — *I moti relativi nel calcolo assoluto*. Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Si è più volte accennato <sup>(1)</sup> alla possibilità ed opportunità di non far uso in meccanica di moti relativi [cfr. a)-i)] che richiedono sempre elementi estranei alla questione che si studia; ad es. negli ingranaggi [cfr. c)] portano alla considerazione di moti inesistenti. Due questioni non erano ancora state trattate esplicitamente ed intendo svilupparle in questa Nota. Una si riferisce alla pseudo-derivata rispetto ad assi mobili, concetto e notazione assai infelice; l'altra al luogo fisso e mobile degli assi di istantanea rotazione nel moto di un corpo rigido.

FORMA ASSOLUTA DEL MOTO RELATIVO.

In uno spazio geometrico  $S$ , fisso ed illimitato, tutti i punti sono animati da un moto  $\nu$ , cioè ogni punto di  $S$  è in ogni tempo  $t$  posizione di punti in moto nello spazio stesso. In certi casi è opportuno considerare un osservatore del moto  $\nu$ , non fisso in  $S$  ma animato da un moto di corpo rigido  $\mu = \left( \begin{smallmatrix} O_1 \\ O \end{smallmatrix}, \lambda \right)$  ove  $O$  è punto fisso,  $O_1$  punto e  $\lambda$  isomeria vettoriale ad invariante terzo positivo [cfr. g)] funzioni di  $t$ . Il moto  $\mu$  può essere, o pur no, indipendente da  $\nu$ . L'osservatore, in tali condizioni, vede in moto qualsiasi punto  $P$  fisso di  $S$  (moto relativo) e nel tempo  $t$  lo vede nella posizione  $\mu P$ . Così è stabilito il moto relativo all'osservatore senza bisogno di assi fissi e mobili. Tanto per dare un esempio si può stabilire quand'è che « il moto  $\nu$  si dice *stazionario* rispetto al moto  $\mu$  dell'osservatore ». Nel tempo  $t$ , passano per  $P$  e  $\mu P$  due punti che nel moto  $\nu$  hanno le velocità  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$ ; si dice che  $\nu$  è stazionario rispetto a  $\mu$ , quando essendo  $\mathbf{a}$  vettore arbitrario, si ha  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{v}_1 \times \lambda \mathbf{a}$ , cioè  $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = K \lambda \mathbf{v}_1 \times \mathbf{a}$ , che per l'arbitrarietà di  $\mathbf{a}$  dà  $\mathbf{v} = K \lambda \mathbf{v}_1$ , cioè  $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}$ ; e questa è, sotto la sua forma più semplice, la condizione di stazionarietà.

<sup>(1)</sup> Citeremo i lavori seguenti.

- C. Burali-Forti et R. Marcolongo: a) *Éléments de calcul vectoriel* (Hermann, Paris). — b) *Analyse vectorielle générale* (Mattei, Pavia).  
 C. Burali-Forti: c) *Ingranaggi piani* (Atti Acc. Torino, vol. 37). — d) *Sul moto di un corpo rigido* (id., vol. 38). — e) *Sul moto composto* (id., vol. 47). — f) *Sulle derivate delle isomerie vettoriali* (Rend. Lincei, vol. XXV. serie 5<sup>a</sup>; nella formula [1] a pag. 712 dopo il simbolo  $\wedge$  manca  $\lambda$ ; si deve scrivere  $\lambda' = \Omega \wedge \lambda$ ). — g) *Isomerie vettoriali e moti geometrici* (Mem. Acc. Torino, s. II, vol. 65). — h) *Corsa di Geometria analitico-proiettiva* (G. B. Petrini, Torino).  
 A. Pensa: i) *Sopra alcune proprietà del moto di un corpo rigido* (Rendic. Palermo, T. XXXVI).

È noto [cfr. *a*), *f*), *g*)] che il moto  $\mu$  determina il vettore  $\Omega$  funzione di  $t$  che dà la rotazione istantanea e tale anche che [cfr. *f*)]

$$d\lambda = \Omega \wedge \lambda dt, \quad dK\lambda = -(K\lambda\Omega) \wedge K\lambda dt.$$

Ciò posto, ed essendo  $\mathbf{u}$  un qualsiasi vettore funzione di  $t$ , si ha

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \lambda \frac{d(K\lambda\mathbf{u})}{dt} + \Omega \wedge \mathbf{u}.$$

Infatti per le formule ora citate, e ricordando che

$$R\lambda = \lambda, \quad (\lambda\mathbf{a}) \wedge (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \quad (\lambda\mathbf{a}) \times (\lambda\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

si ha

$$\begin{aligned} d(K\lambda\mathbf{u}) &= (dK\lambda)\mathbf{u} + K\lambda d\mathbf{u} = -(K\lambda\Omega) \wedge K\lambda\mathbf{u} dt + K\lambda d\mathbf{u} = \\ &= K\lambda \{ -\Omega \wedge \mathbf{u} dt + d\mathbf{u} \}, \end{aligned}$$

dalla quale operando con  $\lambda$  nei due membri ( $\lambda.K\lambda = 1$ ) e dividendo per  $dt$  si ha la (1).

Se  $P$  è un punto funzione di  $t$ , dalla identità  $P = O_1 + (P - O_1)$  e dalla (1) si ha subito

$$(2) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \lambda \frac{d\{K\lambda(P - O_1)\}}{dt} + \Omega \wedge (P - O_1).$$

Il primo termine del secondo membro della (1) è il vettore che di solito si chiama « derivata di  $\mathbf{u}$  rispetto agli assi mobili » e si indica con la notazione  $d'\mathbf{u}/dt$ , cioè si pone

$$(a) \quad \frac{d'\mathbf{u}}{dt} = \lambda \frac{d(\overset{\cdot}{K}\lambda\mathbf{u})}{dt}$$

e siccome il secondo membro *non* è una derivata, tanto basta per non accettare denominazione e notazione usuale. L'origine cartesiana di tale denominazione e notazione è questa. Essendo  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  la solita terna ortogonale parallela agli assi fissi, gli assi mobili collegati con l'osservatore sono paralleli ai vettori  $\lambda\mathbf{i}, \lambda\mathbf{j}, \lambda\mathbf{k}$ ; posto  $\mathbf{u} = x\lambda\mathbf{i} + y\lambda\mathbf{j} + z\lambda\mathbf{k}$ , il vettore (a) è

$$\frac{dx}{dt} \lambda\mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \lambda\mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \lambda\mathbf{k}$$

che facilmente si pone sotto la forma del secondo membro della (a). Risulta ancora una volta [cfr. *a*), vol. I e II] come le coordinate cartesiane possano dare facilmente origine a degli pseudo-enti e pseudo-operatori.

Giova osservare, sebbene ciò abbia relazione soltanto indiretta con i moti relativi ordinari, che se  $\mathbf{u}$  e  $\lambda$  sono funzioni, non di  $t$ , ma di un

punto  $P$  variabile in un campo (continuo, ecc.) a tre dimensioni, si ha una formula analoga alla (1),

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dP} = \lambda \frac{d(\mathbf{K}\lambda\mathbf{u})}{dP} - \mathbf{u} \wedge \mu$$

ove  $\mu$  è l'omografia funzione di  $P$  [cfr.  $f$ ] per la quale si ha  $d\lambda = (\mu dP) \wedge \lambda$ . Si ha infatti [cfr.  $f$ ], pag. 714]

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{K}\lambda\mathbf{u})}{dP} \mathbf{x} &= \mathbf{K}\lambda \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{x} - (\mathbf{K}\lambda \cdot \mu\mathbf{x}) \wedge \mathbf{K}\lambda\mathbf{u} \\ &= \mathbf{K}\lambda \left\{ \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{x} + \mathbf{u} \wedge (\mu\mathbf{x}) \right\}. \end{aligned}$$

#### MOTO DI CORPO RIGIDO.

Si consideri un corpo rigido in moto e sia  $P$ , funzione di  $t$ , il suo punto generico nel tempo  $t$ , posizione del punto  $P_0$  del corpo all'inizio del moto, cioè nel tempo  $t_0$ . Indicheremo con gli apici le derivate rispetto a  $t$ .

Il moto del corpo rigido è individuato da una formazione geometrica di seconda specie [cfr.  $h$ ),  $d$ ),  $i$ )]

$$(1) \quad s = \varphi \cdot O\mathbf{u} + m|\mathbf{u}$$

ove  $\varphi$ ,  $m$  sono numeri reali,  $O$  è un punto,  $\mathbf{u}$  un vettore unitario, funzioni tutti di  $t$ , senza che la linea descritta da  $O$  sia necessariamente una traiettoria di un punto del corpo rigido, come pure  $\mathbf{u}$  non sia necessariamente invariabilmente collegato col corpo rigido. La retta  $O\mathbf{u}$  è l'asse istantaneo di Mozzi nel tempo  $t$ .  $\varphi dt$ ,  $mdt$  danno le grandezze della rotazione e traslazione istantanea nel tempo  $t$ .

La velocità  $P'$  nel tempo  $t$  è data da [cfr.  $c$ ),  $i$ )]

$$(2) \quad P' = |(Ps \cdot \omega) = \varphi\mathbf{u} \wedge (P - O) + m\mathbf{u} \quad (1)$$

dalla quale si ricava la formula usuale

$$(3) \quad P' - Q' = \varphi\mathbf{u} \wedge (P - Q)$$

nella quale non compare la traslazione  $m$ .

Si può partire dalla (3) per stabilire il moto del corpo rigido [cfr.  $a$ ),  $f$ )] e allora  $m$  è dato da  $P' \times \mathbf{u}$  che è indipendente dallo speciale punto  $P$

(1) Si noti che un punto  $P$  del corpo rigido può stare, in ogni tempo  $t$ , nell'asse di Mozzi, la retta  $O\mathbf{u}$ , solamente quando  $P = O + x\mathbf{u}$  e quindi  $P' = m\mathbf{u}$ . La rigata descritta da  $O\mathbf{u}$  è quindi sviluppabile e  $P$  ne deve descrivere lo spigolo di regresso. È importante tener conto che il punto  $O$  funzione di  $t$  (generico sulla retta  $O\mathbf{u}$ ) non descrive in generale una traiettoria di un punto del corpo.

del corpo, e un punto dell'asse di Mozzi è  $P + 1/\varphi \mathbf{u} \wedge P'$  proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse e per il quale passa, nel tempo  $t$ , un punto del corpo rigido con la velocità  $m\mathbf{u}$  [cfr. a)].

Esiste la isomeria vettoriale, un Rotor [cfr. g)],  $\lambda$  tale che per  $P, Q$  punti arbitrari del corpo rigido

$$(4) \quad P - Q = \lambda(P_0 - Q_0)$$

e per tale isomeria si ha [cfr. f)]

$$(5) \quad \lambda' = \varphi \mathbf{u} \wedge \lambda, \quad K\lambda' = -\varphi(K\lambda \mathbf{u}) \wedge K\lambda.$$

La retta  $O\mathbf{u}$  descrive, col variare di  $t$ , una rigata  $\Sigma$  luogo immobile degli assi di istantanea rotazione. Il punto  $H$  e il vettore unitario  $\mathbf{v}$ , funzioni di  $t_0$  e di  $t$ , invariabilmente collegati col corpo rigido, siano tali che nel tempo  $t$  divengano rispettivamente  $O, \mathbf{u}$ , cioè si abbia

$$P - O = \lambda(P_0 - H), \quad \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v},$$

ovvero, il che equivale.

$$(6) \quad H = P_0 - K\lambda(P - O), \quad \mathbf{v} = K\lambda \mathbf{u}.$$

La retta  $H\mathbf{v}$  descrive, col variare di  $t$ , una rigata  $\Sigma_1$  che è il luogo mobile degli assi di istantanea rotazione. Durante il moto le generatrici  $H\mathbf{v}$  di  $\Sigma_1$  vengono a disporsi nelle corrispondenti generatrici  $O\mathbf{u}$  di  $\Sigma$  e  $H$  si dispone in  $O$ .

Per le derivate, rispetto a  $t$ , di  $H$  e  $\mathbf{v}$  si ha

$$(7) \quad H' = K\lambda(O' - m\mathbf{u}), \quad \mathbf{v}' = K\lambda \mathbf{u}'$$

e in conseguenza

$$(8) \quad \lambda(H' \wedge \mathbf{v}) = O' \wedge \mathbf{u}, \quad \lambda(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \wedge \mathbf{u}.$$

Ciò si dimostra facilmente. Derivando la prima delle (6) e tenendo conto delle (5) si ha

$H' = -K\lambda'(P - O) - K\lambda(P' - O') = K\lambda\{\varphi \mathbf{u} \wedge (P - O) - P' + O'\}$  che per la (2) dà la prima delle (7). Derivando la seconda delle (6) si ha

$$\mathbf{v}' = K\lambda' \mathbf{u} + K\lambda \mathbf{u}' = -\varphi(K\lambda \mathbf{u}) \wedge K\lambda \mathbf{u} + K\lambda \mathbf{u}'$$

che dà la seconda delle (7). Dalle (7) si ha, per la seconda (6),

$$H' \wedge \mathbf{v} = K\lambda\{(O' - m\mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}\}, \quad \mathbf{v}' \wedge \mathbf{v} = K\lambda(\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u})$$

ed operando con  $\lambda$  nei due membri si hanno le (8) (1).

(1) Si tenga presente che:  $\lambda \cdot K\lambda = K\lambda \cdot \lambda = 1$ ,  $R\lambda = \lambda$ ,  $(\lambda \mathbf{a}) \wedge \lambda \mathbf{b} = R\lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ ,  $(\lambda \mathbf{a}) \times (\lambda \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

Da queste formule semplicissime derivano le proprietà del rotolamento di  $\Sigma_1$  in  $\Sigma$  che dà il moto del corpo rigido come ora esponiamo.

Nei punti  $H, O$  di  $\Sigma_1, \Sigma$ , i piani tangenti sono normali [cfr. *h*] ai vettori  $H' \wedge \mathbf{v}, O' \wedge \mathbf{u}$  e gli elementi di area in tali punti hanno per rapporto il rapporto dei moduli dei due vettori. Osservando che per  $a$  costante arbitraria il punto  $H + a\mathbf{v}$  va in  $O + a\mathbf{u}$  e che la prima delle (8) vale sostituendo ad  $H$  ed  $O$  questi punti, dalla prima delle (8) risulta subito, come è noto, che: durante il moto la  $\Sigma_1$  ha moto di sviluppo in  $\Sigma$ , cioè in qualunque posizione i piani tangenti a  $\Sigma_1$  nei punti di  $H\mathbf{v}$  vengono a coincidere coi piani tangenti a  $\Sigma$  nei punti corrispondenti di  $O\mathbf{u}$  e gli elementi corrispondenti di aree sono eguali.

I punti della linea  $H$  vengono, durante il moto, nei punti della linea  $O$ , ma essendo  $\lambda H' = O' - m\mathbf{u}$  la tangente in  $H$  si dispone nella tangente in  $O$  solamente quando  $mO' \wedge \mathbf{u} = 0$ , cioè  $m = 0$ , oppure, essendo  $O' \neq 0$ ,  $O'$  è parallelo ad  $\mathbf{u}$  nel qual caso  $\Sigma$  è una sviluppabile (non cono) aventi la linea  $O$  come spigolo di regresso. Gli archi delle due linee non sono, in generale, eguali, perchè dalla prima delle (7) si ha

$$H'^2 = O'^2 + m^2 - 2mO' \times \mathbf{u}$$

che dà archi eguali solo per  $m = 0$  ovvero  $m = 2O' \times \mathbf{u}$ .

Ricordando che  $\mathbf{u} \times \mathbf{u}' = 0$ , perchè  $\mathbf{u}$  è unitario, si ha dalle (7)

$$H' \times \mathbf{v}' = (O' - m\mathbf{u}) \times \mathbf{u}' = O' \times \mathbf{u}';$$

e poichè  $O' \times \mathbf{u}' = 0$  esprime [cfr. *h*] che  $O$  descrive la *linea di stringimento* di  $\Sigma$  si ha: la linea ( $H$ ) di stringimento di  $\Sigma_1$  viene a collocarsi, punto a punto, nella linea di stringimento di  $\Sigma$ .

Nello stesso modo si ha

$$H' \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = O' \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{u}' \quad , \quad H' \wedge \mathbf{v} = O' \wedge \mathbf{u},$$

e poichè  $O' \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$  dice che  $\Sigma$  è sviluppabile e  $O' \wedge \mathbf{u} = 0$  che  $O$  descrive lo spigolo di regresso di  $\Sigma$ , risulta subito che:  $\Sigma_1$  e  $\Sigma$  sono sviluppabili insieme e lo spigolo di regresso di  $\Sigma_1$  viene a collocarsi, punto a punto, nello spigolo di regresso di  $\Sigma$  (<sup>1</sup>).

(<sup>1</sup>) Comunque sia scelto  $O$ , il punto  $R$  di  $O\mathbf{u}$  che descrive la linea di stringimento o lo spigolo di regresso di  $\Sigma$  è dato da [cfr. *h*]

$$R = O - \{(O' \times \mathbf{u}') / (\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u})^2\} \mathbf{u};$$

il corrispondente punto in  $H\mathbf{v}$  è dunque, per le formule note,

$$H - \{(O' \times \mathbf{u}') / (\mathbf{u}' \wedge \mathbf{u})^2\} \mathbf{v}.$$



Se  $\Sigma$  è un cono si può supporre  $O$  suo vertice, cioè  $O' = 0$ . Si ha allora dalla prima delle (7)  $H' = -m\mathbf{v}$  e quindi  $\Sigma_1$  è sviluppabile essendo  $H$  lo spigolo di regresso; in particolare un cono di vertice  $H$  (coincidente con  $O$  perchè ciò avviene nel tempo  $t_0$ ) solamente quando  $m = 0$ .

Se  $\Sigma$  è un cilindro, cioè  $\mathbf{u} = \text{cost}$ , ovvero  $\mathbf{u}' = 0$ , allora per la seconda delle (7) si ha pure  $\mathbf{v} = \text{cost}$ , cioè  $\Sigma_1$  è pure un cilindro. Se  $O$  descrive una sezione retta del cilindro  $\Sigma$ , cioè  $O' \times \mathbf{u} = 0$ , allora avendosi in generale  $H' \times \mathbf{v} = O' \times \mathbf{u} - m$ , la linea  $H$  è sezione retta del cilindro  $\Sigma_1$  solamente quando  $m = 0$ .

Si sono così ottenute, in modo semplicissimo, le leggi generali e particolari del rotolamento di  $\Sigma_1$  in  $\Sigma$  senza far uso di moti relativi, senza, cioè, introdurre dei moti fittizi che nulla hanno a che fare col moto dato che, poichè è dato, deve bastare ampiamente da sè solo a dare tutte le proprietà del moto. Sono in sostanza le isomerie vettoriali che eliminano nello spazio i moti relativi come nel piano [cfr. a), moto rigido piano] eliminano, sotto forma già nota, gli stessi moti. Si può esser certi che una volta eliminati *sistematicamente* i moti relativi in *tutta* la Meccanica, questa assumerà forma assai più semplice e chiara; si intende introdotti gli elementi assoluti ed eliminate le inutili coordinate.

Patologia vegetale. — *Intorno ad una gommosi specifica dell'albicocco*. Nota del prof. VITTORIO PEGLION, presentata dal Socio CUBONI.

Di forme fungine gummigene se ne conoscono ormai parecchie: cronologicamente elencate figura in prima linea il *Clasterosporium carpophilum*, quindi le forme conidiali di alcune *Sclerotinia*, un micelio sterile isolato dal Maimone (1) dalla gomma di limone, la *Pythiacystis citrophthora*, agente specifico della forma di gommosi prevalente negli agrumeti della California secondo il Fawcett (2), riscontrata successivamente in altre gommosi degli alberi da frutto: allorquando codesti parassiti riescono a penetrare di primavera nei tessuti corticali dei rami delle rispettive piante ospiti (agrumi e drupacee) e concorrano speciali condizioni di ambiente e precisamente largo afflusso acqueo per pioggia od irrigazione, le lesioni cagionate dal micelio diventano sede di così cospicuo processo gommoso da trarre in inganno chi osservi superficialmente il fenomeno.

Tale è una forma di gommosi che minaccia seriamente la coltivazione dell'albicocco nella regione emiliana: si tratta della stessa malattia ram-

(1) Maimone B., Annali Scuola Agr. Portici 1911.

(2) Fawcett H. S., Calif. St. Hort. Monthl. Bull. 1913 — ed in Phytopathology — Feb. 1915.

mentata incidentalmente dal Beijerinck <sup>(1)</sup> e dall'Eriksson <sup>(2)</sup> segnalata successivamente dal Faes <sup>(3)</sup>, come assai dannosa agli albicocchi del Valais nel 1903-904-914 e che ha inferito nel 1915 nelle piantagioni della Valle del Rodano <sup>(4)</sup>. Ne è causa lo stato conidiale di una *Sclerotinia* che sarebbe riferibile a *Scl. laxa* se i caratteri differenziali rilevati dall'Aderhold e Ruhland <sup>(5)</sup> fossero abbastanza validi per distinguere questo parassita da *Scl. cinerea*; il carattere più significante sarebbe la stretta specializzazione del parassitismo all'albicocco che si verifica anche nei frutteti della regione emiliana: l'albicocco promiscuamente coltivato con peschi, susini, ciliegi, cotogni, meli e peri è il solo a subire i disastrosi effetti della *Sclerotinia* in parola; ho osservato per più anni l'andamento dell'infezione su un albero di albicocco di cui un ramo fu innestato a susino; il parassita distrugge regolarmente i rami fioriferi dell'albicocco, mentre rispetta nel modo più assoluto la fioritura e la vegetazione del ramo innestato a susino, ancorchè si siano determinati ad arte contatti diretti tra le parti infette dell'uno e le ramificazioni dell'altro.

Le prime tracce dell'infezione si avvertono durante la fioritura dell'albicocco: alcuni fiori saltuariamente disposti avvizziscono ma non accennano a disarticolarsi, come accade per mancata fecondazione o brinate; più tardi quando i getti erbacei si sono allungati, l'avvizzimento colpisce bruscamente da un giorno all'altro i germogli corrispondenti a detti fiori; al disotto dell'inserzione di questi, talora a qualche nodo di distanza tanto più sollecitamente se la stagione è piovosa, si manifesta un flusso gommoso in goccioline trasparenti che gemono da fessure della corteccia e si rapprendono in grumi più o meno voluminosi; questi rappresentano per i pratici il sintomo caratteristico dei colpi di gomma contro i quali essi si considerano disarmati, e cui viene attribuito il rapido deperimento dei rami e talora dell'albero intero. In realtà ciò accade quando rami od intero albero per le condizioni di momentanea depressione vegetativa offrano facile bersaglio ai comuni Scolitidi o tarli, che sembrano attirati dagli alberi fruttiferi in via di deperimento, per lesioni che comunque intralcino la circolazione dei succhi.

Più cospicua gommosi si osserva sulle branche adulte e sullo stesso tronco: il fenomeno ha la stessa origine. È noto che nel legno vecchio dell'albicocco sono disseminate numerose gemme, pronte a svolgersi a getti erbacei od a fiore; quando l'infezione colpisca uno di codesti brevissimi rametti fioriferi, essa si propaga lungo il medesimo e compromette un'area

(1) Beijerinck M. W. e Rant, Centr. Bakt. Paras. II XV, fasc. 12.

(2) Eriksson J., Mycol. Centralbl. II, h. 2, 1913.

(3) Faes E., Terre Vaudoise. juin 1914

(4) Chiffot et Manonat, Revue hort. 16, VIII, 15.

(5) Aderhold und Ruhland, Arb. Biol. Abt. f. Land-Fortw. IV-5-1905.

ellittica più o meno ampia del ramo adulto, alla cui periferia geme il flusso gommoso.

In tutti i casi l'infezione avviene attraverso lo stigma secondo il meccanismo illustrato per altre specie di *Sclerotinia* dal Woronin; il filamento miceliale conseguente alla germinazione dei conidi sullo stigma, penetra nella cavità ovarica invadendone la parete e ricoprendone la superficie esterna di abbondanti fruttificazioni conidiali; sono quindi invasi e coperti di fruttificazioni la corolla gli avanzi del calice e talora anche gli stami. I fiori sono mummificati. Successivamente, attraverso il brevissimo peduncolo florale, il micelio penetra nel tessuto corticale del rametto su cui il fiore è inserito, diffondendosi per un tratto ellittico di lunghezza variabile; per accertare l'entità dell'area infetta basta eseguire sezioni tangenziali in corrispondenza all'inserzione dei fiori mummificati in guisa da scoprire i tessuti corticali che percorsi da numerosi e voluminosi filamenti assumono una colorazione bruna; asportando colle dovute precauzioni piccoli frammenti di tessuto imbrunito — tanto dai rametti di un anno che dai rami adulti o dal tronco — ed innestandoli su fette di bietola sterilizzate si ottengono rigogliose colture che non tardano a differenziare le caratteristiche fruttificazioni di *Monilia*.

Infezione florale, seguita da mummificazione, necrosi del tessuto corticale, comparsa della gomma quasi a circoscrivere l'infezione, tali sono i fenomeni che si succedono nel volgere di due o tre settimane, dopodichè apparentemente l'infezione è arrestata: la contaminazione dei frutti in via di accrescimento è assai limitata; il caso più frequente è il contagio di qualche frutto crescente a contatto con un fiore mummificato ed imbrattato di gomma.

Questa impregna tutta la massa di tessuti necrosati che diventano fragili, duri al rasoio; se l'intera periferia del rametto è compromessa, la parte soprastante alla lesione avvizzisce e secca rapidamente; la necrosi è circoscritta talvolta ad una sola parte della corteccia com'è il caso dei rami adulti o del tronco infetti attraverso ad una gemma fiorifera avventizia. La cicatrizzazione della piaga o del cancro, secondo usi correntemente ma impropriamente designare le lesioni derivanti da codeste necrosi del tessuto corticale, si inizia rapidamente: voluminosi calli si differenziano che provvedono entro l'anno stesso a rimarginare ferite talora assai vaste onde nell'annata successiva l'infezione passata è rivelata dalla deformazione più o meno accentuata dovuta alla fusione dei calli ipertrofici.

Tanto nei rametti dell'anno uccisi dal parassita, quanto in codesti cancri si differenziano fruttificazioni conidiali che derivano da gomitoli di micelio organizzatisi in corrispondenza delle lenticelle o di qualche eventuale soluzione di continuità del periderma, gomitoli da cui erompono all'esterno pustole di colore grigio costituite da un cuscinetto stromatico ricoperto da catenelle di conidi. Nei cancri in via di cicatrizzazione il periderma di

neoformazione elimina i tessuti corticali infetti, in seno ai quali tuttavia il micelio del parassita si raggomitola e spinge stromi fruttiferi fuori dalle lenticelle; quando la cicatrizzazione sia compiuta permangono i brandelli di tessuto eliminato, ricoperti da pustole conidiali di *Monilia* che però non riesce a penetrare nei tessuti di neoformazione onde la rimarginatura della ferita è perfetta.

A queste pustole conidiali disseminate sui rametti secchi e alla periferia di detti cancri ed alle pustole che si differenziano sui fiori mummificati sembra soprattutto affidato lo svernamento del parassita. Le prove metodicamente eseguite durante il rigido inverno scorso e nella corrente primavera mi hanno dimostrato che a malgrado delle neviccate, geli e disgeli, molti fiori mummificati nella primavera 1916 erano tuttora attaccati ai rametti e coperti di stromi fruttiferi disseminati sugli avanzi della corolla, sulla traccia d'imerzione dei petali, sulle lesioni dei rametti stessi; staccando in qualsiasi momento uno di questi organi infetti bastano poche ore di permanenza in camera umida per constatare la vitalità degli stromi e la spiccata energia vegetativa delle spore. Si comportano analogamente i frutti mummificati che restano attaccati ai rami: tali mummie ricoperte di fruttificazioni conidiali rinvencono all'epoca della fioritura e differenziano conidî prontamente germinabili che gli agenti naturali disseminano all'intorno.

I frutti mummificati che cadono sul terreno si disorganizzano rapidamente: un certo numero di essi raccolti nella primavera 1916 e ricoperti con un dito di sabbia in un vaso da fiori abbandonato all'aperto hanno dato origine a sclerozi neri, appiattiti analoghi a quelli che si formano in abbondanza nelle colture pure del fungo in substrato liquido. A differenza di altre specie di *Sclerotinia* sembra che la formazione degli apotecii avvenga dopo un periodo di quiescenza più prolungato: gli sclerozi di *Scl. ciborioides* ottenuti da colture pure, interrati nel maggio 1916 mi hanno dato gli apotecii nel novembre dello stesso anno; sclerozi di *Scl. Libertiana* interrati anch'essi nel maggio hanno fruttificato nel maggio 1917; i frutti di cotogno mummificati da *Scl. Cydoniae* (*Scl. Linhartiana*) hanno dato apotecii nel marzo 1917 dopo 28 ore di permanenza in termostato. Invece i frutti mummificati di albicocco e gli sclerozi ottenuti in coltura pura trattati alla stessa stregua rimasero perfettamente inerti, ed è noto che Ruhland ed Aderhold e successivamente il Valleau<sup>(1)</sup> ottennero gli apotecii da sclerozi rimasti in terra almeno per due anni.

Mentre la disseminazione delle ascospore delle *Sclerotiniae* ha carattere spiccatamente *anemofilo*, il trasporto dei conidî (*Monilia*) sembrerebbe affidato precipuamente agl'insetti pronubi: non soltanto le foglie di Cotogno colpite da *Monilia Cydoniae* esalando il delicato profumo di miele attirano

(1) Valleau W. D., Journ. of Agr. Res., Washington, V, 2.

gl'insetti; analoga azione chemotropica esercitano fiori e frutti mummificati di albicocco sui quali abbia ripreso a vegetare il parassita ed i getti di *Crataegus oxyacantha* infetti da *Scl. Crataegi*. La rapida diffusione che può assumere l'infezione nell'albicocco sarebbe in correlazione colla fioritura precoce e abbastanza duratura onde i pronubi imbrattandosi di spore durante la visita ai fiori infetti propagano l'infezione passando sui fiori immuni.

La lotta contro questa gravissima infezione deve pertanto imperniarsi sulla sistematica distruzione dei centri di svernamento del parassita: non si può circoscrivere ai molto appariscenti frutti mummificati che è agevole raccogliere durante l'inverno e bruciare. È contro le pustole svernanti sugli avanzi fiorali, sui rametti uccisi del fungo e sui brandelli di corteccia ricoprenti i cancri dei rami adulti e del tronco che bisogna agire. Le pratiche da adottare potrebbero essere le stesse proposte da Eriksson per la difesa dei meli e dei ciliegi dagli attacchi di *Monilia* nei fiori e nei getti; senonchè poco assegnamento può farsi sui trattamenti anticrittogamici, data la resistenza che oppongono agli antisettici gli aggregati compatti di micelio e di spore quiescenti; agevole ne è invece la soppressione mediante accurata potatura da eseguirsi quando la vegetazione è avviata ed è facile scorgere i danni localizzati subito dall'albero, salvo a completare la pulizia durante il riposo invernale. Per i cancri basta tener presente che essi si rimarginano normalmente e che in essi l'infezione è circoscritta agli avanzi di corteccia più o meno sbrandellata, facilmente asportabili con raschiature superficiali.

**Vulcanologia.** — *Le fumarole a tenorite ed a cloruri alcalini nella lava dello Stromboli* (1). Nota di G. PONTE, presentata dal Corrispondente F. MILLOSEVICH.

Il teatro eruttivo dello Stromboli se da un lato si presta molto per la osservazione dei fenomeni vulcanici, essendo possibile dominare dall'alto della Fossa i crateri, dall'altro non rende facile l'accesso alle colate che, tutte, da data immemorabile, prorompono sulla Sciara del Fuoco.

La Sciara del Fuoco è quella pendice sul versante NE dello Stromboli che dai crateri (altitudine circa 700 m.) si estende per ben 1000 metri fino al mare con una inclinazione di circa 45°. Su questa pendice ruzzolano in gran parte i materiali piroclastici lanciati fuori dei crateri durante le esplosioni ed i materiali caotici malfermi accumulati sulla Sciara. Le colate di lava scorrono quasi sempre verso la parte mediana della Sciara e spesso raggiungono il mare.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Vulcanologia dell'Università di Catania.

Per potersi avvicinare alle colate occorre quindi attraversare la Sciara del Fuoco, compito se non impossibile difficilissimo, giacchè la mobilità del suolo è tale che chi vi si avventurasse correrebbe il rischio di esser travolto da valanghe di petrisco. Però dal lato della spiaggia, con un po' di accortezza, qualche volta è possibile raggiungere la lava.

Queste difficoltà hanno sempre impedito agli studiosi di avvicinarsi alle colate di lava dello Stromboli ed osservarvi le interessanti fumarole; senza dire che, prima della descrizione sulla eruzione del 1891, fatta dal Riccò e dal Mercalli <sup>(1)</sup>, gli studiosi avevano l'opinione che lo Stromboli non desse affatto eruzioni di lave. Così si spiega come Saint-Claire-Deville, il quale aveva potuto osservare delle fumarole soltanto intorno ai crateri, potesse ammettere la mancanza di cloruri alcalini nelle fumarole di questo vulcano. La ragione poi che altri studiosi, recentemente non si siano occupati delle fumarole nelle lave dello Stromboli si deve, come si è detto, alle grandi difficoltà che bisogna affrontare per potersi avvicinare alle colate.

Oggetto della presente Nota è lo studio di una fumarola a tenorite ed a cloruri di sodio e potassio da me rinvenuta nella imponente colata del 3 e 4 luglio 1916 presso la spiaggia della Sciara del Fuoco, ove la lava aveva formato un grande ammasso prima di riversarsi sul mare.

L'enorme calore irradiante dalla massa lavica non permise di avvicinarsi alla colata che venti giorni dopo la sua emissione. Allora esisteva una grande fumarola a cloruri alcalini in via di raffreddamento, appena visibile a distanza per il colore grigiastro dei sali che la tapezzavano.

Il suolo, tutt'intorno alla fumarola, era scottante ed io vi potei sostare tanto quanto occorre per fare qualche saggio e per riempire alcuni tubi di vetro dei minerali fumarolici condensati attorno alla bocca. Le cartine reattive inumidite ed introdotte nella fumarola non variarono di colore; nessun odore si avvertiva tutt'intorno e tanto i tubi per la raccolta dei minerali quanto i vetri del mio occhiale non furono affatto appannati da vapor d'acqua.

Se fosse stato possibile avvicinarmi a questa fumarola almeno cinque giorni prima, certamente l'avrei sorpresa in attività ed allora avrei potuto raccogliere i cloruri allo stato pneumatolitico prima che si fossero condensati sulla bocca della fumarola.

Nel giorno dopo e negli altri successivi, essendo aumentata l'attività eruttiva e ruzzolando sulla Sciara fino alla spiaggia abbondanti materiali piroclastici non mi fu possibile avvicinarmi alla fumarola onde constatare se, in un secondo tempo, quando la sua temperatura si abbassò al di sotto di 400°, abbia dato sublimazioni di cloruro ammonico, come avviene spesso nelle

<sup>(1)</sup> A. Riccò e G. Mercalli, *Sopra il periodo eruttivo dello Stromboli cominciato il 24 giugno 1891*. Annali Uff. Cent. Meteor. e Geod. Vol. XI, 1892, pag. 15.

colate di lava dell'Etna (1). In tutto il materiale da me raccolto sulle fumarole a cloruro ammonico delle eruzioni etnee del 1910 e 1911 si riscontrano, nello strato cristallizzato più profondo, dei cloruri alcalini; ciò ho potuto pure osservare sull'abbondante materiale di altre eruzioni dell'Etna (1879 e 1892), conservato nel museo di Mineralogia e Vulcanologia dell'Università di Catania.

In questa Nota riassumo i risultati dell'esame dei minerali fumarolici della lava dello Stromboli.

L'aspetto grigiastro dei sali alcalini è dovuto alla presenza della tenorite che, nella proporzione del 2 al 3 %, intorbida i cloruri di potassio e di sodio, i quali hanno forme arborescenti o piumate.

La tenorite appartiene alle varietà granulare ed aciculare descritte dallo Scacchi (2) il quale le riscontrò nelle fumarole a cloruri alcalini del Vesuvio.

La varietà polverulenta al microscopio raramente si presenta laminare, però a forte ingrandimento si osservano delle scagliette che, secondo Scacchi, possono considerarsi una varietà della tenorite laminare più comune.

Gli aciculi sono lunghi da 2 a 3 mm. e presentano la base appiattita; liberati dai cloruri alcalini che li circondano e che sono facilmente solubili in acqua, hanno l'aspetto di una filza di aciculi e granuli i quali sembra formino lo scheletro di sostegno delle graziose forme arborescenti e piumate di questi sali. In lamina di platino arroventata al rosso vivo la tenorite dello Stromboli fonde, come quella dell'Etna, formando una macchia bruno nerastra facilmente attaccabile agli acidi; è solubile nella soluzione bollente di cianuro di potassio (reazione di Lemberg) (3); tenuta nei vapori di HCl dopo pochi minuti si trasforma in cloruro; nell'ammoniaca dopo pochi minuti dà il colore caratteristico azzurro dei sali di rame. Isolata dietro lavaggio fino alla completa eliminazione dei cloruri ed analizzata è risultata costituita da puro ossido di rame, come quella dell'Etna, mentre quella del Vesuvio, secondo il Guiscardi (4), contiene  $TiO_2$ .

I cloruri alcalini intorbidati, come si è detto, dalla tenorite si presentano in aggruppamenti arborescenti. Al microscopio si osservano dei granuli e dei bastoncelli disposti come le barbe di una penna nelle quali si scorgono degli aciculi di tenorite; difatti lasciandoli in ambiente saturo di HCl dopo pochi minuti si forma del cloruro ramico verde. Più spesso le forme arborescenti dei cloruri presentano tre ramificazioni sull'asse, a  $120^\circ$  l'una dal-

(1) G. Ponte, *Studi sull'eruzione etnea del 1910*, Atti R. Accad. Lincei, vol. VIII, ser. 5<sup>a</sup> anno 1911, pag. 32.

(2) Scacchi, Atti R. Acc. di Sc. Fis. e Matematiche di Napoli, VI, n. 9, pag. 10, anno 1874.

(3) Lemberg, *Zeitschr. d. geol. Ges.*, 1900, 52, pag. 491.

(4) G. Guiscardi, *Annali d. R. Oss. Vesuviano*, 1° quaderno, pag. 72.

l'altra, e gli aggregati minerali che le compongono sono pur essi disposti secondo tre direzioni (fig. 1).

I cloruri separati dalla tenorite per filtrazione, dopo soluzione in acqua, restano esenti delle minime tracce di sali di rame; ciò dimostra che la fumarola non presentò esalazioni acide, che avrebbero attaccato la tenorite.

L'analisi dei cloruri alcalini di questa fumarola dello Stromboli ha dato i seguenti risultati ridotti a 100:

KCl =	60,63
NaCl =	39,37
LiCl =	tracce



Ing. 10 diametri.  
FIG. 1.

La preponderanza del cloruro di potassio sul cloruro di sodio in una fumarola dello Stromboli, la cui lava è povera di potassio <sup>(1)</sup>, è un esempio importante che potrebbe allontanare qualche preconcetto, come quello del Freda <sup>(2)</sup> e del Brauns <sup>(3)</sup>, i quali sostennero che la prevalenza del potassio sul sodio nelle fumarole a cloruri alcalini del Vesuvio

si debba alla azione dell'acqua del mare e rispettivamente dell'HCl sui minerali ricchi di potassio (leucite e feldspato potassico).

La preponderanza del cloruro di potassio nella maggior parte delle esalazioni aloidiche dei vulcani potrebbe derivare dalla maggiore volatilità di questo sale rispetto a quello di sodio, ma prima di venire ad una conclusione occorrerebbe riscontrare se le lave consolidate portate al punto di esplosione conservano nelle esalazioni le stesse proporzioni dei due cloruri fumarolici.

Anche le fumarole dell'Etna contengono molto cloruro di potassio; difatti da una analisi da me fatta dei cloruri dell'eruzione etnea del 1892 conservati nel museo di Mineralogia e Vulcanologia dell'Università di Catania, è risultato:

KCl =	34,12
NaCl =	65,88
LiCl =	tracce

<sup>(1)</sup> Analisi di F. Glaser del basalte del 1894 = 3,16 % di K<sub>2</sub>O; analisi di S. Washington del basalte del 1914 = 2,05 %; idem del 1915 = 2,02; analisi di G. Ponte del basalte del 1916 = 1,54 % di K<sub>2</sub>O.

<sup>(2)</sup> G. Freda, *Sulla costituzione chimica delle sublimazioni saline vesuviane*. Gazz. Chimica ital., vol. XIX, 1889, pag. 21.

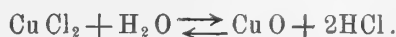
<sup>(3)</sup> Brauns, N. Jahrb. 1890, 2, pag. 375.



Non avendo potuto raccogliere allo Stromboli i cloruri allo stato pneumatolitico, cioè durante la loro esalazione, non ho potuto stabilire se essi in quello stato si mantengono pure nelle stesse proporzioni del miscuglio solido o presentino delle variazioni dovute alla maggiore volatilità del cloruro di potassio. Per tali ragioni non ho potuto stabilire, nemmeno indirettamente, la temperatura reale della fumarola durante la esalazione dei cloruri, che avrei ricavato con la determinazione del punto di fusione del miscuglio. Però la mancanza di forme cristalline nei cloruri, dovuta probabilmente a rifusione, mi fa ritenere che brusche variazioni di temperatura siano avvenute nella fumarola, dovute all'aumento della massa delle esalazioni o alla intermittente prevalenza del cloruro di sodio, il cui punto di fusione (820°) è superiore a quello del cloruro di potassio (772°) e a quello del miscuglio eutettico (655° secondo il Lacroix).

Poichè la tenorite trovasi tra i cloruri alcalini, deve ammettersi che essa appartenga alla stessa fase fumarolica (1).

In quanto alla genesi della tenorite il Covelli (2) sostenne che essa si formi per azione del vapor d'acqua sul cloruro ramico secondo la seguente reazione:



Zambonini (3) sostiene anche questa ipotesi ed anzi egli riferendosi alle osservazioni del Richter sull'ossido cuprico rinvenuto nella fornace di Mulden ed alle argomentazioni del Rammelsberg, considera un errore quello del Palmieri, il quale non ammise la precedenza del cloruro di rame nella formazione della tenorite. Molti altri scienziati come il Fouquè, il Lacroix ed il Dey ammettono la presenza del vapor d'acqua e dell'acido cloridrico primari nelle fumarole a cloruri alcalini, ma non lo hanno provato con ricerche rigorose fatte sul terreno (4).

Io credo che il problema non potrà essere risolto finchè non si sarà controllata rigorosamente la presenza del vapor d'acqua e dell'acido cloridrico nelle fumarole a tenorite; per ora, a conferma di quanto asserì il Palmieri (5), posso sostenere che il cloruro ramico nei vulcani si presenta come un prodotto secondario dell'azione dell'HCl sulla tenorite e non si osserva mai nelle fumarole

(1) Secondo Wöhler e Foss, il punto di fusione della tenorite è 1064°, però l'ossido ramico riscaldato a temperature inferiori a quella di fusione si dissocia sensibilmente (Phil. Mag. (6), 1906, t. XI, pag. 521).

(2) N. Covelli, Atti R. Acc. d. Scienze di Napoli, IV, *Mineralogia*, pag. 9, 1839.

(3) F. Zambonini, *Mineralogia Vesuviana*, Napoli, 1910, pag. 70.

(4) G. Ponte, *Ricerche sulle esalazioni dell'Etna*, Nota II, Rend. Accad. Lincei, vol. XXIII, fasc. 9, 1914, pag. 405.

(5) L. Palmieri, *L'incendio vesuviano del dì 26 aprile 1872*. Atti Acc. d. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, vol. V, n. 16, pag. 22 e pag. 18.

a tenorite delle colate lontane dalla influenza dei gas acidi esalanti dagli apparati eruttivi.

Questo fatto è di sommo interesse e non deve sfuggire allo studio dei fenomeni vulcanici. Sinora si è ritenuto che l'acido cloridrico sia un prodotto primario endogenetico del vulcanismo, ma come si spiegherebbe allora che le lave fluidissime nel momento in cui sgorgano non ne contengono affatto tracce e che solo si manifesta lungo i camini eruttivi e negli imbuti craterici? Palmieri, Monticelli e Covelli osservarono ripetutamente questo fatto. Alcuni studiosi come il Wolff <sup>(1)</sup> invocano la formola di Vogel von Falckenstein <sup>(2)</sup> sull'equilibrio chimico dell'HCl stabilita in base al teorema del calore di Nerst, per dimostrare che questo gas non è notabilmente dissociato alla temperatura dei magma lavici e che perciò è di origine endogenetica, ma ciò non toglie che esso non possa anche essere di origine epigenetica.

Lo studio dei possibili equilibri chimici in base alle costanti fisico-chimiche di tutti i composti che si riscontrano nei vulcani alle varie pressioni e temperature è di grande aiuto al vulcanismo, ma questo studio non deve essere soltanto teorico, tanto più che gli elementi del calcolo diventano variabilissimi durante l'eruzione e le reazioni sono tanto più effimere quanto più rapide le variazioni. Così si spiega che per lo più le fumarole presentano delle manifestazioni diverse in natura e grado a seconda il variare più o meno rapido delle condizioni fisiche (temperatura e pressione).

Molti problemi ancora da risolvere presenta il vulcanismo e specialmente riguardo a quei composti che hanno una stabilità effimera nel magma, come ad es. gli azoturi.

Queste considerazioni rendono incerto il sistema che sinora si è voluto tenere nella classificazione delle fumarole vulcaniche, le quali sono diverse e variabili non tanto in rapporto alla natura dei vulcani quanto alle condizioni di equilibrio chimico, variabile ad ogni eruzione ed in ogni cratere, essendo frequenti anche reazioni epigenetiche.

<sup>(1)</sup> F. von Wolff, *Der Vulkanismus*. Stuttgart, 1914, pag. 106 e pag. 581.

<sup>(2)</sup> K. Vogel von Falckenstein, *Das Gleichgewicht des Deaconprozesses*. Zeitschr. f. phys. Chemie, 59, 1907, pag. 313.

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premi  
del Ministero della Pubblica Istruzione per le *Scienze naturali* (1).

(Scadenza 31 dicembre 1916. — Due premi di L. 2000 ciascuno).

1. ARIOLA VINCENZO. 1) « Contributo per una revisione dei Distomi » (st.). — 2) « L'unità vitale » (st.). — 3) « *Ascaris osculata* in Foca elefantina » (st.). — 4) « Distoma sinense e *D. felineo* nell'uomo » (st.). — 5) « Osservazioni sulle Fasciole dei Ruminanti » (st.). — 6) « Selezione naturale e teleologia » (st.).

2. BARONI EUGENIO. 1) « Sunti di zoologia e botanica per la 2<sup>a</sup> classe tecnica » (st.). — 2) « Sunti di zoologia e botanica per la 5<sup>a</sup> classe ginnasiale » (st.). — 3) « Botanica » (st.). — 4) « Zoologia e botanica » (st.).

3. BELLINI RAFFAELLO. 1) « Studio sintetico sulla geologia dell'Isola di Capri » (st.). — 2) « *Nautilus Subasii*, nuova forma del Lias superiore » (st.). — 3) « I molluschi extramarini dei dintorni di Napoli » (st.).

4. BEZZI MARIO. 1) « The syrphidae of the Ethiopian region » (st.). — 2) « H. Sauter's Formosa-Ausbeute » (st.). — 3) « *Oedaspis*. Genere di ditteri triponeidi cecidogeni » (st.). — 4) « Eine neue südamerikanische Art der Dipterengattung » (st.). — 5) « Ditteri raccolti dal prof. Silvestri » (st.). — 6) « Materiali raccolti nelle zone di Misurata e Homs (1912-13). Ditteri » (st.). — 7) « *Speomyia absoloni* n. gen. n. sp. (Dipt.), eine degenerierte Höhlenfliege aus dem herzegowinisch-montenegrinischen Hochgebirge » (st.). — 8) « Ditteri cavernicoli dei Balcani » (st.). — 9) « Indian *Pyrgotinae* (Diptera) » (st.). — 10) « Two new species of fruit flies from southern India » (st.). — 11) « Sui Blefaroceridi della Nuova Zelanda » (st.). — 12) « Ditteri raccolti da S. A. R. la Duchessa d'Aosta » (st.). — 13) « Ditteri raccolti nella Somalia Italiana » (st.). — 14) « Una nuova specie di Estride dell'Eritrea » (st.). — 15) « On the Ethiopian fruit-flies of the genus *Dacus* » (st.). — 16) « *Heterohopus Trotteri*, nuova specie di dittero della Libia » (st.). — 17) « Sur un genre nouveau de Diptère subaptère des cavités souterraines du Djurdjura » (st.). — 18) « Alguns muscideos cecidogénicos do Brazil » (st.). — 19) « On the fruit-flies of the genus *Dacus*, (s. L.), occurring in India, Burma, and Ceylon » (st.). — 20) « Riduzione e scomparsa delle ali negli insetti ditteri » (st.).

5. CACCIAMALI G. BATTISTA. 1) « Fratture della bassa Val Camonica » (st.). — 2) « Appunti sull'anfiteatro Morenico Benacense » (st.). — 3) « Studio geologico della parte nord-ovest della Val Sabbia » (st.). — 4) « Le falde di

(1) Presentato nella seduta del 4 febbraio 1917.

copertura di Selvapiana e di Tre Cornelli » (st.). — 5) « Una falda di copertura tra Gavardo e Vobarno » (st.). — 6) « Le terre della nostra guerra » (st.).

6. COLAMONICO CARMELO. 1) « Studi corologici sulla Puglia. La pioggia a Bari » (st.). — 2) « Materiali per la climatologia d'Italia. La pioggia nella Campania » (st.). — 3) « La distribuzione della popolazione nella Puglia centrale e meridionale secondo la natura geologica del suolo » (st.).

7. DE STEFANO GIUSEPPE. 1) « Osservazioni geologiche sull'Eocene della Calabria Meridionale » (st.). — 2) « Osservazioni sulle piastre dentarie di alcuni *Myliobatis* viventi e fossili » (st.). — 3) « Note sopra alcune tartarughe fossili » (st.). — 4) « Sopra alcuni molari fossili elefantini americani » (st.). — 5) « Sopra alcuni ittiodontoliti » (st.). — 6) « Il valore sistematico e filogenetico del sistema dentario ecc. » (st.). — 7) « I pesci fossili di Licata in Sicilia » (ms.).

8. GRECO BENEDETTO. 1) « Il Sinemuriano nel deserto arabico settentrionale » (st.). — 2) « Fauna cretacea dell'Egitto raccolta dal Figari Bey » (st.).

9. LUMIA CORRADO. 1) « Azioni dei concimi minerali sull'attività di alcuni microrganismi del terreno » (st.). — 2) « La calciocianamide ostacola la denitrificazione » (st.). — 3) « Il processo di denitrificazione nel terreno agrario e l'arrabbiaticcio o calda-fredda » (st.).

10. NICOLOSI RONCATI FRANCESCO. « Il nucleo delle cellule vegetali » (ms.).

11. TRABUCCO GIACOMO. 1) « Sulle relazioni che intercedono tra la foresta e le frane » (st.). — 2) « Costituzione chimica, origine ed età dell'argilla smectica » (st.). — 3) « Sul calcare da cemento del Poggio di Gricigliano » (st.).

E. M.

---

INDICE DEL VOLUME XXVI, SERIE 5<sup>a</sup>. — RENDICONTI

1917 — 1° SEMESTRE.

INDICE PER AUTORI

A

- AGAMENNONE. « Rettifiche e considerazioni sulla velocità del terremoto del 13 gennaio 1915 ». 406.
- e CAVASINO. « La velocità di propagazione del terremoto ligure del 23 febbraio 1887 ». 167.
- ALBERTONI. È eletto Socio nazionale. 90. Ringrazia. 185.
- ALMANSI. « Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità ». 358.
- ANDREOLI. « Sovra certe equazioni di composizione di seconda specie ». 234.
- « Equazioni integrali singolari con nuclei analoghi a quelli di Evans ». 289.
- « Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari ». 531.
- ANGELI. « Sopra gli acidi azocarbonici ». 95.
- « Sopra l'ossidazione della fenilazocarbonamide ». 207.
- « Analogie fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto ». 480.
- e CUSMANO. « Sopra il nero di nitrosopirrolo ». 273.
- ANGELITTI. È nominato Corrispondente. 90. Ringrazia. 185.
- ARMELLINI. « Sopra le distanze planetarie del Sole ». 240; 316.

- ARTINI. « Il polimorfismo della dinitrotoluidina  $C_6H_5 \cdot NO_2 \cdot NO_2 \cdot NH_2 \cdot CH_3$  ». 392; 420.  
(1) (3) (5) (2)
- ARTOM A. « Sopra un metodo generale per rendere selettive le stazioni radiotelegrafiche ». 50.
- ARTOM C. « Sugli elementi che condizionano l'attività degli enzimi glicolitici. II: Gli enzimi glicolitici dell'intestino e i corpuscoli sanguigni ». 79.

B

- BACKLUND. Sua Commemorazione. 86.
- BALBIANO. Annuncio della sua morte. 412.
- BASSANI. Sua Commemorazione. 335.
- BASSOT. Annuncio della sua morte. 185.
- BATTELLI. Annuncio della sua morte e sua Commemorazione. 82.
- BAZIN. Annuncio della sua morte. 334.
- BERZOLARI. « Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos ». 29; 102.
- BIANCHI. « Rappresentazioni normali uniformi e sistemi di Weingarten ». 447.
- « Sopra una proprietà caratteristica delle superficie della classe
- $$K = - \frac{1}{|\varphi(\alpha) + \psi(\beta)|^2} \text{ » .}$$
- 575.

- BOCCARDI. « Sulla polodia ». 585.
- BOERIS. È nominato Corrispondente. 90. Ringrazia. 185.
- BOMPIANI. « Affinità e superficie applicabili ». 590.
- BOTTAZZI. « Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi. IX: Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci (parte 3<sup>a</sup>) ». 19.
- BRUNACCI. « Sull'adattamento degli anfibii all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Proprietà chimiche e fisico-chimiche dei liquidi interni di animali tenuti in soluzioni Ringer isotoniche ed ipotoniche ». 180.
- « Sull'adattamento degli anfibii all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi. I fenomeni di adattamento nelle rane esculente ibernanti ». 252.
- « Influenza dell'attenzione su la secrezione dei succhi digerenti ». 411; 502.
- BURALI-FORTI. « Sopra una nuova definizione di terne ecc. ». 35.
- « I moti relativi nel calcolo assoluto ». 596; 632.
- CHERUBINO. « Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann ». 487; 538.
- CHISINI. « Sulla riducibilità dell'equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia ». 543.
- CHISTONI e MALLADRA. « Singolare precipitazione acquee osservata al Vesuvio ». 606.
- CIAMICIAN e RAVENNA. « Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante ». 3.
- CICCONETTI. « Azimut assoluto dell'Osservatorio Vesuviano sull'orizzonte dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte in Napoli ». 219.
- CISOTTI. « Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore ». 36.
- « Sulla capacità elettrostatica di un sottile anello conduttore ». 225.
- CLEMENTI. « Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni di fisiologia. III: Impiego della microtitolazione nella ricerca dell'arginasi ». 261.
- COLOMBA. « Cianotricchite e dioplasia di Traversella ». 487.
- CUSMANO. V. *Angeli*.

C

- CANTELLI. « Sulla probabilità come limite della frequenza ». 39.
- « Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica ». 295.
- CAPONE. V. *Zironi*.
- CARNERA. « La base geodetica di Vallona ». 549.
- CASALE. « Sul potere rotatorio dei tartrati di amine sostituite ». 434.
- CAVASINO. V. *Agamennone*.
- CELORIA. V. *Di Legge*.
- CERULLI. « Sulla determinazione della polodia ». 141.
- « Ancora sulla polodia ». 587.
- CHAUVEAU. Annuncio della sua morte. 185.
- CHECCHIA-RISPOLI. « 'Zuffardia', nuovo genere di Echinide del Senoniano della Tripolitania ». 492.

D

- DANIELE. « Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative ». 302.
- DARBOUX. Annuncio della sua morte. 334.
- DEL REGNO. « La corrente termo-ionica nelle comuni lampade ad incandescenza ». 110.
- DE MARCHI. È nominato Corrispondente. 90. Ringrazia. 185.
- « Onde interne nell'Adriatico. Risposta al prof. E. Oddone ». 425.
- DE STEFANI. « Commemorazione del Socio naz. *Francesco Bassani* ». 335.
- DI LEGGE e CELORIA. Riferiscono sulla Memoria del dott. *G. Zappa*, avente per titolo: « Differenze sistematiche tra il Catalogo fondamentale di Newcomb e quello di Auwers ». 90.

DINI. Presenta un volume delle 'Opere' di *Luigi Cremona* e ne parla. 91.

DRAGO. « Sulla depolarizzazione della luce ». 56.

E

ENRIQUES. « Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare ». 415.

— « Sulla teoria delle omografie iperspaziali ». 629.

EREDIA. « Andamento annuale della pressione barometrica in Italia ». 240.

— « Correlazione tra la temperatura dell'Italia e dell'Egitto ». 607.

F

FANTOLI. Fa omaggio di alcune sue pubblicazioni. 186.

FICAI e PEROTTI. « Sopra una alterazione del pane prodotta da lievito infetto con *Oospora variabilis*, Lindner ». 513.

FREDA e MORTARA. « Sulla caratteristica dell'arco cantante nei regimi cui corrispondono diverse emissioni spettrali ». 116.

FUBINI. È nominato Corrispondente. 90. Ringrazia. 185.

— « Alcune forme di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro ». 151.

— « Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto ». 214.

G

GALEOTTI. « Sul ricambio dei muscoli nelle diverse condizioni meccaniche delle loro contrazioni ». 400.

GIANNULI. Invia in esame la sua Memoria: « Sulla istopatologia della Nevroglia nella Sclerosi a Placche post-infettiva ». 517.

GRASSI. V. *Marchiafava*.

GRASSI B. e TOPI. « Esistono diverse razze di flossera della vite? ». 213; 265.

— e ZANONI. « Nuovo contributo allo studio del gozzismo ». 484.

K

KAHANOVICZ. « Una nuova determinazione della costante della legge di Stefan-Boltzmann ». 439.

L

LAZZARINO. « Sull'estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque ». 596.

LEBON. « Solution d'un problème remarquable relatif à la nouvelle Table de diviseurs des nombres ». 401.

LEFSCHETZ. « Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques ». 228.

LEPETIT. « Alcuni prodotti dell'azione della formaldeide e bisolfito su amine aromatiche e derivati dei medesimi ». 126.  
— « Azione degli alcali e degli acidi sul *p*-etossifenilamidometansolfonato sodico ». 172.

— e MAIMERI. « Gruppi di basi ottenute da amine aromatiche e formaldeide ». 558.

LEVI-CIVITA. « Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein ». 381.

— « Statica einsteiniana ». 458.

— « Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi ». 519.

LOMBROSO. « Sulla genesi dell'urea. I: Può il tessuto muscolare generare l'urea? » 569.

M

MAGGI. « Sopra una formola commutativa e alcune sue applicazioni ». 162; 189.

— « Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche ». 350.

MAGGINI. « Il Sole emette radiazioni di altissima frequenza ». 557.

MAIMERI. V. *Lepetit*.

MALLADRA. V. *Chistoni*.

MARCHIAFAVA, TODARO e GRASSI. Relazione sulla Memoria del prof. A. Nazari, intitolata: « Chiazze e noduli pigmentali emosiderinici dell'epicardio » n. 90.

MASCARELLI. « Sulla isomeria degli acidi erucico, brassidnico, isoerucico (Risultati avuti col metodo criodratrico od eutettico) » n. 71.

MATTIROLO. « Sulle forme fungine incluse nel ciclo di sviluppo della *Lepiota cepaestypes* Sow. e in quello della *Lepiota (Agaricus) cretacea* Bull. » n. 486.

MILLOSEVICH (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: *Taramelli, Lacroix, Berlese*, del prof. A. Favaro, dei signori: *Volta e Silva*. 185; dei Soci *Pirotta, Lippmann e C. Guidi*. 336; del Corrisp. *Arcangeli* del P. J. G. Hagen, del Corrisp. *E. Perrone* ecc. 412; del prof. A. Baldacci e ne parla. 412; dei Soci *Taramelli, Guareschi*, ecc. 517; dei Corrispondenti *Pascal, Silvestri*, del Socio straniero *Darboux*, dei sigg. *G. Boffito, P. Nicolari, G. De Angelis d'Ossat e A. Béguinot*. 624.

— Fa menzione di un volume edito per cura dell'Accademia delle scienze di Stoccolma e di un opuscolo che ricorda le onoranze tributate dal Municipio di Bergamo al Socio prof. Torquato Taramelli. 337.

— Commemorazione del Socio straniero *Oskar Backlund*. 86.

— « Osservazioni della nuova Cometa Mellish  $\equiv$  1917 a » n. 391.

MORTARA. V. *Freda*.

MUTTO e POLLACCI. « Ulteriori ricerche intorno alla variazione di alcune specie di micromiceti » n. 498.

## N

NACCARI. Commemorazione del Corrisp. A. Battelli. 82.

NASINI e VOLTERRA. Relazione sulla Memoria del dott. C. Pratolongo: « Studi di chimica cinetica » n. 623.

NAZARI. È approvata la stampa della sua Memoria: « Chiazze e noduli pigmentali emosiderinici dell'epicardio » n. 90.

NELLI. « Le argille mioceniche ed il pliocene di San Marino » n. 617.

## O

ODDONE. « Le onde interne e le sesse dell'Adriatico superiore » n. 246.

## P

PALAGI. « Rilevamenti di anomalie magnetiche nei dintorni di Roma. I: Osservazioni lungo la via Appia antica » n. 64. II: Osservazioni sulle variazioni col tempo di alcune anomalie » n. 123.

PEGLION. « Intorno alla peronospora della canapa » n. 618.

— « Intorno ad una gommosi specifica dell'albicocco » n. 637.

PÉRÈS. « Sur la composition de 1<sup>ère</sup> espèce. Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition » n. 45; 104.

PEROTTI. V. *Ficai*.

PETRONIEVICS. « Sur les nombres infinis de Fontenelle » n. 50; 309.

PEYRONEL. « Prime osservazioni sulla distribuzione degli Imenomiceti umicoli e sui loro probabili rapporti colle micorize ectotrofiche delle fanerogame » n. 326.

— « Un parassita delle patate nuovo per l'Italia: *Spondylocadium atrovirens* Harz » n. 509.

PIZZETTI. « Sul moto di rotazione della Terra; a proposito di una recente comunicazione del prof. Cerulli » n. 345.

— « A proposito di una recente Nota del prof. Almansi » n. 471.

POLLACCI. — V. *Mutto*.

PONTE. « Le fumarole a benorite ed a cloruri alcalini nella lava dello Stromboli » n. 641.

PRATOLONGO. « Invia per esame la sua Memoria: Studi di chimica cinetica » n. 90. Sua approvazione. 623.



R

- RAVENNA. — V. *Ciamician*.
- REINA. « Offre il n. 2 del Bollettino del Comitato glaciologico italiano e ne parla ». 517.
- « Fa omaggio, a nome anche degli ingegneri *Cortellini* e *Ducci*, di una copia dell'opera: 'Livellazione degli antichi acquedotti romani, e ne discorre ». 624.
- RÒITI (vice Presidente). Dà annunzio della morte del Corrisp. *A Battelli*, 82; dei Scii stranieri *A. Chauveau* e *L. Bassot*, 185; *E. Bazin* e *G. Darboux*, 334; del Corrispondente *L. Balbiano*, 412.
- Dà notizie della salute del Socio *Blaserna*. Deliberazione della Classe. 185.
- Comunica che hanno inviato ringraziamenti per la loro recente elezione, il Socio nazionate *Albertoni* e i Corrispondenti *Angelilli*, *Boeris*, *De Marchi* e *Fubini*. 185.
- Comunica i ringraziamenti inviati dal Segretario dell'Accademia delle scienze di Parigi per le manifestazioni di cordoglio dell'Accademia dei Lincei in occasione della morte del prof. *Gastone Darboux*. 412.
- Comunica l'elenco dei concorrenti al premio Reale per la *Mineralogia e Geologia* del 1916, e annuncia che il concorso al premio *Carpi* pel biennio 1915-1916 è andato deserto. 91.
- Presenta due pieghi suggellati inviati dal prof. *S. Maltese* e dal dott. *G. Tallarico*, perchè siano conservati negli archivi accademici. 517.
- Pronuncia parole di saluto ai Colleghi e propone l'invio di un telegramma di ossequio a S. M. il Re. 625.
- ROVERETO. « Sulla nozione del carreggiamento continuato ». 495.

S

- SAMSONOFF-ARUFFO. « Di alcune alghe calcaree provenienti dall'isola di Malta ». 564; 610.

- SANNIA. « Sul metodo di Borel per la somministrazione delle serie ». 116; 162.
- « Generalizzazione del metodo di Borel per la somministrazione delle serie ». 603.
- SEGRE. « Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli ». 341.
- SOMIGLIANA. « Sulla propagazione delle onde sismiche ». 369; 472.
- STEFANI. « Innervazione del ricambio ». 585.

T

- TEDONE. « Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici ». 8; 143.
- « Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico ». 286.
- TIZZONI. « Ricerche batteriologiche sulle psicosi pellagrose ». 400.
- TODARO. V. *Marchiafava*.
- TOGLIATTI. « Un tipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1<sup>a</sup> specie tra spazi ad *n* dimensioni ». 486; 553.
- TOPI. « Esperienze di lotta contro le tignuole della vite ». 258.
- V. *Grassi*.
- TRAPANI. « Sopra un prodotto della deflagrazione della nitrocellulosa ». 332.
- TURCONI. « Una nuova malattia del Cacao (*Theobroma Cacao* L.) ». 75.

V

- VERGERIO. « Un'applicazione del metodo di somministrazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali ». 405; 426.
- VIOLA. « Sui cristalli misti ». 162; 195.
- « Sulla formazione di geminati ». 278.
- VIVANTI. « Sulla *Crithidia inflata* n. sp. parassita nel tubo digerente del *Hygrotrecus najas*. Struttura e ciclo di sviluppo ». 132; 174.
- VOLTERRA. Riassume l'opera scientifica del defunto Accademico *Darboux*. 334.
- Fa omaggio di alcune pubblicazioni del prof. *E. Lebon*. 624.
- V. *Nasini*.

**Z**

ZANONI. V. *Grassi*.

ZAPPA. È approvata la stampa della sua Memoria: « Differenze sistematiche tra il Catalogo fondamentale di Newcomb e quello di Auwers ». 90.

ZAPPA. « Per una verifica sperimentale della teoria di relatività di Einstein ». 322.

ZIRONI e CAPONE. « Contributo all'accertamento della spirochetosi umana ». 621.

---

## INDICE PER MATERIE

---

### A

- ASTROFISICA.** « Il Sole emette radiazioni di altissima frequenza ». *M. Maggini*. 557.
- ASTRONOMIA.** « Sulla determinazione della polodia ». *V. Cerulli*. 141.
- « Osservazioni della nuova cometa Mellish  $\equiv$  1917 a ». *E. Millosevich*. 391.
- « Sul moto di rotazione della Terra; a proposito di una recente comunicazione del prof. Cerulli ». *P. Pizzetti*. 345.
- « Per una verifica sperimentale della teoria di relatività di Einstein ». *G. Zappa*. 322.

### B

- BALISTICA.** « Alcune formole di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro ». *G. Fubini*. 151.
- « Osservazioni sul calcolo della traiettoria di un proietto ». *Id.* 214.
- BATTERIOLOGIA.** « Ricerche batteriologiche sulle psicosi pellagrose ». *G. Tizzoni*. 400.
- « Contributo all'accertamento della spirchetosi umana ». *A. Zironi e G. Capone*. 621.
- BIOLOGIA.** « Esistono diverse razze di filosaera della vite? ». *B. Grassi e M. Topi*. 213; 265.
- « Nuovo contributo allo studio del gozzismo ». *Id. e G. Zanoni*. 484.
- BOTANICA.** « Ulteriori ricerche intorno alla variazione di alcune specie di micromiceti ». *E. Mutto e G. Pollacci*. 498.
- « Sulle forme fungine incluse nel ciclo di sviluppo della *Lepiota cepae-*

*stypes* Sow. e in quello della *Lepiota* (*Agaricus*) *cretacea* Bull. ». *O. Mattiolo*. 486.

**BOTANICA.** « Prime osservazioni sulla distribuzione degli Imenomiceti umicoli e sui loro probabili rapporti colle micorize ectotropiche delle fanerogame ». *B. Peyronel*. 326.

**BULLETTINO BIBLIOGRAFICO.** 94; 187; 338; 413; 518; 625.

### C

**CHIMICA.** « Sopra gli acidi azocarbonici ». *A. Angeli*. 95.

— « Sopra l'ossidazione della fenilazocarbonammide ». *Id.* 207.

— « Analogie fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto ». *Id.* 480.

— « Sopra il nero di nitrosopirrolo ». *Id. e G. Cusmano*. 273.

— « Alcuni prodotti dell'azione della formaldeide e bisolfito su amine aromatiche e derivati dei medesimi ». *R. Lepetit*. 126.

— « Azione degli alcali e degli acidi sul *p*-etossifenilamidometansolfonato sodico ». *Id.* 172.

— « Gruppi di basi ottenute da amine aromatiche e formaldeide ». *Id. e C. Mai-meri*. 558.

— « Sulla isomeria degli acidi erucico, brassidinico, isoerucico. (Risultati ottenuti col metodo criodratrico od eutettico) ». *L. Mascarelli*. 71.

— « Sopra un prodotto della deflagrazione della nitrocellulosa ». *E. Trapani*. 332.

**CHIMICA-FISICA.** « Sui cristalli misti ». *C. Viola*. 162; 195.

**CHIMICA FISIOLGICA.** « Sugli elementi che condizionano l'attività degli enzimi; »

- glicolitici. II: Gli enzimi glicolitici dell'intestino e i corpuscoli sanguigni ». *C. Artom*. 79.
- CHIMICA FISIOLGICA. « Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia. III: Impiego della microtitolazione nella ricerca dell'arginasi ». *A. Clementi*. 261.
- « Sulla genesi dell'urea. I: Può il tessuto muscolare generare l'urea? ». *U. Lombroso*. 569.
- CHIMICA VEGETALE. « Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante ». *G. Ciamician* e *C. Ravenna*. 3.
- CONCORSI A PREMI. Elenco dei concorrenti al premio Reale per la *Mineralogia e Geologia* del 1916. 91.
- Elenco dei lavori presentati ai concorsi del Ministero della Pubblica Istruzione per le *Scienze naturali*. 647.
- Premio CARPI. Approvazione dei temi di concorso pel 1917 e pel biennio 1917-1918. 186.
- CRISTALLOGRAFIA. « Il polimorfismo della dinitrotoluidina
- $$\text{C}_6\text{H}_2 \cdot \text{NO}_2 \cdot \text{NO}_2 \cdot \text{NH}_2 \cdot \text{CH}_3$$
- (1)    (3)    (5)    (2)
- E. Artini*. 392; 420.
- « Sulla formazione dei geminati ». *C. Viola*. 278.
- E
- ELEZIONI DI SOCI. 90.
- F
- FISICA. « Sopra un metodo generale per rendere selettive le stazioni radiotelegrafiche ». *A. Artom*. 50.
- « La corrente termoionica nelle comuni lampade ad incandescenza ». *W. Del Regno*. 110.
- « Sulla depolarizzazione della luce ». *E. Drago*. 56.
- « Sulla caratteristica dell'arco cantante nei regimi cui corrispondono diverse emissioni spettrali ». *E. Freda* e *N. Mortara*. 116.
- FISICA « Una nuova determinazione della costante della legge di Stefan-Boltzmann ». *M. Kahanowicz*. 439.
- FISICA-CHIMICA. « Nel potere rotatorio dei tartrati di amine costituite ». *L. Casale*. 434.
- FISICA MATEMATICA. « Distribuzione dell'elasticità in equilibrio sopra un sottile anello conduttore ». *U. Cisotti*. 36.
- « Sulla capacità elettrostatica di un sottile anello conduttore ». *Id.* 225.
- « Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi ». *T. Levi-Civita*. 519.
- « Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici ». *O. Tedone*. 8; 143.
- FISICA TERRESTRE. « Rettifiche e considerazioni sulla velocità del terremoto del 13 gennaio 1915 ». *G. Agamenone*. 406.
- « La velocità di propagazione del terremoto ligure del 23 febbraio 1887 ». *Id.* e *A. Cavasino*. 167.
- « Singolare precipitazione acqua osservata al Vesuvio ». *C. Chistoni* ed *A. Malladra*. 606
- « Onde interne nell'Adriatico. Risposta al prof. C. Oddone ». *L. De Marchi*. 425.
- « Le onde interne e le sesse dell'Adriatico superiore ». *C. Oddone*. 246.
- « Sulla propagazione delle onde sismiche ». *C. Somigliana*. 369; 472.
- FISIOLOGIA. « Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi. IX: Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci (parte 3<sup>a</sup>) ». *F. Bottazzi*. 19.
- « Sull'adattamento degli anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Proprietà chimiche e fisico-chimiche dei liquidi interni di animali tenuti in soluzioni Ringer isotoniche ed ipotoniche ». *B. Brunacci*. 180.
- « Sull'adattamento degli anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. I fenomeni di

adattamento nelle rane esculente iber-  
nanti ». *Id.* 252.

FISIOLOGIA. « Influenza dell'attenzione su  
la secrezione dei succhi digerenti ». *Id.* 411; 502.

— « Sul ricambio dei muscoli nelle diverse  
condizioni meccaniche delle loro con-  
trazioni ». *G. Galeotti.* 400.

— « Innervazione del ricambio ». *A. Ste-  
fani.* 585.

## G

GEODESIA. « La base geodetica di Vallona ». *L. Carnera.* 549.

— « Azimut assoluto dell'Osservatorio Ve-  
suviano sull'orizzonte dell'Osservato-  
rio astronomico di Capodimonte in Na-  
poli ». *G. Cicconetti.* 219.

GEOFISICA. « Ancora sulla polodia ». *V. Ce-  
rulli.* 587.

— « Rilevamenti di anomalie magnetiche  
nei dintorni di Roma. I: Osservazioni  
lungo la via Appia antica ». *A. Pa-  
lagi.* 64.

— « II: Osservazioni sulle variazioni col  
tempo di alcune anomalie ». *Id.* 123.

GEOLOGIA. « Le argille mioceniche ed il  
pliocene di San Marino ». *B. Nelli.*  
617.

— « Sulla nozione del carreggiamento con-  
tinuato ». *G. Rovereto.* 495.

— « Di alcune alghe calcaree provenienti  
dall'isola di Malta ». *C. Samsonoff-  
Aruffo.* 564; 610.

## M

MATEMATICA. « Sovra certe equazioni  
di composizione di seconda specie ». *G. Andreoli.* 234.

— « Equazioni integrali singolari con nu-  
clei analoghi a quelli di Evans ». *Id.* 289.

— « Sovra una particolare classe di equa-  
zioni integrali singolari ». *Id.* 531.

— « Sulla varietà cubica con dieci punti  
doppi dello spazio a quattro dimen-  
sioni, e nella configurazione di quin-  
dici archi dello spazio ordinario stu-

diata dallo Stephanos ». *L. Berzolari.*  
29; 102.

MATEMATICA. « Rappresentazioni normali  
uniformi e sistemi di Weingasten ». *L. Bianchi.* 447.

— « Sopra una proprietà caratteristica  
delle superficie della classe

$$K = - \frac{1}{\{q(\alpha) + \psi(\beta)\}^2} ».$$

*Id.* 575.

— « Affinità e superficie applicabili ». *E. Bompiani.* 590.

— « Sopra una nuova definizione di terne  
ecc. ». *C. Burali-Forti.* 35.

— « I moti relativi nel calcolo assoluto ». *Id.* 596; 632.

— « Sulla probabilità come limite della  
frequenza ». *F. P. Cantelli.* 39.

— « Su due applicazioni di un teorema di  
G. Boole alla statistica matematica ». *Id.* 295.

— « Sulle omografie riemanniane di una  
matrice di Riemann ». *S. Cherubino.*  
487; 538.

— « Sulla riducibilità dell'equazione tan-  
genziale di una superficie dotata di  
curva doppia ». *O. Chisini.* 543.

— « Sulle equazioni differenziali e le equa-  
zioni integro-differenziali correlative ». *E. Daniello.* 302.

— « Sui rami delle curve algebriche gobbe  
nell'intorno di un punto singolare ». *F. Enriques.* 415.

— « Sulla teoria delle omografie iperspa-  
ziali ». *Id.* 629.

— « Solution d'un problème remarquable  
relatif à la nouvelle Table de diviseurs  
des nombres ». *C. Lebon.* 401.

— « Sur certains cycles à deux dimensions des  
surfaces algébriques ». *S. Lefschetz.*  
228.

— « Sopra una formula commutativa e al-  
cune sue applicazioni ». *G. A. Maggi.*  
162; 189.

— « Posizione e soluzione di alcune que-  
stioni attinenti alla teoria delle distor-  
sioni elastiche ». *Id.* 350.

— « Sur la composition de 1<sup>ère</sup> espèce:  
Les fonctions d'ordre quelconque et  
leur composition ». *J. Pérès.* 45; 104.

MATEMATICA. « Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie ». *G. Sanna*. 116; 162.

— « Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione della serie ». *Id.* 603.

— « Sui complessi lineari di schiere rigate o regoli ». *C. Segre*. 341.

— « Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico ». *O. Tedone*. 286.

— « Un tipo semplice di reti di reciprocità di generi di 1<sup>a</sup> specie tra spazi ad  $n$  dimensioni ». *G. Togliatti*. 486; 553.

— « Un'applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali ». *A. Vergero*. 405; 426.

MECCANICA. « Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità ». *E. Almansi*. 358.

— « Sull'estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elettrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all'azione di un campo magnetico qualunque ». *O. Lazzarino*. 596.

— « Statica einsteiniana ». *T. Levi-Civita*. 458.

— « Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein ». *Id.* 381.

— « A proposito di una recente Nota del prof. Almansi ». *P. Pizzetti*. 471.

MECCANICA CELESTE « Sopra le distanze planetarie del sole ». *G. Armellini*. 240; 316.

— « Sulla Polodia ». *G. Boccardi*. 585.

METEOROLOGIA. « Andamento annuale della pressione barometrica in Italia ». *F. Eredia*. 240.

— « Correlazione tra la temperatura dell'Italia e dell'Egitto ». *Id.* 607.

MICROBIOLOGIA. « Sopra una alterazione del pane prodotta da lievito infetto con *Oospora variabilis*. Lindner ». *G. Fici* e *R. Perotti*. 513.

MINERALOGIA. « Cianotrichite e dioplasia di Traversella ». *L. Colomba*. 487.

## N

NECROLOGIE. Annuncio della morte e Commemorazione del Corrisp. *Battelli*, 82; dei Soci stranieri *E. Bazin*, 334; *G. Darboux*, 334; Commemorazione del Socio nazionale *F. Bassani*, 335.

## P

PALEONTOLOGIA. « Zuffardia, nuovo genere di Echinide del senoniano della Tripolitania ». *G. Checchia-Rispoli*. 492.

PARASSITOLOGIA. « Esperienze di lotta contro le tignuole della vite ». *M. Topi*. 258.

PATOLOGIA VEGETALE. « Intorno alla peronospora della canapa ». *V. Peglion*. 618.

— « Intorno ad una gommosi specifica dell'albicocco ». *Id.* 637.

— « Un parassita delle patate nuovo per l'Italia: *Spondylocadium atrovirens* Harz ». *B. Peyronel*. 509.

— « Una nuova malattia del cacao (*Theobroma Cacao* L.) ». *M. Turconi*. 75.

## S

STORIA DELLA MATEMATICA. « Sur les nombres infinis de Fontenelle ». *B. Petronievics*. 50; 309.

## V

VULCANOLOGIA. « Le fumarole a tenorite ed a cloruri alcalini nella lava dello Stromboli ». *G. Ponte*. 641.

## Z

ZOOLOGIA. « Sulla *Crithidia inflata* n. sp. parassita nel tubo digerente del *Hygrotrechus najas*. Struttura e ciclo di sviluppo ». *A. Vivanti*. 132; 174.

ERRATA CORRIGE

---

- Alla pag. 191 linea 10 dal basso leggasi La (6)  
" " " 8 " " la (7) mostra  
" 318 " 22 invece di 2,24 si legga 2,34  
" 320 " 19 " 12,72 " 12,82  
" 321 " 1<sup>a</sup> " " verticale " si legga " vorticale ".
-





## Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

- Serie 1<sup>a</sup> — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.  
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.
- Serie 2<sup>a</sup> — Vol. I. (1873-74).  
Vol. II. (1874-75).  
Vol. III. (1875-76) Parte 1<sup>a</sup> TRANSUNTI.  
2<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
3<sup>a</sup> MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. V. V. VI. VII. VIII.
- Serie 3<sup>a</sup> — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XIII.
- Serie 4<sup>a</sup> — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-VII.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-X.
- Serie 5<sup>a</sup> — RENDICONTI della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XXVI. (1892-1917). Fasc. 12° Sem. 1°.  
RENDICONTI della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XXV. (1892-1916). Fasc. 5-6.  
MEMORIE della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.  
Vol. I-XII. Fasc. 4.  
MEMORIE della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.  
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-3.

---

### CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI  
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.<sup>o</sup> — Roma, Torino e Firenze.

ULRICO HOEPLI. — Milano, Pisa e Napoli.

I N D I C E

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 giugno 1917.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

<i>Enriques</i> . Sulla teoria delle omografie iperspaziali . . . . .	Pag. 629
<i>Burali-Forti</i> . I moti relativi nel calcolo assoluto (pres. dal Corresp. <i>Marcolongo</i> ) . . . . .	" 632
<i>Peglion</i> . Intorno ad una gommosi specifica dell'albicocco (pres. dal Socio <i>Cuboni</i> ) . . . . .	" 637
<i>Ponte</i> . Le fumarole a tenorite ed a cloruri alcalini nella lava dello Stromboli (pres. dal Corresp. <i>F. Millosevich</i> ) . . . . .	" 641

CONCORSI A PREMI

Elenco dei concorrenti ai premi del Ministero della P. I. per le <i>Scienze naturali</i> , scaduti il 31 dicembre 1916 . . . . .	" 647
Indice del vol. XXVI, 1° sem. 1917 . . . . .	" 649

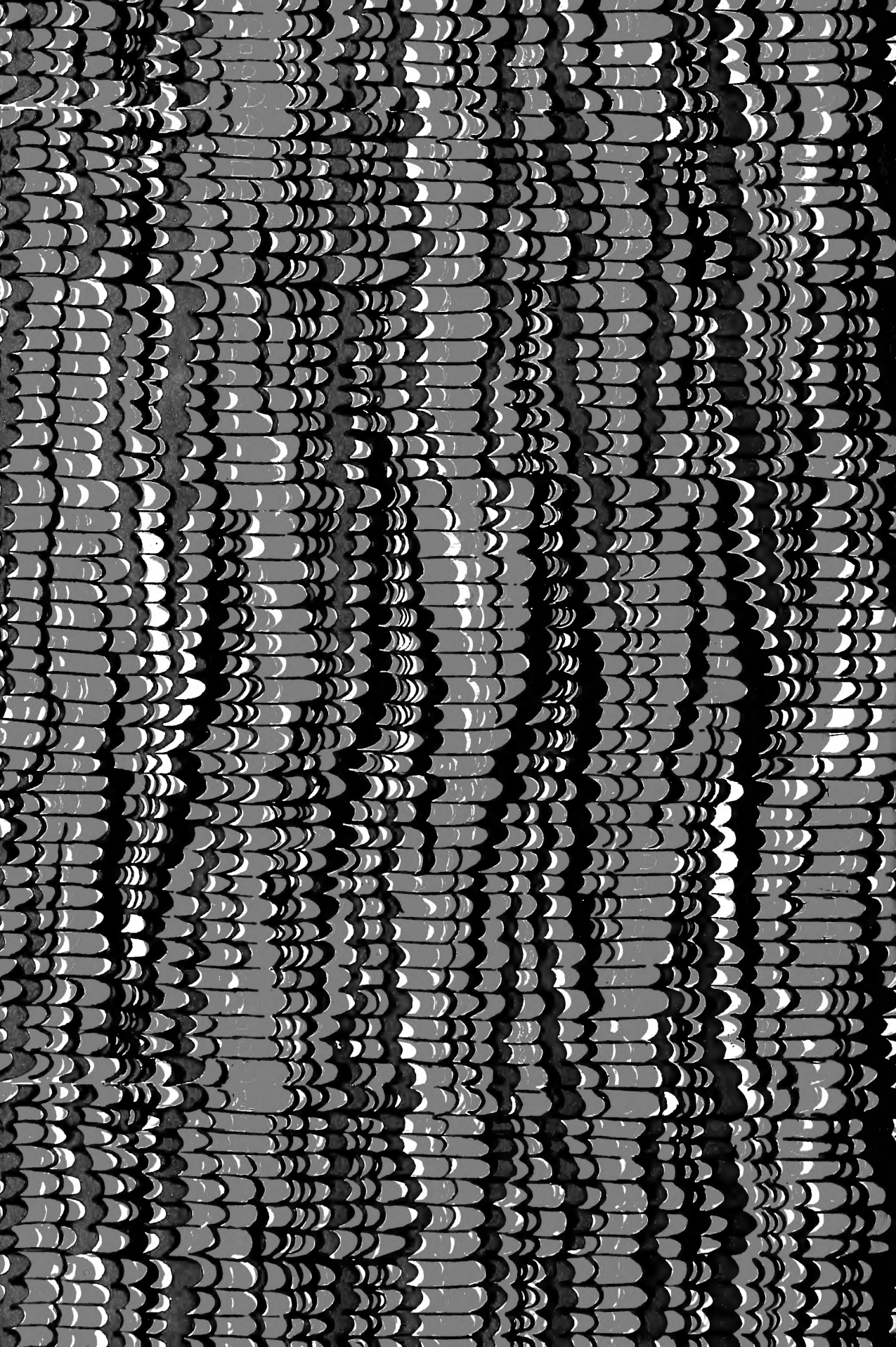




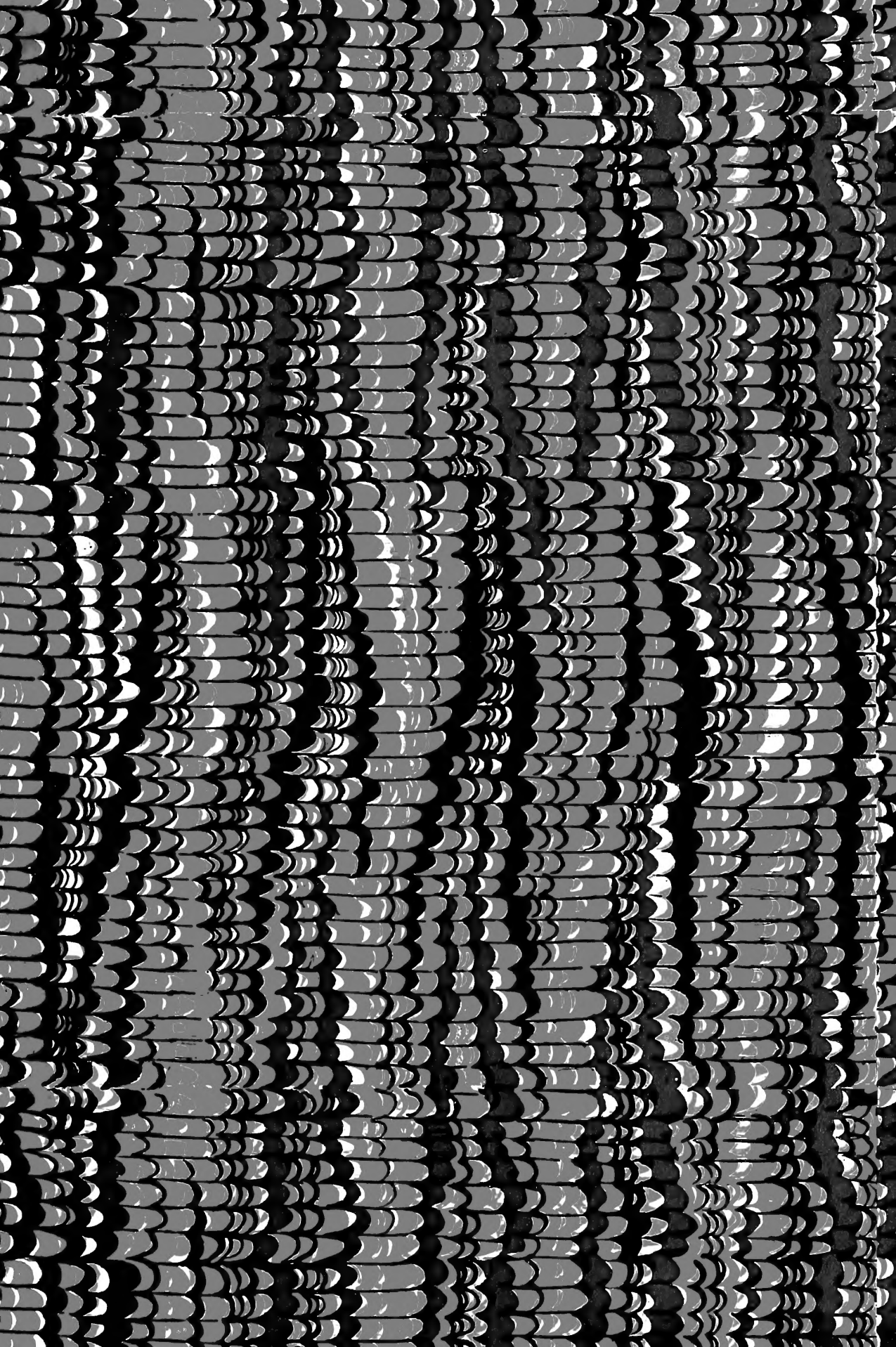












SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01356 9025