A 185
189
SMITHSONIAN INSTITUTION
SEP 10 1930
289677
NATIONAL MUSEUM

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVI: 1.º DE LA 2.ª SERIE

NÚMEROS 1, 2 Y 3: JULIO, AGOSTO Y SEPTIEMBRE DE 1917

MADRID
IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA
CARDENAL CISNEROS, 10
1917

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Art. 117 de los Estatutos de la Academia

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVI

(PRIMERO DE LA 2.ª SERIE)

MADRID
IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA
CARDENAL CISNEROS, 10
1917

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

ACADÉMICOS DE NÚMERO

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez, *Presidente*.
Carrera de San Jerónimo, 53.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo, *Vicepresidente*.
Carmen, 6 y 8.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.
Velázquez, 16.

Excmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario*.
Augusto Figueroa, 41 cuad.°

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario*.
Valverde, 26.

Ilmo. Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé.
Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro Reverter.
Barquillo, 15.

Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.
Marqués de Urquijo, 2.

Excm. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.
Alfonso XII, 72.

Excmo. Sr. D. Pedro Palacios, *Tesorero*.
Monte Esquinza, 9.

Ilmo. Sr. D. Blas Lázaro e Ibiza, *Contador*.
Palafox, 19.

Excmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo.
Quintana, 38.

Excmo. Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo.
Válgame Dios, 3.

Excmo. Sr. D. José María de Madariaga, *Vicesecretario*.
Zurbano, 18.

Excmo. Sr. D. José Rodríguez Mourelo.
Piamonte, 14.

Excmo. Sr. D. José Marvá y Mayer.
Plaza de Santa Catalina de los Donados, 3.
Ilmo. Sr. D. Rafael Sánchez Lozano.
Génova, 21.
Excmo. Sr. D. José Gómez Ocaña.
San Agustín, 7.
Sr. D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco.
Amnistía, 10.
Ilmo. Sr. D. Nicolás de Ugarte y Gutiérrez.
Plaza de la Antigua, 1, Guadalajara.
Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández Bastos.
Claudio Coello, 30 y 32.
Ilmo. Sr. D. Vicente de Garcini.
Alarcón, 5.
Sr. D. Miguel Vegas.
Pez, 1.
Sr. D. Blas Cabrera.
Paseo de Martínez Campos, 1.
Sr. D. Enrique Hauser.
Zorrilla, 33.
Ilmo. Sr. D. Eduardo Mier y Miura.
Serrano, 29.
Excmo. Sr. D. José Casares.
Plaza de Santa Catalina de los Donados, 2
Sr. D. Luis Octavio de Toledo.
Velázquez, 28.
Sr. D. Ignacio González Martí.
Hernán Cortés, 7.
Excmo. Sr. D. Joaquín María Castellarnáu.
Velázquez, 11.
Sr. D. Augusto Krahe.
Moreto, 7.
Ilmo. Sr. D. Pedro de Ávila y Zumarán.
Travesía de la Ballesta, 8.
Ilmo. Sr. D. Ignacio Bolívar.
Paseo de Martínez Campos, 17.
Excmo. Sr. D. Bernardo Mateo Sagasta.
San Marcos, 39.
Excmo. Sr. D. Ricardo Aranaz Izaguirre.
Lagasca, 38.

ACADÉMICO ELECTO

Sr. D. Cecilio Jiménez Rueda.
San Bernardo, 89.

La Academia está constituída en tres Secciones:

1.ª Ciencias exactas.—Sres. Navarro Reverter, *Presidente;* Vegas, *Secretario;* Arrillaga, Torroja, Torres Quevedo, Ventosa, Ugarte, Fernández Bastos, Garcini, Octavio de Toledo y Krahe.

2.ª Ciencias físicas.—Sres. Rodríguez Carracido, *Presidente;* Rodríguez Mourelo, *Secretario;* Salvador, Muñoz del Castillo, Madariaga, Marvá, Cabrera, Hauser, Mier, Casares, González Martí y Aranaz.

3.ª Ciencias naturales.—Sres. González Hidalgo, *Presidente;* Bolívar, *Secretario;* Cortázar, Mallada, Ramón y Cajal, Palacios, Lázaro, Sánchez Lozano, Gómez Ocaña, Castellarnáu, Ávila y Sagasta.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES NACIONALES

Sr D. Andrés Poey. París.
Sr. D. Eduardo Boscá y Casanoves. Valencia.
Ilmo. Sr. D. Luis Mariano Vidal. Barcelona.
Excmo. Sr. D. Leopoldo Martínez Reguera. Madrid.
Sr. D. Ramón de Manjarrés y de Bofarull. Sevilla.
Sr. D. Zoel García de Galdeano. Zaragoza.
Sr. D. Eduardo J. Navarro. Málaga.
Ilmo. Sr. D. José María Escribano y Pérez. Murcia.
Excmo. Sr. D. Rafael Breñosa y Tejada. Segovia.
Excmo. Sr D. Juan Bautista Viniegra y Mendoza, Conde de Villamar. Madrid.
Sr. D. Juan Vilaró Díaz. Habana.
Excmo. Sr. D. Joaquín de Vargas y Aguirre. Salamanca.
Excmo. Sr. D. José J. Landerer. Valencia.
Sr. D. José Eugenio Ribera. Madrid.
Sr. D Eugenio Mascareñas. Barcelona.
Sr. D. Tomás Escriche y Mieg. Barcelona.
Sr. D. Bernabé Dorronsoro. Granada.
Sr. D. Esteban Terradas. Barcelona.
Sr. D. Ventura Reyes Prósper. Toledo.
R P. Longinos Navás, S. J. Zaragoza.
Sr. D. José M.ª Plans y Freire. Zaragoza.
Sr. D. Domingo de Urueta. Gijón.
Sr. D. Gonzalo Brañas. Oviedo.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES EXTRANJEROS

Anguiano (A.) Méjico.
Lemoine (V.) Reims (?).
Barrois (Ch.) Lille.
Hoonholtz, Barón de Teffé (A. L. de) Río de Janeiro (?).
Gomez Texeira (F.) Porto.
Príncipe de Mónaco (S. A. el) Mónaco.
Choffat (P.) Lisboa.
Arata (P. N.) Buenos Aires.
Carvallo (M.) París.
Eneström (G.) Estocolmo.
Ferreira da Silva (A. J.) Porto.
Pina Vidal (A. A. de) Lisboa.
Brocard (H.) Bar-le-Duc.

Ocagne (M d') París.
Romiti (G.) Pisa.
Wettstein Ritter von Westersheim (R.) Viena.
Engler (A.). Berlín.
Guedes de Quiroz, Conde de Foz (G.) Lisboa.
Rayleigh (Lord) Salisbury.
Arrhenius (S.) Estocolmo.
Castanheira das Neves (J.) Lisboa.
Pilsbry (E.) Filadelfia.
Porter (C. E.) Santiago de Chile.
Herrero Ducloux (E.) La Plata (República Argentina).
Chervin (A.) París.
Urbain (G.) París.
Moureu (C.) París.
Guye (F. A.) Ginebra.
Guimarães (R.) Lisboa.
Capellini (J.) Bolonia.
Sabatier (P.) Toulouse.
Campbell (G. W.) Mount Hamilton (California).

Reflexiones acerca de la resolución de las ecuaciones algébricas numéricas por el método de Gräffe,

por

Vicente Ventosa

I

Habiendo sido consultada la Sociedad Matemática Española acerca de los «conceptos fundamentales o muy trascendentales de la Matemática antigua que conviene modificar, ampliar o tal vez abandonar, señalando al mismo tiempo las teorías más trascendentales del Análisis moderno, que es imprescindible dominar con los libros más recomendables patrios o extranjeros para iniciarse en ellas», la Redacción de la Revista que publica dicha Sociedad, contestó autorizadamente (1) que, «por vía de anticipo, *podía prescindirse de toda la teoría antigua general de ecuaciones conducente a la resolución de las ecuaciones algébricas numéricas, y sustituirla por el método de Gräffe, que puede verse en la obra española de don Miguel Merino* (2), *traducción libre de una Memoria de Encke y en el Análisis de Carvallo, traducido también recientemente*» (3).

Conocida es la historia del importantísimo problema objeto de este estudio, y cuya reseña completa se hallará en los interesantes preliminares de la obra del señor Merino. Las teorías magistrales de Descartes, Newton, Lagrange, Budan, Fourier, Cauchy, Sturm y tantos otros insignes matemáticos, no lograron en la práctica resolverlo sino de manera imperfecta y

(1) *Revista de la Sociedad Matemática Española.* Año V, números 45 y 46 (febrero y marzo de 1916), pág. 133.

(2) *Resolución general de las ecuaciones numéricas por el método de Gräffe.* Memoria escrita en alemán por J. F. Encke, traducida libremente al castellano por don Miguel Merino. Madrid, 1879.

(3) *Método práctico para la resolución númerica completa de las ecuaciones algébricas o trascendentes,* por M. E. Carvallo. Obra traducida con autorización del autor por don Ernesto de Cañedo-Argüelles, ingeniero de Montes. Vitoria, 1915.

a costa de trabajo excesivamente largo y enojoso, malgastando mucho tiempo precioso en tanteos e interpolaciones interminables para *separar,* primero, las raíces de una ecuación, y *calcular* después, *uno por uno* los valores de las mismas. El imperio de la rutina y de un patriotismo mal entendido fueron causa principal de que permaneciese casi ignorado y sin aplicaciones el verdadero y directo camino hallado para resolver el aludido problema. Su autor original fué el profesor de Zürich, *Gräffe,* que obtuvo en concurso público sobre este asunto el premio de la *Real Academia de Ciencias* de Berlín en 1839. Gräffe se limitó a determinar *de una vez* todas las raíces reales y los módulos de las imaginarias; y el eminente astrónomo Encke, prendado del trabajo del profesor suizo, se dedicó a perfeccionarle, enseñando a determinar también las raíces imaginarias y a discutir y analizar los casos más difíciles que en la práctica podían presentarse. De la traducción a nuestro idioma de la importante Memoria de Encke, y de diluirla y ponerla al alcance de los lectores españoles, encargóse espontáneamente nuestro sabio astrónomo don Miguel Merino, en cuyo concienzudo trabajo admírase la prolija labor que él puso para hacer palpables las dificultades que el problema ofrecía y los medios más adecuados para vencerlas. Y, sin embargo, a pesar de su indudable superioridad sobre todos los métodos conocidos, el de Gräffe todavía no ha logrado la primacía que merece, y aun en libros modernos sus autores le tratan muy superficialmente, sin comprender bien su importancia ni las eminentes cualidades que le distinguen de los demás.

Uua de las mayores dificultades del problema, acaso la mayor, consiste en la determinación del *argumento*, o sea del valor del ángulo que, *taxativamente,* entra en la expresión de las raíces imaginarias cuando se emplea su representación geométrica.

Como se sabe, el procedimiento de Gräffe se reduce a obtener sucesivamente ecuaciones transformadas de la propuesta, del mismo grado que ella y cuyas raíces sean las mismas, pero elevadas a una potencia cada vez mayor. (Por la sencillez del cálculo se emplean las potencias crecientes de 2.) De esta manera, relativamente fácil, se consigue al fin separar, por orden de magnitud absoluta, las raíces reales, quedando todas ellas calculadas simultáneamente con la aproximación que se desee, y señalar con caracteres indubitables la existencia de las raíces iguales y de las imaginarias, si las hubiera.

En efecto, al calcular del modo indicado las sucesivas transformadas, se llega por fin a una en la cual los coeficientes de los términos, siempre positivos, correspondientes a las raíces reales y los módulos de la siguiente, serán los cuadrados de los anteriores; cosa que no sucede en los términos que contienen explícitos los argumentos de las raíces imaginarias, pues no sólo varían sin ley apreciable de magnitud absoluta, sino que frecuentemente varían también de signo al pasar de una transformada a otra. El caso de haber raíces iguales, de cualquier género que sean, ofrece algunas dificultades; pero también se consigue advertir su existencia y calcular sus valores.

El procedimiento de Encke, perfectamente explicado por el señor Merino, para la determinación de las raíces imaginarias, o, mejor dicho, de los factores de primer grado que entran en la composición de los trinomios de segundo, exige el largo y laborioso cálculo del máximo común divisor, cayendo así en las mismas complicaciones analíticas que se reprochaban justamente a los métodos de Lagrange y demás matemáticos arriba citados. Esos factores que Merino llama f en general, y cada uno de los cuales tiene la forma $2r \cos \theta$, siendo r el módulo y θ el argumento de la raíz, en la transformada correspondiente a la potencia n se convierte en $2r^n \cos n\theta$, que resulta con la aproximación necesaria numéricamente calculado; pero, aunque r^n es conocido y por tanto r, del valor de $\cos n\theta$ tendríamos que descender a $\cos \theta$, operación que sería factible si supiéramos cuál es el signo de cada uno de los valores intermedios de los cosenos de los múltiplos de θ. Bastaría entonces aplicar la sencilla fórmula $\cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$; mas siendo aquella sucesión de signos completamente desconocida, $\cos \theta$ podrá tener n valores correspondientes a otros tantos ángulos distintos, o, en realidad, $\frac{n}{2}$ si se atiende a que la fórmula $\sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm \cos \alpha)}$ se desdobla en estas dos $\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)} = \cos \frac{1}{2}\alpha$ y $\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)} = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha$, según sea el signo de $\cos \alpha$.

El señor Carvallo, aunque en los ejemplos que expone calcula el valor de $\cos n\theta$, no lo utiliza, y elude la dificultad mencionada indicando un ingenioso procedimiento, que se reduce a ir sustituyendo los valores de las raíces de la última transformada en la precedente, retrocediendo así de una manera gradual y sencilla *en teoría* hasta la ecuación propuesta; pero, a juzgar por algunos ensayos que hemos verificado, nos parece que tal procedimiento ha de ser complicado y expuesto a equivocaciones, y tal vez su autor no estuviera con él muy encariñado, puesto que se limita a señalar el orden de las operaciones sin aplicarle a ningún ejemplo.

Cuando la ecuación dada contiene solamente un par de raíces imaginarias, basta hacer la suma de $2r \cos \theta$ y de las raíces reales que pueda haber, e igualarla al coeficiente, con signo contrario, del segundo término de la ecuación, supuesto que el método de Gräffe nos proporciona los valores de todas las raíces reales y de los módulos de las imaginarias.

Cuando no excede de dos el número de pares imaginarios, el señor Carvallo resuelve el problema haciendo, además de la suma indicada, otra suma análoga en la ecuación cuyas raíces son *recíprocas* de las de la ecuación propuesta, e igualando ambas sumas a los segundos términos de las ecuaciones respectivas, determina los dos argumentos por eliminación entre las dos ecuaciones lineales así formadas. El señor Rey Pastor, que en su excelente curso de Análisis (1) ha logrado exponer con claridad suma y simplificar el método de Gräffe, acude a otro artificio. Iguala la ecuación propuesta, si carece de raíces reales (como en el ejemplo numérico que resuelve) al producto de dos factores trinomios de la forma $(x^2 - 2\alpha x + r^2)$, donde es $\alpha = r\cos\theta$, e identifica en los dos miembros los coeficientes de los términos del mismo grado que sean lineales respecto de las incógnitas α y α', determinando éstas asimismo por eliminación análoga. Ya el señor Merino utiliza a veces en su obra el mismo procedimiento, que puede extenderse, como nadie ignora, al caso en que la ecuación propuesta contuviera además raíces reales.

Pero si excediese de dos el número de pares imaginarios, si fueran tres, por ejemplo, el método de Rey Pastor se complica bastante, porque para la comparación de los coeficientes del mismo grado en ambos miembros de la ecuación formada según se ha dicho, es preciso recurrir a otros coeficientes en los cuales las incógnitas entran formando productos binarios; entonces dos de las incógnitas quedan expresadas en función lineal de la tercera, y ésta se determina mediante una ecuación de segundo grado, uno de cuyos valores ha de satisfacer a la ecuación propuesta. Nosotros hemos aplicado con buen éxito este método, no difícil, pero sí bastante laborioso, a la ecuación que el célebre astrónomo Le Verrier obtuvo en sus lucubraciones para el descubrimiento del planeta Neptuno: ecuación de sexto grado con seis raíces imaginarias, que don Miguel Merino somete en su libro al complicado procedimiento de Encke. Si el número de pares imaginarios fuera mayor que tres, la ecuación resolvente sería de grado superior al segundo, y el método indicado resultaría inaplicable.

Podrá, con razón, objetarse no ser probable que esos casos excepcionales se presenten en la práctica; mas el entendimiento humano no se sa-

(1) *Resumen de las Lecciones de Análisis Matemático explicadas por J. Rey Pastor en la Universidad de Madrid. Curso de 1915-1916* (Autografiadas), pág. 372.

tisface con tales restricciones, y necesita, como siempre, remontarse a la resolución general de los problemas.

No aspiramos, de ningún modo, a la satisfacción de haber descubierto el camino para realizar la del que nos ocupa; hoy únicamente podemos presentar algunos indicios, ciertas coincidencias halladas por casualidad, con la esperanza de que en manos más hábiles que las nuestras conduzcan quizás al deseado fin. No nos hemos propuesto, por tanto, resolver un problema superior a nuestras fuerzas, sino simplemente facilitar de una manera hasta cierto punto empírica su resolución. En este desaliñado trabajo, andamiaje tal vez de un edificio que no hemos acertado a construir, y desprovisto de toda demostración rigurosa, nuestra ambición quedaría plenamente satisfecha si acertara a obtener la atención y la benevolencia de las infinitas personas que nos superan en saber y autoridad.

II

Para comenzar esta labor, permítasenos recordar brevemente el modo de obtener una ecuación transformada, a partir de la ecuación propuesta, siguiendo la sencilla exposición del señor Rey Pastor. Sea la ecuación

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + a_3x^{m-3} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0. \quad [1]$$

Formemos la ecuación cuyas raíces sean las de la primera, cambiadas de signo:

$$a_0x^m - a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} - a_3x^{m-3} + \dots \pm a_{m-1}x \mp a_m = 0. \quad [2]$$

Multiplicando ambos polinomios, se obtendrá esta otra ecuación de la forma

$$A_0x^{2m} - A_1x^{2(m-1)} + A_2x^{2(m-2)} - A_3x^{2(m-3)} + \dots \pm A_{m-1}x^2 \mp A_m = 0, \quad [3]$$

que tiene las raíces de ambas. Y si ponemos $y = -x^2$, resultará:

$$A_0y^m + A_1y^{m-1} + A_2y^{m-2} + A_3y^{m-3} + \dots + A_{m-1}y + A_m = 0, \quad [4]$$

ecuación del mismo grado y forma que la [1], y cuyas raíces son los cuadrados de las raíces de ésta y de la [2], cambiadas de signo. Al hacer la multiplicación de ambos polinomios se vería que los coeficientes de la transformada [4] se deducen así de los de la ecuación propuesta:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = a_0^2, \\ A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2, \\ A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4, \\ A_3 = a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-1} = a^2{}_{m-1} - 2a_{m-2}a_m, \\ A_m = a^2{}_m. \end{array}\right\} \qquad [5]$$

El sistema de relaciones [5] expresa claramente el modo de calcular los coeficientes de la ecuación transformada. El mismo orden de operaciones se seguirá para obtener uno tras otro los de las transformadas sucesivas, hasta llegar a aquella en que se considera realizada la separación de las raíces reales y de los módulos de las imaginarias. Para simplificar los cálculos convendrá, y así suele efectuarse, que el coeficiente a_0 del primer término sea la unidad.

Conforme avanza la obtención de las ecuaciones transformadas, si las raíces reales y los módulos son desiguales unos de otros en valor absoluto (único caso que hemos aquí considerado), la elevación a potencias de 2 cada vez mayores tiende a que los cuadrados de los coeficientes de cada término predominen sobre los dobles productos de las relaciones [5], hasta llegar a una transformada en la cual éstos serían relativamente despreciables o evanescentes, dada la aproximación que se necesite en los resultados, y los coeficientes de la siguiente transformada serían los cuadrados de los coeficientes de la anterior. Entonces es cuando se supone conseguida la separación de las raíces y terminada la operación.

Si, por ejemplo, esto se verifica en la transformada cuyas raíces son las de la propuesta elevadas a la potencia n, la representaremos por

$$N_0 z^m + N_1 z^{m-1} + N_2 z^{m-2} + \ldots + N_m = 0. \qquad [6]$$

Los términos de esta última transformada se presentarán ordenados de la manera aproximada siguiente, si designamos por $a, b, c,$ las raíces reales, y por r, r' los módulos que buscamos:

$$\left.\begin{array}{l} N_0 = 1, \\ N_1 = a^n, \\ N_2 = (ab)^n, \\ N_3 = 2(abr)^n \cos n\theta, \\ N_4 = (abr^2)^n, \\ N_5 = (abr^2c)^n, \\ N_6 = 2(abr^2cr')^n \cos n\theta', \\ N_7 = (abr^2cr'^2)^n, \text{ etc.}; \end{array}\right\} \qquad [7]$$

donde, para no recargar los términos, nos hemos limitado a suponer que $a > b > r > c > r' \ldots$, por orden de magnitud absoluta.

En esta sucesión de términos, dividiendo unos por otros (o restándolos por su orden, si, como se acostumbra, van expresados por sus logaritmos), se obtienen primeramente los valores de a^n, b^n, c^n, r^n, r'^n, $\cos n\theta$ y $\cos n\theta'$, y después los de a, b, c, r, r'. De dichos términos, aquellos coeficientes que no son función de los argumentos, resultan siempre positivos a partir de la primera transformada (donde las raíces reales, positivas o negativas, de la ecuación propuesta están ya elevadas al cuadrado), mientras que los que aparecen multiplicados por $\cos n\theta$ y $\cos n\theta'$, llevarán el signo del coseno correspondiente. Esta propiedad es exacta en la última transformada, y sólo aproximadamente se verifica en las anteriores; pero cada vez más a medida que nos acerquemos a dicha transformada final. Como los ángulos θ, 2θ, $2^2\theta$, etc., conforme crecen suelen variar rápidamente, pasando de unos cuadrantes a otros, de aquí la circunstancia, bien advertida en dichos términos, de cambiar con frecuencia de signo de una transformada a otra; circunstancia que suele ser uno de los rasgos característicos de la existencia de raíces imaginarias, como ya antes hicimos notar.

Ahora bien: en la transformada última, en la que fundadamente se supone llevada a cabo la separación de las raíces reales y de los módulos, no hay duda de que todo término que sea función de un argumento llevará el signo del coseno del mismo ángulo, el cual podrá ser calculado. Y aunque no sea fácil, ni acaso posible, demostrarlo, *surge la conjetura* de que en las inmediatas transformadas precedentes, aunque no esté todavía completamente conseguida aquella separación (pero naturalmente con menos probabilidad cuanto más nos acerquemos a la ecuación propuesta), *predomine el signo del coseno respectivo al término considerado.* Si esa conjetura fuera cierta(y los hechos parece que la confirman) se podría aplicar la fórmula citada $\cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$, para ir descendiendo gradualmemte desde $\cos n\theta$ a $\cos \theta$ sin la ambigüedad del signo. Unicamente el resultado sería dudoso en las primeras transformadas, y más todavía en aquellas donde el coeficiente sometido al cálculo fuera nulo, como sucede cuando la ecuación propuesta es incompleta. No es probable, aun en este caso, que sea nulo cualquier coeficiente más que en la ecuación propuesta y en las dos primeras transformadas, que suelen representarse por las potencias 2^1 y 2^2.

Quedará, pues, generalmente determinado el $\cos 2^3\theta$, o sea $\cos 8\theta$, siempre en la hipótesis de la concordancia de los signos de los coeficientes de las transformadas con los de los cosenos respectivos. Entonces $\cos 4\theta = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta)}$ podría pertenecer a los ángulos 4θ o $\pi \pm 4\theta$, y descendiendo así hasta θ, tal sería la indecisión del problema que nos proponíamos resolver.

En estas ideas puramente empíricas, sin demostración alguna, está basado el presente estudio.

El argumento $\theta < 2\pi$, al crecer en las transformadas sucesivas, se compone de un número entero k de circunferencias, más un ángulo residuo $\tau < 2\pi$; es decir, que se tiene esta igualdad

$$n\theta = \tau + 2k\pi. \qquad [8]$$

El coseno de $n\theta$ determina el ángulo τ, mas no el valor de k, que nos queda completamente desconocido. Claro es que, por el contrario, si se supiera cuál era ese número k de circunferencias, el problema estaría resuelto.

La expresión que engloba las dos raíces conjugadas, $r(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)$, indica que los argumentos de ambas han de tener el mismo coseno y el mismo seno, pero éste con signo contrario; por manera que la suma de los dos ángulos ha de valer 2π. De consiguiente, si τ_1 y k_1 se refieren en la fórmula [8] a una de las raíces, la expresión para la otra raíz será:

$$n(2\pi - \theta) = (2\pi - \tau_1) + 2k_2\pi, \qquad [9]$$

y sumando [8] y [9] se obtiene

$$k_2 = n - (k_1 + 1), \qquad [10]$$

ecuación que nos da a conocer el número de circunferencias correspondiente a la segunda raíz conjugada, si se sabe cual es el número k_1 de la primera. Sean, por ejemplo, $n = 2^6 = 64$ y $k_1 = 28$; la fórmula [10] dará $k_2 = 35$.

El procedimiento práctico que proponemos para hallar los argumentos es de aplicación sencillísima, y tan breve que se necesitan muy pocos minutos para llegar al resultado final, si se toman los valores naturales de los cosenos *con el signo que cada uno tenga en la transformada respectiva,* y empleando en el cálculo numérico *cuatro o cinco cifras decimales a lo sumo.* Partiendo de $\cos n\theta$, dado por la última transformada, hállense sucesivamente las expresiones $1 + \cos n\theta$, $\frac{1}{2}(1 + \cos n\theta)$ y $\cos\frac{n\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos n\theta)}$, valiéndonos para la extracción de la raíz de una tabla de cuadrados como la de Barlow (1), y repítase la misma serie de operaciones hasta llegar a cos θ, con las indicadas precauciones. Esto quedará mejor aclarado con los numerosos ejemplos, minuciosamente expuestos al final de esta Memoria, y a ellos nos referimos para que se juzgue del valor de los resultados conseguidos de esta suerte.

Una vez hallado así un valor de θ, que suponemos aproximado, si se le multiplicara por el exponente n de la transformada final, debería dar un producto igual a $k \times 360^{\circ} + \tau$ (que es conocido en cuanto se refiere solamente a τ); de lo contrario, habría que repetir la operación con el suplemento $360^{\circ} - \theta$ (de la segunda raíz); pero este modo de proceder daría generalmente resultados muy inexactos, por cuanto los errores de que adoleciera θ se multiplicarían por n y el valor resultante para τ podría discrepar mucho del verdadero.

Es preferible seguir el camino inverso, descendiendo de cos $n\theta$ á cos θ, para facilitar el cual hemos construído cuatro tablas, insertas al final de este trabajo, cuya estructura es muy sencilla, y que dan los valores de θ, de grado en grado, correspondientes a los de $n\theta$, suponiendo a $n = 16$, 32, 64 y 128, que son las potencias de 2 más usuales en la última transformada. Los valores de $n\theta$ van expresados en k circunferencias, más el ángulo residuo τ en grados. Estas tablas proporcionan el medio de saber qué argumentos θ pueden corresponder al valor de $n\theta$, calculado por el método de Gräffe, o, lo que es lo mismo, los únicos ángulos entre los cuales ha de haber *uno nada más* que sea el argumento de la raíz que buscamos.

Así, si tenemos $n = 32$ y $\tau = 93^{\circ}$, la tabla segunda da, en números redondos:

k	θ	k	θ	k	θ	k	θ
0	2°	8	92°	16	182°	24	272°
1	14	9	104	17	194	25	284
2	25	10	115	18	205	26	295
3	36	11	126	19	216	27	306
4	47	12	137	20	227	28	317
5	59	13	149	21	239	29	329
6	70	14	160	22	250	30	340
7	81	15	171	23	261	31	351

(1) *Barlow's Tables of squares, cubes, square roots, cube roots, reciprocals of all integer numbers up to 10.000.*—Steorotype edition.—New impression. London and New York, 1912.

De estos treinta y dos ángulos, adviértase que los de la segunda columna son los de θ de la primera columna $+ 90^\circ$; los de la tercera, iguales a los de la primera $+ 180^\circ$, y los de la cuarta, iguales $+ 270^\circ$. Otra serie análoga se formaría partiendo del ángulo suplementario $360^\circ - 2^\circ = 358^\circ$; pero esta serie correspondería a la otra raíz conjugada y de ella, por tanto, no necesitamos ocuparnos.

De todas maneras, la lista precedente no resuelve bien la cuestión, por que obligaría a ensayar todos los números para averiguar cuál de ellos satisfacía a la ecuación propuesta.

Pero no sucedería lo mismo si, aplicando la consabida formula $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$ en la forma indicada, obtuviéramos para el argumento unos cuantos valores posibles nada más, pues el ensayo sería entonces relativamente breve. En el caso particular que estamos considerando, tomado de la ecuación de Le Verrier, antes aludida (primer ejemplo, tercer argumento), se verá que, de los cuatro valores resultantes, el $\theta = 250^\circ\,24'$ es el que buscamos, y de la misma tabla podríamos deducir su expresión en correspondencia exacta con el de $32\theta = 92^\circ\,47'\,56'' + 2k\pi$, hallado por la última transformada. Según dicha Tabla II, para $\theta = 250^\circ$ se tiene $32\theta = 2\pi \times 22 + 80^\circ$, y para $\theta = 251^\circ$ es $32\theta = 2\pi \times 22 + 112^\circ$. Como $\tau = 92^\circ$ está comprendido entre 80 y 112, deberá ser $\theta = 250^\circ + \varepsilon$, y este residuo se hallará por la relación $\varepsilon = \frac{(92^\circ 47'56'' - 80)}{32} = 24',00$, luego $\theta = \mathit{250^\circ 24' 0''}$, valor que sería exacto si el de 32θ lo fuera, pero siempre resultará muy aproximado. En apoyo de esta afirmación adviértase que, al descender a θ desde 32θ, el error de que adolezca este ángulo, calculado directamente para el argumento que buscamos, quedará reducido a $\frac{1}{32}$ nada más del de 32θ. Ahora, como según la referida tabla es $k = 22$ circunferencias, podemos formar la adjunta escala descendente:

	k	τ	SIGNOS DE LOS COSENOS: Escala	SIGNOS DE LOS COSENOS: Transformada
$32\theta =$	$22 +$	$92^\circ 47' 56''$	—	—
$16\theta =$	$11 +$	46 23 58	+	+
$8\theta =$	$5 +$	203 11 59	—	—
$4\theta =$	$2 +$	281 36 00	+	+
$2\theta =$	$1 +$	140 48 00	—	—
$\theta =$	$0 +$	250 24 00	—	+

donde se ve que los signos de los cosenos de τ, excepto el último, el referente a la ecuación propuesta (que siempre es dudoso), concuerdan todos con los signos de las respectivas transformadas. Esta concordancia de signos se verificará también para $\theta = 70^\circ\ 24' = 250^\circ\ 24' - 180^\circ$, mas no para los demás ángulos de la lista anterior (pág. 17), que sólo están acordes parcialmente. Esta circunstancia puede tener alguna utilidad y hasta importancia en la determinación de los argumentos, como se verá pronto.

Pongamos otro ejemplo, entresacado de los catorce casos ensayados por nuestro método, que se insertan más adelante, y precisamente aquel que nos ha dado el valor de θ más discrepante del verdadero. Por el método de Gräffe se halló

$$128\theta = 360k + 118^\circ 22' 52'' \quad \text{y} \quad \theta = 102^\circ 10' 30'',$$

y por nuestro cálculo se obtuvo . . . . $\theta = 100^\circ 19' 30''$

que se diferencian en $1^\circ 51'$. Buscando en la Tabla IV, para $n = 128$, los valores de θ iguales a 100° y 101°, se halla respectivamente $128\theta = 35^c + 200^\circ$ y $35^c + 328^\circ$; como entre $\tau = 200$ y $\tau = 328$ no está comprendido el número 118°, habrá que buscar el verdadero θ algo menor o mayor que $100^\circ 19'$. Corriendo la vista por los lugares inmediatos de la Tabla se advierte que θ puede ser igual a $99^\circ + \varepsilon_1$ o a $102^\circ + \varepsilon_2$. Estableciendo como antes la relación $\varepsilon = \dfrac{\tau - \tau_0}{128}$, donde τ_0 es el valor de τ tabulado inmediatamente inferior a $\tau = 118^\circ 22' 52''$, se hallará

$$\varepsilon_1 = \frac{(118^\circ 22' 52'') - 72^\circ}{128} = 0^\circ,362 \quad \text{y} \quad k_1 = 35,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(118^\circ 22' 52'') - 96^\circ}{128} = 0^\circ,175 \quad \text{y} \quad k_2 = 36;$$

luego los dos valores de θ serán

$$\theta_1 = 99^\circ 21',7 \qquad \text{y} \qquad \theta_2 = 102^\circ 10',5,$$

uno de los cuales, si no lo supiéramos ya, debe satisfacer a la cuestión. Tal duda se desvanece sustituyendo θ_1 y θ_2 sucesivamente en la ecuación propuesta.

Para ello, si en dicha ecuación se sustituyen las raíces $r(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)$ se tendrá

$$r^m(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)^m + A_1 r^{m-1}(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)^{m-1} +$$
$$A_2 r^{m-2}(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)^{m-2} + \dots + A_{m-1} r(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta) + A_m = 0,$$

expresión que en virtud del teorema de Moivre toma la forma

$$r^m(\cos m\theta \pm i \operatorname{sen} m\theta) + A_1 r^{m-1}[\cos (m-1)\theta \pm i \operatorname{sen} (m-1)\theta] + A_2 r^{m-2}[\cos (m-2)\theta \pm i \operatorname{sen} (m-2)\theta] + \ldots + A_{m-1} r(\cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta) + A^m = 0,$$

y, separando la parte real de la imaginaria, se tendrán las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} r^m \cos m\theta + A_1 r^{m-1} \cos (m-1)\theta + A_2 r^{m-2} \cos (m-2)\theta + \ldots \\ \qquad + A_{m-1} r \cos \theta + A_m = 0, \\ r^m \operatorname{sen} m\theta + A_1 r^{m-1} \operatorname{sen} (m-1)\theta + A_2 r^{m-2} \operatorname{sen} (m-2)\theta + \ldots \\ \qquad + A_{m-1} r \operatorname{sen} \theta = 0; \end{array}\right\} [11]$$

que deben quedar igual y separadamente satisfechas por el verdadero valor de θ. Poniendo, pues, en ellas sucesivamente 99°21′ 7 y 102°10′,5, y en ambas $r = 1{,}86756$, empleando logaritmos de cuatro o cinco cifras decimales, muy suficientes para este fin, se hallará con facilidad suma:

Para

$$\theta = 99°21',7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 = +\ 1{,}193 \pm 1{,}848i,$$

y para

$$\theta = 102°10',5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 = -\ 0{,}002 \pm 0{,}011i;$$

cuyo resultado demuestra que $\theta = 102°10',5$ es el valor aproximado del argumento de una de las raíces conjugadas, tal como se había obtenido por otros métodos. El argumento de la otra raíz sería $257°49',5 = 360 - 102°10',5$, el cual se relaciona con el otro argumento τ de 128θ, que es $241°37'8'' = 360° - 118°22'52''$.

Este ejemplo, calculado antes por nosotros y después por el nuevo método (véase el núm. 7, pág. 48), se refiere a la ecuación incompleta $x^4 - 5x - 10 = 0$, caso particular de un método ingenioso ideado por M. J. J. Åstrand, director del Observatorio de Bergen (1), con el fin de resolver ecuaciones de la forma $x^n - ax \pm b = 0$, pero que, solamente por aproximaciones sucesivas y una a una, sirve para determinar las raíces reales, dejando en la sombra las imaginarias.

(1) *Astronomische Nachrichten,* número 2.134.

Ahora, y con el fin de ahondar en la causa de la discrepancia encontrada, podemos formar la siguiente *escala descendente:*

		Signos de	
k	τ	Cosenos	Transformadas
$1280 = 36 +$	$118°22'52''$	—	—
$640 = 18 +$	$59\ 11\ 26$	+	+
$320 = 9 +$	$29\ 35\ 43$	+	+
$160 = 4 +$	$194\ 47\ 52$	—	—
$8\theta = 2 +$	$97\ 23\ 56$	—	+
$4\theta = 1 +$	$48\ 41\ 58$	+	+
$2\theta = 0 +$	$204\ 20\ 59$	—	—
$\theta = 0 +$	$102\ 10\ 30$	—	?

Obsérvese que los signos están acordes en las dos columnas, salvo en el renglón de 8θ, que son contrarios; mas, por una parte, el ángulo τ es entonces igual a 97°, etc, poco distante de los 90°, donde el signo del coseno varía, y, por otra, acudiendo al cuadro de transformadas (pág. 48), hallaríamos, desmenuzando el cálculo, que el coeficiente de x^2 en la transformada 2^3 vale 10.000 (cuyo logaritmo es 4) y procede de la diferencia de las cantidades siguientes:

Cuadrado del coeficiente anterior (2^2) = $(600)^2$	=	+ 360000
Suma de los dobles productos	=	— 350000
Coeficiente de x^2 en 2^3	=	+ 10000

cantidad muy pequeña en comparación con las que le han dado origen. Por ambos motivos (que en rigor son uno solo) no es aventurado afirmar que el signo de dicho coeficiente es dudoso o expuesto a variar con facilidad. Si le suponemos negativo, la discrepancia antes hallada en el valor de θ se desvanece, como, aunque parezca innecesario, hemos comprobado repitiendo el cálculo por nuestro método, con el valor negativo de cos 8θ en la página citada.

III

Demos ahora una sucinta idea de los documentos que presentamos y que forman la serie A.

A continuación de un cuadro que resume los resultados obtenidos en los ocho ejemplos sometidos al nuevo método, y con el fin de hacer resaltar la conformidad o discordancia de los valores de los argumentos calculados, vienen otros cuadros (páginas 35 a 53), que contienen el cálculo numérico minucioso de dichos ejemplos, tomados *ad libitum,* y cada uno de los cuales se refiere a una ecuación algébrica con dos o más raíces imaginarias, que ha sido ya resuelta por otros métodos, para la comparación de los resultados conocidos con los que por el nuevo método se obtienen. A fin de que pueda comprobarse todo el cálculo, comiénzase por exponer el sistema formado por la ecuación propuesta y las sucesivas transformadas. De la última de éstas, y atendiendo a la composición de cada coeficiente, se deducen sucesivamente, con la aproximación que permite el número de cifras empleado, los valores absolutos de las raíces reales y de los módulos, juntamente con el de cos $n\theta$, el cual, *con el signo que lleva,* ha de servir de base para hallar, descendiendo, el del argumento θ. El cálculo sencillísimo que a ello conduce, va también minuciosamente expuesto en la misma página o en la siguiente. Como el objeto principal de este estudio es la investigación de las raíces imaginarias, en la mayoría de los casos nos hemos concretado a éstas, prescindiendo de lo referente a las raíces reales que no ofrece dificultad alguna.

La primera ecuación que presentamos es la *ecuación de Le Verrier,* ya varias veces mencionada y calculada por don Miguel Merino, de sexto grado, completa, con seis raíces imaginarias. Fué la que primeramente nos sugirió la idea del nuevo método, y dió resultados exactos al aplicarla en la obtención de los tres argumentos de cada par. El señor Merino la empleó en su libro para exponer detalladamente el procedimiento de Encke, calculándola con logaritmos de siete cifras, que en esta Memoria han sido reducidos a *cinco* para economizar espacio. En general, nos parece suficiente el último número cuando sólo se trate de obtener valores de utilidad práctica, sin necesidad de recurrir después a los métodos de aproximación. Es conveniente además el uso de los logaritmos, por cuanto con ellos la elevación al cuadrado y la formación de los dobles productos se consiguen en breve tiempo y con seguridad en la exactitud de los resultados; como para enlazar las diversas partes de que se compone cada coeficiente lo son las tablas de sumas y restas de Gauss, calculadas con siete decimales y publicadas por *Theodor Wittstein.* No hemos tenido ocasión de ensayar, y, probablemente sería ventajoso, realizar mecánicamente estas operaciones con buenas máquinas de calcular, como la llamada *Brunsviga.*

La obtención de los argumentos en este primer ejemplo se hizo sin vacilación, puesto que los coeficientes de la ecuación propuesta y de las transformadas llevan todos explícito su signo. Unicamente, como el de cos θ en la ecuación debe siempre considerarse como dudoso, se supuso que podía lo mismo ser positivo que negativo y resultaron así en el primer par imaginario los siguientes ángulos: 8°18′, 171°42′, 188°18′ y 351°42′. La sustitución de ellos en la ecuación dada demuestra que el segundo y el tercero son los argumentos de las dos raíces de este par; correspondiendo el 171°42′ al valor de $32\theta = 94°29'42''$ y el $188°18' = 360° - 171°42'$ al valor de $32\theta = 265°30'18'' = 360° - 94°29'42''$. Una cualidad recomendable del nuevo método es que el cálculo de cada argumento se hace separada e independientemente de los demás que puede contenerla ecuación propuesta.

El segundo ejemplo trata de la ecuación $x^7 + 3x^4 + 6 = 0$ propuesta por Encke y contenida en el capítulo VII de la Memoria del señor Merino. Tiene una raíz real y seis imaginarias, y según se ve, le faltan nada menos que cinco términos, por lo que el coeficiente de x^5, de donde se ha de deducir el valor del primer argumento, es nulo en la ecuación y en las dos primeras transformadas, siendo el primer signo utilizable el de la transformada 2^3. Para el cálculo de los otros dos argumentos faltan los coeficientes de x^3 y x en la ecuación dada y en la primera transformada. A pesar de estas deficiencias la determinación de los tres argumentos se realizó fácilmente con pequeños errores y sin necesidad de acudir a muchos tanteos,

Sin vacilación también se calcularon los argumentos de la ecuación de cuarto grado (tercer ejemplo), completa y con dos pares imaginarios que el señor Rey Pastor expone en sus *Lecciones de Análisis* como muestra de su método, cuya idea ya indicamos en las páginas precedentes.

Algún más trabajo costó la ecuación incompleta $x^4 + 12x + 7 = 0$ con dos raíces reales y dos imaginarias, que el matemático americano Mr. Dickson resuelve en su apreciable libro *Elementary Theory of Equations,* y constituye nuestro cuarto ejemplo. Por ser incompleta, el coeficiente de donde ha de resultar el valor de 128θ es nulo en dicha ecuación y en la transformada primera, y muy pequeño en la segunda, de suerte que el cálculo ofrece una diferencia de 44′ con el verdadero valor de θ. En este caso resolvimos la dificultad de la misma manera que empleamos en la ecuación de Åstrand, tratada por nosotros más atrás, acudiendo a la Tabla auxiliar IV para rastrear el exacto valor del argumento.

En cambio (quinto ejemplo) otra ecuación del mismo Mr. Dickson, de quinto grado, *completa* y con tres raíces reales y dos imaginarias, no presentó dificultades en el cálculo muy aproximado del argumento correspondiente.

Lo mismo sucedió en el sexto ejemplo, referente a una ecuación de cuarto grado, que se presentó en un trabajo particular del autor: aunque en ella es nulo el coeficiente de x^3 de donde se había de deducir el valor de 320, y, a pesar de ser pequeños los de dicho coeficiente en las transformadas primera y segunda, *utilizáronse con éxito* los signos que ambas llevan.

Con esto llegamos al séptimo ejemplo, la ecuación del astrónomo noruego Åstrand, en cuya resolución nos hemos ocupado ya, y que aun dará motivo para mencionarla más adelante.

Cierra esta serie de ejemplos una ecuación propuesta por Fourier en su *Traité de la résolution des équations numériques,* de séptimo grado, *incompleta,* con tres raíces reales y cuatro imaginarias. Donde primeramente nos fijamos en dicha ecuación fué en el folleto del señor Carvallo, y por haber hallado algunas erratas en su cálculo nos decidimos a rehacerlo por completo. Después advertimos que la misma ecuación se hallaba incluída en el libro del señor Merino, y además, que era una de las propuestas por Encke en su Memoria original. Aquí el primer argumento dependía de un coeficiente igual a *cero* en la ecuación propuesta y de valores numéricos pequeños en las primera y segunda transformadas. Además llamó nuestra atención el ser siempre negativos los mismos coeficientes en todas las transformadas, *excepto en la segunda*, circunstancia que hacía aparecer sospechosa dicha excepción; así es que nos pareció conveniente suponerle ya positivo, ya negativo, y hecho el cálculo en ambas hipótesis, efectivamente en la segunda de éstas se llegó a obtener el valor del argumento que se buscaba. Todavía hemos de ocuparnos un momento de la anomalía advertida. El segundo argumento no produjo duda alguna.

En la serie B hemos agrupado otros dos cuadros, consecuencia del cálculo de los ejemplos enumerados, por parecernos que dan cierta justificación, *no demostración,* del método que proponemos.

El primer cuadro contiene lo que hemos llamado *escala descendente,* aplicada a las catorce determinaciones de argumentos calculados por nosotros y de la cual antes presentamos dos muestras. Partiendo del valor de $n0$, dado por la transformada final, y conocido el de θ, se interpolan entre ambos los valores correspondientes a las transformadas intermedias. Dichos valores tienen la forma $2k\pi + \tau$, cuyo coseno es el mismo de τ, por manera que a la derecha de cada expresión de τ hemos escrito la columna *c* que indica el signo de cos τ, y al lado de esta columna, otra, encabezada con la letra *t*, que señala el signo del coeficiente de la transformada respectiva. Hállase así en todas las catorce determinaciones calculadas una notable igualdad o concordancia absoluta entre dichos signos de ambas columnas, excepto, naturalmente, en el de la ecuación propuesta, siempre dudoso, y en algunos otros casos que precisamente corresponden a las ecuaciones cuya resolución ha sido más difícil. Examinando estos casos se advierte lo siguiente: en la ecuación de Encke (segundo ejemplo) para la primera raíz, en el renglón 4θ, tenemos $\tau = 90°8'33''$; para la segunda raíz (segundo par) de la misma ecuación, en el renglón $32\theta'$, hallamos $\tau = 270°0'$, y para la tercera raíz (tercer par) y línea $32\theta''$ es $\tau = 91°48'45''$. En la ecuación incompleta de Dickson (cuarto ejemplo), para 8θ se tiene $\tau = 92°56'40''$; en la también incompleta de Åstrand (septimo ejemplo), para 8θ hallamos $\tau = 97°23'56''$. En todos estos casos se ve que el valor de τ está muy próximo a los 90° ó 270°, posiciones críticas en que el coseno se anula y cambia de signo, por manera que los valores naturalmente inexactos de cos τ, deducidos de las transformadas, exceptuando la final, pueden producir el cambio de signo, o ser entonces falso el signo del coeficiente que se toma por guía en el cálculo de θ.

Por otra parte, la correspondencia general de los signos en las dos columnas c y t, es probable que se deba a que el coseno de un ángulo conserva su signo en dos cuadrantes consecutivos, separados por el diámetro 90° — 270° de los otros dos. Con el mismo signo puede, por tanto, variar de magnitud el ángulo hasta 180° o π, de suerte que aun siendo erróneos los valores de dicho ángulo en las primeras transformadas, sólo sería posible un cambio de signo cuando el verdadero valor de aquél se aproximase a los puntos críticos.

Tratando de comprobar esta conjetura hemos formado otro cuadro B, que es complementario del anterior, partiendo del razonamiento siguiente: Se ha supuesto, equivocadamente, que *en todas* las transformadas los coeficientes tenían la misma precisión y estructura, como cuando está conseguida la separación de las raíces; y en esta falsa hipótesis fueron calculados los valores de las raíces reales, de los módulos y de los argumentos para averiguar las diferencias que hubiese entre dichos valores y los verdaderos. Así, por ejemplo, la columna r de este cuadro, da en cada caso los que resultan para el módulo, advirtiéndose cómo aumenta la diferencia conforme nos alejamos de la primera línea. La columna llamada $\Delta\tau$ expresa la diferencia que se halla restando cada valor erróneo de τ del verdadero valor escrito en la *escala descendente*. Fijémonos, por ejemplo, en la diferencia $\Delta\tau = +10°37'$ correspondiente a la línea $4\theta'$ del segundo par imaginario de la ecuación de Le Verrier. En el cuadro primero hallamos para $4\theta'$, $\tau = 15°48'$, próximamente; el valor erróneo de τ en este caso sería $15°48' + 10°37' = 26°25'$.

Nótese que, en general, la igualdad escrita de los valores verdaderos y falsos de τ y de r es casi absoluta en las tres o cuatro transformadas que preceden a la final, y que las diferencias, si bien aumentan después en magnitud absoluta con alguna irregularidad, no llegan a ser tan grandes o excesivas como *a priori* podríamos imaginarnos. En el segundo cuadro así formado, ninguna diferencia en el valor de τ llega a medio cuadrante, dentro de los límites considerados.

Hicimos antes advertir, que la ecuación de Fourier ofrece en su primer argumento la notable particularidad de que los signos de los coeficientes de dicho argumento *son negativos en todas* las transformadas, excepto en la 4θ. Hallado el argumento y formada la escala descendente, se vió que θ valía próximamente 120° ó $\frac{1}{3}$ de circunferencia, de manera que en sus múltiplos pares el ángulo resíduo τ tenía que valer $\frac{1}{3}$ ó $\frac{2}{3}$ de circunferencia, cuyos cosenos son negativos. Tratando de explicarnos la razón de la anomalía hallada en la transformada 4θ, observamos que el verdadero valor de τ, en la escala descendente, era allí igual a $120^\circ 11'$, mientras que, según el cuadro segundo B, el valor erróneo era $120^\circ 11' - 37^\circ 25' = 82^\circ 46'$, cuyo coseno es positivo. Sospechas fundadas tuvimos, pues, al hacer el cálculo de θ en considerar dudoso el signo del coeficiente de 4θ. A iguales conclusiones habríamos llegado, *a priori*, examinando la serie de valores naturales de los cosenos al hacer el cálculo de θ. (Páginas 52 y 53.)

IV

Vimos antes que el ángulo $n\theta$, correspondiente a la transformada cuya potencia es n, se componía de un número exacto k de circunferencias, más un ángulo residuo $\tau < 2\pi$; por manera que su expresión es

$$n\theta = 2k\pi + \tau.$$

Una de las dificultades mayores con que para encontrar el argumento θ se tropezaba, procedía de ser desconocido el número k de circunferencias. Sin embargo, después de escribir cuanto antecede hemos pensado que, sin necesidad de ese conocimiento, sería posible rastrear *directamente* el valor de θ, en escala descendente, a partir del ángulo τ_n que da la última transformada $n\theta$, y teniendo en cuenta las razones que a continuación exponemos.

Si τ', τ'', τ''' y τ^{IV} designan, respectivamente, los ángulos residuos en los cuadrantes 1.°, 2.°, 3.° y 4.°, y α un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$, recordando nociones elementalísimas se tendrá:

$\tau' = \alpha$	cuyo coseno es positivo.	La mitad será	$\frac{\tau'}{2} = \frac{\alpha}{2} \ldots$		cuyo coseno es	positivo.
$\tau'' = \pi - \alpha < \pi$	» negativo.	»	$\frac{\tau''}{2} = \frac{1}{2}(\pi - \alpha) < \frac{\pi}{2}$		»	positivo.
$\tau''' = \pi + \alpha > \pi$	» negativo.	»	$\frac{\tau'''}{2} = \frac{1}{2}(\pi + \alpha) > \frac{\pi}{2} < \pi$		»	negativo.
$\tau^{IV} = 2\pi - \alpha < 2\pi$	» positivo.	»	$\frac{\tau^{IV}}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2} < \pi > \frac{\pi}{2}$		»	negativo.

Por otra parte, el número k de circunferencias puede ser *par* o *impar*. En el primer caso, el valor y el signo de $\frac{\tau}{2}$ se deducen por la regla precedente, sin alteración alguna, hasta que, descendiendo, se llegue a una transformada tal que k sea un número impar q. Entonces tendremos $n\theta = q \times 2\pi + \tau_n = (q - 1)2\pi + 2\pi + \tau_n$, en cuya expresión es $q - 1$ un número par, y, siendo ya posible la división entera de $n\theta$ por 2, para obtener el término siguiente de la escala, resultará: $\frac{n\theta}{2} = \left(\frac{q-1}{2}\right)2\pi + \left(\pi + \frac{\tau_n}{2}\right)$. Pero adviértase que $\cos \frac{\tau_n}{2}$ y $\cos\left(\pi + \frac{\tau_n}{2}\right)$ tienen signos contrarios, circunstancia que, cuando sea preciso, permitirá hacer que concuerden en signo el coseno del ángulo residuo y el coeficiente de la transformada $\frac{n\theta}{2}$; condición esencial, aunque hipotética, pues no está demostrada, en que se fundan nuestros métodos para calcular los argumentos de las raíces imaginarias. El que ahora presentamos no exige, como el que en las páginas precedentes quedó explicado, el empleo de los cosenos, sino que, operando directamente sobre los ángulos, en virtud de las consideraciones acabadas de exponer, puede formularse en la sencilla regla práctica siguiente:

«Dado el valor del ángulo residuo τ_n, cuyo coseno ha de tener el mismo signo que el coeficiente de la transformada respectiva $n\theta$, para pasar al término inferior inmediato hállese la mitad de τ_n, y si $\cos \frac{\tau_n}{2}$ tiene también el mismo signo que el coeficiente de la transformada $\frac{n\theta}{2}$, $\frac{\tau_n}{2}$ será el ángulo residuo correspondiente. Pero si los signos fueran contrarios (señal de que el número k de circunferencias precedente es impar), agréguense 180° a $\frac{\tau_n}{2}$, y el verdadero valor del ángulo residuo estará entonces expresado por $180^{\circ}+\frac{\tau_n}{2}$. Descendiendo gradualmente y de la propia manera se llegará, al fin, a un valor de θ ó $180^{\circ}+\theta$, que será precisamente el que buscamos. Únicamente cuando en casos excepcionales el signo de una de las transformadas sea distinto del que debiera ser, resultará para θ un valor más o menos erróneo, que podrá tratarse del modo ya indicado en páginas anteriores, acudiendo a las tablas auxiliares y sometiendo el valor de θ hallado a la prueba de ser o no el argumento que corresponde a la raíz imaginaria de la ecuación numérica propuesta.»

Apliquemos esta regla a dos ejemplos, entresacados *ab libitum* de la colección que hemos resuelto por el método de los cosenos. (Documentos, series A y B.)

1.° ECUACIÓN DE LE VERRIER (PRIMER ARGUMENTO)

$$
\begin{array}{llll}
32\theta = - & \tau_{32} = & 94^{\circ}29'42''- & \\
 & & 47\ 14\ 51 + & = \frac{1}{2}\tau_{32} \\
16\theta = - & \tau_{16} = & 227\ 14\ 51 - & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau_{32} \\
 & & 113\ 37\ 25 - & = \frac{1}{2}\tau_{16} \\
8\theta = + & \tau_{8} = & 293\ 37\ 25 + & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau_{16} \\
 & & 146\ 48\ 42 - & = \frac{1}{2}\tau_{8} \\
4\theta = + & \tau_{4} = & 326\ 48\ 42 + & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau_{8} \\
 & & 163\ 24\ 21 - & = \frac{1}{2}\tau_{4} \\
2\theta = + & \tau_{2} = & 343\ 24\ 21 + & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau_{4}
\end{array}
$$

$$
\theta = \pm\ \tau_1 \left\{ \begin{array}{ll} = 171\ 42\ 10 - & = \frac{1}{2}\tau_{2} \\ = 351\ 42\ 10 + & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau_{2} \end{array} \right.
$$

2.° ECUACIÓN DE FOURIER (SEGUNDO ARGUMENTO)

$$
\begin{array}{llll}
128\theta' = + & \tau'_{128} = & 334^{\circ}50'40''+ & \\
 & & 167\ 25\ 20 - & = \frac{1}{2}\tau'_{128} \\
64\theta' = + & \tau'_{64} = & 347\ 25\ 20 + & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau'_{128} \\
32\theta' = - & \tau'_{32} = & 173\ 42\ 40 - & = \frac{1}{2}\tau'_{64} \\
16\theta' = + & \tau'_{16} = & 86\ 51\ 20 + & = \frac{1}{2}\tau'_{32} \\
 & & 43\ 25\ 40 + & = \frac{1}{2}\tau'_{16} \\
8\theta' = - & \tau'_{8} = & 223\ 25\ 40 - & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau'_{16} \\
 & & 111\ 42\ 50 - & = \frac{1}{2}\tau'_{8} \\
4\theta' = + & \tau'_{4} = & 291\ 42\ 50 + & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau'_{8} \\
2\theta' = - & \tau'_{2} = & 145\ 51\ 25 - & = \frac{1}{2}\tau'_{4}
\end{array}
$$

$$
\theta' = \pm\ \tau'_1 \left\{ \begin{array}{ll} = 72\ 55\ 42 + & = \frac{1}{2}\tau'_{2} \\ = 252\ 55\ 42 - & = 180^{\circ}+\frac{1}{2}\tau'_{2} \end{array} \right.
$$

Substituyendo estos valores duplicados de θ y θ' en la ecuación propuesta se halla que $\theta = 171^{\circ}42'10''$ y $\theta' = 72^{\circ}55'42''$ son los valores respectivos del primer argumento de la ecuación de Le Verrier y del segundo argumento de la ecuación de Fourier, en absoluto conformes ambas escalas con las expuestas en el cuadro primero (serie B).

Además, si se advierte que es el argumento $\theta < 2\pi$ y lo mismo el θ', y por tanto allí $k = 0$, se podrá determinar el número k de circunferencias que comprende el ángulo $n\theta$, por la relación $k_n = \frac{n\theta}{360}$, prescindiendo en el cociente del residuo, que será generalmente inexacto. Así tendríamos en ambos ejemplos $k_{32} = 15$ y $k_{128} = 25$.

Pongamos ahora otro ejemplo, no incluído en la colección que hay más adelante, y que está tomado del libro del señor Merino (pág. 138). Es la siguiente ecuación de quinto grado con una raíz real y cuatro imaginarias:

$$x^5 - 7x^4 + 103x^3 - x^2 - 1834x - 11824 = 0. \qquad \text{(A)}$$

Para no alargar demasiado este escrito, nos limitaremos a copiar la última transformada y los signos que en ella y en las anteriores tienen los coeficientes en que entran como factores los cosenos de los argumentos. Dichos signos son:

Para $32\theta = -$, $16\theta = +$, $8\theta = -$, $4\theta = +$, $2\theta = -$, $\theta = -$ (dudoso).

Y para $32\theta' = +$, $16\theta' = +$, $8\theta' = +$, $4\theta' = -$, $2\theta' = +$, $\theta' = -$ (ídem);

donde se nota alguna variación en los signos. En general, puede suceder que los mencionados signos *sean positivos en todas las transformadas;* pero este hecho, aunque posible, es poco probable, si se atiende a que para ello sería preciso que fuese $\theta = 360^\circ \pm \alpha$ y α un ángulo muy pequeño, que, al multiplicarse, en la última transformada se tuviera $\tau_n < \frac{\pi}{2}$ ó $> \frac{3\pi}{2}$. Así, suponiendo $n = 64$ y $\alpha = 1^\circ$, resultará $\tau_{64} = 64^\circ < \frac{\pi}{2}$; mas para $n = 128$ ya obtendríamos $\tau_{128} = 128^\circ > \frac{\pi}{2}$, y, por tanto, $\cos 128\theta < 0$.

La última transformada de la ecuación propuesta en el ejemplo que analizamos es, expresando en logaritmos los coeficientes,

$$(2^5)\ \left.\begin{array}{l} x^5 - 33{,}60217x^4 + 66{,}68102x^3 + 92{,}00979x^2 + 110{,}64963x + \\ \qquad + 130{,}32848 = 0. \end{array}\right\} \text{(B)}$$

La ecuación propuesta, según el examen de los signos y de los caracteres de los coeficientes de las sucesivas transformadas hecho por el señor Merino, tiene una raíz real a y dos pares imaginarios cuyos módulos son r y r', y en magnitud absoluta $r > a > r'$. Por tanto, los coeficientes de la última transformada representarán:

$$
\begin{array}{lcl}
\log 2r \cos 32\theta \ldots\ldots & = & 33{,}60217 - \\
\log (r^2)^{32} \ldots\ldots\ldots & = & 66{,}68102 + \\
\log (r^2 a)^{32} \ldots\ldots\ldots & = & 92{,}00979 + \\
\log 2(r^2 a r')^{32} \cos 32\theta' & = & 110{,}64963 + \\
\log (r^2 a r'^2)^{32} \ldots\ldots & = & 130{,}32848 +
\end{array}
$$

de donde se deduce fácilmente

$$
\begin{array}{lll}
\log \cos 32\,\theta = 9{,}96063 - & & 32\theta = k + 155^{\circ}58'13'' \\
\log r \ldots\ldots = 1{,}04189 & & r = 11{,}01263 \\
\log a \ldots\ldots = 0{,}79152 & & a = 6{,}18763 \\
\log \cos 32\theta' = 9{,}17946 + & & 32\theta' = k' + 81^{\circ}18'19'' \\
\log r' \ldots\ldots = 0{,}59873 & & r' = 3{,}96944
\end{array}
$$

Con estos datos, aplicando el nuevo procedimiento para obtener los argumentos θ y θ', tendremos

$$
\begin{array}{lll}
32\theta = - & \tau_{32} = 155^{0}58'13'' & \\
16\theta = + & \tau_{16} = 77\ 59\ 6 + & = \frac{1}{2}\tau_{32} \\
 & \phantom{\tau_{16} =}\ \ 38\ 59\ 33 + & = \frac{1}{2}\tau_{16} \\
8\theta = - & \tau_{8} = 218\ 59\ 33 - & = 180^{0} + \frac{1}{2}\tau_{16} \\
 & \phantom{\tau_{8} =}\ 109\ 29\ 46 - & = \frac{1}{2}\tau_{8} \\
4\theta = + & \tau_{4} = 289\ 29\ 46 + & = 180^{0} + \frac{1}{2}\tau_{8} \\
2\theta = - & \tau_{2} = 144\ 14\ 53 - & = \frac{1}{2}\tau_{4} \\
\theta = \pm & \tau_{1} \left\{ \begin{array}{l} = 72\ 22\ 26 + = \frac{1}{2}\tau_{2} \\ = 252\ 22\ 26 - = 180^{0} + \frac{1}{2}\tau_{2} \end{array} \right. &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
32\theta' = + & \tau'_{32} = 81^{0}18'19'' + & \\
16\theta' = + & \tau'_{16} = 40\ 39\ 10 + & = \frac{1}{2}\tau'_{32} \\
8\theta' = + & \tau'_{8} = 20\ 19\ 35 + & = \frac{1}{2}\tau'_{16} \\
 & \phantom{\tau'_{8} =}\ \ 10\ \ 9\ 48 + & = \frac{1}{2}\tau'_{8} \\
4\theta' = - & \tau'_{4} = 190\ \ 9\ 48 - & = 180^{0} + \frac{1}{2}\tau'_{8} \\
 & \phantom{\tau'_{4} =}\ \ 95\ \ 4\ 54 - & = \frac{1}{2}\tau'_{4} \\
2\theta' = + & \tau'_{2} = 275\ \ 4\ 54 + & = 180^{0} + \frac{1}{2}\tau'_{4} \\
\theta' = \pm & \tau'_{1} \left\{ \begin{array}{l} = 137\ 32\ 27 - = \frac{1}{2}\tau'_{2} \\ = 317\ 32\ 27 + = 180^{0} + \frac{1}{2}\tau'_{2} \end{array} \right. &
\end{array}
$$

Sustituyendo sucesivamente los valores duplicados de τ y τ' en la ecuación propuesta, se verá que los ángulos $\theta = 72^{\circ}22'26''$ y $\theta' = 137^{\circ}32'27''$ la satisfacen en general, y son, por tanto, los argumentos de las raíces imaginarias de dicha ecuación. Y comparando nuestros resultados con los del señor Merino se hallaría que concuerdan entre sí, dentro de la aproximación que racionalmente puede esperarse de calcular con logaritmos de cinco cifras decimales. En efecto, si $f = 2r \cos \theta$ y $f' = 2r' \cos \theta'$ designan las sumas de las raíces de cada par conjugado y se atiende a que dicho señor, por razones que no son de este lugar, toma cada raíz con signo contrario, se tendrá:

	Según el Sr. Merino	Según nuestro cálculo	Diferencias
$a =$	$+\ 6{,}18764$	$+\ 6{,}18763$	$+\ 0{,}00001$
$f =$	$+\ 6{,}66922$	$+\ 6{,}66930$	$-\ 0{,}00008$
$f' =$	$-\ 5{,}85686$	$-\ 5{,}85698$	$+\ 0{,}00012$
SUMAS $=$	$+\ 7{,}00000$	$+\ 6{,}99995$	$+\ 0{,}00005$

El coeficiente del segundo término de la ecuación propuesta es igual a -7.

Dice el señor Merino (pág. 140) que para determinar por el método del máximo común divisor, o de Encke, los valores de f y f' que a los de r^2 y r'^2 corresponden, habría que considerar la ecuación propuesta como de *sexto grado,* multiplicando todos los términos por x; pero esto, *lo más directo e irreprochable en teoría,* pero sumamente complicado, lo elude en este caso hábilmente dicho señor por un método análogo al de Rey Pastor.

Una de las causas principales de la gran simplificación que en este problema los dos procedimientos que hemos explicado introducen es, sin duda alguna, la posibilidad de hallar separada e independientemente cada argumento, desligado además del módulo. El método directo o último supera en sencillez al primero, basado en el cálculo del coseno de un arco en función del coseno del arco duplo, pero acaso en la práctica esté más expuesto a equivocaciones; en todo caso, como los resultados que con ambos se obtengan podrán servir de comprobación del que se busca, creímos lo más conveniente no omitir ninguno en este trabajo.

Tales han sido los principales resultados conseguidos hasta ahora en la aplicación de los métodos, que nos atrevemos a calificar de nuevos, para determinar los argumentos de las raíces imaginarias, principal escollo encontrado para la resolución de las ecuaciones numéricas. Por la brevedad de su ejecución es por lo que, después de no pocas vacilaciones, nos hemos decidido a darlos a conocer, y únicamente con el deseo de contribuir con nuestras débiles fuerzas al esclarecimiento de un problema que, además de su evidente utilidad, ha ejercido una especie de obsesión en cuantos matemáticos de él se han ocupado. No nos toca a nosotros decidir si hemos acerado a colocar algún grano de arena en el edificio a costa de tantos esfuerzos levantado; y al superior criterio de las personas que se tomen el trabajo de leer estos apuntes, y al parecer que de su valor se formen, sometemos humildemente el nuestro.

DOCUMENTOS

SERIE A

Resumen de los resultados principales obtenidos por el nuevo método en los ejemplos minuciosamente expuestos a continuación (*)

PRIMER EJEMPLO. — Ecuación de Le Verrier resuelta por don Miguel Merino (pág. 93), con tres pares de raíces imaginarias, reduciendo a la unidad el coeficiente del primer término:

$$x^6 + 4,2239631x^5 + 6,5071075x^4 + 7,5013052x^3 + 8,4691019x^2 + 3,3640845x + 1,6251813 = 0.$$

k	τ	Módulos	Argumentos	Idem por otros métodos	Correcciones
$32\theta = 15+$	$94^{o}29'42''$	$r = 2,02624$	$\theta = 171^{o}42'$	$\theta = 171^{o}42'$	$0^{o}\ 0'$
$32\theta' = 24+$	$126\ 20\ 33$	$r' = 1,13865$	$\theta' = 273\ 57$	$\theta' = 273\ 57$	$0\ \ 0$
$32\theta'' = 22+$	$92\ 47\ 56$	$r'' = 0,55255$	$\theta'' = 250\ 24$	$\theta'' = 250\ 24$	$0\ \ 0$

SEGUNDO EJEMPLO.—Ecuación de Encke (Merino), incompleta, con tres pares imaginarios y una raíz real (pág. 184):

$$x^7 + 3x^4 + 6 = 0.$$

$256\theta = 80+$	$9^{o}\ 7'\ 0''$	$r = 1,48124$	$\theta = 112^{o}28'$	$\theta = 112^{o}32'$	$+0^{o}\ 4'$
$256\theta' = 102+$	$0\ \ 0\ \ 0$	$r' = 1,19800$	$\theta' = 143\ 28$	$\theta' = 143\ 26$	$-0\ \ 2$
$256\theta'' = 34+$	$14\ 30\ 0$	$r'' = 1,09749$	$\theta'' = 47\ 45$	$\theta'' = 47\ 52$	$+0\ \ 7$

TERCER EJEMPLO.—Ecuación de D. Julio Rey Pastor (Curso de Análisis, 1915-16), pág. 388, con dos pares imaginarios:

$$x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 5x + 100 = 0.$$

$32\theta = 15+$	$59^{o}19'35''$	$r = 4,83216$	$\theta = 170^{o}36'$	$\theta = 170^{o}36'$	$0^{o}\ 0'$
$32\theta' = 6+$	$23\ 32\ 57$	$r' = 2,06947$	$\theta' = 68\ 14$	$\theta' = 68\ 14$	$0\ \ 0$

(*) En dichos ejemplos se ha atendido, principalmente, a las raíces imaginarias.

Cuarto ejemplo. — Ecuación de M. L. E. Dickson, *Elementary Theory of Equations*, con dos raíces reales y dos imaginarias (pág. 121):

$$x^4 + 12x + 7 = 0.$$

k	τ	Módulos	Argumentos	Idem por otros métodos	Correcciones
$128\theta = 20$	$+\ 47°\ 6'30''$	$r = 2{,}39961$	$\theta = 55°53'$	$\theta = 56°37'$	$+0°44'$

Quinto ejemplo. — Ecuación de M. Dickson (ib.), con tres raíces reales y dos imaginarias (pág. 107):

$$x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0.$$

$32\theta = 4$	$+273°\ 2'49''$	$r = 0{,}87092$	$\theta = 53°32'$	$\theta = 53°32'$	$0°\ 0'$

Sexto ejemplo. — Ecuación de un trabajo particular del autor, con dos raíces reales y dos imaginarias:

$$x^4 + 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$32\theta = 9$	$+149°48'30''$	$r = 1{,}98240$	$\theta = 105°56'$	$\theta = 105°56'$	$0°\ 0'$

Séptimo ejemplo. — Ecuación de J. J. Åstrand, con dos raíces reales y dos imaginarias:

$$x^4 - 5x - 10 = 0.$$

$128\theta = 36$	$+118°22'52''$	$r = 1{,}86756$	$\theta = 100°19',5$	$\theta = 102°10',5$	$+1°51$

Octavo ejemplo. — Ecuación de Fourier (Encke, Merino y Carvallo), con tres raíces reales y cuatro imaginarias:

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$128\theta = 42$	$+245°40'26''$	$r = 1{,}29088$	$\theta = 120°\ 1'$	$\theta = 120°\ 3'$	$+0°\ 2'$
$128\theta' = 25$	$+334\ 50\ 40$	$r' = 1{,}03762$	$\theta' = 72\ 56$	$\theta' = 32\ 56$	$0\ \ 0$

PRIMER EJEMPLO NUMÉRICO

Ensayo de la resolución, por el método de Gräffe, de la ecuación de Le Verrier de sexto grado, tomada del libro de D. Miguel Merino, página 93 y siguientes:

$$3447x^6 + 14560x^5 + 22430x^4 + 25857x^3 + 29193x^2 + 11596x + 5602 = 0,$$

cuyas raíces son todas imaginarias. Dividiendo la ecuación por el coeficiente del primer término, y empleando los logaritmos de los coeficientes, se tendrán las siguientes transformadas:

2^n	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
2^0	$+1$	$+0,62572$	$+\ 0,81339$	$+\ 0,87514$	$+\ 0,92784$	$+\ 0,52687$	$+0,21090$ (**)
2^1	$+1$	$+0,68374$	$-\ 0,61170$	$-\ 1,45909$	$+\ 1,62743$	$-\ 1,20980$	$+0,42180$
2^2	$+1$	$+1,49811$	$+\ 2,57912$	$+\ 3,00576$	$+\ 2,92613$	$+\ 1,58856$	$+0,84361$
2^3	$+1$	$+2,36646$	$+\ 4,91293$	$+\ 5,59013$	$+\ 5,80506$	$-\ 4,01141$	$+1,68721$
2^4	$+1$	$-5,03981$	$+\ 9,81404$	$+10,67179$	$+11,61857$	$+\ 7,63614$	$+3,37443$
2^5	$+1$	$-9,00927$ (*)	$+19,62819$	$-\ 21,50645$	$+23,23712$	$-13,98273$	$+6,74886$

De la transformada final resulta:

$$\begin{aligned}
&\log 2r^{32}\cos 32\theta \ldots\ldots\ldots = 9,00927\ -\\
&\log (r^2)^{32} \ldots\ldots\ldots\ldots = 19,62819\ +\\
&\log 2(r^2r')^{32}\cos 32\theta' \ldots = 21,50645\ -\\
&\log (r^2r'^2)^{32} \ldots\ldots\ldots\ldots = 23,23712\ +\\
&\log 2(r^2r'^2r'')^{32}\cos 32\theta'' = 13,98273\ -\\
&\log (r^2r'^2r''^2)^{32} \ldots\ldots\ldots = 6,74886\ +
\end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente

$$\begin{array}{llll}
\log\cos 32\theta = \bar{2},89415\ - & & 32\theta = k + 94°29'42'' \\
\log r \ldots\ldots = 0,30669 & & r = 2,02624 \\
\log\cos 32\theta' = \bar{1},77277\ - & & 32\theta' = k' + 126°20'33'' \\
\log r' \ldots\ldots = 0,05639 & & r' = 1,13865 \\
\log\cos 32\theta'' = \bar{2},68871\ - & & 32\theta'' = k'' + 92°47'56'' \\
\log r'' \ldots\ldots = \bar{1},74237 & & r'' = 0,55255
\end{array}$$

Todo el cálculo de transformadas lo efectuó el señor Merino con logaritmos de siete cifras decimales, reducidas aquí a *cinco* para la más conveniente formación del cuadro precedente.

(*) La característica *9*, por una errata de imprenta, se lee *10* en el libro del Sr. Merino.
(**) Los signos que llevan los logaritmos son los de los números que representan.

1.° Determinación de los argumentos en la ecuación de Le Verrier

(Para la extracción de raíces se hizo uso de una Tabla de cuadrados de Barlow.)

θ	θ'	θ''
$32\theta = 94°29'42'' + k(=15)$	$32\theta' = 126°20'33'' + k'(=24)$	$32\theta'' = 92°47'56'' + k''(=22)$
$\log \cos 32\theta = 8{,}89415 -$	$\log \cos 32\theta' = 9{,}77277 -$	$\log \cos 32\theta'' = 8{,}68871 -$
$2^5 - \ldots\ldots \cos 32\theta = -0{,}07837$	$2^5 - \ldots\ldots \cos 32\theta' = -0{,}5926$	$2^5 - \ldots\ldots \cos 32\theta'' = -0{,}04883$
$1 + \cos 32\theta = 0{,}92163$	$1 + \cos 32\theta' = 0{,}4074$	$1 + \cos 32\theta'' = 0{,}95117$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) = 0{,}4608$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta') = 0{,}2037$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta'') = 0{,}47558$
$2^4 - \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 16\theta = -0{,}6788$	$2^4 + \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 16\theta' = +0{,}45133$	$2^4 + \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 16\theta'' = +0{,}68962$
$1 + \cos 16\theta = 0{,}3212$	$1 + \cos 16\theta' = 1{,}45133$	$1 + \cos 16\theta'' = 1{,}68962$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) = 0{,}1606$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta') = 0{,}72566$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta'') = 0{,}84481$
$2^3 + \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 8\theta = +0{,}4007$	$2^3 + \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 8\theta' = +0{,}85186$	$2^3 - \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 8\theta'' = -0{,}91913$
$1 + \cos 8\theta = 1{,}4007$	$1 + \cos 8\theta' = 1{,}85186$	$1 + \cos 8\theta'' = 0{,}08087$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = 0{,}70035$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta') = 0{,}9259$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta'') = 0{,}04043$
$2^2 + \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 4\theta = +0{,}83687$	$2^2 + \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 4\theta' = +0{,}96224$	$2^2 + \ldots\ldots \sqrt{} = \cos 4\theta'' = +0{,}2012$
$1 + \cos 4\theta = 1{,}83687$	$1 + \cos 4\theta' = 1{,}96224$	$1 + \cos 4\theta'' = 1{,}2012$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) = 0{,}9184$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta') = 0{,}9811$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta'') = 0{,}6006$

$2^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \; V = \cos 2\theta = +0{,}95835$

$1 + \cos 2\theta = \quad 1{,}95835$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = \quad 0{,}97918$

$2^0 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots \; V = \cos \theta = \pm 0{,}9895$

$\theta(+) = \; 8^\circ 18' \qquad \theta(-) = 188^\circ 18'$

$= 351^\circ 42' \qquad = \mathit{171^\circ 42'}$

Hallado por el señor Merino $= \mathit{171^\circ 42'}$

$2^1 - \ldots\ldots\ldots\ldots \; V = \cos 2\theta' = -0{,}9905$

$1 + \cos 2\theta' = \quad 0{,}0095$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta') = \quad 0{,}00475$

$2^0 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots \; V = \cos \theta' = \pm 0{,}06892$

$\theta'(+) = \; 86^\circ \; 3' \qquad \theta'(-) = \; 93^\circ 57'$

$= \mathit{273^\circ 57'} \qquad = 266^\circ \; 3'$

273°57′ halló el señor Merino.

$2^1 - \ldots\ldots\ldots\ldots \; V = \cos 2\theta'' = -0{,}77498$

$1 + \cos 2\theta'' = \quad 0{,}22502$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta'') = \quad 0{,}1125$

$2^0 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots \; V = \cos \theta'' = \pm 0{,}3554$

$\theta''(+) = \; 70^\circ 24' \qquad \theta''(-) = 109^\circ 36'$

$= 289^\circ 36' \qquad = \mathit{250^\circ 24'}$

El señor Merino halló...... $= \mathit{250^\circ 24'}$

(Los números en cursiva son los argumentos correspondientes a una de las raíces imaginarias de cada par.)

Nota. Así como la elevación a potencias (tal como se practica en el método de Gräffe) tiende a separar, dispersar pudiera decirse, las cantidades sometidas a esa operación, la extracción de raíces, problema inverso del anterior, tiende, por el contrario, a agruparlas, acercar las unas a las otras. De aquí procede, sin duda, que los valores de los argumentos resulten aproximados a los verdaderos, mediante esta serie de operaciones, aunque el de la cantidad con que se empiece este cálculo no sea exacto.

SEGUNDO EJEMPLO NUMÉRICO

Ecuación de séptimo grado, con *una* raíz real y *seis* raíces imaginarias, tomada también del libro de D. Miguel Merino (pág. 184).

$$x^7 + 3x^4 + 6 = 0,$$

muy incompleta, pues le faltan cinco términos.

He aquí las ecuaciones transformadas:

2^n	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
2^0	+ 1	0	0	+ 3	0	0	0	+ 6
2^1	+ 1	0	0	+ 9	0	+ 36	0	+ 36
2^2	+ 1	0	0	+ 81	— 648	+ 1944	— 2592	+ 1296
2^3	+ 1	0	— 1296	+ 11745	+ 104976	+ 629856	+ 1679616	+ 1679616
		Logaritmos						
2^4	+ 1	+ 3,41364	+ 6,27636	+ 8,60926	— 9,91005	+ 10,92186	+ 11,84836	+ 12,45042
2^5	+ 1	+ 6,46828	+ 12,16012	+ 17,29346	+ 17,89851	+ 22,31679	+ 22,41671	+ 24,90084
2^6	+ 1	+ 12,75961	+ 23,97079	+ 34,58689	— 39,91125	+ 44,63668	— 47,51776	+ 49,80168
2^7	+ 1	+ 25,49393	+ 47,63345	+ 69,17378	+ 79,51832	+ 89,26074	+ 94,72953	+ 99,60336
2^8	+ 1	+ 50,98747	+ 94,96298	+ 138,34756	+ 158,73567	+ 178,52144	+ 189,15081	+ 199,20672

Este cálculo lo hizo el señor Merino con logaritmos de cinco cifras.

De la transformada final resulta:

$$
\begin{array}{ll}
\log (a)^{256} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 50{,}98747 + \\
\log 2(ar)^{256} \cos 256\theta \ldots\ldots & = 94{,}96298 + \\
\log (ar^2)^{256} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 138{,}34756 + \\
\log 2(ar^2r')^{256} \cos 256\theta' \ldots & = 158{,}73567 + \\
\log (ar^2r'^2)^{256} \ldots\ldots\ldots\ldots & = 178{,}52144 + \\
\log 2(ar^2r'^2r'')^{256} \cos 256\theta'' & = 189{,}15081 + \\
\log (ar^2r'^2r''^2)^{256} \ldots\ldots\ldots & = 199{,}20672 +
\end{array}
$$

de donde se deduce fácilmente

$$
\begin{array}{llrl}
\log a \ldots\ldots & = 0{,}19917 & a & = 1{,}58186 \\
\log \cos 256\theta \ldots & = \bar{1}{,}99448 + & 256\theta & = 9^\circ\ 7'0'' + k \\
\log r \ldots\ldots & = 0{,}17063 & r & = 1{,}48124 \\
\log \cos 256\theta' & = 0{,}00000 + & 256\theta' & = 0^\circ\ 0'0'' + k' \\
\log r' \ldots\ldots & = 0{,}07846 & r' & = 1{,}19800 \\
\log \cos 256\theta'' & = \bar{1}{,}98594 + & 256\theta'' & = 14^\circ 30'0'' + k'' \\
\log r'' \ldots\ldots & = 0{,}04040 & r'' & = 1{,}09749
\end{array}
$$

2.° Determinación de los argumentos

θ		θ'		θ''	
$256\theta = 9°7'0'' + k \cdot 360°$ $(k = 80)$		$256\theta' = 0°0'0'' + k' \cdot 360°$ $(k' = 102)$		$256\theta'' = 14°30'0'' + k'' \cdot 360°$ $(k'' = 34)$	
$2^8 + \ldots\ldots \cos 256\theta =$	$+0,9874$	$2^8 + \ldots\ldots \cos 256\theta' =$	$+1,0000$	$2^8 + \ldots\ldots \cos 256\theta'' =$	$+0,96813$
$1 + \cos 256\theta =$	$1,9874$	$1 + \cos 256\theta' =$	$2,0000$	$1 + \cos 256\theta'' =$	$1,96813$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 256\theta) =$	$0,9937$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 256\theta') =$	$1,0000$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 256\theta'') =$	$0,98406$
$2^7 + \ldots\ldots V = \cos 128\theta =$	$+0,99687$	$2^7 + \ldots\ldots V = \cos 128\theta' =$	$+1,0000$	$2^7 + \ldots\ldots V = \cos 128\theta'' =$	$+0,9920$
$1 + \cos 128\theta =$	$1,99687$	$1 + \cos 128\theta' =$	$2,0000$	$1 + \cos 128\theta'' =$	$1,9920$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 128\theta) =$	$0,99843$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 128\theta') =$	$1,0000$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 128\theta'') =$	$0,9960$
$2^6 + \ldots\ldots V = \cos 64\theta =$	$+0,99922$	$2^6 - \ldots\ldots V = \cos 64\theta' =$	$-1,0000$	$2^6 - \ldots\ldots V = \cos 64\theta'' =$	$-0,9980$
$1 + \cos 64\theta =$	$1,99922$	$1 + \cos 64\theta' =$	$0,0000$	$1 + \cos 64\theta'' =$	$0,0020$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 64\theta) =$	$0,99961$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 64\theta') =$	$0,0000$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 64\theta'') =$	$0,0010$
$2^5 + \ldots\ldots V = \cos 32\theta =$	$+0,9998$	$2^5 + \ldots\ldots V = \cos 32\theta' =$	$+0,0000$	$2^5 + \ldots\ldots V = \cos 32\theta'' =$	$+0,03162$
$1 + \cos 32\theta =$	$1,9998$	$1 + \cos 32\theta' =$	$1,0000$	$1 + \cos 32\theta'' =$	$1,03162$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) =$	$0,9999$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta') =$	$0,5000$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta'') =$	$0,5158$
$2^4 + \ldots\ldots V = \cos 16\theta =$	$+0,99995$	$2^4 - \ldots\ldots V = \cos 16\theta' =$	$-0,7071$	$2^4 + \ldots\ldots V = \cos 16\theta'' =$	$+0,7182$
$1 + \cos 16\theta =$	$1,99995$	$1 + \cos 16\theta' =$	$0,2929$	$1 + \cos 16\theta'' =$	$1,7182$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) =$	$0,99997$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta') =$	$0,14645$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta'') =$	$0,8591$

$2^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 8\theta = - \; 0{,}99999$	$2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 8\theta' = + \; 0{,}38268$	$2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 8\theta'' = + \; 0{,}92688$
$1 + \cos 8\theta = \; 0{,}00001$	$1 + \cos 8\theta' = \; 1{,}38268$	$1 + \cos 8\theta'' = \; 1{,}92688$
(*) $\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = \; 0{,}000005$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta') = \; 0{,}69134$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta'') = \; 0{,}96344$
$2^2 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 4\theta = \pm \; 0{,}00224$	$2^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 4\theta' = - \; 0{,}83147$	$2^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 4\theta'' = - \; 0{,}98155$
(**) $1 + \cos 4\theta = \; 1{,}00224$	$1 + \cos 4\theta' = \; 0{,}16853$	$1 + \cos 4\theta'' = \; 0{,}01845$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) = \; 0{,}50112$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta') = \; 0{,}08476$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta'') = \; 0{,}00922$
$2^1 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 2\theta = \pm \; 0{,}70789$	$2^1 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 2\theta' = \pm \; 0{,}29113$	$2^1 \pm \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 2\theta'' = \pm \; 0{,}0960$
$1 + \cos 2\theta = + 1{,}70789 + 0{,}29211$	$1 + \cos 2\theta' = + 1{,}29113 + 0{,}70887$	$1 + \cos 2\theta'' = + 1{,}0960 \; + 0{,}9040$
$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = \; 0{,}85394 \quad 0{,}14605$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta') = \; 0{,}64556 \quad 0{,}35443$	$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta'') = \; 0{,}5480 \quad 0{,}4520$
$2^0 \pm \ldots\ldots V = \cos \theta = \; 0{,}92403 \quad 0{,}38216$	$2^0 \pm \ldots\; 1 = \cos \theta' = \; 0{,}80317 \quad 0{,}59537$	$2^0 \pm \ldots\; 1 = \cos 2\theta'' = \; 0{,}7403 \quad 0{,}6723$
$\theta(+) = 22^\circ 28' \quad \theta(+) = 67^\circ 32'$	$\theta'(+) = 36^\circ 32' \quad \theta'(+) = 53^\circ 28'$	$\theta''(+) = 42^\circ 15' \quad \theta''(+) = 47^\circ 45'$
$\theta(-) = 157^\circ 32' \quad \theta(-) = 112^\circ 28'$	$\theta'(-) = 143^\circ 28' \quad \theta'(-) = 126^\circ 32'$	$\theta''(-) = 137^\circ 45' \quad \theta''(-) = 132^\circ 15'$
El señor Merino halló....... = *112°32'*	*143°26'* halló el señor Merino.	El señor Merino halló...... = *47°52'*

(*) Cuando las cantidades, como en este caso, son muy pequeñas, conviene extraer las raíces por medio de los logaritmos.

(**) Dada la pequeñez de $\cos 4\theta$, es casi indiferente tomarlo como positivo o negativo. Con el signo — habría sido $1 + \cos 4\theta = 0{,}99776$ y $\theta = 67^\circ 28'$ ó $112^\circ 32'$, de acuerdo con el señor Merino.

TERCER EJEMPLO NUMÉRICO

Del *Resumen de las Lecciones de Análisis matemático,* curso de 1915-16, de D. Julio Rey Pastor, página 388. La ecuación siguiente tiene dos pares de raíces imaginarias:

$$x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 5x + 100 = 0.$$

	2^n	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	2^0	$+1$	$+8$	$+13$	$+5$	$+10^2$
	2^1	$+1$	$+38$	$+289$	-2575	$+19^4$
(Logaritmos.)	2^2	$+1$	$+2{,}9375179$	$+5{,}4759920$	$+5{,}9297382$	$+10^8$
	2^3	$+1$	$+5{,}1804533$	$+10{,}9457635$	$-13{,}7717388$	$+10^{16}$
	2^4	$+1$	$-11{,}1862877$	$+21{,}8925258$	$+27{,}2380574$	$+10^{32}$
	2^5	$+1$	$+21{,}9012523$	$+43{,}7850555$	$+54{,}1557932$	$+10^{64}$

De aquí resulta

$$\begin{aligned}
\log 2r^{32} \cos 32\theta \ldots\ldots &= 21{,}9012523 \\
\log (r^2)^{32} \ldots\ldots\ldots &= 43{,}7850555 + \\
\log 2(r^2 r')^{32} \cos 32\theta' &= 54{,}1557932 + \\
\log (r^2 r'^2)^{32} \ldots\ldots\ldots &= 64{,}0000000 +
\end{aligned}$$

de donde se deduce, sucesivamente,

$$\begin{aligned}
r &= 4{,}832162 \\
32\theta &= 59^\circ 19' 35'' + k \, . \, 360^\circ \\
&\qquad\qquad\quad k = 15 \\
r' &= 2{,}069467 \\
32\theta' &= 23^\circ 32' 57'' + k' \, . \, 360^\circ \\
&\qquad\qquad\quad k' = 6
\end{aligned}$$

y con estos valores de 32θ y $32\theta'$ se puede hallar, por nuestro método, θ y θ'.

3.° Determinación de los argumentos

θ

$\log \cos 32\theta = 9{,}7076945 +$

$$2^5 \; + \ldots\ldots\ldots \quad \cos 32\theta = +\,0{,}51015$$
$$1 + \cos 32\theta = 1{,}51015$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) = 0{,}75507$$

$$2^4 \; - \ldots\ldots \quad V = \cos 16\theta = -\,0{,}86895$$
$$1 + \cos 16\theta = 0{,}13105$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) = 0{,}065525$$

$$2^3 \; + \ldots\ldots \quad V = \cos 8\theta = +\,0{,}2560$$
$$1 + \cos 8\theta = 1{,}2560$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = 0{,}6280$$

$$2^2 \; + \ldots\ldots \quad V = \cos 4\theta = +\,0{,}79246$$
$$1 + \cos 4\theta = 1{,}79246$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) = 0{,}89623$$

$$2^1 \; + \ldots\ldots \quad V = \cos 2\theta = +\,0{,}94675$$
$$1 + \cos 2\theta = 1{,}94675$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = 0{,}97337$$

$$2^0 \; \pm \ldots\ldots \quad V = \cos \theta = \pm\,0{,}9866$$

$\theta\,(+) = 9^\circ 24'$ $\qquad \theta\,(-) = 189^\circ 24'$

$= 350^\circ 36'$ $\qquad = \mathit{170^\circ 36'}$

El señor Rey Pastor halló $= \mathit{170^\circ 36'}$

θ'

$\log \cos 32\theta' = 9{,}9622355 +$

$$2^5 \; + \ldots\ldots\ldots \quad \cos 32\theta' = +\,0{,}9167$$
$$1 + \cos 32\theta' = 1{,}9167$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta') = 0{,}95835$$

$$2^4 \; + \ldots\ldots \quad V = \cos 16\theta' = +\,0{,}9789$$
$$1 + \cos 16\theta' = 1{,}9789$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta') = 0{,}98945$$

$$2^3 \; - \ldots\ldots \quad V = \cos 8\theta' = -\,0{,}9947$$
$$1 + \cos 8\theta' = 0{,}0053$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta') = 0{,}00265$$

$$2^2 \; + \ldots\ldots \quad V = \cos 4\theta' = +\,0{,}05148$$
$$1 + \cos 4\theta' = 1{,}05148$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta') = 0{,}52574$$

$$2^1 \; - \ldots\ldots \quad V = \cos 2\theta' = -\,0{,}72508$$
$$1 + \cos 2\theta' = 0{,}27492$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta') = 0{,}13746$$

$$2^0 \; \pm \ldots\ldots \quad V = \cos \theta' = \pm\,0{,}37075$$

$\theta'\,(+) = \mathit{68^\circ 14'}$ $\qquad \theta'\,(-) = 248^\circ 14'$

$= 291^\circ 46'$ $\qquad = 111^\circ 46'$

$\mathit{68^\circ 14'}$ halló el Sr. R. Pastor.

CUARTO EJEMPLO NUMÉRICO

Del libro *Elementary Theory of Equations,* de Mr. Dickson, primera edición, 1914, página 121.

$$x^4 + 12x + 7 = 0,$$

ecuación incompleta, con dos raíces reales y dos imaginarias. Concretándonos a éstas, será:

	2^n	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	2^0	$+1$	0	0	$+\ 12$	$+\ 7$
	2^1	$+1$	0	$+\ 14$	$+\ 144$	$+\ 49$
	2^2	$+1$	$-\ 28$	$+\ 294$	$+\ 19364$	$+\ 2401$
Logaritmos.	2^3	$+1$	$+\ 2,2922561$	$+\ 6,0695201$	$+\ 8,5723487$	$+\ 6,7607822$
	2^4	$+1$	$-\ 6,3633863$	$+\ 12,0902228$	$+\ 17,1446676$	$+\ 13,5215644$
	2^5	$+1$	$+\ 12,4577003$	$+\ 24,3343331$	$+\ 34,2893436$	$+\ 27,0431288$
	2^6	$+1$	$+\ 24,5923100$	$+\ 48,6581355$	$+\ 68,5786850$	$+\ 54,0862577$
	2^7	$+1$	$+\ 48,7920343$	$+\ 97,3162011$	$+\ 137,1573661$	$+\ 108,1725154$
Esta última transformada dará..............			$\log 2r^{128} \cos 128\theta$	$\log (r^2)^{128}$	$\log (ar^2)^{128}$	$\log (abr^2)^{128}$

Donde a y b son las raíces reales. De aquí se deduce:

$$\log \cos 128\theta = 9,83290 +, \qquad 128\theta = 47^\circ 6' 30'' + k(=20),$$

$$\cos 128\theta = +\ 0,68061, \qquad \log r = 0,38014, \qquad r = 2,39961,$$

$$\theta = 56^\circ 37' 5'' \text{ (por el método directo).}$$

4.° Determinación del argumento θ

$2^7\ + \ldots\ldots\ldots\ \cos 128\theta = +\ 0{,}6806$

$1 + \cos 128\theta = \quad 1{,}6806$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 128\theta) = \quad 0{,}8403$

$2^6\ + \ldots\ldots\ \sqrt{\ } = \cos 64\theta = +\ 0{,}91668$

$1 + \cos 64\theta = \quad 1{,}91668$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 64\theta) = \quad 0{,}95834$

$2^5\ + \ldots\ldots\ \sqrt{\ } = \cos 32\theta = +\ 0{,}97895$

$1 + \cos 32\theta = \quad 1{,}97895$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) = \quad 0{,}98947$

$2^4\ - \ldots\ldots\ \sqrt{\ } = \cos 16\theta = -\ 0{,}99472$

$1 + \cos 16\theta = \quad 0{,}00528$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) = \quad 0{,}00264$

$2^3\ + \ldots\ldots\ \sqrt{\ } = \cos 8\theta = +\ 0{,}05138$

$1 + \cos 8\theta = \quad 1{,}05138$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = \quad 0{,}52569$

$2^2\ - \ldots\ldots\ \sqrt{\ } = \cos 4\theta = -\ 0{,}72505$

$1 + \cos 4\theta = \quad 0{,}27495$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) = \quad 0{,}13748$

$2^1\ \pm \ldots\ldots\ \sqrt{\ } = \cos 2\theta = \pm\ 0{,}3708$

$2^1\ \pm \ldots\ldots\ \sqrt{\ } = \cos 2\theta = \pm\ 0{,}3708$

$1 + \cos 2\theta = 1{,}3708 \qquad 0{,}6292$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta = 0{,}6854 \qquad 0{,}3146$

$2^0 \pm \sqrt{\ } = \cos\theta = \pm\ 0{,}8279 \qquad \pm\ 0.5609$

$\theta(-) = 145°53' \qquad \theta(-) = 124°\ 7'$

$\theta(+) = \ 34°\ 7' \qquad \theta(+) = \mathit{55°53'}$

Valor exacto de $\theta = \mathit{56°37'}$

Aquí, por faltar el coeficiente de x^3 en la ecuación propuesta y en la primera transformada, el resultado no es exacto, pero sí bastante aproximado para rastrear el verdadero por medio de las tablas auxiliares. Buscando en la cuarta, con el dato $\theta = 55°$, el valor de 128θ, se halla para $\theta = 55°$, $128\theta = 19^c + 200°$ y para $\theta = 56°$, $128\theta = 19^c + 328°$, números que no comprenden el valor $128\theta = 47°6'$; pero para $\theta = 57°$, $128\theta = 20^c + 96°$, luego el valor que buscamos es $\theta = \mathit{56°} + x'$, y por una proporción se halla $x' = \mathit{37'5''}$.

QUINTO EJEMPLO NUMÉRICO

Tomado de la misma obra de Mr. Dickson (pág. 107). Ecuación completa de quinto grado

$$x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

con tres raíces reales y un par de imaginarias. Las reales están designadas por a, b, c.

	2^n	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	2^0	$+1$	-5	-16	$+12$	-9	-5
	2^1	$+1$	$+57$	$+358$	-94	$+201$	$+25$
Logarit.	2^2	$+1$	$+3{,}40364$	$+5{,}14390$	$-5{,}12133$	$+4{,}65419$	$+2{,}79588$
	2^3	$+1$	$+6{,}78799$	$+10{,}30254$	$+9{,}69235$	$+9{,}34230$	$+5{,}59176$
	2^4	$+1$	$+13{,}57552$	$+20{,}60501$	$-19{,}80639$	$+18{,}68426$	$+11{,}18352$
	2^5	$+1$	$+27{,}15105$	$+41{,}21001$	$+38{,}31581$	$+37{,}38552$	$+22{,}36704$
Última transformada.			$\log a^{32}$	$\log (ab)^{32}$	$\log 2(abr)^{32}\cos 32\theta$	$\log (abr^2)^{32}$	$\log (abr^2c)^{32}$

De los números de la última transformada se deduce (prescindiendo de las raíces reales):

$$\log \cos 32\theta = 8{,}72552 + \qquad \cos 32\theta = +\,0{,}053152$$
$$32\theta = 273^\circ 2' 49'' + k \,.\, 360 \qquad (k = 4) \qquad r = 0{,}87092$$

Por el cálculo directo . . . . $\theta = 53^\circ 31' 58''$.

El valor conjugado de θ es: $\theta = 306^\circ 28' \; 2'' = 360^\circ - 53^\circ 31' 58''$, correspondiente a $32\theta = 86^\circ 57' 11'' + 27 \times 360^\circ$.

DETERMINACIÓN DEL ARGUMENTO θ

$2^5 +$ . . . . $\cos 32\theta = +\,0{,}05315$

$1 + \cos 32\theta = 1{,}05315$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) = 0{,}5266$

$2^4 -$ . . . . $V = \cos 16\theta = -\,0{,}7257$

$1 + \cos 16\theta = 0{,}2743$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) = 0{,}13715$

$2^3 +$ . . . . $V = \cos 8\theta = +\,0{,}3703$

$1 + \cos 8\theta = 1{,}3703$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = 0{,}68515$

$2^2 -$ . . . . $V = \cos 4\theta = -\,0{,}8277$

$1 + \cos 4\theta = 0{,}1723$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) = 0{,}08615$

$2^1 -$ . . . . $V = \cos 2\theta = -\,0{,}2935$

$1 + \cos 2\theta = 0{,}7065$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = 0{,}35325$

$2^0 +$ . . . . $V = \cos \theta = +\,0{,}59435$

$\theta = 53^\circ 32'$ ó $306^\circ 28'$

Se halló por el cálculo directo $\theta = 53^\circ 32'$ ó $306^\circ 28'$

SEXTO EJEMPLO NUMÉRICO

Ecuación de cuarto grado, incompleta, con dos raíces reales y dos imaginarias

$$x^4 + 3x^2 - 4x + 1 = 0,$$

procedente de un trabajo particular del autor. Las transformadas son:

	2^n	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	2^0	$+1$	0	$+3$	-4	$+1$
	2^1	$+1$	-6	$+11$	$+10$	$+1$
	2^2	$+1$	$+14$	$+243$	$+78$	$+1$
Logaritmos.	2^3	$+1$	$-2{,}46240$	$+4{,}75486$	$+3{,}74803$	$+1$
	2^4	$+1$	$-4{,}47179$	$+9{,}51015$	$+7{,}49449$	$+1$
	2^5	$+1$	$-9{,}74788$	$+19{,}02032$	$+14{,}98897$	$+1$
En la última transformada se tendrá....			$\log 2r^{32} \cos 32\theta$	$\log (r^2)^{32}$	$\log (ar^2)^{32}$	$\log (ar^2b)^{32}$

De los números de la última transformada se deduce para el par imaginario:

$$\log \cos 32\theta = 9{,}93669 - \qquad \cos 32\theta = -0{,}86436$$

$$32\theta = 149^\circ 48' 30'' + k \,.\, 360^\circ \quad (k = 9), \quad \text{y además } r = 1{,}98240$$

y por el cálculo directo:

$$\theta = 105^\circ 55' 53'' \qquad \log \cos \theta = 9{,}43852$$

Determinación del argumento θ

2^5 — .... $\cos 32\theta = -\ 0{,}86436$

$1 + \cos 32\theta = \ 0{,}13564$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) = \ 0{,}0678$

2^4 — .... $\sqrt{\ } = \cos 16\theta = -\ 0{,}2604$

$1 + \cos 16\theta = \ 0{,}7396$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) = \ 0{,}3698$

2^3 — .... $\sqrt{\ } = \cos 8\theta = -\ 0{,}6081$

$1 + \cos 8\theta = \ 0{,}3919$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = \ 0{,}19595$

2^2 + ... $\sqrt{\ } = \cos 4\theta = +\ 0{,}4427$

$1 + \cos 4\theta = \ 1{,}4427$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) = \ 0{,}72135$

2^1 — .... $\sqrt{\ } = \cos 2\theta = -\ 0{,}8493$

$1 + \cos 2\theta = \ 0{,}1507$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = \ 0{,}07535$

2^0 ± .... $\sqrt{\ } = \cos \theta = \pm\ 0{,}2745$

$\theta(+) = 74^\circ 4' \qquad \theta(-) = \mathit{105^\circ 56'}$

El cálculo directo dió.................... *105°56'*

SÉPTIMO EJEMPLO NUMÉRICO

Ecuación del astrónomo noruego J. J. Åstrand, ya citado antes,

$$x^4 - 5x - 10 = 0,$$

con dos raíces reales y dos imaginarias. Sus transformadas son:

	2^n	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
En logaritmos.	2^0	$+1$	0	0	$-\ 0{,}69897$	$-\ 10^1$
	2^1	$+1$	0	$-\ 1{,}30103$	$+\ 1{,}39794$	$+\ 10^2$
	2^2	$+1$	$+\ 1{,}60206$	$+\ 2{,}77815$	$+\ 3{,}66511$	$+\ 10^4$
	2^3	$+1$	$+\ 2{,}60206$	$+\ \mathit{4{,}00000}$	$+\ 6{,}97271$	$+\ 10^8$
	2^4	$+1$	$+\ 5{,}14613$	$-\ 9{,}85810$	$+\ 13{,}93546$	$+\ 10^{16}$
	2^5	$+1$	$+10{,}53181$	$+\ 19{,}44578$	$+\ 27{,}88270$	$+\ 10^{32}$
	2^6	$+1$	$+21{,}04218$	$+\ 38{,}41425$	$+\ 55{,}76536$	$+\ 10^{64}$
	2^7	$+1$	$+42{,}08418$	$-\ 76{,}78547$	$+111{,}53071$	$+\ 10^{128}$
En esta última transformada se tendrá......			$\log a^{128}$	$\log 2(ar)^{128}\cos 128\theta$	$\log (ar^2)^{128}$	$\log (ar^2b)^{128}$

De los números de la última transformada se deduce, ciñéndonos a par imaginario,

$$\log \cos 128\theta = 9{,}67700 - \qquad \cos 128\theta = -\ 0{,}47533$$

$$128\theta = 180^\circ \pm 61^\circ 37' 8'' + k\,.\,360^\circ \qquad r = 1{,}86756$$

Tomaremos

$128\theta = \mathit{118^\circ 22' 52''}$, $\cos\theta = -\ 0{,}21090$, $\theta = 180^\circ \pm 77^\circ 49' 30''$; tomemos $\theta = \mathit{102^\circ 10' 30''}$.

7.º Determinación del argumento θ

2^7 —......... $\cos 128\theta = -0{,}47533$

$1 + \cos 128\theta = 0{,}52467$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 128\theta) = 0{,}26233$

2^6 +...... $\sqrt{\ } = \cos 64\theta = +0{,}5122$

$1 + \cos 64\theta = 1{,}5122$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 64\theta) = 0{,}7561$

2^5 +...... $\sqrt{\ } = \cos 32\theta = +0{,}86954$

$1 + \cos 32\theta = 1{,}86954$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) = 0{,}9348$

2^4 —...... $\sqrt{\ } = \cos 16\theta = -0{,}96685$

$1 + \cos 16\theta = 0{,}03315$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) = 0{,}016575$

2^3 +....... $\sqrt{\ } = \cos 8\theta = +0{,}12874$

$1 + \cos 8\theta = 1{,}12874$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = 0{,}56437$

2^2 +....... $\sqrt{\ } = \cos 4\theta = +0{,}75125$

$1 + \cos 4\theta = 1{,}75125$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) = 0{,}8756$

2^1 —....... $\sqrt{\ } = \cos 2\theta = -0{,}93574$

2^1 —........ $\sqrt{\ } = \cos 2\theta = -0{,}93574$

$1 + \cos 2\theta = 0{,}06426$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = 0{,}03213$

2^0 ±........ $\sqrt{\ } = \cos \theta = \pm 0{,}17925$

$\theta(+) = 280°19',5 \qquad \theta(-) = \mathit{100°19',5}$

$= 79°40',5 \qquad = 259°40',5$

El cálculo directo dió... $\theta = \mathit{102°10',5}$

Aquí el error asciende a 1°51′, el cual procede del signo del coeficiente de x^2 para 2^3, que es *positivo*. Si fuera *negativo* tendríamos:

2^3 —........ $\sqrt{\ } = \cos 8\theta = -0{,}12874$

$1 + \cos 8\theta = 0{,}87126$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = 0{,}43563$

2^2 +........ $\sqrt{\ } = \cos 4\theta = +0{,}6600$

$1 + \cos 4\theta = 1{,}6600$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 3\theta) = 0{,}8300$

2^1 —........ $\sqrt{\ } = \cos 2\theta = -0{,}91104$

$1 + \cos 2\theta = 0{,}08896$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = 0{,}04448$

2^0 ±........ $\sqrt{\ } = \cos \theta = \pm 0{,}2109$

$\theta(+) = 77°49',5 \qquad \theta(-) = \mathit{102°10',5}$

(Exacto.)

(En el texto de este trabajo se discute la anomalía.)

OCTAVO EJEMPLO NUMÉRICO

Ecuación de séptimo grado propuesta por Fourier, con tres raíces reales y cuatro raíces imaginarias, resuelta por M. E. Carvallo. (Repetición del cálculo de este señor.) (*)

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

He aquí nuestras ecuaciones transformadas:

2^n	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
2^0	+ 1	0	− 2	0	− 3	+ 4	− 5	+ 6
2^1	+ 1	+ 4	− 2	− 2	+ 29	− 14	− 23	+ 36
		Logaritmos						
2^2	+ 1	+ 1,30103	+ 1,89209	+ 1,73239	+ 2,77012	+ 3,14176	+ 3,18667	+ 3,11261
2^3	+ 1	+ 2,38739	+ 3 70773	− 4,56351	+ 5.58565	+ 5,39850	− 6,08998	+ 6,22522
2^4	+ 1	+ 4,69313	+ 7,64993	− 9,39196	+ 11,18556	+ 11,94811	+ 11,82770	+ 12,45044
2^5	+ 1	+ 9,37002	+ 15,34990	− 18,87656	+ 22,44621	+ 23,75384	− 24,65847	+ 24,90088
2^6	+ 1	+ 18,73969	+ 30,70285	− 37,83521	+ 44,89713	+ 47,76062	+ 49,06874	+ 49,80176
2^7	+ 1	+ 37,47938	+ 61,40571	− 75,51586	+ 89,79431	+ 95,49636	+ 97,80771	+ 99,60352

(*) Esta ecuación fué primeramente resuelta por Encke, y se halla en el capítulo VII de la Memoria del Sr. Merino; pero por haber hallado varias erratas en el folleto del Sr. Carvallo creímos conveniente repetir el cálculo.

Con los números de la transformada final se obtendrá:

$$
\begin{aligned}
&\log a^{128} \ldots\ldots\ldots\ldots = 37{,}47938 + \\
&\log (ab)^{128} \ldots\ldots\ldots\ldots = 61{,}40571 + \\
&\log 2(abr)^{128} \cos 128\theta \ldots = 75{,}51586 - \\
&\log (abr^2)^{128} \ldots\ldots\ldots = 89{,}79431 + \\
&\log (abr^2c)^{128} \ldots\ldots\ldots = 95{,}49636 + \\
&\log 2(abr^2cr')^{128} \cos 128\theta' = 97{,}80771 + \\
&\log (abr^2cr'^2)^{128} \ldots\ldots = 99{,}60352 +
\end{aligned}
$$

de donde se deduce fácilmente

$$
\begin{array}{ll}
\log a \ldots\ldots = 0{,}29281 & a = 1{,}96246 \\
\log b \ldots\ldots = 0{,}18692 & b = 1{,}53789 \\
\log \cos 128\theta = \bar{1}{,}61482 - & 128\theta = k \,.\, 360^\circ + 245^\circ 40' 26'' \\
\log r \ldots\ldots = 0{,}11089 & r = 1{,}29088 \\
\log c \ldots\ldots = 0{,}04455 & c = 1{,}10802 \\
\log \cos 128\theta' = \bar{1}{,}95674 + & 128\theta' = k' \,.\, 360^\circ + 334^\circ 50' 40'' \\
\log r' \ldots\ldots = 0{,}01604 & r' = 1{,}03762
\end{array}
$$

Las transformadas, especialmente las últimas, ofrecen pequeñísimas discrepancias en sus valores, comparadas con las obtenidas por don Miguel Merino, que empleó en su cálculo, como nosotros, logaritmos de cinco cifras decimales; sin embargo, los valores de las incógnitas, arriba consignadas, concuerdan unas con otras casi exactamente en ambos casos. El señor Carvallo, con el fin de hacer resaltar la sencillez y eficacia del método de Gräffe, se limitó a efectuar las operaciones con tres o cuatro cifras, valiéndose de la regla de cálculo.

8.° Determinación de los argumentos

θ

$$128\theta = 245^\circ 40' 26'' + k \,.\, 360^\circ \qquad (k = 42)$$

$$2^7 - \ldots\ldots\ldots\ldots \cos 128\theta = -\,0{,}41193$$
$$1 + \cos 128\theta = 0{,}58807$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 128\theta) = 0{,}29403$$

$$2^6 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 64\theta = -\,0{,}54224$$
$$1 + \cos 64\theta = 0{,}45776$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 64\theta) = 0{,}22888$$

$$2^5 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 32\theta = -\,0{,}47841$$
$$1 + \cos 32\theta = 0{,}52159$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta) = 0{,}2608$$

$$2^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 16\theta = -\,0{,}51068$$
$$1 + \cos 16\theta = 0{,}48932$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta) = 0{,}24466$$

$$2^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 8\theta = -\,0{,}49463$$
$$1 + \cos 8\theta = 0{,}50537$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta) = 0{,}25268$$

θ'

$$128\theta' = 334^\circ 50' 40'' + k' \,.\, 360^\circ \qquad (k = 25)$$

$$2^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots \cos 128\theta' = +\,0{,}90515$$
$$1 + \cos 128\theta' = 1{,}90515$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 128\theta') = 0{,}95258$$

$$2^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 64\theta' = +\,0{,}9760$$
$$1 + \cos 64\theta' = 1{,}9760$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 64\theta') = 0{,}9880$$

$$2^5 \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 32\theta' = -\,0{,}99398$$
$$1 + \cos 32\theta' = 0{,}00602$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 32\theta') = 0{,}00301$$

$$2^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 16\theta' = +\,0{,}05486$$
$$1 + \cos 16\theta' = 1{,}05486$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 16\theta') = 0{,}52743$$

$$2^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots V = \cos 8\theta' = -\,0{,}72624$$
$$1 + \cos 8\theta' = 0{,}27376$$
$$\frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta') = 0{,}13688$$

$2^2 + (?)$ (*)	$V = \cos 4\theta =$	$+ 0{,}50267$	$- 0{,}50267$
	$1 + \cos 4\theta =$	$1{,}50267$	$0{,}49733$
	$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) =$	$0{,}75133$	$0{,}24866$
$2^1 -$	$V = \cos 2\theta =$	$- 0{,}8668$	$- 0{,}49866$
	$1 + \cos 2\theta =$	$0{,}1332$	$0{,}50134$
	$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) =$	$0{,}0666$	$0{,}25067$
$2^0 \pm$	$V = \cos \theta =$	$\pm 0{,}25806$	$\pm 0{,}50067$
	$\theta(+) = 75^\circ\ 4'$		$\theta(+) = 59^\circ 59'$
	$\theta(-) = 104^\circ 56'$		$\theta(-) = 120^\circ\ 1'$

El verdadero valor de θ es .... $= 120^\circ\ 2'39''$

$2^2 +$	$1 = \cos 4\theta' =$	$+ 0{,}3700$	
	$1 + \cos 4\theta' =$	$1{,}3700$	
	$\frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta') =$	$0{,}6850$	
$2^1 \pm$ (**)	$1 = \cos 2\theta' =$	$+ 0{,}82765$	$- 0{,}82765$
	$1 + \cos 2\theta' =$	$1{,}82765$	$0{,}17235$
	$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta') =$	$0{,}91382$	$0{,}08617$
$2^0 \pm$	$V = \cos \theta' =$	$\pm 0{,}95594$	$\pm 0{,}29355$
	$\theta'(+) = 17^\circ\ 4'$		$\theta'(+) = 72^\circ 56'$
	$\theta'(-) = 162^\circ 56'$		$\theta'(-) = 107^\circ\ 4'$

El verdadero valor de θ' es .... $= 72^\circ 55'42''$

(*) El signo + de la transformada 2^2 pareció sospechoso por estar en oposición con los de las demás transformadas, y, en efecto, resultó comprobado después que era —. En el texto se explica de dónde procede esta discrepancia.

(**) A pesar de estar explícito el signo — en la transformada 2^1 del segundo par imaginario, por la pequeñez del coeficiente respectivo pareció oportuno ensayar el cálculo con los dos signos.

SERIE B

Comparación de los signos de las transformadas en los ejemplos numéricos precedentes, con los signos de los cosenos de $n\theta$ en la escala descendente.

(c = signo del coseno; t = signo de la transformada.)

1.° Ecuación de Le Verrier (Merino)

k	τ	c	t	k'	τ'	c'	t'	k''	τ''	c''	t''
$32\theta=15+$	94°29′42″	—	—	$32\theta'=24+$	126°20′33″	—	—	$32\theta''=22+$	92°47′56″	—	—
$16\theta=7+$	327 14 51	—	—	$16\theta'=12+$	63 10 16	+	+	$16\theta''=11+$	46 23 58	+	+
$8\theta=3+$	293 37 25	+	—	$8\theta'=6+$	31 35 8	+	+	$8\theta''=5+$	203 11 59	—	—
$4\theta=1+$	326 48 43	+	+	$4\theta'=3+$	15 47 34	+	+	$4\theta''=2+$	281 36 0	+	+
$2\theta=0+$	343 24 21	+	+	$2\theta'=1+$	187 53 47	—	—	$2\theta''=1+$	140 48 0	—	—
$\theta=0+$	171 42 11	—	+	$\theta'=0+$	273 56 54	+	+	$\theta''=0+$	250 24 0	+	+

2.° Ecuación de Encke (Merino)

$$x^7 + 3x^4 + 6 = 0$$

$256\theta=80+$	9° 7′ 0″	+	+	$256\theta'=102+$	0° 0′ 0″	+	+	$256\theta''=34+$	14°30′ 0″	+	+
$128\theta=40+$	4 33 30	+	+	$128\theta'=51+$	0 0 0	+	+	$128\theta''=17+$	7 15 0	+	+
$64\theta=20+$	2 16 45	+	+	$64\theta'=25+$	180 0 0	—	—	$64\theta''=8+$	183 37 30	—	—
$32\theta=10+$	1 8 22	+	+	$32\theta'=12+$	270 0 0	±	+	$32\theta''=4+$	91 48 45	—	+
$16\theta=5+$	0 34 11	+	+	$16\theta'=6+$	135 0 0	—	—	$16\theta''=2+$	45 54 22	+	+
$8\theta=2+$	180 17 6	—	—	$8\theta'=3+$	67 30 0	+	+	$8\theta''=1+$	22 57 11	+	+
$4\theta=1+$	90 8 33	—	?	$4\theta'=1+$	213 45 0	—	—	$4\theta''=0+$	191 28 36	—	—
$2\theta=0+$	225 4 16	—	?	$2\theta'=0+$	286 52 30	+	?	$2\theta''=0+$	95 44 18	—	?
$\theta=0+$	112 32 8	—	?	$\theta'=0+$	143 26 15	—	?	$\theta''=0+$	47 52 9	+	?

3.° Ecuación de Rey Pastor

$$x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 5x + 100 = 0$$

5.° Ecuación de Dickson

$$x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0$$

$32\theta=15+$	59°19′35″	+	+	$32\theta'=6+$	23°32′57″	+	+	$32\theta=4+$	273° 2′49″	+	+
$16\theta=7+$	209 39 48	—	—	$16\theta'=3+$	11 46 28	+	+	$16\theta=2+$	136 31 25	—	—
$8\theta=3+$	284 49 54	+	+	$8\theta'=1+$	185 53 14	—	—	$8\theta=1+$	68 15 42	+	+
$4\theta=1+$	322 24 57	+	+	$4\theta'=0+$	272 56 37	+	+	$4\theta=0+$	214 7 51	—	—
$2\theta=0+$	341 12 28	+	+	$2\theta'=0+$	136 28 18	—	—	$2\theta=0+$	107 3 56	—	—
$\theta=0+$	170 36 14	—	+	$\theta'=0+$	68 14 9	+	+	$\theta=0+$	53 31 58	+	+

3.° Ecuación de Fourier

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$$

k	τ	c	t	k'	τ'	c'	t'
$128\theta = 42$	$+\ 245^{\circ}40'26''$	—	—	$128\theta' = 25$	$+\ 334^{\circ}50'40''$	—	+
$64\theta = 21$	$+\ 122\ 50\ 13$	—	—	$64\theta' = 12$	$+\ 347\ 25\ 20$	+	+
$32\theta = 10$	$+\ 241\ 25\ \ 6$	—	—	$32\theta' = 6$	$+\ 173\ 42\ 40$	—	—
$16\theta = 5$	$+\ 120\ 42\ 33$	—		$16\theta' = 3$	$+\ 86\ 51\ 20$	+	+
$8\theta = 2$	$+\ 240\ 21\ 17$	—	—	$8\theta' = 1$	$+\ 223\ 25\ 40$	—	
$4\theta = 1$	$+\ 120\ 10\ 38$		+	$4\theta' = 0$	$+\ 291\ 42\ 50$	+	+
$2\theta = 0$	$+\ 240\ \ 5\ 19$	—	—	$2\theta' = 0$	$+\ 145\ 51\ 25$	—	
$\theta = 0$	$+\ 120\ \ 2\ 40$	—	?	$\theta' = 0$	$+\ 72\ 55\ 42$	+	—

4.° Ecuación de Dickson

$$x^4 + 12x + 7 = 0$$

k	τ	c	t
$128\theta = 20$	$+\ 47^{\circ}\ 6'30''$	+	
$64\theta = 10$	$+\ 23\ 33\ 15$		
$32\theta = 5$	$+\ 11\ 46\ 38$		+
$16\theta = 2$	$+\ 185\ 53\ 19$	—	
$8\theta = 1$	$+\ 92\ 56\ 40$		+
$4\theta = 0$	$+\ 226\ 28\ 20$		—
$2\theta = 0$	$+\ 113\ 14\ 10$	—	?
$\theta = 0$	$+\ 56\ 37\ \ 5$	+	?

7.° Ecuación de Åstrand

$$x^4 - 5x - 10 = 0$$

k	τ	c	t
$128\theta = 36$	$+\ 118^{\circ}22'52''$	—	
$64\theta = 18$	$+\ 59\ 11\ 26$	—	
$32\theta = 9$	$+\ 29\ 35\ 43$	—	+
$16\theta = 4$	$+\ 194\ 47\ 52$	—	
$8\theta = 2$	$+\ 97\ 23\ 56$	—	+
$4\theta = 1$	$+\ 48\ 41\ 58$	+	
$2\theta = 0$	$+\ 204\ 20\ 59$	—	
$\theta = 0$	$+\ 102\ 10\ 30$	—	?

6.° Ecuación de un problema particular del autor

$$x^4 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

k	τ	c	t
$32\theta = 9$	$+\ 149^{\circ}48'30''$		
$16\theta = 4$	$+\ 254\ 54\ 15$		
$8\theta = 2$	$+\ 127\ 27\ \ 8$	—	—
$4\theta = 1$	$+\ 63\ 43\ 34$	+	+
$2\theta = 0$	$+\ 211\ 51\ 47$	—	—
$\theta = 0$	$+\ 105\ 55\ 53$	—	?

Representación de los “módulos„ y “argumentos„ en los ejemplos calculados, suponiendo “inexactamente„ que en todas las ecuaciones transformadas está realizada la separación de las raíces. Discrepancias sucesivas en la escala descendente de los módulos y argumentos imaginarios. Complemento del cuadro anterior.

1.° Ecuación de Le Verrier

PRIMER PAR IMAGINARIO			SEGUNDO PAR			TERCER PAR		
$n\theta$	$\Delta\tau$	r	$n\theta'$	$\Delta\tau'$	r'	$n\theta''$	$\Delta\tau''$	r''
32θ	0° 0′	2,02624	$32\theta'$	0° 0′	1,13866	$32\theta''$	0° 0′	0,55255
16θ	0 0	2,02625	$16\theta'$	+ 0 1	1,13866	$16\theta''$	0 0	0,55255
8θ	+ 0 22	2,02795	$8\theta'$	+ 0 3	1,13700	$8\theta''$	— 0 16	0,55288
4θ	— 0 54	2,10081	$4\theta'$	+ 10 37	1,10505	$4\theta''$	26 14	0,54914

2.° Ecuación de Encke

PRIMER PAR			SEGUNDO PAR			TERCER PAR		
$n\theta$	$\Delta\tau$	r	$n\theta'$	$\Delta\tau'$	r'	$n\theta''$	$\Delta\tau''$	r''
256θ	+ 0° 2′	1,48124	$256\theta'$	0° 0′	1,19823	$256\theta''$	+ 0° 7′	1,09749
128θ	+ 0 6	1,48124	$128\theta'$	0 0	1,19823	$128\theta''$	+ 0 4	1,09749
64θ	+ 4 58	1,48087	$64\theta'$	+ 0 42	1,19814	$64\theta''$	+ 2 28	1,09736
32θ	— 16 52	1,47617	$32\theta'$	+ 0 21	1,19810	$32\theta''$	— 3 39	1,09744
16θ	+ 21 59	1,45331	$16\theta'$	— 0 47	1,18105	$16\theta''$	— 2 29	1,11628
8θ	?	?	$8\theta'$	— 15 7	1,28256	$8\theta''$	+ 10 28	1,06322
4θ	?	?	$4\theta'$	+ 1 31	1,48772	$4\theta''$	+ 23 47	0,95056

3.° Ecuación de Rey Pastor — 5.° Ecuación de Dickson (completa)

3.° PRIMER PAR IMAGINARIO			3.° SEGUNDO PAR			5.° Dickson		
$n\theta$	$\Delta\tau$	r	$n\theta'$	$\Delta\tau'$	r'	$n\theta$	$\Delta\tau$	r
32θ	0° 0′	4,83216	$32\theta'$	0° 0′	2,06947	32θ	0° 0′	0,87092
16θ	0 0	4,83216	$16\theta'$	0 0	2,06995	16θ	0 0	0,87092
8θ	— 0 5	4,83178	$8\theta'$	0 10	2,06962	8θ	— 0 1	0,87092
4θ	— 0 5	4,83611	$4\theta'$	— 7 25	2,06776	4θ	— 0 40	0,86854
2θ	?	4,12318	$2\theta'$	— 2 46	2,42539	2θ	6 59	0,86562

8.º Ecuación de Fourier

	PRIMER PAR			SEGUNDO PAR	
$n\theta$	$\Delta\tau$	r	$n\theta'$	$\Delta\tau'$	r'
128θ	0º 0′	1,29088	$128\theta'$	0º 0′	1,03762
64θ	0 0	1,29088	$64\theta'$	— 1 37	1,03740
32θ	+ 0 10	1,29085	$32\theta'$	+ 6 17?	1,04212
16θ	— 2 36	1,28971	$16\theta'$	— 9 8	1,03681
8θ	+ 5 16	1,31030	$8\theta'$	— 24 59	1,12634
4θ	— 37 25	1,28750	$4\theta'$	+ 13 16	0,99161

4.º Ecuación de Dickson (incompleta)

$n\theta$	$\Delta\tau$	r
128θ	0º 0′	2,39961
64θ	0 0	2,39961
32θ	+ 0 46	2,40006
16θ	— 5 53?	2,38683
8θ	8 8	2,39517
4θ	— 11 12	2,03490

7.º Ecuación de Åstrand (incompleta)

$n\theta$	$\Delta\tau$	r
128θ	0º 0′	1,86756
64θ	0 0	1,86754
32θ	+ 0 25	1,86687
16θ	— 14 48?	1,88222
8θ	— 12 5	1,87570
4θ	— 2 56	1,81083

6.º Ecuación de un problema particular del autor

$n\theta$	$\Delta\tau$	r
32θ	0º 0′	1,98240
16θ	0 0	1,98240
8θ	0 0	1,98236
4θ	— 0 25	1,98700
2θ	6 38	1,82117

TABLA AUXILIAR PRIMERA

VALORES DE θ CORRESPONDIENTES A LOS DE 16θ

θ	0°		1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°		8°		9°	
	k	θ	*k*	θ	*k*	θ	*k*	θ	*k*	θ	*k*	θ	*k*	θ	*k*	θ	*k*	θ	*k*	θ
0°	0	0	0	16	0	32	0	48	0	64	0	80	0	96	0	112	0	128	0	144
10	0	160	0	176	0	192	0	208	0	224	0	240	0	256	0	272	0	288	0	304
20	0	320	0	336	0	352	1	8	1	24	1	40	1	56	1	72	1	88	1	104
30	1	120	1	136	1	152	1	168	1	184	1	200	1	216	1	232	1	248	1	264
40	1	280	1	206	1	312	1	328	1	344	2	0	2	16	2	32	2	48	2	64
50	2	80	2	96	2	112	2	128	2	144	2	160	2	176	2	192	2	208	2	224
60	2	240	2	256	2	272	2	288	2	304	2	320	2	336	2	352	3	8	3	24
70	3	40	3	56	3	72	3	88	3	104	3	120	3	136	3	152	3	168	3	184
80	3	200	3	216	3	232	3	248	3	264	3	280	3	296	3	312	3	328	3	344
90	4	0	4	16	4	32	4	48	4	64	4	80	4	96	4	112	4	128	4	144
100	4	160	4	176	4	192	4	208	4	224	4	240	4	256	4	272	4	288	4	304
110	4	320	4	336	4	352	5	8	5	24	5	40	5	56	5	72	5	88	5	104
120	5	120	5	136	5	152	5	168	5	184	5	200	5	216	5	232	5	248	5	264
130	5	280	5	296	5	312	5	328	5	344	6	0	6	16	6	32	6	48	6	64
140	6	80	6	96	6	112	6	128	6	144	6	160	6	176	6	192	6	208	6	224
150	6	240	6	256	6	272	6	288	6	304	6	320	6	336	6	352	7	8	7	24
160	7	40	7	56	7	72	7	88	7	104	7	120	7	136	7	152	7	168	7	184
170	7	200	7	216	7	232	7	248	7	264	7	280	7	296	7	312	7	328	7	344
180	8	0	8	16	8	32	8	48	8	64	8	80	8	96	8	112	8	128	8	144
190	8	160	8	176	8	192	8	208	8	224	8	240	8	256	8	272	8	288	8	304
200	8	320	8	336	8	352	9	8	9	24	9	40	9	56	9	72	9	88	9	104
210	9	120	9	136	9	152	9	168	9	184	9	200	9	216	9	232	9	248	9	264
220	9	280	9	296	9	312	9	328	9	344	10	0	10	16	10	32	10	48	10	64
230	10	80	10	96	10	112	10	128	10	144	10	160	10	176	10	192	10	208	10	224
240	10	240	10	256	10	272	10	288	10	304	10	320	10	336	10	352	11	8	11	24
250	11	40	11	56	11	72	11	88	11	104	11	120	11	136	11	152	11	168	11	184
260	11	200	11	216	11	232	11	248	11	264	11	280	11	296	11	312	11	328	11	344
270	12	0	12	16	12	32	12	48	12	64	12	80	12	96	12	112	12	128	12	144
280	12	160	12	176	12	192	12	208	12	224	12	240	12	256	12	272	12	288	12	304
290	12	320	12	336	12	352	13	8	13	24	13	40	13	56	13	72	13	88	13	104
300	13	120	13	136	13	152	13	168	13	184	13	200	13	216	13	232	13	248	13	264
310	13	280	13	296	13	312	13	328	13	344	14	0	14	16	14	32	14	48	14	64
320	14	80	14	96	14	112	14	128	14	144	14	160	14	176	14	192	14	208	14	224
330	14	240	14	256	14	272	14	288	14	304	14	320	14	336	14	352	15	8	15	24
340	15	40	15	56	15	72	15	88	15	104	15	120	15	136	15	152	15	168	15	184
350	15	200	15	216	15	232	15	248	15	264	15	280	15	296	15	312	15	328	15	344
360	16	0	»		»		»		»		»		»		»		»		»	

TABLA AUXILIAR II

Valores de θ correspondientes a los de 32θ

θ	0°		1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°		8°		9°	
	k	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°
0°	0	0	0	32	0	64	0	96	0	128	0	160	0	192	0	224	0	256	0	288
10	0	320	0	352	1	24	1	56	1	88	1	120	1	152	1	184	1	216	1	248
20	1	280	1	312	1	344	2	16	2	48	2	80	2	112	2	144	2	176	2	208
30	2	240	2	272	2	304	2	336	3	8	3	40	3	72	3	104	3	136	3	168
40	3	200	3	232	3	264	3	296	3	328	4	0	4	32	4	64	4	96	4	128
50	4	160	4	192	4	224	4	256	4	288	4	320	4	352	5	24	5	56	5	88
60	5	120	5	152	5	184	5	216	5	248	5	280	5	312	5	344	6	16	6	48
70	6	80	6	112	6	144	6	176	6	208	6	240	6	272	6	304	6	336	7	8
80	7	40	7	72	7	104	7	136	7	168	7	200	7	232	7	264	7	296	7	328
90	8	0	8	32	8	64	8	96	8	128	8	160	8	192	8	224	8	256	8	288
100	8	320	8	352	9	24	9	56	9	88	9	120	9	152	9	184	9	216	9	248
110	9	280	9	312	9	344	10	16	10	48	10	80	10	112	10	144	10	176	10	208
120	10	240	10	272	10	304	10	336	11	8	11	40	11	72	11	104	11	136	11	168
130	11	200	11	232	11	264	11	296	11	328	12	0	12	32	12	64	12	96	12	128
140	12	160	12	192	12	224	12	256	12	288	12	320	12	352	13	24	13	56	13	88
150	13	120	13	152	13	184	13	216	13	248	13	280	13	312	13	344	14	16	14	48
160	14	80	14	112	14	144	14	176	14	208	14	240	14	272	14	304	14	336	15	8
170	15	40	15	72	15	104	15	136	15	168	15	200	15	232	15	264	15	296	15	328
180	16	0	16	32	16	64	16	96	16	128	16	160	16	192	16	224	16	256	16	288
190	16	320	16	352	17	24	17	56	17	88	17	120	17	152	17	184	17	216	17	248
200	17	280	17	312	17	344	18	16	18	48	18	80	18	112	18	144	18	176	18	208
210	18	240	18	272	18	304	18	336	19	8	19	40	19	72	19	104	19	136	19	168
220	19	200	19	232	19	264	19	296	19	328	20	0	20	32	20	64	20	96	20	128
230	20	160	20	192	20	224	20	256	20	288	20	320	20	352	21	24	21	56	21	88
240	21	120	21	152	21	184	21	216	21	248	21	280	21	312	21	344	22	16	22	48
250	22	80	22	112	22	144	22	176	22	208	22	240	22	272	22	304	22	336	23	8
260	23	40	23	72	23	104	23	136	23	168	23	200	23	232	23	264	23	296	23	328
270	24	0	24	32	24	64	24	96	24	128	24	160	24	192	24	224	24	256	24	288
280	24	320	24	352	25	24	25	56	25	88	25	120	25	152	25	184	25	216	25	248
290	25	280	25	312	25	344	26	16	26	48	26	80	26	112	26	144	26	176	26	208
300	26	240	26	272	26	304	26	336	27	8	27	40	27	72	27	104	27	136	27	168
310	27	200	27	232	27	264	27	296	27	328	28	0	28	32	28	64	28	96	28	128
320	28	160	28	192	28	224	28	256	28	288	28	320	28	352	29	24	29	56	29	88
330	29	120	29	152	29	184	29	216	29	248	29	280	29	312	29	344	30	16	30	48
340	30	80	30	112	30	144	30	176	30	208	30	240	30	272	30	304	30	336	31	8
350	31	40	31	72	31	104	31	136	31	168	31	200	31	232	31	264	31	296	31	328
360	32	0	»		»		»		»		»		»		»		»		»	

TABLA AUXILIAR III

Valores de θ correspondientes a 640

θ	0°		1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°		8°		9°	
	k	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°	*k*	°
0°	0	0	0	64	0	128	0	192	0	256	0	320	1	24	1	88	1	152	1	216
10	1	280	1	344	2	48	2	112	2	176	2	240	2	304	3	8	3	72	3	136
20	3	200	3	264	3	328	4	32	4	96	4	160	4	224	4	288	4	352	5	56
30	5	120	5	184	5	248	5	312	6	16	6	80	6	144	6	208	6	272	6	336
40	7	40	7	104	7	168	7	232	7	296	8	0	8	64	8	128	8	192	8	256
50	8	320	9	24	9	88	9	152	9	216	9	280	9	344	10	48	10	112	10	176
60	10	240	10	304	11	8	11	72	11	136	11	200	11	264	11	328	12	32	12	96
70	12	160	12	224	12	288	12	352	13	56	13	120	13	184	13	248	13	312	14	16
80	14	80	14	144	14	208	14	272	14	336	15	40	15	104	15	168	15	232	15	296
90	16	0	16	64	16	128	16	192	16	256	16	320	17	24	17	88	17	152	17	216
100	17	280	17	344	18	48	18	112	18	176	18	240	18	304	19	8	18	72	19	136
110	19	200	19	264	19	328	20	32	20	96	20	160	20	224	20	288	20	352	21	56
120	21	120	21	184	21	248	21	312	22	16	22	80	22	144	22	208	22	272	22	336
130	23	40	23	104	23	168	23	232	23	296	24	0	24	64	24	128	24	192	24	256
140	24	320	25	24	25	88	25	152	25	216	25	280	25	344	26	48	26	112	26	176
150	26	240	26	304	27	8	27	72	27	136	27	200	27	264	27	328	28	32	28	96
160	28	160	28	224	28	288	28	352	29	56	29	120	29	184	29	248	29	312	30	16
170	30	80	30	144	30	208	30	272	30	336	31	40	31	104	31	168	31	232	31	296
180	32	0	32	64	32	128	32	192	32	256	32	320	33	24	33	88	33	152	33	216
190	33	280	33	344	34	48	34	112	34	176	34	240	34	304	35	8	35	72	35	136
200	35	200	35	264	35	328	36	32	36	96	36	160	36	224	36	288	36	352	37	56
210	37	120	37	184	37	248	37	312	38	16	38	80	38	144	38	208	38	272	38	336
220	39	40	39	104	39	168	39	232	39	296	40	0	40	64	40	128	40	192	40	256
230	40	320	41	24	41	88	41	152	41	216	41	280	41	344	42	48	42	112	42	176
240	42	240	42	304	43	8	43	72	43	136	43	200	43	264	43	328	44	32	44	96
250	44	160	44	224	44	288	44	352	45	56	45	120	45	184	45	248	45	312	46	16
260	46	80	46	144	46	208	46	272	46	336	47	40	47	104	47	168	47	232	47	296
270	48	0	48	64	48	128	48	192	48	256	48	320	49	24	49	88	49	152	49	216
280	49	280	49	344	50	48	50	112	50	176	50	240	50	304	51	8	51	72	51	136
290	51	200	51	264	51	328	52	32	52	96	52	160	52	224	52	288	52	352	53	56
300	53	120	53	184	53	248	53	312	54	16	54	80	54	144	54	208	54	272	54	336
310	55	40	55	104	55	168	55	232	55	296	56	0	56	64	56	128	56	192	56	256
320	56	320	57	24	57	88	57	152	57	216	57	280	57	344	58	48	58	112	58	176
330	58	240	58	304	59	8	59	72	59	136	59	200	59	264	59	328	59	32	60	96
340	60	160	60	224	60	288	60	352	61	56	61	120	61	184	61	248	61	312	62	16
350	62	80	62	144	62	208	62	272	62	336	63	40	63	104	63	168	63	232	63	296
360	64	0	»		»		»		»		»		»		»		»		»	

TABLA AUXILIAR IV

Valores de θ correspondientes a los de 128θ

θ	0°		1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°		8°		9°	
	k	°	k	°	k	°	k	°	k	°	k	°	k	°	k	°	k	°	k	°
0°	0	0	0	128	0	256	1	24	1	152	1	280	2	48	2	176	2	304	3	72
10	3	200	3	328	4	96	4	224	4	352	5	120	5	248	6	16	6	144	6	272
20	7	40	7	168	7	296	8	64	8	192	8	320	9	88	9	216	9	344	10	112
30	10	240	11	8	11	136	11	264	12	32	12	160	12	288	13	56	13	184	13	312
40	14	80	14	208	14	336	15	104	15	232	16	0	16	128	16	256	17	24	17	152
50	17	280	18	48	18	176	18	304	19	72	19	200	19	328	20	96	20	224	20	352
60	21	120	21	248	22	16	22	144	22	272	23	40	23	168	23	296	24	64	24	192
70	24	320	25	88	25	216	25	344	26	112	26	240	27	8	27	136	27	264	28	32
80	28	160	28	288	29	56	29	184	29	312	30	80	30	208	30	336	31	104	31	232
90	32	0	32	128	32	256	33	24	33	152	33	280	34	48	34	176	34	304	35	72
100	35	200	35	328	36	96	36	224	36	352	37	120	37	248	38	16	38	144	38	272
110	39	40	39	168	39	296	40	64	40	192	40	320	41	88	41	216	41	344	42	112
120	42	240	43	8	43	136	43	264	44	32	44	160	44	288	45	56	45	184	45	312
130	46	80	46	208	46	336	47	104	47	232	48	0	48	128	48	256	49	24	49	152
140	49	280	50	48	50	176	50	304	51	72	51	200	51	328	52	96	52	224	52	352
150	53	120	53	248	54	16	54	144	54	272	55	40	55	168	55	296	56	64	56	192
160	56	320	57	88	57	216	57	344	58	112	58	240	59	8	59	136	59	264	60	32
170	60	160	60	288	61	56	61	184	61	312	62	80	62	208	62	336	63	104	63	232
180	64	0	64	128	64	256	65	24	65	152	65	280	66	48	66	176	66	304	67	72
190	67	200	67	328	68	96	68	224	68	352	69	120	69	248	70	16	70	144	70	272
200	71	40	71	168	71	296	72	64	72	192	72	320	73	88	73	216	73	344	74	112
210	74	240	75	8	75	136	75	264	76	32	76	160	76	288	77	56	77	184	77	312
220	78	80	78	208	78	336	79	104	79	232	80	0	80	128	80	256	81	24	81	152
230	81	280	82	48	82	176	82	304	83	72	83	200	83	328	84	96	84	224	84	352
240	85	120	85	248	86	16	86	144	86	272	87	40	87	168	87	296	88	64	88	192
250	88	320	89	88	89	216	89	344	90	112	90	240	91	8	91	136	91	264	92	32
260	92	160	92	288	93	56	93	184	93	312	94	80	94	208	94	336	95	104	95	232
270	96	0	96	128	96	256	97	24	97	152	97	280	98	48	98	176	98	304	99	72
280	99	200	99	328	100	96	100	224	100	352	101	120	101	248	102	16	102	144	102	272
290	103	40	103	168	103	296	104	64	104	192	104	320	105	88	105	216	105	344	106	112
300	106	240	107	8	107	136	107	264	108	32	108	160	108	288	109	56	109	184	109	312
310	110	80	110	208	110	336	111	104	111	232	112	0	112	128	112	256	113	24	113	152
320	113	280	114	48	114	176	114	304	115	72	115	200	115	328	116	96	116	224	116	352
330	117	120	117	248	118	16	118	144	118	272	119	40	119	168	119	296	120	64	120	192
340	120	320	121	88	121	216	121	344	122	112	122	240	123	8	123	136	123	264	124	32
350	124	160	124	288	125	56	125	184	125	312	126	80	126	208	126	336	127	104	127	232
360	128	0	»		»		»		»		»		»		»		»		»	

Estudios de arte prehistórico

por

E. Hernández-Pacheco

SUMARIO

I. *Prospección de las pinturas rupestres de Morella la Vella.*—Descubrimiento de las pinturas.—El territorio de Morella.—Morella la Vella.—Las galerías y la covacha pintadas.—Característica general de las pinturas de Morella la Vella.—Pinturas de la galería alta de la masía.—Figuras de la galería del roble.—Cabra montés de la covacha del Barranquet.—Tipos pictóricos que se reconocen en Morella la Vella.

II. *Evolución en las ideas madres de las pinturas rupestres.*—La idea de magia de caza.—La idea de conmemoración. —Las fases del arte naturalista del Levante de España y sus épocas.—Las pinturas estilizadas superpuestas a las naturalistas.—Carácter funerario de las pinturas estilizadas y esquemáticas.—Significación general de las pinturas rupestres.

I

Prospección de las pinturas rupestres de Morella la Vella

Descubrimiento de las pinturas.—El conocimiento de las pinturas rupestres a que se refiere este trabajo, se debe al inspector de primera enseñanza de la provincia de Castellón, don José Senent Ibáñez. Este señor, muy entusiasta de cuanto se refiere a arqueologia, publicó en el periódico diario *Las Provincias,* de Valencia, correspondiente al 17 de octubre, un artículo dando cuenta del descubrimiento y representando dos de las principales escenas pictóricas. Otro artículo en el mismo periódico, por el catedrático de la Universidad de Valencia, don Francisco Beltrán y Bigorra, se refiere también al descubrimiento del señor Senent, llamando la atención pública respecto al interés que estas pinturas tienen, y lo que interesa su conservación y estudio.

Invitado el personal de la «Comisión de investigaciones paleontológicas y prehistóricas» por dichos señores para efectuar el estudio de las representaciones de arte fósil de Morella, emprendí el viaje a esta localidad de la provincia de Castellón, acompañándome el ayudante del laboratorio de Geología del Museo Nacional de Ciencias Naturales, don José Royo Gómez, el cual, por haber residido varios años en Morella, era un excelente guía, aparte del auxilio de índole técnica y científica que podía aportar a la prospección que pensábamos hacer.

Quiero hacer constar aquí mi reconocimiento a las personas que en Valencia, Castellón y Morella me auxiliaron y facilitaron mi cometido, como son: el catedrático de la Universidad de Valencia señor Beltrán y Bigorra, ya citado; el inspector de primera enseñanza de la provincia de Castellón, señor Senent; el catedrático del Instituto de segunda enseñanza de la misma ciudad, don Antimo Boscá; don José Royo Carbó, del comercio de Castellón, llevó su amabilidad hasta acompañarnos al yacimiento, facilitando en grado extremo mi misión en la ciudad de Morella.

El propietario del terreno y de la masía donde están las pinturas, don Mariano Sebastiá, no tan sólo me dió todo género de facilidades, sino que espontáneamente se comprometió en bien de la cultura patria a hacer que se respeten y guarden tan importantes monumentos prehistóricos, evitando en lo que de él dependa la destrucción de los mismos, como desgraciadamente ha ocurrido con los de la próxima localidad de Tirig, recientemente estudiados por el profesor Obermaier, de nuestra Comisión prehistórica. Actitud ésta del señor Sebastiá muy de alabar, y que le enaltece.

Por no hacer esta lista en extremo larga, no cito a todas las personas de Morella que me atendieron en mi gestión científica, expresándoles a todos mi reconocimiento.

Mención especial quiero hacer de mi colaborador en la copia y lectura de las pinturas, el joven ayudante del laboratorio de Geología del Museo Nacional de Ciencias Naturales, don José Royo Gómez, en quien encontré un observador sagaz y un auxiliar valiosísimo.

Los dibujos que ilustran estas monografías, fueron efectuados a la vista de los calcos, y, según mis instrucciones, por el competente ayudante artístico de la Comisión de investigaciones paleontológicas y prehistóricas, don Francisco Benítez Mellado.

El territorio de Morella.—Morella dista 66 kilómetros de la estación más próxima del ferrocarril, que es Vinaroz, en la costa mediterránea y al Sur de la desembocadura del Ebro. Actualmente esta distancia es recorrida diariamente por un automóvil de línea.

La ciudad de Morella, situada en el centro del Maestrazgo, está rodeada de altas muelas calizas y profundas barrancadas, constituyendo el territorio un pais en extremo quebrado y abrupto; la misma ciudad de Morella con su alto castillo, está edificada en una de estas elevaciones. Cubierta no hace muchos años la comarca, incluso las inmediaciones de la ciudad, de grandes bosques de encinas, robles y pinos, actualmente está desforestada, conservándose tan sólo los montes que son actualmente propiedad del Estado o sobre los que ejerce la salvaguardia de su tutela. Un codicioso e insensato carboneo ha destruído una riqueza que no se supo aprovechar y que rápidamente conduce a la despoblación y ruina del país.

Morella la Vella.—Así se llama a una gran muela de caliza cretácica (Lám. I), situada a unos siete kilómetros al NW. de la ciudad. El sobrenombre de *la Vella* (la Vieja) alude a restos de antiquísimas construcciones que existen en lo alto de la planicie de la muela y en unas grandes covachas, no muy profundas, que constituyen excelentes abrigos naturales, que hay en el lado que mira al Mediodía, al pie del alto tajo que circunda la muela casi por todos lados, constituyendo la planicie superior una superficie naturalmente defendida por tajos cortados a pico, de altura de 10 a 20 metros, de tal modo que sólo es accesible la muela con facilidad por el lado de Poniente, ascendiendo por una empinada cuesta que aquí sustituye a la perpendicular escarpa que por los demás sitios la circunda.

En la parte más alta de la superficie superior de la muela, y dando frente a la parte donde el acceso es más fácil, existen restos de tres espesos muros en gradería, construídos con piedras grandes y sin argamasa. Recuerdan estos restos de construcciones las ibéricas que se encuentran en muelas semejantes en diversidad de sitios repartidos por las vertientes mediterráneas de la meseta, como los de la grandiosa ciudad ibérica de Meca, cerca de Alpera (Albacete) y la del Tormo, junto a la estación de Minateda, en la misma provincia, en la línea férrea de Madrid a Murcia, aun sin estudiar, si bien no tienen los restos de muros de Morella la Vella la extensión de los de las ciudades ibéricas mencionadas, ni nada hay allí semejante a los profundos aljibes y demás excavaciones artificiales de la peña que en las otras se observa, ni se encuentran tampoco restos de la cerámica típicamente ibérica, por lo cual su filiación como de esta edad es para mí dudosa, dejando a los especialistas en protohistoria la determinación de la época a que corresponden estas construcciones antiquísimas, de las que no hago más que señalar su existencia.

Las covachas situadas en la base del tajo, que aquí tiene una altura de una veintena de metros, en la parte que mira al Mediodía, ofrecen más interés. El mayor de los abrigos, de bóveda muy alta y profundo unos doce metros, fué en época histórica, relativamente moderna, cerrado con un alto muro o fachada, convirtiendo la cueva en casa de labor de dos pisos, cuyas habitaciones se desarrollan hacia el interior de la cueva.

Recientemente, delante de esta covacha, así metamorfoseada en casa de labor, se ha construído la actual masía, quedando la antigua como dependencias de ella.

La tradición y las crónicas históricas señalan que estas cuevas sirvieron de amparo y refugio en diversas épocas, como al Cid Campeador cuando invadió el reino moro de Valencia. Ultimamente los carlistas tenían en la vieja masía de Morella la Vella, cuya fachada aun se conserva aspillerada, su cuartel general cuando el cerco y asedio de la plaza fuerte de Morella.

Vemos aquí en esta cueva uno de los ejemplos más patentes de persistencia de la vivienda del hombre en un mismo sitio, pues en esta amplia cueva, abierta al Mediodía, soleada en el invierno, resguardada del cierzo, y con un abundante manantial de frescas aguas junto a ella, vivirían las hordas primitivas, en los lejanos tiempos del paleolítico y neolítico, que dejaron pintados de modo indeleble las escenas de su vida salvaje, cazadora y guerrera en las galerías que, excavadas naturalmente en la pared del alto tajo, existen junto a la gran covacha que tantos recuerdos históricos contiene. Se han sucedido en este sitio, no tan sólo las generaciones, sino las civilizaciones y las razas con una persistencia admirable. Esta sucesión de pueblos en el mismo lugar, y las edificciones modernas en la cueva, han hecho desaparecer los restos de industria primitiva que allí existieran.

El señor Senent me expuso sus sospechas de la existencia de pedernales tallados en aquellos alrededores, juzgando por algunas muestras recogidas cuando su descubrimiento. Guiados por el masoguero, escudriñamos en el sitio a que se refería el señor Senent, que es en la ladera que da acceso a lo alto de la muela, y nada encontramos allí de pedernales tallados por el hombre, pues, aunque efectivamente existen abundantes lascas de sílex, proceden de los núcleos de esta sustancia que contiene un determinado horizonte de calizas cretácicas, que son descompuestas por las acciones naturales de la intemperie.

LAS GALERÍAS Y LA COVACHA PINTADAS.—Encima de la gran cueva convertida en casa de labor existen, excavadas naturalmente en el alto tajo, (Lám. II) dos galerías superpuestas, de un par de metros de altas por dos o tres de profundidad, y alargadas una veintena de metros. La inferior se ha cerrado con un muro y una portada de mampostería, convirtiéndose en habitación, y enjalbegado por su interior de tal modo que si las paredes estubieron alguna vez pintadas, actualmente no puede comprobarse.

I. *Galería alta de la masía de Morella la Vella.*—Junto al borde alto del tajo existe otra galería análoga a la descrita, de acceso relativamente fácil desde lo alto de la muela; es alargada como la anteriormente descrita, de profundidad variable de medio metro a tres y el piso inferior avanza en ciertas partes en cornisa, a una altura de quince metros sobre el suelo, siendo esta cornisa en algunos trayectos tan estrecha que apenas puede pasarse, ni menos permanecer en ella sin peligro, obteniendo calcos y fotografías de las pinturas que con relativa profusión existen decorando la pared de la galería. Esta es una de las causas que no presente completa la serie de figuras que allí existen, pues no disponiendo de tiempo, cuando fuimos a realizar la prospección, para instalar el andamiaje que es necesario, dejé esto para otro viaje, cuando la época del año fuese más propicia para completar el estudio de estas interesantes localidades con arte prehistórico.

La roca en la parte que contiene las pinturas, como también el piso de la cornisa, presenta una superficie lustrosa; pero en general la roca es saltadiza por las acciones de la intemperie, desprendiéndose pequeñas porciones superficiales por efecto de las heladas y cambios bruscos de temperatura, que han dado lugar a la desaparición de gran número de pinturas que decorarían toda la concavidad, de tal modo que lo reconocible hoy no es sino una mínima parte de lo que existiría en las épocas prehistóricas.

II. *Galería del Roble.*—Un centenar de metros hacia Poniente, siguiendo el tajo que bordea la muela, existe, hacia lo alto de éste, otra covacha alargada en la que también encontró pinturas el señor Senent.

Se llama esta covacha o galería del Roble, por uno de estos árboles que vegeta sobre ella. (Lám. III.) Se desciende a la covacha desde lo alto de la muela difícilmente, valiéndose del apoyo que prestan las ramas de un matorral de carrascas que existen en la parte de poniente de la galería.

El abrigo en la parte donde están las pinturas tiene una profundidad de dos a tres metros por uno a dos de altura máxima la bóveda y una docena de metros de largo. En él puede permanecerse sin peligro alguno.

III. *Covacha del Barranquet.*—Finalmente, en la parte baja del tajo, entre el sitio del anterior abrigo y la masía sobre la que está el primero, hay una pequeña concavidad de unos tres metros, que contiene en el muro de la izquierda una figura estilizada de cabra montés, de tipo claramente neolítico. Esta covacha que el masoguero designó con el nombre del Barranquet, no fué vista por el descubridor de los otros dos sitios pintados.

Característica general de las pinturas de Morella la Vella. El conjunto de las pinturas de la galería alta de la masía y de la del Roble, corresponden a las pinturas realistas propias y típicas del Levante de España, caracterizadas por la abundancia de representaciones humanas, lo cual las diferencia profundamente de las magdalenienses de tipo cantábrico, propias del Sur de Francia y del Norte de España.

Dentro del grupo levantino con las que tienen analogía más íntima es con las de Tirig, también en la región del Maestrazgo, hasta el punto de que puede comprenderse que unas y otras son obra de la misma gente prehistórica; siendo esta la impresión que produce la comparación con los dibujos que de las covachas de Tirig existen en los archivos de nuestra Comisión, y que formarán parte de la monografía que mi compañero, el profesor Obermaier, prepara, y que constituirá una de las Memorias de la Comisión de investigaciones paleontológicas y prehistóricas.

Desde luego se advierte que las figuras pintadas en Morella la Vella son las de tamaño más pequeño de todas las del arte paleolítico; algunas tan sólo tienen una talla de cuatro a cinco centímetros, siendo las mayores representaciones humanas de unos diez centímetros, de tal modo que en este respecto pueden considerarse como verdaderas miniaturas. Todas ellas están en rojo, obtenido de la manera general a las pinturas rupestres, mediante la mezcla del polvo de hematites con una grasa, habiéndose empleado para pintarlas un pincel fino.

Varias fases o épocas se aprecian, en mi sentir, en las pinturas, cuestión en la que insistiré más adelante; pero refiriéndome al conjunto, parece que la decoración de ambas covachas estaba constituída principalmente por escenas de la vida guerrera y cazadora de las tribus habitantes de la región y contemporáneas de las pinturas. Los hombres están representados desnudos, armados con arco y flechas y con muy escasos detalles de indumentaria, tales como algún tocado especial y jarreteras.

Los animales representados son, sobre todo, la cabra montés, cuya representación corresponde a las diversas épocas o fases que en las pinturas se aprecian; recuérdese a este efecto, que he dicho que en la covacha del Barranquet la figura neolítica representada es una cabra montés. Actualmente estos animales se cazan aún en las cercanas montañas de Cardó, próximas a la desembocadura del Ebro. El ciervo también está representado, aunque es menos abundante.

A diferencia de lo que se aprecia en otros abrigos de las vertientes mediterráneas de la Península, no hay aquí figuras de animales de gran tamaño, sino que, a pesar de la diversidad de estilos, el tamaño de las figuras es siempre pequeño.

Pinturas de la galería alta de la masía.—I. Entrando ahora en la descripción de las pinturas de cada uno de los sitios, he de insistir que a causa de las dificultades que para calcar y fotografiar presenta la galería alta de la masía de Morella la Vella sin el establecimiento de un andamiaje, no se reproduce ni describe en este avance sino alguna de las figuras más salientes e importantes.

Por toda la concavidad de la peña se aprecian en este sitio huellas de pinturas y restos de composiciones pictóricas, constituídas especialmente por pequeñas figuras de hombres, en las que se nota un comienzo de estilización consistente en que el tronco y las extremidades están representados por trazos lineares, si bien conservando la figura las proporciones y armonía entre el tamaño de las distintas partes del cuerpo y realismo en las actitudes; la cabeza, por lo común, es un círculo.

Figura 1.ª.
Escena pictórica de la galería de la masía de *Morella la Vella*, que representa un salvaje de las épocas prehistóricas siguiendo huellas humanas.
La figura de abajo, sin cabeza, no forma parte de la composición, correspondiendo a una fase posterior.—Escala $^1/_3$.

A este tipo de representaciones corresponde la escena que representa la figura número 1. Claramente se aprecia en esta pintura, cómo un personaje, tocado con un gorro o corona con tres picos y con jarretera en la pierna derecha, avanza a largas zancadas siguiendo las huellas de los pasos que ha dejado otro hombre; la disposición alargada y por pares de estas huellas, hace comprender que se trata de la representación de una pista humana y no de un animal. Delante del personaje que sigue el rastro hay en la peña una mancha informe e incompleta que en esta primera lectura no he descifrado por completo, y que es probable corresponda a restos de una figura representando quizá otro hombre que se inclina para observar la pista.

Los espacios sin huellas que existen en el grabado, creo, por el aspecto de la peña, que no son debidos a que haya desaparecido la pintura por las acciones de la intemperie, que ha producido numerosos saltados en la roca, sino que lo interpreto como que el autor de la composición pictórica quiso así representar los espacios, que por la naturaleza rocosa del terreno, o por cualquier otro motivo, las huellas no se señalan. Esto es muy lógico en pueblos salvajes y esencialmente cazadores, que saben bien cómo las pistas se interrumpen para reaparecer más lejos.

No es muy aventurado interpretar esta composición pictórica como un episodio de la vida salvaje primitiva, quizá representativa de la persecución del hombre por el hombre que se realizó a través de las selvas y fragosidades del montañoso Maestrazgo en los remotos tiempos del paleolítico o del epipaleolítico.

Una anomalía se aprecia en estas huellas, poco explicable en un pueblo tan sagazmente observador como el paleolítico, y es que las huellas están por pares y no alternadas, como es característico de las que deja un hombre que anda o corre; sin duda el pintor quiso expresar la pista humana por el carácter doble correspondiente a los dos pies, prescindiendo de la situación alterna de la huella de los pasos. La hipótesis de que estas huellas correspondan a la pista de las dos pezuñas que dejan los artiodactilos, no es probable para este caso, pues lo alargado de cada una de las representadas, y la separación grande de una a otra, lo hace más inverosímil. En este último caso, la escena que interpreto como la persecución de un enemigo, se transformaría en una escena de caza. La lucha de arqueros representada en la misma localidad de Morella la Vella, y de la que pronto me ocuparé, confirma en mi sentir también que no se trata de una escena de caza.

Tal género de representaciones era desconocido en el arte rupestre prehistórico, y sólo la composición que describo, y otra inédita en la próxima localidad de Tirig, encontrada por Obermaier en la covacha dels Tolls, son las que hasta ahora se han descubierto, si bien la última no está tan completa como la que reproduzco en el grabado que acompaña a este trabajo.

II. Al mismo tipo de figurillas estilizadas y lineares corresponde la que reproduce el grabado núm. 2, que está en otro sitio, alejado de la anterior composición, y no forma, en modo alguno, parte de ella; representa un arquero disparando el arco con la actitud propia del esfuerzo necesario para realizar esta operación.

Figura 2.ª
Arquero disparando, de la galería de la masía de *Morella la Vella*. — Escala 1/3

III. Además de estas figuras, que parecen corresponder a restos de composiciones, en parte desaparecidas, se aprecian conjuntos de líneas sinuosas o en zigzag, que hasta que haya realizado un estudio más detenido no puedo precisar si son sencillas líneas separatorias de las diversas composiciones, simples motivos ornamentales, o tienen una significación simbólica en el conjunto pictórico, como, por ejemplo, veredas o ríos; en este caso se encuentran los trazos que reproduce la figura núm. 3, que están situados no muy apartados de la escena descrita.

IV. No todas las figuras humanas de la galería de la masía de Morella la Vella son del tipo mencionado, sino que hay otras en que, si bien menos estilizadas y simplicistas, no tienen la vida y realismo de las anteriores. En éstas el tronco es grueso y proporcionado, y la cabeza presenta alguna mayor complejidad, que permite apreciar algún confuso rasgo fisonómico, si bien de ningún modo suficiente para hacer deducciones algunas respecto a caracteres de raza. A este tipo corresponde la muy incompleta figura del grabado núm. 4, en la que se aprecia representa un hombre provisto de un arco; la acción del tiempo ha destruído en gran parte esta figura, pero no tanto que no pueda reconstruirse y juzgar de su técnica y estilo, algo diferente de las anteriores.

Fig. 3.ª
Líneas serpentiformes y en zigzag, de la galería de la masía de *Morella la Vella*.— Escala 1/3

V. De tipo distinto de los dos descritos es la representación humana situada junto a las huellas de la composición descrita, y que se observa en el mismo grabado de la figura 1. Se ve que en esta fase de la pintura rupestre la esquematización de la figura humana está muy avanzada; la expresión y el realismo faltan por completo, constituyendo un término de tránsito entre las figuras realistas y las puramente estilizadas, esquemáticas y simbólicas del arte neolítico. A esto contribuye indudablemente la falta de cabeza de la figura, inclinándome a suponer, según la inspección que en el original efectué, que más bien se debe a una omisión del pintor que a su desaparición por la acción del tiempo.

Figura 4.ª
Restos de pintura correspondientes a la figura de un arquero, de la galería de la masía de *Morella la Vella*
Escala 1/3

VI. Entre las representaciones zoomorfas, una delas que más destacan es la silueta de cabeza de cabra montés (figura 5.ª), representada con tal realismo y exactitud que constituye una buena muestra del arte pictórico de las covachas de las vertientes mediterráneas de la Península.

FIGURAS DE LA GALERÍA DEL ROBLE.—Esta concavidad ofrece también escenas análogas a las descritas de la galería alta de la masía y representaciones de figuras aisladas. El estudio que de unas y otras he efectuado es más completo que el realizado en el otro sitio, si bien aun no lo doy como definitivo. Hay escenas guerreras y de caza que, por el estilo y caracteres, incluso tamaño, deben considerarse sincrónicas de las ya descritas.

Figura 5.ª
Cabeza de cabra montés, de la galería de la masía de *Morella la Vella*.—Escala 1/3

I. Entre las escenas de caza, una es la que se reproduce en la figura 6.ª, y que representa un arquero que dispara contra una cabra que huye veloz; otra flecha, en el aire, va a clavarse en el cuerpo del animal perseguido.

La actitud del cazador no puede ser mejor entendida, y la del animal que huye también. Delante de la cabra que huye, un cabritillo vuelve la cabeza hacia otro cazador, que no se representa en el dibujo, pero que existe pintado en la peña, aunque incompleto por la acción destructora del tiempo.

El borroso grupo de los dos personajes situados detrás del cazador que dispara y la figura humana situada encima de la cabra, son totalmente extraños a la composición; más adelante insistiré respecto a ellos.

II. Del mismo estilo y técnica es la interesantísima escena que reproduce la figura 7.ª, y que representa una cruenta pelea entre siete arque-

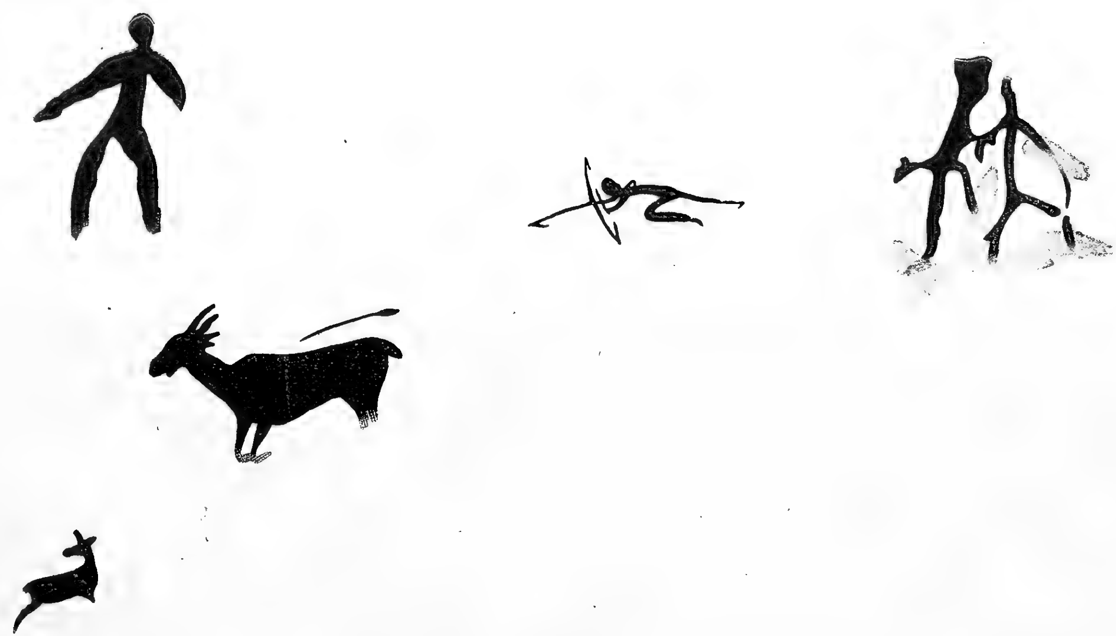


Figura 6.ª

Escena de caza de la covacha del Roble en *Morella la Vella,* representando un cazador paleolítico disparando el arco contra una cabra montés que huye. El cabritillo situado delante, que vuelve la cabeza, forma parte de otra escena. Las figuras humanas de la derecha y de arriba, son extrañas a la escena de caza.—Escala $^1/_3$.

ros. Los tres de la izquierda corresponden a un bando que ataca a los dos de la derecha del grupo central, que juntamente con los otros dos arqueros, el uno situado en la parte superior, y el otro en la inferior, constituyen el bando contrario.

La táctica guerrera seguida en esta lucha está bien clara: mientras

Figura 7.ª
Combate de arqueros, de la covacha del Roble, en *Morella la Vella*.—Escala $^1/_3$.

que los dos arqueros del centro resisten la acometida, los otros dos de los extremos tratan de envolver al grupo atacante, contra el que dirigen sus flechas, habiendo herido a dos de ellos, pues uno presenta un flechazo en la espalda, y otro ha recibido una flecha en la pierna izquierda.

Nada más simplicista que la manera como están representados los personajes de esta pelea: el tronco y las extremidades son sencillos trazos lineares, y la cabeza una mancha redonda; pero tampoco nada más expresivo ni más real. La actitud revela perfectamente la postura necesaria para disparar el gran arco de que van armados, y el esfuerzo necesario para lanzar la larga flecha, afianzando hacia atrás la pierna derecha y doblando la izquierda en violenta flexión; se nota en alguna figura que el pie derecho se fija fuertemente al suelo, con los dedos doblados hacia arriba, mientras que el izquierdo, por la flexión de la pierna y el esfuerzo muscular consiguiente, tiende a arquearse hacia abajo.

La posición de los brazos no está en general tan clara como la de las piernas, si bien es la exacta. El tronco manifiesta bien la curva sigmoidea, ampliamente abierta, de la columna vertebral; y, en general, con tan sencillos elementos, como son los trazos con que están representados las extremidades y el tronco, no puede expresarse de una manera más perfecta ni más exacta la actitud de las figuras.

Con su simplicismo, el cuadro aquí representado tiene tal movimiento y expresión, que constituye una de las obras maestras del arte prehistórico.

Antes de pasar a describir otra composición, he de manifestar que, aunque ninguna duda que se me ofrece respecto a la autenticidad de las pinturas de que me ocupo, pues lo incompletos que están a causa de la destrucción natural de la roca en que están pintadas es una prueba de su antigüedad, si el estilo, técnica y demás caracteres no lo comprobasen por sí solo, hay en esta composición otra prueba decisiva, y es que el arquero de la parte baja e izquierda de la composición está incompleto a causa de que parte de la figuar está cubierta por una capa de concreción calcárea que se ha formado sobre la pintura.

Figura 8.ª
Cazador y ciervo representados en la covacha del Roble en *Morella la Vella*.—Escala $^1/_3$.

III. Otras escenas de caza son las que reproducen los grabados números 8 y 9. En la figura 8.ª, un cazador, en actitud de reposo, con el arco y las flechas cogidos en una mano, y el otro brazo doblado sobre el pecho, tiene a sus pies un ciervo toscamente figurado, cuyo gran tamaño se ha querido expresar por lo complicado de la cornamenta y prolijidad de candiles.

Hacia la parte de la derecha de esta composición hay otra (fig. 9.ª) que representa una cabra montés que huye llevando clavada en el lomo una flecha; las manchas rojas, irregulares y desiguales, que se extienden en reguero, no es aventurado interpretarlas como manchas de sangre que el animal ha dejado en su huída, y que permitirán al cazador seguir el rastro de la pieza herida; es posible que con la gran mancha roja irregular el artista primitivo quiso representar una gran mancha de sangre que el animal dejaría en el sitio donde se detuvo o echó cansado para reanudar después la huída. Esta representación del rastro dejado por la pieza de caza herida es la primera vez que se ha encontrado en las pinturas rupestres, y demuestra, como en el caso del salvaje que sigue la pista de su enemigo, que es un suceso el que se ha representado.

Figura 9.ª
Cabra montés herida de un flechazo, que huye, dejando un rastro de sangre, pintada en la covacha del Roble, en *Morella la Vella*.—Escala $^1/_3$

Las pinturas de esta escena de caza corresponden a un tipo distinto de la otra también de caza y la guerrera descrita. El hombre representado no está formado por trazos lineares como en aquéllas, sino que la silueta es mucho más tosca, y los animales representados de factura más bárbara; el ciervo ofrece una cornamenta inverosímil, de tal modo, que el autor sólo ha tratado de exagerar el carácter de la profusa ramificación de las astas para dar idea de la gran importancia de la pieza cazada. Otro tanto sucede con la cabra herida, de cuernos desproporcionados por lo grandes (1).

IV. A un tercer tipo corresponde la figura que existe en el graba-

(1) Conviene advertir que la mancha o ramificación que se observa en uno de los cuernos es, según todos los indicios, un accidente casual ocurrido al pintor, quizá que se le corrió el pincel involuntariamente.

do número 6, que representa una silueta humana hecha mediante trazos gordos y toscos, careciendo de proporciones y expresión. Guarda esta silueta extrema analogía con la que existe, y reproduzco, de la galería alta de la masía; casi la única diferencia es la falta de cabeza de una de ellas. Una y otra establecen, por su factura, un tipo intermedio entre las figuras claramente naturalistas y las puramente esquemáticas, estilizadas y convencionales del neolítico.

V. Otras dos figuras existen que parecen, por lo menos una, corresponder al tipo que podemos llamar lineal; pero están en parte tan confusas que no he formado criterio exacto respecto a su interpretación. (Figura 6.ª)

Cabra montés de la covacha del Barranquet.— Como se dijo, entre la galería del Roble y la masía, siguiendo la base del tajo, se encuentra al ras del suelo una pequeña covacha en donde está representada, en rojo, la figura que reproduce el grabado número 10.

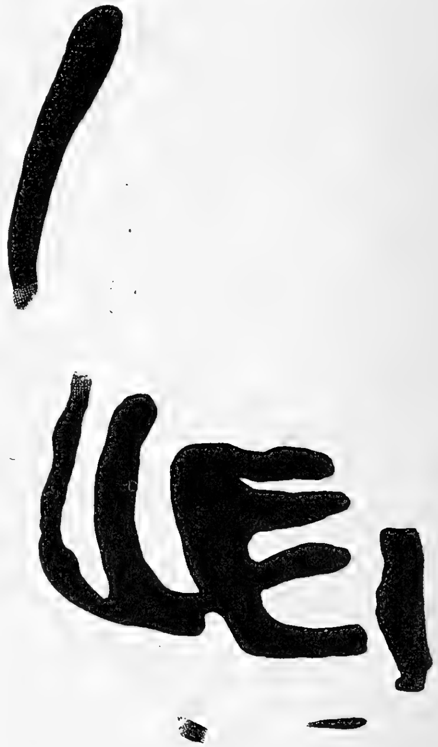


Figura 10.
Cabra montés, en extremo estilizada, acompañada de trazos informes de pintura, de la covacha del Barranquet en *Morella la Vella*. (La posición en que se reproduce la pintura es la que tiene en la pared de la covacha; para ver más claro el grabado mírese de lado) Escala 1/3.

La época de esta pintura es fácilmente determinable, pues corresponde por su estilo, técnica y demás caracteres, a las figuras neolíticas tan profusamente repartidas por los peñones de cuarcita de Sierra Morena y Extremadura. Representa la estilización de una cabra montés, a las que acompañan otros trazos gruesos y dos pequeños delante. La posición de la figura en la pared de la covacha es tal como se reproduce en el grabado; pero la significación se ve más patente mirándola en posición distinta, de tal modo que los cuatro rasgos que representan las patas estén verticales, y los dos que indican los cuernos, horizontales.

Tipos pictóricos que se reconocen en Morella la Vella.—Al describir las pinturas de los tres sitios pintados de Morella la Vella, he hecho notar que no todas corresponden a un mismo tipo por su estilo y ejecución, sino que claramente se percibe, por la inspección de las copias que acompañan a esta nota, que aun considerando aparte la representación de la esquemática cabra montés de la covacha del Barranquet, se distinguen varios tipos en las restantes.

Como no existen superposiciones en las localidades de Morella la Vella, no puedo fundamentarme en este carácter para establecer un orden relativo de antigüedad, sino que simplemente establezco un orden sólo atendiendo al grado decreciente en la expresión y al realismo de las figuras.

Los tipos de pinturas que creo reconocer en Morella la Vella son los siguientes:

1.º Figuras naturalistas, constituídas por trazos lineares, representando arqueros aislados o formando parte de composiciones que representan escenas de caza o guerreras. Los hombres de esta fase están representados desnudos o con muy parcos detalles de indumentaria; los arcos son grandes y las flechas largas, con punta simple o en banderilla, y frecuentemente se aprecia la pluma del extremo posterior de la flecha. Los animales representados tienen expresión y realismo en sus actitudes, y son proporcionados y armoniosos.

El arquero de la figura 2.ª, y las escenas de las figuras 1.ª, 6.ª y 7.ª, y la cabeza de cabra montés que representa el grabado de la 5.ª, corresponden a este primer tipo.

2.º Figuras naturalistas de hombres con arcos y detalles más o menos patentes de indumentaria; tronco, cabeza y extremidades no lineares; se aprecian ciertos rasgos de la cabeza, que no está reducida simplemente a un círculo como en las figuras de la fase anterior. Sin embargo, la expresión del realismo y vida es inferior a las anteriores.

Los animales son de aspecto tosco y desproporcionado.

Unas figuras están aisladas, otras forman parte de composiciones. Las figuras 4.ª y 8.ª y la escena de la figura 9.ª deben incluirse en esta fase.

3.º Representacionss humanas aisladas, sin detalles ni realismo, con tendencia avanzada hacia la esquematización.

La figura humana sin cabeza, del grabado núm. 1 y el hombre de la parte alte de la figura 6.ª, son los dos ejemplos de esta fase pictórica.

4.º Figura esquemática representando una cabra montés de la covacha del Barranquet, (fig, 10) que he referido al neolítico.

II

Evolución en las ideas madres de las pinturas rupestres.

La idea de magia de caza.—Juzgando por los calcos que reproduzco, se ve que las pinturas de Morella la Vella representan en su mayoría escenas complejas de la vida salvaje primitiva.

A diferencia de las pinturas trogloditas de la región cantábrica y del Sur de Francia, el hombre ocupa lugar preponderante en las representaciones pictóricas. Son unas y otras pinturas completamente diferentes, no tan sólo por este carácter, sino por otros varios; diferencias de sobra conocidas para insistir mucho en esta cuestión.

Las pinturas trogloditas de tipo cantábrico, fuera de los signos, son casi exclusivamente zoomorfas; la fauna de mamíferos de la época está profusamente representada, y si hay pinturas que reproduzcan la figura humana son con gran parquedad y con un doble carácter, a la vez antropomorfo y zoomorfo, significando hombres disfrazados de animales o seres fantásticos que participan del doble carácter humano y animal.

En las pinturas del Oriente de España, consideradas también como paleolíticas, aunque existen en gran número las representaciones de animales, la figura humana aislada o formando parte de composiciones complejas es la dominante.

Comienza el arte fósil en los lejanos tiempos del Auriñaciense, teniendo probablemente una significación mágica de caza, más bien que totémica. Durante el Magdaleniense, la significación de magia de caza de las pinturas zoomorfas trogloditas está más clara, como se comprueba por las figuras de bisontes de Niaux (Ariège, Francia) y Pindal (Asturias), con flechas pintadas sobre el cuerpo; por el ciervo de la cabeza vuelta con varios venablos clavados, de la gruta de la Peña en San Román de Candamo (Asturias), y por la cabra montés grabada en la cueva de Penches (Burgos), con otro venablo clavado. Es esta una cuestión en la cual los especialistas en arte primitivo están conformes en su gran mayoría.

Significación análoga cabe asignar a las pinturas zoomorfas de las covachas de las vertientes orientales de la Península, en que los animales representados coinciden, por su realismo y técnica pictórica, con los de tipo cantábrico, pudiendo servir de tipo los ciervos de Calapatá (Teruel), verdaderas obras maestras del arte fósil, o los toros de Albarracín (Teruel), también de factura excelente, con tanta expresión y vida.

Son consideradas estas pinturas como contemporáneas de las magdalenienses de Cantabria y Asturias, aunque ejecutadas por pueblos distintos.

La denominación de trogloditas no les cuadra ya, pues no están en lugares recónditos, tenebrosos y difícilmente accesibles de profundas cavernas como las del Norte de España, sino a la luz del día, aunque resguardadas en covachas y saledizos rocosos.

Es probable que al representarse en las pinturas del Oriente de España, no tan sólo los animales de caza codiciable, como casi exclusivamente sucede en el Norte, sino también al cazador, o sea al aparecer en las composiciones pictóricas la figura humana, que tan cuidadosamente parece evitaron representar de manera clara nuestros ancestrales pirenaicos, aparecería la representación del hombre como complemento de la del animal contra el que iba el conjuro mágico que por la pintura se expresaba; es decir, que el hombre en este caso tendría, dentro de la idea de magia de caza originaria de la pintura, significación análoga a la que en el arte troglodita tienen los venablos y flechas clavados o pintados encima del animal.

Así se pasaría de la representación del animal tan sólo, a la de escenas complejas de caza, como las de Alpera (Albacete), Val del Charco del Agua Amarga, en Alcañiz (Teruel), en donde el jabalí, perseguido por los cazadores, es la figura principal de la composición; al magnífico fresco (bárbara y alevosamente destrozado recientemente) de la covacha de Tirig (Castellón), que representa el ojeo de una manada de ciervos.

La idea de conmemoración.—Pero en ciertos lugares las escenas de caza están sustituídas o coinciden con otras de índole distinta: guerreras, como en Alpera; de ritos o ceremonias, como la célebre danza de mujeres de Cogul (Lérida), o simplemente de la vida doméstica, como la mujer que conduce a un niño de la mano en Minateda (Albacete).

No faltan en las pictografías de las vertientes levantinas la figura de algún personaje que destaque por su tamaño, lugar que ocupa o indumentaria, del resto del conjunto pictórico; este es el caso de la figura del hombre con el elegante tocado de plumas que se aprecia en la cueva de la Vieja en Alpera, y también del cazador de apostura arrogante de la cueva del Roble, en Morella la Vella, que tiene a sus pies un gran ciervo muerto.

Si a estos casos de representaciones de escenas de tan diversa índole unimos los que doy a conocer en esta Memoria, como la del salvaje que sigue las huellas humanas, la escena de la cabra montés herida que deja el rastro de sangre, y sobre todo el combate de los arqueros, vemos que la idea madre de las pinturas es ya distinta de la que engendró las figuras zoomorfas trogloditas; que se ha efectuado una evolución ideológica que ha dado lugar a que las pinturas representando exclusivamente animales o sencillas escenas de caza que tenían una significación mágica, se hayan transformado en escenas complejas de muy diversa índole, obedeciendo ahora a una idea muy distinta de la primitiva, que puede ser de conmemoración de sucesos o acontecimientos. En tal sentido, ciertas pictografías del Levante de España pueden significar hechos reales acaecidos, y así el combate de los arqueros de la cueva del Roble, en Morella la Vella, en esta teoría que vengo desarrollando, puede considerarse como una crónica pictórica de los lejanos tiempos de la España prehistórica.

Es muy probable que la llamada danza de Cogul sea representativa de algún rito o ceremonia de los pueblos primitivos, y que el llamado jefe de Alpera pueda efectivamente querer representar a determinado personaje de la tribu que decoró la célebre covacha.

LAS FASES DEL ARTE NATURALISTA DEL LEVANTE DE ESPAÑA Y SUS ÉPOCAS.—Un estudio en el orden de superposición de los distintos tipos de representaciones pictóricas, puede dar mucha luz respecto a esta cuestión. Por lo pronto, algunas superposiciones permiten suponer que los grandes animales con estilo realista son inferiores a ciertas escenas complejas. Así, en el conjunto pictórico de Cogul se aprecia que dos figuras de mujer de color rojo están superpuestas a un toro en negro.

En la composición del Val del Charco del Agua Amarga, uno de los cazadores que corre con el arco en la mano detrás del jabalí, está pintado encima de un gran toro enormemente mayor que la figura del cazador; además, en el mismo conjunto pictórico se aprecia que una cabra pequeña, semejante a otras de la composición pictórica de caza, está encima de un ciervo de colosal tamaño.

En Alpera, la capa pictórica inferior, de color rojo, débil y borrosa, está formada exclusivamente por figuras de animales, sobre todo de cabras y algún ciervo; encima existe otra capa de color rojo oscuro constituída por escenas o composiciones complejas de hombres y animales (1).

Todo induce, por lo tanto, a creer que en el arte realista de las vertientes orientales de España, las figuras aisladas de animales, a veces de gran tamaño, son de una fase anterior a las escenas con hombres y animales de pequeño tamaño, y, por lo tanto, no hay inconveniente, por lo que se refiere a la edad relativa de las pinturas, en admitir la transformación o evolución que en las ideas madres del arte rupestre vengo exponiendo, pues la cronología que nos enseñan las superposiciones dichas parece confirmarlo, o por lo menos no se opone a que pueda ser admitida.

(1) H. Breuil, el autor que con más intensidad ha estudiado el arte rupestre, considerando el conjunto de las pinturas del Oriente de España, llega a establecer hasta cinco fases, que abarcan desde el auriñaciense hasta el magdaleniense superior.

Para Obermaier, las pinturas rupestres de tipo oriental español son debidas a los pueblos del Capsiense superior, que, procedentes del Sur, invadieron la Península, y que se pondrían en contacto con los pueblos del Magdaleniense superior que habitaban el Norte de España, suponiendo que de la mezcla de industrias capsienses y magdaleniense surgió la aziliense.

A su vez, por mi parte, creo puede admitirse que las pinturas realistas zoomorfas, que tantas analogías tienen con las trogloditas de tipo cantábrico, pueden considerarse como debidas a la influencia magdaleniense. La fase superior de las pinturas con representaciones humanas abundantes y constituyendo escenas complejas y de índole diversa, pueden llegar hasta el final del Capsiense o primeros tiempos del Epipaleolítico.

LAS PINTURAS ESTILIZADAS SUPERPUESTAS A LAS NATURALISTAS.— Cuando se examinan las distintas localidades con pinturas del tipo levantino a que me vengo refiriendo, se aprecia que, siempre superpuestas a las de estilo realista, existen a veces otras pinturas de tipo muy diferente, por cuanto carecen de naturalismo alguno; son en extremo estilizadas y esquemáticas, y si se ha llegado a comprender el significado de muchas, es mediante la existencia de formas intermedias que las enlazan con las figuras naturalistas representando hombres o animales.

Figuras de esta clase existen en el conjunto pictórico de Cogul; no faltan en la célebre covacha de la Vieja en Alpera; son abundantes en los cantos de la Visera del monte Arabí, situado entre Yecla y Montealegre, en los confines de la provincia de Murcia y de Albacete; la cabra montés de la covacha del Barranquet, en Morella la Vella, es un buen ejemplo, y constituyendo por sí solas las decoraciones de muchos peñones, existen con relativa profusión por Sierra Morena y Extremadura, extendiéndose por la Península, desde el estrecho de Gibraltar hasta el litoral cantábrico.

Pero si se examina el conjunto del arte rupestre español de las covachas y peñones al aire libre, se obtiene la impresión que estas figuras simbólicas, esquemáticas y tan en extremo estilizadas, se enlazan con las francamente naturalistas por una serie de términos intermedios, en los cuales se aprecia que, a partir de las naturalistas, por una estilización y esquematización creciente de la figura, se llega a las puramente esquematizadas y simbólicas, como las claramente de este tipo de la época de los dólmenes.

Es aún prematuro, en el estado actual de los conocimientos respecto a arte rupestre, sin un *corpus* completo de las distintas localidades con pinturas prehistóricas en que en cada una se haya fijado claramente el orden de superposición relativa, establecer estas series, pues es probable que no siempre el grado creciente de estilización corresponda con la menor antigüedad de las representaciones pictóricas. En tal respecto, algunas series establecidas caprichosamente carecen de valor científico alguno; tales como las del dibujante Cabré. Pero es un hecho, según afirma el profesor Obermaier, «que se efectuó de una manera casi imperceptible la trasmutación del arte naturalista cuaternario a la estilización»; de tal modo que, en opinión de este autor, «las tribus del Capsiense superior evolucionaron *in situ* al Azilio-Tardenoisiense, y que más tarde, y seguramente debido a influencias de civilizaciones exteriores, evolucionaron hacia el neolítico, porque es sabido que las fases finales del arte estilizado contienen ídolos y representaciones de caras que coinciden en absoluto con los ídolos neolíticos de las colecciones de L. Siret, F. de Motos, etc., habiendo además analogías con ciertos dibujos de los dólmenes del neolítico final».

La edad neolítica y eneolítica de tales estilizaciones está hoy fuera de duda, después del estudio que hicimos de las pinturas y grabados existentes en el imponente peñón de Peña Tú, que en unión del conde de la Vega del Sella descubrí en el litoral asturiano, monumento funerario en el que existen grabadas y pintadas en asociación convincente, el ídolo de los dólmenes, el puñal de cobre eneolítico y las figuras humanas estilizadas.

Para Obermaier, la figura humana aparece ya estilizada y representada en los cantos pintados azilienses, estableciendo a partir de ellos la filiación de muchas figuras humanas estilizadas y esquemáticas de los peñones del Suroeste de España, Sierra Morena y Extremadura.

Sin entrar a examinar esta teoría, tan sugestivamente expuesta por su autor, no cabe dudar que, a compás que evolucionó la representación de la figura humana partiendo del tipo naturalista, hasta el esquemático, evolucionó en el mismo grado la figura animal, reconociéndose aún en el arte más estilizado diversas especies de animales, tales como ciervos, cabras, caballos etc... El mismo autor a que me vengo refiriendo ha podido fijar la edad eneolítica de tales representaciones de animales, por el decorado de ciervos estilizados que presenta una vasija de la llamada cerámica de Ciempozuelos, encontrada en excavaciones efectuadas en las cercanías de Madrid, y que ha sido objeto de una interesante monografía últimamente publicada.

Es claro que, examinando las pictografías de tipo estilizado, se encuentran numerosas pinturas cuya significación queda enigmática, correspondiendo probablemente a expresiones simbólicas que quizás no lleguen a descifrarse por completo. En las numerosas publicaciones de H. Breuil, y en las de la Comisión de investigaciones paleontológicas y prehistóricas, como la relativa a las pinturas rupestres de Aldeaquemada, recopiladas por J. Cabré, o las calcadas en Alburquerque por A. Cabrera, existen diversidad de esta clase de signos enigmáticos cuyo simbolismo desconocemos, pero ello no influye en las conclusiones a que me conducirá la tesis que vengo exponiendo.

Carácter funerario de las pinturas estilizadas y esquemáticas.—El conjunto de circunstancias que rodean a gran número de pinturas muy estilizadas y esquemáticas, hace pensar en el carácter funerario que tengan muchas de estas pictografías. Recuérdese a este objeto la relación íntima que existe entre ellas y los dólmenes, la presencia de sepulturas excavadas en la roca que se encuentran a veces junto a las covachas en que tales representaciones pictóricas se observan, como existe, entre otros sitios, en las numerosas localidades que rodean a la laguna de La Janda, en la región del estrecho de Gibraltar, hecho anotado por Breuil y por nosotros mismos en esta zona del Sur de la Península, y también el carácter de monumento funerario que hemos asignado a Peña Tú. Por otra parte, se ha hecho notar hace tiempo por diversos especialistas, la identidad que existe entre ciertas figuras pintadas y los ídolos del Sureste de España encontrados en las sepulturas neolíticas.

Un carácter en cierto modo semejante se les asigna a los cantos pintados azilienses, los cuales se estiman como equivalentes de los *churinga* de la tribu australiana de los Aruntas, es decir, como «piedras de los antepasados», considerando que cada una de estas churinga es la encarnación de un antepasado, cuyo espíritu ha pasado a él. En la obra de Obermaier, *El hombre fósil,* y sobre todo en la interesante monografía publicada por P. Wernert, en la Comisión de investigaciones paleontológicas y prehistóricas, titulada *Representaciones de antepasados en el arte paleolítico*, se hacen en este respecto importantes observaciones, considerando a los cantos pintados como claras manifestaciones de totemismo.

El carácter funerario que parecen tener las pinturas estilizadas del neolítico hace suponer que es verosímil que las ideas madres de conmemoración de hechos a que parecen corresponder ciertas composiciones pictóricas del Oriente de España, significativas de ceremonias, acontecimientos o hazañas realizadas por la tribu o por determinado personaje de ella, hayan en el transcurso del tiempo transformádose de tal modo, que las composiciones pictóricas de ellas resultantes hayan pasado a adquirir un carácter en cierto modo distinto, siendo éste principalmente conmemorativo funerario.

Significación general de las pinturas rupestres.—En resumen, las consideraciones expuestas me llevan a suponer que las pinturas prehistóricas que existen con tan relativa abundancia en la Península, pueden haber tenido en cada época una significación dominante distinta:

I. Las paleolíticas zoomorfas, de estilo naturalista, de las cavernas cantábricas, parecen corresponder de preferencia a ideas de magia de caza.

Igual significación cabe suponer a las pinturas también del paleolítico, esencialmente naturalistas y zoomorfas, y que corresponden a la fase inferior de las representadas en las covachas y abrigos al aire libre en las regiones orientales de España.

II. Las composiciones o escenas complejas en las que intervienen con preponderancia la figura humana, también con carácter naturalista, y que pertenecen a la fase superior de las pinturas rupestres del Oriente de España, pueden, en gran parte, corresponder a una significación conmemorativa o histórica.

III. Las pinturas estilizadas de figuras humanas y de animales conjuntamente con signos de interpretación hasta el presente desconocida, correspondientes a los tiempos neolíticos, parecen tener un preponderante carácter funerario, quizás como evolución de las ideas madres que engendraron a las anteriores.

No quiere esto decir que la significación que asigno a las pinturas de cada uno de los tres grandes grupos en que puede considerarse dividido el arte rupestre de la Península, sea exclusiva y común a todas las pinturas de un mismo grupo.

En las pinturas rupestres de todas las edades, incluso en las modernas de los salvajes actuales, se encuentran manifestaciones que cabe interpretarlas como producto de ideas muy diversas relativas a las complejas religiones primitivas.

No cabe dudar tampoco que dentro de cada grupo del arte rupestre de la Península, las significaciones de las pinturas son complicadas y variables, y que, conociéndose de manera incompleta el conjunto pictórico pues las investigaciones de esta clase son muy recientes, no puede tenerse la pretensión de intentar resolver por completo una cuestión que exigirá largos años de investigación y multiplicidad de investigadores.

Las ideas de magia, totemismo, animalismo, manismo y animismo se encuentran manifestadas claramente desde el paleolítico superior; las creencias mágicas se han reconocido que eran propias del *Homo neandertalensis*, como lo indican observaciones respecto a sus sepulturas. Manifestaciones producto de ideas de estas religiones primitivas se aprecian en los diversos grupos de pinturas rupestres, y siguen manifestándose entre los salvajes actuales, e infiltradas en las civilizaciones modernas europeas.

A pesar de todo esto se aprecia que el conjunto de cada uno de los grupos del arte rupestre de la Península obedece preferentemente a cada una de las ideas madres que he expuesto y que son, a saber: magia de caza primero, conmemorativa después, y funeraria últimamente.

VISTA PANORÁMICA DE LA MUELA DE *Morella la Vella*.
En el extremo de la izquierda, en el cruce de las líneas marginales, la galería con pinturas sobre la masía.

VISTA DEL TAJO, CON LA MASÍA DE *Morella la Vella*.
Encima de la masía, en el cruce de las líneas marginales, se señala la galería que contiene las pinturas.

Covacha del Roble, en el tajo de la muela de *Morella la Vella*.

Acerca de las propiedades de ciertas radiaciones emitidas por la chispa de la descarga oscilante

por

B. Szilard

PARTE I

Acciones iontizantes

CAPÍTULO I

Experiencias de orientación

1. Si se hacen saltar chispas oscilantes intensas entre electrodos de cinc, aluminio, cadmio o hierro, fácilmente puede comprobarse que un electroscopio cargado, situado en un lugar próximo, pierde rápidamente su carga.

Esta descarga se hace más intensa cuando se une el electroscopio a una pequeña antena aislada, formada por una barra de un metal cualquiera.

Al aumentar la superficie de la antena, el efecto aumenta; mientras que, si se oxida su superficie, se la engrasa ligeramente o se la cubre con una capa de jabón, el efecto queda sólo atenuado muy débilmente.

En un examen previo de este fenómeno, se siente uno inducido a creer que es producido por las ondas electromagnéticas, y más aún al considerar que la acción se ejerce a una distancia bastante grande.

Si se intercala entre la chispa y la antena una placa metálica, la acción queda considerablemente disminuída, sin quedar interceptada; y, al contrario, cuando el electroscopio y la antena se encierran juntamente en un recinto formado por una tela metálica de malla estrecha (de 1 mm. por malla), el efecto se produce con casi igual intensidad que en el aire libre.

2. Si se encierra *el detonador* en una caja metálica, se produce solamente una acción muy débil sobre el electroscopio, que se puede reducir a un mínimo sin más que separarle ligeramente de la caja. Pero prac-

ticando algunos *orificios finos* o una *hendidura fina* en la caja metálica, en la cara situada frente a la antena, pasa de nuevo la causa de la descarga, siendo indiferente en este caso el que la caja metálica se halle o no se halle unida a tierra.

Si se cambia la caja metálica por otra de cartón opaco por completo, la acción queda *igualmente* interceptada como por la caja metálica opaca, y esto ocurre aun cuando la caja de cartón repose sobre un bloque de parafina, hallándose completamente aislada de tierra.

Una hendidura hecha sobre la caja de cartón deja pasar la causa de la descarga, lo mismo que en el caso de la caja metálica.

Una placa de vidrio o de *cuarzo*, pegada sobre la hendidura, detiene por completo de nuevo la causa de la descarga.

Si se sustituye la caja de cartón por un cilindro de vidrio usual, cerrado herméticamente, este cilindro se manifiesta tan opaco a la causa de la descarga como la caja metálica o la de cartón.

3. Si se deja pasar libremente a la causa de la descarga, ésta actúa con independencia del signo de la carga del electroscopio; sin embargo, la intensidad de la descarga es *muy superior para la carga negativa que para la positiva.*

4. El orden de magnitud de la intensidad de la descarga negativa alcanza fácilmente hasta *2 U. E. S. por segundo* cuando la antena se halla a una distancia de 5 cm. solamente del detonador, que produce chispas fuertes, separada de éste sólo por una red tupida que se halla unida a tierra.

5. El fenómeno reseñado no puede atribuirse a las ondas electromagnéticas, puesto que dieléctricos tales como el papel y el vidrio le detienen completamente. Del mismo modo es inadmisible una acción electrostática, puesto que una red metálica de malla estrecha que envuelva por completo al sistema detectivo no disminuye la acción más que en cuantía insignificante.

6. Pudiera admitirse como causa de esta muy intensa iontización, la debida a los iones producidos directamente por la descarga, y que, dotados de una gran velocidad, pasarán a través de las mallas de la red metálica unida a tierra, determinando una corriente entre esta y el electrodo cargado. Sin embargo, produciendo una violenta corriente de aire, dirigida desde el nivel de la red hacia la chispa, se modifica ligeramente la forma de la descarga sin disminuir en nada su intensidad. Claro es que, en estas condiciones, los iones supuestos no podrían llegar ni a la red ni al electrodo.

CAPÍTULO II

Fundamento del sistema experimental empleado

7.° Establecida la naturaleza de la iontización producida por la descarga oscilante, se ha intentado establecer un generador de ésta de la mayor constancia posible y un sistema de medida adecuado para determinar la iontización.

En lo que se refiere a la descarga oscilante, se ha comprobado que *la chispa es tanto más rica en rayos iontizantes cuanto más condensada se halla,* por lo menos entre ciertos límites; se ha comprobado, igualmente, que, prescindiendo de las demás condiciones, es ventajoso reducir, en lo posible, la autoinducción del circuito y aumentar su capacidad; la energía iontizante es más intensa en estas condiciones.

Estas consideraciones nos condujeron al establecimiento de un circuito, en el cual, en lugar de emplear la chispa que salta en un detonador, empleamos otra chispa producida por esta misma corriente de gran frecuencia en las bornas de las armaduras externas de los condensadores que forman parte del circuito (véase la figura núm. 1).

Para no introducir ninguna causa de error en las medidas, conviene no exagerar el potencial empleado para la producción de la chispa (no debe pasar de 20.000 voltios); conviene, igualmente, evitar el que en alguna parte del circuito se produzcan descargas luminosas cualesquiera.

Las radiaciones de la chispa pasan por un diafragma y llegan a una cámara de iontización, uno de cuyos electrodos se halla unido a un electrómetro que permite realizar medidas con rapidez. La parte esencial del sistema empleado se comprende examinando la figura 2.ª

CAPÍTULO III

Descripción del sistema productor de chispas oscilantes

8. El circuito primario del transformador VI se halla sometido a una corriente continua de 230 voltios, procedente del generador I. Entre éste y el transformador existen una resistencia regulable II, una bobina de autoinducción de self regulable V, un amperímetro III, y, finalmente, un interruptor de Wehnelt IV. Estos aparatos se hallan montados en serie.

El circuito secundario del transformador VII termina en los dos lados en las bobinas de self sin núcleo de hierro VIII, destinadas a impedir la vuelta de la corriente oscilante. La corriente de gran tensión produce una descarga entre los dos electrodos de cinc IX, unidosa tres condensadores diferentes X, XII y XII′, y a una bobina de self regulable XI.

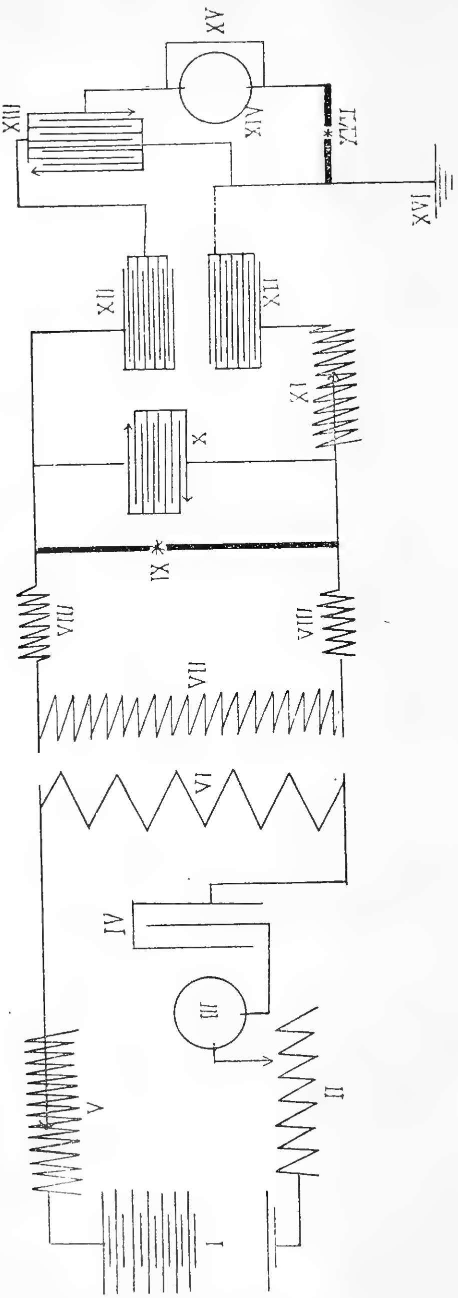


Figura 1.ª

El condensador X está montado en paralelo, la bobina de self XI en serie; por lo contrario, los condensadores XII y XII′ se hallan unidos cada uno solamente por una de sus armaduras al polo respectivo del circuito.

La otra armadura de estos condensadores sirve para la producción de corriente de gran frecuencia en el tercer circuito, formado por un condensador XIII de capacidad regulable, de un amperímetro térmico XIV, provisto de un shunt XV y de un detonador XVII, uno de cuyos polos se halla unido a tierra XVI.

Detalles

9. La corriente continua utilizada, de 230 voltios, es la industrial empleada en la ciudad (1). El transformador es de un tipo de circuito magnético semicerrado: se compone de dos series de bobinas,

(1) Madrid.

cada una de las cuales tiene un núcleo recto de láminas de hierro. Estas bobinas se hallan dispuestas paralelamente una a otra, sin que sus dos núcleos se hallen unidos más que por sus líneas de fuerzas magnéticas. La relación entre el número de espiras del arrollamiento primario y del secundario es 1 : 50.

Las espiras secundarias se hallan dispuestas en diez series arrolladas sobre micanita, y el conjunto se halla sumergido en aceite de vaselina blanca, del cual se ha expulsado previamente la humedad por medio de una calefacción prolongada.

El transformador, con el interruptor utilizado, absorbe seis amperios, aproximadamente.

El interruptor Wehnelt-Hauser es de electrodos de platino de longitud graduable, y permite obtener frecuencias de interrupción desde 100 hasta 600 por segundo. El polo negativo del interruptor se halla formado por una espiral de plomo, por cuyo interior circula una corriente de agua fría; el electrólito se compone de una solución concentrada de sulfato magnésico acidificada con ácido sulfúrico.

El detonador IX se compone de dos barras de cinc de 25 mm. de diámetro, y cuya distancia mutua puede graduarse por medio de un tornillo.

El condensador X es de capacidad regulable, lo mismo que el condensador XIII.

El amperímetro térmico XIV posee un shunt formado por un hilo rectilíneo, y cuyo objeto es evitar la ruptura del hilo calentado del amperímetro por las variaciones de la intensidad de la corriente, que con frecuencia son muy bruscas.

El detonador XVII se halla formado por dos barras de aluminio, dispuestas bajo un cierto ángulo, de vértice situado inferiormente. La chispa de este detonador sirve como manantial de las radiaciones estudiadas.

Funcionamiento

10. Hallándose la corriente interrumpida sucesivamente en tres lugares (por el Wehnelt y por los dos detonadores), y dependiendo de estas interrupciones las constantes de los tres circuitos, el sistema, en conjunto, funcionará en condiciones óptimas cuando el número de interrupciones del Wehnelt sea próximo al número de chispas que saltan en el primer detonador y a medida que el sistema se separe de esta coincidencia, su marcha se hará más irregular.

Conservando las mismas capacidades e inductancias, hay varios números de chispas con las cuales se obtiene la marcha regular, variando, naturalmente, la frecuencia del circuito primario y la distancia de los electrodos de los dos detonadores.

Desgraciadamente, el interruptor de Wehnelt no es un instrumento que funcione de un modo muy regular, por lo cual es necesario regularle constantemente, con detrimento de la uniformidad y regularidad de las radiaciones emitidas por el segundo detonador.

La distancia entre los electrodos de este detonador se mantiene constante, en lo posible, durante el tiempo empleado en las medidas, limitándose en este tiempo a la regulación del Wehnelt y a la variación muy pequeña de los electrodos del primer detonador.

La regulación de éste es bastante delicada, pues si sus electrodos no se hallan separados suficientemente, no se produce ninguna chispa en el segundo detonador; y si la separación excede ligeramente de un cierto límite, no hay producción de chispas en el primer detonador, originándose entonces chispas *no oscilantes* sobre el segundo detonador.

La regularidad en el funcionamiento se aprecia muy bien por el ruido producido a la vez por el interruptor y las chispas. Un sonido musical significa una buena regulación.

El resultado de la regulación se observa muy bien, sobre todo en el amperímetro térmico del tercer circuito, e igualmente muy bien en el electrómetro unido a un electrodo cualquiera, expuesto a las radiaciones (§ 13) de la chispa del circuito tercero; las oscilaciones del amperímetro y del electrómetro son paralelas.

CAPÍTULO IV

Método de medida

11. Descripción del sistema empleado para la medida.

Este sistema se encuentra montado de modo tal que se halle, en lo posible, al abrigo de las perturbaciones eléctricas debidas a la corriente oscilante; por otra parte, se han tomado las precauciones necesarias para que las radiaciones no puedan escapar por ninguna hendidura. Éstas son las principales causas de error.

Los electrodos de aluminio, hierro o cinc I atraviesan una placa gruesa de ebonita II, de tal modo que sus extremos inferiores, en los cuales salta la chispa V de gran frecuencia, forman un cierto ángulo. Los productos nitrosos, cuya formación determina la chispa, son expulsados por el tubo de vidrio IV y sustituídos por el aire frío que pasa por los orificios III.

Todo el sistema se halla rodeado por el cilindro de vidrio grueso (8 milímetros) VI, que, siendo completamente opaco a los rayos ultravioletas y a las demás radiaciones emitidas, permite observar la forma de la descarga.

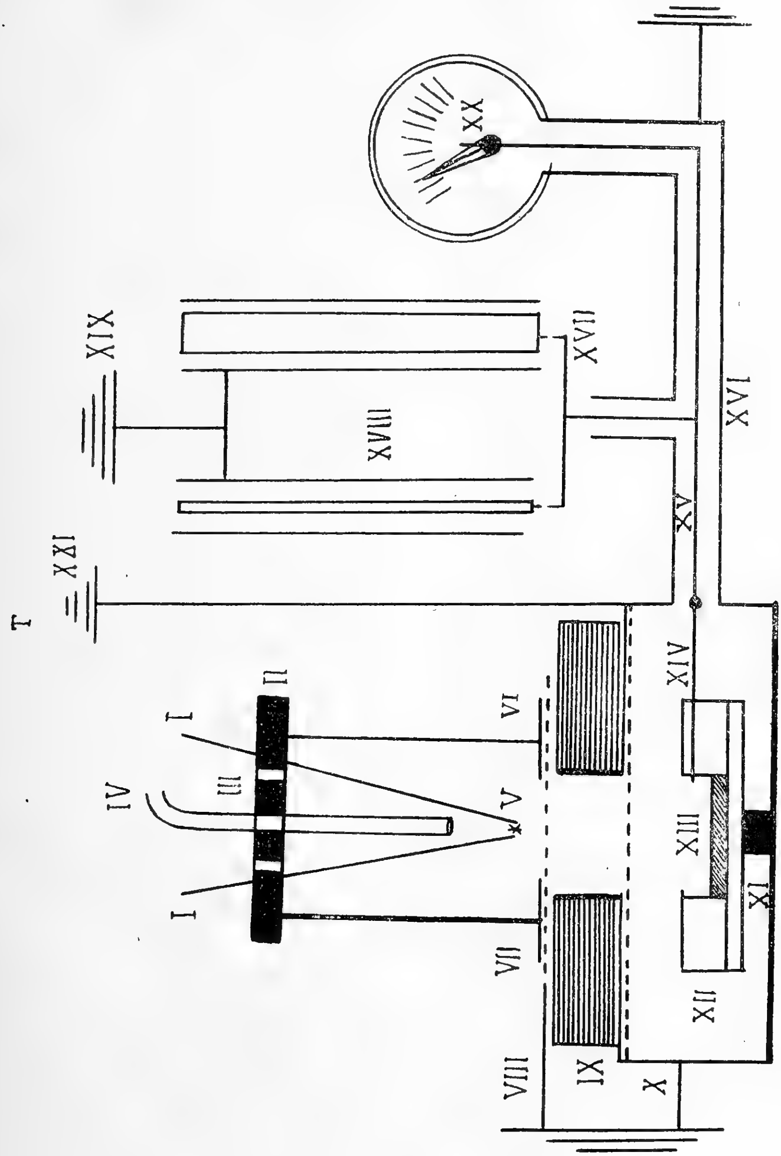


Figura 2.ª

Un diafragma VII, de 38 mm. de diámetro, deja pasar los rayos a través de un enrejado metálico, de latón oxidado VIII, unido a tierra. Después de esta red sigue una serie de placas IX, provista cada una, en su centro, de un orificio circular de 38 mm. de diámetro. El número de estas placas puede aumentarse a voluntad, y la red VIII puede colocarse entre las placas o por debajo de éstas.

La cámara de iontización está formada por una caja X de cartón, completamente opaca y revestida de papel de estaño en su interior. Este papel de estaño, así como también las placas IX y la red VIII, se han recubierto, previamente, con una solución de jabón.

Una pieza aisladora XI soporta a la cubeta de vidrio XII, que contiene a la sustancia XIII que sirve de electrodo.

La cubeta de vidrio XII se halla formada por una pieza rectangular de vidrio, en cuyo centro hay una abertura circular de 38 mm. de diámetro, y cerrada, por debajo, por una placa de vidrio.

La sustancia XIII se halla unida, por medio de un hilo de platino XIV, con la borna de conexión del electrómetro XV.

Estas conexiones se hallan todas envueltas por un tubo metálico XVI, unido a tierra.

El hilo de conexión XV, llega, además del electrómetro, al conmutador XVII, y permite así unir el dispositivo de medida con un sistema de condensador de aire XVIII, cuya otra armadura XIX se halla unida a tierra.

Esta disposición tiene por objeto el poder aumentar instantáneamente la capacidad del sistema de medidas y de variar de este modo la sensibilidad, sin variar el *régimen de voltaje* utilizado para las mediciones.

El electrómetro XX es un instrumento de capacidad pequeña, de aguja rígida sobre una escala fija, graduada en voltios. En 1913 hice la descripción completa de este instrumento, ideado por mí (1).

Una pared metálica XXI separa completamente el sistema de irradiación del sistema de medida.

Objeto de las medidas

12. Las medidas efectuadas tendieron a determinar la iontización producida por las radiaciones de la chispa.

Con este fin se ha estudiado:

A) El orden de magnitud general de la corriente de iontización producida.

B) Las variaciones de la intensidad de la corriente de iontización a variar la materia que sirve de electrodo.

(1) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* t. 157, pág. 768.

C) Las variaciones de la intensidad de la corriente en función de la distancia del electrodo cargado al origen.

D) La intensidad de la corriente de iontización en función de su signo.

E) La intensidad de la corriente en función de la distancia mutua de los electrodos.

F) Y, finalmente, las variaciones producidas al variar combinando los factores anteriores.

Preparación de los electrodos

13. La materia que servía de electrodo cargado se preparaba en pequeñas cubetas rectangulares de vidrio, que tenían en su centro una concavidad circular (fig. 2, XII). Se eligió un cierto número de cubetas idénticas, en lo posible, entre sí; el diámetro de las concavidades era de 38 milímetros, con error inferior a una décima de milímetro. De esta manera se podía disponer de superficies completamente comparables entre sí.

Un hilo de platino sumergido en la materia, servía para establecer el contacto entre ésta y el sistema de medida. Este hilo, en el interior de la cubeta, se hallaba recubierto, en lo posible, por la misma materia, y, a su salida, por una capa gruesa de parafina, de tal modo que aun las radiaciones reflejadas no pudieran afectarle directamente. Esta precaución es indispensable, pues un hilo de esta clase, corto y fino, influenciado por las radiaciones, puede originar por sí solo una corriente muy intensa.

La sustancia, si era líquida (agua, mercurio, ácido sulfúrico, etc.), se vertía en la cubeta directamente por medio de una pipeta. Si era metálica (plata, etc.), se recortaba en forma de disco, que tenía exactamente las dimensiones de la cavidad que ocupaba en la cubeta.

Los electrodos empleados preferentemente fueron, por la razón que más adelante se dirá (§ 16), sales cristalinas. Se preparaban en la forma siguiente: se vertía en la cubeta una pequeña cantidad de agua destilada y una cantidad de la sal (nitrato de potasio, nitrato de uranilo, etc.) superior a la necesaria para obtener una solución concentrada; se calentaba todo en el baño de María, cuidando de que la solución se mantuviera sobresaturada, y se dejaba enfriar lentamente, retirando el agua madre por medio del papel de filtro. Las capas de sal así obtenidas se desecaban al aire libre, si la sal contenía agua de cristalización, y en el desecador, si la sal era anhidra. Tras algún tanteo, se obtienen por este procedimiente capas uniformes, coherentes y perfectamente lisas.

Marcha en las medidas

14. La cubeta que contiene la materia que sirve como electrodo se une con el sistema de medida por medio de un hilo fino (XV), y, puesta en su lugar la red metálica, unida a tierra, se coloca el número de placas necesario (IX) para obtener la distancia adecuada entre el generador y el electrodo cargado.

Antes de hacer funcionar el detonador, se une el tubo IV (fig. 2) cou un aspirador (trompa de agua); sin esta precaución, los vapores nitrosos formados por las chispas y acumulados en el recipiente cerrado, son nocivos en grado muy apreciable en la exactitud de las medidas, pues *absorben fuertemente las radiaciones emitidas,* y, al contrario, la corriente de aire modifica sólo muy ligeramente estas medidas, de tal modo que, operando siempre con la misma velocidad, aproximadamente, el error es despreciable.

Se carga entonces el electrómetro, positiva o negativamente, empleando con preferencia una batería de acumuladores.

Al realizar las medidas se ha cuidado que el régimen medio de voltaje fuera de 250 y 300 voltios. Era necesario cuidar en la constancia de este detalle, puesto que la corriente de saturación no se obtenía, probablemente, en ningún caso con este régimen.

Son bastante considerables las dificultades que se oponen a la realización de buenas medidas; para que la corriente alcance en la chispa su valor normal es necesario un lapso de varios segundos de tiempo, y entonces se necesita que la posición de la aguja del electrómetro sea tal, que permita realizar la medida con el régimen elegido como de voltaje medio. Es preciso, además, que la medida no dure más de treinta segundos, pues excedido este límite, el funcionamiento del sistema productor de radiaciones se hace, con frecuencia, irregular; además, algunas veces *la corriente de iontización parece debilitarse poco a poco con un electrodo que se halle expuesto largo tiempo a las oscilaciones.* Se produce entonces una especie de fatiga.

Los condensadores de medida (XVIII, fig. 2), permiten el cambio rápido de la sensibilidad de ésta, sin introducir ningún cambio en el régimen medio del potencial empleado.

Las medidas se hacen después de cargar el electrómetro, por ejemplo, a 350 voltios, modificando la resistencia variable (fig. 1, II) para enviar poco a poco, en el arrollamiento primario, la corriente de la intensidad deseada, y vigilando la energía de la chispa en el amperímetro térmico (figura 1, XIV). Se comienza la lectura electrométrica cuando la energía de la chispa ha alcanzado su valor normal y la aguja del electrómetro se halla, por ejemplo, en 260 voltios. Se mide el tiempo necesario para que el potencial caiga a 240 voltios, por ejemplo. De la caída del potencial y de la capacidad del sistema (100 U. E. S. con la cámara de iontización y los dos condensadores), se deduce la intensidad de la corriente. No debe descuidarse la comprobación de la fuga espontánea en el instrumento, e igualmente debe comprobarse si el sistema de medida se halla por completo al abrigo de toda perturbación eléctrica extraña. Para este fin, se intercala entre el manantial (chispa) y el electrómetro cargado, una hoja fina de papel o *una placa delgada de vidrio, que debe cortar completamente la corriente de iontización cuando la chispa se halle en plena marcha.*

CAPÍTULO V

Propiedades de las radiaciones

La absorción de las radiaciones.

15. Haciendo que la distancia de la chispa al electrodo sea de 67 mm., la del electrodo cargado y la red unida a tierra sea de 34 mm., se ha realizado la experiencia siguiente:

Sobre un diafragma colocado a 5 mm. de la chispa, se han intercalado diversas pantallas, destinadas al filtrado de las radiaciones antes de su llegada a la red unida a tierra y al electrodo. Estas pantallas eran las siguientes: *a)* Un vidrio blanco, de 1 mm. de grosor; *b)* Un cubre-objetos de microscopio de 15/100 de mm.; *c)* Una placa de cuarzo, de 2 mm.; *d)* Papel de seda, de 2/100 de mm., cubierto con una capa fina de goma-laca. Como electrodo se empleó agua destilada. Al hacer saltar constantemente las chispas que sirven de manantial, se realizan, alternativamente, ensayos con una de estas pantallas, y después sin pantalla.

La amplitud de corriente de la chispa oscilante era de tres amperios. El orden de magnitud de la corriente de iontización era igual a una unidad electrostática absoluta, cuando el escape o fuga observada, al emplear papel negro como pantalla, era de 0.005 U. E. S.

La corriente de iontización observada al emplear cualquiera de las pantallas antes mencionadas, era del mismo orden de magnitud que la de fuga o escape, sin exceder a éste en ningún caso; las radiaciones capaces de producir una corriente de iontización, si es que existen en estas condiciones, debían ser menores que cinco milésimas de las que producen una corriente de una unidad electrostática cuando no son filtradas.

Las radiaciones de la chispa oscilante pasan fácilmente a través del aire y tienen un poder iontizador potente, siendo muy absorbibles por cualquier medio sólido.

La corriente de iontización al variar la materia del electrodo

16. Con el objeto de conocer mejor la naturaleza de las radiaciones, se han realizado una serie de ensayos, variando la naturaleza del electrodo.

Era interesante emplear para este fin, principalmente, sustancias que fueran muy poco, o nada en absoluto, fotoeléctricas para los rayos ultravioletas de longitud media de onda.

Como sustancias poco fotoeléctricas se han empleado el bisulfato de quinina y el nitrato de potasio, y, como metal, la plata de superficie mate corroída.

Como líquidos se han ensayado el ácido sulfúrico concentrado, el agua destilada y el agua oxigenada.

Se han empleado como sustancias no fotoeléctricas el nitrato de uranilo y el nitrato de torio, fundándonos para ello en la observación interesante de G. C. Schmidt (1) de que las sales de uranio y torio, aunque absorben fuertemente la parte ultravioleta, no presentan ningún indicio de sensibilidad fotoeléctrica.

CUADRO NÚMERO 1

Sensibilidad de diferentes sustancias a las radiaciones emitidas por la chispa oscilante

Distancia entre la superficie de la sustancia y el punto más bajo del manantial luminoso	67 mm.
Distancia de la superficie de la sustancia a la red de latón unida con la tierra	34 —
Régimen de tensión media utilizado para las medidas	250 voltios.
Superficie de la sustancia	38 mm.

Los electrodos en los que se produce la chispa oscilante son de hierro.

(1) G. C. Schmidt, *Wied. Ann.,* 64, pág. 708, 1878: «Uranium und Thorium und ihre Verbindungen sind die einzigen Körper welche obwohl sie das ultraviolettes Licht stark absorbieren, demnoch lichtelektrisch unempfindlich sind.»

Esta observación se hizo dos años después del descubrimiento de la radiactividad del uranio y en el mismo año del descubrimiento de la del torio, sin que después se haya insistido en el establecimiento de la razón por la cual los cuerpos radiactivos no son fotoeléctricos; sin embargo, las observaciones sobre este asunto permitirían esclarecer algunos fenómenos intra-atómicos.

La amplitud de la corriente leída en el amperímetro térmico osciló entre 3 a 3,2 amperios.

Las medidas consignadas a continuación deben considerarse solamente como indicaciones cualitativas que representan el *orden de magnitud,* sin ser comparables entre sí.

Sustancia	Corriente negativa
Bisulfato de quinina	1,9 U. E. S.
Nitrato de potasio	2,0 —
Nitrato de torio	1,5 —
Nitrato de uranilo	2,0 —
Acido sulfúrico	2,1 —
Agua destilada	1,1 —
Agua oxigenada de 30 volúmenes	0,8 —
Plata de superficie sin limpiar	2,2 —

Según vemos en el cuadro núm. 1, todos los electrodos, líquidos o sólidos, metálicos o salinos, producen una intensa corriente de iontización. En estas experiencias el electrómetro se hallaba cargado negativamente. Como las medidas realizadas no se han hecho en condiciones idénticas, las cifras consignadas indican solamente el orden de magnitud.

Orden de magnitud de la corriente de iontización

17. Para tener una idea del orden de magnitud de la corriente de iontización obtenida por las radiaciones no filtradas de la descarga oscilante en chispa, pueden tenerse en cuenta las indicaciones comparativas siguientes:

En condiciones idénticas, es decir, con un régimen de potencial de 250 voltios, a superficie constante, y hallándose los electrodos a 34 mm. de distancia, una capa de óxido negro de uranio produce una corriente de 0.012 unidades electrostáticas absolutas; en las mismas condiciones, una capa análoga de nitrato de uranilo produce una corriente del orden de 0.004 U. E. S. El orden de magnitud de la corriente fotoeléctrica obtenida con una placa pulida de cinc, intensamente iluminada por una lámpara de arco, es, aproximadamente, el mismo. Ahora bien: el orden de magnitud de la corriente obtenida por las radiaciones de la chispa, es de 2 U. E. S.; es decir, de un orden unas 500 veces superior.

Esta gran diferencia entre el orden de magnitud de la corriente fotoeléctrica ordinaria y el de la corriente estudiada, permite ver que todo error de interpretación queda excluído, e igualmente que la corriente debida a la radiactividad de ciertas sales ensayadas en nada influye en las medidas.

Influencia del signo sobre la intensidad de la descarga debida a las radiaciones

18. Para determinar cómo varía la intensidad de la descarga con el signo de la corriente, se han sometido a las radiaciones diferentes electrodos, cargados unas veces positiva, y otras negativamente, colocados siempre a 42 mm. de distancia del manantial de radiaciones.

La distancia entre el enrejado unido a tierra (a través del cual las radiaciones caen sobre el electrodo) y el manantial, era de 35 milímetros.

En estas condiciones, hallándose muy cerca del manantial de radiaciones, se producen corrientes muy intensas para la carga negativa, que pueden llegar a 15 U. E. S., o más aún.

La intensidad de la corriente en la chispa no fué idéntica por completo en las diversas medidas consignadas en el cuadro número 2.

CUADRO NÚMERO 2

Intensidad de la descarga en función de su signo

Distancia entre la superficie de la sustancia y el punto más próximo de la chispa... 42 mm.

Distancia entre la superficie de la sustancia y la red de latón unida con tierra... 9 —

Las condiciones restantes son idénticas a las consignadas en el cuadro número 6.

Sustancia	Signo	Corriente	Razón de la corriente positiva a la negativa
SO_4H_2	+	9,6 U. E. S.	1,6
SO_4H_2	—	15,4 —	
H_2O	+	3,3 —	1,74
H_2O	—	5,75 —	
$(NO_3)_2(UO_2), 6H_2O$	+	7,6 —	1,48
$(NO_3)_2(UO_2), 6H_2O$	—	11,2 —	
NO_3K	+	8,4 —	1,25
NO_3K	—	10,4 —	

Las sustancias ensayadas, ácido sulfúrico, agua, nitrato de uranilo y nitrato potásico, produjeron siempre una corriente más intensa para la carga negativa que para la positiva; igualmente, la relación entre las dos clases de descarga fué siempre semejante en cada uno de estos casos, siendo, por término medio, la razón de la negativa a la positiva, como 1,5 : 1.

En el cuadro núm. 3 se detallan estos resultados.

Intensidad de la corriente de iontización en función de la distancia del manantial de radiaciones al electrodo cargado

19. Si se coloca el electrodo cargado a una distancia de 67 milímetros del manantial en lugar de 42, se comprueba inmediatamente una disminución muy fuerte en la intensidad de la corriente de iontización.

La corriente negativa se reduce, por término medio, a la sexta parte de su valor original. Pero este descenso es aún más considerable para la corriente positiva, que desciende fácilmente a un quinceavo de su valor primitivo.

CUADRO NÚMERO 3

Descarga provocada por diferentes sustancias, para una intensidad constante de luz, variando el signo de la descarga

Distancia entre el manantial y la superficie de la sustancia.	67 mm.
Distancia entre la sustancia y la red unida a tierra........	9 —
Distancia entre el manantial y la red unida a tierra........	58 —
Amplitud de corriente de la chispa, indicada por el amperímetro térmico..	3,2 amperios.
Diámetro del disco de sustancia utilizada.................	38 mm.
Régimen del voltaje medio utilizado para las medidas......	300 voltios.

Sustancia	Corriente positiva	Corriente negativa	Razón de las dos corrientes
Nitrato de uranilo................	0,48	2,0	4,16
Bisulfato de quinina...............	0,45	1,9	4,20
Agua destilada....................	0,30	1,3	4,30
Plata de superficie sin limpiar.....	0,52	2,15	4,10
Mercurio de superficie pura.......	1,05	8,5	8,1

Al examinar los resultados de las experiencias que se indican en el cuadro núm. 3, se ve que la relación entre la descarga negativa y la positiva, que era de 1 a 1,5 para una distancia de 42 mm., se transforma en 1 : 4,20. La descarga positiva queda, pues, *en estas condiciones*, muy rezagada con respecto a la positiva.

Se advierte, además, que las cifras que expresan las razones respectivas son más próximas unas de otras que las obtenidas para diferentes sustancias cuando la distancia entre el manantial y el electrodo era más corta (cuadro número 2).

La razón de esta circunstancia debe buscarse más en las propiedades del manantial de radiaciones, cuyas irregularidades de producción se manifiestan preferentemente a distancia corta que a larga distancia, que en las propiedades diferentes de las diversas sustancias. Sin embargo, es posible que una diferencia semejante, dependiente de la naturaleza del electrodo, pueda existir igualmente.

Intensidad de la corriente de iontización en el caso de un electrodo fotoeléctrico

20. Ofrecía un interés muy especial examinar la conducta de una sustancia fotoeléctrica en las mismas condiciones; el mercurio se prestaba muy bien para esta experiencia, por una parte, porque en las condiciones ordinarias (luz ultravioleta, de longitud media de onda) es relativamente fotoeléctrico débil, y, por otra parte, porque su estado líquido facilita su manejo en el vaciado y lleno de la cubeta, tomando la forma de ésta y asegurándose así la misma superficie que se tenía para las otras sustancias.

Resultó que en las mismas condiciones indicadas en el cuadro núm. 3, la corriente negativa obtenida con el mercurio de superficie pura era de un orden cuatro veces mayor que la lograda mediante el nitrato de uranilo o con una superficie de plata corroída.

No ocurrió lo mismo en lo referente a la corriente positiva, que sólo era el doble de la obtenida con otros electrodos en *las mismas condiciones*. De este modo resultó con el mercurio puro una relación de 1 : 8 entre la corriente positiva y la negativa.

Si se considera que el mercurio de superficie corroída (1) produce una corriente del mismo orden que la plata, se deduce que la corriente de iontización *que corresponde a la superficie reflectora* (brillante) es próximamente de 0,5 U. E. S. para la corriente positiva, y de casi 6,0 U. E. S. para la corriente negativa, lo cual conduce a una razón de 1 : 12. *Estas corrientes se deberán, pues, a causas distintas de las puestas en evidencia por medio de sustancias no fotoeléctricas.* Sean debidas o no al efecto fotoeléctrico ordinario, prueban la posibilidad de una emisión *positiva* por *un metal*, pues en este caso *no es posible admitir* que la presencia de los iones positivos se debe a las moléculas gaseosas cargadas positivamente como consecuencia de haber perdido iones negativos.

(1) Al cabo de algunos minutos de irradiación, la superficie del mercurio se oxida, y el electrodo se comporta inmediatamente como de plata de superficie corroída.

Intensidad de la corriente de iontización en función del volumen gaseoso comprendido entre los electrodos

21. La distancia entre el manantial y el electrodo cargado y el signo de la descarga, no son los únicos factores que determinan la intensidad de la corriente de iontización. Otro factor que influye muy considerablemente, es el volumen del gas comprendido entre los electrodos.

CUADRO NÚMERO 4

Intensidad de la descarga, en función de la distancia entre la sustancia y la red unida con tierra, siendo constante la distancia del manantial luminoso

Distancia entre el manantial luminoso y la superficie de la materia irradiada.............................. 97 mm.
Amplitud de corriente en la chispa, indicada por el amperímetro térmico.............................. 3 amperios.
Sustancia utilizada: nitrato de uranilo cristalizado.
Superficie de la sustancia.............................. 38 mm. de diámetro.

Distancia entre el manantial y en red unida con tierra	Distancia entre la red y la sustancia	Corriente negativa
88 mm.	9 mm.	0,06
63 —	34 —	0,30
33 —	64 —	1,20

Conservando el mismo régimen de potencial para las medidas, colocando la chispa a distancia constante y variando la posición del electrodo unido a tierra, se obtienen corrientes cuya intensidad es muy diferente de unas a otras.

Para la corriente negativa y entre límites bastante amplios (ensayados de 9 a 100 mm.), la corriente crece intensamente con el volumen gaseoso (aire) comprendido entre el electrodo cargado y el electrodo unido a tierra; en otros términos, conservando las demás cosas en las mismas condiciones, al aumentar sencillamente la distancia entre estos dos electrodos, crece la intensidad de la corriente. En el cuadro núm. 4 se resumen algunas medidas realizadas con el ni trato de uranilo.

Cuando los electrodos se separan desde 9 mm. hasta 34 mm., la corriente se hace cinco veces más intensa; cuando se separan desde 34 a 64 mm., se hace de nuevo cuatro veces más fuerte.

CUADRO NÚMERO 5

"Intensidad" de la descarga en función de su "signo"

Distancia entre la superficie de la sustancia y el punto más bajo del manantial luminoso	67	mm.
Distancia entre la superficie de la sustancia y la red de latón unida con tierra	34	—
Régimen de tensión media utilizado para la medida	250	voltios.
Superficie de la sustancia	38	mm.
Amplitud de la corriente marcada en el amperímetro térmico.	3,3	amperios.
Longitud de la chispa (aproximadamente)	5	mm.

Sustancia	Signo	Corriente	Razón de la corriente negativa a la positiva
NO_3K	+	0,97 U. E. S.	5,3
NO_3K	—	5,55 —	
$(NO_3)_2(UO_2)$	+	0,64 —	7,4
$(NO_3)_2(UO_2)$	—	4,75 —	

La corriente de iontización en función de su signo y el volumen gaseoso entre los electrodos

22. Manteniendo constante la distancia del manantial al electrodo cargado, y variando el volumen gaseoso comprendido entre los electrodos, la corriente positiva queda también influenciada, pero de ningún modo en el mismo grado que la corriente negativa.

Esto se aprecia inmediatamente al comparar los datos del cuadro 3 con los del 4. En los dos casos, el manantial se halla a 67 mm. de distancia del electrodo cargado; pero el enrejado se halla a una distancia de 9 mm. del electrodo en el primer caso, y a 34 mm. en el segundo.

CUADRO NÚMERO 6

Influencia del manantial sobre la razón de la descarga positiva a la negativa, en función de la distancia del manantial y en función de la distancia de la red a la sustancia

Sustancia empleada: nitrato de uranilo cristalizado.

Diámetro del disco de sustancia	38	mm.
Régimen medio de voltaje utilizado para las medidas	250	voltios.
Amplitud de la corriente oscilante indicada por el amperímetro térmico: variable entre 2,8 y	3,6	amperios.

Distancia entre el manantial y la sustancia	Distancia entre la red y la sustancia	Signo	Intensidad de la descarga	Razón de la descarga — a la +
42	9	+	7,6	1,48
42	9	—	11,2	
67	9	+	0,48	4,16
67	9	—	2,0	
67	34	+	0,64	7,4
67	34	—	4,75	
97	64	+	0,06	18,0
97	64	—	1,1	

El cuadro núm. 6, formado con experiencias aisladas (en las que sólo son comparables las razones), hechas con el nitrato de uranilo, permite apreciar que, en general, al separarse del manantial, la razón entre la descarga negativa y positiva se convierte en una cifra cada vez mayor y en favor de la corriente negativa, y que pasa lo mismo cuando, sin separarse del manantial, se aumenta el volumen del aire entre los electrodos.

CAPÍTULO VI

Estudio de la marcha de las descargas
Dificultades experimentales causadas por el fenómeno de fatiga

23. Hemos estudiado sistemáticamente la marcha de las descargas en condiciones casi idénticas a las de las experiencias aisladas anteriores; las dificultades fueron muy grandes, porque es en extremo difícil el mantener constante la intensidad y la naturaleza de la descarga. Interviene además otro fenómeno que perturba las experiencias; es una especie de fatiga que el electrodo o quizá el aire parece experimentar al cabo de un cierto número de medidas. Esta fatiga puede fácilmente llegar a un 15 por 100 de las que cada una hacia el fin de una serie de medidas compuesta de veinte observaciones, dura cuarenta segundos.

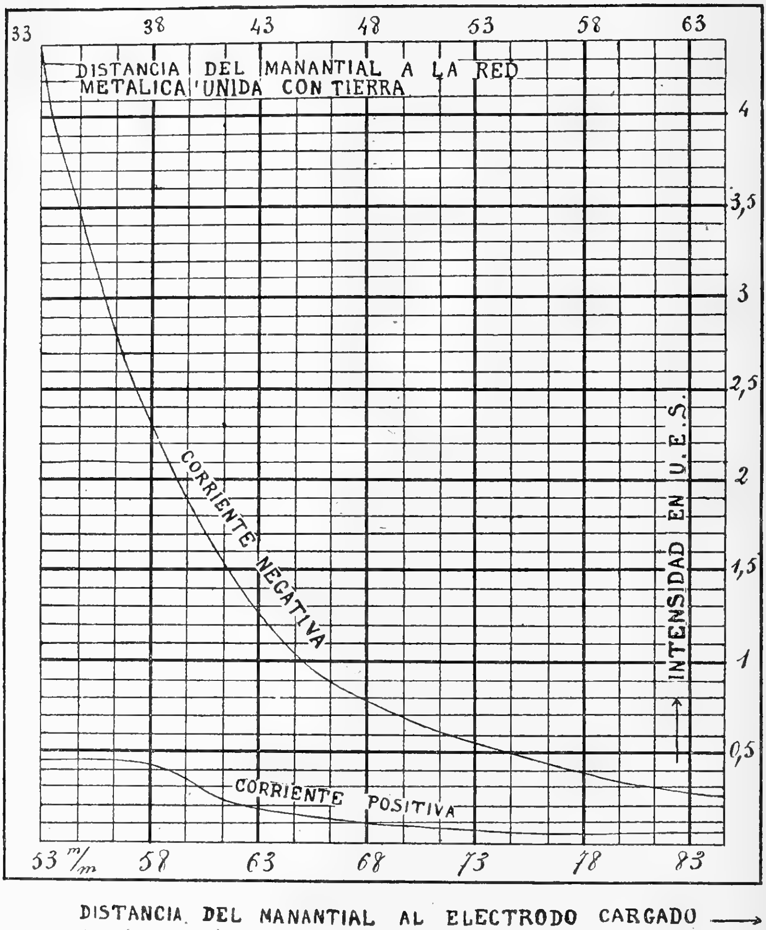
Se ha combatido esta causa de error haciendo la misma serie de medidas en dos días consecutivos, comenzando el primer día por los valores crecientes, y en el segundo día, cuando la fatiga ha desaparecido, por los valores decrecientes. Se han tomado en seguida los valores medios, corregidos por el error medio respectivo de cada par de experiencias.

Forma de la descarga negativa y positiva en función de la distancia del manantial a los electrodos

24. Colocando los electrodos a una distancia constante de 20 milímetros uno de otro, se ha variado la distancia del manantial al electrodo

cargado entre 53 y 83 mm. Como electrodo se ha empleado el nitrato de uranilo cristalizado, cuya superficie, lo más uniforme posible, era de 38 mm.

Las curvas número 1, construídas en estas condiciones, representan



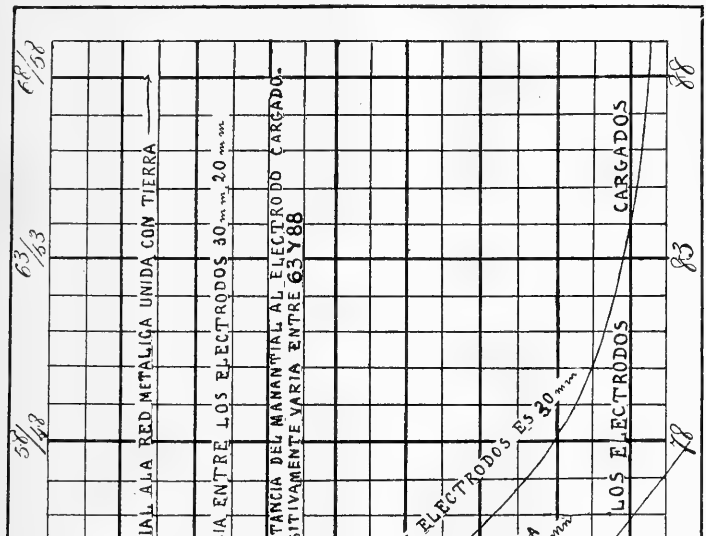
Curvas número 1.

Intensidad de la descarga negativa y positiva en función de la distancia del manantial a los electrodos. Distancia constante de los electrodos (substancia cargada y red metálica unida a tierra (20 milímetros.). La distancia del manantial al electrodo cargado varía entre 53 y 83 milímetros.

la marcha de la descarga positiva y la de la negativa. Esta marcha no es característica más *que para la distancia de manantial empleada en estas experiencias,* y sólo para las mismas distancias de los electrodos.

Marcha de la descarga positiva en función de la distancia del manantial al electrodo y variando la distancia mutua de los electrodos

25. Haciendo variar la distancia del manantial al electrodo cargado positivamente entre 63 y 88 mm., hemos realizado dos series de medidas:



INTENSIDAD DE LA DESCARGA POSITIVA EN FUNCION DE LA DISTANCIA DEL MANANTIAL A LOS ELECTRODOS

Curva número 2.

una con una distancia de 30 mm. entre los electrodos, y en la otra de 20 mm.

La materia empleada en los electrodos era, de nuevo, el nitrato de uranilo cristalizado. Las dos curvas obtenidas son completamente paralelas; se advierte la gran diferencia de intensidad producida sencillamente por la diferencia entre los electrodos, la cual, al aumentar en 33 por 100, produce inmediatamente un aumento en más de 50 por 100 en la intensidad de la corriente.

Forma de la descarga negativa cuando la distancia entre el manantial y el electrodo es media y varía la distancia mutua de los electrodos.

26. La curva núm. 3 se ha obtenido con una descarga negativa, siendo la distancia del manantial al electrodo cargado de 93 mm. El electrodo se halla constituído, como en las determinaciones anteriores, por una capa de nitrato de uranilo cristalizado.

La distancia mutua de los electrodos se varió de 20 a 60 mm.

Al disminuir el volumen de la masa gaseosa entre los electrodos, la corriente baja al principio rápidamente y con bastante regularidad; cuando la distancia entre los electrodos se hace más débil, los descensos sucesivos de la corriente se hacen también más débiles.

De nuevo he observado que esta marcha es característica solamente para la distancia de chispa concerniente a la cual se ha establecido.

Forma de la descarga positiva y negativa cuando la distancia del manantial a la materia cargada queda constante y varía el volumen del aire comprendido entre los electrodos

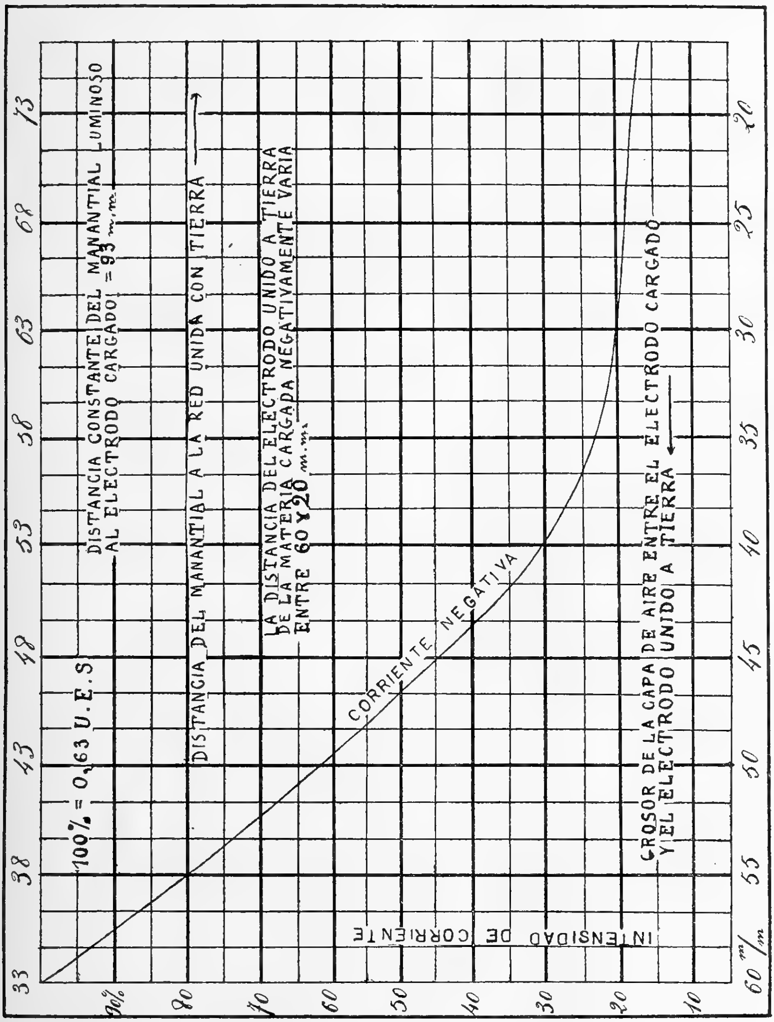
27. Las curvas representadas en la serie núm. 4, se han obtenido con una distancia de 73 mm. entre el manantial y el electrodo cargado; la distancia mutua entre los electrodos varió entre 40 y 20 mm.

La materia del electrodo cargado era, como para las curvas precedentes, el nitrato de uranilo cristalizado.

Se advierte que la descarga negativa disminuye al principio con bastante rapidez, pero regularmente, al disminuir el volumen de aire comprendido entre los electrodos; esta disminución se hace menos sensible para las distancias débiles.

La corriente positiva se comporta muy diferentemente. Aumenta al principio con el volumen de aire, pasa por un máximo y decrece de nuevo.

Gracias a las experiencias repetidas varias veces, se ha establecido con seguridad que la marcha de la descarga positiva y negativa, en las condiciones experimentales de las curvas núm. 1, lo mismo que en el caso



Curva número 3.
Intensidad de la descarga negativa en función de la capa de aire entre los electrodos.

de las curvas núm. 2, no son paralelas, especialmente en lo que concierne a cierta región.

La serie de curvas número 5, en las cuales las medidas se han expresado en $^0/_0$ de las intensidades máximas, hace muy evidente esta circunstancia.

CAPÍTULO VII

Interpretación de las curvas

28. La disminución rápida de la corriente negativa, representada en la serie de curvas núm. 1, establecidas en función de la distancia del manantial a los electrodos, prueba que la chispa oscilante emite radiaciones iontizantes *absorbibles*, no solamente por los sólidos, sino *también por el aire a la presión ordinaria.*

Estas radiaciones son capaces de producir, no solamente una corriente negativa, sino también una positiva; *la intensidad de esta medida, a partir de una distancia del manantial igual a 40 mm., es siempre inferior a la de la corriente negativa.* (Cuadro núm. 2.)

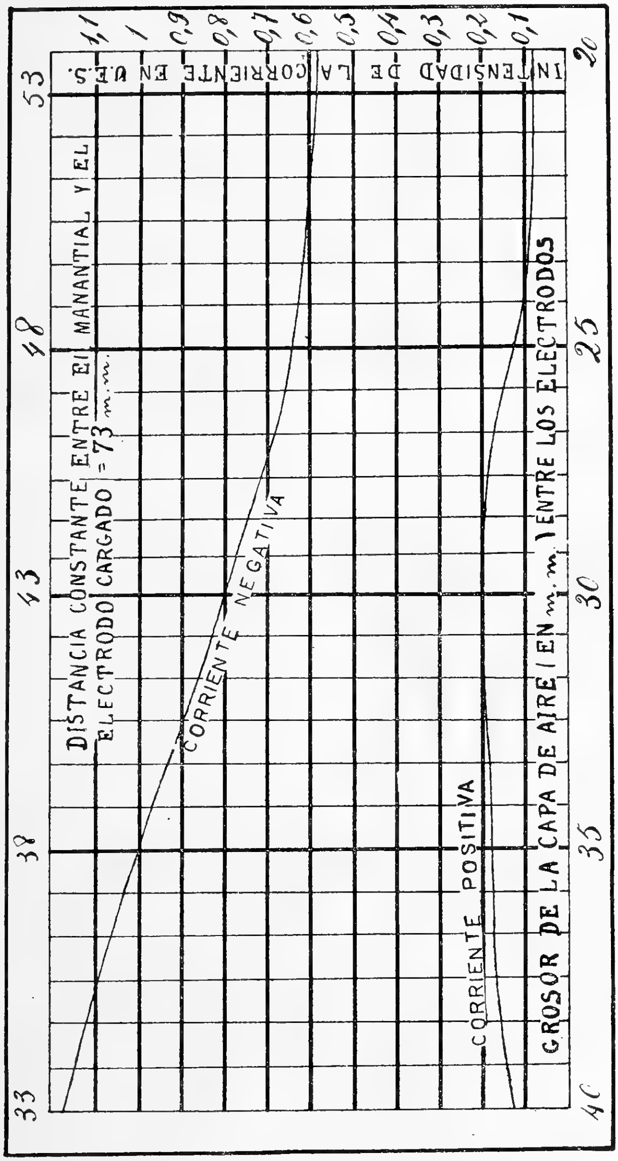
La marcha de la descarga positiva no es, o no siempre, por lo menos, *paralela a la descarga negativa.* (Curvas núm. 1, núm. 4, y número 5.) Variando la distancia de la luz al electrodo cargado, al mismo tiempo que la distancia entre los electrodos (curvas núm. 3 y núm. 4) se obtienen curvas de forma diferente; esto permite admitir que las radiaciones iontizantes emitidas por la chispa no son homogéneas.

El hecho de que al aumentar el volumen del aire comprendido entre los electrodos, aumente fuertemente la intensidad de la corriente de iontización, prueba que el poder iontizante de las radiaciones estudiadas es de misma natura que el de otras radiaciones iontizantes conocidas.

29. La marcha de la descarga positiva en función de la distancia mutua de los electrodos (curvas núms. 4 y 5) puede explicarse así: La corriente aumenta al principio naturalmente con el aumento del volumen gaseoso. Pero al aumentar éste más allá de cierto límite, se separan desmesuradamente los dos electrodos, de suerte que los iones formados en la proximidad del electrodo unido a tierra, se descargan en las paredes de éste, antes de poder ser arrancados del medio por el campo eléctrico.

Este fenómeno se halla facilitado por la forma de la cámara de iontización empleada; en los esquemas núm. 2 se ve que, no solamente la red se halla unida a tierra, sino que también la serie de diafragmas que limitan las radiaciones y la distancia del manantial al electrodo cargado, se halla igualmente unida a tierra; de esta manera, los iones creados a una cierta distancia del electrodo cargado, se dirigen hacia éste a lo largo de las paredes interiores de los diafragmas que forman un tubo; cuando la distancia entre los electrodos se hace grande, éste se hace también largo, y la probabilidad de que los iones creados en la parte superior vayan a descargarse sobre sus paredes, es mayor cada vez.

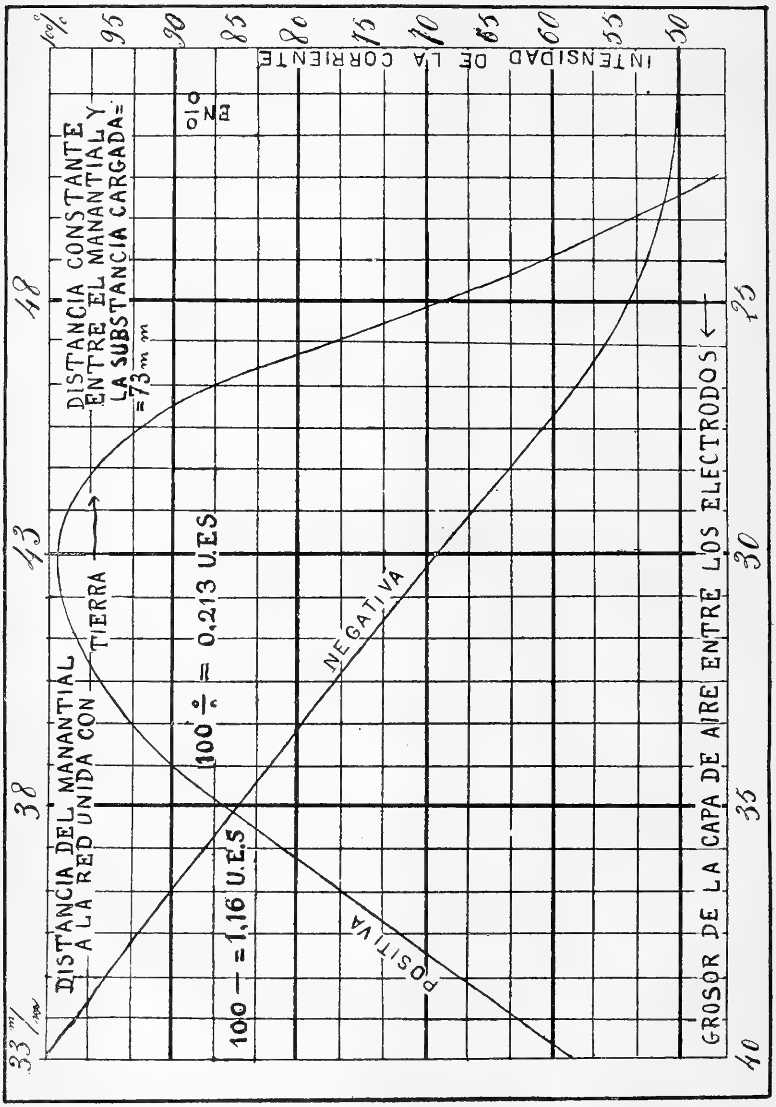
Resulta de ello que cuando se conserva una distancia fija entre el manantial y el electrodo unido a tierra, al variar la distancia mutua de los dos electrodos, la corriente, negativa o positiva, *disminuye* considera-



Curva número 4.

Intensidad de las corrientes positiva y negativa en función del grosor de la capa de aire entre los electrodos.

blemente cuando la distancia crece. Teniendo esto en cuenta, podemos comparar la intensidad máxima de la corriente negativa de las curvas número 1, con la máxima de la curva núm. 3. En estos dos casos, la distancia del manantial al electrodo unido con la tierra, era de 33 mm., y la intensidad del manantial, idéntica aproximadamente, pero la intensidad de la



Curva número 5.

Magnitud relativa entre las descargas positiva y negativa expresada en % de las intensidades máximas. (La intensidad de la corriente se halla en función del grosor de la capa de aire de los electrodos.)

corriente obtenida en el primer caso, era de 4.35 U. E. S., y en el segundo, de 0.63 U. E. S., es decir, casi siete veces más débil. En el primer caso, la distancia de los electrodos era de 20 mm. y de 60 mm. en el segundo caso.

30. La marcha de las curvas es muy influenciada por la circunstancia de que, con el sistema utilizado, a medida que se separaba el electrodo unido a tierra con el electrodo cargado, se le aproximaba al mismo tiempo al manantial luminoso si se quería mantener constante la distancia entre éste y el electrodo cargado. Este hecho debía producirse necesariamente, puesto que estos desplazamientos no son despreciables en relación con la distancia total de la luz a uno u otro electrodo.

Al estudiar la marcha de las curvas desde este punto de vista, se halla que cuando la distancia mutua de los dos electrodos no excede de 30 mm., la corriente aumenta muy intensamente cuando la distancia entre la red y la fuente se hace inferior a un cierto valor límite; este valor parece ser del orden de 48 mm.

Esta distancia límite, aunque no suficientemente precisa, parece indicar la presencia de una radiación cuya mayor parte se halla absorbida por el aire a esta distancia.

31. Parece bastante difícil la interpretación de dos hechos referentes a la descarga positiva, a saber: *a)* Que la descarga positiva es siempre más débil que la negativa; y *b)* Que la intensidad de las dos descargas produce razones diferentes al separarse del manantial.

Para explicar las diferencias de intensidad entre las dos descargas, parece difícil la admisión de la existencia de una radiación que produzca una iontización engendradora de más iones de un signo que del contrario, aunque fenómenos de esta clase han sido ya observados en el caso de la emisión producida por los metales calentados (1). Sin embargo, esta emisión de los metales calentados no parece proceder del metal; según Richardson, el metal calentado durante largo tiempo pierde la mayor parte de esta propiedad, y para que la *recupere*, basta exponerle durante algún tiempo en la proximidad de un catodo (2).

Hay, acaso, un hecho que proyecta cierta claridad sobre esta emisión positiva, que nosotros hemos observado y que puede ser comunicado a otras sustancias.

La circunstancia de que la descarga positiva disminuya más rápidamente que la negativa al alejarse del manantial, puede dar una explicación un poco diferente de la supuesta antes, a saber, de que la causa de las dos descargas no es idéntica, y que las emisiones que ocasionan la descarga positiva son más absorbibles que las otras.

---

(1) Strutt, *Phil. Mag.* IV, 1902, pág. 98.

(2) Richardson, *Phil. Mag.* VIII, 1904, pág. 400.

CAPÍTULO VIII

Conclusiones

32. Hemos demostrado que la descarga oscilante en chispa, emite, a parte de sus radiaciones bien conocidas, otros rayos capaces de iontizar los gases.

El hecho de que las radiaciones ultravioletas, bien conocidas, ejercen influencia fotoeléctrica solamente sobre las superficies metálicas pulimentadas y sobre ciertas sales, no puede ser tomado como criterio, ni para la naturaleza general de la radiación, ni tampoco para la naturaleza del electrodo utilizado. Así, la solución de jabón que se considera como no fotoeléctrica, puede llegar a serlo por la influencia de las radiaciones de muy gran frecuencia, sin necesidad de admitir que, en este caso, sea el gas únicamente el asiento de la emisión, sin que intervenga la materia del electrodo.

Según las experiencias realizadas con el mercurio en el curso de este trabajo, se ha demostrado que, bajo la acción de las radiaciones de corta longitud de onda, la superficie del metal interviene tanto en la emisión positiva como en la negativa; cuando la naturaleza de la superficie metálica pasa a otro estado no fotoeléctrico, persiste la emisión de los dos signos, pero ni en el mismo grado ni en la misma proporción.

Es probable que intervengan en el primer período de emisión, tanto la naturaleza del electrodo como la de su superficie, así como también la naturaleza del gas ambiente, y que estos factores existan igualmente en el segundo período cuando la superficie del metal se halla ya corroída.

Las propiedades más interesantes de las radiaciones estudiadas, son las que se refieren a la naturaleza de su poder iontizante, y, especialmente, la de liberar las cargas positiva y negativa con intensidad distinta, haciendo esto en proporciones diferentes, según la distancia del manantial a los electrodos; este fenómeno existe, cualquiera que sea la materia de los electrodos, y aun cuando éstos se hallen cubiertos por una capa aisladora.

En la actualidad se realizan otras experiencias con el objeto de estudiar las demás propiedades físicas y químicas de estas radiaciones.

(Instituto de Radiactividad de la Universidad de Madrid.)

Mayo de 1917.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Páginas.

I. Reflexiones acerca de la resolución de las ecuaciones algébricas numéricas por el método de Gräffe, por *Vicente Ventosa*. 9
II. Estudios de arte prehistórico, por *E. Hernández-Pacheco*. 62
III. Acerca de las propiedades de ciertas radiaciones emitidas por la chispa de la descarga oscilante, por *B. Szilard*. 85

La suscripción a esta Revista se hace por tomos completos, de 500 a 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, Madrid.

Precio de este cuaderno: **1,50 pesetas.**

SMITHSONIAN INSTITUTION
SEP 1? 1930
NATIONAL MUSEUM

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVI: 1.º DE LA 2.ª SERIE
NÚMERO 4: OCTUBRE DE 1917

MADRID
IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA
CARDENAL CISNEROS, 10
1917

Filogenia química de la molécula albuminoidea,

por

José R. Carracido

LA COMPLEJIDAD MOLECULAR Y LA INESTABILIDAD QUÍMICA

El número de las especies químicas, teóricamente posibles, es infinito. Prácticamente resulta limitado por la inestabilidad de multitud de combinaciones de realización dificilísima que no resisten la violencia de los procedimientos que habrían de seguirse para formarlas, a semejanza de los cuerpos que no pueden ser destilados en las condiciones físicas ordinarias, por tener el punto de ebullición más alto que el de la descomposición.

La dificultad es correlativa al crecimiento molecular. En las series de los hidrocarburos, de los alcoholes y de los ácidos, como en todas las demás, cuanto mayores son las cadenas, más cuesta añadirles nuevos eslabones, e igualmente la articulación de grupos moleculares es tanto más difícil cuanto mayor sea su magnitud.

La eterificación de los alcoholes y de los ácidos de pequeño número de átomos de carbono es más fácil que la de los términos superiores de las respectivas series. Fué considerado como gran triunfo de la síntesis orgánica la formación de la triestearina por su elevado peso molecular, 891, y se ponderan como triunfos todavía mayores la del octodecapéptido y la del más complejo de los polidépsidos realizadas por E. Fischer, por ser sus respectivos pesos moleculares 1.213 y 4.021 (1).

En la síntesis artificial de los polipéptidos—primeros términos de la formación de las albúminas—son cada vez más complicados los rodeos para la adición de nuevas moléculas de aminoácidos, por la necesidad de amortiguar las acciones agresivas de los reactivos, atendiendo cuidadosamente a la sustentación del edificio químico. Por la creciente delicadeza de tales compuestos, Fischer no ha podido llevar su magna obra sintética más allá del grado décimooctavo en la escala de los péptidos; pero la vida, con la suavidad de sus acciones, regularizada principalmente por la in-

---

(1) Carracido, *Tratado de Química biológica,* segunda edición, páginas 194 y 362

tervención de los catalizadores, llega a la formación de las albúminas, cuyos caracteres revelan una constitución de múltiplos de orden muy elevado en cotejo con los péptidos artificiales.

La diferencia del resultado es la correspondiente a la delicadeza de los medios, como la mano del joyero une y engarza piezas fragilísimas, que se mostrarían rebeldes y se quebrarían en otras manos inhábiles.

LA MATERIA VIVA

Está constituída, como he expuesto en otra parte (1), «por una disolución compleja de electrólitos copiosísima en micelas de dimensiones amicrónicas, dotadas del más alto grado de hidrofilia».

Sin desconocer la importancia de las sales generadoras de iones, es incontestable que las micelas albuminoideas son la sustancia fundamental del protoplasma. Todas las materias proteicas son tan peculiares de la vida, que sólo los organismos las contienen, y sólo en su seno se forman como productos de la actividad fisiológica.

La Biología viene preguntando con reiterada insistencia: ¿cómo se habrá formado el primer ser vivo no existiendo sus progenitores? Pero esta pregunta supone otra, cuya contestación debe preceder a la de aquélla: ¿cómo se formó la materia albuminoidea constitutiva del primer ser viviente?

Es indiscutible la prioridad de esta pregunta, porque respecto a su prelación no cabe la duda expresada por la vulgar y repetida frase: ¿fué antes el huevo o la gallina? Sin la previa formación de su materia, la del primer organismo no hubiese sido posible; la obra química hubo de preceder a la iniciadora de la vida, como la preparación de vidrios y aleaciones precede a la construcción de aparatos ópticos.

Las moléculas albuminoideas pueden imaginarse, según Hofmeister, como mosaicos formados por un centenar de piezas, y su construcción supone largo y laborioso proceso, en el cual las condiciones físicas del medio habrán tenido momentos propicios a la obra sintética del crecimiento molecular necesario para formar las complejas combinaciones de la materia viva. Análogamente a la serie filogénica de los organismos que se desarrolla desde los unicelulares hasta los multicelulares de mayor diferenciación morfológica y fisiológica, debe admitirse otra serie filogénica química que, desde el término inicial de una sencilla combinación carbonitro-

---

(1) *La micela en la bioquímica*, conferencia pronunciada en el IV Congreso de la Asoc. Esp. para el progreso de las Ciencias. Madrid, 1913.

genada, vaya creciendo gradualmente hasta las proteínas y los proteidos de mayor magnitud molecular, articulando las piezas en el complejísimo mosaico.

LA HIPÓTESIS CIÁNICA DE PFLÜGER

Los mamíferos excretan la mayor parte del nitrógeno procedente de la degradación de sus albuminoides en forma de urea, y habiéndola obtenido Wöhler artificialmente por transformación espontánea del cianato amónico

$$\underset{\text{Cianato amónico.}}{CN(NH^4)O} = \underset{\text{Urea.}}{CO(NH^2)^2}$$

fué inducido Pflüger a suponer las moléculas ciánicas como factores primordiales de las sustancias albuminoideas.

La producción de la materia viva, según aquel sabio fisiólogo, debió iniciarse en la superficie de la tierra poco antes del descenso de la temperatura de incandescencia, en el punto de la escala térmica en que el nitrógeno, uniéndose al carbono, forma cianuros con la intervención de sustancias metálicas. En el curso del proceso catabólico, aun en el caso de los animales que pueden vivir varios días en atmósferas sin oxígeno, se desprende constantemente ácido carbónico, revelando este hecho que aquel elemento está en la materia orgánica, constituyendo combinación intramolecular, y como, por otra parte, se separan creatina y bases púricas referibles al cianógeno, es lógico suponer que a la formación del radical carbonitrogenado haya seguido su oxidación, produciendo ácido ciánico (CN OH) (1).

Este, por su inestabilidad, se polimeriza, triplicándose la molécula en el ácido cianúrico ($C^3 N^3 O^3 H^3$), y suponiendo que haya crecido por igual procedimiento la molécula albuminoidea, afirma Pflüger que se siente compelido a considerar la molécula del ácido ciánico como una molécula de materia viva.

(1) En este caso es más lógico explicar el desprendimiento del ácido carbónico, como consecuencia de la hidratación del ciánico que como producto de la oxidación intramolecular.

$$\underset{\text{Ác. ciánico.}}{CN.OH} + 2H^2O = \underset{\text{Bicarbonato amónico.}}{CO\begin{cases} OH \\ O(NH^4) \end{cases}}$$

El bicarbonato por la acción de los ácidos formará sales amónicas con desprendimiento de CO^2. Siendo la hidratación exotérmica, puede aceptarse como generadora de energía utilizable para el trabajo fisiológico realizado sin la absorción de oxígeno.

Esta hipótesis fué publicada en el año 1875 con motivo de un muy profundo estudio de su autor sobre la respiración, y aunque entonces ya se conocía la capacidad de algunos vegetales, como el laurel cerezo y el almendro amargo, de producir ácido cianhídrico, por el corto número de casos no se pudo ver en este hecho la significación que hoy se le debe atribuir ante el gran número de plantas cianogénicas actualmente conocidas. Además, se ha observado que en dicho grupo de plantas la proporción de ácido cianhídrico suele ir disminuyendo a medida que avanza su desarrollo (1), y esto parece revelar que persiste actualmente el que debió ser primer modo de formación de la materia viva, iniciándolo el compuesto carbonitrogenado, que por oxidaciones y polimerizaciones ulteriores desaparece al convertirse en sustancia albuminoidea.

Se podrá objetar a lo precedentemente expuesto que, según los trabajos de Fischer, no figura el grupo ciánico entre los integrantes de la molécula albuminoidea; pero tal objeción admite la réplica de que en el balance de la obra analítica se llega, cuando más, a la determinación del 70 por 100 de los grupos constituyentes del gran complejo químico, y en la parte todavía indeterminada, quizá nuevos modos de proceder pongan de manifiesto la existencia del grupo ciánico, de igual manera que en la hidrólisis de Hugounencq, mediante el ácido fluorhídrico, se ha revelado el grupo de los carbohidratos no visto en la hidrólisis con otros ácidos.

Sin esperar al despejo de esta incógnita en lo porvenir, actualmente es conocida una reacción de los albuminoides, la de *Michailow*, que sólo puede interpretarse como producida por un grupo sulfociánico (2). Añadiendo a la disolución albuminosa ácido sulfúrico, sulfato ferroso disuelto y una gota de ácido nítrico, aparecen estrías de color rojo sanguíneo de igual matiz que el producido al mezclar las disoluciones de sal férrica y de sulfocianato potásico. ¿Preexiste el grupo sulfociánico en la molécula albuminoidea, o se forma por la acción de los reactivos? Esta pregunta no puede ser contestada con certeza; pero tampoco es absurdo suponer la preexistencia del expresado grupo, porque tan violentas como las condiciones de la reacción *Michailow* son las en que se efectúan otras reacciones coloridas de los albuminoides, y no se suponen los grupos por ellas revelados como fragmentos de la acción destructora de los reactivos, sino como miembros desarticulados del organismo químico. Además, en productos de una muy avanzada desintegración molecular, cuales son la saliva y las esencias de mostaza y de coclearia, aparece el grupo sulfociá-

(1) *Compt. Rend. Ac. Sc. Paris*, noviembre 19 de 1917, pág. 717.
(2) Carracido. *An. Soc. Esp. Fís. y Quím.*, tom. III, pág. 20 (1905).

nico (o el isosulfociánico, que para el caso tienen uno y otro la misma significación), corroborando estos datos del proceso catabólico la creencia de que la molécula albuminoidea también encierra compuestos de la serie ciánica.

LOS AMINOÁCIDOS DE LA HIDRÓLISIS

Aun admitiendo que con los argumentos precedentes pueda sostenerse la hipótesis ciánica de Pflüger, lo que ya está fuera de discusión, no sólo por los resultados analíticos, sino también por la síntesis de los polipéptidos, es que los aminoácidos aislados por hidrólisis forman la mayor parte de las proteínas, y ante estos factores de su constitución ocurre preguntar: ¿la obra de Fischer invalida la hipótesis de Pflüger, o una y otra pueden relacionarse como manifestaciones diferentes de un mismo proceso fundamental?

Los aldehidos y las acetonas, uniéndose directamente al ácido cianhídrico, forman las cianhidrinas, llamadas también cianoalcoholes:

$$\underset{\text{Aldeh. fórmico.}}{H - C \begin{matrix} \nearrow O \\ \diagdown H \end{matrix}} + \underset{\text{Ác. cianhídrico.}}{CNH} = \underset{\text{Cianhidrina fórmica.}}{H - CH(CN)OH}$$

Esta, por el amoníaco, produce el correspondiente aminonítrilo:

$$H - CH(CN)OH + NH^3 = H - CH \begin{matrix} \diagup NH^2 \\ \diagdown CN \end{matrix} + H^2O$$

del cual, hidratado mediante el ácido clorhídrico, resulta el ácido aminoacético o glicocola:

$$H - CH \begin{matrix} \diagup NH^2 \\ \diagdown CN \end{matrix} + ClH + 2H^2O = ClNH^4 + \underset{\text{Glicocola.}}{H - CH \begin{matrix} \diagup NH^2 \\ \diagdown CO \,.\, OH \end{matrix}}$$

Patentiza este sistema de reacciones que el ácido cianhídrico, con los aldehidos, llegar a producir aminoácidos, aportando la síntesis precedente, no una objeción, sino un testimonio en favor de la hipótesis de Pflüger. Se podrá argüir que el aldehido fórmico es producto de la función clorofílica, obra ya de la vida, y que por su origen es inadmisible la síntesis expuesta como muestra de síntesis prevital de la molécula albuminoidea. Esta recusación ha perdido todo su valor desde que se descubrió que las radiaciones ultravioladas de la lámpara de mercurio en tubo de cuarzo reducen en reacción limitada el anhídrido carbónico y el agua, produciendo aldehido fórmico como uno de los términos del equilibrio químico (1)

$$CO^2 + H^2O \rightleftarrows CH^2O + O^2,$$

llegando por el mismo género de radiaciones hasta la condensación del aldehido en una exosa, la formosa, aceptada por las algas en la oscuridad como alimento carbonado (2).

Si en las bajas regiones de la atmósfera actual, aunque en pequeña proporción, no faltan en absoluto las radiaciones luminosas de pequeña longitud de onda, en las épocas anteriores a la de la aparición de la vida sobre la tierra, la proporción debió ser mayor, correspondiendo a una gran limpidez atmosférica, y entonces, por acción puramente física, se habrá producido el aldehido formador de la cianhidrina generadora del primer aminoácido.

En las semillas que contienen amigdalina, y que por hidrólisis desprenden ácido cianhídrico, éste existe en el glucósido unido al aldehido benzoico, formando cianhidrina, y su presencia en el órgano procreador de materia viva parece revelar que cianhidrinas debieron ser las predecesoras de los aminoácidos concurrentes a la obra de la génesis proteica.

Además, a las cianhidrinas, como se verá en otro lugar, corresponde papel muy importante en la síntesis asimétrica, tan característica de todas las producciones bioquímicas.

LA ONTOGENIA BIOQUÍMICA

Para la ilustración de la genealogía de las especies, no sólo se examina en orden ascendente la serie de los organismos, sino también el proceso evolutivo de cada organismo en especial, porque en las primeras fases de su desarrollo repite compendiosamente los términos más culminantes de sus predecesores en la escala de la vida. Por esta repetición se afirma, con el carácter de ley biológica, que *la ontogenia es el resumen de la filogenia.*

Todo lo que ilustra la evolución morfológica y fisiológica, debe ilustrar la evolución de la materia plasmadora de la vida, y conforme a este criterio procede confrontar los datos antecedentes de la proteinogénesis prebiótica y los del período embrionario de los organismos actuales, para ver si mutuamente se refuerzan con su concordancia.

---

(1) *Rev. gén. Sc.* 1911, pág. 322.
(2) Idem.

Hoy es por todos aceptado el grupo de las protaminas como albuminoides embrionarios, establecido por Kossel, mostrando en armonía la procedencia con la sencillez de la composición.

Las protaminas aisladas de los espermatozoides de los peces están compuestas en gran proporción, y algunas casi en totalidad, por los tres aminoácidos, arginina, lisina e histidina, denominados con el nombre genérico de *bases exónicas*.

De los tres componentes, el primero es considerado como el más importante, y dondequiera que su proporción es muy crecida, se supone la existencia de los primeros grados de la escala de los albuminoides. No sólo en las mencionadas protaminas es componente predominante, sino también en algunas semillas, y en especial en las de las coníferas (plantas de transición entre las criptógamas y las fanerógamas angiospermas), y esta significación bioquímica de la arginina de aminoácido primordial induce a examinar las condiciones en que puede originarse para ponerlas en cotejo con las aducidas por Pflüger como fundamento de su hipótesis.

LA ARGININA

La constitución de este cuerpo es la de derivado de la guanidina

$$\begin{array}{l} \diagup NH^2 \\ C{=}NH, \\ \diagdown NH^2 \end{array}$$

en la cual se inserta el ácido aminovaleriánico (valina), separándose H^2 para que la inserción se efectúe.

Su fórmula es

$$\begin{array}{l} \quad\diagup NH^2 \\ C{=}NH \\ \quad\diagdown NH - CH^2 - CH^2 - CH^2 - CH \,.\, NH^2 - CO \,.\, OH \end{array}$$

Se forma sintéticamente uniendo la cianamida y el ácido diaminovaleriánico (ornitina):

$$\begin{array}{l} C{\equiv}N \\ \quad\diagdown NH^2 + CH^2 \,.\, NH^2 - CH^2 - CH^2 - CH \,.\, NH^2 - COOH = \end{array}$$

Cianamida. Ornitina.

$$\begin{array}{l} \quad\diagup NH^2 \\ C{=}NH \\ \quad\diagdown NH - CH^2 - CH^2 - CH^2 - CH \,.\, NH^2 - CO \,.\, OH \end{array}$$

Arginina.

En esta síntesis figura, en primer término, la cianamida formada por el radical cianógeno, produciéndose también sus combinaciones metálicas como los cianuros a elevadísimas temperaturas por la unión de los elementos carbono y nitrógeno:

$$CaO + C^2 + N^2 = CO + \underset{\text{Calciocianamida.}}{CN \, . \, NCa}$$

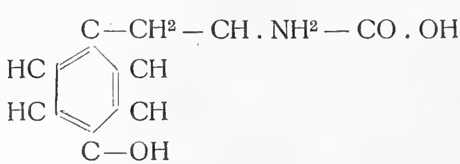
De este derivado cálcico separan los ácidos la cianamida, la cual formará arginina uniéndose directamente a la ornitina, o convirtiéndose antes en guanidina por asociación al amoníaco, para articularse después a la valina; y por ser uno y otro aminoácidos, pueden tener su origen en cianhidrinas, según queda dicho anteriormente.

El que en la ontogenia bioquímica se considera punto inicial de la constitución de la molécula albuminoidea, confirma la importancia atribuída al cianógeno como núcleo rudimentario de la materia biogenésica.

Las reacciones que artificialmente se producen *in vitro*, se diferencian de las que naturalmente se desarrollan *in vivo*, no por la índole de los productos, sino por las condiciones en que se efectúan. La glucosa lo mismo se convierte en agua y anhidrido carbónico por combustión en el aire que por combustión intraorgánica. La suavidad de ésta, en contraste con la violencia de la puramente química, es motivada por la intervención de los catalizadores, e igual intervención puede explicar la diferencia del modo de formarse los aminoácidos actualmente en las plantas, del en que hubieron de formarse en el curso de la evolución geológica antecediendo a los complejísimos enlaces constituyentes de los proteidos de la materia viva.

LA HISTIDINA Y LA CICLIZACIÓN

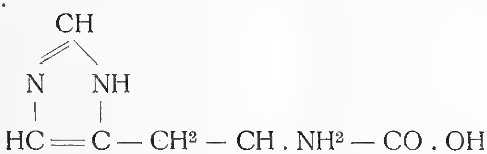
Administrando a un animal sustancias formadas por inserción de cadenas laterales acíclicas al núcleo cíclico, como la tirosina, cuya fórmula es



en el curso de la oxidación intraorgánica sólo el núcleo persiste como edificio inexpugnable por las acciones demoledoras del catabolismo. En la constitución de las moléculas albuminoideas, los grupos cíclicos representan el esqueleto que sustenta la armazón de la materia viva, y las cadenas acíclicas, las partes blandas, susceptibles de desaparecer y reaparecer por acciones bioquímicas.

Pflüger, en su hipótesis, ya daba mucha importancia a la fácil polimerización del ácido ciánico y a las diferentes formas de sus trimeros; el ácido cianúrico, el isocianúrico y la ciamélida son compuestos cíclicos; pero en el estado actual del conocimiento químico de los albuminoides, es más lógico buscar por otros caminos los primeros términos de la ciclización en la proteinogénesis.

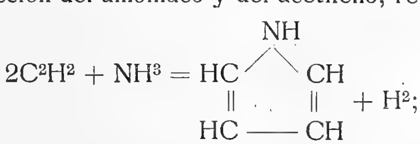
De las proteínas son grupos constituyentes el pentagonal pirrólico y el exagonal bencénico; y examinando los datos de la ontogenia bioquímica, aparece en las protaminas, asociada a la arginina y a la lisina acíclicas, la histidina con núcleo cíclico, representada por la siguiente fórmula de constitución:



La parte cíclica de esta molécula no es el pirrol, sino el imidoazol; pero de aquél puede suponerse derivado el segundo mediante la sustitución de CH por N, y aunque tal sustitución no se haya efectuado *in vitro,* no por esto se puede negar su posibilidad, de igual manera que antes se consideraba inexplicable la producción de los alcaloides naturales, por no contener las moléculas albuminoideas el núcleo pirídico, hasta que Pictet la ha explicado al mostrar la conversión del metilpirrol en piridina.

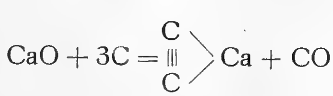
Si la primera ciclización, producida al constituirse materia albuminoidea, es la correspondiente al núcleo pirrólico, éste se forma en idénticas condiciones a las en que se originan la guanidina y el grupo ciánico.

De la mutua acción del amoníaco y del acetileno, resulta pirrol



Pirrol.

pero formándose el acetileno en la acción del agua sobre los carburos metálicos producidos a elevadísimas temperaturas al actuar el carbono sobre los óxidos metálicos



Carburo de calcio.

$$\left.\begin{matrix} C \\ ||| \\ C \end{matrix}\right> Ca + 2H^2O = \begin{matrix} CH \\ ||| \\ CH \end{matrix} + CaH^2O^2$$

Acetileno.

resulta que en las condiciones geológicas prebióticas pudo formarse también el resistente núcleo cíclico que, asociado a los aminoácidos producidos por cianhidrinas, completa los factores indispensables para la constitución de los albuminoides primordiales.

El cianógeno, la cianamida y el pirrol son combinaciones carbonitrogenadas, cuya síntesis, a partir de sus elementos, se efectúa a temperaturas muy distantes de las en que es posible la vida; pero que pueden estimarse como iniciadoras, a la manera del punto de origen de las coordenadas, de ulteriores crecimientos moleculares conducentes a la formación de la compleja materia viva.

POLIPÉPTIDOS Y PROTEÍNAS

La complicadísima y difícil labor de enlazar aminoácidos, en el laboratorio de Fischer ha ido creciendo hasta la constitución de un octodecapéptido, en el que se ha detenido la obra artificial; pero las proteínas que se extraen de los organismos contienen, como término medio, un centenar de moléculas de aminoácidos. Ante esta diferencia surge una nueva dificultad para explicar la formación de los albuminoides fuera del seno de la vida.

Aunque se hayan sintetizado los factores integrantes del complejo molecular en los procesos químicos de las acciones geológicas, la obra de su asociación, en el grado en que se muestra en los seres vivos, sólo la vida la realiza, y en este caso, a pesar de todo lo dicho, continúa sin resolver el problema de la formación prebiótica de la materia constituyente de los organismos.

Creo que la dificultad resulta vencida teniendo en cuenta que en algunos espermatozoides el análisis químico sólo ha descubierto nucleínas de protaminas, como la salmina y la esturina, formadas por cinco moléculas de aminoácidos; y si este número basta para concurrir a la formación de materia viviente, no es infundado suponer que polipéptidos producidos tan sólo por acciones químicas, a la manera de los sintetizados en el laboratorio, fueron capaces de plasmar los primordiales organismos rudimentarios, siendo éstos punto de partida de ulteriores procesos, ya bioquímicos, en los que fué acrecentándose la magnitud molecular hasta alcanzar la de las proteínas más complejas.

LA SÍNTESIS ASIMÉTRICA

Las sustancias orgánicas son activas a la luz polarizada, por el carbono asimétrico que contienen; pero al producir artificialmente dicho carbono por transformación de átomos del simétrico, resulta el compuesto racémico, inactivo, por compensación de los dos antípodas ópticos formados en proporciones exactamente iguales:

$$\underset{\text{Ác. pirúvico inactivo.}}{2\begin{pmatrix} CH^3 \\ | \\ CO \\ | \\ CO\,.\,OH \end{pmatrix}} + 2H^2 = \underbrace{\underset{\text{Ác. d-láctico}}{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ H - C - OH \\ | \\ CO\,.\,OH \end{array}} + \underset{\text{Ác. l-láctico.}}{\begin{array}{c} CH^3 \\ | \\ OH - C - H \\ | \\ CO\,.\,OH \end{array}}}_{\text{Ác. láctico racémico inactivo por compensación.}}$$

Eterificando el ácido pirúvico por un alcohol activo, al hidrogenarle, no resulta, como en el caso anterior, el ácido láctico racémico, sino uno de los dos estereoisomeros producido por inducción del cuerpo activo; y en general siempre que actúa una sustancia, ya dextrógira, ya levogira en la producción de otra de carbono asimétrico, rompe la armonía de la forma recémica determinando el predominio, y, a veces, la producción exclusiva de una de las dos especies enantiomorfas.

Los vegetales son mecanismos de síntesis química que con moléculas simétricas (ácido carbónico, nitratos, sulfatos y fosfatos) construyen azúcares y albuminoides, cuya estructura molecular es asimétrica, produciendo, no la forma racémica, sino uno de los antípodas ópticos orientado por la acción inductora de las sustancias asimétricas del contenido celular. En el estado actual de nuestros conocimientos es obligado afirmar que sólo la vida fabrica inmediatamente moléculas activas sobre la luz polarizada sin la fase preliminar de la asociación racémica, y que sólo la vida inmediata o mediatamente distingue y aisla de los complejos inactivos por compensación los antípodas ópticos en ellos asociados (1).

En la formación *in vivo* de las sustancias asimétricas es probable que el ácido cianhídrico también desempeñe papel importante, tomando como base de razonamiento el siguiente hecho observado *in vitro*.

El aldehido de la manita, la manosa, puede combinarse hasta con tres moléculas de ácido cianhídrico, y descomponiendo después la manosa resultante, se separa un compuesto de tres átomos de carbono óptica-

---

(1) Carracido.—*Tratado de Química biológica*, pág. 62.—1917.

mente activo creado por inducción de la actividad óptica de la exosa. La alanina aminoácido de tres átomos de carbono de molécula asimétrica, es muy abundante en los albuminoides, y en los amioácidos de núcleo cíclico (tirosina, histidina, triptófano) la actividad óptica es producida por la cadena tricarbónica de la alanina inserta en el núcleo. ¿Tendrá aquélla origen análogo al compuesto asimétrico procedente de las tres moléculas de ácido cianhídrico unidas a la manosa?

Pero del conocimiento de todas las circunstancias en que actualmente se efectúa la síntesis asimétrica, surge el anhelo de conocer su producción en el período prebiótico. Aunque la asimetría, como la vida, sólo se produzca por continuidad, es ineludible suponer, por lo menos, un momento anterior a la aparición del primer ser viviente, en que hubo de efectuarse la síntesis asimétrica por el exclusivo influjo de acciones físico-químicas.

¿A que especial influjo podrá atribuirse el expresado efecto?

La materia y la energía son mutuamente reemplazables en la producción de gran número de fenómenos. De la disolución de sulfato cúprico es precipitado el cobre, de igual manera que por el hierro metálico, por la corriente eléctrica, y por ley de reciprocidad, no es absurdo suponer que si la disimetría molecular actúa desviando el plazo de polarización de la luz, la luz polarizada circular actúe en la síntesis de las sustancias con carbono asimétrico como agente inductor que desequilibra la compensación racémica determinando el predominio cuantitativo de uno de los enantiomorfos.

No obstante lo razonable de la suposición, no me satisface para proponerla como explicativa de la asimetría en la constitución prebiótica de la molécula albuminoidea, por la poca capacidad energética del agente, y por la falta, hasta hoy absoluta, de la prueba experimental. Aun en los casos en que sólo sea hipotética la solución de los problemas científicos, siempre habrá de exigirse el concurso del criterio de analogía, aportando hechos positivos que garanticen la posibilidad y hasta la probabilidad de la solución propuesta.

Esta exigencia creo que la satisface la acción del campo magnético. Ya Faraday observó, en 1846, que colocando líquidos cualesquiera entre los palos de un electroimán productor de un campo magnético intenso, adquieren aquéllos poder rotatorio, aun siendo normalmente tan inactivos como el agua. La rotación es proporcional a la intensidad del campo, y en el período geológico a que se refiere el proceso químico aquí examinado, la intensidad de los meteoros magnéticos debió ser no sólo suficiente, suficientísima para producir considerables rotaciones capaces de actuar como inductoras de la síntesis asimétrica.

Podrá objetarse que las rotaciones creadas en el campo magnético se anulan cuando cesa su influjo; pero si en el periodo de su duración, aunque sea breve, determinan la producción de una sola molécula de sustancia asimétrica ópticamente activa, ya queda constituído el inductor de la polarización química proseguida en ulteriores síntesis asimétricas,

La nueva doctrina de la electricidad, comprendiendo la teoría electromagnética de la luz, va creciendo en importancia para revelar intimidades de los procesos naturales, y si uno de los testimonios de su alcance es el mejor conocimiento de la afinidad por la electroquímica y la magnetoquímica, a él puede añadirse la aparición del poder rotatorio como efecto puramente físico del campo magnético, y probablemente generador de la asimetría de la materia viva.

Colocado en este terreno el problema de la primera acción inductora de la síntesis asimétrica, surge como pregunta subsiguiente, la del signo del poder rotatorio. ¿Por qué se produjeron las proteínas levogiras y no las dextrogiras?

Sábese con certeza que la naturaleza de la sustancia que se torna ópticamente activa en el campo electromagnético, no es la determinante de la dirección en que la actividad óptica se manifiesta, y eliminado este factor, procede entonces inquirir la causa en la dirección de la corriente, refiriendo el campo al del interior de un solenoide; pero no hay base positiva experimental en que pueda sustentarse esta afirmación. Pero si lo que es hoy vaga suposición llegase a ser teoría aceptables, ¿pudiera conducir a relacionar el signo del poder rotatorio de los albuminoides con el movimiento de rotación de la Tierra? Tal suposición actualmente es infundada, pero no la conceptúo absurda.

PROTEIDOS

Desde las peptonas, cuyos pesos moleculares oscilan en torno de 200, hasta las proteínas, en que se elevan a 6.000, el crecimiento molecular es producido por la adición de sumandos análogos, los aminoácidos, constituyendo polipéptidos y asociaciones complejas de polipéptidos que, no obstante lo gigantesco de sus moles, son poco variadas sus funciones químicas. Las proteínas sólo desempeñan en la vida el papel nutritivo, y lo corrobora que sean los albuminoides constituyentes del plasma sanguíneo y de la clara de huevo, pero al unirse a otros grupos moleculares desemejantes de los aminoácidos que las forman, adquieren aptitud para más elevados oficios, pareciéndose a los glucósidos, cuya acción fisiológica corresponde a la parte no glucósica que contienen, aun siendo pequeña su proporción en el complejo.

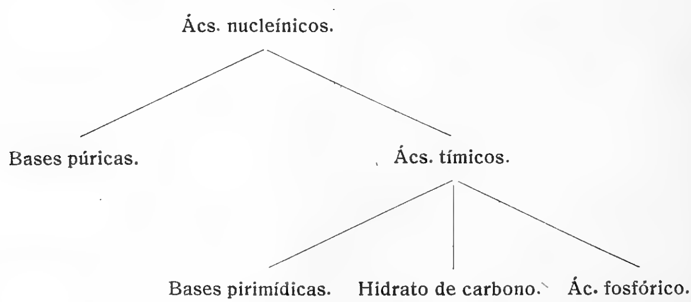
Son los proteidos las expresadas asociaciones proteínicas que representan el grado supremo en la escala ascendente de la serie albuminoidea, y como ellos, y no las proteínas, son los verdaderos constituyentes de la materia organizada, es necesario ampliar el anterior estudio al de las condiciones de su formación como obligado anticipo a la aparición de la vida.

LOS GRUPOS PROSTÉTICOS

Así se denominan los que, unidos a las proteínas, constituyen los proteídos, siendo grandísima su variedad, y, por consiguiente, la de su papel fisiológico. Unos son tan sencillos como el ácido fosfórico, y otros tan complicados como las lecitinas y los ácidos nucleínicos; pero solo los últimos son los que forman los proteidos protoplásmicos. Unicamente los nucleoproteidos constituyen la fábrica de la organización, y ante este hecho hay que completar la filogenia química de la molécula albuminoidea con el examen de la formación prebiótica de los ácidos nucleínicos, órganos primordiales de la síntesis de materia viva que en el seno del protoplasma se efectúa.

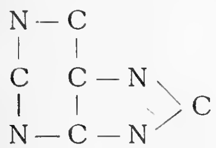
LOS ÁCIDOS NUCLEÍNICOS

Estos, según Kossel, se descomponen por hidrólisis sistemática del modo que representa el esquema siguiente:

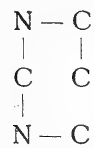


De la procedencia del ácido fosfórico no es necesario hablar siendo tan abundante los fosfatos en la tierra. Al discurrir sobre la formación de los aminoácidos queda expuesta también la de los hidratos de carbono mediante el poder reductor de las radiaciones ultravioladas. Sólo queda por examinar como habrán podido formarse las bases púricas y las pirimídicas antes de su producción por continuidad del proceso vital en el seno del protoplasma.

Las relaciones de parentesco de unas y otras bases se patentizan en los siguientes esquemas de sus respectivas constitución y coordinación atómicas.



Esquema de la serie púrica.



Esquema de la serie pirimídica.

La sola presentación de estos esquemas pone de manifiesto que en los dos hay una cadena tricarbónica fundamental, en la que se articulan dos restos de urea en el de la serie púrica, y solamente uno en el de la serie pirimídica. Queda, pues, reducido el problema de la formación de los dos grupos de las bases nucleínicas al del origen de las pirimídicas y aun más especialmente al de su cadena tricarbónica.

GÉNESIS DE LAS BASES PIRIMÍDICAS

En varios pasajes precedentes creo haber apoyado con gran copia de testimonios la importancia del cianógeno y sus compuestos en la primordial formación de las proteínas, y según proceder muy frecuente en la Naturaleza, que con los mismos elementos adaptados a las condiciones del medio realiza diversos fines, reaparece al ácido cianhídrico como factor probable en la integración del grupo prostético de los nucleoproteidos.

Por condensación de tres moléculas de dicho ácido puede formarse el nitrilo aminomalónico.

$$\begin{array}{rl} & CN \\ & | \\ 3CNH = & CH\ .\ NH^2 \\ & | \\ & CN \end{array}$$

Este, por hidratación de uno de los grupos nitrílicos, se convierte en monoácido

$$\begin{array}{lcl} CN & & CO\ .\ OH \\ | & & | \\ CH\ .\ NH^2 + 2H^2O & = & CH\ .\ NH^2 + NH^3 \\ | & & | \\ CN & & CN \end{array}$$

el cual, reaccionando con una molécula de urea, forma agrupación pirimídica.

$$\begin{array}{lcllcl}
NH^2 & & CO\,.\,OH & & NH - CO & \\
| & & | & & | \qquad\quad | & \\
CO & + & CH\,.\,NH^2 & = & CO \qquad C\,.\,NH^2 & + \; H^2O \\
| & & | & & | \qquad\quad \| & \\
NH^2 & & CN & & NH - C\,.\,NH^2 &
\end{array}$$

Urea. Ác. nitriloaminomalónico. Dioxidiaminopirimidina.

De ésta, por acciones secundarias (reducción, desaminación, metilación), pueden derivarse las demás bases pirimídicas y entre ellas la timina y la citosina constituyentes de los ácidos tímicos.

La urea puede proceder de la transposición molecular del cianato amónico o de la acción del agua sobre la guanidina, y de igual manera que se articula a la cadena tricarbónica del compuesto malónico, puede articularse una segunda molécula de urea y constituir bases púricas, transformables también por acciones secundarias en guanina y adenina que, unidas a los ácidos tímicos, forman los ácidos nucleínicos en una serie de actos químicos realizables todos sin la necesaria preexistencia de antecesores originados por la vida.

FORMACIÓN DE LOS ÁCIDOS NUCLEÍNICOS

Al encontrarse el ácido fosfórico y el carbohidrato, es obligada su mutua eterificación, pudiendo efectuarse también el enlace de la base pirimídica al grupo aldehídico del azúcar

$$\begin{array}{lcl}
 & & NH - CO \\
 & & | \qquad\quad | \\
PO\begin{array}{l} \diagup OH \\ - OH \\ \diagdown OH \end{array} + HO - CH^2 - (CH\,.\,OH)^4 - C\begin{array}{l} \diagup\!\!\diagup O \\ \diagdown H \end{array} & + & CO \qquad C\,.\,CH^3 = \\
 & & | \qquad\quad \| \\
 & & NH - CN
\end{array}$$

Ác. fosfórico. Exosa. Timina.

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \overline{|\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;|} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; O \qquad\qquad\qquad\quad\;\; | \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; | \qquad\qquad\qquad\qquad\; | \\
PO\begin{array}{l} \diagup OH \\ - O - CH^2 - (CH.OH)^2 - C - (CH.OH)^2 - C - N - CO \\ \diagdown OH \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; | \qquad\qquad\qquad\qquad\; | \quad\;\; | \qquad\;\; | \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; H \qquad\qquad\qquad\qquad H \quad CO \quad C.CH^3 + 2H^2O \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; | \qquad\;\; \| \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad NH - CH
\end{array}$$

Ácido tímico.

Conserva todavía libres el ácido fosfórico dos grupos ácidos, y en uno de ellos puede articularse la adenina o la guanina, quedando formado el ácido nucleínico como lo imagina Kossel. Según las fórmulas más complicadas de Stendel y de Levene-Jacobs (1), las bases púricas se unen a otras moléculas del éter fosfórico, de análoga manera a la en que se une la timina al grupo aldehídico de la glucosa, y enlazándose al compuesto pirimídico el púrico, ya está constituído el ácido nucleínico.

En las proteínas, por grande que sea el número de los aminoácidos en ellas enlazados, siempre aparecen como extremos de la cadena, a semejanza de las pilas asociadas en serie, el grupo ácido y el amínico, y éste, al saturarse por una de las acideces libres del ácido fosfórico, constituye el nucleoproteído, que puede tener grados muy diferente en su magnitud molecular, según el número de moléculas de proteína y del grupo prostético asociadas en el complejo albuminoideo. Así se constituyen organismos químico con variedad de órganos funcionales, y hasta con variedad de grados, para cada función en especial, aptos para contraer combinaciones muy laxas como conviene para el fácil e incesante cambio de materia, generador del proceso fisiológico.

Los proteidos plasmadores de materia organizada son términos más complejos y diferenciados que las proteínas en la serie filogénica de la molécula albuminoidea; pero una síntesis puramente química, como la formadora de sus antecesores, y de la cual es factor importante el grupo cianogénico, basta para explicar la formación del incremento de sus grupos prostéticos.

LA CROMATINA

La observación de que el filamento del núcleo celular apenas se tiñe por los colorantes básicos en el período de crecimiento de la célula, a la inversa de lo que acontece en el período de reproducción, indujo a los citólogos a suponer esta segunda fase determinada por una sustancia especial, que por su capacidad para teñirse la denominaron *cromatina*. Esta era conceptuada como causante y directora del proceso reproductor, y hasta se creía que por ella eran transmitidos los caracteres específicos que la herencia perpetúa, contribuyendo al acrecentamiento de la importancia de su papel la impresión producida por el espectáculo de las figuras cariocinéticas.

El estudio químico de los nucleoproteidos desvaneció el fantástico concepto de la cromatina, sustituyéndolo por grados de acidez de aquéllos, crecientes o decrecientes, según la proporción de ácido nucleínico respecto a la de las proteínas. El grupo prostético, por la acidez que le

(1) *Physiological Chemistry*. Albert P. Mathewo, 1916, pág. 172.

confiere el ácido fosfórico, en el período de crecimiento atrae y acumula proteínas, especialmente las que tengan carácter básico por su contenido en aminoácidos diaminados monobásicos, como la arginina y la lisina, produciendo un estado de neutralidad química, y en el período de división, los nucleoproteídos se desintegran resaltando entonces la acidez del grupo prostético por la cual atrae y fija enérgicamente los colorantes básicos. Es verdad que este doble proceso sintético y analítico se desarrolla en el seno de la vida, siendo la expresión más genuinamente característica de la actividad vital; pero también es indudable que antes del encadenamiento solidario de las combinaciones y descomposiciones bioquímicas en el curso del metabolismo celular, todas las diferenciales de la gran integral fisiológica debieron producirse, y seguramente se produjeron por acciones físico-químicas consiguientes a la evolución terrestre.

La cromatina representa hoy sólo un aspecto de la química de los nucleoproteídos, y la formación de éstos es la de nuevos términos de la serie filogénica de la molécula albuminoidea. El núcleo de la célula realiza principalmente la función anabólica, por su capacidad para acumular moléculas proteínicas, capacidad que en último análisis debe atribuirse al ácido fosfórico, el cual, en su progresiva saturación representa tres grados muy diferentes de energía química, desde la acidez fuerte hasta la casi imperceptible de las combinaciones, ya salinas, ya estéricas, en que sólo resta libre la tercera basicidad. En el recorrido de esta escala se producirán, según el punto de la reacción, asociaciones o disociaciones resultantes de equilibrios químicos reguladores de las dos fases contrapuestas y solidarias del cambio material, la anabólica y la catabólica.

Dada la importancia positiva, y aun pudiera decirse predominante, del ácido fosfórico en el papel fisiológico de los nucleoproteidos, no deben considerarse las sustancias minerales como cariátides humilladas que soportan el peso de la fábrica de la organización, sino como laborantes que con la dignidad de su trabajo concurren a la producción de la vida. La complejidad del nucleoproteido representa un perfeccionamiento encaminado a dotar de mayor delicadeza al ácido fosfórico, como los mecanismos del microtomo respecto a la cuchilla, que es su órgano esencial.

LA HEMOGLOBINA

De este proteido de función respiratoria nada autoriza a suponer la posibilidad de su origen prebiótico. No apareciendo hasta llegar a los términos superiores de la serie animal, se sale del proceso exclusivamente químico, generador de los primeros polipéptidos y de las nucleínas protamínicas, entrando en la jerarquía de las complicadísimas combinaciones bioquímicas; pero su origen y su condición corroboran el desarrollo de la serie filogénica.

Aunque se produzca como consecuencia de una metamorfosis regresiva correspondiendo a la degradación vital por la que el eritroblasto desciende a eritrocito, en el proceso de rearticulación de los grupos desarticulados en la cariolisis se insertan sobre el fondo proteínico de la globina los grupos pirrólicos, asumiendo el hierro para la formación del grupo prostético, la hematina.

Para que el metal pueda estar íntimamente incorporado al proteido, se constituye el grupo prostético en combinación no ionizable, y para que, no obstante su elevado peso específico, el eritrocito pueda flotar en el plasma sanguíneo, se produce la gigantesca asociación de la hemoglobina cúyo peso molecular es superior a 16.000.

Comprueban la necesidad de las condiciones bioquímicas, en el orden de mayor perfección y delicadeza para que el cromoproteído pueda formarse, los dos hechos siguientes: primero, no aparecer en la serie filogénica hasta llegar a los vertebrados, y segundo, que en la serie ontogénica no la elaboren los mamíferos en el período de la vida intrauterina ni tampoco en el de la lactancia, en el cual sólo contienen la hemoglobina que la madre les transmitió completamente formada, siendo prueba de este aserto la ausencia del hierro en la leche. Examinado el caso con criterio teleológico, es revelador de que la vida solamente considera asegurada la formación de la hemoglobina cuando los mecanismos de la proteinogénesis han alcanzado en las formas superiores de la escala zoológica cierto grado de perfeccionamiento.

Aunque se acepta unánimemente que la hematina constituída por la asociación de cuatro moléculas pirrólicas, es el grupo prostético de la oxihemoglobina, hay indicios para sospechar que el grupo sulfociánico (C. N. S.) pudiera ser también constituyente de dicho grupo prostético (1), y si esto se confirmase, resultaría una vez más el cianógeno actuando como formador de sustancia destinada al desempeño de un especial papel fisiológico, y produciéndose la complejidad química de la materia viva como la de la organización de los seres vivientes por repetición de los mis-

(1) CARRACIDO.—*Formación natural de la hemoglobina*. REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS. Madrid, 1906, t. IV, pág. 33, y *Proceso químico de la formación del glóbulo rojo*. *Revista ibero-americana de Ciencias médicas,* 1911, t. XXV, pág. 401.

mos elementos adaptados a las condiciones fisico-químicas determinadas por el curso del proceso evolutivo.

***

Si la síntesis de los albuminoides comienza antes de la vida, como era necesario que así fuese, labrada la fábrica de la organización, aun en sus formas más rudimentarias, la síntesis sigue en progresión creciente favorecida por las especiales condiciones de los procesos bioquímicos realizables y realizados por la acción a un tiempo poderosa y suave de los catalizadores; pero antes de la vida, y en el seno de ella desarróllase en la constitución de la materia biogenética una serie filogénica corroborada por la ontogénica, que se muestra por sucesivos incrementos de la magnitud molecular y la consiguiente adquisición de grupos funcionales.

Microscopios mineralógicos y petrográficos

por

Domingo de Orueta (1)

218. *Organos ópticos y mecánicos que caracterizan a estas monturas.*—Los microscopios mineralógicos o petrográficos (2), que de ambos modos se suelen designar, sirven para estudiar las propiedades ópticas de los minerales y la composición interna de las rocas. Este estudio se hace unas veces en la roca misma, dejando a los minerales con la posición respectiva que en ella ocupan; y otras, separando previamente a estos últimos de las rocas que los contienen y estudiándolos por separado. Por último, sirven también estos microscopios para examinar los minerales que se presentan aislados en la naturaleza, unas veces con formas cristalinas y otras sin ellas.

En la mayoría de los casos el estudio de las rocas y los minerales exige prepararlos previamente en forma de láminas delgadas, cuyo espesor oscila entre dos y tres centésimas de milímetro (3). Estas láminas se montan entre el portaobjeto y el cubreobjeto, envolviéndolas en bálsamo del Canadá; único o casi único medio de montura que se emplea para el caso. A veces, sin embargo, conviene estudiar los minerales tallándolos de antemano con orientaciones fijas que estén en relación con las caras y ejes del cristal. En este caso, el espesor debe ser mayor que el citado antes, y la operación del tallado se hace con aparatos especiales que de-

---

(1) El presente trabajo forma parte de un libro inédito titulado *Microscopia*.

(2) Debemos recordar al lector que los fundamentos e ideas elementales sobre la polarización de la luz, necesarias para la cabal inteligencia de los microscopios de esta clase, las hemos expuesto en el capítulo IV de la primera parte. Por lo demás, en cualquier tratado de física, o mejor aún, de petrografía, encontrará el lector explicaciones detalladas y extensas de los fenómenos de polarización.

(3) En los mismos tratados de petrografía encontrará el lector descripciones de los métodos y aparatos que se emplean para tallar minerales y rocas en láminas delgadas o con orientaciones fijas. Describirlos aquí sería salirnos fuera del plan de este libro, que es el de un tratado de microscopia general y no especial a técnica ninguna.

terminan con exactitud rigurosa la dirección del plano artificial que se obtiene (1).

En los trabajos petrográficos se utilizan varias propiedades ópticas de los minerales, destacándose entre ellas las que se originan cuando se emplea la luz polarizada. Por esto, el principal aditamento que deben poseer los microscopios de esta clase es uno que permita dirigir un haz de luz polarizada sobre la preparación de roca o mineral que se examina; y como este haz sufre al atravesar a los minerales determinadas modificaciones en su longitud de onda y en las direcciones de emergencia, es preciso, además, poder estudiar cuantitativamente estas modificaciones, que están en relación íntima con la composición química y la estructura molecular del cuerpo que se examina. De aquí la necesidad de otro aditamento, cual es un segundo aparato de polarización que se coloca sobre la preparación, unas veces inmediatamente después del objetivo, y otras en la parte superior del ocular y muy cerca del anillo de Ramsden.

Entre los varios medios de polarizar la luz que hoy se conocen, se ha dado preferencia, por las indiscutibles ventajas que ofrece, al de los *prismas de Nicol*, o como se dice para abreviar, al de *los nicoles*. Sólo en muy contados casos se emplea el espejo de vidrio negro para polarizar a la luz (2). Ya hemos dicho en qué consiste un nicol. Añadiremos ahora que hay varios modelos de ellos, basados todos en el mismo principio, pero diferenciándose unos de otros en el número de elementos componentes y en la manera de unir éstos entre sí. Los modelos más usados de prismas son: el de Foucault, en el que la capa de bálsamo de Canadá se sustituye por una de aire; el de Thompson, en el que el eje óptico es normal al plano de separación de las dos mitades del prisma; el llamado «Glan-Thompson», que los constructores ingleses emplean de preferencia a los demás, y que se diferencia del anterior en que la capa o lámina de separación está llena de aire en vez de bálsamo; y, por últi-

---

(1) Merecen citarse entre estos aparatos el del doctor H. H. Thomas y mister W. Campbell Smith, descrito en el catálogo de microscopios petrográficos de la casa J. Swift & Son (edición de 1914, páginas 26 y 27) el de Wulfing, más antiguo que el anterior, que vende la casa Fuess, de Berlin-Steglitz (catálogo núm. 180, 1915, pág. 141). Tanto estos aparatos como otros construídos para el mismo objeto, están citados en los libros de petrografía y no los describimos aquí por las razones ya expuestas en notas anteriores.

(2) Un caso es el de los microscopios que sirven para el examen rápido de las láminas de roca cuando se están preparando. Las monturas que la casa Fuess vende para este objeto están basadas en el empleo de un espejo de vidrio negro a guisa de polarizador (catálogo de esta casa núm. 180, 1915, figuras 707 y 708).

mo, el de Ahrens, formado por tres prismas de calcita pegados con bálsamo (1).

Los nicoles deben ser de suficiente anchura para que admitan toda la luz posible, pues al atravesar ésta al prisma sufre disminución notable en su intensidad, debida a dos causas: a que sólo se utiliza uno de los rayos componentes; y a que el espato, por transparente que sea, siempre absorbe alguna luz, máxime teniendo que ser, como es el caso, de bastante altura para que la separación de los dos rayos, ordinario y extraordinario, sea suficientemente amplia y la eliminación de uno de ellos, por reflexión total, se pueda verificar. En los microscopios petrográficos modernos los nicoles se construyen de toda la anchura, compatible con el diámetro de que se dispone, bajo el condensador y en el interior del tubo del microscopio. Es regla general que el polarizador sea mayor que el analizador para que permita la entrada en el microscopio de un haz de luz del mayor diámetro posible. En cuanto al analizador, como se coloca muy cerca del foco principal posterior del objetivo, el cono emergente de éste puede pasar entero, o casi entero, a través de aquél, y por esto su anchura suele ser menor que la del polarizador.

Es condición precisa que las secciones principales de los nicoles que contienen, como es sabido, a los planos de vibración de la luz polarizada, estén marcados de un modo permanente en la montura de los prismas y que su posición sea conocida por el operador. Al efecto, el polarizador se monta sobre un cilindro provisto de un tope que entra en una muesca fija en el cilindro inferior de la subplatina y que corresponde en posición con una de las secciones principales del prisma de espato. El analizador se monta sobre una corredera que entra y sale en el tubo del microscopio y permite intercalarlo y separarlo rápidamente del eje óptico. En la figura 338 se ve bien la corredera que soporta al analizador que está designada por la letra N. Cuando el tubo del microscopio es ancho, el analizador se monta sobre una pieza giratoria alrededor de un eje excéntrico y provista de dos topes que indican al tacto cuándo está intercalado sobre el eje óptico y cuándo está fuera de él, dejando paso libre a los rayos que emergen del objetivo. La montura representada en la figura 334 tiene el ana-

(1) El lector encontrará amplios detalles sobre las propiedades de estos prismas y sobre las fórmulas que sirven para calcularlos, en un artículo de K. Freussner publicado en el *Zeitschrift für Instrumenten Optiks*, 1884, página 45, y también en la obra de L. Duparc y F. Pearce, *Traité de Technique Mineralogique et Pedtrographique,* 1907. El moderno tratado de petrografía de J. P. Iddings *Rock Minerals* contiene también datos muy interesantes sobre los diferentes modelos de nicoles.

lizador montado así y la palanca que lo mueve es la designada por la letra K. Cuando el analizador se monta en el ocular, suele formar cuerpo con éste, y la corredera o pieza giratoria se suprime. El ocular designado con las letras A, B y C en la figura 334 tiene un analizador en la parte superior de él, y como todos los de este tipo, se puede separar del microscopio y sustituirlo por un ocular ordinario.

Ambos nicoles, o por lo menos uno de ellos, deben poder girar sobre su eje, que dicho se está coincide con el eje óptico del microscopio. Esta necesidad la imponen dos razones: una es que, por bien montado que esté el prisma de espato dentro de su montura, hay o puede haber con el uso ligeras diferencias de posición que afecten a la normalidad de los planos de vibración, y estas diferencias se pueden corregir si uno de los prismas, por lo menos, es giratorio. La otra razón es, que para determinados estudios, como la polarización rotatoria y la dispersión de las bisectrices y los ejes, hace falta cambiar el ángulo recto que forman entre sí los planos de vibración de los nicoles en su posición normal, por otro ángulo cuya abertura hay que medir. Para conseguir esta rotación individual de los nicoles (1) y medir el ángulo de giro, se han adoptado diversas disposiciones. Consiste una de ellas en fijar de una vez para todas, en posición invariable, al analizador, montándolo sobre la corredera o la pieza giratoria que antes hemos descrito, y proveer al polarizador de un medio de giro, añadiéndole además un círculo graduado o cuatro muescas que marquen las dos posiciones, perpendiculares entre sí, una de las cuales corresponde a la posición normal de los dos planos de polarización, y la otra a la de paralelismo entre éstos. No habiendo círculo graduado en ninguno de los dos nicoles, como sucede con la última de las disposiciones, dicho se está que no se puede medir el ángulo de dispersión ni el de polarización rotatoria, y para poderlos medir se añade a los microscopios así dispuestos un ocular especial, con nicol y círculo graduado, que se emplea separando previamente del tubo al analizador que va sobre el objetivo. Las monturas petrográficas de Zeiss están dispuestas así, y también el microscopio de Fuess, figura 238. Los modelos representados en las figuras 334 y 336 llevan círculo graduado en el polarizador y pueden recibir, además, como las anteriores, un ocular con nicol y con círculo graduado; porque es más cómodo leer ángulos en la parte superior del microscopio que en la inferior.

---

(1) La llamamos *rotación individual* para distinguirla de la que afecta simultáneamente a los dos nicoles y al ocular en los microscopios petrográficos de modelo *Dick*, que describiremos más adelante.

Otra disposición, menos generalizada que la anterior, pero que se aplica a los microscopios muy completos, consiste en hacer giratorio al analizador que va sobre el objetivo y en proveerlo de un círculo graduado o de un cuadrante de círculo. La montura de Fuess, figura 336, lleva este círculo designado con la letra T. Lleva, además otro en el ocular que se puede adaptar a esta montura en el extremo superior del tubo, para los fines ya explicados.

El condensador de los microscopios petrográficos debe tener también una disposición especial que facilite el paso de un cono de alumbrado de poca apertura (luz paralela) a uno de mucha, o sea a lo que en petrografía se llama «luz convergente» (1). Esto se podría conseguir empleando dos condensadores, uno débil y otro potente, e intercambiándolos como en los microscopios de uso general; pero como en los petrográficos hay que hacer esto a cada paso y la operación es delicada y larga, se han adoptado varias disposiciones que tienden a facilitarla. Consiste una de ellas en poner en la subplatina un revólver, parecido al de los objetivos, que recibe a dos o a tres condensadores de distinta apertura, los cuales se intercambian con una simple presión de los dedos. El microscopio de Swift, figura 336, está provisto de un revólver de esta clase. Pero lo más frecuente es emplear condensadores compuestos de dos elementos óptico; uno, el inferior, es simple, de apertura débil, y se fija directamente a la subplatina, atornillándolo o enchufándolo encima del polarizador; el otro es doble casi siempre, y va mon-

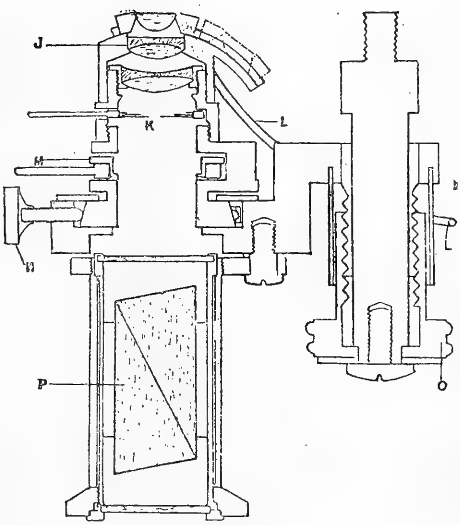


Figura 331

(1) El término *luz paralela* corrientemente empleado en petrografia, no es exacto; porque un condensador, por poca apertura que tenga, proyecta siempre sobre la preparación un haz de luz cónico y no un haz cilíndrico cuyos componentes sean paralelos. Así, pues, el lector debe tener presente que por luz paralela se entiende en petrografía un haz de poca convergencia; esto es, un haz cónico, cuyo ángulo en el vértice es muy pequeño, pero sin llegar a ser nulo.

tado sobre una corredera o sobre una palanca giratoria, para que por un simple movimiento se pueda colocar sobre el primero aumentando considerablemente su apertura, o separarlo de él dejándolo bajo la platina en posición que no estorbe para las manipulaciones de ésta. En la subplatina representada en la figura 331, la combinación óptica triple, designada por J., que forma la parte superior del condensador, va montada sobre una corredera actuada por la barra L, que permite intercalarla o separarla rápidamente del eje óptico. En los microscopios de Nachet (figura 337), la intercalación o separación se hace por medio de una rueda dentada y un piñón. En otras monturas, la parte superior del sistema óptico, se puede separar aisladamente de la subplatina para facilitar el intercambio. Sirva de ejemplo la montura de Swift, figura 334, en la que el mecanismo entero se puede desviar lateralmente del microscopio por medio de dos correderas.

Dicho se está, que la manera de montar los dos elementos del condensador no es compatible con el centrado y exactitud de distancias que deben existir entre las lentes cuando se trata de observaciones muy delicadas, cuales son las que se presentan con frecuencia en los trabajos de microscopia general; pero nótese también que los problemas de resolución difícil ocurren rarísimas veces en los estudios petrográficos y que en éstos el empleo de los condensadores potentes y de grande apertura no tiene más objeto que el de obtener un cono de luz muy convergente que permita la formación de las figuras de interferencia, y para esto importa poco el exacto centrado de los elementos ópticos del sistema. Para el estudio de estas figuras basta casi siempre la convergencia que dan los condensadores secos de 0,85 a 0,90 de apertura numérica útil; pero en los casos extremos, bastante raros por cierto, en los que conviene mayor convergencia, se pueden emplear y se emplean los condensadores de inmersión en aceite de cedro y aun en el monobromuro de naftalina (1), los cuales se montan en la subplatina del mismo modo y con las mismas precauciones que en los microscopios de uso general.

La luz oblicua se aplica en petrografía, no para aumentar el poder resolvente de los objetivos, como en los problemas de resolución extrema, sino para acentuar el fenómeno llamado *línea de Becke*, que se origina en el contacto de dos minerales con distinto índice de refracción y sirve para determinar el valor relativo de dicho índice. La línea en cuestión es

(1) El autor ha obtenido notables resultados aplicando el condensador con frontal de *flint* y de inmersión en monobromuro, que acompaña al equipo óptico del objetivo de 1,63 de apertura numérica de Zeiss.

más pronunciada y se observa mejor cuando el haz de luz es oblicuo y está dirigido perpendicularmente a la cara de contacto de ambos minerales, y por esto, las subplatinas petrográficas están provistas, o bien de la corredera lateral de Abbe en su forma más simple, o bien de cualquiera de los diafragmas exéntricos que se han descrito al tratar de la montura de los condensadores.

Las subplatinas petrográficas llevan también los demás órganos de enfocar que las ordinarias y están provistas del aro destinado a alojar a los vidrios de colores y diafragmas fijos. Algunas de ellas tienen, además, una ranura lateral por la que entra una corredera, en la que se ponen las láminas de yeso, cuarzo y mica, que, talladas en determinadas direcciones, sirven para determinar ciertos carácteres ópticos de los minerales, entre otros el signo. Y es cierto, como afirma con mucha razón el reputado petrógrafo Mr. F. E. Wright (1), que el sitio adecuado para la intercalación de estas láminas es la subplatina del microscopio y no la parte inferior del tubo sobre el objetivo, que es donde se las coloca en casi todas las monturas. La razón es, que estas láminas introducen modificaciones sensibles en la imagen, disminuyen su definición, y alteran su foco; y para que tales cosas no ocurran, se las debe colocar antes de que la imágen se forme y no después. En el microscopio construído bajo la dirección del citado petrógrafo en el laboratorio de geofísica de la institución Carnegie, de Wáshington (2), se ha aplicado esta regla que después han seguido otros constructores. Debemos advertir, sin embargo, que desde hace bastantes años, la casa James Swift & Son, de Londres, viene poniendo en algunas de sus subplatinas un disco giratorio con láminas de esta clase; si bien el objeto de ellas no era hasta hace poco la determinación del signo óptico de los minerales, y por esto sus orientaciones no estaban rigurosamente determinadas, como lo están en el microscopio de Wright y en los posteriores a él.

El centrado exacto del condensador sobre la platina no es tan necesario en petrografía como en las observaciones de alta precisión de otras ramas de la ciencia microscópica. Por esto, salvo las inglesas, la mayor parte de las subplatinas petrográficas están desprovistas de mecanismos

---

(1) «The Methods of Petrographic-Microscopic Research.» Carnegie Institution of Washington. 1911.

(2) Este microscopio se ha construído partiendo del modelo número 1 de Zeiss, en el que se han introducido esta y otras modificaciones, muy prácticas todas, que hacen de él uno de los mejores microscopios petrográficos que hoy existen. Está representado con un grabado en la página II de la citada obra de Wright y con una fotografía en la lámina 1.ª de la misma.

de centrar. Ejemplo de ellas son las de las monturas figuras 337 y 338. Son subplatinas centrables por medio de tornillos en ángulo recto, las de las figuras 334 y 336.

La platina de las monturas petrográficas es uno de los órganos más importantes y característicos de ellas; impuesto por la necesidad que el petrógrafo tiene de medir a cada instante ángulos diversos y sobre todo los llamados *ángulos de extinción*. (1). Este ángulo se puede medir de tres maneras: haciendo girar a la platina sobre la cual está la preparación de roca o mineral; haciendo girar simultáneamente a los dos nicoles y al ocular con su retículo, dejando inmóvil la preparación; o por último, girando el objetivo y la platina a un tiempo y permaneciendo inmóviles el ocular y los nicoles. De estos tres procedimientos se derivan tres tipos de monturas petrográficas, bastantes distintos entre sí, que se llaman: *monturas con platina giratoria; monturas con nicoles giratorios*, llamadas también *monturas Dick*, nombre del inventor del principio en que están basadas, y monturas tipo *Levy-Nachet*, petrógrafo y constructor, respectivamente, de la primera montura de esta clase.

En el primer sistema, la platina es redonda, y lleva en su borde un círculo dividido en grados, sobre el que se apoyan uno o dos nonios, que permiten apreciar hasta cinco minutos de grado. El microscopio, figura 334, y los 335 y 338 llevan platinas de esta clase. El movimiento de giro se hace generalmente a mano; pero en los modelos muy completos hay además un movimiento micrométrico, que entra en acción apretando una

---

(1) Debemos explicar, siquiera sea de un modo somero, lo que significa este término. Cuando los nicoles están cruzados, o sea con sus planos de vibración perpendiculares uno a otro, si no hay ninguna sustancia anisótropa interpuesta entre ellos, el campo del microscopio está oscuro, sin luz ninguna; esto es, *extinguido*. Pero si se interpone una sustancia anisótropa, por ejemplo, una lámina delgada de un mineral que cristalice en cualquier sistema que no sea el cúbico y en la que el plano de sección no sea precisamente normal al eje óptico del cristal, dicha lámina aparecerá alumbrada, y en general coloreada. Si entonces se hace girar a la lámina sobre su plano, la intensidad de luz irá disminuyendo, llegará un momento en que dicha luz desaparezca del todo y el trozo de mineral se vea negro; esto es, *extinguido*. El fenómeno se repite cuatro veces para una revolución completa de la lámina, lo cual se expresa diciendo *que hay cuatro extinciones*, y el ángulo de giro entre cualquiera de ellas y la siguiente es de 90 grados. Ahora bien: entre las líneas naturales de un cristal, tales como las trazas de las caras cristalinas, los cruceros y otras, y la posición de extinción más inmediata, media un cierto ángulo, que se llama *ángulo de extinción con relación a tal o a cual línea del cristal*, que es un dato de capital importancia en la determinación de los minerales y que se mide de las varias maneras que vamos a explicar en el texto.

llave, análogamente a lo que se hace en los círculos de los taquímetros y los teodolitos. Este movimiento permite mayor precisión en la medida de los ángulos.

Las platinas giratorias graduadas tienen dos inconvenientes graves: uno es que, si son mecánicas, los tornillos de los carros sobresalen bastante del borde de la platina, y para que ésta pueda dar una revolución completa, sin que los tornillos tropiecen con el limbo, es preciso arquear a éste mucho y separar bastante de él al eje óptico del tubo, lo cual va en detrimento de la compacidad de la montura. Sin embargo, este inconveniente no es tan grave hoy día, porque los excelentes medios de ajuste que poseen los talleres de construcción de microscopios y el estudio tan minucioso que se ha hecho de estas monturas, han dado por resultado obtener instrumentos estables y sólidos, aun cuando estén provistos de platinas giratorias y mecánicas de gran diámetro. El microscopio, figura 334, es un buen ejemplo de esto.

El segundo inconveniente es bastante más grave que el anterior y más difícil de evitar. Estriba en la dificultad de mantener el centrado permanente de la platina, que poco o mucho ha de alterarse con el uso; pero más difícil es todavía conseguir la coincidencia de dicho centrado cuando se cambia de objetivo. Una platina, por bien hecha que esté, se desajusta a fuerza de girar sobre su eje, y como este giro hay que hacerlo casi constantemente cuando se estudia una roca, es punto menos que imposible evitar los desgastes y el consiguiente descentrado. Se corrige este defecto adaptando a la platina el mecanismo de centrar, y así se hace en las monturas petrográficas bien planeadas. Merced a este mecanismo se pueden llevar a coincidencia perfecta el centro de giro de la platina y *el eje óptico de un objetivo dado*. Subrayamos la frase porque en ella está implícitamente definida la dificultad mayor, la que constituye en realidad el inconveniente más serio con que tropieza el petrógrafo en su trabajo diario. En efecto, es punto menos que imposible obtener dos objetivos, cuyos ejes ópticos coincidan exactamente cuando se los monta en el tubo del microscopio. Aun dando por hecho que el centrado de las lentes sea matemáticamente perfecto para todos ellos, no puede conseguirse otro tanto con las monturas metálicas que soportan a las lentes, ni se pueden evitar ligerísimas diferencias en las roscas; y estas diferencias se multiplican después por cifras grandes en virtud del aumento del objetivo, y dan por resultado que si se monta uno de éstos en el tubo y se centra a la platina con exactitud para que al girar no salga del centro del campo un punto de la preparación por pequeño que sea, al sustituir a este objetivo por otro, resulta que dicho punto no permanece ya inmóvil en el centro del campo cuando gira la platina, sino que describe un círculo de radio mayor o menor alrededor de dicho centro, demostrando con ello que hay descentrado, y pudiéndose medir la cuantía de éste midiendo el radio dicho con un micrómetro y teniendo en cuenta al aumento de la combinación óptica que se emplea.

Resulta de aquí que cada vez que se intercala un objetivo en el tubo es preciso rectificar al centrado, operación larga y pesada que se hace, bien centrando a la platina con el mecanismo mencionado antes, bien centrando al objetivo, que es lo que generalmente se practica, por ser más fácil y porque así no se altera la posición de la platina respecto al condensador. El mecanismo que se suele emplear para esta operación es la *tenaza de centrar,* que consiste en una pieza atornillada al extremo inferior del tubo, que lleva dos tornillos de centrar en ángulo recto, análogos a los de todos los mecanismos de esta clase, aun cuando más pequeños. Los tornillos se sitúan uno a la derecha y el otro delante del tubo, para que el operador los pueda manejar con facilidad. A los objetivos se los provee de una pieza metálica que se atornilla a la rosca universal, macho de ellos, y que lleva un reborde ancho sobre el cual se apoyan las pinzas de la tenaza, las cuales se abren con los dedos y se cierran por medio de un resorte, según se ve en las figuras 337 y 338 (letra *k*). De este modo, el intercambio de los objetivos se hace con suma rapidez; pero no se evita el trabajo de tenerlos que centrar cada vez que se colocan en el tubo.

El único aparato de los inventados hasta ahora que elimina dicha operación de centrado, es el *cambiador de objetivos Zeiss* (1), tan empleado hoy en microscopia general. En ellos cada objetivo lleva una pieza con su mecanismo de centrar, que entra por medio de una corredera en otra pieza fija al extremo inferior del tubo. Con este aparato, cada objetivo se centra individualmente y por separado sobre el objeto, y la única precaución que hay que tener es la de revisar de vez en cuando este centrado y la de cuidar que la platina, si tiene mecanismo de centrar, no cambie de posición.

La dificultad de que nos estamos ocupando es tal que desde la generalización de los estudios petrográficos se hubieron de preocupar los operadores en idear medios para dominarla. El más antiguo de estos medios es el empleado por Nachet (2), que consiste en hacer girar al objetivo al

(1) Está representado en las figuras 288 y 289 (§ 209) del capítulo I de la parte V. El lector puede verlo en cualquiera de los catálogos de microscopios de la casa Zeiss.

(2) Este constructor francés es uno de los que más han contribuído a los progresos de las monturas petrográficas, debido, tal vez, a haber sido el llama-

mismo tiempo que el objeto, con lo cual el punto central de la imagen de éste permanece en coincidencia con el punto de cruce de los hilos del retículo ocular. Tanto éste como los dos nicoles quedan inmóviles durante el giro de la platina y del objetivo. Esta disposición se ve bien en la figura 337, que representa a la montura mineralógica grande de Nachet; debiendo advertir que todas las que construye esta casa son idénticas en este respecto. El microscopio lleva dos limbos: uno exterior, que soporte al tubo, al ocular y al mecanismo de enfocar a la lente de Bertrand, y otro interior, fijo a la platina, que sostiene al objetivo, a sus dos mecanismos de enfocar y a la tenaza para el intercambio, la cual no lleva tornillos de centrar, porque dicho se está que no los necesita, sirviendo tan sólo para poner y quitar rápidamente a los objetivos. La adaptación de un tubo al otro se hace a enchufe holgado, siendo de mayor diámetro el inferior que el superior. De este modo, los dos movimientos de enfocar, el del objetivo y el de la lente de Bertrand, pueden funcionar con independencia, y el giro del objetivo y la platina se verifica sin rozamientos ni choques (1).

Otra disposición que realiza el mismo objeto, y a la que ya hemos aludido antes, es la llamada *sistema Dick,* generalizada primero en Inglaterra y después en el resto de Europa. Las figuras 333 y 336 representan microscopios construídos con este sistema. En él, tanto el objetivo como la platina, quedan fijos, y los nicoles y el ocular giran solidariamente, para lo cual se montan los tres elementos sobre aros bien centrados y se los une a una barra exterior paralela al tubo. La unión se hace, bien por medio de ruedas dentadas, como en la montura de la figura 336, bien por medio de piezas metálicas planas, como en la de la figura 333, en la que la barra está designada por la letra *n* y la barra de unión superior por la *a*. Esta barra está formada por dos piezas prismáticas o estriadas longitudinalmente, que enchufan una en otra y que permiten todos los alargamientos y acortamientos posibles del tubo. Los ángulos de giro se miden con un círculo graduado y un nonio (letra N, figura 333, y letra E, figura 336), que se sitúan en la parte superior del tubo (figura 336), o en la subplatina, sobre el aro soporte del polarizador (figura 333). Una lente

---

do a interpretar las ideas de uno de los más notables petrógrafos del pasado siglo, cual fué el ingeniero de minas francés M. Michel Lévy. Todas las invenciones de éste fueron puestas en práctica en los talleres de Nachet y después copiadas por los demás constructores.

(1) Esta disposición de Nachet ha sido adaptada, con algunas modificaciones ingeniosas, al excelente microscopio petrográfico universal que construye la «Société Genevoise pour la construction d'instruments de Physique et de Mécanique» de Ginebra.

auxiliar (figura 336, letra D) suele acompañar a este círculo en las monturas muy completas para poder apreciar mejor las fracciones de grado. El movimiento de giro se hace, bien apoyando los dedos sobre la barra o sobre el borde del círculo, o bien por medio de un botón dentado que engrana con la rueda superior del mecanismo. En algunas monturas, para conseguir la mayor precisión posible en la medida de los ángulos, se complementa el movimiento a mano con un micromético análogo al que hemos citado al hablar de la platina. En este caso se añade también un tornillo de presión que fija a los nicoles y al ocular en la posición que se desea.

Lo más frecuente en las monturas Dick es colocar al analizador giratorio en la parte superior del tubo, sobre el ocular, y así está en el microscopio representado en la figura 336. Pero recientemente se ha aplicado también el sistema a analizadores colocados en la parte central o inferior del tubo (figura 333), con lo cual no se pierde la ventaja del mayor diámetro de campo visual que dan los analizadores colocados en esta posición.

Para terminar con lo relativo a las platinas de las monturas petrográficas, diremos que sus accesorios son los mismos que los empleados en microscopia general, figurando entre ellos, en primer término, los destinados a registrar la posición de un punto para poderlo volver a encontrar después. Si la platina es simple, el medio más práctico es proveerla de la cuadrícula lateral numerada, que determina la posición de la esquina derecha del portaobjeto, cuando el detalle que se quiere registrar está en el centro del campo. La platina de la montura, figura 336, lleva una de estas cuadrículas. Si la platina es mecánica, se le provee de las dos escalas rectangulares, correspondientes a los dos movimientos, y se leen en el nonio o en el índice fijo a la platina las cotas que determinan el detalle que se quiere anotar (1). Las monturas, figuras 334 y 337, van provistas de escalas de esta clase.

Otro dato a tener presente, cosa que por cierto suelen olvidar los

---

(1) Nos ha llamado siempre la atención la disposición de estas escalas en las platinas del constructor Fuess. Están grabadas sobre el plano mismo de la platina, y los tornillos que mueven a la preparación son muy precisos, proyectándose poco hacia afuera las cabezas de los mismos, las cuales llevan además en su contorno una división empírica (letra *s*, figura 338). Pero como estas platinas no llevan topes contra los cuales se apoye el portaobjeto, obligándolo a ocupar siempre la misma posición, resulta que las escalas no sirven para registrar las cotas del punto central del campo. De aquí que los tornillos y escalas no tengan otro objeto que el de llevar con toda exactitud a un punto dado al cruce de los hilos del retículo y también el de poder medir con ellas longitudes del objeto, usando la platina a guisa de micrómetro.

constructores de Inglaterra, es que los portaobjetos que se emplean para montar rocas y minerales son casi siempre de un tamaño especial (29 $\times$ 48 mm.), bastante menor que el corriente de las preparaciones ordinarias (75 $\times$ 25 mm.) De aquí resulta que los topes para los primeros no sirven para los segundos, y viceversa. La dificultad se puede obviar, haciendo móvil al tope lateral y graduando su posición por medio de una escala, como hace el constructor Zeiss en su platina grande de carro. También se pueden poner dos marcas en la corredera del tope, que correspondan a las dos longitudes de 75 y de 48 milímetros. Pero si la platina no está provista de uno cualquiera de estos medios, el operador los puede suplir mandando construir una chapa de latón de un milímetro a dos de espesor y del tamaño de un portaobjeto corriente, haciendo en el centro de esta chapa una abertura de 15 $\times$ 15 milímetros, que es el tamaño aproximado de los trozos de roca que se examinan, y poniéndole dos topes o uno solo para que el portaobjeto pequeño, apoyado de plano sobre la chapa, ocupe siempre la misma posición. Esta disposición la hemos adaptado a nuestras monturas inglesas, y el resultado ha sido bueno.

El ocular de los microscopios petrográficos va provisto de un retículo formado por dos líneas perpendiculares una a otra, que se deben cruzar en el centro del campo. Los planos determinados por los hilos y por el eje óptico deben coincidir exactamente con los de vibración de los nicoles cuando éstos están cruzados; esto es, cuando la luz se extingue por completo al atravesarlos. La verificación de esto es una operación delicada y de suma importancia para los resultados del examen petrográfico. Se hace dejando inmóvil a uno de los nicoles y haciendo girar al otro sobre su montura hasta que la oscuridad sea total. Casi siempre los microscopios vienen de fábrica perfectamente rectificados; pero conviene cerciorarse de ello, para lo cual tiene a su disposición el operador aparatos especiales ópticos, inventados para el caso, que permiten apreciar hasta las más leves diferencias en la posición de extinción (1). Para comodidad del ope-

(1) No entraremos en la descripción detallada de estos aparatos, porque pertenecen a la técnica especial petrográfica; pero no podemos por menos de citar los dos más empleados, que son: *la lámina sensible de Bertrand,* que consiste en cuatro sectores de cuarzo, tallados perpendicularmente al eje óptico, y dos de los cuales son dextrogiros, y levogiros los otros dos. Esta lámina se coloca sobre la platina del microscopio, y debido a la polarización rotatoria del cuarzo, la menor diferencia en la posición de extinción se acusa por el distinto tono de color que toman los sectores. Esta lámina de Bertrand se puede montar también en el ocular, y entonces resulta más fácil su manejo.

El ocular de Calderón, inventado por nuestro malogrado compatriota don Laureano Calderón, consiste en un ocular negativo provisto de una lámina de rador conviene que cuando los nicoles estén exactamente cruzados, el índice del círculo graduado de cada uno, si lo llevan, coincida con el cero de la división. Si no coincidiese, se debe hacer girar a los nicoles, dentro de su montura, hasta conseguirlo.

El retículo del ocular debe tener sus hilos exactamente perpendiculares uno a otro, y estos hilos deben estar constantemente enfocados sobre el mismo plano que el objeto y para la vista del operador que trabaja. Además, el ocular debe ocupar la misma posición cada vez que se pone en el tubo. La primera condición se puede realizar con un retículo de hilos de araña tendidos a través del diafragma ocular, y así se hace en la mayoría de los microscopios ingleses; pero es más fácil conseguir la citada condición colocando sobre el diafragma un disco de vidrio muy transparente, sobre el cual hay grabada con un diamante una cruz que el constructor centra de una vez para todas al pegar el vidrio al ocular. Así se hace hoy día en los microscopios alemanes y en algunos ingleses. La segunda condición se consigue empleando oculares negativos, cuya lente superior va montada en un cilindro que enchufa en el cuerpo del ocular y que permite subir o bajar a la lente, merced a lo cual se puede enfocar con toda exactitud al retículo sobre el plano de la imagen. Por último, la invariabilidad de posición del ocular en el tubo se consigue poniendo en la montura del primero un botón pequeño, que encaja en una muesca practicada en el borde superior del tubo. Botón y muesca están situados de tal modo que cuando el ocular está en su sitio, uno de los hilos del retículo resulta dirigido de derecha a izquierda y el otro de adelante atrás (1). Pero como es frecuente tener que emplear al ocular formando sus hilos un ángulo de 45 grados con las posiciones anteriores, resulta cómodo hacer en el tubo del microscopio una segunda muesca en tal sitio del borde que, introducido el botón del ocular en ella, los hilos tomen las direcciones antedichas, o sea, uno, la de NE. a SO., y el otro, la de NO. a SE. Para la determinación del signo óptico con luz paralela, esta disposición economiza bastante tiempo.

---

calcita, obtenida seccionando a un romboedro de espato calizo, según su diagonal menor, y soldando las dos mitades obtenidas después de haberlas tallado de modo que sus secciones principales formen entre sí un ángulo muy pequeño. Esta lámina, colocada sobre los nicoles cruzados, restablece la luz, dejando pasar algo de ella, que se reparte por igual sobre todo el campo; pero si la perpendicularidad de los nicoles no es exacta, las dos mitades del campo se alumbran desigualmente.

(1) Es frecuente designar estas posiciones con los nombres «Este a Oeste», para la primera, y de «Norte a Sur» para la segunda, y así lo haremos nosotros con frecuencia en las explicaciones del texto.

Los aumentos y aperturas de los objetivos son en petrografía factores bastante menos importantes que en otras ramas de la microscopia, porque rarísimas veces hay que resolver en los minerales y rocas detalles tan pequeños como en histología, microbiología, etc. Tres objetivos, de 25 a 30 milímetros de distancia focal el uno, de ocho a 10 otro, y de cuatro a seis el más potente, combinados con oculares que aumenten, respectivamente, cuatro, seis y ocho diámetros, forman un equipo ampliamente suficiente para todas las exigencias de la práctica diaria. De aquí el empleo casi exclusivo de los objetivos secos, y de aquí también que no haga falta emplear apocromáticos, pues, salvo en casos difíciles de microfotografía de rocas, los acromáticos modernos bastan para todos los casos (1).

A propósito de la apertura numérica y del empleo de los objetivos de inmersión debemos, sin embargo, hacer una salvedad. En los estudios con luz convergente conviene que el cono que emerge del condensador sea del mayor ángulo posible, y lo mismo el de rayos que recoge el objetivo; porque de ese modo la figura de interferencia que forman los ejes y las bisectrices, se forma mejor y se observa mejor también. Para esto puede convenir que, tanto el condensador como el objetivo, sean de inmersión y capaces de alcanzar aperturas de 1,40 y aun mayores. Esto ha dado lugar a la construcción de un objetivo especial de inmersión en monobromuro de naftalina, cuya apertura llega, o se aproxima, a 1,60; pero como no se trata de observar con él a la imagen de un objeto y sí tan sólo a la que origina un fenómeno óptico, su corrección no necesita ser perfecta, y es, en realidad, deficiente hasta tal punto que el objetivo no sirve para estudiar objetos, porque las imágenes que de ellos forma son de imperfección extraordinaria en distorsión y cromatismo.

Además de los oculares con retículo, que hemos mencionado, se emplean en petrografía otros para fines especiales de esta ciencia. Merecen citarse, entre ellos, a los *oculares micrométricos,* bien de escala fija, bien de hilos móviles, que sirven para medir objetos y también para de-

(1) Respecto al empleo de apocromáticos con luz polarizada, debemos mencionar una observación que hemos tenido ocasión de hacer en algunos de aquéllos, y es que la extinción completa ha resultado imposible, pues en todas las posiciones de los nicoles había luz en el campo. La única hipótesis que se nos ha ocurrido para explicar esto, es la de suponer hay dentro del objetivo alguna sustancia no isótropa y sí birrefringente, que tal vez pueda ser alguno de los materiales vítreos que funde la Vidriería Científica de Jena para la construcción de lentes. Poseemos un apocromático de Zeiss, de 8 mm. dist. foc. y 0,65 a. n., en el que esta anomalía se acentúa tanto, que aun con los nicoles exactamente cruzados, hay en el campo luz suficiente para poder distinguir casi todos los detalles del objeto.

terminar la separación de los puntos de emergencia de los ejes ópticos del mineral, y deducir de aquí el ángulo que los mismos forman. Los estudiaremos en el capítulo dedicado a medida de objetos microscópicos. Los *oculares planimétricos,* que en vez de retículo llevan una cuadrícula de tamaño conocido, que sirven, entre otras cosas, para determinar la proporción relativa de los minerales que integran las rocas. Los *oculares goniométricos*, provistos de un hilo fijo y otro giratorio alrededor de su punto de intersección con el eje óptico del microscopio y solidario de un círculo graduado, sobre el cual se leen los ángulos que el hilo describe. El objeto de estos oculares es medir el ángulo de los cruceros, aristas, etc., en los microscopios cuya platina no es giratoria.

Por último, hay otros oculares que llevan montados en su interior diversos elementos ópticos auxiliares, como un prisma de Nicol, una o varias láminas de yeso, mica y cuarzo, un compensador de este último mineral, ect., cuyos elementos transforman al ocular en un aparato de investigación completo, o casi completo, de las reacciones ópticas de los minerales (1). En otros casos se adapta al ocular, por ser el órgano del microscopio donde más conviene hacerlo, tal o cual aparato, destinado a un fin petrográfico dado. Por ejemplo, el comparador de Michel Lévy, que sirve para medir la birrefracción, va montado sobre un ocular de lente enfocable. Los compensadores de Babinet, de Leiss y de Siedentopf, que sirven para lo mismo que el de Michel Lévy, van montados también sobre oculares a propósito.

El tubo de las monturas petrográficas es un órgano de construcción adecuada para recibir ciertos aditamentos que son innecesarios en los microscopios de uso corriente. El primero de aquéllos que se encuentra a partir del objetivo, y prescindiendo de la tenaza de centrar o del cambiador, es una abertura rectangular que recibe a la corredera sobre la que van montadas las láminas auxiliares de yeso, cuarzo, y mica, de que ya hemos hecho mención. Estas láminas tienen espesores rigurosamente determinados, para que la de yeso dé entre los nicoles el color rojo del primer orden de Newton; la de cuarzo, el llamado *color sensible* o *tinta sensible* núm. 2; y la de mica introduzca en el haz de luz empleado, un retraso igual a *un cuarto de longitud de onda.* Además, la dirección n_g de índice máximo, o sea de elasticidad mínima, debe estar marca-

(1) Uno de los oculares de este tipo que ha sido mejor estudiado y cuyo uso se generaliza más cada día, es el de F. E. Wright, que puede ver el lector en los catálogos de la casa Fuess, o en la obra del citado autor *The Mehods of Petrographic-Microscopic Research,* Carnegie Institution. Wáshigton, 1911.

da en la montura metálica de estas láminas de un modo fijo y permanente, para que el operador se pueda cerciorar de ella cada vez que lo necesite; por más que si abrigara dudas sobre cuál es esta dirección, tiene a mano medios ópticos fáciles para determinarla (1). La corredera que soporta a estas láminas suele entrar en el tubo lateralmente; esto es, de E. a O., y en tal caso, la lámina auxiliar se monta sobre la corredera de modo que la dirección n_g forme un ángulo de 45 grados con el lado mayor de aquélla, para que cuando esté intercalada en el tubo tome la dirección NE. a SO. Otras veces la abertura de la corredera está en esta última dirección (monturas de Fuess, por ejemplo), y entonces la flecha que marca a n_g es paralela al lado mayor de la corredera, para que siga verificándose la condición de estar dirigida de NE. a SO. cuando se intercala en el tubo.

Debemos advertir, sin embargo, que, aun cuando la mayoría de los constructores adopta para las láminas auxiliares la posición antedicha, hay algunos que las montan en ángulo recto a ella, o sea de tal modo, que al intercalarlas en el microscopio, la dirección n_g queda orientada de NO. a SE. Para evitar confusiones, el operador se debe cerciorar de antemano de la orientación que tienen las láminas que acompañan a su microscopio; preguntársela al constructor, si éste no lo dice en su factura o catálogo; y, en último caso, cerciorarse de ella haciendo por sí mismo los experimentos adecuados que se describen en los tratados de petrografía (2).

---

(1) El más expedito, es colocar la lámina de yeso sobre la platina; cruzar a los nicoles y hacerla girar alrededor de la supuesta dirección n_g marcada con un trazo sobre la montura. Si efectivamente esta marca corresponde a n_g, el color rojo de polarización del yeso *subirá* en la escala de Newton y se convertirá en azul. Si, por el contario, *baja*, transformándose en amarillo, es que el eje del giro no es n_g sino n_p.

(2) A cada paso nos hemos visto obligados a referirnos a los tratados de petrografía y a consejar al lector acuda a ellos, ante la imposibilidad en que nos vemos de convertir este libro en uno de aquellos tratados. Si bien hay muchos de éstos, creemos facilitar la tarea del lector citando algunos de los más usados hoy día por los petrógrafos.

Son éstos, entre otros:

MICHEL LEVY ET LACROIX. *Les Minéraux des Roches*, París, 1888.

DUPARC ET FEARCE. *Traité de Technique Minéralogique et Petrographique*, Leipzig, 1907.

F. RINNE. *Etude Pratique des Roches*. (Traducción francesa de L. Pervinquière), París, 1912.

F. E. WRIGHT. *The Methods of Petrographic-Microscopio Research*, Carnegie Institution of Washington, 1911.

J. P. IDDINGS. *Rock Minerals*, New-York, 1911.

W. W. NIKITIN. *La Méthode Universelle de Fedoroff*. (Traducción francesa de L. Duparc y Vera de Dervies, París, 1914.)

Cuando el analizador va montado en el ocular, las láminas auxiliares se colocan bajo él, en correderas como las del tubo. En la figura 334 la ranura para alojar a la corredera está designada por D. y en la figura 336, lo está por C.

Siguiendo ascendiendo por el tubo, viene después de las láminas auxiliares, uno de los órganos más importantes de los microscopios petrográficos, cual es la *lente de Bertrand*, destinada al examen de las figuras de interferencia. Es una lente convergente simple que actúa como un objetivo débil y que, en unión del ocular, forma dentro del tubo un segundo microscopio que aumenta la cruz, hipérbolas, anillos, etc., que por interferencia se forman con la luz convergente en el plano focal posterior del objetivo o cerca de él. Es preciso poder intercalar y separar con facilidad a esta lente del eje óptico; poderla enfocar, sin mover al objetivo principal, sobre la imagen de interferencia, cual si esta fuese un objeto real; y poderla centrar con exactitud para que la imagen se forme en el centro del campo.

Para realizar la primera condición, se monta la lente de Bertrand sobre una corredera y se practica en el tubo una abertura para alojar a ésta. Un tope indica al tacto cuando la lente está en su sitio, o sea coincidiendo su centro con el eje óptico. En la figura 334, la corredera está representada por la letra L y ofrece la particularidad de ir colocada bajo el analizador, con lo cual se obtiene una figura de interferecia muy grande. En esta montura se puede emplear otra segunda lente de Bertrand, designada por E, y montada en la parte superior del tubo. En la figura 336 hay también dos lentes designadas por F y G. En la montura de Nachet, figura 337, se ve en la parte anterior del tubo una ventana que se abre de abajo arriba, y que sirve para alojar a la corredera de la lente. En los microscopios de Fuess (fig. 338) la lente de Bertrand es B.

La segunda condición se consigue, o bien moviendo el ocular y la lente, enchufando más o menos con la mano el tubo que lo soporta, o bien verificando este movimiento por medio de una cremallera y un piñón análogos a los del movimiento rápido del tubo. Las monturas de las figuras 337 y 338 están provistas de este último aditamento mecánico.

En cuanto al centrado de la lente respecto al eje óptico, es lo más frecuente que venga hecho de fábrica con la suficiente precisión para que no haya necesidad de rectificarlo; pero en las monturas muy perfeccionadas se añaden a la corredera que sirve de montura a la lente dos tornillos de centrar, con sus correspondientes resortes, análogos, aun cuando más pequeños, que los de centrar la platina. Este mecanismo permite llevar exactamente al centro del campo la imagen de interferencia, cosa muy conveniente cuando se trata de medir el ángulo de los ejes. La montura de Fuess, figura 338, está provista de este mecanismo.

Por último, en algunos microscopios se ha previsto la posibilidad de aumentar la definición de la imagen de interferencia, diafragmándola más o menos, y, al efecto, se ha añadido un diafragma iris, que se sitúa muy cerca de la lente de Bertrand. La montura figura 338 tiene este diafragma, que se maneja con la palanca J. En ella hay también una escala que permite registrar la posición, más alta o más baja, de la lente, a lo largo del eje óptico, para poderla volver a obtener después sin necesidad de tanteos.

El tornillo micrométrico de enfocado lento tiene en las monturas petrográficas excepcional importancia, porque, a más de servir para precisar el foco con los objetivos potentes, está llamado a desempeñar el papel de esferómetro. En efecto: el espesor exacto de la lámina de roca o mineral que se examina es un factor capital en la determinación de ciertos valores ópticos de aquéllos y, entre otros, en la medida de los índices de refracción y de las birrefracciones. No se ha encontrado hasta ahora un procedimiento que permita medir este espesor con suficientes garantías de exactitud y sobre todo de certeza. El menos deficiente de todos, sin querer decir con esto que reúna las condiciones apetecibles por completo, es emplear el tornillo micrométrico del microscopio a guisa de esferómetro y medir con él el espesor dicho, enfocando con un objetivo potente, primero a una cara de la lámina de roca, y luego a la otra, y leyendo, por último, el avance del tornillo entre las dos posiciones. Pero esto, que en tan pocas palabras se dice, y que tan hacedero parece a primera vista, es en la práctica una de las operaciones más difíciles y de resultados más inciertos de cuantas tiene que abordar el micrógrafo. En el capítulo dedicado a medida de objetos microscópicos detallaremos la manera de operar, (1); ahora sólo nos toca decir que, para garantizar en lo posible el resultado de la medida, el tornillo de las monturas petrográficas debe ser muy preciso; no debe tener puntos muertos ni holguras de rosca que originen giros en falso; y debe ser de tal finura que permita apre ciar fracciones de milímetro de dos a cinco micras. Además, el operador debe saber con certeza *el valor de cada división o de cada revolución de la cabeza del tornillo,* o sea cuánto avanza el tubo en el sentido del eje óptico por cada revolución o fracción de ella que da dicha cabeza. Este dato lo debe suministrar el constructor, porque determinarlo el ope-

(1) El lector lo puede ver también en cualquier tratado de petrografía.

rador por sí mismo, es operación punto menos que imposible de realizar con exactitud. La mayoría de los constructores no se limitan a darlo en sus catálogos, sino que graban la cifra de avance en la cabeza del tornillo; pero si por acaso no lo hubieran hecho, el comprador del microscopio lo debe exigir, por tratarse de una de las *constantes* más necesarias del instrumento.

Réstanos decir algo del espejo de estas monturas, porque, aun cuando ni su construcción ni la manera de montarlo se diferencian de las de los espejos corrientes de microscopio, su uso, no estando prevenido, puede inducir a ciertos errores. Dependen éstos de que la luz se polariza al reflejarse sobre el vidrio y no al reflejarse sobre una superficie metálica, y como el espejo de los microscopios tiene dos caras reflectoras, una metálica, que es la inferior y que da una imagen muy brillante de la luz, y otra devidrio, que es la superior que deja pasar mucha luz y refleja poca, pero que, al fin y al cabo, refleja alguna y ésta está polarizada, pueden producirse efectos perturbadores cuando no se conoce o cuando se olvida esta particularidad, sobre todo cuando se practica una de las determinaciones más frecuentes de la petrografía, cual es la del dicroísmo de los minerales. Un experimento muy sencillo pondrá de manifiesto la causa de error a que aludimos. Póngase en la platina la preparación de una roca que contenga minerales muy dicroicos; por ejemplo, la de un granito o un gneis con biotita o tierralina. Para estudiar el dicroísmo se debe poner el polarizador en la subplatina, quitar el analizador y dar vueltas a la lámina sobre su plano, haciendo girar a la platina. Si así se hace, se verá en seguida resaltar el cambio de color y de tono al cambiar la dirección del mineral. Si entonces se quita al polarizador y se dirige directamente al condensador la luz que refleja el espejo plano, se verá que, al girar la lámina, se sigue acusando el dicroísmo, que será mucho más débil que antes, pero, aun siéndolo, se lo podrá observar sin ningún género de dudas, sobre todo en minerales muy dicroicos, como los elegidos como ejemplo. El fenómeno depende de la pequeña cantidad de luz polarizada que refleja la cara superior del espejo, y prueba de ello es que desaparece si se emplea un espejo plateado por delante, o, lo que es más hacedero, si se pone el microscopio horizontal, se quita el espejo y se dirige directamente la luz-condensador, suprimiendo así la reflexión.

Hay, pues, en todo espejo de vidrio plateado por detrás, una cierta fracción de luz polarizada *parásita*, que se suma a la del nicol polarizador, y cuyo plano de vibración no coincide con la de este último. Esta luz parásita puede dar lugar a fenómenos cromáticos que originen dudas; sobre todo si se están estudiando minerales cuya birrefracción sea débil. En tales casos, si el operador no dispone de un espejo plateado por delante, debe comprobar su observación haciendo lo dicho antes, o sea dirigiendo directamente al microscopio la luz del foco artificial, o la de la ventana, si alumbra a su aparato con luz del día y viendo lo que sucede.

Tales son los principales órganos ópticos y mecánicos de las monturas petrográficas. Repetiremos lo dicho antes: hay muchos otros accesorios, construídos con fines especiales, adaptables a estos microscopios, en cuya descripción no podemos entrar, porque sería convertir este libro en un tratado de petrografía (1). Pero no podemos omitir hablar de uno de estos órganos, cuya importancia es tal que por sí solo ha duplicado el campo de las investigaciones petrográficas que se pueden hacer con el microscopio y va en camino de transformar de plano al método hasta ahora empleado para el estudio de minerales y rocas. Nos referimos al procedimiento o *método de Fedoroff*, conocido también con el nombre de *método del teodolito*. Vamos a describirlo someramente insistiendo en los aparatos que para aplicarlo se emplean.

En toda roca hay secciones múltiples, orientadas en todos sentidos, de cada uno de los minerales que la integran. Para estudiar uno cualquiera de éstos minerales hay que seleccionar entre todas las secciones aquellas que por su orientación casual permiten la determinación de las constantes ópticas principales, como la birrefracción, posición de los ejes, ángulo de estos, etc. Podrá ocurrir, y ocurre con frecuencia, que en una preparación, de roca, no se encuentren secciones del mineral dado que estén convenientemente orientadas, y entonces hay que apelar a nuevas preparaciones, que a su vez las contendrán o no, o contentarse con secciones cuya orientación se aproxime a la conveniente, sin llegar a serlo, lo cual da cierta incertidumbre a los resultados; se puede también escoger trozos sueltos del mineral en cuestión, separados previamente de la roca, y tallarlos por medio de aparatos adecuados en la dirección exacta que se desea. Este procedimiento es el mejor y el de resultados más positivos, en cuanto a certidumbre en las determinaciones; pero sólo se puede emplear contadas veces, porque para ello es preciso que el mineral de que se

(1) Para que el lector se pueda formar una idea de hasta qué punto se ha especializado en esta ciencia, y del número de aparatos ópticos que hoy día se emplean en los estudios de petrografía, le recomendamos un examen del catálogo de la casa Fuess, de Berlín-Steglitz, que es especialista en aparatos de esta clase. Ello demostrará al lector el enorme número de ellos con que cuenta en la actualidad el operador que se dedique a este estudio. Verá también que la tendencia es adaptar al microscopio porción de aparatos que antes eran extraños a él, como, por ejemplo, los goniómetros, refractómetros y otros.

trata se presente en trozos relativamente grandes, de dos a tres milímetros, por lo menos, para poderlo manejar y que se pueda separar de la roca con cierta facilidad (1). Además, el tallado, según orientaciones fijas, no es operación fácil, y exige bastante tiempo para llevarlo a cabo.

El método de Fedoroff salva estos inconvenientes, porque permite modificar la orientación de un mineral contenido en una preparación cualquiera de roca y hacerle tomar la dirección que convenga para la determinación de que se trate, pudiéndose medir, además, el ángulo de giro que ha descrito para llegar a la orientación final. Para esto, se vale Fedoroff de una platina especial, inventada por él, y que lleva su nombre, representada en la figura 332 con una modificación que ha introducido recientemente en ella el petrógrafo americano Mr. E. E. Wright. Después, y para salvar algunos inconvenientes de esta platina, se han construído microscopios enteros, adaptados especialmente al método de Fedoroff. El primero de ellos, tenemos entendido, ha sido el proyectado por el profesor portugués señor Souza-Drandao (2), y construído por la casa Fuess. Esta misma casa ha puesto hace poco a la venta otra montura, más sencilla que la de Souza-Drandao, que realiza admirablemente el objeto, y que hemos representado en la figura 333. La descripción simultánea de ella y de la platina de Fedoroff facilitará la inteligencia del método.

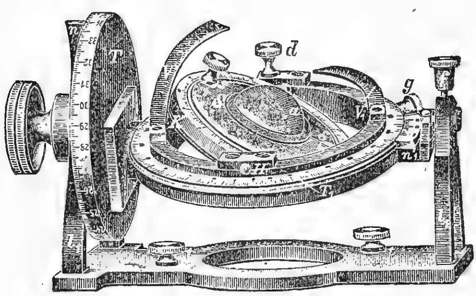


Figura 332

La orientación deseada se consigue por medio de tres rotaciones alrededor de otros tantos ejes, y la medida de los ángulos de giro se hace sobre círculos o sectores de círculo, convenientemente graduados, que corresponden a aquéllos. Estos ejes son: *Primero*. El horizontal de la platina

---

(1) El autor se ha valido para estos estudios de los trozos aislados de minerales que se encuentran en las arenas de los ríos, y que se pueden seleccionar con facilidad relativa empleando el lavado en artesas y en bateas, y después el método de los líquidos densos. La técnica seguida la hemos descrito brevemente en el trabajo titulado *Estudio Geológico y Petrográfico de la Serranía de Ronda*, publicado por el Instituto Geológico de España. Madrid, 1917. Página 134 y siguientes.

(2) La descripción de este microscopio se ha publicado en el *Zeitschrift für Kristallographie*, tomo XLIX.

(figura 332), determinado por sus dos cojinetes laterales, que arrastra consigo a todo el mecanismo de ella, y cuyos ángulos se miden sobre el círculo T con el vernier *n*. Este eje permanece constantemente perpendicular al eje óptico del microscopio. Su equivalente en la monutra de Fuess (figura 333) es el perpendicular al limbo, movido por el tambor con manecillas *r*, y cuyos ángulos de giro se miden sobre el círculo I con el vernier que se ve en la figura. Un tornillo de presión *f* (fig. 332) fija a la platina en la posición que se quiere. Este tornillo no existe en la montura de Fuess, que representa la figura 333, pero sí en los modelos más modernos de ésta, que, además, son inclinables. *Segundo*. El eje determinado por los cojinetes H H (fig. 332) que permite la inclinación del disco interior de la platina, y cuyos ángulos se miden sobre los dos sectores V y VI; los cuales son la modificación introducida por Wrigh en los primitivos modelos de

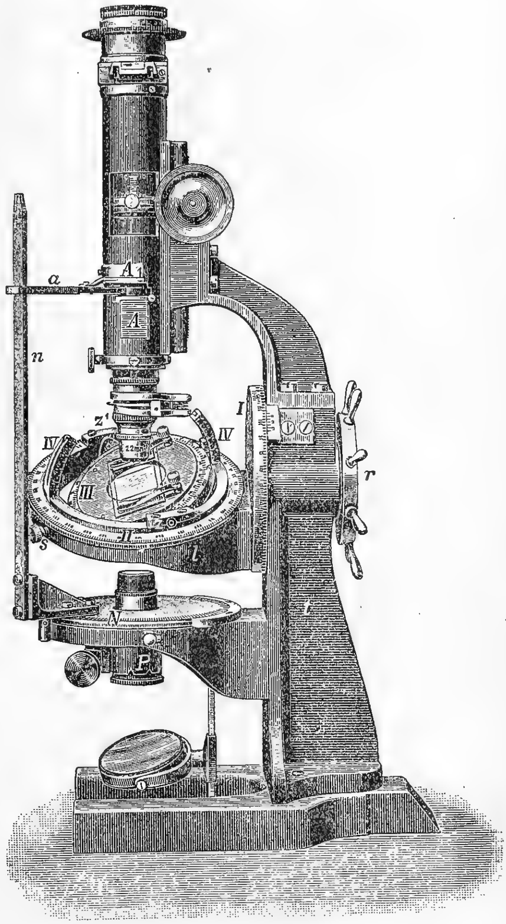


Figura 333.

Fedoroff. El equivalente de este eje en la montura de Fuess es *z z*, y los sectores son los designados por IV-IV. *Tercero*. Un eje normal al plano de la platina, y que continúa siéndolo en todas las posicions que toma la preparación. Sobre este eje gira el disco S (fig. 332), agarrándolo por el botón *s*. Los ángulos de giro se registran sobre el círculo graduado K por medio de un índice. El equivalente de este círculo en la montura de Fuess (fig. 333) es III.

Estos tres ejes se cruzan en el centro mismo de la platina, que está determinado por una cruz, trazado con un diamante sobre el disco de vidrio, muy transparente, que ocupa la parte central de aquélla. Este punto de intersección debe permanecer sobre el eje óptico del microscopio en todas las posiciones de la preparación, y para ello, los tornillos que unen la platina de Fedoroff a la del microscopio (fig. 332), van dispuestos de modo que aquélla se pueda centrar. En la montura de Fuess (fig. 333), la platina está centrada por construcción, o es centrable (modelos modernos) por medio del mecanismo habitual.

Es condición también precisa que el punto de intersección de los tres ejes esté a tal altura que cuando se coloque la preparación sobre la platina con el cubreobjeto hacia abajo, o sea apoyado sobre el disco de vidrio, el citado punto de intersección venga a situarse dentro del mineral que se examina, y no esté por encima ni por debajo de él, para que este mineral no salga de foco durante los múltiples giros, y para que éstos se verifiquen, todos alrededor de un punto del mineral mismo. Para ello se construyen la platina de Fedoroff y la de la montura de Fuess, de modo que el punto ideal de cruce de los tres ejes esté a 0,15 milímetros sobre el disco de vidrio; porque esta cifra es aproximadamente el espesor que resulta sumando el del cubreobjeto (0,10 a 0,12 mm.) al del bálsamo, que forma una capa muy delgada entre aquél y la lámina de roca. Las pequeñas diferencias que puedan resultar por el distinto espesor de los cubreobjetos, no influyen en los resultados, porque el método de Fedoroff no exige aumentos grandes, y el objetivo más potente que con él se emplea es el número 4, que, combinado con el ocular 3, da un aumento total de 120 diámetros (1), el cual no aprecia o apenas aprecia, las pequeñas diferencias antedichas.

En este método, las observaciones se deben hacer, y se hacen, dentro de un medio, como el vidrio, cuyo índice de refracción se aproxima bastante más que el del aire al de la mayoría de los minerales que se estudian. Haciéndolo así, se eliminan varias causas de error, debidas a la excesiva desigualdad de índices, y, como consecuencia, a la de los ángulos de emergencia de los rayos refractados, de los cuales puede también el objetivo recoger mayor proporción que si se trabajase en el aire. Conociéndose, como se conoce, el índice del vidrio empleado en los aparatos

(1) En rigor se pueden emplear también objetivos de poca apertura, que den aumentos hasta de 300 y 350 diámetros con el ocular 3; pero no se gana nada con ello, puesto que no se trata de estudiar detalles pequeños de los minerales y sí tan sólo las reacciónes ópticas que éstos dan. En la práctica diaria del método, el aumento más cómodo es el de 80 diámetros, que resulta plenamente eficaz, aun para las determinaciones más precisas.

que vamos a describir, se pueden aplicar determinadas fórmulas de corrección que garantizan más la exactitud de los resultados.

La disposición que se adopta para realizar lo que antecede, consiste en adaptar a la platina dos hemisferios de vidrio, de índice conocido, que se fijan: el uno, bajo el disco de aquélla, y el otro, sobre el porta-objeto de la preparación, colocada como queda explicado antes. El hemisferio superior está designado por *a* en la fig. 332. Para que el mineral que se estudia venga a situarse en el centro mismo de la esfera de vidrio, se corta del hemisferio inferior un disco cuyo espesor es igual al de la platina, más el cubre-objeto, más la capa de bálsamo, o sea un espesor total de 1,15 milímetros, por ser de un milímetro de grueso el disco fijo de la platina. Del hemisferio superior se corta un espesor, también algo mayor de un milímetro, que es el que corresponde al portaobjeto, más la capa de bálsamo que hay entre él y la lámina de roca. Los dos hemisferios se adhieren a la platina interponiendo una gota de glicerina y comprimiendo un poco para que se forme una capa muy delgada, la cual basta para mantener la adherencia. En algunos modelos, el hemisferio superior va montado sobre una armadura metálica con dos tornillos que lo fijan sobre la preparación, sin comprimirla mucho, para que ésta se pueda mover bajo aquél y ser examinada en todas sus zonas.

Esta necesidad de poder examinar la preparación entera, es el principal inconveniente de la platina de Fedoroff (fig. 332), y el que ha dado lugar a la construcción de la montura de Fuess (fig. 333), que la substituye con ventaja. En efecto: los múltiples mecanismos de la platina dejan poco sitio en su interior, y las preparaciones ordinarias de rocas, montadas sobre porta-objetos de 48 a 28 milímetros, no caben en ella, y es preciso emplear porta-objetos especiales pequeños. Fedoroff aconseja los de forma redonda de un milímetro de espesor, de 15 a 20 de diámetro; pero resulta incómodo tallar las rocas pegadas a estos discos, y exige, además, una colección de preparaciones distinta de la general. En cambio, en la montura de Fuess caben perfectamente las preparaciones corrientes y hay sitio bastante para moverlas en todos sentidos, sin que los bordes y esquinas de los porta-objetos tropiecen con los limbos. Esto, unido al mayor tamaño de las graduaciones de los círculos, constituye la principal ventaja de dicha montura.

Para terminar con lo relativo a este método, vamos a describir aquí brevemente la composición de la montura de Fuess (fig. 333). El polarizador P y el condensador N son enfocables por medio de una cremallera y un piñón, y van montados sobre un disco, exactamente centrado sobre el eje óptico, que puede girar sobre este último, pues la montura que estamos describiendo es del tipo Dick, con nicoles giratorios y preparación fija.

Los ángulos de giro de los nicoles se leen en el sector graduado que se ve en el borde posterior de la subplatina. El disco central de ésta se une con una escuadra a la barra articulada *n*, que a su vez se une con el analizador por medio de la pieza *a*. La platina queda ya descrita; pero además de lo dicho, puede girar en conjunto sobre su plano, registrándose los ángulos sobre el círculo II. El objetivo se fija al tubo por medio de la tenaza que se ve en la figura, la cual es centrable merced a dos tornillos en ángulo recto, de los que se ve uno en la parte anterior del tubo. Esta precaución es conveniente en este método, a pesar de la inmovilidad de la preparación, para poder corregir las pequeñísimas diferencias que puede haber en el centrado después de algún tiempo de uso, pues el método de Fedoroff exige que dicho centrado sea muy exacto. El analizador A es separable del tubo, y gira con el polarizador por medio de la barra *n*, como ya queda dicho. El movimiento rápido de enfocar, se verifica con cremallera y piñón. No lleva esta montura movimiento lento de enfocar, porque no lo necesitan los objetivos débiles que con ella se emplean, y cuando para una determinación dada hace falta medir el espesor de la lámina de roca, se debe valer el operador de otro microscopio cuyo tornillo micrométrico reúna las condiciones especificadas antes. La lente de Bertrand entra por la ranura que se ve al lado de la cabeza del tornillo de enfocar y va montada sobre un tubo adicional que ajusta a frotamiento suave, dentro del fijo del microscopio, para poderla enfocar a mano. Una escala registra la posición de esta lente.

El precio de la montura de Fuess, completa, es de 850 marcos en fábrica.

219. *Adaptación de los microscopios ordinarios a trabajos petrográficos.*—Lo primero que se ocurre preguntar es si un microscopio para uso general de los que hemos descrito en el capítulo anterior, puede servir para trabajos de petrografía; y aun cuando la respuesta parece debiera ser negativa, dado lo complejo de los órganos que hemos descrito, hay, sin embargo, bastantes tipos de monturas corrientes que, con algunas modificaciones, pueden servir para petrografía, aun cuando no tan bien como las construídas ex profeso para este fin.

Lo primero que se necesita para ello es que la platina de la montura sea girotoria y esté provista de un círculo graduado y un vernier o un índice para medir los ángulos. No hay que pensar en poner nicoles y ocular giratorio del tipo Dick a las monturas cuya platina sea fija, porque esto exige una construcción especial y resulta imposible adaptar dicho dispositivo a una montura ya hecha. Más fácil es adaptarle una platina graduada y giratoria encargándosela al constructor.

La adaptación del polarizador es muy fácil. La mayor parte de constructores de microscopios venden polarizadores sueltos montados en tubos que se enchufan al cilindro de la subplatina por su extremo inferior, y que van provistos de círculo graduado o de muescas en ángulo recto para poder orientar al nicol.

También es fácil añadir al microscopio un analizador intercalado sobre el objetivo, pues para ello basta montar aquél sobre un aro giratorio con círculo graduado o con muescas, y poner todo ello dentro de una armadura metálica provista de dos roscas unirversales: una, macho, que sirve para atornillarla al tubo, y otra, hembra, que recibe al objetivo. Algunos constructores añaden a esta pieza una ranura para recibir la corredera con láminas de yeso, mica y cuarzo.

Otra solución es adquirir un ocular universal del modelo Wright u otro similar, provisto de los aditamentos completos; esto es, de analizador, círculo graduado, ranura para láminas auxiliares y, en algunos casos, también con lente de Bertrand. Esta solución es la más práctica de todas cuando el diámetro del tubo de la montura permite la adaptación del ocular. Se pierden con ella las ventajas que ofrece la lente de Bertrand y el analizador, cuando van intercalados en el tubo mismo, pero en cambio se consigue la de poder armar al microscopio para trabajos petrográficos con sólo enchufar un ocular de esta clase en lugar de uno ordinario, y poner un polarizador en la subplatina.

(Continuará).

Revisión de los Signiforinos de España

POR
Ricardo García Mercet

En el *Boletín de la Real Sociedad Española de Historia Natural,* correspondiente al mes de diciembre de 1916, publiqué un trabajo sobre los Signiforinos de España, en el que después de señalar los pormenores que deben caracterizar a esa tribu de microhimenópteros parásitos y de precisar la característica del género *Signiphora,* describía las dos especies de éste que hasta entonces se habían encontrado en nuestro país.

Los materiales que he recogido en los alrededores de Madrid durante la primavera y el primer mes del verano actual, me permiten escribir un nuevo trabajo sobre los Signiforinos españoles, en el que describiré una especie nueva e introduciré en esta tribu de los Calcídidos un género de esta familia que ha venido figurando en la tribu de los Afelininos. Me refiero al género *Thysanus* Walker, del que he encontrado una especie en nuestro país, el examen de la cual me permite definir la verdadera situación que al mismo corresponde en la superfamilia de insectos parásitos de que forma parte.

Los *Thysanus,* después de las descripciones y de los dibujos que de ellos publicó Walker los años 1841 y 1872, y de la forma dada a conocer por Foerster al poco tiempo (1878), no deben de haber sido vistos ni examinados por ninguno de los entomólogos que han hecho estudios sobre los microhimenópteros parásitos. Si William Ashmead, el creador del género *Signiphora,* hubiese visto algún *Thysanus,* no se le habrían pasado inadvertidas las concomitancias entre el uno y el otro, y hubiese hecho referencia a éste al publicar aquél. Si el fundador de la tribu de los Signiforinos, Mr. L. Howard, hubiera examinado algún *Thysanus,* habría incluído este género en la tribu por él creada, y no le hubiese considerado en sus distintos trabajos como un Afelinino. Yo mismo, cuando publiqué la monografía de estos insectos el año 1912, hice que figurara en ella el género *Thysanus,* porque no conocía de él sino las descripciones y figuras de Walker, y porque entonces tampoco había visto ninguna especie del género *Signiphora.* De haber tenido delante, en aquella época, alguna *Signiphora* y algún *Thysanus*, o hubiese llevado la primera a la tribu de los Afelininos, o hubiera excluído el *Thysanus* de mi monografía, considerándolo como un Signiforino.

Ahora bien: ¿qué lugar corresponde a esta tribu en nuestras clasificaciones? Los Signiforinos tienen indudablemente más semejanza y afinidad con los Afelininos que con los Encírtidos. Pero, a su vez, los Afelininos son más próximos parientes de los Encírtidos que de los Eulófidos, con los que aparecen mezclados en todas las clasificaciones. Se impone, pues, una revisión de los Encírtidos, modificando su característica, para que dentro de ellos quepan, no sólo los Signiforinos, que ya lo están, sino los Afelininos, que se alían perfectamente con *Signiphora* y con *Thysanus*.

El que figuraran los Afelininos dentro de la familia de los Eulófidos y no en la de los Encírtidos, se debe a que los entomólogos han venido atribuyendo una importancia fundamental a caracteres que, en realidad, no la poseen tan grande. Me refiero a la forma y situación de las axilas y a la existencia o no existencia de las parápsides o de los surcos parapsidales en el escudo del mesonoto. Como los Encírtidos se han caracterizado por presentar entera y como formando una sola pieza esa parte del tórax y las axilas situadas detrás de ese escudo y en sentido transversal, había que separar de ellos todos sus afines que ofrecieran parápsides en la región y las axilas avanzadas sobre las parápsides. De aquí el que parientes tan próximos de estos insectos como lo son los Afelininos, se llevaran a una familia que presentase constantemente estos caracteres que se consideraban esenciales. Pero la presencia de parápsides no puede ser apreciada ya como un motivo ineludible de diversificación. Encírtidos cuya posición sistemática no ofrece duda, como los *Diversicornia* y los *Paraphycus*, presentan en el mesonoto surcos que marcan la separación parapsidal (1). Por otra parte, las *Signiphoras* y los *Thysanus*, cuya semejanza con muchos Afelininos es enorme, ofrecen el escudo del mesonoto sin línea ni sutura alguna que lo presente dividido y las axilas cuando existen, transversas y posteriores a él. Hay que atribuir, por consiguiente, en taxonomía, un valor secundario a la presencia de las parápsides y a la situación de las axilas y establecer la característica de los Encírtidos y los Eulófidos de un modo que permita incluir en cada una de estas familias las formas que ofrezcan entre sí mayores afinidades naturales.

Esto lo intentaré en un estudio sobre los Encírtidos, que formará parte de las publicaciones del Museo Nacional de Ciencias Naturales, y que me falta poco para terminar. La presente nota, como su título indica, tiene por

---

(1) Tengo en estudio un género nuevo de Encírtidos, al que llamaré *Masía*, que también presenta en el escudo del mesonoto surcos parapsidales. Este género estará dedicado al entomólogo italiano Dr. Luigi Masi.

objeto verificar una revisión de los Signiforinos, en vista de los materiales nuevos que las recientes exploraciones nos han proporcionado.

Empezaré el trabajo estableciendo la característica de la tribu.

Tribu **Signiforinos** Howard

Caracteres.—Mandíbulas bi o tridentadas en el ápice. Palpos maxilares bi o triarticulados. Antenas compuestas de escapo, pedicelo, tres o cuatro artejos anillos y maza grande e indivisa. Escudo del mesonoto entero, sin trazas de surcos parapsidales. Escudete transverso y muy corto. Axilas generalmente indistintas, rara vez separadas o diferenciadas del escudete. Alas anteriores sin pestañas discales, o a lo sumo con un grupo de pestañitas en el tercio basilar. Nervio posmarginal nulo. Alas posteriores de variable conformación y anchura, tan largas como las anteriores. Pestañas de las alas anteriores y de las alas posteriores de igual longitud, lo mismo cuando son largas que cuando son cortas. Tibias y fémures intermedios espinosos. Espolones intermedios dentados o lobulados. Tarsos de cinco artejos. Abdomen anchamente sentado.

Observaciones.—La tribu de los Signiforinos constituye una agrupación verdaderamente natural, que se destaca perfectamente de las otras tribus comprendidas en la familia de los Encírtidos, por ofrecer un conjunto de caracteres de absoluta precisión y de constancia también absoluta que no se observan en ninguna de las tribus afines.

Los caracteres que tengo por peculiares de los Signiforinos son los siguientes:

Escudete transverso, muy estrecho.

Alas desprovistas de pestañas discales.

Alas anteriores y posteriores de igual longitud.

Pestañas marginales de las alas anteriores y posteriores igualmente largas.

Espolón de las tibias intermedias aserrado.

Fémures y tibias intermedios espinosos.

GÉNEROS QUE COMPRENDE LA TRIBU SIGNIFORINOS

CLAVE DICOTÓMICA

Hembras

1. Cuerpo ancho y rechoncho; metatarsos intermedios mucho más cortos que las tibias, más gruesos que el primer artejo de los tarsos posteriores; mandíbulas bidentadas en el ápice. . Gén. **Signiphora** Ashmead.

— Cuerpo estrecho y alargado; metatarsos intermedios tan largos como las tibias correspondientes, del mismo grosor que los tarsos posteriores; mandíbulas tridentadas en el ápice. . . Gén. **Thysanus** WALKER.

Gén. **Thysanus** WALKER

Thysanus Walker. Ann. Nat. Hist., vol. IV, pág. 234 (1839).
Tryphasius Fosrter. Hym. Stud., vol. II, pág. 83-84 (1856).
Plastocharis Forster. Hym. Stud., vol. II, pág. 145 (1856).
Plastocharis Howard. Rev. Aphel. N. Amer., pág. 27 (1895).
Thysanus Mercet, Trab. Mus. C. N., núm. 17, pág. 122 (1912).

CARACTERES.—Cuerpo estrecho y alargado. Mandíbulas tridentadas en el ápice. Palpos maxilares de dos artejos; labiales de uno. Antenas formadas de escapo, pedicelo, cuatro artejos anillos y maza de extraordinaria longitud, sobre todo en el ♂. Tórax mucho más largo que ancho. Pronoto grande. Mesonoto entero, sin surcos parapsidales, tan largo como el pronoto. Axilas señaladas a los lados del escudete. Alas anteriores desprovistas de pestañas discales; nervio marginal más corto que el submarginal. Alas posteriores con pestañas marginales largas. Tibias intermedias espinosas hacia el ápice. Metatarsos intermedios casi del mismo grosor que los posteriores, y tan largos como las tibias. Espolones intermedios espinosos, mucho más cortos que el metatarso. Metatarsos posteriores más cortos que los intermedios.

OBSERVACIONES.—Aunque los caracteres que atribuyo al género *Thysanus* no concuerdan exactamente con los que le asignó Walker al describirlo, estoy persuadido de que son realmente los que se le deben atribuir. Sin duda Walker, por no haber observado las antenas de estos Calcídidos con suficiente aumento, pudo decir que el funículo en la ♀ estaba constituído por tres artejitos, y en el ♂ por uno solo. En realidad, los cuatro artejos anillos que componen el funículo de la antena del ♂ son tan pequeños que pueden tomarse por uno nada más. A su vez, el primer artejito anillo en la ♀ es tan diminuto que sólo con fuertes aumentos se puede distinguir. No debe extrañar, por lo tanto, que entre la caracterización del género por Walker y la que yo he dado se adviertan algunas notables diferencias de apreciación. Estas se derivan indudablemente de haber tenido que emplear Walker medios de observación muy inferiores a los que hoy día poseemos. Hay que tener presente que el género *Thysanus* fué descrito el año 1840 y que entonces la parte óptica de los microscopios adolecía de muchas deficiencias, y eran además desconocidos los líquidos que, para comunicar transparencia a los objetos que se observan, empleamos en la actualidad. El uso de esos líquidos y el de fuertes aumentos nos permite hoy apreciar detalles que no podían distinguirse en la primera mitad del siglo pasado.

Thysanus ater Walker

Thysanus ater Walker. Ann. Nat. Hist., vol. IV, pág. 234 (1839).
Plastocharis atra Foester. Verh. Nat. Ver. Preuss. Rheinl., vol. 35, página 68 (1878).
Thysanus ater Mercet. Trab. Mus. Cien. Nat., núm. 10, página 124 (1912).

Caracteres.—*Hembra.*—Cuerpo de color azul metálico oscurísimo, casi negro; frente rojiza; ojos de color de carmín; antenas pardo-negruzcas; patas oscuras, con las rodillas y el ápice de las tibias blanquecinos; alas anteriores hialinas, oscurecidas cerca de la base, debajo del nervio marginal.

Figura 1.ª Mandíbula de *Thysanus ater* (muy aumentada).

Figura 2.ª Antena de *Thysanus ater* ♀ (muy aumentada).

Cabeza más larga que ancha; frente, por debajo del estema anterior, casi tan ancha como la longitud del escapo; ojos no muy grandes; estemas dispuestos en triángulo equilátero, los posteriores bastante próximos a las órbitas internas; mejillas algo más largas que el diámetro longitudinal de los ojos. Antenas insertas inmediatamente encima del borde de la boca; escapo largo, estrechado en el ápice; pedicelo alargado, ensanchado hacia el ápice, más corto que el escapo; funículo más corto que el pedicelo, formado de cuatro artejos anillos, los tres primeros más anchos que largos, el cuarto un poco más largo que ancho; maza larguísima, casi tres veces más larga que el escapo. Mandíbulas cortas, anchas, fuertemente tridentadas en el ápice.

Pronoto largo; mesonoto tan largo como el pronoto, con una finísima reticulación transversa superficial y cuatro pestañistas negras, cerca del borde posterior; escudete transverso, con dos pestañitas en el centro. Alas anteriores más cortas que el cuerpo, con pestañas marginales largas y el limbo completamente desnudo; nervio marginal pardo, con tres pestañas en el dorso; nervio estigmático, con una pestaña apical; nervio submarginal con una pestaña cerca del ápice, y otra en el tercio basilar; disco del ala ligeramente ensombrecido desde el nervio marginal hasta la misma base. Alas posteriores hialinas, tan largas como las anteriores, con una pestañita en el limbo, debajo del ápice del nervio marginal, y con pestañas marginales mucho más largas que la anchura máxima del limbo.

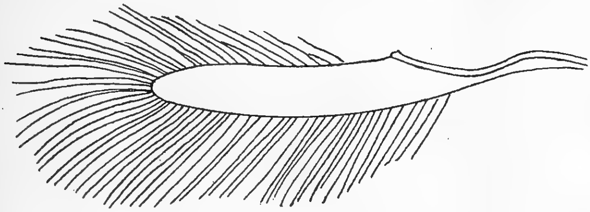


Figura 3.ª
Ala posterior de *Thysanus ater* (muy aumentada).

Patas anteriores normales. Fémures intermedios, con algunas espinitas en el dorso, y otra mayor en la cara interna cerca del ápice; tibias intermedias con dos espinas largas en el dorso, próximas a la base, y otra larga apical; espolón de las tibias intermedias aserrado, más corto que el metatarso; éste más largo que el segundo artejo, pero más corto que el segundo y tercero reunidos; tibias posteriores más largas que las intermedias, con un espolón apical; metatarsos posteriores tan largos como el segundo artejo de los tarsos intermedios.

Figura 4.ª
Pata intermedia de *Thysanus ater* (muy aumentada).

Abdomen mucho más largo que la cabeza y el tórax reunidos; segmentos transversales, de bordes paralelos y poco más o menos de igual longitud, con dos pestañitas negras a cada lado, una cerca de la base del anillo, la otra próxima al borde apical. Oviscapto apenas saliente.

Longitud del cuerpo	....	0,990
— de la maza de las antenas	....	0,227
— del funículo — —	....	0,031
— del pedicelo — —	....	0,056
— del escapo — —	....	0,088

Longitud de las alas anteriores........................	0,597
Anchura máxima de las mismas........................	0,185
Longitud de las alas posteriores........................	0,597
Anchura máxima de las mismas........................	0,051
Longitud de las pestañas más largas de las alas posteriores..	0,140

Macho.—Se diferencia de la ♀ por los caracteres siguientes: cuerpo más estrecho y alargado; frente de color anaranjado; maza de las antenas

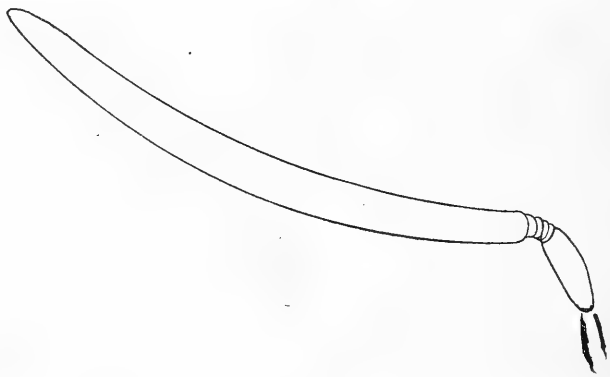


Figura 5.ª
Antena de *Thysanus ater* ♂ (muy aumentada).

mucho más larga; funículo más corto; los cuatro artejitos que lo forman, mucho más anchos que largos.

Longitud	del cuerpo....................................	0,880
—	de la maza de las antenas..................	0,316
—	del funículo....................................	0,024
—	del pedicelo....................................	0,053
—	de las alas anteriores........................	0,581
—	de las pestañas más largas de las alas anteriores....................................	0,140
—	de las alas posteriores........................	0,581
—	de las pestañas más largas de las alas posteriores....................................	0,140

Distribución geográfica.—Provincia de Madrid: Madrid! Cercedilla (Bolívar y Pieltaín!); provincia de Segovia: San Rafael (Bolívar y Pieltaín!).

Observaciones.—Esta especie es frecuente en el centro de España, y puede recogerse con relativa abundancia, en los meses de julio y agosto, sobre ramas de diversas especies de pinos.

Género **Signiphora** Ashmead

Signiphora Ashmead. Orange Insects pág. 30 (1880).
Signiphora Howard. Ins. Life, vol. VI, pág. 235 (1894).
Signiphora Girault. Proc. Un. St. Nat. Mus., vol. 45, pág. 193 (1913).
Signiphora Mercet. Bol. Soc. Esp. Hist. Nat., t. XVI, pág. 524 (1916).

Caracteres.—Cuerpo ancho y rechoncho. Antenas de seis o siete artejos, formadas por escapo, pedicelo, tres o cuatro artejos anillos y maza grande e indivisa. Mandíbulas fuertes, bidentadas en el ápice. Palpos maxilares de dos o tres artejos. Palpos labiales de un solo artejo. Tórax más ancho que largo. Pronoto corto. Mesonoto entero, sin surcos parapsidales, más largo que el pronoto. Escudete transverso; axilas soldadas al escudete o perfectamente separadas de él por suturas bien perceptibles al microscopio. Alas anteriores de variable longitud y anchura, sin más pestañas discales que una suelta o un pequeño grupito basilar; pestañas marginales de muy diversa longitud; nervio marginal tan largo como el submarginal o mucho más corto; el posmarginal nulo. Alas posteriores de variable conformación y anchura, con pestañas marginales largas o cortas. Fémures intermedios inermes (?) o fuertemente espinosos. Tibias intermedias con algunas espinitas laterales de bastante grosor y longitud, su espolón apical aserrado y tan largo como el metatarso correspondiente. Tarsos de cinco artejos. Abdomen anchamente sentado. Oviscapto poco saliente.

Como caracteres de verdadero valor específico se deben considerar en las *Signiphora* los siguientes:

Longitud relativa de los artejos de las antenas. Longitud de la maza con relación a su anchura máxima. Proporciones entre la longitud y la anchura del escapo y del pedicelo.

Disposición de los estemas entre sí y con relación a los ojos compuestos.

Número de artejos de los palpos maxilares.

La coloración del cuerpo.

La estructura superficial del tórax.

Las proporciones relativas del escudete.

La presencia de las axilas como piececitas independientes del escudete o la ausencia de ellas.

La longitud relativa de los nervios submarginal, marginal y estigmático. La longitud de las pestañas marginales de las alas anteriores. La relación entre la longitud de esas pestañas y la del nervio estigmático. La ausencia o presencia de una pestaña fuerte y gruesa en la región basilar de las alas anteriores. La ausencia o presencia, en la misma región, de un grupo de pestañitas. La anchura y longitud de ese primer par de alas. Las regiones del disco que se presentan diáfanas u oscurecidas. La extensión y forma de las porciones ahumadas. La presencia o ausencia de estrías en el disco alar. El que éste se presente o no salpicado de manchitas oscuras.

La forma de las alas posteriores. La longitud de sus pestañas marginales. El oscurecimiento o hialinidad del disco. La presencia o ausencia de una pestañita discal debajo del nervio marginal, próxima al ápice de éste.

El número y disposición de las espinas que llevan los fémures y tibias intermedios. La longitud del espolón de las tibias intermedias y el número de sus lóbulos.

La disposición, el número y la forma de las espinitas apicales de las tibias intermedias.

El grosor, longitud y armamento de los metatarsos intermedios. La longitud del segundo artejo de los tarsos con relación al primero y a los siguientes.

La relación entre la longitud de los metatarsos posteriores y los intermedios. La longitud del segundo artejo comparada con la del primero y la de los siguientes.

DIVISIÓN DEL GÉNERO «SIGNIPHORA» EN SUBGÉNEROS

CLAVE DICOTÓMICA

Hembras

1. Funículo de las antenas formado por tres artejos anillos; alas posteriores desprovistas de toda clase de pestañas discales. 2

— Funículo de las antenas formado por cuatro artejos anillos; nervio marginal tan largo o casi tan largo como el submarginal; nervio estigmático paralelo al borde del ala; alas posteriores con una pestañita en el disco, cerca del ápice del nervio marginal. . . . Subgén. **Matritia** MERCET.

2. Axilas diferenciadas del escudete; nervio marginal mucho más cor-

to que el submarginal, apenas más largo que el estigmático; éste oblicuo al borde del ala. . . . . Subgén. **Signiphorella** Mercet.

— Axilas soldadas al escudete; nervios marginal y posmarginal de casi igual longitud. . . . . Subgén. **Signiphora** Ashmead.

ESPECIES ESPAÑOLAS DEL GÉNERO «SIGNIPHORA»

CLAVE DICOTÓMICA

Hembras

1. Color del insecto, pardo-claro; funículo de las antenas formado por tres artejos anillos; axilas diferenciadas del escudete.........................

S. (Signiphorella) Merceti Malenotti.

— Color del insecto, azul acerado, oscurísimo; funículo de las antenas formado por cuatro artejos anillos; axilas soldadas íntimamente al escudete, sin señal de su separación 2

2. Espolón de las tibias intermedias tan largo como el metatarso; éste de igual longitud que el segundo artejo; pestañas marginales del borde apical de las alas anteriores más cortas que la mitad de la longitud del metatarso. S. **(Matritia) conjugalis** Mercet.

— Espolón de las tibias intermedias más corto que el metatarso; éste, a su vez, más largo que el segundo artejo; pestañas marginales del borde apical de las alas anteriores, casi tan largas como el segundo artejo de los tarsos intermedios, o sea bastante más largas que la mitad de la longitud del metatarso. . . . . **S. (Matritia) simillima** Mercet.

Signiphora (Matritia) conjugalis Mercet

Signiphora conjugalis Mercet. Bol. Soc. Esp. Hist. Nat., t. XVI, página 525 (1916).

Longitud	del espolón de las tibias intermedias.	0,091
—	del metatarso intermedio.	0,091
—	del segundo artejo de los tarsos intermedios.	0,087
—	de las pestañas apicales de las alas anteriores.	0,038
—	de las pestañas apicales de las alas inferiores.	0,038

Distribución geográfica.—Provincia de Madrid: Madrid! Vaciamadrid!, Cercedilla (Bolívar y Pieltaín!); provincia de Sevilla: Sevilla!

Observaciones.—Es especie que debe ser parásita de algún cóccido que ataque a los pinos, pues siempre la hemos encontrado en ramas de coníferas de ese género. Debe ser además especie bastante difundida por nuestro país, pues la hemos hallado en el Mediodía y en el centro de España.

Signiphora (Matritia) simillima nov. sp.

Caracteres.—*Hembra.*—Igual en tamaño, aspecto y coloración que *M. conjugalis* Mercet, de la que se diferencia por los caracteres siguientes: Maza de las antenas un poco más corta; alas anteriores con los espacios ahumados más oscuros y las pestañas marginales más largas; alas metatorácicas con pestañas más largas también; metatarsos intermedios ligeramente más estrechos; espolón de las tibias intermedias más corta que el primer artejo de los tarsos; el segundo artejo más corto que el primero.

Longitud del cuerpo	1,080
— del espolón de las tibias intermedias	0,070
— del metatarso intermedio	0,091
— del segundo artejo de los tarsos intermedios.	0,070
— de las pestañas apicales de las alas anteriores.	0,059
— de las pestañas apicales de las alas posteriores	0,059

Distribución geográfica.—Madrid!

Observaciones.—Recogida sobre ramas de *Pinus silvestris*, en el mes de julio de 1917.

Signiphora (Signiphorella) Merceti Malenotti

Signiphora Merceti Malenotti. Redia, vol. XII, pág. 181 (1916).
Signiphora Merceti Mercet. Bol. Soc. Esp. Hist. Nat., vol XVI página 529 (1916).
Signiphora Merceti Malenotti. Redia, vol XIII, fas. I, pág. 40 (1917).

Observaciones.—Esta especie, cuya descripción puede verse en las publicaciones indicadas, no ha vuelto a encontrarse en nuestro país. En Italia la señalan como parásita del *Chrysomphalus dictyospermi* y de *Hemiberlesia camelliæ*. Según su descubridor, el profesor italiano Ettore Malenotti, es un parásito exófago de las cochinillas citadas.

Los tuberculillos de la *Riccia Birchoffii* Hübn

por

Antonio Casares Gil

Los curiosos tuberculillos de las Hepáticas han sido objeto de estudio en estos últimos años por su significación biológica. Raddi fué quien primero señaló la existencia de tuberculillos en su *Anthoceros dichotomus;* Karsten dió a conocer los tuberculillos del *Conocephalus conicus* Corda (1), donde rarísima vez se presentan, y difieren en muchas particularidades de los hasta hoy observados en otras especies de Hepáticas; Campbell estudió los de su *Geothallus tuberosus* (2); entretanto, se encontraron en otras especies de Anthoceros, en cuyo género son relativamente frecuentes, y han sido estudiados por Ashworth y por Goebel (3); este último describió también los tuberculillos de una Fossombronia; después se han visto en varias especies de este género, y últimamente Cavers los observó en otro género de la misma familia, en el *Petalophyllum Ralfsii* (Wils.) Gottsche (4).

Si los tuberculillos de los citados géneros y especies han sido bien estudiados, no sucede lo propio con los de las Riccias, en cuyo género, ya desde Lindenberg, se viene afirmando que presenta tuberculillos en varias de sus especies; estas referencias a los tuberculillos de las Riccias son vagas en su mayoría; se limitan a señalarlos en una especie determinada, o se acompañan de cortas descripciones imprecisas y que se contradicen unas a otras en puntos importantes. Lo más concreto que he encontrado sobre la materia es lo consignado por Stephani en sus *Species Hepaticarum*, y por Goebel en su obra *Organographie der Pflanzen.* Dice Stephani al tratar de una especie asiática creada por él, a la que denominó *Riccia bulbifera*: «En el ápice de las frondes aparecen bulbos solitarios, piriformes, del ancho de las frondes, horizontales, revestidos de ri-

---

(1) G. Karsten. *Beitrag zur Kenntnis von Fegatella conica.* Bot. Zeit., 1887.

(2) D. H. Campbell. *The Development of Geothallus tuberosus.* Ann. of Bot., 1896.

(3) K. Goebel. *Organographie der Pflanzen,* 1898-1901.

(4) F. Cavers. «Notes on Yorkshire Bryophytes», *The Naturalist,* 1903.

zoides hialinos, sin escamas, y constituídos por células parenquimatosas muy oleíferas.» Y poco después añade: «Los tubérculos nacen del punto vegetativo por un corto pedículo; en ellos mismos no se ve punto vegetativo en el extremo ensanchado» (1). Goebel se expresa de este modo al final de la parte en la que trata de los tuberculillos de las Hepáticas: «Es indudable que también las Riccias tienen tuberculillos. He visto en una Riccia de Italia partes del talo con aspecto de tuberculillos por encorvamiento hacia adentro de sus bordes, y porque la parte que está debajo del tejido clorofiloso estaba repleta de reservas alimenticias, comunicándole un color blanquecino» (2).

A fines del año 1915 encontré, al pie de la Sierra de Guadarrama, una Riccia ya pasada y medio destruída, que tenía unos tuberculillos muy distintamente formados en el extremo de casi todas las frondes. El pequeño césped, con la tierra que había a su alrededor, fué transportado a la estufita del laboratorio de botánica del Museo Nacional de Ciencias Naturales y puesta allí en condiciones de cultivo. Al principio del año siguiente, los tuberculillos, que era lo único que quedaba ya de la Riccia, brotaron y dieron unas frondes que resultaron ser de *Riccia Bischoffii* Hübn., perfectamente caracterizadas, las cuales dieron esponogonios en la primavera. Durante el verano, el cultivo estuvo sometido varias veces a una relativa sequía, a consecuencia de la cual las frondas amarillearon, se estrecharon algo cerca del ápice y perecieron las partes viejas. En este estado abandoné el cultivo por tener que ausentarme de Madrid, y a mi regreso, en el mes de septiembre, encontré que tenía tuberculillos y el mismo aspecto que cuando encontré la planta en condiciones naturales.

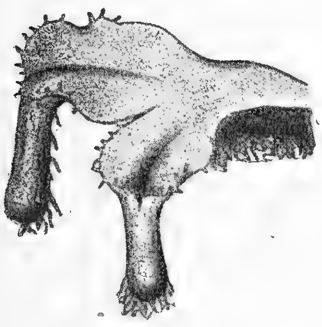


Figura 1.ª

Presentan estas frondes tubérculos apicales en forma de mazas de 1-3 mm. de largo y 1-2 de grueso, que se hunden oblicuamente en la tierra y aparecen como pendientes del extremo de las frondas (fig. 1.ª). En el punto de arranque están ligeramente ensanchados, notándose un surco, continuación del de la fronda, que se cierra rápidamente; en el resto son casi cilíndricos, sin apariencia de surco ni diferenciación de tejidos, estan-

(1) F. Stephani. *Species Hepaticarum,* vol. I, pág. 25.
(2) K. Goebel. L. c., pág. 294.

do ligeramente abultados en su extremo libre. Limpios de la tierra que llevan adherida, tienen exteriormente un color blanco-grisáceo o amarillento, con rizoides poco numerosos, excepto en la parte final abultada, en cuyo sitio abundan más. En un corte dado en fresco, la superficie de sección tiene un color ligeramente verdoso; a simple vista aparecen compactos y de estructura uniforme; pero examinando al microscopio cortes delgados, se ve, aun a débiles amplificaciones, que su textura no es homogénea y que tienen una simetría bilateral; mejor dicho, darsiventral como en las frondas normales, teniendo los mismos órganos y estructura semejante; el surco se estrecha, quedando sólo una hendidura en la parte superior de los tuberculillos (fig. 2), que, a su vez, desaparece en la parte media es inferior, en donde, sin embargo, lo continúa una línea de contacto de la células de la pseudoepidermis. Se ve entonces claramente que la forma cilíndrica del tuberculillo es debida a un fuerte plegamiento de la fronde en su línea media, en virtud del cual las superficies dorsales o superiores de las alas se ponen en contacto una con otra. Las columnas de células, que en las frondes normales constituyen el tejido aerífero, son bien perceptibles, aunque no dejan espacios entre sí ni tengan apenas clorofila; describen arcos reentrantes, aproximándose las de unlado a las del opuesto hasta tocarse por sus células terminales, que son globulosas y poco mayores que las restantes, en oposición a las de las frondes normales, que son en su mayoría piriformes y mucho mayores que las demás de las columnas, de las que se diferencian además por ser hialinas. La parte anterior o dorsal de los tuberculillos está revestida en toda su longitud por las imbricadas escamitas, de las cuales las más interiores permanecen indivisas, impidiendo que a simple vista se note exteriormente el menor indicio de surco. El tejido fundamental está asimismo más incurvado que de ordinario; exteriormente presenta la epidermis inferior constituída por dos o tres capas de células aplanadas y de paredes pardas, entre las cuales arrancan los rizoides lisos; no se ven rizoides punteados. Las células interiores están llenas de inclusiones albuminoideas y aceitosas, habiendo desaparecido casi por completo el almidón que constituye la reserva alimenticia en las frondes normales.

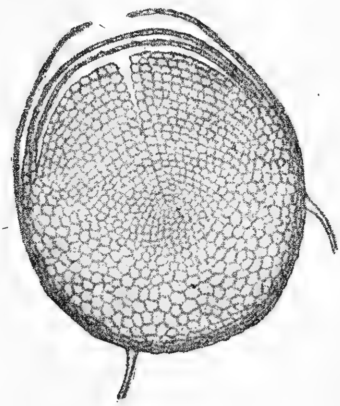


Figura 2.ª

Hacia el extremo libre y abultado de los tubérculos, el tejido fundamental toma incremento y ocupa mayor espacio a expensas del que forma las columnas. En la parte más profunda está el punto vegetativo, que se encuentra de este modo un poco dislocado hacia la parte anterior o dorsal. A este nivel, las numerosas e imbricadas escamitas que revisten el extremo del tuberculillo protegen el punto vegetativo, y las más internas y cercanas a él están estrictamente imbricadas y constituídas por pequeñas células jóvenes simulando un parénquima embrionario; sin embargo, el punto vegetativo en los tubérculos (lo mismo que en las frondes ordinarias) se delimita bastante bien por cortes transversales y tangenciales en piezas incluídas en celoidina, que previamente se hayan deshidratado en alcohol fuerte para provocar una retracción de las partes más jugosas, lo que trae como consecuencia una ligera separación del punto vegetativo y las escamitas, y de éstas entre sí.

Al cabo de un tiempo, que no me es posible limitar, los tuberculillos, puestos en apropiadas condiciones, dan origen a nuevas frondes, recorriendo en sentido inverso las fases que presidieron a su formación. De la parte inferior ensanchada (y ésta sola basta, aunque esté destruída la parte que pudiera llamarse pedicelar) sale, en dirección ascendente, un cilindro macizo que, al llegar a la superficie de la tierra, se desenvuelve, abriéndose en una fronda que se expansiona horizontalmente; entonces también la parte maciza se hiende hasta el tuberculillo, mostrando el surco muy estrecho en la parte inferior, que se ensancha progresivamente y se continúa con el de la fronde. El punto vegetativo, al recobrar actividad, describe en su desarrollo un arco de curva muy cerrada, cambiando de dirección y dirigiéndose hacia arriba, y así los dos cilindros, las dos frondes plegadas, forman un arco o un ángulo en cuyo seno está el surco. En los tubérculos que no se han hundido en la tierra o que han sido desenterrados por un accidente cualquiera, no se forma el cilindro o fronde plegada; la nueva fronde, ya desde su origen, es aplanada superiormente.

No hace mucho tiempo se creía que todas las Riccias eran anuales, que nacían en la primavera y perecían al finalizar el verano, habiendo ya madurado las esporas que germinaban en la siguiente primavera. Después se vió que muchas de las que crecen en países templados, en sitios que permanecen húmedos todo el año, son perennes, aunque durante el año tengan una época de mayor lozanía. Hay toda clase de variantes a este respecto, y así, por ejemplo, la *Riccia Bischoffii* Hübn. y la *Riccia Gougetiana* Mont. (que creo que son una misma especie) en la parte costera del NW. de España, crecen todo el año en lugares húmedos y resguardados, pero *desaparecen* durante el invierno en los expuestos al frío, y durante el estío en los soleados; la época de mayor lozanía es la primavera. En el Sur de la Península también son perennes estas Riccias en lugares constantemente humedecidos, pero *desaparecen* en el verano en los sitios demasiado calientes; el mayor vigor lo alcanzan en invierno. En el centro de la Península estas Hepáticas son anuales; en el llano primaverales, *desapareciendo* en el estío, y en las altas montañas estivales, muriendo probablemente en invierno.

He observado en las Riccias antes dichas (y en la *R. macrocarpa, R. sorocarpa* y *Tessellina pyramidata)* que esta *desaparición* temporal no es siempre debida a la muerte de toda la fronde, y su resurgimiento no siempre proviene de la germinación de las esporas. Lo que sucede es que, aunque la mayor parte perezca y se destruya, la vida persiste en los puntos vegetativos y en algunas células jóvenes que los rodean, cargándose de reservas alimenticias; protegidos por las escamitas y algunas células muertas, cubiertos de tierra, estos diminutos restos fragmentarios de las frondes pasan confundidos con detritus vegetales; pero la vida persiste tenazmente en ellos como

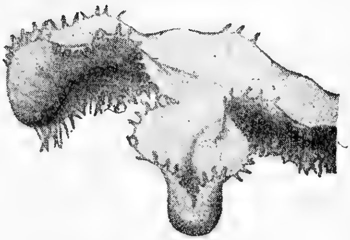


Figura 3.ª

en una semilla, y al encontrarse en condiciones propicias reanudan su crecimiento normal, dando origen a nuevas frondes. Así se explica que en localidades donde no se han visto nunca Riccias con esponogonios, aparezcan, sin embargo, todos los años (1). En la *Riccia Bischoffii* (y en la R. Gougetiana), al llegar la mala estación, se preparan a resistirla reduciendo el tamaño de las alas, que tienden a ponerse verticales y acumulando materiales de reserva en el tejido fundamental; la parte anterior de las frondas toma la forma *pedemontana (Riccia pedemontana* Steph.), y la parte vieja amarillea y muere. En esta forma es muy frecuente encontrar la *Riccia Bischoffi* al principio del verano (fig. 3), y también es frecuente que el extremo de las frondas se dirija oblicuamente hacia abajo.

---

(1) En sitio seco, los puntos vegetativos de las expresadas Riccias conservan la vida latente durante un año por lo menos. Un cepellón seco de Tessellina reducido a polvo fino, en el que no podía verse otra cosa que tierra, a los pocos días de ser humedecido *al cabo de tres años,* mostró pequeñas frondes naciendo de los fragmentos de plantas que conservaban el punto vegetativo. Las esporas tardaron mucho más tiempo en germinar.

Nadie podrá negar que esta forma y los tuberculillos descritos son realmente una misma cosa y que tienen la misma génesis, diferenciándose únicamente en el grado y en la longitud del plegamiento de la fronde. También deben ser muy semejantes o iguales las formas que Goebel observó en la Riccia de Italia, de la que se hace mención al principio, y quizá también sean semejantes los tuberculillos descritos por Stephani en la *Riccia bulbifera*, porque si bien es verdad que dice que no tienen escamas ni punto vegetativo visible, hay que tener en cuenta que Stephani cree (contra lo generalmente admitido desde los trabajos de Kny) que las escamitas de las Riccias son originariamente dobles y alternas, y es posible que le hayan pasado inadvertidas y haya creído que eran otra cosa las claramente indivisas de los tuberculillos. Pero esto no es más que una presunción.

Respecto a otra clase de tuberculillos que en las Riccias se han citado alguna vez como naciendo entre las escamas, en las bifurcaciones, etc., nada puedo decir, ni siquiera si existen realmente.

Resumiendo lo expuesto:

1.° Es frecuente en las Riccias que persista la vida latente en el extremo apical de las frondes muertas y destruídas en su mayor extensión, y que los puntos vegetativos continúen el crecimiento después de un período de reposo.

2.° En la *Riccia Bischoffii* Hübn, en el extremo de las frondas, se acumulan materiales de reserva cerca del punto vegetativo cuando éste va a pasar a la vida latente; la parte apical de la fronde estrecha el surco, reduce las alas y tiene tendencia a redondearse y cambiar la dirección hacia abajo.

3.° Los tuberculillos que en esta nota se describen, no son otra cosa que el resultado del proceso anterior llevado a un mayor grado.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Páginas.

I. Filogenia química de la molécula albuminoidea, por *José R. Carracido*. 113

II. Microscopios mineralógicos y petrográficos, por *Domingo de Orueta*. 133

III. Revisión de los Signiforinos de España, por *Ricardo García Mercet* 160

IV. Los tuberculillos de la «Riccia Birchoffii» Hübn, por *Antonio Casares Gil*. 171

La suscripción a esta Revista se hace por tomos completos, de 500 a 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, Madrid.

Precio de este cuaderno: **1,50 pesetas.**

SMITHSONIAN INSTITUTION
SEP 1 1930
NATIONAL MUSEUM

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVI: 1.º DE LA 2.ª SERIE
NÚMERO 5: NOVIEMBRE DE 1917

MADRID
IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA
CARDENAL CISNEROS, 10
1917

Notas acerca de las esencias españolas

por

B. Dorronsoro

a) Esencia de mirto

Entre las varias plantas de la familia de las mirtáceas que son productoras de esencias, se halla el *Myrtus communis* L., espontánea y cultivada en España, de cuyas hojas se obtiene, por destilación con el agua, un aceite volátil, en la proporción de tres por mil, próximamente.

El *mirto* o *arrayán*, planta de las regiones templadas, es frecuente en Andalucía, en la región mediterránea de Francia, en Córcega, Siria y Asia Menor, en cuyas regiones se destila para la obtención de la esencia, siendo los productos más estimados en el comercio los de España y Córcega.

Esta esencia ha sido estudiada por diferentes químicos, comenzando por Gladstone (1864), y después por Jahns (1888). Éste halló en ella: un terpeno, hirviente entre 158° y 160°, que más tarde comprobó era el *δ-pineno; cineol,* que destila hacia 175°, y un cuerpo que no definió, aunque aparecía como un alcohol.

Más tarde se encontró en ella, en la fracción de p. eb. 180°, el *dipenteno*, que se caracterizó por el nitrosocloruro y, mejor, por la formación del tetrabromuro (1).

Posteriormente, Soden y Edze (2) confirmaron la naturaleza alcohólica del cuerpo hallado por Jahns, asignándole la fórmula $C^{10}H^{18}O$, y designándole con el nombre de *mirtenol.*

Se halla en la esencia principalmente como acetato, y le aislaron saponificando las fracciones de punto de ebullición más elevado de la esencia, fraccionando por destilación los alcoholes así aislados, extrayendo de ellos luego el mirtenol, y eliminando el *geraniol*, que también allí se encuentra, convirtiendo aquél en éter ptálico ácido (P. f. =114-115°) siguiendo el método clásico de Haller. Así aislado, constituye el mirtenol un aceite es-

(1) *Bulletin Schimmel,* abril, 1889, p. 29.
(2) *Chem. Zeit,* 29 (1905), 1.031.

peso, incoloro, de olor a mirto, es decir, participando del de la menta, y el alcanfor, que hierve entre 222° y 224° a la presión de 760 mm.; tiene de densidad a 15°, $d_{15} = 0,985$, y fuerte rotación dextrogira $a_D = + 49°25'$. Se acetila cuantitativamente, y parece ser un alcohol terpénico primario cíclico.

Semmler y Bartelt (1) posteriormente confirmaron estos trabajos, viendo que el mirtenol es un alcohol primario que tiene el mismo esqueleto del pineno, y dedujeron del hecho de que por su oxidación permangánica origina *ácido pínico*, que el grupo CH^2-OH, que caracteriza al alcohol, ha de ocupar la misma posición que el metilo exterior del pineno.

El mirtenol obtenido por Semmler y Bartelt era algo menos denso ($d_{20} = 0,9763$) y menos activo ($a_D = + 45°45'$) que el de Soden y Edze. Observaron que no produce feniluretano sólido que pudiera caracterizarle, y que no se modifica por la acción del sodio y el alcohol amílico.

Por último, los químicos de la casa Schimmel sospechan en la esencia de mirto la existencia del canfeno, aunque los resultados de sus experiencias son poco concluyentes. Y esto es cuanto se conoce acerca de la composición cualitativa de la esencia de mirto.

Las que se obtienen en los diferentes países productores ofrecen caracteres bastante distintos. Según se consignan en el *Bull. Schim.*, abril, 1909, p. 75, se resumen en el cuadro siguiente:

CONSTANTES FÍSICAS

Esencia de mirto de	Densidad d_{15}	Rotación a_D	Refracción $n_D 20$	Solubilidad en el alcohol de 1 vol. de la esencia
Córcega........	0,8828	+ 23°15′	1,46211	En 0,8 vol. alc. de 90°.
	0,8868	+ 26°46′	1,46644	» 2,5 » »
Siria...........	0,8930	+ 14°30′	»	» 1,0 » 80°.
	0,8985	+ 11°	1,46417	» 5,0 » »
Asia Menor.....	0,9138	+ 10°42′	1,46704	» 0,9 » »
Argelia........	0,8871	+ 25°52′	1,46466	» 0,5 » 90°.
Francia........	0,890	+ 25°	1,465	» 0,5 » »
	0,904	+ 23°	1,468	Y casi todas en 5,10 vol. de alc. de 80°.
Dalmacia.......	0,9254	+ 13°20′	1,467	En 3,2 vol. alc. de 70°.

(1) *Berichte*, 40 (1907), 1.363.

CONSTANTES QUÍMICAS

Esencia de	Índice de ácido IA	Índice de éter IE	Índice de éter después de acetilación IA'E	Éteres p. 100 (1)	Alcohol total p. 100 (2)
Córcega	1,0	13,0	30,2	4,55	8,36
	1,6	17,1	38,5	5,98	10,50
Siria	1,0	20,3	70,7	7,10	19,32
	»	26,6	72,0	9,31	19,86
Asia Menor	1,5	39,4	74,9	13,79	26,15
Argelia	1,1	20,6	39,2	7,21	10,83
Francia	Hasta	19	38	6,65	10,50
	1,5	28	56	9,80	15,45
Dalmacia	1,0	134,8	186,7	47,18	51,35

Resulta esta última esencia muy notable por la gran cantidad de éteres y elementos alcohólicos que encierra, siendo, no obstante, pequeña su rotación, a pesar de que el mirtenol es cuerpo bastante dextrogiro.

De las esencias de mirto *españolas* dan los mismos autores las constantes siguientes:

CONSTANTES FÍSICAS

Densidad d_{15^o}	Rotación a_D	Refracción $n_D 20$	Solubilidad en el alcohol
0,913	+ 22°	1,467	1 vol. de esencia en 1 a
a	a	a	2 vols. y rara vez hasta
0,924	+ 25°20′	1,470	5 vols. de alc. de 80°.

CONSTANTES QUÍMICAS

Índice de ácido IA	Índice de éter IE	Índice de éter después de la acetilación IA'E	Éter p. 100 (acetato)	Alcohol total p. 100
Hasta	68	103	23,80	28,33
1,7	a 83	a 117	a 29,05	a 32,18

Se observa al comparar estas constantes con las de las esencias de

(1) Calculados en acetato de mirtenol.
(2) Calculados en mirtenol.

otras procedencias, que las de España tienen una densidad mayor y una riqueza superior en alcoholes y éteres (salvo el ejemplar procedente de Dalmacia analizado por los Schimmel), y esto justifica su estimación.

Una esencia de mirto procedente de la provincia de Huelva, con garantías de pureza, que he podido procurarme, me ha dado los resultados siguientes: es un líquido amarillo fuerte, algo rojizo, de olor canforáceo a la vez que mentólico, cual el de la planta, de sabor muy amargo.

Densidad........................... $d\frac{15}{15} = 0{,}9335.$

Rotación........................... $a_D 15^\circ = + 22^\circ 52'.$

Refracción......................... $n_D 15^\circ = 1{,}4735.$

Solubilidad: 1 vol. en 0,4 vol. de alc. de 90°, y agregando
1,5 vol. más se enturbia por depósito de parafina.
1 vol. en 4,5 vol. de alc. de 80°.
1 vol. en 9,0 vol. de alc. de 70°.

Índice de ácido, IA.......................... = 2,58
» de éter, IE.......................... = 85,75
» de éter después de acetilación, IA'E....... = 117,41

Que corresponden a una riqueza de 30,0 por 100 de éter (acetato de mirtenol) y 32,3 por 100 de alcohol total (mirtenol).

Se halla, por lo tanto, esta esencia dentro de los límites que pueden asignarse a un producto de esta especie.

b) Esencia de cidra

La esencia de *cidra* se obtiene por expresión o por destilación por el agua, de las cortezas del fruto del *Citrus medica* Risso (Charabot).

Este producto apenas puede considerarse como comercial, pues lo que con este nombre suele hallarse son mezclas de varias esencias de auranciáceas, a base de la de limón, porque el olor de la de cidra recuerda el de aquél; pero realmente sus caracteres son bastante diferentes (1).

---

(1) A pesar de esto, *La Farmacopea Española,* en la 7.ª edición (1905) la incluye entre las esencias que cita; dice que se obtiene por expresión o por destilación de la corteza de los frutos de *cidro*, y le asigna caracteres tan poco precisos, que no permiten caracterizarla ni reconocer si se trata de una de las mezclas que se ofrecen con ese nombre en sustitución de la esencia verdadera.

Charabot, en su tratado clásico (*Les huiles essentielles*, 1899), le asigna los siguientes: líquido amarillo, si la esencia ha sido obtenida por expresión (que es la mejor), o casi incoloro si procede de la destilación por vapor de agua; densidad a 15°, 0,870 (próx.); $\alpha_D + 67°$ (próx.), y destila casi enteramente entre 177° y 220°. Se ha caracterizado en ella el *citral*.

Los que han estudiado con más detenimiento la esencia de cidra han sido Gulli y Burgess.

Dice el primero que la esencia obtenida por él de los frutos del *Citrus medica*, var. *rheghina*, Pascuale, recolectados en Calabria, tenía la densidad y rotación antes dichas (0,870 y + 67°), mientras que la obtenida por expresión de los frutos del *Citrus medica*, var. *gibocarpa* o *citrea*, que es la estudiada por Burgess, ofrecía: $d_{15} = 0{,}855$ y $\alpha_D = +80°50'$; y la esencia de limón dulce, del *Citrus limonnum*, var. *dulcis*. acusaba: $d_{15} = 0{,}856$ y $\alpha_D = +64°30'$.

Añade Gulli que la esencia de cidra verdadera tiene como carácter diferencial con las mezclas de las otras dos que se hacen para reemplazarla, el que aquélla deposita, al poco tiempo de obtenida, finas agujas incoloras que la enturbian, y las mezclas no producen depósito semejante. Carácter éste que se comprende tiene poco valor.

Los químicos de Schimmel han aportado pocos datos nuevos, limitándose a comprobar los indicados por Gulli; y, por último, los de la «London Essence Company» (1), después de analizar bastantes esencias de cidra puras y mezcladas, dan como límites para la esencia pura los siguientes:

$$d_{15} = \text{de } 0{,}8507 \text{ a } 0{,}853,$$
$$\alpha_D 20 = \text{de } +77°53' \text{ a } +78°39'$$
y
$$n_D 20 = \text{de } 1{,}4752 \text{ a } 1{,}4749.$$

Añaden que no es suficiente la comprobación de estos caracteres para reputar como pura una esencia de cidra, pues se hacen mezclas con la esencia de limón, la de limón dulce y la de naranja, que responden bien a estas exigencias; por lo que recomiendan someter la esencia al ensayo recomendado por Jurgess y Child para la esencia de limón.

Consiste este ensayo en destilar, en un matraz de bolas de Ladenburg, 50 c. c. de la esencia, recogiendo separadamente los 5 c. c. que destilan primero, y luego los 40 c. c. siguientes y determinar en ellos la rotación.

---

(1) *Chemist and Drugg*, 62 (1903), 57.

Así, una esencia pura que tenía d_{15}=0,852, $a_D = +80°5'$ y $n_D = 1{,}4749$, ha dado:

La 1.ª fracción $a_D = +85°55'$, $n_D = 1{,}4730$.
» 2.ª » $a_D = +86°\ 5'$, $n_D = 1{,}4735$;

es decir, que la rotación de ambas fracciones debe ser superior a la de la esencia primitiva. Esto no sucede con las esencias constituídas por mezclas.

Deseando conocer las condiciones de la esencia de cidra que ofrece nuestro comercio, me procuré una muestra de una casa acreditada de Málaga: hecho su ensayo dió los resultados siguientes:

Líquido amarillo claro, tirando algo a pardo, transparente, de olor citronado, que recuerda algo al de cidra, reacción notablemente ácida.

Densidad	$d_{15} = 0{,}900$.
Rotación	$a_D 15 = +30°0'$.
Refracción	$n_D 20 = 1{,}4843$.

Solubilidad en el alcohol:

1 vol. soluble en todas proporciones en el de 90°.
1 » » incompletamente en 16 vol. del de 80°.
1 » insoluble en 20 vol. del de 70°.

Como constantes químicas, ofrecía las siguientes:

Índice de ácido, IA .... =	6,0
» de éter, IE .... =	38,29
» » después de acetilación, IA'E. =	122.71

Basta examinar la densidad y la rotación para afirmar que esta esencia no es de cidra, sino una mezcla probablemente hecha con esencia de limón y de *petit grain*, a juzgar por los índices, y ya vieja por su fuerte acidez y gran densidad.

Estas mezclas groseramente hechas prosperan en nuestro país, desacreditando nuestros productos, porque la incultura de los compradores, principalmente los pequeños industriales que los utilizan, no les permite acudir a otros medios de reconocimiento que el olfato, al que conceden una importancia decisiva, y a lo más, algún tanteo no bien hecho de solubilidad en el alcohol. Sería de desear que hubiera en España algún laboratorio oficial encargado de tales ensayos nada fáciles, y que exigen medios que no pueden generalizarse, que sirviera para vigilar estos productos comerciales, impidiendo que el fraude, impunemente realizado, perjudique no sólo los intereses particulares, sino el crédito nacional.

Microscopios mineralógicos y petrográficos

por

Domingo de Orueta

(Conclusión.)

Si el operador posee una montura de uso general con platina giratoria graduada, puede transformar su microscopio en uno petrográfico, cómodo y completo, adquiriendo un tubo adicional de recambio provisto de todos los accesorios enumerados en el epígrafe anterior. Esta solución es la mejor, pero exige enviar la montura al constructor para que éste haga la adaptación del nuevo uso con toda la precisión que esto exige (1).

Es evidente que ninguna de las soluciones que acabamos de enumerar da por resultado una montura tan cómoda cual las hechas *ad-hoc* para petrografía, sobre todo si ésta es de las modernas y muy completas que hoy día se construyen, y por cierto a precios bastante económicos. Nótese que hay mecanismos, como los de cambio rápido de luz paralela a convergente, giros micrométricos de la platina y de los nicoles, y otros, que facilitan mucho el trabajo y permiten, además, realizarlo en el mínimum de tiempo, y estos accesorios no se pueden adaptar a una montura ya hecha. Pero, por otra parte, estos medios auxiliares no son absolutamente indispensables, y el operador se puede pasar sin ellos sacrificando algo de su tiempo y de su comodidad. En cambio, la modificación de una montura que ya se posee para adaptarla a petrografía, es siempre una solución más

(1) En una ocasión encargamos a la casa Zeiss un microscopio provisto de dos tubos y del modelo IA. Uno de aquéllos era de gran diámetro para microfotografía, y el otro, el especial petrográfico. La montura resultó, como no podía menos, perfecta en todos sus detalles, y el sobreprecio pagado por el tubo petrográfico, y el polarizador montado en la subplatina de Abbé fué de 175 marcos. En otra ocasión enviamos a la casa W. Watson & Sons, de Londres, un microscopio gran modelo Van-Heurck, con platina giratoria graduada, para que le adaptase un tubo petrográfico adicional. El resultado fué también excelente, y el tubo, con láminas auxiliares, analizador, con círculo graduado y lente de Bertrand, enfocable por cremallera y piñón, costó seis libras esterlinas.

económica que la adquisición de una montura nueva, y ahorra además el trabajo de tenerse que habituar al manejo de dos microscopios distintos.

220. *Descripción de algunas monturas petrográficas.*—Pocos son los constructores de microscopios para uso general que no construyan también monturas especiales para petrografía, estableciendo serjes de varias de éstas que comprenden desde el tipo más completo, con sus múltiples mecanismos, hasta el más sencillo para uso de estudiantes. A pesar de esto, los modelos de monturas petrográficas son más uniformes que sos de uso general; cosa que depende de que se destinan a un fin dado, el cual permite pocas variantes. Todos ellos, salvo los muy sencillos, cuentan con los órganos ópticos enumerados en el epígrafe 218, y las diferencias estriban en los aditamentos mecánicos que tienden a la comodidad y a la precisión del trabajo, pero que no alteran la misión fundamental del instrumento. Por esto, y para no aumentar exageradamente las descripciones y el número de figuras del texto, nos ceñiremos a reseñar sólo cinco monturas, seleccionadas entre las más características, y que comprenden tipos ingleses, franceses y alemanes. No describiremos las americanas, porque los constructores de los Estados Unidos siguen en ellas la misma pauta que en las de uso general; han adoptado los tipos continentales de Zeiss, Reichert y otros, aplicándoles las especiales características mecánicas de la construcción norteamericana, pero sin alterar ni la forma general ni la disposición de los detalles (1). Siguiendo el orden establecido en capítulos anteriores, empezaremos describiendo las monturas inglesas y terminaremos con las continentales.

La figura 334 representa el «microscopio petrográfico fotográfico» de la casa James Swift & Sons, de Londres. Es una de las monturas más completas que hoy existen, y se caracteriza porque su tubo es de mucho diámetro (54 mm.) y permite la microfotografía directa con planares y otros objetivos débiles de gran campo, cuyo cono emergente quedaría intercep-

(1) Hay algunas casas dedicadas a la construcción de instrumentos de física que no fabrican microscopios para uso general, y sí tan sólo los destinados a petrografía y cristalografía. Merece citarse, en primer término, la firma R. Fuess, de Berlin-Steglitz, que es una verdadera especialidad en estas monturas y en cuantos aparatos se relacionan con los estudios de esta clase. A ella han acudido los petrógrafos más eminentes, incluso los americanos, para poner en práctica sus invenciones. Ya hemos recomendado al lector en una nota anterior el examen de los catálogos de esta casa, que enseñan tanto como un tratado de petrografía.

La «Société Genevoise pour la Construction d'Instruments de Physique et de Mécanique», de Ginebra, fabrica también varios tipos de monturas petrográficas, dignos de figurar entre los más perfectos que se conocen.

tado en parte por las paredes de un tubo de escaso diámetro. El constructor ha previsto que esta montura se presta también a las investigaciones de histología, zoología y cuantas constituyen las aplicaciones corrientes

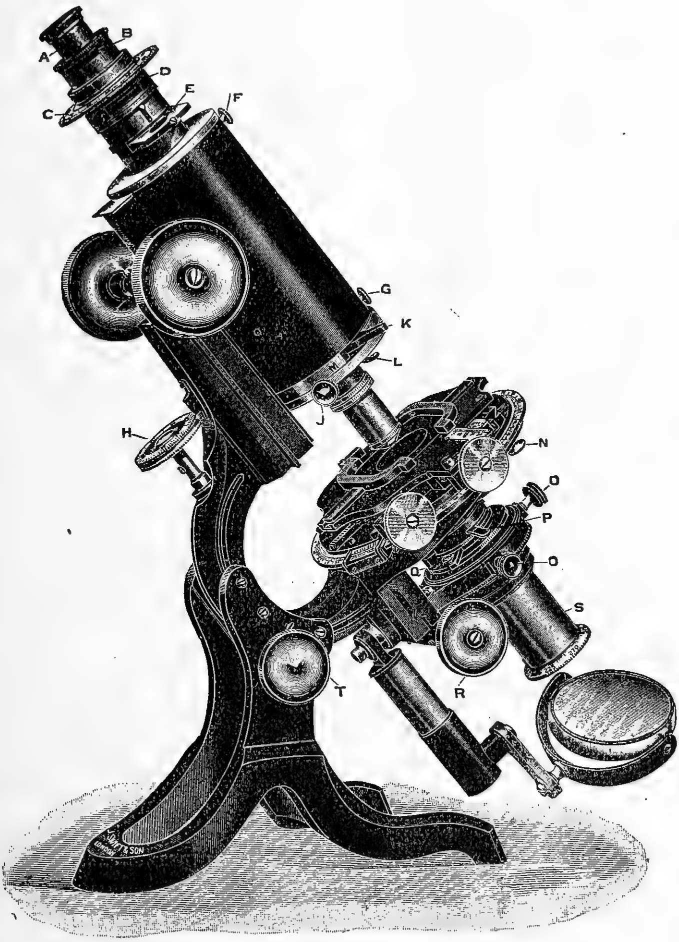


Figura 334

del microscopio, y, al efecto, la vende, o bien con el tubo petrográfico solo, o bien con dos tubos intercambiables, uno de los cuales se destina al trabajo general, y el otro a petrografía.

La suspensión es del tipo Wales, con limbo semicircular que permite todas las inclinaciones entre la vertical y la horizontal, sin que la proyección del centro de gravedad del instrumento entero se salga de la superficie comprendida entre los tres puntos de apoyo del pie; cosa que da extraordinaria estabilidad a esta montura. El tornillo de presión T la fija en la posición que se desea.

El polarizador S es un prisma de nicol de gran tamaño que está montado sobre un tubo giratorio, provisto en su borde inferior de un círculo graduado completo. Además del índice que marca las divisiones del círculo, lleva éste cuatro muescas que corresponden, respectivamente, dos a dos, con la posición de cruce y con la de paralelismo de los nicoles. El polarizador se puede separar instantáneamente del eje óptico con independencia de la subplatina y demás aparatos que ésta soporta. Dicha subplatina es centrable por medio de los tornillos O y enfocable por cremallera y piñón, según se ve en R. Está provista de un diafragma iris actuado por la manecilla P, y de un disco para láminas auxiliares, que se pueden intercalar o separar rápidamente del eje óptico actuando sobre la palanca Q. Este disco recibe también a los diafragmas excéntricos para luz oblicua, y a los en forma de estrella para el alumbrado sobre fondo negro. El condensador es acromático, aplanático, y de una apertura numérica efectiva que se aproxima a 0,90, siendo la teórica de 1,00. Esta subplatina tiene también la notable particularidad de poderse separar entera del eje del microscopio; para lo cual va montada sobre dos correderas en forma de cola de milano, que se ven en la figura encima del tornillo R. Esto permite el cambio rápido de los condensadores para pasar de luz paralela a la convergente, pudiéndosele adaptar además otros mecanismos para el mismo fin. El espejo va montado, con independencia de la subplatina, sobre un brazo articulado con tres movimientos que permiten colocarlo en cualquier posición.

La platina es giratoria, graduada y capaz de describir una revolución completa, sea cual sea la posición de los carros mecánicos, sin que éstos tropiecen con el limbo. Lleva dos nonios, uno a cada lado para comodidad de las lecturas, que permiten apreciar en éstas hasta cinco minutos de grado. Un tornillo de presión N fija la platina en cualquier posición. Los dos movimientos mecánicos del carro, con sus tornillos a la derecha, dan amplios desplazamientos en ambos sentidos. Cada uno de ellos lleva su correspondiente escala para el registro de puntos de la preparación. Los topes de los carros están dispuestos para portaobjetos ingleses de 75 $\times$ 25 milímetros; pero hay sitio para poner topes adicionales que permitan el empleo de portaobjetos más pequeños.

El tubo va cerrado en sus dos extremos por tapaderas móviles, que se quitan aflojando los tornillos F y G. En el extremo inferior del tubo hay un analizador de gran campo y del tipo Glan-Thompson, que se maneja con la palanca K, pudiéndose intercalar y separar del eje óptico con una simple presión de los dedos. Dos topes indican al tacto ambas posiciones. Debajo del analizador va una lente de Bertrand, movida por la barra L, que también se puede intercalar o separar del eje por un simple movimiento de la barra hacia adentro o hacia afuera. En el borde derecho hay una ranura (tapada en la figura por la chapa móvil M) por la que entran las correderas con láminas auxiliares de yeso, mica y cuarzo. El objetivo y la lente van montados sobre una pieza especial, centrable por medio de dos tornillos; uno de los cuales, el J, se ve en la figura. Esta pieza se caracteriza por su excepcional rigidez.

La parte superior del tubo es del diámetro «standard» de los grandes modelos ingleses. Se puede enchufar más o menos en el tubo ancho inferior para graduar el enfocado de los aparatos que soporta. Son éstos: una segunda lente de Bertrand E, que da de las figuras de interferencia una imagen más pequeña, pero más limpia y precisa en sus contornos que la que da la lente L, y que se puede enfocar con exactitud por el medio dicho antes; una ranura D con una tapadera metálica de corredera, que sirve para dar entrada a las láminas de minerales auxiliares, micrómetros, etc., que convenga emplear bajo el ocular; por último; otro analizador, también del tipo Glan-Thompson, giratorio sobre el eje óptico y con un círculo graduado C. Si se quieren intercalar láminas bajo este prisma, la ranura B permite hacerlo. El ocular con retículo tiene su lente superior móvil para poder enfocar los hilos.

El movimiento rápido de enfocar es de cremallera y piñón, con dientes diagonales, para mayor suavidad del deslizamiento. El movimiento micrométrico es de palanca y tornillo, de gran estabilidad de foco, y de tal sensibilidad que se pueden apreciar con él desplazamientos de una micra. La cabeza graduada de este tornillo es H.

Esta montura está calificada como una de las más completas y mejor estudiadas de Inglaterra. Su precio, con el analizador suplementario en el ocular, y los demás órganos que hemos descrito, es de 47-10 libras esterlinas. Van incluídos en este precio, como accesorios ópticos, un ocular y el condensador de 1,00 a. n. mencionado antes.

Dentro del tipo de platinas giratorias, fabrica la casa Swift otras cuatro monturas, progresivamente más sencillas que la anterior, a las que designa con los nombres de «Survey», «Petros», «Advanced Student's» y «Simple». Esta última merece describirse, porque es, tal vez, el modelo más sencillo de montura petrográfica que hoy existe. Está representada en la figura 335. El pie es de metal y forma una sola pieza con el limbo, sin charnelo de inclinación, por lo cual este microscopio sólo puede trabajar en posición vertical. El limbo tiene forma de asa, para facilidad de agarrarlo, pues uno de los fines de esta montura es el de trabajos auxiliares del laboratorio que obligan a cambiarla de sitio a cada paso. No lleva movimiento micrométrico de enfocar; pero el rápido, por cremallera y piñón, tiene los dientes de ambas piezas tan juntos y está ajustado con tal precisión, que se pueden enfocar con él objetivos de $^1/_6$ de pulgada de foco y aun los de $^1/_4$. La platina es giratoria y graduada, habiendo en el borde interior del limbo un índice para leer los grados. El polarizador va montado sobre un aro que permite la separación del prisma del eje óptico, desviando aquél hacia la derecha, y lleva en su borde inferior un círculo, sobre el cual van marcadas las cuatro posiciones a 90 grados, y las intermedias a 45 grados, las cuales se determinan también al tacto por medio de muescas y resortes. Un condensador simple de muy poca convergencia se adapta al extremo superior del polarizador, y ambos, unidos, se enfocan sobre la preparación, subiendo o bajando el cilindro que los soporta dentro del aro. El analizador está colocado en el extremo inferior del tubo, y se separa o se intercala en éste por medio de la palanca que se ve en la figura, bajo la cual se ve también la ranura

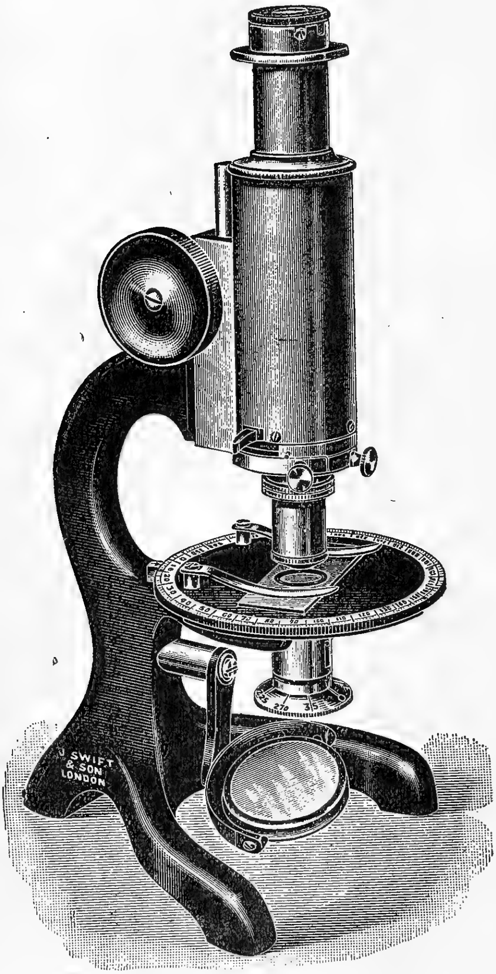
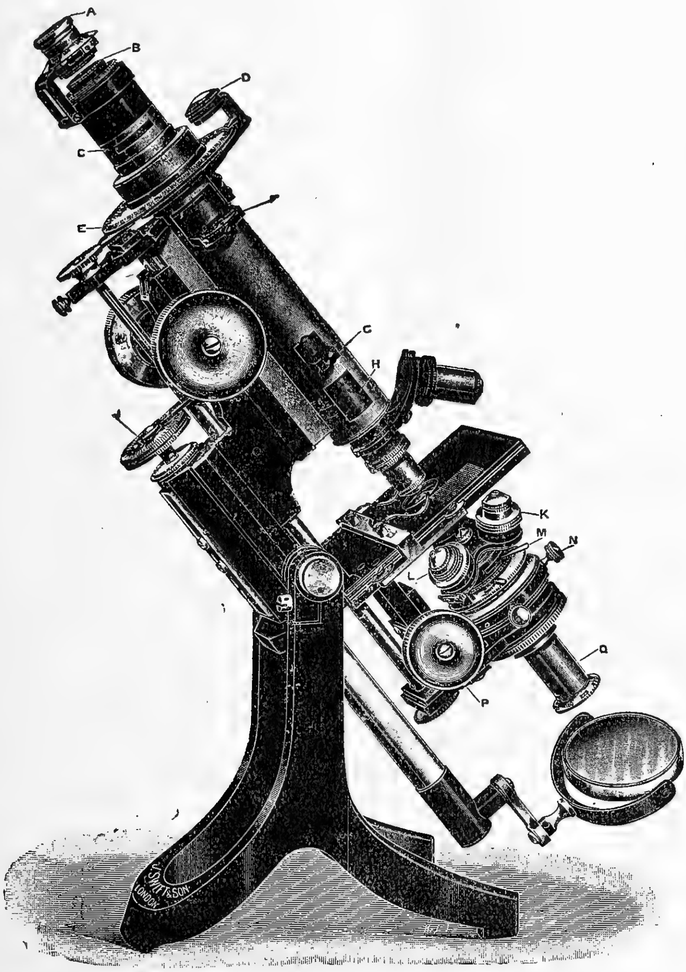


Figura 335

que sirve para la corredera con las láminas de yeso, mica y cuarzo. El objetivo se monta sobre una pieza con mecanismo de centrar, cuyos tornillos están uno a la derecha, y otro delante del tubo, como se ve en la



Fignra 336

figura. Por último, el ocular con retículo tiene la lente superior móvil para el enfocado de los hilos, y el tubo lleva dos muescas para las posiciones de 90 y 45 grados. Con esta montura se pueden hacer todas las determinaciones elementales de las rocas, salvo las relativas a luz convergente. Su precio, con ocular, es de 7·10 libras esterlinas.

La casa Swift ha sido la primera que ha aplicado a las monturas petrográficas el principio de Dick. El modelo original se construyó siguiendo las indicaciones del profesor G. W. Grabham, jefe de la misión geológica del Sudán. Después se ha perfeccionado en algunos detalles, hasta llegar al tipo actual, que han adoptado varios constructores ingleses y alemanes. La casa Swift vende hoy dos monturas Dick, de las cuales vamos a describir la más completa, que es la representada en la figura 336.

La característica principal de este modelo radica en la subplatina, sobre la cual se han reunido cuantos aparatos facilitan los estudios petrográficos, adaptándolos a la condición esencial del principio Dick, que es, como sabemos, el giro simultáneo de los dos nicoles y el ocular. La subplatina entera es enfocable por cremallera y por el piñón P. El polarizador Q se puede separar instantáneamente del eje óptico con independencia del resto de la subplatina, cosa muy práctica para el trabajo diario. Lleva en su borde inferior un círculo con marcas a 90 y 45 grados, relacionadas con las posiciones de extinción. Dentro del aro que lo soporta gira el nicol por medio de una rueda dentada que engrana con la de la barra articulada y lo conecta con el analizador y el ocular. Encima del polarizador está el mecanismo de centrar los sistemas ópticos, cuyos dos tornillos están designados por N. Un diafragma iris, que se maneja con la palanca M, va colocado en un plano que coincide, o está muy próximo, al focal posterior del condensador más potente entre los que habitualmente se emplean, que es el seco de 1.00 a. n. También esta platina, como la de la montura figura 334, lleva un disco giratorio, actuado por la barra que se ve en la figura debajo del iris, en el que se colocan diafragmas destinados al alumbrado oblicuo y sobre fondo negro, y también las láminas de yeso, mica y cuarzo si se las quiere poner en la subplatina.

Pero el accesorio más original de la subplatina es el que sirve para intercambiar a los condensadores, que consiste en un revólver de poca altura, que puede recibir a tres de aquéllos, efectuándose el cambio como si se tratase de objetivos (1). Cualquier condensador provisto de rosca

(1) No acertamos a explicarnos cómo una disposición tan sencilla y tan práctica como es ésta para el fin de cambiar de alumbrado, no ha sido adoptada por otros constructores; pero el hecho es que sólo la casa Swift ha puesto hasta la fecha este accesorio en la subplatina. Hemos manejado algún tiempo en Inglaterra una montura provista de él, y podemos atestiguar por experiencia personal que el cambio de condensadores se hace con suma facilidad y sin que tropiecen con ningún órgano. Basta bajar ligeramente la subplatina moviendo el piñón de enfoque y apretar con dos dedos al revólver para que el cambio quede hecho.

universal se puede usar con este revólver. La casa Swift aconseja el empleo de dos de ellos: uno aplanático, de inmersión en aceite de cedro, y de una apertura numérica igual a 1,4; y otro seco, también aplanático, con apertura de 1,00. El tercer tubo del revólver se puede dejar sin lente para que llegue a la preparación la luz directa del espejo, o poner en él un condensador o lente simple de poca convergencia, que dé luz prácticamente paralela.

La barra que conecta a los nicoles y al ocular, es estriada y está formada por dos trozos que enchufan uno en otro con exacto ajuste. De este modo, son posibles todos los movimientos de la subplatina y del tubo a lo largo del eje óptico.

La platina es simple, de forma rectangular, y está provista de canales en sus costados mayores, para que se le pueda adaptar un carro semimecánico, como el que está puesto en la figura 336, con el cual se hace el movimiento de adelante a atrás, y el lateral a mano, actuando directamente sobre el portaobjeto. La esquina derecha superior de éste, marca sobre la cuadrícula que se ve en la platina la posición del punto que, en aquel momento, ocupa el centro del campo y sirve para registrar esta posición y poder volverlo a encontrar cada vez que se quiera.

La adaptación de los objetivos al tubo, se hace por medio de un revólver, como representa la figura, o con una tenaza simple, sin mecanismo de centrar, porque éste es innecesario en el sistema Dick. Sobre el objetivo va una lente de Bertrand G, montada sobre un tubo H, enfocable a mano y dispuesta de modo que la corredera que la soporta se pueda intercalar y separar del eje óptico. Dos topes indican al tacto las posiciones normales de esta lente. Otra, montada de igual modo que la primera, se ve en F, y está destinada a formar imágenes más pequeñas, pero mejor definidas, que las que da la lente inferior.

En el extremo superior del tubo está el círculo graduado E, que, en unión de todos los órganos que sobre él hay, gira por medio de ruedas dentadas al mismo tiempo que el polarizador. Sirve este círculo para medir los ángulos de giro y, por consiguiente, las extinciones. Una lente D, colocada sobre un índice fijo, facilita las lecturas de dichos ángulos. La ranura C, aloja las correderas de las láminas auxiliares. El analizador A, montado sobre el ocular B, está soportado por una charnela que permite separarlo instantáneamente del eje óptico, y dejarlo en posición que no estorbe al operador. Está provisto de un círculo graduado adicional pequeño, que se destina a los estudios de polarización rotatoria. El movimiento lento de enfocar aprecia dos micras. El precio de esta montura es de 35 libras esterlinas.

Todos los principales constructores ingleses venden monturas petrográficas, que no describimos porque son iguales a las de Swift, en sus órganos ópticos y sólo se diferencian de éstas en los mecánicos y en la forma general; porque cada constructor ha adoptado para las suyas los modelos de pie, limbo, etc., que emplea en sus microscopios de uso general, y éstos ya han sido descritos en capítulos anteriores.

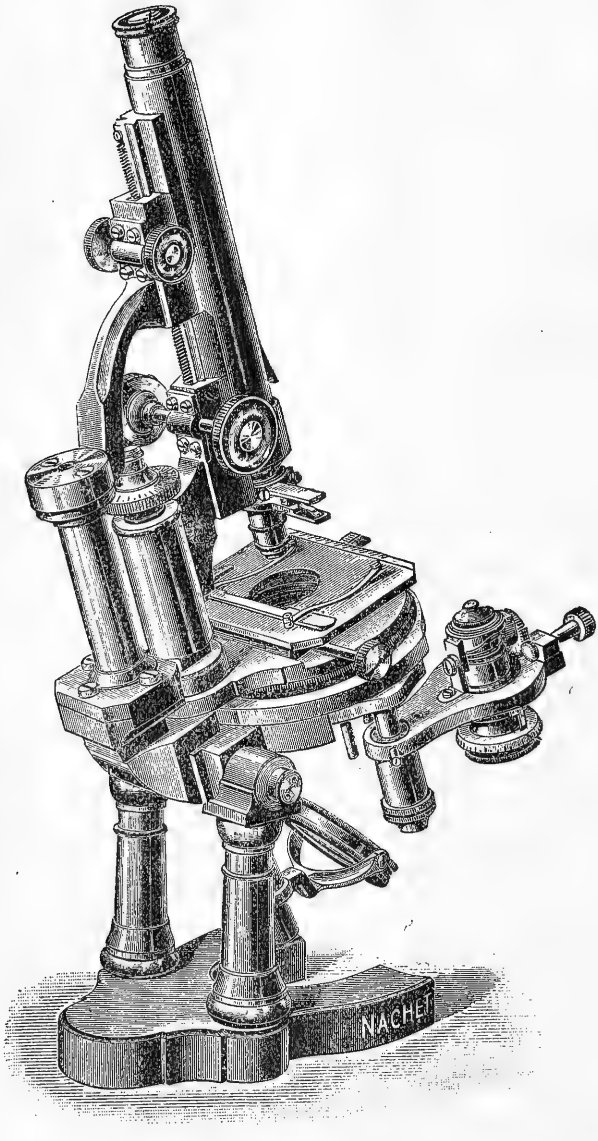


Figura 337

La figura 337 representa la montura mineralógica grande del constructor A. Nachet de París. Está basada en el principio, ya citado antes, de giro solidario de la preparación y el objetivo, quedando inmóviles los nicoles y el ocular; con lo cual el objeto permanece constantemente en el centro del campo, suprimiéndose la enojosa operación del centrado, lo mismo que con el sistema Dick, aun cuando el procedimiento sea distinto. Para conseguirlo, la montura lleva dos limbos; uno que soporta el objetivo, sus mecanismos de enfocar, y el analizador, que va unido rígidamente a la platina; y el otro, que sostiene al ocular y el mecanismo de enfocar a éste sobre la imagen de interferencia; cuyo mecanismo, que es de corredera y piñón, se ve en la parte superior de la figura. Diafragmas convenientemente situados, impiden toda entrada de luz por el enchufe de los dos tubos.

El pie y el espejo son los mismos que emplea Nachet en todas sus monturas grandes. La subplatina, sencilla como todas las continentales, va montada sobre un eje exéntrico con una rosca de gran paso para enfocar al condensador. Se puede separar del eje óptico, como indica la figura, o intercalarse en él, marcando un tope cuando está en su posición exacta de centrado. El polarizador lleva un círculo graduado, y sobre él, un diafragma iris. El condensador se compone de dos partes: la inferior, fija al aro de la subplatina, es una lente simple que da luz casi paralela; la superior consta de dos lentes que, superpuestas a la anterior, dan la convergencia máxima compatible con un sistema seco y que equivale a una apertura numérica útil de 0,93. Esta lente doble va montada sobre una báscula movida por un eje exterior (véase la figura) que permite, con sólo media vuelta, su intercalación o separación del eje óptico.

La platina giratoria, como hemos dicho, lleva un círculo graduado, un vernier que aprecia cuartos de grado, y un carro mecánico con dos movimientos rectangulares y dos escalas para el registro de puntos. El tope de esta platina está ajustado al tamaño 48 por 28 milímetros de los portaobjetos continentales.

Los objetivos se unen al tubo, por medio de una tenaza sin mecanismo de centrar. Sobre ella, va la corredera para las láminas de minerales auxiliares, y en la parte anterior del tubo hay una ventana, que se abre de abajo arriba, según se ve en la figura, que descubre al tubo interior, dentro del cual se intercala, por medio de una corredera, la lente de Bertrand. El ocular con retículo lleva el botón de posición que entra en las muescas del borde superior del tubo.

La casa Nachet vende esta montura con un equipo de óptica compuesto de seis objetivos, tres oculares, un ocular micrométrico, una cámara clara para dibujo, la serie de las tres láminas auxiliares, la lente de Bertrand y el condensador ya descrito. El precio total es de 1.200 francos. Vende, además, otras dos monturas parecidas a ésta aun cuando, más pequeñas, y también con equipos de óptica, en 815 y 370 francos, respectivamente.

La figura 338 representa una de las monturas petrográficas modernas de la casa R. Fuess, de Berlín-Steglitz, cuya casa fabrica catorce de ellas, a cual más perfectas y mejor estudiadas. Con las explicaciones que ya hemos dado, se entiende bien la disposición general de los órganos de este microscopio, y por esto nos limitaremos a señalar sus rasgos más salientes.

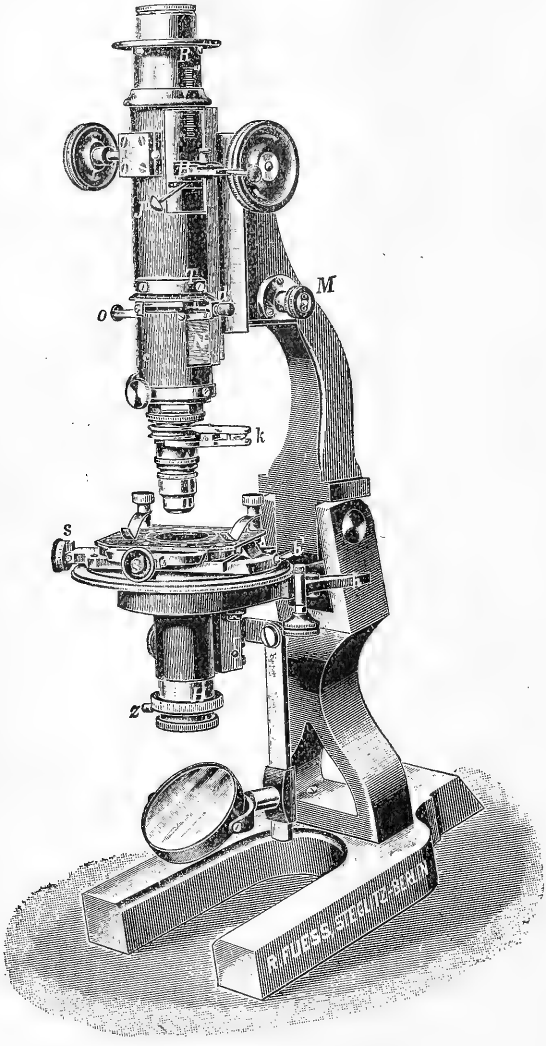


Figura 338

Resalta a primera vista la forma especial del pie y la de la columna, con charnela alta, que soporta al limbo. El primero conserva la forma de herradura propia de los microscopios continentales, pero el pronunciado saliente hacia atrás del talón y la separación grande de las dos ramas anteriores, dan a este microscopio, y a todos los de Fuess, una estabilidad bastante mayor que la de los que generalmente se construyen en Alemania y Austria. Pero lo que más caracteriza a los órganos de que nos estamos ocupando, es la altura a que está la charnela, o sea el eje de suspensión del microscopio; altura que sobrepasa bastante el nivel de la cara superior de la platina, como sucede en los microscopios ingleses, y no queda por bajo de dicho nivel, como ocurre en la mayoría de las monturas alemanas, y que es uno de sus defectos, como hemos demostrado en los capítulos anteriores, cuando discutíamos la disposición general de órganos mecánicos de los microscopios. La charnela baja, resta estabilidad al instrumento y lo coloca en malas condiciones de equilibrio cuando se trabaja en posición inclinada. En las monturas de Fuess se ha corregido este defecto, elevando el eje de suspensión, y ello es la mejor prueba que se puede aducir en pro de la posibilidad de hacerlo aún con el pie en forma de herradura y la columna simple. La forma de ésta es también un acierto, porque las dos curvas hacia adentro que lleva a mitad de su altura, permiten llegar fácilmente con las manos a la subplatina y al espejo, y, como se ve, están hechas de modo que no restan anchura a la base de apoyo ni longitud al eje de suspensión, debido al ensanchamiento de la columna en sus dos extremos.

La subplatina es muy sencilla. El polarizador, de gran campo, no lleva círculo graduado y su único accesorio es el diafragma iris cuyo botón es *z*. Es enfocable por medio de una cremallera y un piñón, y separable del eje para facilitar el intercambio de los condensadores.

La platina es giratoria y graduada, pudiéndose realizar un giro rápido a mano y otro lento por medio de un piñón *b*. Los carros mecánicos son de poca amplitud y de avance muy lento. Como la platina no tiene topes, sólo pueden servir dichos carros para situar con exactitud un punto de objeto en el centro del campo, y también como micrómetros para medir la longitud de los objetos por los desplazamientos de la platina. Al efecto, lleva cada uno su correspondiente escala, complementada, además, en algunas monturas, como la de la figura 338, por una graduación en las cabezas de los tornillos.

La tenaza E. para unir los objetivos al tubo, es del modelo corriente, y se centra por medio de dos tornillos. Encima de ella está la ranura para las láminas de minerales auxiliares, las cuales entran en las monturas de Fuess, formando ángulos de 45 grados, con las direcciones de vibración de los nicoles. El analizador N, separable del eje, puede girar 90 grados, y medirse los ángulos sobre el cuadrante dividido T. La lente de Bertrand B lleva un diafragma iris que se maneja con la palanca J; es centrable, y enfocable por cremallera y piñón; y el tubo que la soporta lleva una escala que permite anotar su posición sobre el eje óptico.

El movimiento lento de enfocar de esta montura es de un sistema parecido al Berger, que emplea la casa Zeiss en sus microscopios modernos. Su sensibilidad es grande y las cabezas M, que lo mueven, lo hacen en el mismo sentido que el del movimiento rápido.

El precio de esta montura, sin óptica, es de 660 marcos.

Contribución al estudio de los cuerpos convexos de curvatura continua

por

Olegario Fernández Baños

§ I

PRELIMINARES

La teoría de los *isoperímetros* es una de las que, perteneciendo a la parte elemental de la matemática, entrañan no pequeña dificultad. Se inicia en Zenodoro y Pappus, avanza con Euler y Cramer, y adquiere gran desarrollo con Steiner y Lindelöf. Revisada modernamente, se ha visto que Steiner postulaba la existencia del máximo, y se han dado varias demostraciones rigurosas (Schwarz, *Gesammelte math. Abhandlungen*, Bd. II, p. 327, Berlín; Minkowski. *Gesammelte math. Abhandlungen* Bd II, über Geometrie, Berlín (*); Karatheodori, Edler, Study, Müller, Hurwitz, Tonelli, *Rendiconti cir. mat. di Palermo,* 1915, t. XXXIX; Enriques-Chisini, *Questioni riguardanti a la mat. elementari,* vol. II; Blaschke, *Kreis und kugel,* 1916, Leipzig).

Blaschke, después de resolver con bastante originalidad el problema de los isoperímetros en el plano y en el espacio, utilizando la teoría de conjuntos y funciones para adaptar las ideas de Steiner y Minkowski, avanza en el campo de la geometría diferencial en grande, especialmente en una cuestión análoga a la de los isoperímetros (**). Concretándose a

---

(*) Sólo citaremos, en este modesto trabajo, las noticias bibliográficas más interesantes, o para un estudio claro y riguroso, o como arsenal de información.

(**) *Mat.-phys. klasse,* 1916, Bd. LXVIII, Leipzig.

las líneas y superficies convexas de curvatura continua, se propone las dos cuestiones siguientes:

1.ª *¿Cuál es entre todas las curvas planas, convexas, cerradas, de curvatura continua* (Eilinie) *y de área constante, la que da el valor máximo para la integral curvilínea*

$$\Delta = \int \sqrt[3]{\text{curvatura}} \,.\, \text{elemento de arco?} \qquad [1]$$

2.ª *¿Cuál es la superficie convexa de curvatura continua* (Eifläche) *y de volumen constante dado, para la cual adquiere el valor máximo la integral de superficie*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \int \sqrt[4]{\text{curvatura}} \,.\, \text{elemento de superficie?} \qquad [2]$$

Resuelve por completo la primera, y respecto a la segunda, logra encontrar una sucesión de superficies convexas y de curvatura continua

$$S_0, S_1, S_2 \ldots, S_n,$$

tales, que para los valores de las integrales correspondientes, se verifica

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 \leqq \boldsymbol{\Lambda}_1 \leqq \boldsymbol{\Lambda}_2 \cdots \leqq \boldsymbol{\Lambda}_n, \qquad [3]$$

sin lograr la existencia del máximo por faltar la demostración en el paso al límite (*). A la amabilidad del profesor H. Weyl (Zürich) debemos el habernos propuesto resolver este problema concreto, que creemos interesante en esta rama de la geometría: reciba por ello nuestro más sincero agradecimiento.

A fin de que nuestro trabajo no resulte un diseño inasequible o inútil para quien de antemano no conozca por completo la cuestión, daremos algunas nociones indispensables para precisar algunos conceptos que emplearemos con frecuencia. Para quien desee profundizar en ella, citamos las fuentes principales donde hemos bebido, y en las que hay abundante bibliografía, por lo cual nos evitamos darla en gran parte, y además conseguimos, en primer término, brevedad, y, por otra parte, se dominan más rápidamente los puntos capitales de la cuestión.

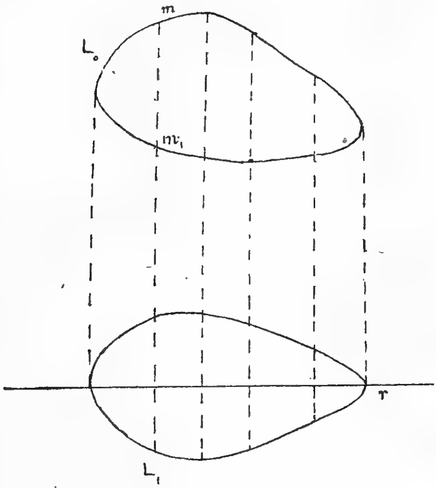
(*) Blaschke, loc. cit., llama la atención sobre la laguna que nos proponemos llenar.

§ II

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. *Simetría de Steiner*

Supuesto el fácil tránsito de una línea plana, cerrada y de curvatura continua, a otra L_0 del mismo perímetro, convexa y de mayor área, consideremos una recta r en su plano, y las normales a esta recta que corten a dicha curva: traslademos sobre sus normales correspondientes las cuerdas $m\ m_1$ hasta que el punto medio del segmento $m\ m_1$ se coloque sobre la recta r. Mediante esta operación, llamada *simetría de Steiner*, se obtiene una línea L_1 simétrica respecto de r, y que, además de ser convexa y de curvatura continua, encierra la misma área, y tiene igual o menor perímetro que L_0. Repitiendo indefinidamente esta simetría respecto de todas las rectas de un haz, obtendremos una sucesión infinita de curvas $L_0, L_1, L_2 \ldots, L_n \ldots$, de la misma área, cuyos perímetros decrecen o al menos no crecen en cada simetría; es decir:



$$L_0 \gtreqless L_1 \gtreqless L_2 \ldots \gtreqless L_n . \qquad [1]$$

Como este conjunto es acotado (pues todas las curvas están contenidas en el recinto definido por una circunferencia circunscrita a L_0, tomando las rectas r pasando por un punto interior de L_0), debe tener un límite L.

Si ninguna de tales curvas L_i es una circunferencia, siempre existe una recta respecto de la cual no es simétrica L_i y, por consiguiente, deducía Steiner, el límite superior (es decir, el máximo) de la sucesión [1] es la circunferencia.

Después de Weierstrass no es admisible tal razonamiento, porque implica la postulación de la existencia del máximo en la sucesión [1], cuando lo único que demuestra es que, si existe, debe ser una circunferencia. La cuestión se reduce, pues, a demostrar que el límite superior L de la sucesión [1] pertenece al conjunto.

Consideremos en el espacio el problema análogo; hagamos análoga operación, respecto de un plano, con un cuerpo convexo de curvatura continua, y tendremos una sucesión infinita de superficies de volumen constante, cuyas áreas exteriores correspondientes cumplen las condiciones siguientes:

$$A_0 \gtreqless A_1 \gtreqless A_2 \ldots \gtreqless A_n, \qquad [2]$$

cuestión en la cual se plantea, respecto de la esfera, el mismo problema planteado en la [1] respecto de la circunferencia.

2. *Cuerpos convexos*

Se llama *cuerpo convexo* a un *conjunto* de puntos que satisface las tres condiciones siguientes:

1.ª Acotado.

2.ª Cerrado.

3.ª Si contiene dos puntos, contiene todos los del segmento que determinan (*).

Tenemos, pues, que si $(a_1, a_2, a_3\ldots, a_n)$ son las coordenadas de un punto A; $(b_1, b_2, b_3\ldots, b_n)$ las de otro punto B del conjunto, la distancia entre ambos $d = \sqrt{\sum_1^n (a_i - b_i)^2}$ $(i = 1, 2\ldots, n)$ es igual o menor que un número dado, y se verifica también el signo igual; es decir, que se alcanza el límite de las distancias en cualquier dirección y sobre cualquier recta que contenga puntos del conjunto. Si λ y μ son dos números reales, $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, $\lambda + \mu = 1$; todos los puntos de coordenadas $\lambda a_i + \mu b_i$ $(i = 1, 2\ldots, n)$ pertenecen al conjunto.

El conjunto de los puntos X $(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ cuya distancia de otro A del conjunto es igual o menor que un número fijo α tan pequeño como se quiera, se llama entorno del punto A.

$$\sum_1^n (x_i - a_i)^2 \leqq \alpha^2.$$

(*) Según esto, se llama—por extensión—*cuerpo convexo* el punto, un segmento, un recinto plano, cerrado, etc. Los conceptos expuestos prescinden del número de dimensiones.

Por consiguiente, todo cuerpo convexo (excepto el caso en que se componga de un solo punto) tiene algún punto con entorno. Los puntos con entorno se llaman interiores. El conjunto derivado de un tal conjunto, recibe el nombre de *periferia* del cuerpo (*), la cual divide o separa al espacio real en que se halla en dos partes; una de puntos interiores, y otra de exteriores al conjunto.

La mayor de las distancias $d = \sqrt{\sum_{1}^{n}(a_i - b_i)^2}$ se llama *diámetro* del cuerpo.

Suponiendo que dos cuerpos convexos C_1 y C_2 tienen un punto interior común, consideremos la distancia de un punto cualquiera P_1 de C_1 al conjunto C_2, y la de otro cualquiera P_2 de C_2 al conjunto C_1: esto supuesto, llamamos con Blaschke proximidad de C_1 y C_2 al número ν igual o mayor que todas las distancias dichas, y se escribe simbólicamente, $N(C_1, C_2)$.

Según esto, diremos que un cuerpo variable C_n tiene por límite otro fijo C ($\lim\limits_{n \to \infty} C_n = C$), cuando, fijado un número ε tan pequeño como se quiera, existe un número n suficientemente grande, a partir del cual $N(C_n, C) < \varepsilon$, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} N(C_n, C) = 0. \qquad [3]$$

En este caso se dice también que el cuerpo C_n converge uniformemente hacia C.

3. *Plano de contacto de un conjunto convexo*

Un plano que sólo contiene puntos de la periferia de un cuerpo convexo, se llama *plano de contacto* (Stützebene). Análogamente se define la *recta de contacto* (Stützgerade) respecto de una línea plana, cerrada y convexa. *Un plano π de contacto* deja todo el cuerpo convexo en una de las dos regiones en que dicho plano divide al espacio, y por todo punto de la periferia pasa por lo menos un plano de contacto.

Consideremos un punto O interior del cuerpo convexo C, como origen

(*) Para un estudio profundo de los conjuntos convexos, además de lo que exponen los libros modernos de análisis, puede consultarse con fruto para un gran número de propiedades, Straszewick, *Beitrage zur theorie der convexen Punktmengen*, Zürich, 1914, y Sierpinski, *Journal math. phys.*, Varsovia, 1914, pág. 268.

de coordenadas, y la dirección OM, perpendicular al plano π, en el sentido en que encuentra a dicho plano; y sean α, β, γ los cosenos directores de OM. Además, sean x, y, z las coordenadas de un punto cualquiera del espacio. Esto supuesto, la expresión

$$\alpha x + \beta y + \gamma z$$

de la distancia del punto O a un plano variable paralelo a π, tiene un valor perfectamente determinado para cada punto del cuerpo C, y es para todos ellos $\alpha x + \beta y + \gamma z \leqq d$, siendo d la distancia del origen de coordenadas al plano de contacto π.

Sea OM una dirección arbitraria, con lo cual variará el plano π. El máximo de la función $\alpha x + \beta y + \gamma z = \mathrm{H}(\alpha, \beta, \gamma)$ (*), se llama después de Minskowski, *función de los planos de contacto* (Stützebenenfunktion); por razón de brevedad la llamaremos simplemente función H.

Esta función cumple las propiedades siguientes:

$$\mathrm{H}(0, 0, 0) = 0; \tag{1}$$

$$t > 0, \quad \mathrm{H}(t\alpha, t\beta, t\gamma) = t\mathrm{H}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{2}$$

Los puntos del cuerpo C satisfacen la expresión $\alpha x + \beta y + \gamma z \leqq \mathrm{H}(\alpha, \beta, \gamma)$, y los puntos del otro lado del plano π (es decir, del lado en que no está el cuerpo C) satisfacen a la $\alpha x + \beta y + \gamma z > \mathrm{H}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Como para toda dirección con su sentido correspondiente hay por lo menos un plano de contacto, dados $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ y $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, existe algún punto en C, para el cual

$$(\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y + (\gamma_1 + \gamma_2)z = \mathrm{H}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2),$$

y como

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \leqq \mathrm{H}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \leqq \mathrm{H}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

resulta que

$$\mathrm{H}(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2) \leqq \mathrm{H}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + \mathrm{H}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2). \tag{3}$$

Como el máximo de $-(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ en C es $\mathrm{H}(-\alpha, -\beta, -\gamma)$, resulta que

$$-\mathrm{H}(-\alpha, -\beta, -\gamma) \leqq \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

(*) Para los puntos x, y, z del conjunto C.

que a su vez es $\overline{\leq}$ H(α, β, γ), y, por consiguiente, excepto el caso en que (α, β, γ) sean (0, 0, 0) (*), se tiene

$$H(\alpha, \beta, \gamma) + H(-\alpha, -\beta, -\gamma) > 0, \qquad [4]$$

Es claro que (α, β, γ) satisfacen la ecuación $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$; resulta, pues, que, considerando una esfera de radio unidad, cuyo centro sea el origen de coordenadas, tenemos que H(α, β, γ) es una función sobre la esfera cuyos puntos se corresponden biunívocamente con los de la superficie del cuerpo C, sin más que relacionar biunívocamente cada normal desde O al plano de contacto π con el radio de la esfera paralelo a tal dirección y del mismo sentido.

Si H(α, β, γ) $\overline{\leq}$ 0, por la [4] será H($-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$) positivo y de mayor valor, y, por consiguiente, el máximo de H es siempre positivo. Como para nuestro objeto siempre se considera el sentido de la dirección, la H se toma siempre positiva.

Es fácil observar que una función H (α, β, γ) que cumple las condiciones [1]-[4], define un cuerpo convexo. Que define un conjunto *acotado* y *cerrado*, es inmediato. Que es *convexo* se demuestra sencillamente viendo que si (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2,) pertenecen al conjunto, también ($\lambda x_1 + \mu x_2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$, $\lambda z_1 + \mu z_2$); $\lambda \overline{\geq} 0$, $\mu \overline{\geq} 0$, $\lambda + \mu = 1$. En efecto,

$$x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma \overline{\leq} H(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma \overline{\leq} H(\alpha, \beta, \gamma),$$

por hipótesis:

$$\alpha(x_1\lambda + \mu x_2) + \beta(\lambda y_1 + \mu y_2) + \gamma(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma) +$$

$$+ \mu(x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma) \overline{\leq} (\lambda + \mu)H(\alpha, \beta, \gamma), = H(\alpha, \beta, \gamma),$$

Expresión cuyos primero y último miembros demuestran la convexidad.

De la definición de la función H (α, β, γ) y de la *proximidad* de dos cuerpos convexos con un punto interior común, se infiere que si H_n y H son las funciones correspondientes a los cuerpos convexos C_n y C respectivamente, se verifica

$$|H_n - H| \overline{\leq} N(C_n, C), \qquad [5]$$

y por consiguiente, si $\lim\limits_{n\to\infty} N(C_n, C) = 0$, y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$, también se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} |H_n - H| = 0$, ó sea que $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = H$.

(*) En tal caso, el cuerpo C se reduce a un recinto plano.

4. *Simetría de Schwarz como límite de simetrías de Steiner*

Imaginemos dos planos ω_1, ω_2, cuya arista p pase por un punto interior O de un cuerpo convexo C_0 (*) de ángulo múltiplo irracional de π, verbi gracia, $\pi\sqrt{2}$. Supongamos hecha sobre ω_1 la simetría de Steiner y que se obtiene el cuerpo convexo C_1: hágase la misma operación con C_1 respecto del plano ω_2 para obtener C_2, del cual, a su vez, haremos la simetría respecto de ω_1 para tener C_3, y así sucesivamente. Blaschke *(Kreis und kugel*, págs. 86-120) ha demostrado que la sucesión así obtenida

$$C_0, C_1, C_2 \ldots, C_n \ldots,$$

además de ser un conjunto cuyos elementos todos son convexos y de curvatura continua, cumple entre otras condiciones la importante del paso al límite, esto es

$$\lim_{n \to \infty} C_n = C.$$

Donde C es de revolución, cuyo eje es p. Tal sucesión indefinida de simetrías de Steiner equivale, pues, a la siguiente construcción de Schwarz.

Córtese el Cuerpo C_0 por un plano σ perpendicular a p, y haciendo centro en el punto σp, constrúyase en el plano σ una circunferencia cuya área sea equivalente a la del recinto de intersección $C_0\sigma$. Hágase variar continuamente el plano σ siempre perpendicular a la recta p, y tendremos el cuerpo C.

En virtud del principio de Cavalieri, el volumen se conserva constante. Schwarz demuestra que el área de la superficie del cuerpo C obtenido, es menor o igual que la del primitivo $A_c \lesseqgtr A_{c_0}$. Blaschke, en virtud del teorema de Bieberbach (**), «*Por la simetría de Steiner, el diámetro de un cuerpo convexo no se agranda*», deduce fácilmente (llamando D_0, D_1, ..., D_n los diámetros correspondientes) que

$$D_0 \geqq D_1 \geqq D_2 \ldots \geqq D_n \ldots, \qquad \lim_{n \to 8} D_n = D;$$

y la siguiente relación, que es más importante para nuestro propósito.

(*) Téngase presente que, de aquí en adelante, al decir convexo, sobreentendemos también de curvatura continua, aunque muchos de los conceptos son aplicables también a los que, siendo convexos, no cumplen la condición de continuidad en la curvatura.

(**) *Über eine Extremaleigenschaft des kreises*, Jahresberich 24 (1915). Es una demostración elegante y muy sencilla.

Siendo $A_0, A_1 \ldots A_n \ldots$ las áreas correspondientes de los cuerpos $C_0, C_1 \ldots C_n \ldots$ se verifica

$$A_0 \geqq A_1 \geqq A_2 \ldots \geqq A_n \ldots \qquad [1]$$

y

$$\lim_{n \to \infty} A_{C_n} = A \lim_{n \to \infty} C_n = A_C, \qquad [2]$$

o sea que el funcional (sucesión infinita de funciones) $A_0, A_1, A_2 \ldots. A_n \ldots$ es una función continua en el límite, o que converge uniformemente hacia A_c.

Para demostrar tal propiedad se funda principalmente en una pequeña generalización del teorema Bolzano-Weierstrass: *Todo conjunto acotado, con infinitos puntos, tiene al menos un punto de acumulación*, en la forma siguiente: *Un conjunto de infinitos cuerpos convexos, uniformemente acotado* (gleichmässig beschränter (*), *permite siempre elegir una sucesión* $C_1, C_2 \ldots. C_n \ldots$ *tal que*

$$\lim_{n \to \infty} C_n = C.$$

Un procedimiento sencillo y elegante para hallar el cuerpo de volumen dado y área mínima, consiste en repetir convenientemente la operación de Schwarz con ejes que pasen por el origen de coordenadas interior al cuerpo, a fin de obtener una figura con infinitos ejes de rotación concurrentes en su centro, la cual es la esfera.

5. *Curvatura de Gauss*

Después de Gauss se llama curvatura *íntegra, total, absoluta,* o simplemente *curvatura de una superficie en un punto,* a la expresión $\frac{1}{r_1 r_2}$, donde r_1 y r_2 son los radios de curvatura de las secciones principales correspondientes a dicho punto.

Se llama curvatura media de una superficie en un punto a la expresión $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ (**).

Ambas son positivas en las superficies convexas, y para nuestro objeto se consideran siempre funciones continuas. A fin de tener una defini-

(*) Esto es, que todo el conjunto es interior a un cubo o esfera de arista o radio dado, respectivamente.

(**) La gran importancia de $\frac{1}{r_1 r_2}$ y $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ proviene de que son dos invariantes absolutos de las dos primeras fórmulas diferenciales fundamentales de la teoría de superficies.

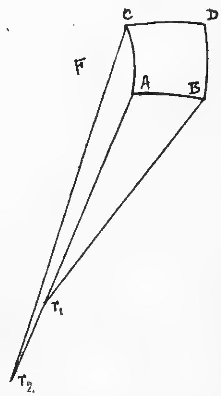
ción más intuitiva de la curvatura de Gauss, consideremos un elemento superficial ABCD sobre una superficie F. Los lados opuestos de la figura son elementos ortogonales de dos líneas de curvatura.

Imagínese una esfera de radio unidad, y por su centro los radios paralelos a las normales a la superficie F en el contorno ABCD. Resulta así sobre la esfera la figura correspondiente *abcd*, y se verifica

$$\lim_{AB \to 0} \frac{ab}{AB} = \frac{1}{r_1}, \qquad \lim_{AC \to 0} \frac{ac}{AC} = \frac{1}{r_2},$$

$$\lim \frac{ab \, . \, ac}{AB \, . \, AC} = \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{1}{r_1 r_2},$$

siendo $d\omega$ y $d\sigma$ los elementos de superficie en la esfera y en la superficie F respectivamente. Tenemos, pues, definida la curvatura de Gauss en un punto, como límite del cociente de elementos correspondientes de área (*).



Previos estos conceptos fundamentales y algunas nociones sobre las líneas de curvatura en las superficies, especialmente en cuanto se refiere a la representación paramétrica de las superficies, empleando las líneas de curvatura, sistemas ortogonales e ixotermos y la representación esférica, como puede verse en cualquier tratado de Geometría diferencial (**) y aun de las primeras aplicaciones del cálculo, pasemos a la cuestión que resuelve Blaschke en gran parte, y cuya laguna nos hemos propuesto llenar.

§ III

PROBLEMA DEL MÁXIMO EN EL PLANO

TEOREMA DE BLASCHKE.—*Entre todas las líneas planas, cerradas, convexas, de curvatura continua* (Eilinie), $x = x(t)$, $y = y(t)$ *de*

(*) Tratándose de superficies convexas de curvatura continua, el sistema de líneas de curvatura no sólo es ortogonal, sino también ixotermo; la correspondencia entre la superficie F y la esfera es biunívoca y continua, y, por tanto, la demostración dada es perfectamente rigurosa.

(**) Son muy completos Darboux, Knoblauch y Bianchi; más elemental Schefeers, y las primeras nociones se hallan muy bien en Jordán y La Valée Pousin, *Cours d'Analyse*.

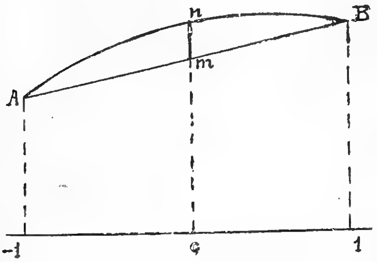
área fija, el máximo de la integral $\Delta=\int\sqrt[3]{\text{curv}}\,ds$ *tiene lugar para la elipse.*

Aunque un poco laboriosamente, ha resuelto por completo esta cuestión (*), poco más o menos en la forma siguiente:

De la definición de curvatura de una línea plana resulta

$$d\Delta=\sqrt[3]{\frac{x'y''-x''y'}{(y'^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}}\,(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}dt=\sqrt[3]{x'y''-x''y'}\,dt=\sqrt[3]{\mathrm{D}}\,dt. \quad [1]$$

Haciendo una sustitución lineal de determinante igual a la unidad (**), resulta invariante D y, por consiguiente, Δ. Como también el área resulta un invariante, se considera este problema como de ixoperímetros en la geometría afín.



TEOREMA AUXILIAR. — Dado un arco AB de curva convexa, el segmento *mn* comprendido entre la curva y la cuerda AB que une los extremos del arco, no puede ser negativo; es decir, *definida una función* $f(\theta)$ *continua hasta la segunda derivada en el intervalo* $-1 \leqq \theta \leqq 1$, *se verifica*

$$f(-1)+f(1)-2f(0) \lesseqgtr 0, \quad si \quad f''(\theta) \lesseqgtr 0,$$

correspondiéndose los signos iguales.

En efecto,

$$\int_0^\theta(\theta-t)f''(t)dt=f(\theta)-\theta f'(0)-f(0);$$

(basta hacer la integración), o sea

$$f(\theta)=\int_0^\theta(\theta-t)f''(t)dt+f(0)+\theta f'(0),$$

y, por tanto,

$$f(1)=\int_0^1(1-t)f''(t)dt+f(0)+f'(0),$$
$$f(-1)=-\int_0^{-1}(1+t)f''(t)dt+f(0)-f'(0),$$

(*) *Math.-phys. klasse*, 1916, Bd. LXVIII, Leipzig.

(**) Transformación afín.

de las cuales resulta

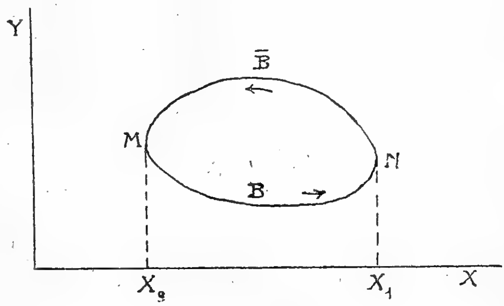
$$f(1) + f(-1) - 2f(0) = \int_{-1}^{+1}(1 - |t|)f''(t)dt;$$

y como $\int_{-1}^{+1}(1 - |t|)dt = 1$ y $f''(t)$ es continua, aplicando el teorema de la media, resulta

$$f(1) + f(-1) - 2f(0) = f''(t). \qquad [2]$$

Por otra parte, se verifica que, aplicando la simetría de Steiner a una línea plana, convexa, cerrada y de curvatura continua, D no decrece. Sea, en efecto, G la línea representada paramétricamente:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \qquad [3]$$



con el periódo τ

$$x(t) = x(t + \tau),$$
$$y(t) = y(t + \tau).$$

Por hipótesis

$$D = x'y'' - x''y' > 0. \qquad [4]$$

Sean M y N los valores mínimo y máximo de x, y supongamos t elegido de modo que correspondan a los valores $t = 0$, $t = 1$ del parámetro respectivamente, y que el período sea 2.

Además t es tal que en los arcos B y $\overline{B}$ a los puntos con la misma abscisa, corresponden valores opuestos de t, siendo, por tanto, $x(t)$ una función par en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$; por último, sea

$$y(-t) = -\overline{y}(t). \qquad [5]$$

Según esto, los arcos B y $\overline{\text{B}}$ vendrán representados como sigue:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{B} \ldots\ldots & x = x(t), & y = y(t), & 0 \leqq t \leqq 1, & x'y'' - y'x'' > 0 \\ \overline{\text{B}} \ldots\ldots & x = x(t), & y = -\overline{y}(t), & 1 \geqq t \geqq 0, & x'\overline{y}'' - x''\overline{y}' > 0 \end{array}\right\} \qquad [6]$$

y, por tanto,

$$\Delta = \int_0^1 \sqrt[3]{x'y'' + y'x''}\,dt + \int_0^1 \sqrt[3]{x'\overline{y}'' - x''\overline{y}'}\,dt. \qquad [7]$$

Hagamos la simetría de Steiner en dirección del eje de las y, y sea G la nueva línea cuya representación será

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{B}_1 \ldots\ldots & x_1(t) = x(t), \quad y_1(t) = \frac{1}{2}\left[y(t) + \overline{y}(t)\right] \\ \overline{\mathrm{B}}_1 \ldots\ldots & x_1(t) = x(t), \quad \overline{y}_1(t) = \frac{1}{2}\left[y(t) + \overline{y}(t)\right] \end{array}\right\} \qquad [8]$$

suponiendo, en forma análoga a la [5], que

$$y_1 = -\overline{y}_1. \qquad [9]$$

Sumando las [6] y teniendo en cuenta las [8], resulta

$$x'(y'' + \overline{y}'') - x''(y' + \overline{y}') = 2(x'y_1'' - x''y_1') > 0. \qquad [10]$$

Lo cual demuestra que G_1 es una línea de la misma naturaleza que la G.

Tenemos, pues,

$$\Delta_1 = 2\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1}{2}[x'(y'' + \overline{y}'') - x''(y' + \overline{y}')]}\, dt, \qquad [11]$$

y vamos a ver que

$$\Delta \overline{<} \Delta_1. \qquad [12]$$

Consideremos para ello un nuevo parámetro θ tal que

$$\varphi(t, \theta) = \frac{1+\theta}{2} y(t) + \frac{1-\theta}{2}\overline{y}(t), \qquad [13]$$

de donde

$$\varphi(t, 1) = y(t), \qquad \varphi(t, -1) = \overline{y}(t), \qquad \varphi(t, 0) = y_1(t).$$

Consideremos además la integral

$$f(\theta) = \int_0^1 \sqrt[3]{x'\varphi'' - x''\varphi'}\, dt, \qquad [14]$$

y tenemos sencillamente

$$f(1) + f(-1) = \Delta, \qquad 2f(0) = \Delta_1,$$

y, por tanto,

$$\Delta - \Delta_1 = f(1) + f(-1) - 2f(0) = f''(\theta), \qquad [15]$$

$$-1 < \theta < 1.$$

Derivando la [14] y teniendo presente la [13], se obtiene

$$\Delta - \Delta_1 = -\frac{1}{18}\int_0^1 \frac{[x'(y'' - \bar{y}'') - x''(y' - \bar{y}')]^2}{(x'\varphi'' - x''\varphi')^{\frac{5}{3}}}\,dt, \qquad [16]$$

$$-1 < \theta < 1.$$

De la [13] resulta

$$x'\varphi'' - \varphi' x'' = \frac{1+\theta}{2}(x'y'' - y'x'') + \frac{1-\theta}{2}(x'\bar{y}'' - x''\bar{y}'),$$

en la cual, atendiendo a la [6], se verifica que

$$x'\varphi'' - \varphi' x'' > 0,$$

valor que además está comprendido entre

$$x'y'' - x''y' \qquad \text{y} \qquad x'\bar{y}'' - x''\bar{y}'.$$

Por tanto, el integrando de la [16] no es negativo y se verifica la [12] *c. d. d.*

El signo igual tiene lugar cuando

$$x'(y'' - \bar{y}'') - x''(y' - \bar{y}') = 0,$$

o sea

$$\frac{y'' - \bar{y}''}{y' - \bar{y}'} = \frac{x''}{x'},$$

de donde

$$\lg(y' - y') = \lg x', \qquad y' - \bar{y}' = K_1 x + K_2. \qquad [18]$$

Y como, según la [6], $\frac{1}{2}(y - \bar{y})$ es la ordenada del punto medio de una cuerda de G paralela al eje y, resulta que todos estos puntos medios estarán en línea recta, la cual será, por consiguiente, un eje de simetría (en general, oblicua) de la curva G.

En tal caso,

$$x_1 = x;\; y_1 = \frac{y + \bar{y}}{2} = \frac{K_1 + K_2 x}{2} + y,$$

y por consiguiente, G y G_1 son afines.

Resulta, pues, $\Delta \leqq \Delta_1$, correspondiendo el signo igual al caso en que la dirección de la simetría de Steiner coincide con la de una recta eje de simetría de la línea G.

Si la línea G fuese tal que, dada una dirección cualquiera en su plano, tuviese una recta de simetría (oblicua u ortogonal) con esta dirección, la integral Δ no sufriría alteración ninguna por las simetrías de Steiner. La elipse cumple tal condición (*) porque los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas están en línea recta.

Por tanto, en virtud de la [12], y teniendo presente que el área de G no varía por la simetría de Steiner, resulta que si hay una línea L convexa y de área dada, para la cual Δ adquiera un valor máximo, tal línea es la elipse (**).

La analogía de Δ con la integral que define la longitud de una línea, induce a Blaschke a llamar a Δ *longitud afín*, y a dar una interpretación geométrica, cuya primera idea corresponde a G. Pick (1914); la cual es como sigue:

Sea $p_0, p_1, p_2 \ldots\ldots p_n, p_0$ una sucesión de puntos sobre G, y en ellos las cuerdas y tangentes correspondientes. Cada triángulo formado por dos

---

(*) Y le es característica entre las líneas planas, cerradas, convexas, de curvatura continua.

(**) Esta conclusión de Balschke corresponde al siguiente razonamiento: Sea G la línea dada, y E una elipse

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a\cos\varphi \\ y &= b \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

de la misma área que G. Si G tiene un eje de simetría, lo tomamos como eje de las x, e igualando las áreas de ambas curvas, tendremos

$$ab(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = 2\int_0^s y(s)x'(s)ds. \qquad [2]$$

Por otra parte, $\int_0^s (y''x' - x''y')^{\frac{1}{3}}\, ds = f(s)$ debe ser un máximo; luego si existe, debe verificarse $y''x' - x''y' = 0$, $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{x''}{x'}$, que integrada dos veces nos dice que

$$y = ax + b; \qquad [3]$$

sustituyendo esta expresión en la [2], resulta

$$ab(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = 2\int_0^s (axx' + bx')ds = ax^2(s) + 2bx(s). \qquad [4]$$

Además, de las [3] y [2] resulta $ab(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = \dfrac{2}{a}\int_0^s y(s)y'(s)ds = \dfrac{y^2(s)}{a}$, que unida a la [4] nos dice que $y^2(s) = ax^2(s) + 2bx(s)$ [5]; ecuación de una cónica que pasa por el origen de coordenadas; mas como es cerrada, debe ser una elipse.

tangentes consecutivas y la cuerda que une los puntos de contacto, tiene una área A_ε, y para todos los triángulos se tiene

$$S = 2\sum_1^n \sqrt[3]{A_\varepsilon}.$$

Aumentando, según una ley simple, indefinidamente los puntos sobre la curva, el valor de S no crece, y el límite inferior de tales sumas recibe el nombre de *longitud afín de la curva.*

Veamos, finalmente, que existe el máximo. En virtud de la fórmula [12], basta dar la demostración para las líneas convexas dichas que tienen un eje de simetría, pues si no lo tuvieren, aplicándoles una vez la simetría de Steiner, estamos en el caso en que gozan de tal propiedad. He aquí la demostración de Blaschke, siguiendo el método de Weierstrass sobre la función ε.

Sea G la línea con un eje de simetría que tomamos como eje x

$$G\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{ll} x = x(\lambda), & x(\lambda) = x(\lambda + \Delta) \\ y = y(\lambda), & y(\lambda) = y(\lambda + \Delta) \end{array}\right\} \qquad [1]$$

siendo

$$y''x' - x''y' = 1. \qquad [2]$$

A los valores $\lambda = 0$, $\lambda = \Delta : 2$ corresponden los valores mínimo y máximo de x, respectivamente. Consideremos un valor intermedio de λ, y construyamos una cónica C bitangente a G en los puntos simétricos $[x(\lambda), y(\lambda)]$; $[x(\lambda), y(-\lambda)]$ de tal modo que el área A comprendida entre $x = x(\lambda)$ y la línea G sea equivalente a la comprendida entre $x = x(\lambda)$ y la cónica C. De este modo queda determinada una cónica única, porque, considerando el haz de cónicas bitangentes a G en los puntos dichos, las áreas consideradas van creciendo continuamente desde cero a un valor mayor que A, y, por tanto, hay una posición correspondiente a la existencia de la cónica que queríamos determinar.

Sea tal cónica la elipse

$$x = x_0 + a \cos\varphi,$$

$$y = b \operatorname{sen}\varphi.$$

Por pasar por el punto $[x(\lambda), y(\lambda)]$, se verifica $y(\lambda) = b \operatorname{sen}\varphi$; y por ser tangente a la G resulta

$$\frac{x'(\lambda)}{y'(\lambda)} = -\frac{a \operatorname{sen}\varphi}{b \cos\varphi}. \qquad [3]$$

Excluyendo el caso en que $x'(\lambda)$ ó $y'(\lambda)$ se anulan, se tiene

$$a = -y\frac{x'}{y'}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}, \qquad\qquad b = \frac{y}{\operatorname{sen}\varphi};$$

$$ab = -y^2\frac{x'}{y'}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi}, \tag{4}$$

En virtud de la equivalencia de áreas de G y C, tenemos

$$2\int_0^{\lambda} y(\lambda)x'(\lambda)d\lambda = ab(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = y^2\frac{x'}{y'}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi}(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi). \tag{5}$$

Calculando el valor de Δ para la cónica desde cero al punto de contacto, se tiene, llamándolo σ,

$$\sigma = \int_0^{\varphi}\sqrt[3]{x'y'' - x''y'}\,d\varphi = \sqrt[3]{ab}\,.\,\varphi = -\sqrt[3]{y^2\frac{x'}{y'}\cos\varphi}\,.\,\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}. \tag{6}$$

A lo largo de la cónica, se verifica

$$\left.\begin{aligned} x'_\sigma &= x'_\varphi\,.\,\varphi'_\sigma = x'_\varphi\frac{1}{\sqrt[3]{ab}} = -\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt[3]{ab}} \\ y'_\sigma &= y'_\varphi\,.\,\varphi'_\sigma = y'_\varphi\frac{1}{\sqrt[3]{ab}} = \frac{b\cos\varphi}{\sqrt[3]{ab}} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Derivando la [5] y teniendo presente la [2],

$$2yx' = \frac{d}{d\lambda}y^2\frac{x'}{y'}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi}(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = \frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\Bigg[2y^2\frac{x'}{y'}\cos\varphi +$$
$$+(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\left(\frac{-(1+2\cos^2\varphi)}{\operatorname{sen}^3\varphi}y^2\frac{x'}{y'} + 2yx'\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{y^2}{y'^2}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right)\Bigg]\frac{d\varphi}{d\lambda},$$

o sea

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi - 3(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{d\varphi}{d\lambda} = \\ &= \frac{2x'y'^2(\operatorname{sen}\varphi - \varphi\cos\varphi) + y\cos\varphi(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)}{yx'y'}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Derivando la [6] y considerando la [8], tenemos

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{d\sigma}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{3}\sqrt{y^2\frac{x'}{y'}\cos\varphi}\,.\,\frac{y\cos^2\varphi - 2x'y'^2}{yx'y'\cos\varphi}. \tag{9}$$

En virtud de la bitangencia de G y C, coinciden las direcciones de las tangentes, y se obtiene

$$\frac{x_\sigma}{x'} = \frac{y_\sigma}{y'} = \mu, \qquad \mu > 0;$$

y en virtud de la [7],

$$\mu x' = -\frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt[3]{ab}}, \qquad \mu y' = \frac{b \cos \varphi}{\sqrt[3]{ab}},$$

que sustituída en la [9], nos da

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{\mu^3 + 2}{3m} = 1 + \frac{(\mu+2)(\mu-1)^2}{3\mu},$$

de donde

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} \geqq 1. \qquad [10]$$

Ahora bien: para $\lambda = \Delta : 2$, $\sigma = \Delta_0 : 2$, siendo Δ_0 el valor correspondiente a una vuelta completa; por consiguiente,

$$\int_0^{\frac{\Delta}{2}} \left(\frac{d\sigma}{d\lambda} - 1 \right) d\lambda = \frac{1}{2}(\Delta_0 - \Delta) \geqq 0, \qquad [11]$$

que demuestra el teorema.

Para la elipse, $\Delta_0 = 2\pi\sqrt[3]{ab}$, y como su área es $\pi ab = A$, resulta la fórmula importante $8\pi^2 A - \Delta_0^3 = 0$, y para otra cualquiera línea plana, cerrada y convexa $8\pi^2 A - \Delta^3 > 0$.

El signo igual sólo tiene lugar para la elipse, porque para ello es preciso que $\frac{d\sigma}{d\lambda} = 1$, $\mu = 1$, y, por tanto, existe entre G y C un contacto de orden superior al primero y, por consiguiente, la línea G coincide con C.

§ IV

PROBLEMA DEL MÁXIMO EN EL ESPACIO

Supuesta la representación paramétrica de una superficie convexa de curvatura continua en coordenadas curvilíneas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

sean

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ -(dx dX + dy dY + dz dZ) &= D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

las dos primeras formas cuadráticas fundamentales de la geometría diferencial en la teoría de superficies. X, Y, Z, son los cosenos directores de la binormal a la superficie en el punto (x, y, z)

$$D = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix};$$

$$D' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix};$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Haciendo una sustitución lineal de determinante igual a la unidad (transformación afín) no varían D, D′, D″, como puede comprobarse.

Eligiendo un sistema de líneas coordenadas u, v, ortogonal, el elemento de área de la superficie es $\sqrt{EG}\,dudv$; mas como las hemos considerado generales, será

$$\sqrt{EG - F^2}\,dudv = d\sigma.$$

La curvatura absoluta o de Gauss es $\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$, y, por tanto,

$$d\Lambda(*) = \sqrt[4]{\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}}\sqrt{EG - F^2}\,dudv = \sqrt[4]{LN - M^2}\,dudv,$$

donde Λ es un invariante en la transformación afín indicada, o también un invariante diferencial de las formas cuadráticas diferenciales [1], por-

(*) § I [2].

que lo son tanto la curvatura de Gauss como el área de la superficie. Como se trata de cuerpos convexos, se verifica

$$LN - M^2 > 0.$$

Esto supuesto, *¿cuál es la naturaleza de la superficie convexa de curvatura continua y volumen fijo, para la cual* Λ *adquiere el valor máximo?*

Blaschke, por procedimiento análogo al indicado para la misma cuestión en el plano, y con la natural complicación que lleva consigo, por existir dos variables independientes, logra demostrar que, aplicada la simetría de Steiner respecto de un plano a la superficie S_0 dada, la expresión Λ no decrece nunca, aumenta cuando la superficie no tiene un plano de simetría (oblicua u ortogonal) paralelo al elegido para hacer la simetría, y permanece inalterable cuando tal plano de simetría existe.

Llega, pues, laboriosamente a que, si existe un máximo, tal superficie ha de tener infinitos planos de simetría pasando por un punto, o sea que en cualquier dirección los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas deben estar en un plano, es decir, que la superficie debe ser un elipsoide conforme al siguiente

TEOREMA.—*Si existe una superficie convexa de curvatura continua y volumen dado, para la cual* Λ *adquiera el valor máximo, es un elipsoide*, puesto que si no lo es, aplicándole la simetría de Steiner, no variará el volumen, y dicha integral crecerá.

Tanto por ser un poco laborioso el procedimiento que emplea, como por haber ya expuesto su correspondiente en la cuestión plana, seguiremos otro camino que nos lleve a la existencia del máximo, al mismo tiempo que demuestra el teorema anterior de Blaschke.

Para ello recurrimos principalmente a una sucesión indefinida de simetrías de Steiner, a la llamada función $H(\alpha, \beta, \gamma)$ (*) y a la obra de Minkowski (**) que en esta materia bien puede calificarse de manantial de ideas fecundas y originales. Demostramos, en primer término, la cuestión, pasando de un cuerpo cualquiera convexo de curvatura continua a uno de revolución; con lo cual, queda resuelta la cuestión, ya que el paso de la superficie de revolución a un elipsoide, se reduce al problema en el plano.

Aplicando alternativa e indefinidamente a una superficie S_0 convexa de curvatura continua, la simetría de Steiner, según dos planos cuya aris-

---

(*) § II [3].
(**) *Opera citata.* Volumen und Oberfläche.

ta pase por un punto interior del cuerpo, análogamente a lo indicado en el (§ II, 4), se obtiene una sucesión de cuerpos (de la misma naturaleza que el definido por S_0), que tiene por límite otro S de revolución conforme a la construcción directa de Schwarz, y se verifica el siguiente

Teorema.—*A la sucesión*

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2 \ldots, \quad S_n \ldots$$

corresponde otra

$$\Lambda_0, \quad \Lambda_1, \quad \Lambda_2, \ldots, \quad \Lambda_n \ldots$$

tal que

$$\Lambda_0 \lesseqgtr \Lambda_1 \lesseqgtr \Lambda_2 \ldots \lesseqgtr \Lambda_n \ldots$$

y siendo

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

se verifica

$$\Lambda \text{ del} \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \text{de } \Lambda \text{ de } S_n;$$

es decir,

$$\Lambda_S = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n,$$

lo cual entraña la continuidad del funcional Λ_n $(n = 0, 1 \ldots, n \ldots)$.

Para demostrar este doble teorema, antepongamos el siguiente, de Minkowski (*Gesammelte math. Abhand.*, Bd. II. pág. 135.)

El volumen de un cuerpo convexo de curvatura continua es

$$V = \frac{1}{3} \int H(\alpha, \beta, \gamma)(RT - S^2) d\omega,$$

donde $H(\alpha, \beta, \gamma)$ es la llamada función de contacto, y R, S, T las derivadas segundas de $z = f(x, y)$, representante de la superficie, y $d\omega$ el elemento de área sobre la esfera de radio unidad, sobre la que se supone hecha la representación de la superficie. Este teorema que Minkowski (loc. cit.) desarrolla con toda originalidad y rigor, es un poco fatigoso (dada la complicación natural de las fórmulas en geometría diferencial) para expresar todo en función de $H(\alpha, \beta, \gamma)$, cuando se quiere llegar a las fórmulas prácticas de cálculo de volúmenes aplicables a la representación esférica de las superficies; mas para nuestro objeto se simplifica mucho y se reduce a una consideración elemental.

Como en esta clase de superficies, en cada uno de sus puntos hay un plano de contacto (Stützebene) y uno solo, el cual es precisamente plano tangente a la superficie; si consideramos un punto interior del cuerpo como origen de coordenadas, y suponemos proyectado desde él un elemento cualquiera diferencial de área sobre la superficie, resulta que la función $H(\alpha, \beta, \gamma)$ no es otra cosa que la altura de dicha pirámide de base infinitesimal. Por otra parte, de la misma definición de curvatura de Gauss (§ II, 5), siendo $d\sigma$ y $d\omega$ los elementos diferenciales de área en la superficie y esfera respectivamente, se sabe que

$$d\sigma = (RT - S^2)d\omega,$$

y, por consiguiente,

$$dV = \frac{1}{3}Hd\sigma = \frac{1}{3}H(RT - S^2)d\omega,$$

$$V = \frac{1}{3}\int H(RT - S^2)d\omega. \qquad [1]$$

Consideremos ahora la sucesión infinita $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n \ldots$ uniformemente acotada (puesto que está contenida en una esfera de radio finito cuyo centro sea el origen de coordenadas interior al cuerpo, y cuyo diámetro sea, por ejemplo, el diámetro del cuerpo dado): en virtud de (§ II 4) es un conjunto tal, que existe una sucesión uniformemente convergente hacia un cuerpo convexo de curvatura continua: este cuerpo límite, como hemos visto en el párrafo II, 4 (en el espacio es la misma cuestión), es precisamente el de revolución que se obtiene directamente aplicando la simetría de Schwarz.

Si, pues, la sucesión de cuerpos

$$C_0,\ C_1,\ C_2 \ldots,\ C_n \ldots$$

a los cuales corresponde la de superficies

$$S_0,\ S_1,\ S_2 \ldots,\ S_n \ldots$$

converge uniformemente al cuerpo límite;

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C$$

de modo que también

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S;$$

en virtud de lo dicho en el (§ II, 2 y 3) acerca de la *proximidad* de cuerpos con un punto interior común, tendremos las siguientes relaciones:

$$N(C_0, C) \geqq N(C_1, C) \geqq N(C_2, C) \ldots \geqq N(C_n, C) \ldots$$
$$\lim_{n\to\infty} N(C_n, C) = 0, \qquad [2]$$

a las cuales corresponden las siguientes funciones (cuyos índices se corresponden con los de las superficies)

$$H_0,\ H_1,\ H_2 \ldots,\ H_n \ldots,$$

entre las que, en virtud del párrafo II, 3, se verifican las relaciones
$|H_0 - H| \lesseqgtr N(C_0, C)$; $|H_1 - H| \lesseqgtr N(C_1, C) \ldots$; $|H_n - H| \lesseqgtr N(C_n, C) \ldots$
Mas como la [2] es un funcional que decrece, y converge uniformemente hacia cero, las cantidades

$$|H_0 - H|,\quad |H_1 - H|,\quad |H_2 - H| \ldots,\ |H_n - H|$$

forman otro funcional que también decrece y converge uniformemente a cero, y, por consiguiente, como las funciones H_0, $H_1, \ldots$, $H_n \ldots$ son positivas, se verifica

$$H_0 \gtreqless H_1 \gtreqless H_2 \ldots \gtreqless H_n \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} H_n = H.$$

Ahora bien: la función $H(\alpha, \beta, \gamma)$ de una cualquiera de las superficies S_i $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ es continua y positiva; $(RT - S^2)$ lo es también por hipótesis, pues se suponen continuas hasta las segundas derivadas, y la curvatura es positiva; V, de la fórmula [1], es una constante; por consiguiente, si

$$(RT - S^2)_0,\quad (RT - S^2)_1,\quad (RT - S^2)_2 \ldots,\quad (RT - S^2)_n \ldots$$

son los valores correspondientes a H_0, H_1, H_2, ... H_n ... en la fórmula [1], se verifica

$$(RT - S^2)_0 \lesseqgtr (RT - S^2)_1 \lesseqgtr (RT - S^2)_2 \ldots \lesseqgtr (RT - S^2)_n \ldots, \qquad [3]$$

lo cual nos dice que la curvatura no decrece con la simetria de Steiner.

Además,

$$H_n(RT - S^2)_n = H(RT - S^2) = \text{Const.},$$

y

$$\lim_{n \to \infty} H_n = H;$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} (RT - S^2)_n = RT - S^2,$$

lo cual nos dice que el funcional [3] goza también de la propiedad de la continuidad, quedando, por consiguiente, demostrada la segunda parte de nuestro teorema; es decir,

$$\Lambda_s = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n.$$

Visto que aplicando indefinidamente, en la forma dicha, la simetría de Steiner, y pasando al límite (lo cual equivale a aplicar directamente la simetria de Schwarz), se obtiene un cuerpo de revolución convexo y de curvatura continua, del mismo volumen, menor área y mayor valor Λ, resta demostrar que entre tales cuerpos de revolución de volumen fijo, el elipsoide goza de la propiedad de que Λ adquiere el valor máximo.

Por tratarse de una superficie de revolución, el problema no es con dos variables independientes, sino con una sola, como ocurría con la misma cuestión en el plano al tratar de la elipse (§ III); porque se reduce a encontrar la curva meridiana de la superficie que cumpla tal condición de máximo. Se reduce, pues, en realidad, a una repetición del teorema de Blaschke acerca de la elipse en dicho párrafo, y, por consiguiente, *el elipsoide es la superficie convexa de curvatura continua y volumen dado, para la cual la integral de superficie* Λ *adquiere el valor máximo.*

Calculando para el elipsoide el valor de $\int \sqrt[4]{\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2}\, du dv$, se halla fácilmente

$$\Lambda = 4\pi b \sqrt{c},$$

y como el valor de su volumen es

$$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi b^2 c,$$

resulta de ambas

$$\Lambda^2 = 16\pi^2 b^2 c,$$

$$12\pi \mathrm{V} = 16\pi^2 b^2 c;$$

luego

$$12\pi \mathrm{V} - \Lambda^2 = 0$$

para el elipsoide; y como para otro cuerpo cualquiera Λ es menor, resulta la importante expresión

$$12\pi \mathrm{V} - \Lambda^2 \geqq 0$$

para cualquier cuerpo convexo de curvatura continua, teniendo lugar el signo igual para los elipsoides.

§ V

APÉNDICE

Antes de hallar la solución completa expuesta, habíamos encontrado la solución del problema en el paso al límite de la simetría de Steiner, para una clase especial de superficies que Monge llamó *Modanate* (*) caracterizadas por tener (a semejanza de las superficies de revolución) un sistema de líneas de curvatura en planos paralelos.

Sin detenernos en desarrollar el problema, indicaremos ligeramente la idea que habíamos seguido en la solución. Considérese al efecto n suficientemente grande para obtener en la serie indefinida de simetrías de Steiner, una superficie S_n que se aproxime cuanto queramos a la de revolución S, que es su límite. Por tanto, los radios de curvatura de las secciones principales de la superficie S_n serán $r_1 \pm \varepsilon_1$; $r_2 \pm \varepsilon_2$, siendo ε_1 y ε_2 tan pequeños como se quiera, y, por tanto, también será tan pequeña como queramos la diferencia de las curvaturas de S_n y de S. Mas observemos que para la validez de este razonamiento, es preciso que en la sucesión infinita de simetrías de Steiner, las líneas de curvatura se cambien en líneas de curvatura, que en el límite sean por consiguiente las líneas de curvatura de la superficie de revolución.

Esto se verifica en las superficies que tengan un sistema de líneas de curvatura en planos paralelos; pues tomando como arista de los planos sobre los que se hacen las simetrías de Steiner, una recta perpendicular a dichos planos paralelos, las líneas correspondientes de curvatura tienen evidentemente como límite, las circunferencias de la construcción de Schwarz; por tanto, el otro sistema de líneas de curvatura que son perpendiculares a las del primero, tendrán como límite el segundo sistema de las líneas de curvatura de la superficie límite S. Es, pues, lícito en las superficies *Modanate* el paso al límite en la sucesión de funciones.

$$\Lambda_0 \overline{\gtrless} \Lambda_1 \overline{\gtrless} \Lambda_2 \cdots \overline{\gtrless} \Lambda_n;$$

es decir, que se verifica

$$\Lambda_S = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n .$$

(*) Su estudio completo puede verse en Bianchi, *Geom. diferent.*, edición alemana, pág. 145; italiana, 176.

Notas sobre el género "Cebus,,

por

Angel Cabrera

Desde el punto de vista sistemático, uno de los géneros más embrollados del orden *Primates,* por no decir de todos los mamíferos, es, indudablemente, el género *Cebus.* La gran variabilidad individual a que, dentro de la especie, están sujetos estos monos americanos; el gran parecido que, por otra parte, hay entre especies realmente distintas; el haber sido muchas de ellas descritas sobre ejemplares cuya procedencia se ignoraba, y casi todas en una época en que nadie hacía caso de los caracteres craneanos, y en la descripción de los externos se solía pecar más bien por defecto que por exceso de detalles, son las causas principales de la confusión que todavía reina acerca del número de formas, de los caracteres que las distinguen y de los nombres que les corresponden. Parecía ser de esperar que, con la publicación de la *Review of the Primates,* del recientemente fallecido doctor Elliot, acabasen de una vez todos los errores y dudas acerca de esta cuestión; pero desgraciadamente no ha sido así; antes al contrario, éste es precisamente uno de los puntos flacos de tan magnífico libro. La clave que en él se da para las especies es sumamente defectuosa, apareciendo muy separadas especies tan parecidas entre sí como *Cebus chrysopus* y la que el autor llama *C. albifrons* (realmente el *C. gracilis* de Spix); y juntas, en cambio, otras muy diferentes, como *C. futuellus* y *C. macrocephalus.* Para distinguir al referido *albifrons* de la especie *capucinus,* se dice que el primero tiene «crown white» y la segunda «crown black», en cuya comparación hay error; pues si por «crown» se entiende lo que en español llamamos coronilla, el primero de estos monos la tiene siempre de color oscuro; y si se trata de la parte anterosuperior de la cabeza, en los dos es blanca. En las sinonimias hay también confusiones lamentables, reuniéndose especies que se diferencian hasta en el esqueleto; y se da el caso de que *C. griseus* Desmarest aparece como sinónimo de *C. apella*, y *C. barbatus* Geoffroy como sinónimo de *C. flavus;* siendo así que aquellos dos nombres fueron aplica-dos por sus autores respectivos a un mismo animal, el «sajou gris» de Buffon.

Es para mí muy doloroso tener que hablar así de la labor de un naturalista que nos ha dejado obras de tanto valor para la Zoología sistemática como son sus monografías de los *Felidæ,* de los *Phasianidæ* y de los *Bucerotidæ*; mas si lo hago, no es sino animado por el deseo de evitar que otros puedan incurrir en error si, al estudiar ejemplares del género en cuestión, se dejasen llevar de una excesiva confianza en una obra justamente celebrada, y a la vez, para que se aprecie mejor la necesidad de una revisión seria y concienzuda de estos cuadrumanos.

No me encuentro yo por ahora, ciertamente, en disposición de llevarla a cabo, pues ello es cosa que exigiría examinar tipos conservados en museos que hoy son punto menos que inaccesibles. Sin embargo, al hacer el estudio de los mamíferos obtenidos en la famosa expedición al Pacífico, entre los que figuran numerosos monos sudamericanos, me he visto en el caso de examinar y comparar todos los materiales del género *Cebus* existentes en el Museo Nacional de Ciencias Naturales y en algunas otras colecciones españolas, revisando al mismo tiempo la bibliografía de este género y las muchas observaciones que sobre ejemplares vivos o en museos tenía en cartera, y creo puede ser útil el publicar algunos de los resultados de este trabajo, que acaso contribuyan a facilitar el estudio de un grupo tan complicado.

DE LOS CARACTERES ESPECÍFICOS DE LOS *CEBUS*

Aparte de los artículos, algunos de ellos muy notables, consagrados a este género en diferentes Diccionarios de Historia Natural, sólo conozco dos trabajos que tengan por único objeto una revisión del mismo. Ambos fueron publicados hace ya más de medio siglo: uno, por Burmeister, en 1854 [6], y el otro, por Gray, en 1865 [28]. El primero de estos autores considera como caracteres principales para distinguir las especies el número de vértebras y la forma del cráneo. Sin duda alguna son, en efecto, dos caracteres de gran importancia; pero, por lo que a las vértebras se refiere, hay que tener presente que, tratándose de animales exóticos, el especialista en mamíferos rara vez tiene ocasión de examinarlas, por ser la costumbre que a los museos lleguen solamente las pieles y los cráneos. En cuanto a estos últimos, pueden, desde luego, suministrar datos muy importantes para la diferenciación específica, por ser su forma bastante constante en cada especie y existir cierta relación entre ella y los caracteres externos. Así, los *Cebus* que tienen el pelo de la cabeza corto, suelen poseer un cráneo dolicocéfalo, sin cresta sagital y con crestas temporales poco salientes; mientras en las especies que tienen el pelo de la cabeza largo y eréctil, el cráneo es, generalmente, braquicéfalo y presenta una cresta sagital o, en su defecto, crestas temporales bien marcadas. Por desgracia, la mayoría de las especies fueron descritas en una época en que apenas se concedía importancia a los tipos, los cuales, o se perdían, o eran naturalizados con el cráneo dentro de la piel, de manera que no se puede pensar en un estudio comparativo serio de los cráneos de dichos tipos.

Gray acudió, para distinguir las especies, a un carácter externo, cual es la disposición del pelo de la cabeza, y atendiendo a él, dividió los *Cebus* en seis grupos, en esta forma:

I. Pelos de la coronilla hacia atrás, echados hacia atrás alrededor de la cara, formando una pequeña cresta sobre cada ceja.

II. Pelos de la coronilla echados hacia atrás; los de los lados de la mancha coronal oscura, alargados en el estado perfecto, formando dos crestas o mechones, más o menos tiesos.

III. Pelos de la coronilla cortos, hacia atrás, aplanchados, sin formar ninguna cresta.

IV. Pelos de la coronilla alargados, tiesos, formando una sola cresta central, más o menos cónica.

V. Pelos de la coronilla irradiando de un centro; por delante, dirigidos hacia delante y formando con las cejas una cresta transversal.

VI. Pelos de la coronilla alargados, tiesos, divergiendo en todas direcciones, formando una especie de taza.

Estas definiciones, que por cierto no se distinguen por su claridad, tendrían algún valor, como ha dicho muy bien Elliot, si se basasen en el examen de ejemplares vivos o, por lo menos, de pieles muy escrupulosamente preparadas. No siendo así, cabe que la dirección del pelo haya cambiado al contraerse la piel, o como resultado del arte del taxidernista, según el mismo Gray confiesa en su trabajo. Por otra parte, sólo en los individuos adultos puede apreciarse bien este carácter, que, generalmente, varía con la edad, y aun a veces puede ofrecer variaciones individuales, como ocurre en *Cebus capucinus,* especie que en una misma localidad, y en la misma edad, puede tener la frente con pelo muy corto y liso, o con una cresta transversal de pelos divergentes [17]. Los inconvenientes de una clasificación exclusivamente basada en los pelos cefálicos, demuéstranse por los errores e inexactitudes que el mismo trabajo de Gray contiene. Por ejemplo: *C. chrysopus,* que no tiene cresta de pelos ninguna aparece en el quinto grupo; *C. vellerosus,* que posee una especie de cresta o diadema de pelos tiesos, figura en el segundo, cuya definición habla de dos mechones o crestas laterales; y *C. leucogenys* y *C. cirrifer,* que son la misma especie, están incluídos en dos grupos distintos: uno en el primero y otro en el segundo.

No es, pues, posible establecer una distinción entre las especies basándose exclusivamente en la forma del cráneo ni en la de los mechones o crestas de pelo que, con frecuencia, adornan la cabeza; sino que estos caracteres, muy dignos, de todos modos, de atención, deben considerarse en combinación con los de coloración y longitud del pelaje en general. Todos los *Cebus* tienen el pelo suave, pero fuerte y laso; no blando y afelpado como en *Aotus,* ni lanudo como en *Lagothrix,* aunque tampoco basto y lacio como en *Ateles;* pero mientras en las especies que viven en los valles o en las costas de las regiones intertropicales el pelo del cuerpo es relativamente corto, no llegando a 50 mm. de longitud, las especies de montaña y las que habitan al Sur del trópico de Capricornio tienen el pelo muy largo, de 60 a 70 mm., pudiendo calificarse de animales realmente velludos. En cuanto a la coloración, es verdad que en una misma especie puede variar mucho de matiz; pero la distribución de los colores es, en general, muy constante dentro de cada forma. Así, en una especie o subespecie que tenga, generalmente, las manos y los pies de un pardo oscuro, y el cuerpo de un pardo claro, las extremidades podrán ser enteramente negras u ofrecer un matiz sólo un poco más intenso que el del cuerpo; pero nunca serán más pálidas que éste. Esta constancia en el modo de estar repartidos los colores, se observa muy especialmente en la cabeza. Todos los *Cebus* tienen la parte superior de la cabeza oscura, con frecuencia negra; pero la extensión y forma de la parte oscura varía en las distintas especies, pudiendo presentar tres o cuatro aspectos diferentes. En unas especies toda la cabeza, por encima, es oscura, estando este matiz a veces limitado anteriormente por una banda superciliar blanca o amarillenta, que penetra un poco hacia las sienes. En otras, la porción oscura sólo ocupa el centro de la cabeza, avanzando en forma de cuña entre dos porciones pálidas, hasta terminar en punta sobre la raíz de la nariz. Esta disposición particular, que en lo sucesivo designaré bajo el nombre de «casquete cuneiforme», ha sido comparada por Gœldi [26], bastante acertadamente, con la forma de una pera. Hay otras especies que tienen la parte oscura más reducida todavía, formando sólo un casquete redondeado, a guisa de solideo de sacerdote; a veces con una estrecha línea del mismo color, bajando por en medio de la frente desde el borde anterior del casquete hasta el entrecejo. Gœldi compara esta figura con la del remo usado por los indios del Amazonas. Un ejemplo de la primera manera de estar distribuído el color oscuro sobre la cabeza, lo tenemos en *C. apella* L.; de la segunda, en *C. macrocephalus* Spix, y de la tercera, en *C. capucinus* L. Una especie *(C. variegatus* Geoffr.) presenta con frecuencia lo que podríamos considerar como una exageración de este tercer tipo; la porción oscura se encuentra en ella sumamente reducida, dejando casi toda la cabeza de color pálido.

Estas diferencias, en las que los zoólogos no parecen haber puesto la atención que realmente merecen, guardan cierta relación con la disposición del pelo sobre la cabeza. Cuando ésta es enteramente negra por encima, suele haber, en la edad adulta, dos crestas o mechones laterales. Las especies que presentan un casquete cuneiforme oscuro, generalmente sólo tienen tiesos los pelos del centro de la cabeza; y en los que no hay más que un casquete oscuro redondeado, el pelo es liso, o a lo sumo existe una especie de diadema frontal de pelos tiesos.

Antes de intentar una clave basada en los caracteres de que nos hemos ocupado, conviene discutir la verdadera posición de algunas especies y su sinonimia.

CEBUS APELLA, NIGRIVITTATUS Y *OLIVACEUS*

Desde que Linné publicó la descripción original de *Simia apella* [32], basándola sobre un ejemplar previamente representado en su *Museum Regis Adolphi Friderici,* todos los autores están conformes en designar bajo este nombre una misma especie, la que Buffon y Daubenton llamaron «sajou brun» [5], y F. Cuvier representó con la denominación de «sai femelle». No cabe la menor duda de que a este animal se refieren las mencionadas descripción y figura linneanas. Los caracteres distintivos de la especie son los siguientes:

Pelaje corto (menos de 50 mm.), sobre la cabeza en crespado por igua en los individuos jóvenes, como los pelos de un cepillo, y tendiendo en los muy adultos a formar dos crestas laterales por encima de las orejas. Color general, pardo-rojizo oscuro; algo más oscuro en las espaldas, y más claro y algo amarillento en el pecho. Antebrazos, parte anterior de los muslos, piernas, las cuatro extremidades y la cola, negros. Toda la parte superior de la cabeza, negra también, descendiendo este color por los lados, delante de las orejas, en una zona estrecha, hasta detrás de la barbilla. Una estrecha banda frontal blancuzca o blanca amarillenta, y algunos pelos blancos en la barbilla. El colorido general puede variar mucho. En un gran número de ejemplares, Gœldi [26] ha encontrado unos pardo-oscuros, casi fuliginosos; otros, de un rubio ferruginoso, algunos amarillentos o pajizos, y uno casi negro; pero la distribución de los colores claros y oscuros es la misma siempre.

El cráneo de *C. apella* es más bien braquicéfalo que dolicocéfalo, y presenta crestas temporales bastante marcadas. Las vértebras lumbares son en número de cinco.

Esta especie habita las Guayanas, por lo menos en el litoral, y el bajo Amazonas con sus afluentes, llegando hasta los límites del Estado de Maranhão, según Gœldi. A ella hay que referir el *Simia trepida* de la duodécima edición del *Systema Naturæ,* basado en el «mono de cola fosca» de Edwards, que indudablemente era un ejemplar pálido de *apella.* La distribución del color negro sobre la cabeza, la banda superciliar blancuzca y la cola y extremidades negruzcas, unidas a la circunstancia de proceder el animal de Surinam, lo demuestran claramente. Aun cuando se ignora su punto de origen, creo que también pertenece a la misma especie el *C. hypomelas* de Pucheran [35].

En 1909, Elliot confundió con *C. apella* el mono que casi todos los autores han llamado equivocadamente *C. capucinus;* y la misma lamentable confusión se observa en su *Review of the Primates,* donde dicho autor afirma concretamente: «El *Simia apella* Linné, descrito y figurado en el *Museum Regis Adolphi Friderici,* p. 1, lám. I, 1754, es el animal generalmente conocido por los autores como *Cebus capucinus.*» No hay tal cosa. El *C. capucinus* de los autores, no de Linné, o sea el «sai» de Buffon y Daubenton, y de Audebert [2], vive en la misma región que el *C. apella,* pero es muy distinto de éste. Su pelaje es también pardo, pero generalmente menos rojizo. Gœldi lo compara al «umbrinus» de la *Chromotaxia* de Saccardo. En los miembros y la cola, este color pasa a ceniciento negruzco-oscuro, y las cuatro extremidades y la punta de la cola son más oscuras todavía, a veces casi negras. Los lados de la frente y de la cara, hasta las orejas, son blanco-amarillentos, sin ninguna zona oscura; y la parte negra de encima de la cabeza forma un casquete cuneiforme, a veces muy estrecho. En los individuos muy adultos, los pelos de este casquete están erizados, formando copete.

Gœldi [26] ha dado una excelente descripción de esta especie y otra del verdadero *C. apella,* ambas sobre numerosos ejemplares, y en ellas se ven claramente las diferencias exteriores entre ambos monos. En cuanto a sus caracteres osteológicos, tampoco cabe confundirlos. El «sai», o mal llamado *capucinus*, tiene seis vértebras lumbares, y su cráneo es más alargado que el de *C. apella* y con las crestas temporales menos salientes.

Desde luego, Elliot está en lo cierto al decir que este mono no puede seguir llamándose *C. capucinus;* pero el error que se venía cometiendo al llamarle así fué ya señalado hace más de medio siglo por Dahlbom [9], que dió a la especie en cuestión el nombre de *Cebus pucherani.* Así debiera llamársele si algunos años antes no hubiera descrito Wagner [42] como *C. nigrivittatus* un ejemplar obtenido por Natterer en el río Branco, hacia la región de Porocotos, que evidentemente pertenece a la misma especie. Este nombre, *nigrivittatus,* debe ser, por consigniente, el del mono generalmente llamado, desde Erxleben acá, *C. capucinus,* el cual no puede, en manera alguna, confundirse con el *C. apella.* Probablemente ésta es también la especie que Gray llamó más tarde *C. annellatus.* De ella dió Audebert una figura bastante aceptable, y F. Cuvier dos, bajo los nombres de «sajou mâle» y «sajou brun, femelle». La primera de estas dos representa un ejemplar de pelaje pálido. F. Cuvier creyó que era el *C. griseus* de Desmarest; pero este nombre es el de otra especie, como más adelante veremos. Reichembach estableció sobre la misma figura su *C. paraguayanus* [36]; pero este nombre, además de ser posterior a *nigrivittatus* y a *pucherani,* resulta anulado por el *C. capucinus,* var. *paraguayanus* de Fischer, que es el mono paraguayo decrito por Azara bajo el nombre de «cai».

El *Cebus apiculatus* de Elliot [15] y el *C. apella brunneus* de Allen [1] son, realmente, subespecies de este mono de casquete cuneiforme, no del *C. apella,* al menos juzgando por las descripciones. Ambos son de Venezuela; el primero del bajo Orinoco y el segundo de la región al Este del golfo de Maracaibo.

En las Guayanas, además de *apella* y *nigrivittatus,* hay un tercer *Cebus,* parecido al segundo por la distribución de los colores, pero con el pelaje más largo y lacio y los hombros fuertemente lavados de amarillo. Hace años hubo en la Casa de Fieras del Retiro un ejemplar de este aspecto, que decían traído de Cayena, y que se asemejaba mucho al «sai, variété B» de Audebert [2]. Yo creo que, tanto el mono representado por este autor, como el que yo vi en cautividad, pertenecían a la especie llamada por Schomburgk *Cebus olivaceus* [38], cuya localidad típica son los montes Roraima, en la Guayana inglesa. El pelaje largo parece indicar un animal de montaña; la extensión del color oscuro sobre la cabeza, el matiz amarillo que predomina en el cuarto delantero, el tono pardo-rojizo de la superficie abdominal, las extremidades y cola oscuras, son los mismos en *olivaceus* y en aquellos ejemplares, salvo aquellas pequeñas diferencias que no deben sorprender de animales tan sujetos a la variación individual; las figuras de *olivaceus,* en fin, publicadas por Brehm, tienen un notable parecido con la de Audebert. Este autor no indica la procedencia de su ejemplar; pero Desmarest, que lo describió como *C. barbatus* [12], le asigna por patria la Guayana.

Según Pucheran [35], el *C. olivaceus* es el mismo mono más tarde llamado *C. castaneus* por I. Geoffroy Saint-Hilaire [22], que hizo su descripción sobre tres ejemplares. Elliot, que vió uno de estos cotipos, adquirido en Cayena, hace de él una descripción que sin dificultad puede aplicarse a la lámina de Audebert: «Pequeña mancha negra triangular en la coronilla... Hombros y parte anterior de los brazos hasta los codos, amarillo-claro; resto de los brazos hasta el medio del antebrazo por fuera, amarillo de oro... Manos negruzcas... Partes inferiores, castañas», etc.

Tenemos, pues, tres monos con caracteres análogos, y procedentes los tres de la Guayana: el «sai, variété B» de Audebert, o *C. barbatus* de Desmarest, el *C. olivaceus* de Schomburgk y el *C. castaneus* de I. Geoffroy. Si, como parece evidente, los tres son uno mismo, el nombre *olivaceus* es el que debe llevar la especie, pues *barbatus* lo empleó ya E. Geoffroy para otro *Cebus* ocho años antes que Desmarest lo usase para éste.

En resumen: los diferentes nombres que Elliot reúne en la sinonimia de *Cebus apella*, deben repartirse entre tres especies distintas, todas ellas propias de las Guayanas, y dos, por lo menos, también del bajo Amazonas. Al *C. apella* L. corresponden *C. hypomelas* Puch., *C. fallax* Schleg. y, probablemente, *Simia trepida fulvus* Kerr, y además, hay que añadir *Simia trepida* L. Los nombres *capucinus* Erxl. (no L.), *griseus* F. Cuv. (no Desm.), *nigrivittatus* Wagn., *pucherani* Dahlb., *paraguayanus* Reich. (no Fisch.) y *annellatus* Gray, pertenecen al «sai» de Buffon, o *Cebus nigrivittatus,* y *olivaceus* Schomb. constituye una tercera forma, de la que son sinónimos *barbatus* Desm. (no Geoffr.) y *castaneus* I. Geoffr. *Cebus griseus* Desm. no corresponde a ninguna de las tres especies.

EL GRUPO *ALBIFRONS*

Schlegel [37], Elliot y otros autores han reunido, bajo el nombre de *Cebus albifrons,* varios monos de este género, ciertamente parecidos entre sí, pero que, sin embargo, pueden distinguirse perfectamente unos de otros. El único carácter externo común a todos ellos, consiste en tener blancos o de color muy pálido toda la frente y los lados de la cara hasta las orejas, y en la coronilla un casquete redondeado negro o muy oscuro, desde el cual baja casi siempre una línea por el centro de la frente hasta el entrecejo; pero este carácter lo encontramos también en *capucinus* L., que nadie confunde con este grupo.

Humboldt [30] describió su *C. albifrons* sobre ejemplares vivos del alto Orinoco, y habla de ellos como de una especie gris pálida, con las extremidades y la punta de la cola más oscuras, y la cara gris azulada. Que yo sepa, en ningún museo hay ningún ejemplar que responda a esta descripción, de cuya exactitud, sin embargo, no hay motivos para dudar.

En 1823, Spix [40] describió como *C. gracilis* un *Cebus* del alto Amazonas, que luego ha sido generalmente considerado como sinónimo de *albifrons,* pero que no ofrece ninguno de los caracteres asignados a éste, aparte de la disposición de los colores sobre la cabeza. He visto bastantes ejemplares de esta forma, entre ellos siete que Jiménez de la Espada trajo de la expedición al Pacífico, y todos ellos tienen la cara de color de carne y el pelaje rojizo, amarillento o pardo-claro, con las extremidades y la punta de la cola más pálidas, jamás más oscuras. Tal vez cuando se puedan comparar ejemplares del alto Orinoco con los del alto Amazonas, resulten idénticos *gracilis* y *albifrons;* pero parece poco verosímil que lo sean, y por ahora no hay ningún fundamento para asegurarlo.

C. gracilis penetra por la cuenca del alto Amazonas y del Ucayali hasta el centro del Perú. Me parece idéntico a esta especie el *C. flavescens cuscinus* de Thomas, cuyo tipo he visto en el Museo Británico. El doctor Festa ha obtenido en el Ecuador, y en las mismas localidades, varios ejemplares, de los cuales unos han sido clasificados como *albifrons*, y otros como *cuscinus* [17]; pero, como el mismo distinguido naturalista dice, si estas dos formas no fuesen una sola, sería muy extraño que, siendo tan afines, habitasen en la misma región. También es *C. gracilis* el mono llamado *C. albifrons* por Tschudi en su *Fauna Peruana,* mientras Pöppig y Cornalia llamaron *C. griseus* a la misma especie, que encontraron, respectivamente, en la provincia de Mainas y en el río Napo.

Muy parecido a *gracilis* es el *C. chrysopus* de F. Cuvier, incluído también en la sinonimia de *albifrons* por Schlegel; pero que otros autores, y entre ellos Elliot, tienen por buena especie. Uno de los ejemplares de *gracilis* de nuestro Museo Nacional, se parece mucho a la figura original *chrysopus*. Según Elliot, esta especie se distingue por ser más pequeña y por sus extremidades de color rojizo de ocre. La localidad típica se ignora; pero en el Museo de París hay varios ejemplares procedentes de Colombia, y Schlegel cita, con el nombre de *albifrons,* unos del mismo país en el Museo de Leiden que tienen también las extremidades rojizas y deben pertenecer a la misma especie. Puede, pues, admitirse

C. chrysopus como una forma probablemente propia de la fauna colombiana tropical, acaso de los valles del Cauca y del Magdalena. Hablando de esta especie, Pucheran [35] menciona un ejemplar de color menos brillante y con las extremidades pardas, en vez de rojas, procedente de Guayaquil. Este individuo pudiera ser realmente *C. gracilis,* o más bien, idéntico al *C. æquatorialis* de Allen [1], especie propia del litoral árido del Ecuador, y que yo no conozco más que por la descripción, de la que se deduce que difiere de *gracilis* por tener las extremidades y la cola más oscuras que el color general.

También suelen incluirse en la sinonimia de *albifrons,* y deben excluirse de ella, el *C. versicolor* de Pucheran [34] y el *C. leucocephalus* de Gray [28], que, en mi concepto, son el mismo animal. Los dos proceden de la misma localidad, Bogotá, y los dos se asemejan en su casquete redondeado, su pelaje largo y oscuro, sus extremidades negruzcas y su cola terminada en un matiz pálido. En el Museo Nacional tenemos un topotipo bastante bien conservado y con el cráneo aparte, y, desde luego, puedo afirmar que no es igual a *gracilis* ni a *chrysopus.* Su pelaje es más largo (más de 60 mm. en el dorso) y más tupido, y su coloración, aparte de la frente, mejillas, garganta y parte alta del pecho, que son blancas, bastante uniforme, de un pardo Van-Dick que oscurece en los miembros, y pasa casi a negro en manos y pies. La cola, en cambio, palidece en su mitad terminal. El cráneo se parece al de *gracilis;* pero tiene el plano facial más vertical, ofreciendo una semejanza mayor todavía con el de *C. malitiosus* Elliot [15, 16], de Bonda (Colombia).

Esta última especie, aunque evidentemente pertenece también al grupo que nos ocupa, por sus caracteres externos difiere igualmente del *C. chrysopus* y del *C. versicolor* o *leucocephalus.* Como éste, es en general de color oscuro, pero tiene la punta de la cola oscura también, y, en cambio, los hombros y los brazuelos son de un amarillo pajizo. Debemos, pues, considerar estos tres monos como tres formas bien distintas, que caracterizan otras tantas faunas de las reconocidas en Colombia por Chapman [7]. *C. versicolor* pertenece a la zona templada; *C. chrysopus* a la fauna cauco-magdaleniana, y *C. malitiosus* a la fauna caribe.

Osgood llama *C. apella leucocephalus* a los monos que viven junto al río Auraré, frente a Maracaibo; pero probablemente son *C. nigrivittatus brunneus;* por lo menos no puedo creer que pertenezcan a la especie *leucocephalus* de Gray, o sea *versicolor,* que parece exclusiva de los Andes colombianos.

CEBUS UNICOLOR Y EL LLAMADO *CEBUS FLAVUS*

Como acabo de decir, *C. flavescens cuscinus* Thos. no parece ser otra cosa que un *C. gracilis* de matices sombríos, y esto me ha hecho pensar más de una vez si el *C. flavescens* de Gray [28] no debería también referirse a esta especie. Elliot prefiere considerarlo, sin embargo, como el joven de *C. unicolor* Spix [40], y no hay ningún motivo para rechazar su opinión, puesto que, además de tratarse de un ejemplar joven, se ignora en absoluto la localidad típica. En cuanto a *unicolor,* aunque no he podido ver el tipo, me parece fácil de distinguir de *gracilis* y sus afines. Es un mono más robusto, más grande, pero con la cola más corta y de un color general bastante pálido, lavado de rojizo en el dorso, en la cola y sobre la cabeza, donde el matiz es sólo un poco más oscuro y se extiende bastante, sin formar casquete bien definido. Juzgando por la figura de Spix, los pelos de encima de la cabeza son algo tiesos, un poco como en los *C. apella* de mediana edad. Según los datos tomados por Elliot sobre el tipo, la longitud de la cabeza y el cuerpo es de 55 cm., y de 39 la de la cola. En *gracilis, chrysopus* y *malitiosus*, la cabeza y el cuerpo juntos no llegan a medio metro, y la cola es próximamente del mismo largo, o a veces un poquito más. Burmeister [6] piensa que *unicolor* es muy próximo al *C. macrocephalus* de Spix; pero, realmente, estas dos especies no se parecen ni en los matices ni en la distribución de los colores.

Más próximo a *unicolor*, si se juzga sólo por las descripciones, puede parecer el mono que Elliot describe como *Cebus flavus*, cuya historia resulta bastante confusa. El año 1812, en su memoria clásica sobre la clasificación de los cuadrumanos, describe Geoffroy tres especies de *Cebus* de pelaje pálido: *C. barbatus, C. flavus* y *C. albus.* El primero de ellos está basado en el «sajou gris» de Buffon y Daubenton [5], cuyo ejemplar tipo, de procedencia enteramente desconocida, describe el segundo de estos autores en los siguientes términos: «El pelo que rodeaba la cara era de un gris blancuzco; tenía sobre las mejillas pelos leonados; la punta de los del medio era negra; este color formaba una banda sobre cada mejilla; el pelo de detrás de la cabeza tenía también un color negro; el cuello por encima, el dorso, la cara externa del brazo, la del muslo y la primera porción de la cola, eran de color leonado teñido de pardo, porque cada pelo tenía leonado hacia la raíz, y pardo en la punta; el resto de la cola estaba mezclado de gris y de negruzco; la mandíbula inferior por debajo, los lados y cara inferior del cuello, el pecho, los lados del cuerpo y la cara interna del brazo y del muslo, eran leonados; lo bajo de las cuatro patas, los dedos y las uñas, tenían un color negruzco.» Yo no he visto ningún *Cebus,* ni aun en pintura, fuera de la figura que da Buffon, al que pueda aplicarse esta descripción. La zona negra de las mejillas impide identificarlo con *C. nigrivittatus,* con *C. olivaceus* o con cualquier especie del grupo *albifrons.* Tampoco parece ser *C. variegatus,* que tiene enteramente negros los miembros posteriores y mucha mezcla de negro en el dorso, ni el «cai» de Azara, cuyas manos están cubiertas de pelos blancuzcos. El hecho de llamarle «sajou gris», parece indicar cierta afinidad con el «sajou brun», que es el *C. apella.* Buffon hasta llegó a considerarlo como una simple variedad de éste, aunque las figuras son muy diferentes. Es necesario, en suma, o desechar desde luego la especie *barbatus* por indeterminable, o aceptarla como una forma distinta de las demás. Burmeister [6] creía que era un mono propio de las Guayanas y que habría que buscar en Surinam.

Cebus flavus fué establecido por Geoffroy sin otra base que una figura publicada por Schreber en la lámina XXXI, B de sus *Saugethiere,* en 1775, bajo el nombre de *Simia flavia,* y sin ninguna descripción ni dato alguno de localidad. Esta figura, que parece tomada de algún ejemplar mal disecado, representa un mono de color leonado-amarillo brillante, uniforme, con una banda frontal blancuzca y una cola muy delgada, como la de un mono del Antiguo Mundo. Por lo uniforme del pelaje se parece al *C. unicolor*; pero nada puede afirmarse por ser una estampa muy defectuosa, sin el menor valor científico ni artístico.

En cuanto a *C. albus,* es el nombre dado por Geoffroy a un ejemplar del Museo de París, afectado de albinismo y sin indicación de localidad, y por consiguiente, punto menos que indeterminable.

Por si no eran bastante vagas las indicaciones que sobre estas tres pretendida especies había dado su autor, en 1820 aumentó Desmarest las dificultades, quitando al «sajou gris» de Buffon el nombre de *C. barbatus,* para aplicárselo al «sai, variété B» de Audebert (que yo creo igual al *C. olivaceus* de Schomburgk), y llamando al primero *C. griseus* [12]. El mismo autor afirma que *C. albus* es el albino de su *barbatus,* o sea del mono representado por Audebert, y considera el *C. flavus* idéntico a una especie que él describe con el nombre de *fulvus.* Según parece, los ejemplares en que se basa esta descripción eran los mismos que hacia la misma época describió Kuhl conservándoles el nombre de *flavus,* y que estaban en el Museo de París. Como ha dicho muy oportunamente Schlegel, nadie puede asegurar que estos ejemplares y la *Simia flavia* de Schereber sean la misma cosa, tanto menos cuanto que se ignora la patria de aquéllos y de ésta; pero los autores, en general, los han considerado siempre como idénticos.

D'Orbigny, en su viaje a la América del Sur, obtuvo en Santa Cruz de la Sierra (Bolivia) un mono que creyó poder identificar con el *C. fulvus* de Desmarest [13]. La figura que de él publicó recuerda algo la de Schreber; representa un animal enteramente amarillo-leonado claro, con un casquete cuneiforme leonado-rojizo oscuro. Este es el primer dato de valor, por no decir el único, que tenemos de un mono de este tipo.

Lesson [31] consideró *flavus* y *fulvus* como la misma especie, a la que creyó oportuno dar un nuevo nombre, *Cebus brissonii*, y diputó por variedades de la misma el *C. unicolor* de Spix, el *C. fulvus* de D'Orbigny y el *C. albus* de Geoffroy. Para Burmeister [6], *flavus* es la edad muy adulta de su *C. capucinus* (= *nigrivittatus*), y *fulvus* una variedad de la misma especie. Schlegel, en fin, supone que *flavus* y *unicolor* pueden ser el mismo animal.

Elliot ha reunido los tres *Cebus* de Geoffroy, *barbatus, flavus* y *albus* como una sola especie, que designa con el nombre de «*Cebus flavus* E. Geoffroy», faltando a la ley de prioridad, según la cual habría que llamarla *C. flavius* (Schreber), o en su defecto, *C. barbatus*, puesto que este nombre se encuentra en el trabajo de Geoffroy dos páginas antes que el otro. Al describir esta «especie», Elliot dice que el tipo se conserva en el Museo de París, y hasta da una descripción de él, olvidando, sin duda, que *flavus* no fué descrito originalmente sobre ningún ejemplar, sino, como ya se ha dicho, sobre una mala figura de Schreber. El hecho de añadir al final: «Albinistic individual», me induce a creer que lo que realmente vió en París el ilustre zoólogo norteamericano fué el tipo de *C. albus*; es decir, un ejemplar anómalo y sin localidad exacta, y, por ende, inútil para la identificación de la especie. Pero lo más curioso es que el mismo autor dice haber visto también en aquel Museo el tipo de *barbatus,* siendo así que Geoffroy fundó esta especie sobre un mono descrito y figurado por Buffon y Daubenton teniendo a la vista un animal vivo. A decir verdad, no sé a qué ejemplar se pueda referir Elliot. La descripción que de él da, no corresponde de ningún modo al «sajou gris», verdadera base de *barbatus*.

En resumen: creo que puede admitirse como buena especie *C. fulvus,* descrito por Desmarest sobre ejemplares de origen desconocido, y más tarde encontrado en Bolivia por D'Orbigny; que *C. barbatus* y *C. flavius*, o *flavus*, pueden considerarse como sinónimos posibles, con duda, de la misma especie, siendo realmente indeterminables mientras alguna feliz casualidad no nos permita descubrir, olvidados en alguna ignorada colección, los verdaderos tipos del «sajou gris» y de la *Simia flavia,* y que *C. albus*, en fin, es también indeterminable, pudiendo ser lo mismo un albino de esta especie que de *C. unicolor* o de *C. olivaceus.*

LOS *CEBUS* DEL BRASIL ORIENTAL

He visto, en museos o en colecciones zoológicas vivas, muchos *Cebus* del Brasil oriental, desde los 5° de latitud meridional para abajo, y todos ellos me parecen fáciles de referir a alguna de cinco especies bastante variables, pero muy diferentes entre sí. Algunos de estos monos tienen el pelo corto sobre la cabeza, y bastante largo en el cuerpo, donde está mezclado de amarillo y negro en proporciones muy variables, aunque siempre dominando el negro en el lomo, y el amarillo en los hombros y brazos. Los antebrazos, los miembros abdominales desde la cadera, las cuatro extremidades y la cola, son negros, lo mismo que un reducido casquete cefálico y una banda que desciende por la mejilla, mientras el resto de la cabeza es amarillento. El vientre es más o menos rojizo. Estos ejemplares representan, sin duda, al *Cebus variegatus* de Geoffroy [19], al que evidentemente corresponden todos los sinónimos que para esta especie enumera Elliot.

La segunda especie, de la que en el Museo Nacional tenemos un buen ejemplar y un esqueleto de Pernambuco, es el *C. libidinosus* de Spix [40]. Es un mono de pelo largo, de color bastante pálido en los hombros, brazos y partes inferiores, y algo más oscuro en el lomo, con las extremidades, a partir del antebrazo y la rodilla, y la cola, más oscuras todavía, a veces negras. Tiene una especie de barba corta, pálida, y el pelo de encima de la cabeza está muy erizado, y es en su mayor parte oscuro o negro, formando este matiz un casquete cuneiforme muy ancho que deja los lados de la frente blancuzcos, y desde el cual baja por cada lado una banda oscura. El cráneo es alto y corto, marcadamente braquicéfalo, y las vértebras lumbares están en número de cinco. En la clave de especies de Elliot, la que nos ocupa ahora aparece al lado de *C. fatuellus* L. y *C. macrocephalus* Spix; pero, en realidad, no se parece a ninguno de los dos. *C. fatuellus* tiene el pelo mucho más corto, no tiene barba y es de color más oscuro, con la cabeza enteramente negra por encima y sus pelos formando dos crestas laterales; *C. macrocephalus* es también un mono de pelaje más corto y más oscuro, con el casquete cuneiforme más estrecho, y los pelos de la cabeza alargados sólo hacia atrás, y nunca tan encrespados.

El *C. libidinosus* fué descrito por el príncipe de Wied [44] como

C. flavus, y creo que también debe ser la misma especie el *C. capillatus* de Gray [28].

En otra especie creo deben reunirse todos aquellos ejemplares del SE. del Brasil que, presentando también el pelo de encima de la cabeza más o menos erizado y la parte negra en figura cuneiforme, no tienen barba y poseen un largo pelaje de color oscuro uniforme, que pasa desde el pardo que llama Ridgway en sus *Color Standards* pardo Prout, al negro pardusco. El pelo de la cabeza no forma nunca crestas ni copetes bien definidos, y está levantado principalmente por delante, sobre la frente. Tales son los caracteres que ofrece el tipo de *C. frontatus* Kuhl, examinado por Elliot en París, y éste es, por consiguiente, el nombre que corresponde a la especie. En el Museo Nacional tenemos un buen ejemplar, traído por la expedición al Pacífico. Su cráneo es marcadamente braquicéfalo y algo parecido en su forma al de *C. libidinosus,* pero más redondeado, más pequeño y con las crestas temporales menos indicadas. F. Cuvier dió una figura bastante buena de esta especie, bajo el nombre de «variété du sajou cornu», en su gran obra iconográfica sobre los mamíferos, y en la segunda edición de la misma le dió el nombre latino de *C. cristatus.* Me parece que también debe referirse a esta especie, y no a *C. cirrifer,* el mono que con esta última denominación describió y representó el príncipe de Wied [44-45].

El verdadero *C. cirrifer,* que constituye la cuarta especie brasileña oriental, es muy distinto de este mono. Su tamaño es mayor; el pelaje, aunque igualmente largo, es más fuerte y lustroso, y sobre la cabeza se levanta por delante y los lados, formando una doble cresta en figura parecida a la de una V. Su color puede variar desde el pardo oscuro, con el vientre lavado de rojizo, al negro uniforme, más o menos puro, y este color cubre toda la parte superior de la cabeza, dejando sólo una estrecha banda frontal pálida, que a veces falta. A los lados de la cara hay una zona blanca, separada de la oreja por una ancha zona negra.

E. Geoffroy describió esta especie sobre un ejemplar que todavía está en el Museo de París, adonde fué llevado del de Lisboa; y luego estableció un *Cebus niger* sobre el «sajou nègre» de Buffon, que parece ser la misma especie; pero antes de publicarse ambas descripciones, Geoffroy puso su manuscrito a disposición de Humboldt, que a la sazón publicaba sus *Observations de Zoologie et d'Anatomie comparée,* y pagó aquel rasgo de atención del naturalista francés apresurándose a dar a luz las diagnosis de sus nuevas especies, de donde vino a resultar que el autor de *cirrifer* es Humboldt y no Geoffroy. El príncipe de Wied [44] y Burmeister [6] creyeron que esta especie era el *C. fatuellus* de Linné, que es en realidad un mono de Colombia, y la describieron bajo este nombre. F. Cuvier dió una excelente figura de un ejemplar pardo-oscuro, al que llamó «sajou cornu mâle» [20], y más tarde *Cebus lunatus;* pero no hay que confundirlo con el *C. lunatus* de Kuhl, que, probablemente, no es sino un individuo joven de su *C. frontatus*. El *C. leucogenys* de Gray también es un sinónimo de la presente especie.

Yo creo que también es *cirrifer* el *C. caliginosus* de Elliot. Por cierto, que cada vez que se ocupó de esta especie, su autor le asignó caracteres diferentes. En la descripción original [14] dice de ella: «Pelos en el labio superior junto a la comisura de la boca y en la barbilla, blancuzcos; cabeza con sus mechones, banda delante de las orejas, cuerpo, por encima y por debajo, miembros y cola, negros de azabache; manos y pies, negro-parduscos.» En cambio, en la *Review of the Primates* la descripción reza así: «Pelos en el labio superior junto a la comisura de la boca y en la barbilla, cabeza con sus mechones, banda delante de las orejas, y cuerpo, por encima y por debajo, blancuzcos; miembros y cola, negros de azabache; manos y pies, negro-parduscos.» Esta diferencia, que convierte a un mono negro en un mono blanco, con patas y cola negras, podría explicarse por un simple error de imprenta; pero lo que ya no se explica tan fácilmente, es que en su clave de especies de la misma *Review* dice el autor que *C. caliginosus* se distingue por tener «los brazos hasta el codo de color pardo dorado teñido con rojo», carácter del que no hace la menor mención en ninguna de sus descripciones.

Guiándonos solamente por la primera de ellas, no es posible distinguir *caliginosus* de *cirrifer*. La localidad típica, Santa Catharina, entra en el área de dispersión de esta última especie, y los caracteres de coloración y el tamaño son los mismos que ofrecen muchos ejemplares viejos de la misma. Burmeister [6] dice haber visto vivo un individuo de muchos años cuyo color era «enteramente negro puro», excepto una estrecha tira blanca en los lados de las mejillas; Schlegel [37] menciona ejemplares del Museo de Leiden negros también, y en nuestro Museo Nacional hay uno muy hermoso, adquirido de la casa Deyrolle, que ofrece todos los caracteres originalmente asignados por Elliot a su *C. caliginosus*. Es un mono de gran tamaño, enteramente negro, con algunos reflejos parduscos, y tiene a cada lado de la cara una zona blanca, que se corre un poco hacia la frente. Con la diferencia de ser el color negro, en vez de pardo-oscuro, su aspecto recuerda el del «sajou cornu mâle» de F. Cuvier. Su porte, la proporción entre el cuerpo y la cola, la longitud y naturaleza del pelo, las crestas cefálicas, todos los caracteres que en el género *Cebus* son relativamente constantes, son los propios de *C. cirrifer*.

Todavía hay en el Brasil sudoriental otra especie que, como *C. cirrifer,* tiene el pelaje largo y oscuro, extendiéndose este color por encima de la cabeza hasta la frente, pero es más pequeña y ofrece, además, dos caracteres peculiares bien marcados: los pelos de la parte anterior de la cabeza no forman crestas laterales, sino una cresta frontal a manera de diadema, y todo el pelaje del cuerpo está sembrado de pelos blancuzcos que destacan sobre el fondo general oscuro. Esta especie es el *Cebus vellerosus* de I. Geoffroy [22], y de ella hay en el Museo Nacional un buen ejemplar procedente de la Sierra de Yaragua.

SOBRE OTRAS ESPECIES DE *CEBUS*

Las demás especies de este género admitidas por Elliot, y no discutidas en las precedentes líneas *(azaræ, capucinus, curtus, crassiceps, fatuellus, macrocephalus, versutus),* parecen ser todas válidas, exceptuando, si acaso, *C. curtus,* que pudiera ser simplemente una raza insular de *capucinus,* y a ellas hay que añadir el *C. margaritæ* de Hollister, que probablemente no es sino una forma local de *fatuellus.*

A fuer de español, lamento muy de veras que el «cai» de Azara, dedicado por Rengger a nuestro compatriota en 1830, y desde entonces conocido como *Cebus azaræ,* deba realmente llamarse *C. paraguayanus,* puesto que la descripción del célebre naturalista aragonés sirvió de base a Fischer para su *Cebus apella, B. paraguayanus,* que apareció un año antes en la *Synopsis Mammalium* de este autor. I. Geoffroy llamó más tarde *C. elegans* a la misma especie, cuya área de dispersión se extiende desde el Paraguay, hacia el Norte, hasta Matto Grosso. Es éste un mono de pelaje pardo claro, a veces muy pálido; con un casquete cuneiforme oscuro, como *C. nigrivittatus,* pero con una estrecha banda oscura por delante de las orejas. Las extremidades y la última porción de la cola son oscuras, pero los dedos están cubiertos de pelos blancos. Creo que el *C. pallidus* de Gray es, como piensa Elliot, una raza occidental de esta especie.

En la distribución de los colores sobre la cabeza, se acerca bastante al mono de Azara el *C. macrocephalus* Spix, del alto Amazonas; pero tiene un cráneo más alargado y robusto, y su coloración es mucho más oscura, recordando la del *C. apella.* La lámina de Spix representa muy bien la coloración más frecuente, pero hay ejemplares aún más oscuros. El mono representado por Wagner en la lámina VIII del quinto volumen de sus suplementos a Schreber, como una variedad del *C. olivaceus,* pudiera ser muy bien esta especie, que en tal caso se extendería por el Norte hasta Colombia, de donde vino aquel ejemplar. La figura parece presentar un casquete cuneiforme, y no conozco en la parte occidental de América más *Cebus* con este carácter que *macrocephalus* y *paraguayanus pallidus*.

El nombre de *C. capucinus* se aplica ya hoy por todos los autores a la especie que lo recibió primeramente de Linné, o sea a la que Humboldt llamó posteriormente *C. hypoleucus*. Es el mono peculiar de la América central, negro, con la cabeza y los hombros blancos, y un casquete negro redondeado, como el de *C. gracilis* y *C. versicolor,* a cuyas especies se asemeja también en la forma del cráneo. Es una forma muy plástica, en la que se cuentan nada menos que cinco razas locales: *limitaneus* Hollist., de Honduras y Nicaragua; *imitator* Thos., de Costa Rica y la parte occidental de Panamá; *capucinus* típico, del Panamá oriental y el Norte de Colombia; *nigripectus* Elliot, del valle del Cauca, y *curtus*, de la isla Gorgona.

El *Cebus fatuellus* de Linné [33] tiene como base un mono descrito por Brisson, sin indicación ninguna de localidad, pero cuyos caracteres sólo convienen por completo a la especie de Colombia que todos los autores modernos designan con aquel nombre. Un macho adulto de Santa Fe de Bogotá, enviado al Museo Nacional de Ciencias Naturales por el señor Gutiérrez de Alba, puede considerarse como topotipo. Es un animal bastante más pequeño que *C. cirrifer* y con el pelo más corto, aun encima de la cabeza, donde forma, como en éste, dos crestas o tufos laterales que convergen sobre la frente. Toda la cabeza es negra, con sólo unos pocos pelos blancuzcos hacia las sienes, que no llegan a formar una banda bien definida. El cuerpo y los brazos son de un leonado amarillento sucio, lavado de pardo oscuro hacia los riñones; y los antebrazos, manos, miembros posteriores y cola, negros. El cráneo, muy robusto y braquicéfalo, presenta una cresta sagital bien marcada. *C. margaritæ,* de la isla de Santa Margarita, junto a la costa de Venezuela, parece ser una forma geográfica de esta especie, con las partes superiores de un pardo mucho más oscuro. En el Perú hay otra raza, *C. f. peruanus* Thos.

Otra especie con un doble copete cefálico, y con la cabeza enteramente negra por encima, es *C. versutus;* pero tiene, como *cirrifer,* una banda blanco-amarillenta a cada lado de la cara; y el pelaje, en general, es de un color bastante claro, pasando a negro en las extremidades y porción terminal de la cola, lo que recuerda bastante la coloración de *C. libidinosus* y *C. paraguayanus*. Creo que esta especie, cuyos tipo y paratipos proceden del río Jordao, en el Brasil, es la misma representada por Wagner en su lámina VII como *C. fatuellus, var.* [43].

En cuanto al *C. crassiceps* de Pucheran [35], no veo inconveniente para considerarlo provisionalmente como una buena especie, aunque se ignora su localidad. Se parece mucho a *C. macrocephalus,* pero no tiene la lista dorsal oscura característica de esta especie. Debo decir, no obstante, que yo he estudiado individuos de *macrocephalus* en los que esta lista está casi borrada.

CLAVE PROVISIONAL PARA LAS ESPECIES Y SUBESPECIES DE *CEBUS*

(He marcado en esta clave con un asterisco aquellas formas de que no he podido ver hasta ahora ningún ejemplar, y cuya posición, por consiguiente, he tenido que deducir de las descripciones.)

a. Parte superior de la cabeza, oscura solamente en el centro; frente total o parcialmente pálida.
- *b*. Casquete oscuro redondeado; frente enteramente pálida, con o sin una línea vertical oscura en el centro.
  - *c*. Lados de la cara, pálidos hasta las orejas.
    - *d*. Color general, negro; los lados de la cara y los hombros, blancos o amarillentos.
      - *e*. Tamaño grande; long. total, con la cola, cerca de 100 cm.; long. del cráneo, unos 90 mm.
        - *f*. Frente y pecho, blancos o amarillentos.
          - *g*. Premolares muy anchos.
            - *h*. Partes pálidas de un amarillento leonado.................. *C. capucinus limitaneus* Hollist.
            - *h'*. Partes pálidas blancas...... *C. capucinus imitator* Thos.
          - *g'*. Premolares muy estrechos. *C. capucinus capucinus* L.
        - *f'*. Frente pardusca; pecho negro. *C. capucinus nigripectus* Elliot.
      - *e'*. Tamaño pequeño; long. total, con la cola, unos 75 cm.; long. del cráneo, unos 80 mm............. *C. capucinus curtus* Bangs.
    - *d'*. Color general, pardo, gris o leonado; la frente y los lados de la cara, más pálidos, a veces blancos.
      - *i*. Extremidades rojizas..................... *C. chrysopus* F. Cuv.
      - *i'*. Extremidades no rojizas.
        - *j*. Manos, pies y punta de la cola, más pálidos que el tronco..... *C. gracilis* Spix.
        - *j'*. Manos y pies, más oscuros que el color general.
          - *k*. Pelaje gris; cara gris azulada........ **C. albifrons* Humb.
          - *k'*. Pelaje pardo; cara color de carne o pardusca.
            - *l*. Pelo corto, de menos de 50 mm.
              - *m*. Color general, claro; porción terminal de la cola más oscura..................... **C. æquatorialis* Allen.
              - *m'*. Color general, más oscuro; porción terminal de la cola, más pálida................... **C. malitiosus* Elliot.
            - *l'*. Pelo largo, de más de 60 mm........ *C. versicolor* Puch.

c'. Lados de la cara, con una banda oscura delante de las orejas, a modo de patilla; color mezclado de amarillo y negro, predominando el amarillo en los hombros y el negro en el lomo, extremidades y cola.
C. variegatus Geoffr.

b'. Casquete oscuro cuneiforme, terminando en punta en medio de la frente, cuyos lados son blancos o pálidos.

n'. Lados de la cara, pálidos hasta las orejas.

o. Pelaje pálido; no negruzco en las extremidades y cola............
C. fulvus Desm.

o'. Pelaje más oscuro; negruzco en las extremidades y cola.

p. Pelo corto; hombros poco más pálidos que el color general......
C. nigrivittatus Wagn.

p' Pelo largo; hombros pálidos, amarillos... *C. olivaceus* Schomb.

n'. Lados de la cara, con una banda oscura delante de las orejas, a modo de patillas.

q. Color pardo-oscuro con extremidades negras

r. Pelo largo; sobre la cabeza levantado desde la frente...........
C. frontatus Kuhl.

r'. Pelo más corto; sobre la cabeza, levantado hacia atrás y en medio.

s. Sin línea dorsal oscura................. *C. crassiceps* Puch.

s'. Con una línea dorsal oscura......... *C. macrocephalus* Spix.

q'. Color leonado o pardo-claro, con extremidades negras o negruzcas.

t. Dedos blanquecinos; pelo de la cabeza ligeramente levantado en el centro.

u. Color más pálido; pecho blancuzco..........................
C. paraguayanus paraguayanus Fisch.

u'. Color más oscuro; pecho amarillo...........................
C. paraguayanus pallidus Gray.

t'. Dedos negros; pelo de la cabeza, erizado desde la frente........
C. libidinosus Spix.

a'. Parte superior de la cabeza, enteramente oscura; a lo sumo con una banda superciliar blanca o pálida.

v. Pelos de encima de la frente erizados, formando cresta transversal o bífida.

w. Sin pelos blancos esparcidos en el cuerpo.

x. Una banda o patilla blanca o amarillenta a los lados de la cara.

y. Color general claro; más oscuro sobre el lomo................
C. versutus Elliot.

y'. Color general oscuro; a veces negro......... *C. cirrifer* Humb.

x'. Sin banda blanca bien definida a los lados de la cara.

z. Color general, leonado sucio lavado de negro.

α. Brazos por delante oscuros.............................
C. fatuellus peruanus Thos.

α'. Brazos por delante pálidos...... *C. fatuellus fatuellus* L.

z'. Color general, pardo-oscuro.............................
* *C. fatuellus margaritæ* Holl.

w'. Con pelos blancos esparcidos por el cuerpo, destacando sobre el fondo oscuro.......................... *C. vellerosus* I. Geoffr.

v'. Pelos de toda la cabeza erizados por igual, sin formar una cresta frontal bien definida.

β. Color oscuro; cabeza por encima negra; extremidades y cola, negras. *C. apella* L.

β'. Color pálido, incluyendo las extremidades y la cola; cabeza por encima poco más oscura.......................... **C. unicolor* Spix.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALLEN, J. A.—New South American Monkeys. (Bull. Amer. Mus. o Nat. Hist., XXXIII, 1914, p. 647.)
2. AUDEBERT, J. B.—Histoire Naturelle des Singes et des Makis. Paris, 1797.
3. AZARA, F. DE.—Apuntamientos para la Historia Natural de los Quadrúpedos del Paragüay y Río de la Plata. Tomo II. Madrid, 1802.
4. BOITARD, P.—*Artículo* Sajou *en el* Dictionnaire Universel d'Histoire Naf turelle, dirigé par M. Charles D'Orbigny, XI, 1848, p. 295, lám. 6 A.
5. BUFFON y DAUBENTON.—Histoire Naturelle, générale et particulière, avec la description du Cabinet du Roi. Tomo XV. Paris, 1767.
6. BURMEISTER, H.—Ueber Arten der Gattung Cebus. (Abhandl. Naturforsch. Gessellsch. zu Halle, II, 1854, p. 81.)
7. CHAPMAN, F. M.—The distribution of Bird-life in Colombia; a contribution to a Biological Survey of South America. (Bull. Amer. Mus. of Nat. Hist., XXXVI, 1917.)
8. CHENU.—Encyclopédie d'Histoire Naturelle. Tomo I. Paris, 1851.
9. DAHLBOM, A. G.—Zoologiska Studier. 1856.
10. DESMAREST, A. G.—*Artículo* Sapajou *en el* Nouveau Dictionnaire d'Histoire Naturelle, XXX, 1819, p. 155, lám. 13.
11. — *Artículo* Sapajou *en el* Dictionnaire des Sciences Naturelles, XLVII, 1827, p. 297.
12. — Mammalogie ou description des espèces de Mammifères. Paris, 1820.
13. D'ORBIGNY, A. y GERVAIS, P.—Voyage dans l'Amérique Meridionale. I, 2e partie, Mammifères (1834), p. 9, lám. III.
14. ELLIOT, D. G.—Descriptions of apparently a New Species and Subspecies of *Cebus*, with Remarks on the Nomenclature of Linnæus's *Simia apella* and *Simia capucina*. (Bull. Amer. Mus. of Nat. Hist., XXVI, 1909, p. 227.)
15. — On new Species of *Cebus*. (Ann. and Mag. Nat. Hist., ser. 8, V, 1910, p. 77.)
16. — A Review of the Primates. (Monogr. Amer. Mus. of Nat. Hist.) Vol. II, 1913.
17. FESTA, E.—Viaggio del Dr. Enrico Festa nel Darien, nell'Ecuador e regioni vicine: Mammiferi. (Bollet. Musei di Zool. ed Anat. Comp. della R. Università di Torino, XVIII, 1903, No. 435.)
18. FISCHER, J. B.—Synopsis Mammalium. 1829.
19. GEOFFROY SAINT-HILAIRE, E.—Tableau des Quadrumanes. (Ann. du Muséum d'Hist. Nat., XIX, 1812.)
20. — y CUVIER, F.—Histoire Naturelle des Mammifères. Paris, 1819-1843.
21. GEOFFROY SAINT-HILAIRE, I. *Artículo* Sapajou *en el* Dictionnaire Classique d'Histoire Naturelle, XV, 1829, p. 146.
22. — Catalogue méthodique de la Collection des Mammifères, de la Collection des Oiseaux et des Collections annexes du Muséum d'Histoire Naturelle de Paris: Première partie, Mammifères; Catalogue des Primates. Paris, 1851.

23. — Description des Mammifères nouveaux ou imperfaitement connus de la collection du Muséum d'Histoire Naturelle. (Arch. Mus. d'Hist. Nat., V, 1852; p. 548.)
24. — Primates, *en* P. Gervais, Animaux nouveaux ou rares recueillis pendant l'expedition dans les parties centrales de l'Amérique du Sud, de Rio de Janeiro a Lima, et de Lima au Para; executée par ordre du Gouvernement français, pendant les années 1843 a 1847, sous la direction du comte Francis de Castelnau. Vol. I, 1855.
25. Gervais, P.—Histoire Naturelle des Mammifères, Vol. I. Paris, 1854.
26. Gœldi, E. A. y Hagmann, G.—Prodromo de um Catalogo critico, commentado, da Collecção de Mamniferos no Museu do Pará. (Bol. do Museu Gœldi, IV, 1904, p. 38.)
27. Gray, J. E.—Catalogue of the Monkeys, Lemurs and fruit-eating Bats in the Collection of the British Museum. Londres, 1870.
28. — Notices of some apparently undescribed species of Sapajous *(Cebus)* in the Collection of the British Museum. (Proc. Zool. Soc. of London, 1865, p. 824, figs. 1-4, lám. XLV.)
29. Hollister, N.—Four new Mammals from Tropical America. (Proc. Biolog. Soc. of Washington, XXVII, 1914, p. 103.)
30. Humboldt, A. de.—Recueil des Observations de Zoologie et d'Anatomie comparée. Paris, 1811.
31. Lesson, R. P.—Espèces des Mammifères Bimanes et Quadrumanes, suivi d'une mémoire sur les Oryctéropes. Paris, 1840.
32. Linné, C.—Systema Naturæ, edit. 10.ª, 1758.
33. — Systema Naturæ, edit. 12.ª, 1766.
34. Pucheran.—Description de quelques Mammifères Americains. (Revue de Zoologie, 1845, p. 335.)
35. — Notices mammalogiques. (Rev. et Magaz. de Zoologie, 2me sér. IX, 1857, p. 337.)
36. Reichenbach, H. G. L.—Die vollständigste Naturgeschichte der Affen. 1862.
37. Schlegel.—Muséum d'Histoire Naturelle des Pays Bas: Revue Méthodique et Critique des Collections déposées dans cet établissement. VII, 1876.
38. Schomburgk, R.—Reisen in British Guiana in den Jahren 1840-44. II, 1848.
39. Schreber, J. C. D. von.—Die Säugthiere in Abbildungen nach der Natur mit Beschreibungen. Vol. I, 1777.
40. Spix, J. de.—Simiarum et Vespertilionum Brasiliensium Species Novæ. 1823.
41. Tschudi, J. J. von.—Unterssuchunger über die Fauna Peruana. I, 1844.
42. Wagner, A. Beiträge zur Kenntniss der Säugthiere Amerika's; Dritte Abtheilung. (Abhandl. der II Class. der Kais. Akad. der Wiss. V. B., II, p. 425.)
43. — Schrebers Säugthiere, Fortgesekt. I, 1851, y V, 1855.
44. Wied, Maximilian Prinzen zu.—Beiträge zur Naturgeschichte von Brasilien. II, 1826.
45. — Abbildungen zur Naturgeschichte von Brasilien, 1822-26.

ÍNDICE
DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Páginas.

I. Notas acerca de las esencias españolas, por *B. Dorronsoro*. 177
II. Microscopios mineralógicos y petrográficos (conclusión), por *Domingo de Orueta*.......................... 183
III. Contribución al estudio de los cuerpos convexos de curvatura continua, por *Olegario Fernández Baños*....... 196
IV. Notas sobre el género «Cébus», por *Angel Cabrera*..... 221

La suscripción a esta Revista se hace por tomos completos de 500 a 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, Madrid.

Precio de este cuaderno: **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVI: 1.º DE LA 2.ª SERIE

NÚMERO 6: DICIEMBRE DE 1917

SMITHSONIAN INSTITUTION
APR 7 1927
NATIONAL MUSEUM

MADRID
IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA
GLORIETA DE CHAMBERÍ
1917

Don Eduardo Mier y Miura

por

José Rodríguez Mourelo

A 18 del pasado mes de noviembre falleció en El Pardo, después de larga y cruel enfermedad, el Ilustrísimo señor don Eduardo Mier y Miura, Coronel de Ingenieros e Inspector General del Cuerpo de Ingenieros Geógrafos del Instituto Geográfico y Estadístico, donde prestaba sus servicios hace muchos años. No fué larga su vida — había nacido en Sevilla en 1858 —; pero aprovechóla entera en el estudio y en la investigación, y no tuvo otros ideales que la verdad y la Ciencia, a las que consagró todos sus esfuerzos y todo su trabajo, encaminados de continuo a la noble labor de inquirir cosas nuevas en estos nunca agotados campos de las investigaciones de la Naturaleza, que premia siempre a cuantos con buena voluntad y desinteresadamente indagan sus arcanos. Y a manera de contraste, puede decirse que hasta en la muerte acompañaron a Mier las dos cualidades más salientes de su personalidad. Fué a morir al pie de nuestra hermosa sierra, como si buscara tener más cerca a aquella Naturaleza que tanto amaba; y yacen sus restos en humilde cementerio, como si la modestia, que le era en vida tan característica, hubiese de acompañarle también en la muerte.

Muchos años hace que conocí a Mier, ya que nuestra amistad databa de los tiempos de la primera juventud, cuando, con mi hermano, empezaba sus estudios en la Academia de Ingenieros Militares de Guadalajara. Era a la sazón un muchacho simpático por todo extremo, estudioso, algo reflexivo y con manifiestas tendencias hacia la invención. Cuando, pasados los años y muerto el amigo, recuerdo algunos pormenores de aquellos tiempos, sus ideas, su modo de estudiar y de discurrir, me explico que en ello estaba el germen de la personalidad científica del llorado compañero, y que en sus primeros pasos de estudiante era notorio el comienzo de un verdadero y sagaz investigador, sin que en él hubiese, sin embargo, nada parecido a la precocidad, destinada casi siempre a morir en flor o a quedarse en los términos de una estimable medianía. No padeció tal achaque el entendimiento clarísimo de Mier. Empezó ciertamente joven; pero sin dañosas precocidades.

Bueno fuera, tratándose de personalidades de tan elevado valor científico como lo ha sido el coronel Mier, el estudiar la evolución de sus vocaciones, examinando cómo, a partir de aquel fondo de cultura, que pudiéramos llamar inicial, y que en el caso de mi amigo fué principalmente matemática, con todos los defectos de la rutina, que mejor atendía al libro que a la Ciencia, y más se cuidaba de la letra, siempre muerta, que del espíritu que es su vida, va transformándose por virtud de una suerte de selección natural y depurándose y acendrándose a cada punto, para no dejar de aquello, mal enseñado y de prisa aprendido, sino el escaso sedimento de la verdad y el hábito del trabajo, y constituir sobre tan exiguo material útil, por el propio esfuerzo del individuo, una personalidad dotada de originalidad. Y hay que agregar todavía que al trabajo empleado en libertarse de los errores de Escuela y de los malos métodos, y al de prescindir del criterio de la autoridad en materias científicas, la energía gastada en la lucha con el medio y con su absoluta indiferencia, en cuyo respecto vale decir que Mier, como todos los que en su época quisieron emanciparse, sintiéndose con bríos para hacer algo original y propio, hubieron de formarse solos y sin tener en su aislamiento con quien comunicar ideas, pensamientos e investigaciones.

Nunca está de más recordar estos esfuerzos y estas energías, tan bien empleados hace todavía pocos años, en los actuales, cuando por el generoso empeño de todos, encaminado al mismo fin de la investigación científica, va determinándose la personalidad de España en tal sentido. Lo que a ello ha contribuído Mier pronto ha de decirse, y por testimonio de extranjeros. Por de pronto indicaré que, sin méritos suficientes para ocupar un puesto de tanta consideración, ciertamente no hubiera sido elegido Vicepresidente de la Asociación Internacional de Sismología; que si la vida le hubiese durado, estaba llamado a presidir en breve, no por acuerdos diplomáticos, que nada tienen que ver con el mejor estudio de los movimientos de la corteza terrestre, no consolidada enteramente, sino por méritos propios de muy elevada categoría. A ellos corresponde el último trabajo de mi amigo, llamado, sin duda, a modificar el sentido general y los fundamentos de los sistemas y de los aparatos de medidas.

Con un instinto admirable eligió Mier en sus juventudes, después de algún feliz ensayo en el profesorado de la Academia del Cuerpo a que pertenecía, el sitio más adecuado para desenvolver sus aptitudes y llevar a cabo sus investigaciones originales. Necesitaba un medio propicio, en el que las iniciativas del trabajador pudiesen ser consideradas y llevadas a término sin ciertas trabas, de rigor en otros lugares. Por eso nada más conforme a sus aptitudes, a sus aficiones y a sus modos de trabajar, que nuestro benemérito Instituto Geográfico y Estadístico, y allí fué Mier, y allí permaneció hasta el fin prematuro de su vida, acaso impulsado por el renombre de don Carlos Ibáñez, que había constituído un Centro de trabajo útil, de verdadera Ciencia, en el que tan excelente acogida tuvieron las ideas de Mier, sus invenciones y sus iniciativas, siempre fecundas en todos los órdenes.

Ocurre pensar—y de ello pudiera poner aquí muchos ejemplos—que existe una suerte de influencia de la precisión de las medidas sobre los que las interpretan, las relacionan y las corrigen. Su entendimiento parece como que se afina y sutiliza, acostumbrándose a la exactitud en todo y a apreciar los valores de todas las determinaciones numéricas. En este orden, si el Instituto Geográfico era el medio y lugar más adecuado al sentido de las investigaciones de Mier, también hubo de tener las primicias de sus mejores descubrimientos y los provechos de la organización de cuanto de ellos podía derivar, y atestíguanlo los servicios de los mareógrafos, los de las estaciones sismológicas, llamadas a proporcionar un conjunto de bien concertadas observaciones, el de la medida de la frecuencia de las olas y otros varios que significan y representan muy intensos estudios científicos, y son a modo de su consecuencia, aunque parezca que entre esto tan práctico y los estudios acerca del amortiguamiento de los sismógrafos, punto capital de una doctrina novísima que apenas dejó Mier esbozada, y su diferenciador, no deba mediar relación de ningún género. Y, sin embargo, sin estas lucubraciones teóricas, en las que por tanto entraba el cálculo matemático elevado, nada pudiera haber hecho tocante al registro de los movimientos de la corteza terrestre o al conocimiento práctico del régimen de las mareas.

De muy sutiles medidas geodésicas fué encargado Mier en el Instituto Geográfico apenas hubo entrado a compartir sus tareas y participar en sus trabajos. Un campo vastísimo y sobremanera atrayente se ofrecía ante aquel joven oficial de Ingenieros, tan despierto y a la vez tan reflexivo; era preciso apreciar con un error mínimo el relieve de España, medir tierras y determinar alturas, conocer diferencias de nivel entre pequeñas distancias, buscar coordenadas geográficas y señalar meridianos, manejar aparatos de suma delicadeza, adecuados para las operaciones de la Geodesia. Y después de la medida y del dato que ella suministra viene el interpretar la lectura hecha en los instrumentos, relacionar la medida, que escueta y por sí sola nada o poca cosa dice y significa, dándole su verdadero sentido, y estas operaciones, de extremada dificultad y grandísima trascendencia, hubieron de ser la ocupación preferente de Mier durante algún tiempo, sirviéndole sus influencias como preparación de las investigaciones y de los inventos y de admirable estímulo para su entendimiento, cultivado también, para fortuna suya, en otras disciplinas utilísimas, aunque bien diferentes de las Matemáticas. Veníale acaso esta cultura de influencias familiares; pues el padre de Mier fué excelente y erudito literato, feliz traductor de Schiller.

Pero la influencia de la exactitud y de la precisión de las medidas, tratándose de un campo tan dilatado como es toda la extensión de España, si bien podía ejercerse en términos de gran amplitud, y de seguro fué parte y por mucho en la dirección de los estudios y de las investigaciones originales de Mier, el propio objeto de aquéllas, la Tierra misma, había de ejercer sobre su inteligencia tan clara, sobre su imaginación tan viva, y sobre su bien templada voluntad, una influencia mucho mayor y más decisiva. De aquí provienen, a mi ver, sus trabajos acerca de los movimientos sísmicos, sus estudios de los mareógrafos, el de la frecuencia de las olas y, sobre todo, su ingeniosa doctrina acerca de la constitución interna del planeta que habitamos, conforme los trabajos de su diferenciador deben relacionarse con las mediciones cuyo valor le correspondía apreciar e interpretar. A lo general de su cultura científica es menester referir otros trabajos e inventos, como el contador electrolítico, sobremanera ingenioso.

En el conjunto de la obra científica de Mier se hace preciso considerar varias categorías de trabajos, que no están ciertamente separados unos de otros, sino, muy al contrario, se relacionan más o menos de cerca, como si todos ellos se enlazasen a unos mismos principios. Van al cabo encaminados hacia un ideal muy elevado, cual corresponde a un verdadero hombre de Ciencia y a un investigador de los méritos de Mier. Colócanse en lugar preeminente cuantos se refieren a estudios originales de Ciencia pura, entre los cuales es menester señalar lo más rico y selecto de su labor, que es, al propio tiempo, lo más personal y propio. Tiene por principal característica, la originalidad, y es de suerte todo ello, que parece el resultado más lógico y sencillo de la aplicación de principios fundamentales claros y admirablemente establecidos. Pertenecen a este grupo, por ejemplo, todos los estudios de Sismología, desde el de los primeros sistemas de señales hasta aquella famosa doctrina, de tanto alcance como originalidad, que se concreta a las ecuaciones fundamentales y el amortiguamiento de los sismógrafos, destinada, por ventura, a causar una transformación fundamental en la ciencia que estudia los movimientos de la corteza terrestre, los trabajos que le condujeron hasta proyectar su diferenciador y la doctrina acerca de la constitución interna de la Tierra, que se funda precisamente en sus trabajos sismológicos.

Queriendo dar Mier una aplicación práctica a los estudios tan difíciles y elevados que ocuparon de preferencia su actividad y su entendimiento, hubo de consagrarse a la invención, y he aquí cómo de los inventos se forma otro grupo de su obra total, caracterizado por el ingenio, que en su grado más exquisito ha sido una cualidad de las sobresalientes de Mier. Basta recordar, a semejante propósito, aquella serie de instrumentos sismológicos que había ideado: los sismógrafos de registro fotográfico, el sismógrafo integrador y el mareógrafo, sin hablar de nuevo del contador eléctrico y de otras invenciones menores, derivadas siempre de elevados estudios teóricos, que quien tan alto miraba no podía fiar nada a la casualidad y al azar en la invención, que para ser tal, de necesidad tiene que derivarse inmediatamente de los principios científicos, siendo como la consecuencia práctica y la aplicación de ellos.

Forman otro grupo, si no de tanta trascendencia como los anteriores, de notoria y singular importancia, cuantos trabajos — y son en gran número — ha consagrado Mier a la divulgación científica. Sendos artículos, publicados unas veces en el *Memorial de Ingenieros del Ejército,* cuando se referían a asuntos técnicos y profesionales; otras en *La Energía Eléctrica*, cuando se relacionaban con los problemas de la Electrotecnia, y, por muchos años, en *La Naturaleza,* si habían de tratar de asuntos generales y novedades científicas; constituyen el fondo de toda la meritísima labor de Mier como propagandista científico, labor que tiene un marcado carácter docente, en cuanto es su solo objeto poner al alcance del gran público los adelantos de la Ciencia, fiel y sencillamente expuestos, y con grandísima claridad explicados y comentados. Hubo de seguir en esto las huellas de los más esclarecidos sabios, que todos, en una u otra forma, se han ocupado en la obra, meritoria por todo extremo, de comunicar a las multitudes los más importantes resultados de las investigaciones de la Ciencia y sus consecuencias en todos los órdenes de la vida, y sus aplicaciones a la mejor satisfacción de sus necesidades. En tal respecto, he de indicar cómo esta tarea, que requiere mucho saber, gran cultura general y, en nuestro caso, muy acendrado patriotismo, no sólo tiende a popularizar la Ciencia pura y sus aplicaciones de mayor cuantía: su objeto más elevado consiste en hacer ver cómo las Ciencias Naturales deben formar la base primordial de la educación del pueblo y en demostrar las influencias de la Ciencia en los órdenes moral y social, considerándolos en su sentido más elevado y humano. Tal ha sido el carácter de la obra de Mier como divulgador.

Requiérense, para llevarla a cabo, en la forma que ha llegado a realizarla, dotes muy singulares, y de ellas es la primera el sentir la Ciencia, hallando en su estudio y en su investigación, lo mismo al hacerla que al exponerla clara y sencillamente, aquella misma emoción que produce el gran Arte o la más inefable que nos ofrece la misma Naturaleza, madre augusta de toda belleza, o la mayor, si cabe, de la verdad, cuando mediante nuestro trabajo y esfuerzo alcanzamos ver premiados nuestros anhelos y nos es permitido gozar de sus divinos esplendores y en ellos recrear el entendimiento,

Gracias a la variedad de sus aptitudes y a lo extenso y sólido de su cultura científica, pudo ser Mier notable investigador, inventor de mucha nota, excelente divulgador y afortunado organizador de servicios técnicos de observación de verdadera importancia nacional a ejemplo del sismográfico, el de los mareógrafos y otros semejantes, entre ellos el relativo a la frecuencia de las olas. Y he de notar cómo se debe muy principalmente a Mier, por alguno de estos servicios, el que se conserve íntegro nuestro territorio en Canarias, y el que, pretextando determinadas observaciones científicas, no se haya establecido una potencia extranjera en las lomas del Teide. Sin embargo de esta multiplicidad tan variada de su producción científica, fué Mier un verdadero especialista. Era, ante todo, un sabio y un famoso investigador en lo que pudiéramos llamar Geofísica y aun Geomecánica, porque, en rigor, sus trabajos fueron orientados en el sentido de estudiar y medir los movimientos más leves de la corteza terrestre, apreciando su intensidad, su dirección y su forma, y esto de una manera sistemática, para reunir un conjunto de observaciones que permitiesen, andando el tiempo, establecer leyes de cierta generalidad y deducir doctrinas como la que dejó establecida respecto de la estructura interna y la formación de la Tierra.

Se demuestra así cómo el ser especialista de gran cuantía en determinados y muy concretos asuntos, no es obstáculo para ocuparse en otros; porque, fuera de que nada hay que más descanse de un trabajo que otro trabajo, la excesiva y exclusiva especialización no es lo más a propósito para nuestro ambiente, ni tiene en sí misma lo bastante para satisfacer las ansias de saber de los entendimientos vivos y de las inteligencias privilegiadas. En realidad, la especialización a ultranza es peculiar de las limitadas y de las que ven poco y sólo lo que está muy cerca de ellas. Hay que cultivar, sin duda, y de preferencia, una especialidad; pero con un gran fondo de cultura científica general, y pensando siempre que, en el mundo y en la Ciencia, hay más, mucho más, y de extraordinaria importancia, de lo que cultivamos e investigamos. Mier es un excelentísimo ejemplo del especialista cuyo entendimiento sabe salirse de una órbita de conocimientos para luego tratar otros con la misma competencia y autoridad.

Hube de apreciar por mí mismo todo el valer científico de Mier el año de 1913, y bien lejos de España, allá en Petrogrado, donde tuve el honor de representar a nuestra Real Academia de Ciencias en la Asamblea que en aquella gran ciudad celebró la Asociación Internacional de Academias. Fué la mayor concurrencia de Delegados, en la sección de Ciencias, de as trónomos y físicos, casi todos de mucha nombradía y grandes merecimientos. Ni uno solo dejó de preguntarme por Mier, y de hablarme de él con los mayores encomios. Fué el primero el inglés Schuster, quien me dijo de Mier que era un verdadero sabio, por muy contados igualado en lo que atañe a la Física terrestre; para el holandés Sande, en nuestro compañero se reunían las dotes de un investigador de primer orden; el belga Lecointe era ferviente admirador de su ingenio y de la claridad de su entendimiento; Chapuis, el físico de las medidas precisas, me dijo de Mier que sus ideas, siempre claras y sencillas, tenían para él un atractivo y una simpatía completas; a Lallemand le parecía digno de ser meditado y seriamente estudiado cuanto Mier decía en la Asociación Internacional de Sismología, porque todo era fruto de muy elevados y serios conocimientos, siempre con la marca de una perfecta originalidad.

Tuve el placer de oír el mayor y más caluroso elogio de mi amigo de los labios de una autoridad indiscutible en asuntos de Sismología, del propio Príncipe de Galitzin, con ocasión de la visita a su magnífico Observatorio de Pultkova, durante la cual, y después de haberme mostrado aquella serie de magníficos aparatos, cuya sensibilidad excede a toda ponderación, sólo me habló de Mier, a quien consideraba su sucesor en la presidencia de la Asociación Internacional, teníalo en mucha consideración y estima, y creía verdaderamente fundamentales todos sus trabajos e investigaciones. Bien ajenos estaban ambos de la proximidad de su fin, y quién sabe si la muerte del sabio príncipe contribuyó en mucha parte a terminar la ya minada existencia de Mier: eran, al cabo, dos amigos, cuyas inteligencias, en cierto modo, se completaban, y cuyos trabajos de Sismología eran, por decirlo así, gemelos, aun cuando no participasen de las mismas ideas, y sus pensamientos y sus opiniones tanto difiriesen en lo fundamental y estuviesen llamados, para muy en breve, a ser objeto de una gran controversia científica.

Iniciado Mier en los estudios e investigaciones de la Geofísica, llevando el bagaje de una sólida cultura científica, especialmente matemática, pudo ya, desde el primer momento, hacer labor original, y en los mismos comienzos de aquello que constituyó verdaderamente la labor capital de su vida, le fué dado el participar en el trabajo de la Sismología. Hubo de estudiar, muy en primer término, los instrumentos de medida, sismómetros y sismógrafos, para ver y apreciar los límites de la exactitud de las medidas que proporcionan, los errores y la manera de interpretar el significado de los complicados movimientos que señalan o que registran. Era, al cabo, todo necesario para fijar un punto de partida de otras concepciones más generales y elevadas. De ello dedujo Mier dos cosas principalmente. Fué la primera los principios científicos que sirven de fundamento a toda la serie de aparatos sismológicos, que proyectó o ideó, y la segunda, los mismos aparatos, aun cuando en su mayoría no hayan sido todavía construídos. Queda de esto todo un sistema de registro, original de Mier, al que pertenecen los sismógrafos, que llamaba integradores, y las ampliaciones que proyectó para los de registro fotográfico, ampliando sus indicaciones y simplificando grandemente el sistema en favor de la exactitud y de la precisión del propio registro.

Una mayor ventaja sacó Mier de estos que pudiéramos calificar como sus estudios preliminares de Sismología, y es la aplicación de aquella sana y provechosa crítica, base del conocimiento, y que nace del más profundo y fundamentado sabor de las cosas y de la cultura general científica, la cual rechaza y desdeña todo cuanto se crea por entero acabado y no susceptible de modificaciones y de perfeccionamientos, cuando el incesante cambiar y el mudar de continuo es la ley universal del mundo. Dió a Mier la crítica verdadera el principio para sus dos trabajos capitales: la teoría de la Tierra y la completa revolución que dejó iniciada en los principios y en las ecuaciones fundamentales de la Sismología, cuyo trabajo es a modo de resumen y compendio de todos sus estudios, investigaciones y pensamientos al respeto de esta Ciencia nueva, a la que había consagrado lo lo mejor de su vida, de su trabajo y de su actividad en todos los órdenes y disciplinas científicas que la entretuvieron.

Junto a lo que pudiera llamarse trabajo de pormenor, indispensable en toda labor científica seria, ha de poner el investigador original sus ideas y sus pensamientos, acerca del conjunto de aquello mismo que inquiere, apoyándose, por de contado, en los propios hechos, descubiertos y determinados por su esfuerzo y su trabajo. Y no basta apreciar la transcendencia de una serie de fenómenos bien estudiados y relacionados, que se precisa además tener una idea y una concepción, lo más general posible, de semejantes relaciones, y llegar a formular una doctrina que abarque el mayor número, teniendo ella misma los caracteres de originalidad de la propia investigación, que es su germen. Es una forma del superior ideal, que debe ser la guía de todo trabajo científico en cualesquiera órdenes, o, acaso mejor, una aproximación a este mismo ideal de la verdad grande y luminosa, por cuya posesión tanto han trabajado y trabajan los hombres superiores, que son también los hombres de buena voluntad, en cuya categoría figura Mier, por el derecho de sus propios méritos y de su labor científica.

Vió claramente, cuando estudiaba el valor y el significado de las indicaciones gráficas de los sismógrafos, que los fundamentos de su teoría y, por ende, los apoyos fundamentales de la Ciencia que estudia los movimientos de la corteza terrestre, no tienen, a su vez, una base científica; que los errores son esenciales y de concepto y todo falso, desde las ecuaciones de los propios sismógrafos y las fórmulas aplicadas a los cálculos de los movimientos y de sus componentes esenciales; es decir, que hay necesidad de reconstruir toda la Sismología de otra manera, mas dentro de la realidad de los hechos y sobre otras bases más científicas y racionales. Para llegar a tan revolucionarias conclusiones fueron menester estudios numerosísimos de un mérito superior y de una originalidad absoluta. Fué su punto de partida el de los sismógrafos y de los errores de sus indicaciones, el de los movimientos sinuosos del péndulo, el de aquellos amortiguadores que tanto habían dado que hacer a los más renombrados sismólogos, el de los sismógramas y, particularmente, el de las ecuaciones fundamentales, cuyo empleo era general y clásico, y teníanse por cosa ya definitivamente establecida y corriente.

Lejos de ser el trabajo capital de Mier la obra negativa de una crítica ligera y despiadada, es una novísima manera de ver la Sismología y de considerar la forma y el valor de los datos numéricos que los aparatos aportan y las fórmulas y ecuaciones, que pudieran llamarse clásicas, empleadas para el cálculo de los movimientos sísmicos. Mas no se limita, como digo, a demostrar la falsedad de esto, que es fundamental, y probar la ventaja de los péndulos de cortísimo período, desprovistos de todo amortiguador, sino que, por medio de un ingeniosísimo y elegante estudio matemático y mecánico del problema, en el cual resaltan, de manera admirable, las más elevadas prendas intelectuales y toda la sagacidad del investigador original, deduce, con precisión, sencillez y claridad notables, lo que con gran propiedad llama Mier las verdaderas ecuaciones diferenciales del movimiento de los péndulos de toda especie. Tal es el sentido del mayor trabajo que en su vida ha realizado, consistente en una nueva concepción de las medidas sismológicas y de la manera de apreciar su significado, lo cual vale tanto como haber puesto las bases de un novísimo y original sistema, llamado, sin duda alguna y en días no lejanos, a los mayores desenvolvimientos, que traerán aparejadas hondas transformaciones en lo fundamental de los principios y de las leyes más generales de la Sismología. De los progresos que promete la concepción de Mier y su sistema es la previsión de los intensos fenómenos sismológicos, con tiempo suficiente para evitar en lo posible los estragos a ellos inherentes.

Ya antes de este gran trabajo, que tanto absorbiera su pensamiento los últimos años de la vida, había ocupado la actividad de Mier el interesantísimo problema de la constitución interna de la Tierra, a cuya dilucidación en tanta medida contribuyen los datos sismológicos. Que el problema tiene aspectos muy diferentes y variados, excusado es decirlo, y que a esclarecerlo deben contribuir a la vez muchas ciencias, también es cosa por demás sabida. Lo más importante, cuando se quiere hacer una hipótesis acerca de asunto tan vasto y trascendental, consiste en acertar en la coordinación de los datos fundamentales, descubriendo los enlaces de los que aparecen más apartados y desemejantes, y luego deducir, de este bien ordenado conjunto, una idea nueva y original.

Llevaron a Mier hasta establecer su ingeniosa hipótesis primeramente sus grandes estudios e investigaciones en los todavía poco explorados campos de la Geofísica, los datos que la Geología aporta y los que se deducen de las grandes conmociones de la misma corteza terrestre, y luego, de un modo singular, la consideración y la medida de estos ligerísimos y complicados movimientos que son como los latidos de la vida de nuestro planeta y los indicios ciertos de su no acabada consolidación. Y sin duda que al sagaz observador de las pequeñas cosas nunca se le oculta cómo en ellas está muchas veces la razón de las mayores, que así como los más fuertes objetivos del microscópico, aquellos de mayor aumento y campo más limitado, son los que sirven para descubrir las formas y las estructuras más delicadas, en las que la vida orgánica se contiene y manifiesta, así los microsismos, sólo registrables con aparatos de una extremada delicadeza, son en definitiva los indicios seguros que nos han de llevar al conocimiento de la vida de este otro ser, sólo diferente por el tamaño de los seres microscópicos elementales, que es la Tierra que habitamos y cuya organización inquirimos.

Admite Mier en su hipótesis acerca de la constitución del globo, aduciendo para ello razones y argumentos de gran significación científica, fundados en hechos bien observados y definidos, partiendo de la existencia de dos cuerpos o elementos distintos como primordiales constituyentes del núcleo terrestre, dotados de propiedades físicas bastante diferentes, en particular las que atañen a la volatilidad, la conductibilidad y la tenacidad, distinguiéndose uno del otro precisamente por los grados o intensidad de semejantes cualidades, que es al cabo lo que determina los estados de los cuerpos, que en la estructura de la Tierra cabe distinguir tres zonas diversas. Un núcleo sólido constituiría la más interna; sobre ella se extendería como un mar inmenso, dotado de movimientos, una capa líquida, cuya temperatura nunca alcanzaría aquellos grados que la fantasía y no los datos de la Ciencia asignaban al interior del planeta y este conjunto hallaríase recubierto por la capa sólida de la corteza terrestre, no consolidada y quieta a la hora presente, antes bien dotada de movimientos singulares, de complicadas formas que los sismógrafos registran.

Mucho gana esta manera de ver constituída la Tierra si consideramos que tanto los datos que suministran los modernos estudios astronómicos, como los deducidos de las observaciones sismológicas, son parte a que haya de ser rechazada la antigua, y pudiéramos decir clásica, concepción de la materia interior de la tierra a modo de un líquido ardiendo, todo él inflamado, una especie de fuego interno, cuya enorme temperatura, mediada por varios millares de grados, sólo a la del Sol sería comparable, cubierto este núcleo por la capa sólida de la corteza de espesor variable, determinado por el desigual enfriamiento de la parte interna. De mayor conformidad con nuestro actual saber, y con los datos de la Geofísica, es la nueva idea, que, de haber vivido Mier, de seguro habría tenido los necesarios desenvolvimientos.

Basta lo apuntado para entender cuál ha sido el sentir y el pensar de mi buen amigo en materias de Ciencia, como era cultivado su entendimiento y a cuáles cosas dedicó su inteligencia y su nunca cansada actividad: fué un verdadero hombre de Ciencia y un investigador de mucha cuantía, trabajó sin descanso por el eterno ideal de la verdad y es una de las más puras glorias de la Ciencia en España. Sus méritos en este sentido colócanlo en lugar muy elevado entre los mejores. Pero con ser esto tanto y de tan superior calidad, valía mucho más el hombre, jamás enorgullecido con sus triunfos; siempre modesto y siempre bueno; el serlo, sin el menor alarde y como la cosa más natural del mundo, era su cualidad preeminente. Su modestia no le consintió buscar el fácil aplauso de las multitudes y, sin embargo, para ellas escribió tantos y tantos artículos de divulgación científica, ni se cuidó nunca que se supiesen las distinciones de que era objeto en las Asambleas Científicas, ni le preocupaban honores o premios: la verdad y el bien por sí mismos fueron los ideales de su vida, y a ellos consagró su inteligencia y su corazón, su gran entendimiento y su nunca cansada actividad. Pasó por el mundo como deben pasar los hombres verdaderamente superiores: cultivando la Ciencia con todos los entusiasmos de la juventud, y practicando el bien por el bien mismo, por solidaridad humana.

Cuestiones relativas a la Geometría métrica proyectiva

por

Miguel Vegas

I.—Módulo de un vector

1. Como la Geometría métrica se deriva de la Gometría proyectiva, considerando proyectividades con una figura invariante (el absoluto), claro es que, recíprocamente, puede establecerse la métrica proyectiva, generalizando los conceptos métricos fundamentales de la métrica ordinaria, una vez establecido también por generalización la figura que ha de ser invariante en el grupo de las proyectividades que han de servir de base a la definición de aquellos conceptos; es decir, *el absoluto*.

Suponemos, pues, establecida la Geometría proyectiva utilizando los axiomas de ordenación y enlace y un axioma de continuidad, como se hace en la obra *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*, de nuestro distinguido compañero señor Rey Pastor, premiada con el premio Alba por esta Real Academia.

2. Antes de entrar en materia vamos a recordar algunas propiedades de las proyectividades que hemos de utilizar en lo sucesivo.

Se sabe que para que un conjunto de operaciones forme un grupo, han de cumplirse las condiciones siguientes:

1.ª Que pertenezca al conjunto el producto de dos cualesquiera de las operaciones que lo forman, sean o no distintas estas operaciones; y

2.ª Que también pertenezca al conjunto la inversa de cada una de las operaciones que le componen.

De donde se deduce que, siendo la identidad el producto de una operación por su inversa, forzosamente pertenece a un grupo de operaciones la operación idéntica.

Una proyectividad en una figura fundamental tiene un elemento doble único Ω, o una involución unida I; en el primer caso diremos con Schur, en su notable obra *Grundlagen der Geometrie,* que se trata de una *pros-*

pectividad, y al elemento doble Ω le llamaremos *elemento límite*. Con lo cual pueden establecerse las proposiciones siguientes:

a) Todas las prospectividades contenidas en una figura fundamental (serie rectilínea, haz de rectas o de planos) con el mismo elemento límite, forman grupo.

b) También forman un grupo todas las proyectividades contenidas en una figura fundamental con la misma involución unida.

3. En las figuras homográficas o colineales de segunda categoría que, para precisar, nos referiremos a las figuras planas, vamos a considerar de un modo especial las homologías y las que tienen doble un punto O y una recta doble *e* que no pasa por este punto, siendo elíptica la involución unida a la proyectividad contenida en aquella recta.

Para evitar perífrasis, llamaremos, con el profesor Rey Pastor, *traslaciones proyectivas* a las homologías cuyo centro está en el eje; *dilataciones proyectivas*, a las homologías con el centro exterior al eje, y *torsiones proyectivas* de centro O y eje *e*, a las colineaciones últimamente citadas, y entre éstas las que tienen cónicas analagmáticas, es decir, invariantes, las designaremos con el nombre de *rotaciones* o *giros proyectivos*, y en ellas, evidentemente, toda cónica invariante goza de la propiedad de que respecto de ella son polares el centro O y el eje *e* de la torsión, y, además, la involución unida a la proyectividad situada en *e* está constituída por pares de puntos conjugados respecto de la cónica.

Como el producto de dos colineaciones con una figura doble es otra colineación con esta misma figura doble, se deducen las propiedades siguientes, bien conocidas:

1.° Todas las homologías con el mismo centro y con el mismo eje forman un grupo.

2.° Todas las traslaciones con el mismo eje o con el mismo centro forman un grupo.

3.° Todas las homologías con el mismo centro o con el mismo eje forman grupo. Pues el producto de dos homologías respecto del mismo eje, por ejemplo, es otra homología con este eje y un centro que está en línea recta con los de las homologías factores.

4.° Como el producto de dos homologías respecto del mismo eje y centros distintos puede ser una traslación, se deduce que todas las dilataciones, más todas las traslaciones respecto del mismo eje o centro, forman un grupo.

5.° El producto de dos torsiones con el mismo eje y el mismo centro es otra torsión, a no ser que sean inversas las dos proyectividades contenidas en el eje, en cuyo caso es una dilatación por ser la identidad el producto de estas dos proyectividades; luego todas las dilataciones y torsiones con el mismo centro, el mismo eje y la misma involución, unida a la proyectividad contenida en esta recta, forman un grupo.

4. En las figuras en el espacio designaremos también con los nombres de traslaciones proyectivas o dilataciones proyectivas a las homologías que tienen su centro en el plano central o exterior a este plano.

Entre las demás colineaciones existen las que tienen dobles dos series rectilíneas cuyas bases se cruzan, las cuales son también aristas de haces de planos dobles; es decir, colineaciones con dos ejes que se cruzan, los cuales pueden en algún caso confundirse en uno. Todas las colineaciones con dos ejes que se cruzan, o con un solo eje, forman evidentemente un grupo. También merecen especial mención las colineaciones que tienen una serie doble r cuya base es arista de una proyectividad de planos sin planos dobles reales, y otra recta doble s que se cruza con la r y que, por tanto, es arista de un haz de planos dobles y base de una proyectividad sin puntos dobles.

Por generalización llamaremos torsiones proyectivas a estas colineaciones, siendo la recta r el eje principal y la recta s el eje secundario. Todas las torsiones con los mismos ejes r y s y la misma involución unida a la proyectividad contenida en el último, más las colineaciones con los dos ejes r y s, forman un grupo, toda vez que cuando las proyectividades contenidas en el eje secundario sean inversas, y su producto sea, por tanto, la identidad, el producto de las dos torsiones es una colineación con dos ejes.

Cuando exista una cuádrica invariante respecto de una torsión, es claro los dos ejes son polares respecto de ella y que la involución unida a la proyectividad contenida en el eje secundario, está constituída por pares de puntos conjugados respecto de la misma. En este caso llamaremos rotación o giro proyectivo a la colineación.

5. Para establecer las relaciones métrico-proyectivas es preciso fijar el concepto fundamental de *magnitud* proyectiva, teniendo en cuenta que este concepto puede aplicarse a todo conjunto entre cuyos elementos constitutivos se defina la igualdad y la desigualdad, debiendo cumplir esta definición con las tres propiedades esenciales de identidad, reciprocidad y transitividad, esquemáticamente representadas las relaciones: 1.ª, $a = a$; 2.ª, si $a = b$, es $b = a$, y 3.ª, si $a = b$ y $b = c$, es $a = c$.

Dentro de este concepto de magnitud está el concepto de segmento y de ángulo rectilíneo o diedro, conceptos que se reducen uno a otro, ya mediante la consideración de la Geometría abstracta o dentro del terreno elemental, por medio de proyecciones o secciones.

Es claro que las relaciones métrico-proyectivas dependen de la definición adoptada para el segmento rectilíneo, y de aquí que se obtendrán tantas ramas de esta Geometría cuantas sean las definiciones establecidas de estos segmentos.

Ahora bien: en la métrica ordinaria dos segmentos AA′ y BB′ son iguales cuando los extremos son homólogos en una traslación; es decir, en una prospectividad cuyo punto límite es el del infinito de la recta. Por tanto, la primera y más natural generalización del segmento proyectivo es el ideado por Schur (1), cuyo cálculo coincide en el fondo con el de las cuaternas o figuras simples de Staudt, expuesto por el ilustre geómetra mi querido maestro don Eduardo Torroja (2), y con los segmentos que el señor Rey y Pastor llama de primera especie (3).

Según esto, fijado un punto Ω:

1.º Llamaremos segmento proyectivo, que representaremos por (AA_1), a la prospectividad de punto límite Ω, definida por el par de puntos A-A_1.

2.º Diremos que dos segmentos proyectivos (AA_1) y (BB_1) son equivalentes o iguales cuando los extremos A_1 y B_1 son homólogos en una prospectividad de punto límite Ω; es decir, cuando definen la misma prospectividad.

En el establecimiento de las operaciones con estos segmentos no hemos de entretenernos por estar magistralmente expuestas en las obras de los profesores Rey y Schur antes citadas.

6. Si nos fijamos en los segmentos, ya sean en la Geometría ordinaria, ya sean segmentos proyectivos, y en los vectores definidos en aquella ciencia, y que tanto se aplican al Análisis y a la Mecánica, observamos entre ellos una diferencia esencial, a saber: que los segmentos con el mismo punto límite forman un conjunto que está en correspondencia biunívoca continua con los elementos de una figura de primera categoría, en particular con los puntos de una recta, mientras que los vectores euclidianos están en correspondencia biunívoca continua con los elementos de una figura de segunda categoría, en particular con los puntos de un plano.

De aquí que se llame *escalar* a todo sistema de magnitudes que estén en correspondencia biunívoca continua con los puntos de una recta, y *vectorial* a todo sistema de magnitudes que esté en correspondencia biunívoca y continua con los puntos de un plano.

Una colineación plana sometida a condiciones que equivalgan al cono-

(1) *Grudlagen der Geometrie,* pág. 51.
(2) *Geometría de la posición,* pág. 257.
(3) *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior,* pág. 235.

cimiento de tres pares de puntos homólogos, quedará determinada cuando conozcamos el par de puntos homólogos A, A_1, y, por tanto, se obtendrán todas las colineaciones posibles que satisfacen a las condiciones impuestas, haciendo corresponder al punto A todos los del plano de la figura homóloga; es decir, que el citado conjunto de colineaciones es un sistema vectorial, y así se obtiene una generalización bastante amplia del concepto de vector.

Según esto, el conjunto de todas las homologías con el mismo centro O y el mismo eje *e*, es un sistema escalar, puesto que se obtienen todas ellas haciendo corresponder a un punto A todos los de la recta OA que le unen con el centro.

Análogamente todas las traslaciones con el mismo eje o con el mismo centro, así como todas las torsiones con el mismo centro, el mismo eje y la misma involución unida a la proyectividad contenida en esta recta, forman un sistema vectorial.

En el espacio, las homologías con el mismo centro y el mismo plano central forman un sistema escalar, y las traslaciones con el mismo plano central o con el mismo centro forman un sistema vectorial, así como también todas las torsiones con los mismos ejes y la misma involución unida a la proyectividad contenida en el eje secundario.

7. Lo que acaba de decirse indica diversas generalizaciones del concepto de vector, de las cuales la más natural es la que considera como tal una traslación proyectiva.

Para evitar perífrasis, llamaremos en lo sucesivo al eje, plano central común ω del sistema de vectores que se considere, recta o plano fundamental, y como, una vez fijado este elemento, la traslación queda determinada por el conocimiento de un par de puntos homólogos A y A_1 dados en ese orden, de aquí que designemos al vector o traslación por $\underrightarrow{AA_1}$, y la operación inversa, o sea el vector contrario, por $\underrightarrow{A_1A}$.

Dos vectores se llaman equivalentes o iguales cuando definen una misma traslación, de modo que si representamos una traslación de centro O y eje o plano central ω por la relación $\overline{\omega}AB \barwedge \overline{\omega}A_1B_1$, esta relación equivale a ésta: $\underrightarrow{AA_1} = \underrightarrow{BB_1}$, y ambas prueban que las rectas AB y A_1B_1 se cortan en un punto P del eje o plano central ω, de donde se deduce que los puntos P y O son diagonales del cuadrivértice completo ABA_1B_1, y, por tanto, que los puntos A y B_1 y los A_1 y B son conjugados en la homología involutiva de eje o plano central ω, y cuyo centro Q es el tercer punto diagonal del citado cuadrivértice; es decir, que de la relación $\overline{\omega}AB \barwedge \overline{\omega}A_1B_1$ se deduce que $\omega\omega \,.\, AB_1 \,.\, A_1B$ es una homología involutiva, y recíprocamente, pudiéndose, por tanto, establecer también la relación $\overline{\omega}AA_1 \overline{\wedge} \overline{\omega}BB_1$, relaciones que no son más que una generalización de las análogas establecidas en las prospectividades y que pueden también expresarse del modo siguiente:

1.ª Si $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, $\omega\omega . AB_1 . BA_1$ es un sistema en involución, y recíprocamente.

2.ª Si $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

De lo dicho se desprende que se puede construir siempre un vector igual a otro dado y cuyo origen sea un punto cualquiera exterior al eje o plano fundamental.

8. Aplicar un vector a un punto M, es obtener el punto M′ homólogo del M en la traslación que define el vector dado, y aplicar un vector a otro es obtener el vector determinado por los resultados de aplicar el primer vector al origen y extremo del segundo.

Si aplicamos el vector $\overrightarrow{PQ}$ al $\overrightarrow{AA_1}$, se obtiene el vector $\overrightarrow{A'A_1'}$, de tal modo que las rectas AA′ y A_1A_1' concurren en el centro R del primer vector y las AA_1 y $A'A_1'$ pasan por el centro S del segundo vector, y, por tanto, se verificará la igualdad $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A'A_1'}$; es decir, que

a) El transformado de un vector por otro vector es otro igual al primero, o, dicho de otro modo, una traslación se transforma en sí misma por por otra traslación con el mismo eje o plano central, por tanto,

b) Dos traslaciones del mismo sistema son permutables, y, por consiguiente, todas las traslaciones respecto de un mismo eje o plano central forman un grupo abeliano.

9. *a)* Dos traslaciones V y V_1 del mismo eje o plano central ω y el mismo centro O_1, se transforman una en otra por infinitas dilataciones de eje o plano central ω, estando determinada cada una por su centro O. Pues tomando $\overrightarrow{OA} = V$ y $\overrightarrow{OA_1} = V_1$, como los puntos A y A_1, extremos de los vectores que definen las traslaciones dadas, están en la recta OO_1, estos vectores son homólogos en la dilatación determinada por el centro O y eje o plano central ω, y el par de puntos homólogos A-A_1.

b) Dadas dos traslaciones V y V_1 del mismo eje ω y distintos centros O y O_1, fijado un centro O′ exterior a ω y una involución I sobre esta recta, hay una sola torsión T en el plano O′ω, que transforma V en V_1. Pues tomando $\overrightarrow{O'A} = V$ y $\overrightarrow{O'A_1} = V_1$, estos vectores son homólogos en la torsión definida por el centro O′, el eje ω, la involución I y el par de puntos homólogos A-A_1.

10. Hemos dicho (3) que cuando en una torsión O ω I exista una có-

nica φ invariante, la torsión se llama rotación o giro proyectivo, y es claro que, respecto de esta cónica, I es una involución de puntos conjugados y el centro O de la torsión es el polo del eje ω.

Si A y A_1 son dos puntos homólogos situados en la cónica φ, y A' y A'_1 son los segundos puntos de encuentro de esta cónica con las rectas OA y OA_1, el cuadrivértice completo inscrito $AA'A_1A'_1$ prueba que los puntos P y Q de intersección de los pares de lados opuestos AA_1-$A'A'_1$ y AA'-$A_1A'_1$ son conjugados en I y están armónicamente separados por los puntos M y N de intersección de la recta ω con los otros dos lados OA y OA_1 del cuadrivértice.

Recíprocamente, si el punto Q, armónicamente separado del P de intersección del eje ω de la torsión con la recta A A_1 que une dos puntos homólogos por los M y N de intersección del mismo eje ω con las rectas OA y OA_1, es conjugado con P en la involución I, la cónica definida por esta involución, el polo O de su base ω y el punto A pasa por el punto A_1 y es invariante en la torsión considerada. Pues si A_2 es el punto de intersección de esta cónica con la recta OA_1, en el giro determinado por esta cónica, la recta AA_2 debe cortar a la recta ω en un punto P', tal que su conjugado Q' en la involución I está armónicamente separado del P' por los M y N, y como en la involución elíptica I existe un solo par que cumple esta condición, los puntos P' y Q' se confunden con los P y Q, y, por tanto, también coinciden los A_1 y A_2.

Si B y B_1 son otros dos puntos homólogos en la torsión, las rectas AA_1 y BB_1 concurren en el mismo punto P del eje ω a causa de la perspectividad de las dos series homólogas de bases OA y OA_1, de donde podemos concluir:

a) En un giro, toda cónica respecto de la que la involución I está formada por pares de puntos conjugados respecto de ella, siendo el polo de la base ω el centro O del giro, es invariante.

Y como las colineaciones con una cónica invariante forman un grupo, se deduce:

b) Todos los giros con el mismo centro, el mismo eje y la misma involución I, forman un grupo; y los extremos A_1, A_2, A_3..., de los vectoes transformados de uno dado $\overrightarrow{OA}$ están en una cónica que contiene la involución I, siendo el polo de la base ω el centro O común de todos los giros.

Si dos puntos A y A_1, homólogos en el giro, están en línea recta con O, la torsión se convierte en dilatación, la cual, teniendo cónica invariante, es involutiva.

11. Sean T y T_1 dos torsiones del mismo cento O y la misma involución I; tomando como triángulo de referencia el que tiene por vértice el O, y dos puntos conjugados en la involución I, las ecuaciones que las representan son

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= ay - bh^2x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_2 &= a_1x_1 + b_1y_1 \\ y_2 &= a_1y_1 - b_1h^2x_1 \end{aligned}$$

Si A (x_1y) y A′ $(x'y')$ son dos puntos homólogos en la torsión T, y A′ y A″ $(x''\,y'')$ son homólogos en la torsión T′, los puntos A y A″ lo serán en la torsión TT′ producto de las dos dadas, representado este producto por las ecuaciones

$$x'' = (a_1a - bb_1h^2)x + (a_1b + b_1a)y\,,$$
$$y'' = (a_1a - bb_1h^2)y - (a_1b + b_1a)h^2x,$$

que represnta otra torsión con los mismos elementos fundamentales.

Si A_1 es homólogo de A en T′, y A_2 es homólogo de A_1 en T, las relaciones que enlazan las coordenadas de los puntos A_2 y A son las anteriormente halladas, de donde se deduce:

a) El producto de dos torsiones respecto del mismo centro y la misma involución es conmutativo, y es una torsión con los mismos elementos fundamentales, o una dilatación; esto último sucede cuando se verifica la condición $a_1b + b_1a = 0$, como lo demuestran las ecuaciones últimas.

b) Las dilataciones y torsiones respecto del mismo centro y la mismo involución forman un grupo abeliano.

c) Una torsión se transforma en sí misma por otra torsión o dilatación que tenga los mismos elementos fundamentales que la dada.

Si, pues, A-A_1 y B-B_1 son dos pares de puntos homólogos de una torsión de centro O e involución fundamental I, y convenimos en expresar esto por la relación $OIAB\barwedge OIA_1B_1$, de la última propiedad se deduce la relación $OIAA_1\barwedge OIBB_1$, que constituye una generalización de las relaciones análogas que existen en las figuras de primera categoría.

12. Acabamos de ver que, dada en una recta ω una involución I y un centro O exterior a esta recta, existe una sola torsión que trasforma una traslación V_1 de eje ω y centro O_1 en otra V_2 del mismo eje y centro O_2.

Cuando esta torsión es un giro, se dice que las dos traslaciones o sus vectores representantes tienen *módulos* o *valores absolutos* iguales. El módulo de un vector $\overrightarrow{OA}$ lo designaremos por $|OA|$.

De lo dicho en el párrafo 10 se deduce

a) Los extremos de A_1 B_1 C_1 ... de todos los vectores de origen O que tienen módulos iguales, están en una cónica que tiene la involución I formada por puntos conjugados respecto de ella, siendo la base ω la polar del centro O del giro.

b) Si es $|OA| = |OB|$ y $|OB| = |OC|$, es también $|OA| = |OC|$. Y como, evidentemente, se verifica para los módulos de los vectores la propiedad idéntica y la recíproca, se deduce que estos módulos constituyen un sistema de magnitudes.

c) Si se verifican las igualdades $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$ y $|OA| = |OB|$, se verifica también $|O'A'| = |O'B'|$.

Pues aplicando a la torsión OIAB la traslación $\overrightarrow{OO'}$, se obtiene otra torsión O'IA'B', y como las rectas O'A', O'B' y A'B' cortan respectivamente a las OA, OB y AB en puntos de la recta ω, se deduce que si la primera torsión es un giro, también lo es la segunda. La definición de valor absoluto de un vector es, pues, independiente del centro de giro elegido.

d) La igualdad de los módulos de dos vectores es invariante en todas las colineaciones que dejan invariante la involución fundamental I; es decir, en las torsiones, dilataciones y traslaciones; pero el valor absoluto o módulo de un vector es invariante sólo en las traslaciones, giros e involuciones.

Como sobre una recta cualquiera distinta de la fundamental ω, y a partir de uno cualquiera de sus puntos, puede construirse un vector del mismo módulo que otro cualquiera dado, las relaciones existentes entre los módulos de varios vectores de un sistema se reducen a relaciones entre segmentos proyectivos sobre una recta.

Si convenimos en llamar movimiento a toda colineación que deja invariable la involución I fundamental, así como al módulo de cualquier vector, de lo dicho anteriormente se deduce:

e) Los movimientos planos son las traslaciones, giros e involuciones y los productos de estas operaciones.

f) Los movimientos planos forman un grupo.

Si en un movimiento M son homólogos los puntos A y A_1, en el producto de esta colinación por la traslación $T = \overrightarrow{A_1A}$ es doble el punto A y, por tanto, el resultado es un giro G cuyo centro es este punto; es decir, que se verifica la igualdad $MT = G$, de donde $MTT' = M = GT'$, siendo T' la traslación contraria a T; luego

g) Todo movimiento plano es el producto de la traslación determinada por dos puntos homólogos por un giro en torno de este punto.

Además, si $OIAA_1$ es una torsión T, y OIAA' es un giro G, la colineación $OIA'A_1$ es una dilatación D, y, por tanto, se verifica que $T = GD$.

h) Toda torsión es el producto de un giro por una dilatación.

II.—Operaciones con vectores

13. Siendo el concepto de vector una generalización del concepto de segmento, vamos a generalizar a estos nuevos entes las operaciones establecidas para los citados segmentos.

En cuanto a la suma, basta extender a los vectores las igualdades $OA + OB = OC$, si $OB = AC$ que definen la suma de segmentos rectilíneos en la geometría euclídea, y que, generalizadas, conducía a las $(OA) + (OB) = (OC)$, si $(OB) = (AC)$, que permiten definir la suma de dos segmentos proyectivos.

Definiremos, pues, la suma de dos vectores por las igualdades

$$\underrightarrow{OA} + \underrightarrow{OB} = \underrightarrow{OC} \qquad \text{si} \qquad \underrightarrow{OB} = \underrightarrow{AC}.$$

La última igualdad prueba [7] que si ω es la base de la involución fundamenta I, $\omega\omega \,.\, AB \,.\, OC$ es un sistema involutivo de eje ω en el cual pueden permutarse B y A; y si B y C coinciden, también coinciden B y O; es decir,

a) La suma de dos vectores es conmutativa, y el módulo de la operación es el vector nulo $\underrightarrow{OO}$, o sea la identidad.

También puede definirse la suma de dos vectores, $\underrightarrow{OA}$ y $\underrightarrow{OB}$, llevando el segundo a continuación del primero, es decir, aplicando al extremo A del primero la traslación representada por el segundo, y el punto C obtenido es el extremo del vector suma de los propuestos.

La operación progresiva $\underrightarrow{OA} + \underrightarrow{OB} + \underrightarrow{OC} + \dots$ tiene el significado siguiente: se suman los dos primeros, al resultado se suma el tercero, al resultado se suma el cuarto, etc.

Si la traslación $\underrightarrow{OB}$ transforma A en B′ y la $\underrightarrow{OC}$ transforma B′ en C′, se verifica, por definición, la igualdad

$$[\underrightarrow{OA} + \underrightarrow{OB}] + \underrightarrow{OC} = \underrightarrow{OB'} + \underrightarrow{B'C'} = \underrightarrow{OC'}.$$

Pero

$$\underrightarrow{OB} + \underrightarrow{OC} = \underrightarrow{AB'} + \underrightarrow{B'C'} = \underrightarrow{AC'};$$

luego también es

$$\underrightarrow{OA} + [\underrightarrow{OB} + \underrightarrow{OC}] = \underrightarrow{OA} + \underrightarrow{AC'} = \underrightarrow{OC'},$$

propiedad que, junto con la conmutativa de dos sumandos, demuestra:

b) La suma de varios vectores es conmutativa y asociativa.

14. Restar de un vector $\overrightarrow{OC}$ otro $\overrightarrow{OB}$ es hallar un tercero $\overrightarrow{OA}$ que, sumado al segundo, dé por resultado el primero, y se representa por la igualdad $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$, la cual es, por tanto, equivalente a la $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$, o a la $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

Cuando la suma de dos vectores es nula, como el punto C se confunde con el O, se deduce que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$, y, por tanto, que el producto de las dos traslaciones que representan aquellos vectores es la identidad, es decir, que los dos citados vectores son contrarios u opuestos [7], y $\omega\omega$. OO . AB es una involución, y, por tanto,

a) Los extremos de dos vectores contrarios son conjugados en el sistema en involución de eje ω y centro O.

Si $\overrightarrow{OB'}$ es el vector contrario del $\overrightarrow{OB}$, se verifica evidentemente la igualdad $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$, que manifiesta que, para obtener la diferencia entre dos vectores, basta sumar al minuendo el vector contrario del sustraendo.

15. Dado el vector $\overrightarrow{A_0A_1}$, por adiciones sucesivas obtenemos las igualdades $\overrightarrow{A_0A_2} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_3} = \overrightarrow{A_0A_2} + \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots$, y como todos los puntos A_0 A_1 A_2 ... están en línea recta, se deduce:

a) La sucesión A_0 A_1 A_2 ... es, precisamente, la red armónica (A_0 A_1 Ω), siendo Ω el punto de intersección de las rectas A_0 A_1 y ω; y, análogamente, los puntos A_{-1}, A_{-2}, ... son los extremos de los vectores opuestos.

b) Pueden escribirse legítimamente las igualdades $\overrightarrow{A_0A_n} = n\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_mA_n} = \overrightarrow{A_0A_n} - \overrightarrow{A_0A_m} = (n - m)\overrightarrow{A_0A_1}$, las cuales son válidas para todos los valores enteros positivos o negativos de n.

Considerando la primera igualdad equivalente a la $\overrightarrow{A_0A_1} = \frac{1}{n}\overrightarrow{A_0A_n}$, se deduce que el producto de un vector por un número racional se confunde con el producto por este número de un segmento proyectivo. Por tanto, el producto de un número real por un vector queda reducido al producto de un número real por un segmento proyectivo, y de aquí que

c) El producto de un vector por un número real es otro vector del mismo centro y eje, y recíprocamente; dados dos vectores del mismo centro y eje, uno cualquiera de ellos es el producto del otro por un número real.

16. Si $A - A_1$ y $B - B_1$ son dos pares de puntos homólogos de una torsión de centro O e involución fundamental I, a los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ corresponden los $\overrightarrow{OA_1}$ y $\overrightarrow{OB_1}$, y se verifica la relación $OIAB = OIA_1B_1$; por tanto, de la igualdad $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ se deduce la $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB_1}$, toda vez que la primera igualdad expresa que coinciden los dos puntos A y B, y entonces también deben coincidir los A_1 y B_1.

Además, la igualdad $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ manifiesta que los pares de puntos $A - B$ y $O - C$ están armónicamente separados por el eje ω de la torsión y por el punto P de intersección de las rectas AB y OC; luego también son figuras armónicas las $\omega P_1A_1B_1$ y ωP_1OC_1, siendo P_1 y C_1 los homólogos de P y C en la torsión considerada, y, por tanto, se verifica la igualdad $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC_1}$. Luego en una torsión, a un sistema de vectores con el mismo eje de la torsión, corresponde otro sistema de vectores con el mismo eje, de tal modo, que en ellos existe correspondencia en la igualdad y en la suma. Por tanto, debe decirse que existe proporcionalidad entre estos dos sistemas de vectores, y será lógico escribir la igualdad

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA_1}} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OB_1}}.$$

Ahora bien: si la torsión es una dilatación, los puntos A y A_1, así como los B y B_1, están en línea recta con O, y si A' y A'_1 son los puntos homólogos de los A y A_1 en el giro determinado por las dos rectas homólogas OA y OB, también son homólogos en la dilatación los pares de puntos A' y A'_1, y en el sistema de segmentos proyectivos cuyo punto límite es el de intersección del eje ω de la dilatación con la recta OB, se verifica la relación

$$\frac{(OA')}{(OA'_1)} = \frac{(OB)}{(OB_1)}.$$

Y como se verifican las igualdades $(OA') = |OA|$, $(OA'_1) = |OA_1|$, $(OB) = |OB|$ y $(OB_1) = |OB_1|$, entre los módulos de los cuatro vectores considerados, existe la relación

$$\frac{|OA|}{|OA_1|} = \frac{|OB|}{|OB_1|}.$$

Si la torsión considerada no es dilatación, hemos demostrado [12, *h*] que es el producto de un giro por una dilatación, y como el giro no altera los valores absolutos o módulos de los vectores, la proporcionalidad entre estos módulos subsiste; podemos, pues, decir:

a) En toda torsión es invariante la razón de dos vectores, y también la razón de sus módulos.

Tomando como unidad un vector $\underrightarrow{OU}$, y conviniendo en suprimirle en la escritura, la igualdad

$$\frac{\underrightarrow{OC}}{\underrightarrow{OB}} = \frac{\underrightarrow{OA}}{\underrightarrow{OU}}$$

se escribe en la forma

$$\frac{\underrightarrow{OC}}{\underrightarrow{OB}} = \underrightarrow{OA},$$

o bien

$$\underrightarrow{OC} : \underrightarrow{OB} = \underrightarrow{OA},$$

que define el cociente del vector $\underrightarrow{OC}$ por el $\underrightarrow{OB}$ como un vector homólogo del vector unidad en la torsión definida por el vector dividendo como homólogo del divisor.

De lo dicho anteriormente se deduce que

b) El módulo del cociente de dos vectores es igual al cociente de los módulos.

Además de la relación OIUB $\barwedge$ OIAC se deriva la OIUA $\barwedge$ OIBC, o sea que

$$\frac{\underrightarrow{OC}}{\underrightarrow{OA}} = \underrightarrow{OB};$$

y, por tanto, si C y B se confunden, también se confunden A y U; es decir,

c) En el cociente de dos vectores son permutables el divisor y el cociente; y si el dividendo es igual al divisor, el cociente es el vector unidad.

17. El producto $\underrightarrow{OC}$ de dos vectores $\underrightarrow{OA}$ y $\underrightarrow{OB}$ se define como la operación inversa del cociente, es decir, como un vector que, dividido por uno de los factores, da como resultado el otro factor; es decir, como vector homólogo de uno de los factores en la torsión definida por el otro factor como homólogo del vector unidad. De modo que las dos igualdades

$$\underrightarrow{OC} : \underrightarrow{OB} = \underrightarrow{OA} \qquad \text{y} \qquad \underrightarrow{OA} \times \underrightarrow{OB} = \underrightarrow{OC}$$

son equivalentes.

De lo expuesto en el párrafo anterior se deduce:

a) El producto de dos vectores es una operación conmutativa.

b) Si uno de los factores es el vector unidad, el producto es el otro factor; es decir, que el módulo de la operación es la unidad.

c) El valor absoluto del producto de dos vectores es igual al producto de los módulos de los factores.

Y como en la torsión que define el producto se verifica que si B se confunde con O, su homólogo C se confunde también con O, se concluye:

d) Si uno de los factores del producto de dos vectores es nulo, el producto es también nulo, y recíprocamente.

De la relación $OIUA \barwedge OIBC$ se deduce la igualdad $\underrightarrow{OA} \times \underrightarrow{OB} = \underrightarrow{OC}$, y multiplicando por $\underrightarrow{OD}$ se obtiene $\underrightarrow{OC} \times \underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OE}$, siendo $OIUC \wedge OIDE$.

Ahora bien: poniendo $\underrightarrow{OB} \times \underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OF}$, se obtiene $OIUB \barwedge OIDF$, y, por tanto, se verifica que $OIBC \barwedge OIFE$, o sea $OIUA \barwedge OIFE$, y, por tanto, $\underrightarrow{OA} \times \underrightarrow{OF} = \underrightarrow{OD}$; es decir, $\underrightarrow{OA} \times \underrightarrow{OB} \times \underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OA} \times [\underrightarrow{OB} \times \underrightarrow{OD}]$, luego

e) El producto de vectores es una operación asociativa.

f) El producto de varios vectores es independiente del orden de los factores, y es nulo cuando se anula uno de los factores.

Pongamos

$$
\begin{array}{llll}
\underrightarrow{OA} \times \underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OA'} & \text{o sea} & OIUA \barwedge OIDA' \\
\underrightarrow{OB} \times \underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OB'} & \text{»} & OIUB \barwedge OIDB' \\
\underrightarrow{OC} \times \underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OC'} & \text{»} & OIUC \barwedge OIDC'
\end{array}
$$

de donde $OIABC \pi OIA'B'C'$, y, por tanto, en la torsión que esta relación define a la involución cuyo eje ω es el de la torsión y los dos pares A — B, C — B son conjugados, corresponde otra involución con este mismo eje y los pares de puntos conjugados A′ — B′ y O — E′; es decir, que si se verifica la igualdad $\underrightarrow{OC} = \underrightarrow{OA} + \underrightarrow{OB}$ (13), también se verifica la $\underrightarrow{OC'} = \underrightarrow{OA'} + \underrightarrow{OB'}$, o sea

$$
(\underrightarrow{OA} + \underrightarrow{OB})\underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OC} \times \underrightarrow{OD} = \underrightarrow{OA} \times \underrightarrow{OD} + \underrightarrow{OB} \times \underrightarrow{OD};
$$

por consiguiente:

g) El producto de vectores tiene la propiedad distributiva.

Si $\underrightarrow{OA}$ y $\underrightarrow{OA'}$ son dos vectores contrarios, se verifica la igualdad $\underrightarrow{OA} + \underrightarrow{OA'} = 0$, y de ésta se deduce la $\underrightarrow{OA} \times \underrightarrow{OC} + \underrightarrow{OA'} \times \underrightarrow{OC} = 0$.

Y si también son contrarios $\underset{\longrightarrow}{OB}$ y $\underset{\longrightarrow}{OB'}$, aplicando a la torsión OIAB la involución OIAA′ se obtiene la misma torsión (11, *c*) y, por tanto, los puntos B y B′ son conjugados en la involución; luego

h) Los productos de un vector por otros dos contrarios son asimismo contrarios, y el producto de dos vectores es igual al de sus contrarios. En general, el producto de varios factores es igual o contrario del producto de sus contrarios, según que el número de factores sea par o impar.

Cuando el producto de dos vectores es el vector unidad, los dos vectores se llaman recíprocos, y, por tanto, si $\underset{\longrightarrow}{OA}$ y $\underset{\longrightarrow}{OA_1}$ son recíprocos, se tiene

$$\underset{\longrightarrow}{OA_1} = \frac{1}{\underset{\longrightarrow}{OA}},$$

o sea

$$\frac{\underset{\longrightarrow}{OA_1}}{\underset{\longrightarrow}{OU}} = \frac{\underset{\longrightarrow}{OU}}{\underset{\longrightarrow}{OA}},$$

luego

i) Los vectores homólogos del vector unidad, en una torsión y en la torsión inversa, son recíprocos.

Si, pues, OU_1 es el rayo conjugado con el OU en la involución proyectante de la fundamental I desde el punto O, es armónico el haz O-AA_1UU_1, y la involución cuyos rayos dobles son OA y OA_1 es conjugada de la proyectante de la involución fundamental. Por tanto,

j) Los centros de los pares de vectores recíprocos forman una involución conjugada con la fundamental que tiene como punto doble el centro del vector unidad.

Multiplicando la igualdad $\underset{\longrightarrow}{OC} = \underset{\longrightarrow}{OB} \times \underset{\longrightarrow}{OA}$ por el vector $\underset{\longrightarrow}{OB_1}$, recíproco del $\underset{\longrightarrow}{OB}$, se obtiene

$$\underset{\longrightarrow}{OC} \times \underset{\longrightarrow}{OB_1} = \underset{\longrightarrow}{OB} \times \underset{\longrightarrow}{OB_1} \times \underset{\longrightarrow}{OA} = \underset{\longrightarrow}{OA} = \underset{\longrightarrow}{OC} : \underset{\longrightarrow}{OB};$$

luego

k) El cociente de dos vectores es el producto del dividendo por el recíproco del divisor.

18. Designando por a, b, c, ... varios vectores de un sistema, y por a_1, b_1, c_1, ... sus recíprocos, se tienen las igualdades $aa_1 = 1$, $bb_1 = 1$ $ab \times a_1b_1 = 1$; es decir:

a) El producto de varios vectores es recíproco del producto de los recíprocos de los factores.

De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se deduce $ab_1 = cd_1$, y de ésta la $abb_1d = cbd_1d$, o sea $ad = bc$. Asimismo se verifica $(a \pm b \pm c)d_1 = (ad_1 \pm bd_1 \pm cd_1)$, o sea $(a \pm b \pm c) : d = (a : d) \pm (b : d) \pm (c : d)$, y $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab_1 \times cd_1 =$

$= ac \times b_1d_1 = \frac{ac}{bd}$, luego

b) Todas las propiedades relativas a los números fraccionarios subsisten para los cocientes de vectores.

19. El producto de n vectores iguales es la potencia enésima de este vector.

Si A_1, A_2, A_3, ... A_n son los puntos homólogos sucesivos del U en una torsión, se verifican las igualdades

$\overrightarrow{OA_1} \times \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_2} \times \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_3}$..., $\overrightarrow{OA_{n-1}} \times \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA}$,

o sea

$$(\overrightarrow{OA_1})^2 = \overrightarrow{OA_2}, \quad (\overrightarrow{OA_1})^3 = \overrightarrow{OA_3}..., \quad (\overrightarrow{OA_1})^n = \overrightarrow{OA_n};$$

y de esto y de lo dicho en los dos párrafos anteriores se deduce:

a) Las potencias del mismo exponente de dos vectores contrarios son vectores iguales o contrarios, según que el exponente sea par o impar

b) Las potencias del mismo grado de dos vectores recíprocos son dos vectores también recíprocos.

c) La potencia enésima de un producto de vectores es el producto de las potencias enésimas de los factores.

d) La potencia enésima de un cociente es el cociente de las potencias enésimas del dividendo y divisor.

e) El producto de potencias de la misma base es otra potencia de esta base con un exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.

f) El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de esta base con un exponente igual a la diferencia entre los exponentes del dividendo y divisor.

g) El resultado de elevar una potencia de un vector a otra potencia es otra potencia del vector con un exponente igual al producto de los exponentes.

Asimismo, de la ley distributiva del producto se deduce que es válida para los vectores la fórmula del binomio de Newton y la de Leibniz relativa a la potencia de un polinomio.

Y conviniendo en escribir $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, siendo a un vector, resulta que todas las transformaciones relativas al cálculo algébrico subsisten para los vectores, siempre que los exponentes sean enteros.

20. La extracción de raíces de un vector se puede definir como operación inversa de la elevación a potencias, y tratándose de la raíz cuadrada de vector $\overrightarrow{OA_1} = \sqrt{\overrightarrow{OA_2}}$, el vector $\overrightarrow{OA_1}$ tiene su centro en uno de los dos puntos conjugados en la involución fundamental, armónicamente separados por los centros del radicando y del vector unidad; y como con este centro y con el mismo módulo igual a la raíz cuadrada del módulo del radicando hay dos vectores contrarios, se concluye:

a) Todo vector tiene dos raíces cuadradas contrarias entre sí.

El cálculo con radicales de segundo grado relativos a vectores está sujeto a las mismas leyes que el cálculo algébrico ordinario.

Si P es el centro del vector unidad $\overrightarrow{OU}$, y P′ el punto conjugado con él en la involución fundamental I, existen dos vectores contrarios OV y OV′ de centro P′ y cuyo módulo es la unidad, es decir, tales que $|OV| = |OV'| = |OU|$.

Ahora bien: la igualdad $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC_1}$ prueba que los pares de rectas OU, OV y OC, OC_1 son homólogas en un mismo giro, tal que la proyectividad que determina en su eje ω es precisamente la involución fundamental I, luego

b) El producto de un vector por el $\overrightarrow{OV}$ le transforma en otro de igual módulo cuyo centro es el punto P conjugado con el del primero en la involución fundamental.

Aplicando esto al mismo vector $\overrightarrow{OV}$ y designando por $\overrightarrow{OU'}$ el vector contrario al unidad $\overrightarrow{OU}$, resulta que

$$(\overrightarrow{OV})^2 = \overrightarrow{OU'},\quad (\overrightarrow{OV})^3 = \overrightarrow{OU'} \times \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OV'},\quad (\overrightarrow{OV})^4 = \overrightarrow{OV'} \times \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OU},$$

en general,

$$(\overrightarrow{OV})^{4n} = \overrightarrow{OU},\quad (\overrightarrow{OV})^{4n+1} = \overrightarrow{OV},\quad (\overrightarrow{OV})^{4n+2} = \overrightarrow{OU'} \text{ y } (\overrightarrow{OV})^{4n+3} = \overrightarrow{OV'}:$$

de modo que poniendo $\overrightarrow{OU} = 1$, $\overrightarrow{OU'} = -1$, $\overrightarrow{OV} = i$ y $\overrightarrow{OV'} = -i$, resulta que las potencias del vector i son las mismas que las de $\sqrt{-1}$, lo cual, por otra parte, puede deducirse de la igualdad $\sqrt{\overrightarrow{OU'}} = \pm i$.

21. Designando por A y B los puntos de intersección de las rectas OU y OV con las P′C y PC, siendo P y P′ los centros de los vec-

tores $\overrightarrow{OU}$ y $\overrightarrow{OV}$, se verifica la igualdad $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; pero si $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OV}$, el punto B_1 está en la recta OU, y se tendrá la igualdad $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} \times \overrightarrow{OV}$, de modo que, representando por a, b y c los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}$ y $\overrightarrow{OC}$, la igualdad anterior se transforma en la $c = a + bi$, en la cual se anula b cuando el vector c está en la recta OU, se anula a cuando el citado vector está en la recta OV.

Conviniendo en llamar reales a los vectores situados en la recta OU, por estar en correspondencia biunívoca con los números reales, imaginarios puros a los vectores situados en la recta OV, y complejos o imaginarios a los demás, se deduce:

a) Todo vector complejo es la suma de un vector real y de otro imaginario puro, o bien es la suma de un vector real y de otro multiplicado por el imaginario puro de módulo unidad que hemos representado por i.

b) Las operaciones con las cantidades complejas de dos unidades coinciden con las relativas a los vectores, y están sujetas a a las mismas leyes del cálculo algébrico.

c) Tomando como triángulo de referencia el OPP′, y como punto unidad el de intersección de las rectas PV y P′U, la parte real y el coeficiente de la imaginaria de un vector puesto en forma compleja, son las coordenadas binarias del extremo del vector.

22. Cuando dos vectores puestos en forma compleja difieren sólo en el signo de la parte imaginaria, se dice que son conjugados. Por tanto, si uno de ellos, $\overrightarrow{OC}$, es $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1}i = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, el otro, $\overrightarrow{OC'}$, es igual a $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB_1}i = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC'}$, lo que prueba que los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AC'}$ son contrarios y, por tanto, que los vectores conjugados son homólogos en la homología involutiva que tiene por eje la recta OP, en donde se cuentan los vectores reales, y por centro de homología el centro P′ de los vectores imaginarios puros; es decir,

a) La conjugación es una homología involutiva cuyo eje es la recta en donde se cuentan los vectores reales, siendo el centro de homología el centro de los vectores imaginarios puros.

Ahora bien: en la cónica definida por la involución fundamental I, el polo O de su base y el punto C, el triángulo OPP′ es autopolar, y, por tanto, pasa por el punto C′ armónicamente separado del C por el punto P′ y su polar OP; luego la torsión OICC′ es un giro, y, por consiguiente,

b) Los vectores conjugados son homólogos en un giro, y, por tanto, tienen iguales sus módulos.

Multiplicando dos vectores conjugados puestos en forma compleja, se obtiene

$$\underset{\rightarrow}{OC} \times \underset{\rightarrow}{OC'} = (\underset{\rightarrow}{OA} + \underset{\rightarrow}{OB_1}i)(\underset{\rightarrow}{OA} - \underset{\rightarrow}{OB_1}i) = (\underset{\rightarrow}{OA})^2 - (\underset{\rightarrow}{OB_1})^2 i^2 =$$

$$(\underset{\rightarrow}{OA})^2 + (\underset{\rightarrow}{OB_1})^2 = |OA|^2 + |OB|^2,$$

de donde

$$|OC| \times |OC'| = |OA|^2 + |OB_1|^2,$$

o sea

$$\underset{\rightarrow}{OC} \times \underset{\rightarrow}{OC'} = |OA|^2 + |OB|^2 = |OC|^2.$$

c) El producto de dos vectores conjugados es real e igual al cuadrado de su módulo común.

d) El cuadrado del módulo de un vector es igual a la suma de los cuadrados de los módulos de la parte real y del coeficiente de la parte imaginaria cuando se pone en forma compleja.

III.—Relaciones métrico-proyectivas fundamentales

23. En lo sucesivo consideraremos una involución fundamental I que llamaremos *involución absoluta* del plano, y a su base la designaremos con el nombre de *absoluta*, y nos ocuparemos sólo de figuras situadas en uno de los dos medios planos en que el plano queda dividido por la recta absoluta. Mirando como equivalentes a los segmentos que terminan en la recta absoluta, llamaremos a éstos segmentos absolutos; y, por tanto, los segmentos ordinarios que intervengan en las figuras que se estudian formarán parte de un segmento absoluto. Además, llamaremos rectas proyectivamente paralelas a los que tienen el mismo punto absoluto y rectas proyectivamente ortogonales o perpendiculares a las que tienen como puntos absolutos dos conjugados en la involución absoluta.

Consecuentes con estos convenios, llamaremos triángulo rectángulo al que tiene dos lados perpendiculares, a los cuales se denominan catetos, e hipotenusa al tercer lado. Altura de un triángulo es la recta trazada por un vértice y perpendicular al lado opuesto. Si dos rectas tienen como puntos absolutos P y P_1, éstos definen una involución conjugada con la absoluta; y si Q y Q_1 son otros dos puntos conjugados de aquella involución, dos rectas cualesquiera que pasan una por cada uno de ellos se llaman antiparalelas proyectivas respecto de aquellas dos; de donde se deduce que si dos rectas son antiparalelas respecto de otras dos, éstas lo son respecto de aquéllas.

Llamaremos asimismo *distancia proyectiva* entre dos puntos A y B al segmento proyectivo determinado por ellos que tiene como punto límite el absoluto de la recta que lo contiene, o sea el módulo del vector $\underset{\rightarrow}{AB}$ que tiene por eje la recta absoluta del plano.

Como de la igualdad $\underset{\rightarrow}{AB} = \underset{\rightarrow}{CD}$ se deduce la $\underset{\rightarrow}{AC} = \underset{\rightarrow}{BD}$, y la igualdad de vectores entraña la de sus módulos, se verifica:

a) Los trozos de paralelas comprendidos entre paralelas tienen módulos iguales.

La proposición *d* del párrafo 22 puede enunciarse en estos términos:

b) El cuadrado del módulo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los módulos de los catetos; lo cual es una generalización del teorema de Pitágoras.

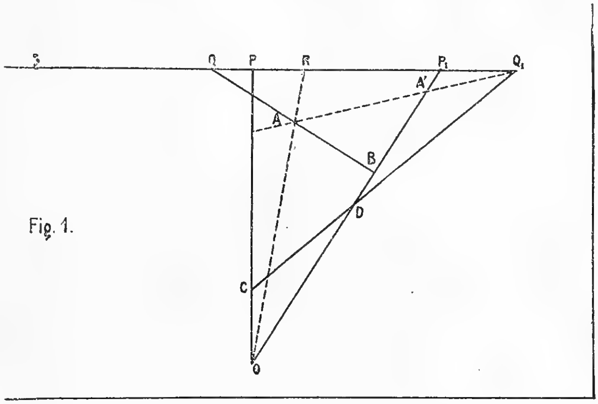


Fig. 1.

La proposición *a* del párrafo 16, aplicada a dos series rectilíneas homólogas en una dilatación, como las bases de estas series son proyectivamente paralelas, conduce a esta otra:

c) Los vectores de origen común, limitados por dos rectas paralelas, tienen sus módulos proporcionales.

24. Si dos rectas AB y CD (fig. 1.ª) son antiparalelas respecto de otras dos OP y OP_1, en la homología involutiva cuyo eje OR pasa por uno R de los puntos dobles de la involución conjugada de la absoluta, determinada por los puntos absolutos P, P_1, Q y Q_1 de aquellos dos pares de rectas, y cuyo centro S es el otro punto doble de la misma involución, son conjugados los puntos P y P_1 y también los Q y Q_1, y, por tanto, también son conjugadas las rectas OP y OP_1 y las AB y A′B′; luego son proyectivamente paralelas las rectas A′B′ y CD, y se verifican las relaciones

$$|OC| : |OB'| = |OD| : |OA'| = |CD| : |A'B'|,$$

o sea

$$|OC| \times |OA'| = |OD| \times |OB'|;$$

y como se tiene

$$|OA'| = |OA|, \quad |OB'| = |OB| \quad \text{y} \quad |AB| = |A'B'|$$

(22, *b*) resulta, en definitiva, que

a) Los módulos de los vectores que en dos rectas determinan otras dos antiparalelas son inversamente proporcionales; y, recíprocamente:

Cuando se confunden los puntos A y C se obtiene la relación

$$|OA|^2 = |OB| \times |OD|.$$

Ahora bien: la altura AD relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC y un cateto BA son antiparalelas respecto de la hipotenusa BC y del otro cateto AC; puesto que si P, Q, P_1 y Q_1 son los puntos absolutos respectivos de estas cuatro rectas, $PP_1 \,.\, QQ_1$ es la involución absoluta y $PQ_1 \,.\, P_1Q$ es otra involución conjugada con ella; luego se verifica la relación

$$|BA|^2 = |BC| \times |BO|,$$

es decir,

b) El módulo del cateto de un triángulo proyectivamente rectángulo, cuyos lados son menores que el segmento absoluto, es medio geométrico entre los módulos de la hipotenusa y de su proyección ortogonal proyectiva sobre esta recta.

Y de este teorema, aplicándolo al otro cateto y sumando ordenadamente las dos igualdades, se demuestra el teorema de Pitágoras anteriormente demostrado (23, *b*).

Como los módulos de los vectores son segmentos proyectivos positivos, el concepto de mayor y menor es el mismo que el establecido para estos segmentos (1); por tanto, del último teorema se deduce

c) El módulo de un cateto de un triángulo rectángulo es menor que la hipotenusa.

Aplicando este teorema a los triángulos en que se divide un triángulo rectángulo ABC por la altura AD relativa a la hipotenusa, resulta

$$|BD| < |BA| \quad \text{y} \quad |DC| < |CA|,$$

de donde

$$|BC| < |BA| + |AC|.$$

---

(1) Schur, pág. 63.

Ahora bien: si en un triángulo cualquiera ABC se traza la altura proyectiva relativa a un lado BC, su pie sobre este lado, o pertenece al segmento BC, o a una de sus prolongaciones, por ejemplo, a partir de B; en el primer caso, los dos triángulos rectángulos BDA y CDA conducen a la igualdad

$$|BC| < |BA| + |AC|;$$

en el segundo se verifica, evidentemente,

$$|CB| < |CD| < |CA|,$$

y, por tanto,

$$|CB| < |CA| + |AB|,$$

luego

d) En todo triángulo de lados menores que el segmento absoluto, el módulo de un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.

Todas las relaciones métricas existentes entre segmentos de figuras planas, en la Geometría ordinaria, subsisten para los módulos de los vectores correspondientes en la métrica proyectiva.

En particular, las propiedades métricas de la circunferencia en la geometría euclidiana subsisten para los módulos de los vectores correspondientes en las cónicas, en las que la involución absoluta está formada por pares de puntos conjugados respecto de la curva.

Dos alturas proyectivas BO y CE de un triángulo ABC son antiparalelas respecto de los dos lados respectivos, y, por tanto, se verifica la siguiente

$$|AC| \times |BD| = |AB| \times |CE|;$$

es decir, que

e) En todo triángulo, los productos de los módulos de cada lado por los módulos de las alturas correspondientes, son iguales. La mitad de este producto constante se llama *área* del triángulo.

Fundándose en este teorema pueden generalizarse a las figuras planas los teoremas relativos a las áreas de la geometría euclídea.

Contribución al conocimiento de la fauna índica

Orthoptera (Locustidæ vel Acridiidæ)

por

Ignacio Bolívar

La fauna de la India inglesa nos va siendo conocida, no ya por fragmentos, mediante notas o pequeños trabajos publicados en diversas revistas, como hasta ahora, sino gracias a una obra de carácter general que, bajo el título de *The Fauna of British India including Ceylon and Burma*, se ha comenzado a publicar desde hace algunos años con la protección del secretario de aquel Estado.

En 1914 apareció el primer tomo de los *Ortópteros*, que comprende sólo los *Locústidos o Acrídidos*, y que su autor, W. F. Kirby, a la vez literato y entomólogo, dejó a su muerte sin terminar, por lo que hubo de encargarse de su ordenación otro distinguido naturalista, Charles O. Waterhouse, conservador ayudante de Zoología del Museo Británico, poco versado, desgraciadamente, en el estudio de dicho grupo de insectos, por lo que este tomo de la obra desmerece mucho de los anteriormente publicados, conteniendo numerosas equivocaciones que me propongo señalar en este trabajo, siquiera la circunstancia lamentable de haber fallecido también el último de los naturalistas citados me imponga la obligación de limitar mi crítica a señalar los errores para evitar que incurran en ellos los que hayan de servirse del libro en cuestión.

Pero no es este el objeto principal de mi actual trabajo, sino el de hacer la enumeración de las especies contenidas en un copioso envío de insectos de este mismo grupo que el «Agricultural College» de Coimbatore, en la India, me ha sometido para su estudio y clasificación, siendo curioso observar con este motivo el contraste entre el proceder del referido Instituto solicitando el estudio de sus insectos de los especialistas dondequiera que residan, y acudiendo al Museo de Madrid para los de este grupo, y los análogos de nuestro país que pretenden hacer por sí esta labor, considerando, sin duda, depresivo el consultar oficialmente con otro organismo del Estado que tiene por única misión ese estudio y conocimiento.

———

La primera y única publicación de conjunto sobre los ortópteros de la India, fué la hecha por mí, en 1897, en los *Annales de la Société entomologique de France,* bajo el título de «Les orthoptères de Saint Joseph's College à Trichinopoly (Sud de l'Inde) (1), y tuvo por objeto dar a conocer las especies recogidas por los Padres Jesuítas del Colegio de San José, PP. Castets, Décoly, Honoré y Martin, así como también por los PP. Gamon, Mazeran y Pagès. Las cazas de estos últimos las había recibido por intermedio del P. Capelle, bien conocido por sus investigaciones en España, y las de los primeros, con mucho las más importantes, por el P. Joseph Pantel, una de las personas que más han contribuído al conocimiento de la fauna ortopterológica de la Península, y cuyos trabajos llevan siempre el sello del más razonado estudio y de la mayor exactitud en la observación. Esta publicación, que no está, sin embargo, mencionada en la obra de Kirby, como no sea incidentalmente al citar la sinonimia de alguna especie, contiene, no obstante, cerca de 300 de aquella procedencia, de las que muchas eran nuevas para la ciencia. Valía la pena de haber hecho mención de un trabajo que podría considerarse como precursor del libro a que me refiero.

Dicho esto a guisa de introducción, y para justificar este trabajo, voy a pasar a la enumeración de las especies del «Agricultural College» de Coimbatore, señalando de paso los errores que observe en el libro a que me refiero, y para que no haya confusión entre unos y otros datos, y dar toda la claridad deseable a este trabajo, adoptaré el orden seguido en aquél, siquiera no esté conforme enteramente con él; pero a fin de evitar la confusión que pudiera resultar de mezclar en una misma relación las especies de Coimbatore y las observaciones a la obra de Kirby y Waterhouse, señalaré con un número correlativo las primeras y dejaré sin él las otras, aun cuando aparezcan intercaladas entre aquéllas. Para la cita de estas últimas me valdré de la abreviación *l. c. (loco citato)* a fin de no repetir tantas veces el título de la obra cuyo examen me propongo hacer en estas páginas, simultáneamente con la enumeración del lote de Coimbatore.

No dejaré de alabar, antes de terminar, la labor considerable y de gran interés científico del personal del Colegio de Agricultura, llevada a cabo para llegar a reunir tan considerable número de especies y de ejemplares, entre los que se encuentran hasta géneros nuevos para la ciencia, con un considerable número de ejemplares recogidos con todo el cuidado desea-

---

(1) Vol. LXVI-1897, págs. 282-315 y pl. 10; LXVIII-1899, págs. 761-810 y pls. 11-12; LXX-1901 (19 págs. 580-635 y pl. 9).

ble para que haya podido hacerse su estudio con toda facilidad. Reciban los señores Ramakrishna, Ballard, Ramachendra, Fletcher, etc., mi aplauso sincero por tan excelente resultado.

Debo advertir que he respetado los nombres de las localidades, transcribiéndolas siempre de las etiquetas en el idioma en que están, así como las de la obra de Kirby y Waterhouse. Más completo hubiera resultado este trabajo si hubiera incluído en él todas las especies conocidas de la India; pero como no era ese el objeto que me propuse al escribirle, bastará recomendar al lector las obras que van citadas para que pueda tener conocimiento de cuanto se ha escrito sobre la fauna de esta interesante región del gran continente asiático.

Familia **Locustidæ vel Acridiidæ**

De los grupos de esta familia que Kirby enumera como representados en la India, hay que descontar el de los PAMPHAGINÆ, por haber pasado el género *Aspidophyma* Bol. al de los CALOPTENINÆ, donde tiene su puesto al lado de *Trigoniza* Brunner. Dicha tribu no tiene, por tanto, representación en esta parte del continente asiático.

Subfamilia I. **Acrydiinæ**

La clasificación de los ACRYDIINÆ (Tettiginæ) fué emprendida por mí en 1887 (1), teniendo la satisfacción de que fuese aceptado el sistema que propuse por todos los autores que con posterioridad a mi trabajo se han ocupado en el estudio de este difícil grupo (2). Sólo los de la obra que examino parecen ignorarlo; así podría deducirse del siguiente párrafo que se lee en la página 11. «Till recently they have been somewath neglected by entomologists, but professor J. L. Hancock, of Chicago, has made a speciality of the subfamily, on which he has published an important serie of works, specially in Wytsman's *Genera Insectorum* (Family

(1) Bolívar, I., «Essai sur les Acridiens de la tribu de Tettigidæ». *Annales de la Société entomologique de Belgique,* vol. XXXI, 1887.

(2) De ella ha dicho Brunner von Wattenwyl en su «Revision du système de orthoptères», *(Ann. del Museo Civico di Storia Naturale di Genova,* ser. 2.ª, vol. XIII (XXXIII), 23 nov. 1892, 21 apr. 1893): «La monographie de cette tribu, publiée par M. Bolívar ne laisse rien à désirer. Cette opinion est confirmée par le fait qu'il m'est facile de classer toutes les espèces dans le cadre établi par mon illustre collègue», pág. 103.

Acridiidæ, subfamily Tetriginæ), in which he divides the Subfamily into nine sections, six of which are represented in the Indian Fauna.» Mas conocedor de la bibliografía del grupo, el profesor Hancock dice en la obra citada, pág. 2: «The most notable contributions to the literature since the publication of Bolivar's essay in 1887, habe been made by Karsch, Bolívar, Hancock and Morse... The valuable essay by Bolívar formed the basis of the present article. This work being followed within certain limitations but in the grouping of secctions, two new ones habe been supplemented.» No se olvide que desde la publicación de mi monografía y el «Genera» de Hancock habían mediado diez y nueve años, en los cuales el conocimiento de este grupo, como el de todos los insectos, había adelantado considerablemente, y, sin embargo, el ilustre profesor americano no encontró manera de sustituir el sistema que yo propuse, sino que, por el contrario, acepta todos sus grupos, limitándose a aumentar dos más, que los descubrimientos últimos hacían necesarios.

Tripetalocera ferruginea Westwood.

l. c., p. 14, f. 15.

Loc. Madras: Travancore.

Debiendo ser el tipo de esta especie el ejemplar que se conserva en el Museo de Oxford, necesariamente hay que convenir en que los ejemplares de Penang y Borneo corresponden a otra distinta; para ella propongo el nombre de *Haani*, ya que este autor fué el primero que la mencionó. Esta especie es la descrita por Haan en *Verhandelingen Orthopt.*, páginas 166, 168, pl. 22, f. 11 (1842), y por mí en los *Annales de la Soc. entomolog. de Belgique*, XXXI, p. 310, pl. 5, f. 28 (1887). Sin duda se refiere también a ella la cita de Hancock en *Genera Insectorum, Orth. subf. Tetriginæ*, p. 4 (1906). Desde la fecha en que la cité he logrado proporcionarme otros ejemplares, recogidos en el Norte de Borneo por Waterstradt. Los que me sirvieron para la descripción me fueron confiados con este objeto por el Museo de Estocolmo el ♂, y por el señor Brunner von Wattenwyl la ♀, figurando hoy este último ejemplar en el Museo de Viena.

Fieberiana pachymerus (Fieber).

l. c., p. 15.

Loc. India (Helfer).

Kirby propone este nombre para el *Plagiocephalus* Fieber, en atención a estar empleado este último con anterioridad por Macquart para un díptero; pero, en mi sentir, sería bueno señalar la característica de este insecto, citado por Fieber de la India (Helfer), y que nadie ha vuelto a estudiar; la forma triangular de los élitros, que es uno de los caracteres citados por Fieber, hace sospechar que el ejemplar descrito no fuera adulto, y pudiera bien suceder que viniera a incluirse en otro de los géneros del grupo. Kirby lo considera afín a *Piezotettix* Bol., aunque con la diferencia de poseer élitros, lo que sería muy notable en este grupo.

El nombre de este insecto debe ser el de *Fieberiana pachymera* (Fieb).

CLADONOTUS TURRIFER Walker.

l. c., p. 18.

Loc. Ceylon (Roberts); el tipo en el Museo Británico.

La distinción entre los *Cladonotus* Sauss. y los *Misythus* Stål, es tan característica, que no es dudoso asegurar debe rectificarse la posición de esta especie, debiendo ser incluída en el segundo de los dos géneros citados y denominarse *Misythus turrifer* (Walker).

SCELIMENA PRODUCTA Serville.

l. c., p. 22 (fig. 22 *delenda!).*

Loc. Madras; Java; Borneo.

La especie representada en esta figura puede afirmarse que no solamente no corresponde a la especie de que se trata, sino tampoco a ninguna otra del género *Scelimena*. Evidentemente su colocación en este sitio es equivocada. Las *Scelimena* tienen las tibias posteriores con los bordes dilatados, laminares y sin dientes, así como el primer artejo de los tarsos posteriores, lo que no se ve en esta figura, cuyas tibias son cilindráceas y denticuladas. Compárese dicha figura con las 23 a 26, en las cuales aparece bien representado el carácter referido.

La forma de los fémures anteriores, según el dibujo, no es tampoco propia de los *Criotettix*, a los que sin esta particularidad pudiera referirse dicha figura, por lo que, falto de otros datos indispensables para resolver esta cuestión, sólo puedo asegurar que la figura no representa una *Scelimena*.

1. SCELIMENA HARPAGO Serville.

Tetrix harpago, Serville, Ins. Orth., p. 763 (1839).
Scelimena harpago, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg. XXXI, pp. 216,

217, pl., IV, f. 13 (1887); Hancock, Gen. Insect. Acrid. Tetriginæ, p. 24 (1906); Kirby, Syn. Catal. Orth. III, p. 13 (1910).

Loc. South India: Coimbatore, 29-VII y 9-IX-1913, Fletcher; 27-V-1915, Y. Ramachendra; Noël River (Coimbatore), 23-IX-12, P. S. N.; Adoni, 28-II-1907, Y. Ramachendra; Koilpatti, 28-IX-1909, Y. Ramachendra.

En las fuentes. En el borde del agua de un gran manantial; semiacuática.

Citada de Bombay. Provincias Unidas y Madras.

CRIOTETTIX MACULATUS Kirby.

l. c., pp. 31, 32, fig. 30.

Loc. Burma. El tipo en el Museo Británico.

Esta especie no difiere del *C. indicus* Bol.; el error proviene de haber supuesto que esta última especie no tiene las espinas laterales encorvadas hacia adelante; carácter algo variable, al que no puede atribuirse un valor absoluto.

El *C. indicus*, está citado también por Kirby en las pp. 31 y 33, y procede de Madras: Trichinopoly.

2. CRIOTETTIX TRICARINATUS Bolívar.

Criotettix tricarinatus, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg. XXXI, pp. 184, 223, 224 (1887); Hancock, Spol. Zeylon. 11, p. 128, pl. III, f. 15 (1904); Kirby, Fauna British India, p. 33, f. 32 (1914).

Loc. South India: Coimbatore, 27-V-1913, Y. Ramachendra; 9-IX-1913, Fletcher.

En las fuentes.

Citado de Ceylan.

3. CRIOTETTIX OCULATUS Bolívar.

Criotettix oculatus, Bolívar, Ann. Mus. Genova, XXXIX, p. 71 (1898); Ann. Soc. Entom. France, LXX, p. 584 (1902); Kirby, Fauna British India, p. 34 (1914).

Loc. Coorg. road from Sidapur to Mercara, 18-IX-1912, Fletcher.

Sobre las rocas húmedas.

Citado de Madras, Java y Sumatra.

4. CRIOTETTIX FASTIDITUS nov. sp.

Statura parva. Caput parum elevatum. Vertex oculo æque latus antice medio subcarinatus et utrinque læviter fossulatus. Costa frontalis subcompressa a latere visa inter antennas rotundata versus verticem valde oblicua et ad ocellum sinuata. Antennæ filiformes, inter partem anteriorem oculorum fere ante oculos insertæ. Pronotum antice truncatum postice longe subulatum usque medium tibiarum posticarum extensum, superne valde inæquale, antice sublæviusculum carinis lateralibus explicatis disco inter humeros bicarinulato, processu rugis obliquiis subcariniformibus; carina media antice in mesozona breviter cristulata, inter humeros compressiuscula et læviter elevata, deinde tantum undulata; lobis lateralibus spina oblicua retrorsum ducta. Elytra brevia, ovata. Alæ perfecte explicatæ nebulosæ, extus venis griseis transverse ornatæ. Femora quatuor antica compressa, carinis suaviter undatis instructa; femora postica carina dorsali minutissime serrulata. Tarsi postici pulvillis acutis longitudine haud disimilis.

Long. corp. 6,5; pron. 9; fem. post. 3,8 mm.

Loc. Taliparamba, Malabar, 24-30-IX-1913, C. N.

Esta especie se asemeja a *C. indicus* por el tamaño y aspecto, pero la dirección de las espinas laterales del pronoto la diferencian desde luego; dichas espinas no son transversas, sino oblicuas, y dirigidas hacia atrás.

Criotettix subulatus Bolivar.

l. c., pp. 31 y 35.

Loc. East Indies (British India)?

Esta especie debe llamarse *Loxilobus subulatus* (Bol.), pues corresponde a este género después de la desmembración del *Criotettix* hecha por Hancock. El ejemplar de mi colección lleva en la etiqueta la indicación de Ceylan.

Criotettix Vidali Bolivar.

l. c., pp. 31 y 37.

Loc. Burma: Karen Hills; Philippines.

Como la anterior, esta especie debe pasar al género *Loxilobus*, correspondiéndole el nombre de *L. Vidali* (Bol.)

Acanthalobus miliarius (Bolivar).

l. c., pp. 36 y 37 (fig. 34 *delenda!)*.

Loc. Ceylan: Peraderieya, Kandy, Colombo. El tipo en la colección de Brunner, Museo de Viena.

La figura no representa esta especie, ni tampoco un *Acanthalobus*, pues en estos insectos las espinas laterales del pronoto están dirigidas oblicuamente hacia atrás, «spine of lateral lobes distinctly directed backwards», dice Hancock, y así, en efecto, ocurre en la especie que yo describí.

La figura 34 podría corresponder a un *Criotettix*, quizás el *oculatus* Bol.?

5. ACANTHALOBUS SAGINATUS (Bolívar).

Criotettix saginatus, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg., XXXI, pp. 185, 223, 225 (1887); Brunner, Ann. Mus. Genova, XXXIII, p. 104, pl. V, f. 38 (1893).

Acanthalobus saginatus, Hancock, Gen. Insect. Acrid. Tetriginæ, p. 29 (1906).

Acanthalobus inornatus, Kirby partim, Fauna British India, p. 39 (1914).

Loc. South India: Coimbatore, 24-V-1913, C. N.; 15-II-1913, T. V. Ramakrishna.

No creo que el *Tettix inornata* Walker, pueda asimilarse por completo al *Criotettix saginatus* Bol., como lo supone Kirby; sería necesario examinar el tipo para resolver definitivamente esta duda.

6. MAZARREDIA SCULPTA Bolívar.

Mazarredia sculpta, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg., XXXI; pp. 237, 238 (1887); Brunner, Ann. Mus. Genova, XXXIII, p. 107 (1893); Kirby. Fauna British India, p. 51 (1914) (f. 48 delenda).

Loc. Shevaroys, 5.000 ft., 14, 22-X-1912. Fletcher.

La figura 48, pág. 51, de la obra de Kirby y Waterhouse no representa en manera alguna esta especie; parece más bien corresponder a un *Euparatettix*, probablemente al *interruptus* Brunn.

Citada de Birmania y Tenasserim.

7. XISTRA STYLATA Hancock.

Xistra stylata, Hancock, Trans. Entom. Soc. London, p. 231 (1907); Kirby, Fauna British India, p. 56 (1914).

Loc. South Canara Dt.: Nagody, 2.500 ft., 19-IX-1913, T. V. Ramakrishna.

Citada de Ceylan.

8. EUPARATETTIX BALTEATUS Walker.

Tettix balteata, Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., V, p. 828 (1871) Apud Kirby.

Acrydium balteatum, Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 45 (1910).

Paratettix balteatus, Kirby, Fauna British India, p. 61, f. 54 (1914).

Loc. Salem Dt.: Harur, 22-II-1913, P. S.; Parur-S. Arcot, 6-8-VIII-1913, C. N.

Citada del Sur de la India.

9. EUPARATETTIX SCABRIPES (Bolívar.)

Paratettix scabripes, Bolívar, Ann. Mus. Civ. Genova, XXXIX, p. 76 (1898); Ann. Soc. Ent. France, LXXX, p. 585 (1902).

Euparatettix scabripes, Kirby, Fauna of Brit. India, Orth., p. 59 (1914).

Ergatettix tarsalis, Kirby, ibid., p. 70, ff. 62 y 63.

Loc. Tinnevelly Dt.: Kezanathum, 1-11-X-1913, Ponniah; South India: Coimbatore, 10-XII-1912, Fletcher; Salem Dt.: Horur, 22-II-1913, P. S.; Taliparamba, Malabar, 24-80-IX-1913, C. N.

Citada de Calcuta, Rajshai y Sumatra, bajo el nombre de *Ergatettix arsalis.*

El género *Ergatettix*, que Kirby diferencia de *Euparatettix* Hanc., por las protuberancias de los fémures posteriores, no me parece debe sostenerse; por otra parte, la especie descrita con el nombre de *tarsalis* es, a no dudar, mi *Euparatettix scabripes*. En la pág. 59 de la misma obra, al describir el *Euparatettix scabripes* Bol., se díce, hablando de los fémures posteriores: «outer surface with rather compressed prominent ridges». Este es el carácter de la especie según se representa en las figuras 62 y 63, por lo que Kirby debió llevar *Euparatettix scabripes* al género *Ergatettix*, y al hacerlo hubiera visto la dificultad de separar esta especie de su *Ergatettix tarsalis*.

10. EUPARATETTIX INTERRUPTUS (Brunner).

Paratettix interruptus, Brunner, Ann. Mus. Genova, XXXIII, p. 109 (1893).

Loc. South India: Coimbatore, 8-X-1912, 7-X-1913, Fletcher.

A la luz.

Citado de Birmania.

Probablemente corresponde a esta especie la figura 48 de la pág. 51 de la obra de Kirby que aparece allí como *Mazarredia sculpta* Bol.

11. Paratettix scaber (Thunberg).

Acrydium scabrum, Thunberg, Nova Acta Upsal., VII, p. 159 (1815).
Tettix scaber, Stål, Rec. Orth., I p. 149 (1873).
Paratettix scaber, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg., XXXI, pp. 188, 279, (1887); Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 585 (1902); Kirby, Fauna British India, p. 62 (1914).

Loc. South India: Coimbatore, 20-VIII-1912, 4-VIII-1913, 8-II-1913, 2-XII-1912, 10-XII-1912, 7-X-1913, 3-III-1913, Fletcher, P. S. N., A. G. R.; Tinnevelly Dt.: Palamcottah, 27-30-IX-1913, Ponniah; Tinnevelly Dt.: Kezanathum, 1-11-X-1913, Ponniah; Bengalore, Scooft., 8-V-1913, T. V. Ramakrishna; Nandyal, Kuruool, 28-IX-1908, T. V. Ramakrishna; Godavari Dt.: Annampallee, 19-22-XII-1912, T. V. Ramakrishna.

A la luz. A la orílla del lago.

Citado de Madras, pero, además, esta especie se encuentra en Zanzibar, Africa oriental portuguesa, Colonia del Cabo y Gabon.

12. Paratettix cingalensis (Walker).

Tettix cingalensis, Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., V, p. 827 (1871).
Parattetix variegatus, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg., XXXI, pp. 188, 272, 280 (1887); Hancock, Spol. Zeyl. 11, pp. 108, 144 (1887).
Euparatettix cingalensis, Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 31, f. 56 (1910).
Paratettix cingalensis, Kirby, Fauna British India, p. 63, f. 56 (1914).

Loc. Taliparamba, Malabar, 24-30-IX-1913, C. N.

Citado únicamente de Ceylan.

13. Paratettix indicus Bolívar.

Paratettix indicus, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg., XXXI, p. 188, 272, 281 (1887); Ann. Soc. Entom. France, LXX, p. 585 (1902); Kirby, Fauna British India, p. 64 (1914).

Loc. South India: Coimbatore, 15-IV-1913, Fletcher.

Citado de Madras y de China.

14. Hedotettix gracilis (de Haan).

Acridium (Tettix) gracile, De Haan, Temminck, Verhand. Orth., pp. 167, 169 (1842).
Hedotettix gracilis, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg., XXXI, pp. 188, 283, 284 (1887); Kirby, Fauna British India, p. 72 (1914).

Hedotettix festivus, Bolívar, l. c., pp. 188, 284, 286 pl. V, f. 24 (1887).

Tettix discalis, *umbrifera*, *lineata*, *obliquifera*, var. *vittifera*, var. *nigricollis*, Walker, Cat. Derm. Salt. British Museum, V, pp. 824, 825, 826, et Suppl., p. 9 (1871).

Hedotettix gracilis abortus, Hancock, Spol. Zeyl., 11, pp. 188, 284, 286, pl. V, f. 24 (1887).

Loc. South India: Coimbatore, 29-IX-1912, 5-X-1912, 10-XII-1912, 7-X-1913, Fletcher; Mysore: Bababuddin Hills, 4.000-5.000 ft., 2-12-XI-1912, Fletcher; Coorg. Mercara, 18-22-XI-1912, Fletcher.

Algunos ejemplares recogidos a la luz.

Citado del N. de India; Bombay, Madras, Birmania, Java y Celebes.

15. Coptotettix capitatus Bolívar.

Coptotettix capitatus, Bolívar, Ann. Soc. Entom. Belg., XXXI, pp. 188, 287, 289 (1887); Brunner, Ann. Mus. Genova, XXXIII, p. 111 (1893); Kirby, Fauna British India, p. 76 (1914).

Loc. Coorg. Somvarpet, 5.000 ft., 28-IX-13, T. V. Ramakrishna.

Citado de Birmania y de Java.

Acrydium indicum Olivier.

l. c., p. 77.

Loc. East Indies.

Mr. Kirby supone, según Waterhouse, que esta especie podrá referirse a *Coptotettix capitatus* Bol. A esto se opondrán, entre otras cosas, la proporción entre la longitud de las alas y la del proceso del pronoto. En *C. capitatus* Bol., las alas apenas llegan a la mitad de los fémures posteriores, mientras que el proceso del pronoto alcanza al cuello del fémur que precede a la rodilla. El *C. capitatus* Bol. es de Sumatra.

Subfamilia II. **Eumastacinæ**

Xiphicera rugifrons Waterhouse.

l. c., p. 81.

Loc. Ceylon (el tipo en el Museo Británico).

Este insecto que Kirby no llegó a describir ni a nombrar, pero del cual dejó un dibujo, ha sido descrito por Waterhouse con el nombre que antecede. Por la figura y la breve descripción, se deduce que más bien debería llevarse al género *Orchetypus*, puesto que el pronoto no presenta la vena lateral ramificada, característica de aquél género, teniendo además la frente «with numerous rugulæ», carácter este último elegido para la clave de los géneros en la misma obra. Es muy difícil decidir con tan escasos medios si la especie es o no distinta de *Orch. rotundatus* Brunner, que, a su vez, pudiera no diferir de *ceylonicus* Karsch, publicado pocos años antes, cuya descripción no conocía Brunner cuando dió a conocer aquella especie.

Probablemente pertenece a esta especie el insecto representado en la figura 77 (pág. 88), bajo el nombre de *Erianthus bifidus*, como lo acredita la forma de sus fémures anteriores que no le corresponde.

Es también de notar que se omite la cita de *Xiphicera Gallinacea* Fabr. que Kirby enumera en su catálogo *(X. gallinaceus)*, Cat. of Orth., III, p. 66, citándola de la India, Singapoore y Borneo, y aun cuando sea probable que esta especie no exista en la India, debería haberse expresado la razón de su omisión.

16. PHYLLOCHOREIA RAMAKRISHNAI C. Bolívar.

Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid. Serie zoológica núm. 16, páginas 5-6, lám. I, fig. 1 (1914).

Loc. South Canara Dt.: Kollur Ghat., 3.000 ft., 18-21, IX, 1913, T. V. Ramakrishna; Taliparamba, Malabar, 24-30, IX, 1913, C. N.

17. PHYLLOCHOREIA sp. ?

Ejemplar muy joven que no puede ser determinado, y que pudiera ser la larva de la *Ph. unicolor* Westw.

Loc. Taliparamba, Malabar, 24, 30-IX-1913, C. N.

18. ERIANTHUS sp. ?

Ejemplar desprovisto de patas posteriores que no puede ser determinado con seguridad.

Loc. Shevaroys, 5.000 ft., 14-22-X, 1912, Fletcher.

(Se continuará.)

Expresión estérica del eritreno

por

Adolfo Melón

En una nota que publiqué en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química,* tomo XIV, páginas 198-210, año 1916, inicié algunas consideraciones trigonométricas sobre las fórmulas en el espacio de los compuestos del carbono. Es éste un matiz de la Estereoquímica bastante desatendido, yo creo que demasiado, aunque no he de caer en ponderarlo sobremanera, pues quizás el entusiasmo que por tal tema siento me ofusque hasta creerlo de importancia excepcional, cuando es lo posible que no pase de ser un tema más o menos curioso.

En aquella breve nota comencé comprobando por camino propio el valor del ángulo que en el tetraedro regular forman dos rectas baricentro-vértices, o sea las gráficas de dos valencias. Es de 109°28′.

Continuaba en ella con un razonamiento de índole muy elemental, y que conduce a la determinación para todos los casos, de la distancia que separa dos vértices en el estereoesquema de una parafina, alcanzando (el lado del tetraedro regular supuesto de valor 1) la fórmula general siguiente:

$$\Delta_n = \frac{\text{sen}\,[109°28' - (n-2)35°16']}{\text{sen}\,35°16'}.$$

Según esta fórmula, la distancia que separa dos vértices, uno de cada tetraedro, en el estereoesquema etánico es:

$$\Delta_2 = \frac{\text{sen}\,109°28'}{\text{sen}\,35°16'},$$

y

$$\log \Delta_2 = \log \text{sen}\,70°32' - \log \text{sen}\,35°16'$$
$$= 0{,}212972 = \log 1{,}632946.$$

I

Inicio esta nota con el caso del etileno. Según la interpretación estérica de Van't Hoff, el enlace doble consiste en la fusión de dos vértices de un tetraedro con dos del otro, o sea en la coincidencia de dos aristas. Configuración semejante no permite suponer rotación de tetraedros, y constituye una entidad que se puede considerar como rígida. Por lo tanto, contrariamente al caso del etano, la elección de parejas de vértices para apreciar su distancia no puede ser, como en aquél, indiferente, y habrá los casos de vértices *cis*, o del mismo lado, y de vértices *trans*, o de lados distintos. Que son los casos determinantes de la isomería etilénica, de los antiguos *aloisómeros*, de Michäel, tan definitivamente incluídos en la Estereoquímica por Wislicenus.

La posición *cis* ha sido también designada posición planosimétrica, y la *trans* centrosimétrica. A este respecto, Hantzsch avisa la conveniencia de una revisión de la nomenclatura de isómeros geométricos del etileno. Los tales prefijos, *cis* y *trans*, son de un gran uso, y a él me atengo.

PRIMER CASO. *Vértices cis.*

En la figura 1.ª se trata de determinar la distancia AE. Sea G el punto medio de la arista común CD. Es evidente que los cuatro vértices A, B, E, F, y el punto G están en un plano, que es plano de simetría del esquema.

En el triángulo rectángulo AGD, se tiene:

$$AG = AD \cos GAD,$$

y como $GAD = 30°$, por ser ADC un triángulo equilátero, y $AD = 1$ por convención, se puede escribir:

$$\log AG = \log \cos 30°$$
$$= \bar{1},937531 = \log 0,866026.$$

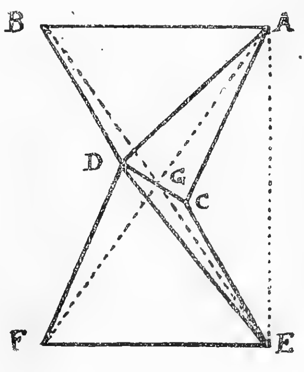


FIG. 1.ª

Este valor de la mediana del triángulo-cara, en un tetraedro regular de arista 1, ha de ser de gran uso en las determinaciones posteriores.

Puesto que $AG = BG$ se tienen así conocidos los tres lados del triángulo AGB, y se le puede aplicar la fórmula del semiperímetro para determinar el valor del ángulo GAB. Se tiene:

$$\text{sen}\,\frac{GAB}{2} = \sqrt{\frac{(p - AB)\,(p - AG)}{AB\,.\,AG}} = \sqrt{\frac{0{,}183013}{0{,}866026}}\,,$$

y

$$\log\text{sen}\,\frac{GAB}{2} = \frac{1}{2}(\log 0{,}183013 - \log 0{,}866026)$$
$$= \bar{1}{,}662475 = \log\text{sen}\,27^{\circ}22';$$

luego: GAB $= 54^{\circ}44'$.

Por la condición de isósceles del tal triángulo AGB, sus tres ángulos son así conocidos, y el ángulo AGB $= 70^{\circ}32'$; y como B, G, E son puntos en línea recta, el valor del ángulo externo AGE también es conocido; es el suplemento, o sea AGE $= 109^{\circ}28'$.

Como se ve, este valor es idéntico al del ángulo de valencias; sin duda para tales ángulos existe una deducción geométrica que evidencia su igualdad; no me he detenido en buscarla por creerla bastante ajena al caso, pero de la que podrá aceptarse como comprobante la deducción trigonométrica expresa.

El isósceles AGE es así ya resoluble. Se tiene:

$$AE = AG\,\frac{\text{sen}\,109^{\circ}28'}{\text{sen}\,\dfrac{180^{\circ} - 109^{\circ}28'}{2}}\,,$$

y

$$\log AE = \log 0{,}866026 + \log\text{sen}\,70^{\circ}32' - \log\text{sen}\,35^{\circ}16'$$
$$= 0{,}150503 = \log 1{,}414174.$$

La distancia AE, qne separa dos vértices *cis* en el etileno es, pues, inferior, y bastante, a la Δ_2, que separa dos vértices en el etano.

Este resultado es interpretable. De dos compuestos:

$$CH_3 - CH_2X \qquad [I]$$

y

$$CH_2 = CHX, \qquad [II]$$

el átomo o grupo X se encuentra en (I) a una distancia de cualquier hidrógeno del primer carbono calculada en 1,632946, y en el (II) a una distancia del átomo de hidrógeno en posición *cis* de 1,414174. Todas las demás circunstancias iguales, se comprende que habrá de ser mayor la facilidad en (II) que en (I) de una eliminación de HX, y, por lo tanto, se aparenta más inmediata posibilidad de crearse un enlace triple a partir del compuesto (II), que la de crearse un enlace doble a partir del compuesto (I).

Esta observación es rigurosamente confirmada por la experiencia cuando X es átomo de halógeno. La formación del etileno, a partir del cloruro de etilo, no es tan inmediata como la del acetileno a partir del cloruro de etenilo.

SEGUNDO CASO. *Vértices trans.*

En la figura 1.ª se trata de determinar la distancia AF.

Es ya un problema mucho más inmediato. Basta considerar el triángulo rectángulo AEF, y en él se tiene:

$$AF = \frac{AE}{\cos EAF},$$

y

$$\log AF = \log 1{,}414174 - \log \cos 35^\circ 16'$$
$$= 0{,}238561 = \log 1{,}732052.$$

Valor muy elevado, pero ya previsto, y que justifica la dificultad de reacciones entre vértices *trans*, de no haber una migración previa a la *cis* forma.

II

Dos enlaces dobles en una cadena pueden apoyar sobre un mismo carbono, y es el caso del aleno. Pueden apoyar sobre carbonos contiguos, es el caso del eritreno. Y pueden hallarse más distantes, y la trascendencia de esta duplicación funcional va debilitándose.

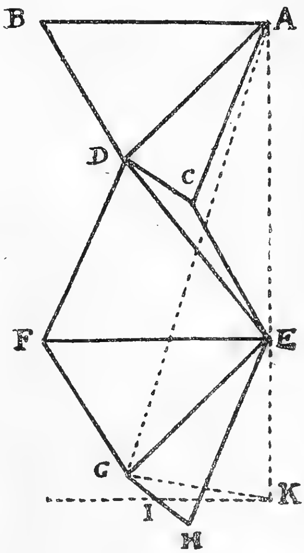


FIG. 2.ª

El caso del aleno, para este asunto de distancias de vértices, presenta muy secundario interés. Se trata de un estereoesquema que se puede considerar como rígido, ya que sus dos enlaces, por ser dobles, son por aristas; en él se percibe que no hay posibilidades de distancias diferentes. En efecto: en la figura 2.ª se ve que las aristas AB y GH, en cuyos extremos radican los cuatro vértices disponibles, están en dos direcciones perpendiculares, y en las que los segmentos que tales aristas determinan se cruzan por sus puntos medios. Y así, las distancias AG, AH, BG y BH tienen el mismo valor.

El problema de determinar la distancia AG puede orientarse de este modo: Por el punto I, punto medio de GH, y correspondiente al plano ABEF, se traza en este mismo plano una paralela a AB, y en la que se toma el segmento $IK = \frac{1}{2} AB$. Los puntos A, E, K, están así en línea recta. Uniendo K con el vértice G se forma un triángulo rectángulo isósceles, pues $GI = \frac{1}{2} AB = IK$, por construcción; en él se tiene:

$$GK = \frac{IK}{\cos 45^\circ},$$

y

$$\begin{aligned} \log GK &= \log 0{,}5 - \log \cos 45^\circ \\ &= \bar{1}{,}849485 = \log 0{,}707106. \end{aligned}$$

Uniendo A con G, y en el triángulo rectángulo AGK, son así conocidos ambos catetos, pues $AK = AE + EK$; pero $EK = \frac{1}{2} AE$, luego:

$$AK = \frac{3}{2} AE = \frac{3}{2} 1{,}414174 = 2{,}121261.$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{tg} GAK = \frac{GK}{AK},$$

y

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} GAK &= \log 0{,}707106 - \log 2{,}121261 \\ &= \bar{1}{,}522891 = \log \operatorname{tg} 18^\circ 26'; \end{aligned}$$

por fin:

$$AG = \frac{GK}{\operatorname{sen} GAK},$$

y

$$\begin{aligned} \log AG &= \log 0{,}707106 - \log \operatorname{sen} 18^\circ 26' \\ &= 0{,}349522 = \log 2{,}236258. \end{aligned}$$

Esta gran distancia puede interpretar el desconocerse en absoluto derivados trimetilénicos a dos enlaces dobles en el anillo, o sean ciclopropadieno y derivados, cuya formación exigiría la fusión de los vértices A y G, o sea la anulación de la considerable distancia que los separa.

III

A la fórmula C_4H_6 corresponden asociaciones del carbono muy variadas: cadenas a dos enlaces dobles contiguos o alternos; cadenas a enlace triple terminal o céntrico; ciclo tetratómico a un enlace doble; ciclos triatómicos de cadena adjunta con enlace doble, bien en el ciclo en dos posibles posiciones, bien en la cadena.

En resumen: estos ocho hidrocarburos:

[1]	$CH_3 - CH = C = CH_2$	butadieno 1,2.
[2]	$CH_2 = CH - CH = CH_2$	butadieno 1,3.
[3]	$CH_3 - CH_2 - C \equiv CH$	butino 1.
[4]	$CH_3 - C \equiv C - CH_3$	butino 2.
[5]	$\begin{array}{ccc} CH & = & CH \\ \vert & & \vert \\ CH_2 & - & CH_2 \end{array}$	ciclotetreno.
[6]	$\left.\begin{array}{c} CH \\ \Vert \\ CH \end{array}\right\rangle CH - CH_3$	metilciclopropeno 2.
[7]	$\left.\begin{array}{c} CH_2 \\ \vert \\ CH \end{array}\right\rangle C . CH_3$	metilciclopropeno 1.
[8]	$\left.\begin{array}{c} CH_2 \\ \vert \\ CH_2 \end{array}\right\rangle C = CH_2$	metenilciclopropano.

El eritreno es de fórmula C_4H_6; luego habrá de responder a una de estas ocho estructuras.

No es un hidrocarburo cíclico; su aptitud extremada a la saturación, dando $C_4H_6X_4$, hace excluir para su estructura los números 5, 6, 7 y 8.

No es un hidrocarburo acetilénico; de ser verdadero, manifestaría tendencia a la formación de acetiluros, que no se acusa; luego hay que descartar la estructura 3. De ser bisustituído daría la reacción general Favorsky, sometido a 140° en presencia del sodio, y esta reacción no la da tampoco; luega el esquema 4 es a excluir.

No es hidrocarburo alénico, pues también daría la reacción Favorsky; así, que tampoco responde a la estructura 1.

No queda posible para el eritreno sino la estructura 2, o sea la cadena a dos dobles enlaces en carbonos contiguos; es, pues, el butadieno 1, 3.

En efecto: a las aptitudes e ineptitudes reaccionales de esta estructura responde experimentalmente el eritreno.

A tal estructura corresponde una interpretación estérica única. Los carbonos 1 y 2 enlazan a la manera etilénica ya estudiada, constituyendo el ditetraedro rígido, llamado abreviadamente O, figura 3.ª Prolongada

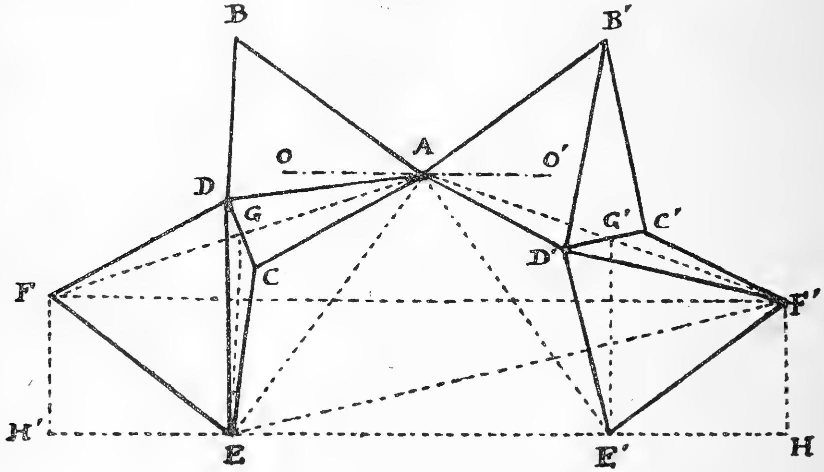


FIG. 3.ª

la valencia OA un segmento AO′ = OA, se puede suponer, siguiendo a von Baeyer, colocado en O′ el baricentro del carbono 3; y sobre éste, un enlace etilénico reúne al carbono 4. Puesto que el enlace etánico 2-3 es móvil en giro alrededor de OO′, el estereoesquema es único, como lo es el cuerpo que responde a la estructura lineal acordada.

Es lo esencial no perder de vista que el eritreno es, pues, constituído por dos entidades ditetraédricas rígidas O y O′ en giro libre alrededor de la recta OO′, que reúne los baricentros de los carbonos 2 y 3.

Supóngase, en primer término, que la entidad O permanece fija, y la O′ gira. La recta E′F′ engendra un tronco de cono, cuya base mayor será un círculo, de radio O′E′, y la base menor uno, de radio O′F′. Los puntos E′ y F′, en cualquier posición del giro, determinan una generatriz del tal tronco de cono. Considérense las distancias de E′ y F′ a un vértice E de la entidad ditetraédrica O que se supone fija. Estas distancias, en cualquier caso, y la generatriz correspondiente, constituyen un triángulo EE′F′.

En tal triángulo, el ángulo E′ siempre es el mayor. Su valor decrece desde la posición de giro expresada en la figura 3.ª hasta la posición antípoda expresada en la figura 4.ª, para la que corresponde el valor más pequeño; desde ésta vuelve a crecer otra vez hasta alcanzar la posición de la figura 3.ª Pues bien: su valor mínimo es de 90°, figura 4.ª; en efecto, es el caso en que E, A, E′ están en línea recta. Luego en el triángulo EE′F′ a mayor ángulo E′ se opondrá lado mayor EF′; por lo tanto:

$$EF' > EE'.$$

Se comprende que la misma consideración es posible si la entidad O′

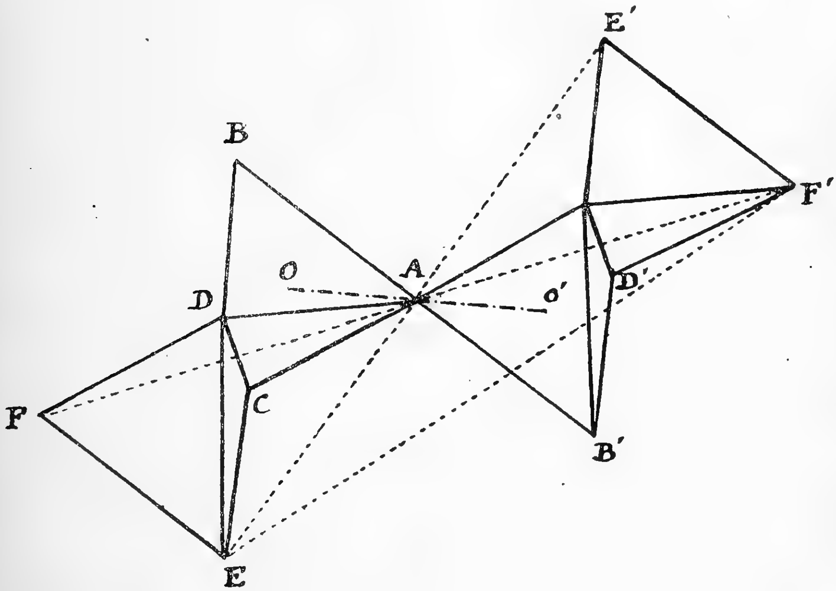


FIG. 4.ª

permanece fija, y la O es la móvil; en tal caso, con respecto a E′ se tendrá igualmente:

$$E'F > E'E.$$

Y, por fin, como en tales supuestos anteriores están comprendidas todas las posibilidades de posición, las deducciones son legítimas para el giro de ambas entidades.

Con respecto al vértice F, las consideraciones son las mismas. En la figura 3.ª, el ángulo FE′F′ alcanza el máximo valor, y en la figura 4.ª el mínimo, pero superior a 90°; luego en todo caso:

$$FF' > FE'.$$

Y si O′ permanece fijo se tiene igualmente:

$$F'F > F'E.$$

Y, por fin, lo mismo para el giro simultáneo de ambas entidades.

Luego en el estereoesquema eritrénico, sus cuatro vértices terminales, y en virtud del giro alrededor de la valencia central, crean cuatro círculos en planos paralelos, los dos interiores iguales y de mayor radio, los dos exteriores iguales y de radio menor. Los cuatro vértices son así, individualmente considerados, de dos categorías distintas; vértices *endo*, o del interior de la configuración, los E y E′; y vértices *exo*, o de la parte de afuera, los F y F′.

A estas dos distintas categorías corresponden tres parejas de individualidades definidas: la pareja de vértices *endo*, la de vértices *exo* y las parejas *endo-exo*, identificables en una sola por la simetría de la molécula.

Antes de toda otra deducción, se precisa el estudio cuantitativo de distancias para cada pareja de vértices, y en cada una, para los casos extremos máximo y mínimo de sus valores.

PRIMER CASO. *Vértices endo.* Distancia mínima (fig. 3.ª)

Se trata de determinar la distancia EE′.

Puede orientarse el problema del siguiente modo:

En el triángulo isósceles EAE′ el valor de sus lados iguales está ya determinado: es la distancia que separa los vértices *cis* en el etileno; basta conocer un ángulo para poder resolverlo.

El ángulo GAB también es ya conocido, es de 54°44′; pero el BAO, del isósceles ABO, cuyo valor en O es el ángulo de valencias, 109°28′, valdrá 35°16′; luego

$$OAG = 54°44' - 35°16' = 19°28'$$

Igual valor es el de O′AG′.

Los ángulos iguales GAE y G′AE′ son del valor, ya determinado, 35°16′; luego, en resumen:

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Ángulo OAG} & = 19°28' \\ \text{» } \quad O'AG' & = 19°28' \\ \text{» } \quad GAE & = 35°16' \\ \text{» } \quad G'AE' & = 35°16' \end{array}\right\} = 109°28',$$

y

$$EAE' = 180° - 109°28' = 70°32'.$$

En el triángulo EAE′, del cual sus tres ángulos son así ya conocidos, se tiene

$$EE' = \frac{1{,}414174 \text{ sen } 70°32'}{\text{sen } 54°44'},$$

y

$$\log EE' = 1{,}414174 + \log \text{sen } 70°32' - \log \text{sen } 54°44'$$
$$= 0{,}212997 = \log 1{,}633040.$$

Se observa que este valor es próximamente mayor en 10^{-4} que el que expresa la distancia Δ_2 de dos vértices en el etano, diferencia debida al cálculo aproximado, y que, prácticamente, se trata de valores iguales.

Distancia máxima (figura 4.ª)

Es evidente que se trata de un valor doble al que separa dos vértices *cis* en el etileno:

$$EE' = 2 \times 1{,}414174 = 2{,}828348$$

SEGUNDO CASO. *Vértices endo-exo.* Distancia mínima (fig. 3.ª)

Determinar la distancia EF′.

El método directo consiste en resolver el triángulo EAF′, del que se conocen el ángulo A y sus lados. Un camino indirecto, elegido por ser muy útil para el caso posterior, es el siguiente: Bajar desde F′ una perpendicular a EE′, y en el triángulo rectángulo E′F′H se tiene

$$E'H = E'F' \cos F'E'H$$
$$F'H = E'F' \text{ sen } F'E'H;$$

y como el ángulo F′E′H es igual al B′AO′, o sea de valor 35°16′, se puede escribir:

$$\log E'H = \log \cos 35°16' = \log 0{,}816473$$
$$\log F'H = \log \text{sen } 35°16' = \log 0{,}577382,$$

y

$$EH = 1{,}633040 + 0{,}816473 = 2{,}449513.$$

En el triángulo rectángulo EHF′ se tiene:

$$\text{tg } F'EH = \frac{0{,}577382}{2{,}449513} = \text{tg } 13°16',$$

y

$$EF' = \frac{HF'}{\text{sen } 13°16'} = 2{,}516000$$

Distancia máxima (fig. 4.ª)

En el triángulo rectángulo EE′F′ se tiene

$$\operatorname{tg} E'EF' = \frac{E'F'}{EE'},$$

y

$$\log \operatorname{tg} E'EF' = -\log 2{,}828342 = \log \operatorname{tg} 19^\circ 28'.$$

Por lo tanto:

$$EF' = \frac{E'F'}{\operatorname{sen} 19^\circ 28'},$$

y

$$\log EF' = 0{,}477219 = 3{,}000193.$$

Tercer caso. *Vértices exo.* Distancia mínima (fig. 3.ª)

Determinar la distancia FF′.

El método indirecto anterior tiene aquí su ventaja; en lugar de la operación laboriosa de determinar FF′ en el triángulo AFF′, del que se conocen el ángulo A y sus lados, basta la consideración siguiente:

$$FF' = HH' = EE' + 2\,E'H = 1{,}633040 + 2 \times 0{,}816473,$$
$$FF' = 3{,}265986.$$

Distancia máxima (fig. 4.ª)

Es evidente que FF′ es cuatro veces el valor de la mediana del triángulo-cara del tetraedo regular. Este valor es ya conocido, y determinado en el caso de los vértices *cis* del etileno. Se tiene:

$$FF' = 4 \times 0{,}866026 = 3{,}464084.$$

En resumen. El cuadro de valores es el siguiente:

	Mínimos	Máximos
Vértices endo............	1,633040	2,828348
— endo exo........	2,516000	3,000193
— exo............	3,265986	3,464084

Cada pareja, en las posiciones diversas del giro de las entidades O y O′, puede alcanzar valores de distancia de sus vértices incluídos entre los máximos y mínimos correspondientes. Se observa, desde luego, que la pareja *exo* es de una individualidad muy neta e inconfundible; su valor mínimo es superior a todos los restantes del cuadro.

En cambio, entre las dos parejas primeras existe una zona común, la de valores comprendidos entre 2,516000 y 2,828348. Esto justifica la posibilidad teórica de identificar ciertos derivados eritrénicos; a partir de los diderivados, suponer idénticos aquéllos en que dos radicales sustituyentes iguales X, X, inserten en los vértices *endo* E, E′, y *endo-exo* de carbonos distintos E, F′ y E′F. Pues como la estructura del compuesto *diendo*, XCH : CH . CH : CHX, puede distanciar a los radicales X en su giro, un valor de la zona común expresa, y como el mismo valor puede distanciarlos en el compuesto *endoexo*, XCH : CH . CH : CHX, parece razón suficiente para identificar tales derivados.

En una consideración cualitativa de las dos distintas condiciones *endo* y *exo* de los vértices terminales, este motivo de identificación de derivados no podría percibirse, pero en la cuantitativa a que se han sometido se echa de ver bien pronto.

De cuanto antecede aparecen legítimas las probabilidades de existencia de:

a) Dos monoderivados eritrénicos, XCH : CH . CH : CH_2, distintos por ocupar, en uno de ellos, el radical X vértice interior o *endo*, y en el otro, vértice exterior o *exo*.

b) Un monoderivado de fórmula CH_2 : CX . CH : CH_2.

c) Dos diderivados XCH : CH . CH : CHX, según que los radicales X estén en posición *diendo*, 1-4, o *exoendo* identificable, 1′-4, o bien en posición *diexo* 1′-4′.

d) Seis diderivados expresables así: 1-2 (trans), 1′-2 (cis), 1-3, 1′-3, 1-1′ y 2-3.

e) Un solo triderivado X_2C : CH . CH : CHX, pues sea 4 ó 4′ el lugar que ocupe el tercer radical X, siempre podrá constituir con el mismo X del primer carbono las parejas identificables 1-4 y 1-4′.

f) Seis triderivados siguientes: 1-2-3 (trans), 1′-2-3 (cis), 1′-2-4′, 1-2-4, 1-1′-2 y 1-1′-3.

g) Un solo tetraderivado X_2C : CH . CH : CX_2.

h) Cuatro tetraderivados: 1-2-3-4, 1′-2-3-4′, 1-1′-2-3 y 1-1′-2-4 = 1-1′-2-4′.

i) Tres pentaderivados, según que el átomo de hidrógeno restante al hidrocarburo sea *endo, exo* o bien pertenezca al carbono 2.

j) Un único hexaderivado X_2C : CX . CX : CX_2.

En total, un mismo radical X debe dar lugar a *veintisiete* derivados del eritreno, clasificables así:

Monoderivados	3
Diderivados	8
Triderivados	7
Tetraderivados	5
Pentaderivados	3
Hexaderivados	1

Desde luego, en la polisustitución para radicales distintos, las posibilidades de derivados diferentes crecen de un modo extraordinario.

La fórmula plana del eritreno es de mucha menos trascendencia en orden a las derivaciones posibles. Como es sabido, deja prever *dos* monoderivados, *cuatro* di, *cuatro* tri, *cuatro* tetra, *dos* penta y *un* hexaderivado; en total, *diez y siete.*

Aun más; dentro ya de la estereoquímica, atendiendo las posiciones *cis* y *trans*, no se alcanza sobre ello sino a explicar un nuevo diderivado y un tri; en total, *diez y nueve.*

Es precisa la ampliación estereoquímica *endo* y *exo*, mencionada en esta nota, para alcanzar en deducción, que es de esperar ha de juzgarse legítima, la cifra apuntada de *veintisiete.*

IV

La cadena del eritreno

$$> C = \underset{|}{C} - \underset{|}{C} = C <,$$

presenta una particularidad experimental, manifiesta por Griner en su memorable sintesis de las eritritas (1893).

Consiste en que si se dispone 1 mol. del citado hidrocarburo en solución clorofórmica fría, a contacto de 1 mol. de bromo, tiene lugar la prevista adición de la totalidad del halógeno; pero no es que se trate de la simplificación de un enlace etilénico y de la persistencia del otro, sino de la adición de un átomo de bromo a cada carbono extremo, y de la formación de un enlace etilénico entre ambos carbonos interiores; así,

$$> CBr\ \underset{|}{C} = \underset{|}{C}\ CBr <.$$

A tal cadena corresponden dos estereoisómetros geométricos *cis* y *trans*. Y, en efecto, el resultado de la reacción es una mezcla equimo-

lecular de ambas formas, de separación muy fácil, pues por debajo de 50°
el dibromuro *cis* es sólido.

Estereoquímica de esta reacción. Supóngase que los átomos de bromo insertan sobre los vértices *cis* del lado de acá del plano del dibujo, o sea sobre los vértices D y D′ de los tetraedros terminales (fig. 3.ª) A la vez los vértice D y D′ de los tetraedros céntricos se fusionan; para lo cual el

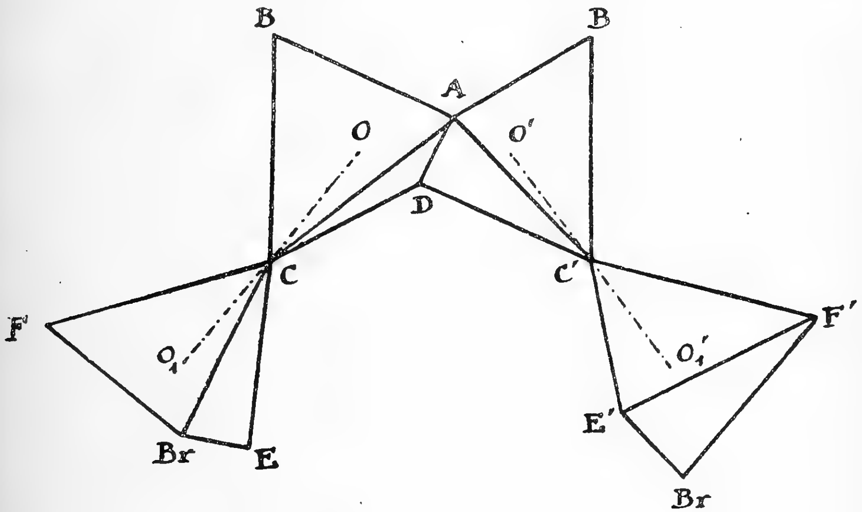


FIG. 5.ª

ángulo llano OO′ se transforma en un ángulo de 70°32′, o sea que AO gira sobre el punto A un ángulo de 54°44′, y O′A del mismo modo.

En mi nota, ya citada, se atendía este caso como el caso más simple de ciclización, y se incluía en la fórmula general

$$T_n = \frac{180^\circ}{n} - 35^\circ 16',$$

que para $n = 2$ es $T_2 = 90^\circ - 35^\circ 16' = 54^\circ 44'$.

He aquí el estereoesquema resultante (fig. 5.ª)

Los giros de los tetraedros terminales alrededor de las rectas CO_1 y $C'O'_1$ identifican las posiciones de sus tres vértices Br, E, F y Br, E′, F′; luego no hay lugar privilegiado para la situación de los átomos de bromo; el estereoesquema es único; desaparecieron los lugares *endo* y *exo;* no hay posible más que un solo dibromuro de eritreno *cis*.

Si los átomos de bromo insertaran en D y C′, o sea en vértices *trans*, uno de cada lado del plano del dibujo, los D y C′ de los tetraedros céntricos fusionarían, creándose el enlace etilénico por idéntico giro que en el caso anterior. El estereoesquema resultante sería análogo, pero los tetraedros terminales insertos en *trans*-posición; y como persistirían con su aptitud de giro, tampoco presentarían vértices singulares, y el esquema sería único, como lo es el dibromuro de eritreno *trans*.

Esta aclaración es necesaria; ella demuestra que, no obstante las categorías *endo* y *exo*, pretendidas establecer para los vértices terminales, los resultados de la reacción Griner son independientes de tal ampliación, y se grafican en perfecto acuerdo con la realidad experimental.

Tal reacción Griner fué para Thiele (1899) sugestión felicísima que le condujo a sus ideas hoy tan en boga respecto al enlace etilénico.

Según ellas, las segundas valencias del tal enlace no se autosaturan sino parcialmente; ciertas porciones a, del valor unidad de cada valencia, se reúnen, y ciertas porciones 1-a quedan libres a cada carbono. El enlace etilénico, $> C = C <$, propuesto por Kekulé en el alborear de las fórmulas estructurales (1858), ha pasado por Thiele a esta expresión:

$$>C - C<.$$

Desde luego, para las más inmediatas deducciones de tal idea, es precisa una ampliación; la de que a y 1-a deben ser iguales. En efecto: para Thiele el eritreno es

$$CH_2 - CH - CH - CH_2.$$

El enlace curvo 2-3 es la saturación de dos porciones, supóngase 1-a; valor igual al de las valencias parciales libres de los carbonos 1 y 4. La reacción Griner se evidencia así de un modo notable; los dibromuros responderán al esquema:

$$CH_2Br - CH - CH - CH_2Br;$$

en el cual las valencias parciales libres tendrán el valor a.

Si $a >$ 1-a, este nuevo enlace doble habría de manifestarse más débil, por ser mayores sus posiciones libres de valencia, que cada uno de los enlaces dobles primitivos del eritreno. Si $a <$ 1-a aquél se comportaría como entidad más resistente que cada uno de éstos. No hay dato experimental que influya en favor de uno u otro supuesto. Tal nuevo doble enlace tiene, y sin discrepancias de grado, todas las aptitudes funcionales que se perciben en cada uno de los dos primitivos del eritreno; luego es igual a éstos, y, por lo tanto, $a = 1 - a$, o sea $a = \frac{1}{2}$.

Este valor es absolutamente preciso para incorporar con éxito el esquema bencénico a las ideas de Thiele. En otro caso, de $a \neq 1\text{-}a$ no se hubiera hecho sino amenguar, pero no suprimir la gran objeción al esquema Kekulé-Cooper; la identidad de los ortoderivados 1-2 y 1-6.

La reacción Griner se ha generalizado mucho; las ideas de Thiele han tenido con ello una confirmación brillante. Un ejemplo típico se percibe en la síntesis de la atropina por Willstätter (1901). A partir de la suberona, y en once fases, se llega al hidrotropilideno o cicloheptadieno 1-3 [I]; este cuerpo, dispuesto en condición reaccional conveniente, cumple la reacción Griner, asociando Br_2 con transposición, y dándose el dibromo 1-4 ciclohepteno 2 [II]

$$CH_2 \begin{array}{l} \diagup \; CH_2 - CH = CH \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; | \\ \diagdown \; CH_2 - CH = CH \end{array} \rightarrow CH_2 \begin{array}{l} \diagup \; CH_2 - CHBr - CH \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\; \| \\ \diagdown \; CH_2 - CHBr - CH \end{array}$$

[I] [II]

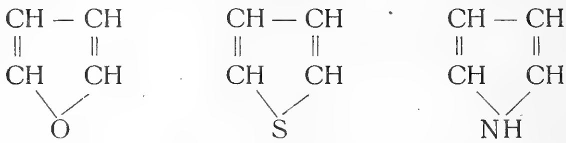
Pero no es menos cierto que pesan sobre las ideas de Thiele datos contrarios muy rotundos. Por ejemplo, el caso del ciclohexadieno 1-3, que debiera presentar, como el hidrotropilideno, la aptitud a la hemisaturación, con la transposición consiguiente; y que, sin embargo, según las experiencias de Harries, Antoni, Zelinsky y Gorski, se manifiesta siempre entidad tetravalente, dándose en todas las técnicas un tetrabromuro, que funde a 184°.

Otro caso, el del ciclotetreno 1-3-5-7 de Willstätter y Waser (1911). Este cuerpo, que se alcanza accesoriamente en los ensayos de síntesis de la pseudopelletierina, es de una analogía estructural formidable con el benceno; y contra todo lo previsto, y muy en particular contra las ideas de Thiele, no es un núcleo; sus enlaces dobles se manifiestan al bromo; luego en él no existe esa entidad de apariencia saturada por las hemivalencias curvas, que para el benceno constituye tan feliz concepción.

Por fin, y este es el caso cuya meditación ha dado origen a esta nota, se sabe que el butanodial, supuesto en forma dienólica

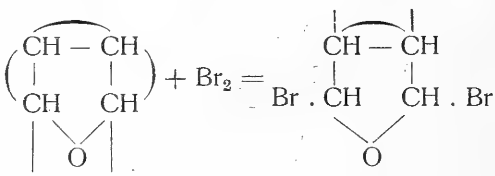
$$CHOH = CH \,.\, CH = CHOH,$$

y lo mismo las dicetonas γ, y los aldehidos γ cetónicos, destilados en presencia de del anhídrido fosfórico, calentados con sulfuro de fósforo, o con solución alcohólica de amoníaco, dan lugar respectivamente a los heterociclos pentagonales, furfurano, thiofeno y pirrol



Estos heterociclos son sencillamente resultados de saturación del resto eritrénico — CH : CH . CH : CH — por oxígeno, azufre e imidógeno.

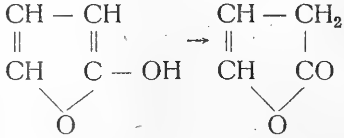
En las ideas de Thiele caben dos interpretaciones. Que se supongan libres las hemivalencias de los carbonos α, con lo que se justificaría para ellos la reacción Griner:



Pero ésta es, desde luego, a rechazar; tal reacción no tiene lugar nunca; en todos los procesos de hemisaturación se cumple entre carbonos α β, desapareciendo de modo efectivo un enlace doble de sus fórmulas clásicas, dihidrofurfurano, pirrolina, etc.

O bien que tales hemivalencias se autosaturaran como en puente, con lo que la reacción Griner sería imposible, y así tales heterociclos aparentarían una saturación de verdaderos núcleos.

Pero el furfurano no es un núcleo: es un ciclo insaturado. Sus enlaces dobles se acreditan como los enlaces dobles de una olefina; muy en particular a los procesos de oxidación, precisamente a ellos, que son los que, al no darse, afirman más que nada la condición experimental de los núcleos. Hay derivados furfuránicos, como el ácido piromúcico, que asocian Br_4 con extremada facilidad. Los derivados oxhidrílicos del furfurano, que pudieran suponerse análogos a los fenoles, no son conocidos; cuando se intentan, se da la transposición enólica, y aparecen lactonas etilénicas:



Luego al no ser núcleo, la segunda interpretación a base de las ideas de Thiele, que tan por núcleo lo estima, no es aceptable, y rechazada la primera por no dar jamás adiciones $\alpha\alpha$, no queda en las hemivalencias curvas interpretación apropiada para el furfurano.

En cambio, el thiofeno es un núcleo. Los halógenos le sustituyen y no le adicionan; es insensible a los agentes de oxidación. Se deja nitrar y sulfonar como el benceno mismo. Un nitrothiofeno es reducido por el método Béchamp en una amina fenólica, la thiofenina, cierto que no diazoable; salvo esto, la analogía con el núcleo típico, el benceno, no puede ser más completa.

No tan enérgicamente, pero sin duda, también el pirrol se manifiesta núcleo. Su más curioso dato es que los halógenos le sustituyen intensamente sin adicionarse, caso del yodol. Los oxidantes tenues no le atacan; en cambio, como en el benceno, transforman en los derivados pirrólicos las cadenas laterales en carboxilos.

De orígenes sintéticos tan paralelos, he aquí tres heterociclos francamente escindidos en categorías. Pero la cadena eritrénica es innegable, como lo de que por vértices terminales de esta cadena tiene lugar la inserción del átomo o grupo típico.

Tales vértices son en esta nota definidos de dos condiciones bien distintas: los vértices *endo* o *endo-exo*, y las vértices *exo*.

No supongo imperdonable mi atrevimiento de creer que las esenciales diferencias que separan al furfurano del thiofeno y del pirrol pudieran radicar en la distinta condición de los vértices terminales a los que se inserten los átomos de oxígeno, azufre y grupo amidógeno.

Y. atendiendo que los vértices *exo* son siempre los más distanciados, con lo que su saturación por oxígeno daría un estereoesquema muy abierto, o sea más cadena, menos núcleo, podrá suponerse que el furfurano es un óxido de eritreno 1′-4′, a la manera de un óxido etilénico con enlaces dobles, manera de gran concordancia con el matiz reaccional de tal heterociclo.

Y el thiofeno podrá ser la saturación por azufre de los vértices *endo*, creándose así una entidad estérica más cerrada, más resistente, más núcleo.

Y el pirrol, la saturación por amidógeno de una pareja de vértices *endo-exo*, identificable por su distancia, y para ciertas posiciones, a una pareja *endo;* pero fuera de éstas, creando una entidad estérica intermedia entre las dos extremas, claro que siempre más contigua a la thiofénica, como corresponde a su condición nuclear, si, pero no fuerte.

Esto es, al correr de pluma, salvo los cálculos, que han sido objeto de revisiones detenidas, lo que me permito pensar, como ampliación muy atendible, sobre la expresión estérica del eritreno. Ya he indicado que fué la meditación sobre las distintas aptitudes reaccionales de los monoheterociclos a pentágono lo que encauzó mis ideas hacia el estudio de la porción común que tales presentan, el residuo eritrénico; a él me incitaron en seguida las brillantísimas ideas de Thiele, con las que bien pronto pude ver que los tales heterociclos no reciben una explicación total y perfecta.

Dándome cuenta, lo que jamás pierdo de vista, de mi insignificancia científica, pero como concesión a mis entusiasmos, nunca dormidos, por esta modalidad trigonométrica de las fórmulas a tetraedros, me atrevo a presentar esta nota a la opinión de las más altas personalidades de la ciencia química española.

ÍNDICE
DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Páginas.

I. Don Eduardo Mier y Miura, por *José Rodríguez Mourelo*.. 245
II. Cuestiones relativas a la Geometría métrica proyectiva, por *Miguel Vegas*.................................. 256
III. Contribución al conocimiento de la fauna índica: Orthoptera (Locustidæ vel Acridiidæ), por *Ignacio Bolívar*....... 278
IV. Expresión estérica del eritreno, por *Adolfo Melón*........ 290

La suscripción a esta Revista se hace por tomos completos de 500 a 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, Madrid.

Precio de este cuaderno: **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVI: 1.º DE LA 2.ª SERIE

NÚMEROS 7-8-9: ENERO-FEBRERO-MARZO DE 1918

SMITHSONIAN INSTITUTION
APR 7 1927
NATIONAL MUSEUM

MADRID
IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA
GLORIETA DE CHAMBERÍ
1918

Suplemento a la bibliografía crítica malacológica publicada en el tomo XV de las Memorias de la Real Academia de Ciencias,

por

J. G. Hidalgo

Las últimas páginas de dicho volumen aparecieron en el año 1913; y en este suplemento doy cuenta de todos los escritos sobre moluscos que se han podido adquirir hasta mayo de 1918, y cuyo número no es muy considerable por lo mucho de que ya di cuenta acerca de esta especialidad y lo poco que se edita actualmente por el estado excepcional de Europa.

Aguilar Amat (J. B. de)

Moluscos de Olot. 8.°, 4 págs. Barcelona, 1915.

Cita de Olot las siguientes especies de moluscos terrestres, con indicación de los sitios donde se han recogido:

Testacella Catalonica, Pollonera.
Hyalinia nitens, *cellaria* y *Arigoi.*
Helix hylonomia, *obvoluta* y *Andorrica.*
Pupa cylindrica.
Balea perversa.
Clausilia Penchinati, *parvula*, *abietina* y *nigricans.*

Menciona después seis publicaciones de Locard, Pollonera, Salvañá, Fagot, Chia y Germain.

Helix Companyoi. 8.°, 2 págs. Barcelona, 1914.

Menciona esta *Helix* de La Bisbal y Tarragona, y está en la creencia de que no existe en otras localidades de donde se ha citado.

Baker (F. C.)

The land and freshwater mollusks of the Stanford expedition to Brazil. 8.°, 54 págs. y 7 láms., en negro. Philadelphia, 1914.

Después de noticias sobre la región explorada del Brasil, da la lista de 49 especies de moluscos recogidos en un distrito; de 52 en otro, y de 34 en un tercero (total, 135 especies), y, a continuación sus descripciones, muy minuciosas, con cita de algunos autores y las localidades donde se han hallado, describiendo como nuevas unas 30 especies y varias subespecies, de las cuales da figuras en sus láminas, con mayor tamaño que el natural en muchas de ellas.

Balch (F. N.)

List of marine mollusca of Coldspring Harbor, Long island, with descriptions of one new genus and two new species of Nudibranchs. 8.°, 30 págs. y una lámina en negro con su explicación. Boston, 1899.

Después de dar noticias acerca de la localidad mencionada y de las especies de moluscos citadas de ella por diversos autores, enumera unas 80 especies que ha recogido, agregando observaciones más o menos extensas y descripción muy minuciosa de dos especies nuevas: *Polycerella davenportii* y *Corambella* (género nuevo) *depressa.* Estas se hallan bien representadas (el animal y la concha) en la lámina que acompaña al texto, con su explicación. Cita, además, los autores que ha consultado.

Bartsch (P.)

A monograph of West American Melanellid Mollusca. 8.°, 62 páginas y 16 láms., en negro. Wáshington, 1917.

Incluye en el grupo de *Melanelidos* gran número de especies de moluscos de la costa Oeste de América, que distribuye en los géneros *Melanella, Eulimostraca, Scalenostoma, Strombiformis, Niso, Stylifer, Mucronalia* y *Lambertia.*

Al principio de su trabajo da noticias de lo ya conocido y publicado por otros naturalistas, y después la descripción y localidades de 86 especies incluídas en los géneros antedichos, de las cuales 48 son nuevas y 38 estaban ya descritas por otros autores. Las figuras de las láminas son muy buenas, pero están excesivamente aumentadas.

Description of new West American marine molllusks and notes on previously described forms. 8.°, 45 págs. y 6 láms, en negro. Wáshington, 1917.

Describe y figura el autor gran número de especies de moluscos marinos del Oeste de América, que son: 5 del género *Pyramidella* (una nueva); 32 del género *Turbonilla* (todas nuevas); una *Eulimella*, 9 del género *Odostomia* (8 nuevas); 9 *Cerithiopsis* (4 nuevas); 9 *Bittium* (5 nuevas); 7 *Alvania* (3 nuevas), y 4 *Rissoina.* Las descripciones son minuciosas, el habitat exacto y las figuras buenas, pero muy aumentadas, tanto, que una figura, la 10 de la lámina 42, que tiene una longitud de un decímetro, representa una especie de sólo 14 milímetros.

The Californian land shells of the Epiphragmophora Traskil group. 8.°, 11 págs. y 3 láms., en negro. Wáshington, 1916.

Incluye en el grupo *Epiphragmophora* de los Helicidos las tres especies de *Helix* denominadas *Cuyamacensis*, *Traskii* y *petricola*, establece nuevas subespecies, da los caracteres de éstas y las localidades donde se encontraron, y figuras de ellas muy buenas en las tres láminas que acompañan al texto.

Two new land shells from the Western States. 8.°, 3 págs. y una lámina en negro. Wáshington, 1916.

Describe una nueva subespecie del *Oreohelix Yapavai*, de Montana, y otra del *Oreohelix Baileyi*, del Idaho, en la América del Norte. Están bien representadas en la lámina.

Pyramidellidœ of New England and the adyacent region. 8.°, 47 páginas y 4 láms., en negro, con su explicación. Boston, 1909.

Da cuenta, en la introducción, de los escritos publicados por Say, por Totten, por Couthouy, por Adams, por Goudd, por Kay, por Stimpson, por Binney, por Verrill y por Tryon, en los cuales se mencionan especies de moluscos *Piramidelidos* de Nueva Inglaterra. Ha consultado, además, para su trabajo las colecciones de la Academia de Ciencias de Filadelfia, del Museo de Nueva York, de Winkley y del laboratorio de Wood's Holl.

Las especies que enumera son: 5 del género *Pyramidella*, 4 ya conocidas y una nueva, la *Pyramidella Winkleyi*; 18 del género *Turbonilla*, 10 ya conocidas y 8 nuevas: *Turbonilla Verrilli*, *vineœ, buteonis*, *Winkleyi*, *Sunneri, Witheavesi*, *Cascoensis* y *Edwardensis;* 15 del género *Odostomia*, 11 ya conocidas y 4 nuevas: *Odostomia Willisi, bushiana, Winkleyi* y *Hendersoni,* y una ya conocida *(Pyramis striatula)* para la cual establece el nuevo género *Couthouyella*. En todas las especies hay buenas descripciones y noticias de interés y las localidades donde se hallaron. Las figuras de las láminas son buenas, pero también excesivamente aumentadas; procedimiento empleado modernamente por muchos autores para representar moluscos de pequeño tamaño; así la figura 42 de la lám. 12, de 35 milímetros, representa un individuo de 2 milímetros y tercio. Las demás figuras en la misma relación.

The Philippine land shells of the Genus Amphidromus. 8.°, 47 páginas, una lám. en color y 21 en negro. Washington, 1917.

En esta minuciosa memoria menciona el autor todas las especies y variedades de *Amphidromus*, citadas de las islas Filipinas en las obras de

Sowerby, Reeve, Pfeiffer, Adams, Albers, Hombrom, Martens, Semper, Hidalgo, Dohrn, Smith, Mollendorff, Fulton, Elera y Pilsbry. Pasa después a la descripción de especies ya conocidas: *Amphidromus maculiferus, pallidulus, Calista, chloris, Roebeleni, entobaptus* y *Quadrasi* y de otras que publica como nuevas: *Ampidromus Malinlangensis, apoensis, Basilanensis, Floresi, Mearnsi, Bilatanensis, Hidalgoi, Suluensis* y *Mindoroensis*, siendo muy completas las descripciones, las citas de autores y de localidades.

Las figuras de las láminas, que son muy buenas, representan las variaciones que presentan los individuos de diferentes especies, siendo preciosa la que está en color y lleva el núm. 1.

Report on the Turton collection of South African marine mollusks, with additional notes on other South Africain Shells containea in the United States National Museum. 8.°, XII y 305 págs. con 54 láminas en negro. Wáshington, 1915.

Esta obra es un catálogo de 721 especies de moluscos recogidos en el Sur de Africa, en Puerto Alfredo, por el teniente coronel Turton, de las cuales 497 eran ya conocidas y 224 se publican como nuevas por Bartsch. Después hay una lista nominal de multitud de especies ya descritas, con indicación de diversos países donde se han hallado. Entre ellas figuran la *Cylichna fragilis, Kellia Mac Andrewi* y *Mangilia striolata*, de España, y la *Nassa trifasciata*, de Vigo.

En el catálogo antes citado, todas las especies nuevas se hallan muy bien figuradas en las láminas, pero con un aumento considerable la mayor parte de ellas, puesto que son de muy pequeñas dimensiones.

The Philippine land shells of the genus Schistoloma. 8.°, 10 páginas y una lám. en negro. Wáshington, 1915.

Se ocupa el autor en este escrito de algunas especies del género *Schistoloma*, de Kobelt (antes publicado por Gould con el nombre de *Coptocheilus*), y que hasta ahora sólo se han encontrado en las islas Filipinas. Da los caracteres de tres especies: *alta*, de Saverby; *Mac Gregori*, de Bartsch, y *Quadrasi*, de Hidalgo, como igualmente de algunas subespecies de las mismas y las localidades donde se han encontrado. Las figuras de las lámina son buenas.

The recent and fossil mollusks of the genus Rissoina from the West coast of America. 8.°, 30 págs. y 6 láms., en negro. Wáshington, 1915.

En este escrito da cuenta Bartsch de todos los autores que han publicado *Rissoinas* de la costa Oeste de América y enumera a continuación 38 especies de dicho género, de las cuales publica 22 como nuevas. Las descripciones son muy minuciosas, y las figuras de las láminas buenas, pero con un aumento muy considerable.

BAVAY (A.)

Quelques coquilles des sables littoraux de divers pays. 8.°, 24 páginas y 2 láms. en negro. París, 1917.

Este autor da noticias del resultado obtenido por varios naturalistas recogiendo arena de las playas y cribándola, pues así se obtienen multitud de especies de moluscos de muy pequeñas dimensiones; unas ya conocidas, y otras que resultan nuevas. Las que él describe por este último concepto y publica en su trabajo, son las *Marginella turbiniformis, atomella, Tomlini, Bougei, Hirasei* y, además, la *Roberti,* de Monterosato. Da también como nuevas el *Erato gemma* y las *Rissoina Motezzi, Tomlini y Bougei*, y la *Liotia Dautzenbergi.* Las descripciones son buenas.

En las dos láminas están muy bien figuradas estas especies con un aumento extraordinario, y, además, la *Marginella Mariei,* de Crosse, y a var. *Jullieni Bavay* de la *Marginella miliaris,* de Linné.

BERRY (S.)

A catalogue of Japanese Cephalopoda. 8.°, 64 págs. y 5 láms., en negro. Philadelphia, 1912.

Es un extenso trabajo sobre los cefalópodos del Japón, muy minucioso, pues en cada especie hay cita de muchos autores, extensa descripción y mención de bastantes localidades. Da buenas figuras de algún cefalópodo, que considera como nuevo. Termina el trabajo con una bibliografía muy numerosa y completa acerca de los moluscos de dicho grupo.

Chitons taken by the United States fisheries steamer Albatross in the Northwest Pacific in 1906. 8.°, 18 páginas y 10 láminas en negro. Wáshington, 1917.

En esta memoria se mencionan 11 especies, antes incluídas en el género *Chiton*, recogidas por el buque *Albatross* en el Noroeste del Océano Pacífico. El autor las enumera con los nombres que han recibido posteriormente, y de nueve de ellas da minuciosas y extensas descripciones, citando en todas los sitios donde se han encontrado. Publica 4 como nuevas, con los nombres de *Leptochiton Diomedeœ*, *Ischnochiton amabilis, interfossa* y *Pilsbryanus*. Las láminas representan la concha de varias especies, figuras muy ampliadas de las valvas centrales o terminales, dientes de las radulas, etc.

BOETTGER (C. R.)

Matériaux pour servir à l'étude de l'Eremina duroi tlid. 8.°, 9 páginas, figuras en el texto y 2 láms. en negro. Madrid, 1915.

El autor ha tenido facilidad de adquirir, durante su estancia en Río de Oro, gran número de ejemplares de la interesante especie de molusco terrestre que yo publiqué en el volumen 34 del *Journal de Conchyliologie* con el nombre de *Helix Duroi*, y que actualmente está incluído en una de las divisiones que se han hecho de dicho género con la designación de *Eremina*. Esta monografía es interesante por su parte histórica, cita de obras, anatomía del animal y descripción de la concha, con todas las variaciones que presenta de tamaño, altura de espira, perforación de la base, coloración uniforme o con zonas transversales. Las figuras anatómicas intercaladas en el texto y las de las láminas son muy buenas.

BOFILL Y POCH (A.)

Iconografía y descripció de formes malacologiques del Noguera Pallaresa y del Ribagorçana. 8.°, 22 págs. y 2 láms., en negro. Barcelona, 1915.

En esta memoria da las descripciones de moluscos ya conocidos y publicados anteriormente en otros escritos con los nombres de *Helix Des Moulinsi, ripacurcica, Montsicciana*, *Pupa leptochilus, crassata, Aragonica, pulchella*, *sexplicata*, *Pomatias Montsiccianus*, *ripacurcicus, Noguerœ y Annicola globulus*. Las descripciones son extensas, las localidades en que se han encontrado, exactas, y las figuras de las láminas, muy buenas.

Este autor ha sufrido en otro tiempo la influencia de Bourguignat, puesto que da como diferentes los *Pomatias montsiccianus* y *rudicosta*, que apenas difieren, como puede verse en sus dos figuras, que son muy buenas; pero debe haberse modificado algo su manera de ver, desde hace veinte años, puesto que el título de su trabajo actual no dice *especies mdlacológicas*, sino *formas malacológicas*.

Nota sobre Helix Bofilliana Fagot y Pupa Tarraconensis Fagot. 8.°, 4 págs. y 4 figs. en negro.

El autor menciona las especies de moluscos terrestres hallados en una excursión hecha por el señor Sagarra en las costas de Garraf, en Cataluña, que son las siguientes:

Pomatias Martorelli, Bourguignat.
Cyclostoma elegans, Muller.
Pupa Tarraconensis, Fagot.

Pupa Montserratica, Fagot.
Ferussacia Vescoi, Bourguignat.
Rumina decollata, Linné.
Helix aspersa, Muller.
Helix splendida, Draparnaud.
Helix andorrica, Bourguignat.
Helix Bofilliana, Fagot.
Helix ruscinica, Bourguignat.
Hyalinia Courquini, Bourguignat.
Clausilia Penchinati, Bourguignat.

A continuación da extensas descripciones de la *Helix Bofilliana* y de la *Pupa Tarraconensis*, con figuras en negro de las mismas, citando muchos sitios del macizo de Montserrat, en que vive la primera especie, y otro gran número de las costas de Garrat, en que se halló la segunda.

BOUGE (L. J.) y DAUTZENBERG (Ph.)

Les Pleurotomides de la Nouvelle Caledonie et de ses dépendances. 8.°, 92 págs. París, 1913.

Este trabajo es un catálogo de 188 especies de Pleurotomidos hallados en la Nueva Caledonia y sitios próximos. Los autores las distribuyen en siete géneros: *Pleurotoma, Drillia, Surcula, Mangilia, Glyphostoma, Clathurella* y *Daphnella,* que, a su vez, comprenden algún subgénero y ciertas especies diversas variedades. No se describen las especies; en ellas sólo se da el nombre, cita del autor que la creó y de algunas figuras, las localidades, y, por regla general, breves observaciones.

BUEN (F. DE.)

Trabajos realizados en la Sociedad de Oceanografía, de Guipúzcoa, en 1915. 8.°, 58 págs. y figuras intercaladas en el texto. San Sebastián, 1916.

Los moluscos citados de la isla de Santa Clara en la pág. 99, son el *Pholas Dactylus,* el *Lithodomus lithopagus* y el *Teredo navalis;* en la pág. 38 el *Mytilus edulis,* de Deva, y en las págs. 12, 18, 38 y 39 las especies siguientes de San Sebastián:

Sepiola Rondeleti.
Loligo vulgaris.
Sepia officinalis.
Eledone moschata.
Ommatostrephes sagittatus.
**Morio tyrrhena.*

**Cassidaria tyrrhena.*
**Argobuccinum giganteum.*
**Ranella gigantea.*
Aporrhais pes pelicani.
Avicula hirundo.
Patella vulgata.
**Haliotis tuberculata.*
**Triton nodiferus.*
En la pag. 39 hay 4 figs., en negro, de las especies señaladas con *.

BURNUP (H. C.)

On South African Enneæ, with descriptions of new species and varieties. 8.°, 54 págs. y 3 láms., en negro, con su explicación. Museo de Natal, 1914.

Estudia el autor las 16 especies de *Ennea* que estaban publicadas del Sur de Africa; y da de ellas excelentes descripciones, como también de otras cuatro, que considera como nuevas y que denomina *Ennea Melvilli, mooiensis, inhluzaniensis* y *Ponsonbyi.* También establece algunas variedades. Todas las especies son pequeñas, pues muchas sólo tienen 6 milímetros; pero en las figuras, que son excelentes, se ha ampliado su tamaño y se aprecian bien los caracteres.

A pesar de la gran semejanza general de todas las *Ennea* descritas, se distinguen bien las especies por su forma más alargada o más corta, por su superficie lisa, con estrías longitudinales finas o algo gruesas, y sobre todo, por la forma diferente de su abertura y de los pliegues ó láminas de la misma. Es un precioso trabajo esta monografía.

CAZIOT (M.)

Etude sur le genre Pomatias, Studer. 8.°, 36 págs. Lyon. 1909.

El autor hace un resumen de lo publicado por diversos naturalistas acerca de las especies de moluscos incluídos en el género *Pomatias*, estableciendo cinco secciones, con sus caracteres y diferentes grupos, en los que incluye las especies pertenecientes a cada uno y los países donde éstas viven. Copia después los grupos establecidos en la obra de Wagner con las especies que este autor enumera en cada uno. No hay descripciones ni figuras.

De España se mencionan los *Pomatias hispanicus, Hidalgoi, isoicus, isabanus, filicium, Martorelli, labrosus* y *Berilloni.*

Las especies citadas en este escrito se aproximan a 200; pero muchas de ellas no son en realidad más que variaciones de otras ya conocidas.

CAZURRO, SAN MIGUEL y SERRADELL.

Excursión a Tarragona. 8.°, 6 págs. Madrid, 1916.

En el *Boletin de la Sociedad Española de Historia Natural.*— Después de dar noticias sobre la localidad visitada, dan una lista de los moluscos encontrados, que son las especies siguientes:

Helix acuta, Muller; *albovariegata*, Caziot; *alluvionum*, Servain; *Arigonis* Rossm; *apalolena*, Bourg; *astata,* Bourg; *Canovasiana*, Serv.; *Compagnoi*, Aller; *Cysiciensis*, Coutagne; *granonensis,* Serv.; *lactea*, Mull; *lineata,* Locard; *Mendranoi*, Serv.; *Montserratica,* Fagot; *Penchinati,* Bourg; *pila*, Caziot; *Pisana*, Mull; *splendida,* Drap.; *umbilicata*; Draparnaud.

Hyalina cellaria, Mull; *Crystallina*, Mull.; *Harlei*, Fagot.

Leucochroa candidissima, Draparnaud.

Stenogyra decollata, Linné.

Ferussacia foliculus, Gronov.; *Vescoi*, Bourguignat.

Clausilia Catalonica, Fagot; *Penchinati*, Bourguignat.

Pupa Montserratica, Fagot; *umbilicata,* Draparnaud, y *virgicula,* Michaud.

Cyclostoma elegans, Muller, y *lutetianum* Bourguignat.

Al final del escrito indican los autores que varias de las especies que citan sólo pueden considerarse como variedades de otras.

CHIA (M. de).

Notas sobre las Teredinidœ de nuestras costas. 8.°, 6 págs. Barcelona, 1915.

En este trabajo da descripción de la concha de los *Teredo*, ya conocida por diferentes obras, y de las especies halladas en las costas de Cataluña, con seguridad; sólo menciona tres, con su correspondiente descripción, a saber:

Teredo divaricata, Desh. Barcelona, Vilasar.

Teredo megotara, Hanley. Vilasar.

Teredo Norvegica, Spengler. Mataró, Vilasar, Barcelona.

Aplech de noticias sobre los moluscos de Cataluña y catálogo provisional de los mismos (en catalán). 8.°, 132 págs. Barcelona, 1911 a 1914.

Al principio de este escrito sobre los moluscos marinos de Cataluña se da una lista de las obras que contienen noticias acerca de las especies de dicha región. Son en número de 48, cuya mayor parte están ya consignadas en mi *Bibliografía crítica*, de donde se han copiado. Sigue el catálogo de las especies que se consideran como vivientes en la costa catalana, por orden alfabético de nombres genéricos y específicos, con las sinonimias. A continuación hay otro catálogo de las especies por orden sistemático con las localidades donde se han hallado y el nombre de las personas que las recogieron. No se menciona el de otras personas que ya habían recogido moluscos en época anterior, que fueron los señores Anglada, Azpeitia, Cardona, Chia, Cisternas, Comendador, Coronado, Courquin, Grau, Quadras y algún otro.

Esta enumeración de los moluscos marinos que se encuentran en las costas de Cataluña está bien hecha, aunque necesita algunas correcciones; y la segunda parte del escrito será muy útil a los que sigan explorando esa parte del litoral de España, desde el punto de vista malacológico. (Véase tomo XV, *Memorias de la Academia de Ciencias*, pág. 2096.)

Introducción a la fauna malacológica de la provincia de Gerona. 8.°, 28 págs., sin fecha de publicación y nombre del autor. (Este escrito me fué remitido por Chia, por lo cual creo que fué el que lo redactó.)

En las primeras páginas da noticias de lo publicado sobre moluscos de Gerona; cita gran número de autores, cuya mayor parte sólo ha visto consignados en mis obras malacológicas, según dice, y da a continuación una lista por orden alfabético de moluscos de la provincia de Gerona, que sólo llega hasta el *Pecten elongatus*, de Born.

Las Veneridæ de nuestro litoral. 8.°, 22 págs. Barcelona, 1915.

En esta memoria menciona el autor 18 especies de Venéridos, que se citan de Cataluña, con las sinonimias, caracteres de los tipos y de las variedades, localidades donde se han recogido y los nombres de los colectores. Agrega también algunas observaciones. Este trabajo monográfico está bien hecho, aunque se le pueden poner algunos reparos, como el de incluir equivocadamente las *Venus chione* y *rudis* en el género *Meretrix*, y algunos *Tapes* bien distintos en la sinonimia del *Tapes aureus*, de Gmelin, y el *Tapes geographicus*, como var. del *Tapes pullastra*.

COLTON (H. S.)

On some varieties of Thais lapillus in the mount desert region. 8.°, 15 págs. Philadelphia, 1917.

Es un estudio de las muchas variedades que presenta dicho molusco.

COOPER (J. G.)

On shells of the slope of North America. 8.°, 13 págs. San Francisco, 1876.

Se ocupa en este escrito de varias especies de moluscos terrestres y fluviales de la América del Norte, dando descripción de los mismos y las localidades donde se han encontrado.

Catalogue of marine shells collected on the eastern shore of lower California. 8.°, 15 págs. San Francisco, 1895.

Después de noticias acerca de la localidad y de las colecciones ya formadas con especies allí recogidas y las publicaciones hechas, da una lista de 191 especies con alguna indicación de localidad. Gran parte de las especies, sobre todo las bivalvas, han sido recogidas sin el animal.

On west Mexican land and freshwater mollusca. 8.°, 4 págs. San Francisco, 1895.

Sólo se citan de la parte Occidental de Méjico 17 especies de moluscos terrestres y fluviales, con alguna indicación de sus caracteres y sitios donde viven.

COPPI (F.)

Osservazioni malacogische circa la Nassa semistriata e Nassa costulata del Brocchi. 8.°, 7 págs. Módena, 1880.

Estudia las dos especies de *Nassa* que cita, publicadas por Brocchi, y las reúne en una sola especie con el nombre de *pliocenica*, agregando a ellas las variedades que denomina *integostriata*, *nana*, *turrita* y *subcostulata*. Da figuras de todas, menos de la var. *subcostulata*.

COX (J. C.)

A label List of Australian and Pacific island. Pulmonata. 8.°, 20 páginas, 1892.

Esta lista la hizo el autor teniendo a la vista el *Manual de Conquiologia*, de Tryon. Al final hay un catálogo de Hedley acerca de los *Slugs* de Australia, Papúa y Polinesia.

DALL (W. H.)

Notes on the shells of the genus Epitonium and its allies of the Pacific coast of América. 8.°, 18 págs. Washington, 1917.

Adoptando en este escrito el nombre de *Epitonium* para el género antes conocido con la denominación de *Scalaria*, da interesantes noticias de todas las especies halladas en la costa americana del Pacífico, publicando como nuevas 41, con la descripción y la localidad, pero sin figuras. Menciona también algunas ya dadas a conocer por otros autores.

Diagnoses of new species of marine bivalve mollusks from the

Northwest coast of América in the collectión of the United States National Museum. 8.°, 25 págs. Washington, 1916.

En esta memoria da la descripción y localidad de 77 nuevas especies de moluscos bivalvos de la costa NO. de América, con los nombres siguientes:

Nucula darella, Linki, quirica y petriola.—Leda navisa, amiata, oxia, liogona, gomphoidea, fiascona, phenaxia, spargana.—Yoldia oleacina, secunda. Beringiana, orcia, sanesia, cecinellay capsa.—Malletia talama y fiora.—Tindaria Californica, brunnea, Martiniana, Ritteri, dicofania y cervola.—Glycymeris Corteziana y Migueliana.—Limopsis skenia y akutanica.—Pteria viridizona.—Vulsella Pacifica.—Pseudamusium incongruum y bistriatum.—Limatula attenuata.—Modiolus pallidulus.—Dacrydium Pacificum.—Musculus olivaceus.—Crenella rotundata.—Dermatomya Buttoni, Beringiana y leonina.—Cetoconcha Malespinæ.—Myonera Tillamookensis.—Cuspidaria apodema.—Cardiomya Balboæ.—Calyptogena elongata.—Miodontiscus meridionalis.—Milneria Kelseyi.—Thyasira Cygnus y tricarinata.—Erycina Catalinæ, Coronata, Balliana, Chacei y Santarosæ.—Anisodonta pellucida.—Rochefortia ferruginosa, Beringensis, Grebnitzsky y Golischi.—Pseudopythina Myaciformis.—Trigoniocardia Eudoxia.—Protocardia Paziana.—Cardium Dulcinea.—Psephidia brunnea, quadrana y truncaria.—Ervilia Californica.—Sphenia trunculus y Pholadidea.—Corbula porcella y Kelseyi.—Panomya Beringiana.—Saxicavella Pacifica y Pholadidea sagitta.

Menciona además otras 12 especies ya conocidas.

Summary of the mollusks of the family Alectrionidæ, of the West Coast of América. 8.°, seis págs. Washington, 1917.

En esta corta publicación cita de diversos países de la costa occidental de América y con los nombres genéricos de *Alectrion, Hyanassa y Arcularia* bastantes especies de moluscos antes incluídas en los géneros *Buccinum y Nassa* por los autores. Del *Alectrion* describe las nuevas especies *grammatus, limacina, onchodes y polistes.* Menciona después algunas especies de los géneros *Phos, Nassarina, Hindsia, Northia y Gouldia,* describiendo como nuevas los *Phos chelonis, alternatus, mexicanus y minusculus,* la *Nassarina solida* y la *Gouldia Californica.*

Notes on the species of Molluscan subgenus Nucella, inhabiting the Northwest coast of América an adjacent regions. 8.°, 16 págs. y dos láminas en negro. Washington, 1915.

Se ocupa Dall en este trabajo de cinco especies de moluscos univalvos de las costas del Pacífico septentrional, que casi todos los autores han incluído en el género *Purpura*, cuyo nombre cambia por el de *Thais* de Bolten, por ser éste más antiguo, a pesar de que no va acompañado de diagnosis y de que está referido a la *Purpura lapillus* del Océano atlántico. La obra de Bolten no debe tenerse en cuenta según he demostrado en las págs. 22 y 23 de mi Monografía del género *Cyprœa*.

El escrito de Dall es interesante; da cuenta de cinco especies, *lamellosa*, *lima, canaliculata, emarginata y Freycenetii,* con sinonimia muy completa, descripción, localidades y preciosas figuras en las láminas, de las cuatro primeras, en las que se ven algunas de las modificaciones observadas en la concha de estas especies tan variables, y que están indicadas de una manera completa en la introducción, en la cual hay también noticias acerca del animal de dichas especies.

A review of some bivalve shells of the group Anatinacea, from the West coast of América. 8.°, 16 págs. Washington, 1915.

Se ocupa en este escrito de los moluscos bivalvos del grupo Anatináceos que viven en la costa Oeste de América, que son: seis especies del género *Thracia,* de ellas tres nuevas, *Thracia*, *Beringi, Challisiana,* y *Diegensis*; seis del género *Cyathodonta*, de ellas cinco nuevas, *dubiosa, Lucasana, Pedroana, Galapaga* y *Cruziana;* cinco del género *Periploma*; 12 del género *Pandora,* de ellas cinco nuevas, *granulata, convexa, Patagonica, radians* y *Panamensis;* 13 del género *Lyonsia,* una nueva *la fretalis* y una del género *Mytilimeria*. En la mayor parte de las especies hay descripción, cita de autores y las localidades donde se han encontrado.

Description of new species of mollusks, from the N. O. coast of América. 8.°, 5 págs. y una lámina en negro. San Francisco, 1873.

Las nuevas especies que publica de dicha región son la *Voluta Stearnsi,* la *Nacella rosea,* la *Littorina aleutica,* la *Magasella aleutica* la *Acnœa peramabilis* y *Argonauta expansa.* Hay además observaciones acerca de otras especies ya conocidas.

Notes on the nomenclature of the mollusks of the family Turritidæ. 8.°, 21 págs. Washington, 1918.

En la familia de moluscos *Turritidœ* o *Pleurotomidœ* de muchos autores, muy abundante en especies, han llegado a incluirse más de 200 nombres genéricos, creados por buenos, medianos o malos naturalistas, y hay que admirar en este trabajo de recopilación de Dall la paciencia que ha tenido para reunir los datos consignados en publicaciones de todos los países, y sus observaciones, muchas de ellas interesantes.

Las noticias de más interés son las relativas a los géneros *Turris, Clavatula, Clavus, Turricula, Mangilia, Drillia, Melatoma, Moniliopsis, Ancistrosyrinx, Gemmula, Bela, Bathytoma, Aforia, Borsonella, Cythara, Clathurella* y *Calliotectum.*

Notes on Chrysodomus, and other mollusks from the North Pacific Ocean. 8.°, 28 págs. Washington, 1918.

Este escrito es la descripción de bastantes especies de moluscos de la familia *Chrysodomidœ* y alguna de otros grupos recogidas en los mares del Japón por Hirase.

Las descripciones son muy completas.

An Index to the Museum Boltenianum. 8.°, 64 págs. Washington, 1915.

Da noticias Dall de la colección de moluscos reunida por Bolten, de la obra que publicó este autor en 1798, y una larga lista de los nombres que dió a las especies. Varios naturalistas sustituyen denominaciones genéricas empleadas por autores posteriores a Bolten con las de éste en virtud de la ley de prioridad, aun cuando no van acompañadas de una descripción con los caracteres del género o de la especie. Los escritos deficientes e imposibles de consultar por su rareza, no deben anular lo consignado por naturalistas de mérito y bien conocidos de épocas posteriores.

DANFORTH (C. H.)

A new Pteropod from New England. 8.°, 21 págs. y cuatro láminas en negro. Boston, 1907.

Menciona tres especies de Pteropodos de Nueva Inglaterra, el *Clione borealis,* el *Spirialis Gouldii* y otro que publica como nuevo con el nombre de *Pseudoclione doliiformis.*

Da una extensa descripción anotómica de éste último, con dos figuras en el texto y cuatro buenas láminas en negro (con su explicación). En ellas representa los diferentes órganos de dicho molusco.

DAUTZENBERG (Ph.)

Sinistrorsités et dextrosités teratologiques chez les mollusques Gasteropodes. 8.°, 10 págs. París, 1914.

Curiosa memoria en que el autor da una lista de los moluscos que, teniendo habitualmente la abertura de la concha a la derecha, la presentan alguna vez a la izquierda, y viceversa, es decir, que siendo generalmente sinistrorsos, son en ocasiones dextrorsos. Entre los primeros figuran 147 especies terrestres y fluviales, en su mayor parte de Europa, y otro menor número de Filipinas, Estados Unidos, Antillas, Africa, Nueva Caledonia, etc.

Las especies marinas son 30, de Europa y Africa casi todas, siendo de notar que las especies de *Marginella* presenten la mayor parte individuos sinistrorsos.

Las especies que tienen normalmente la abertura de la concha a la izquierda, y por anomalía a la derecha, son en número de 17, y casi todas viven en Europa.

En la introducción indica Dautzenberg que las especies que presentan mayor número de individuos con abertura a la izquierda, por anomalía, son aquellas de que se recogen multitud de individuos por ser comestibles, como las *Helix aspersa* y *pomatia* y el *Buccinum undatum*.

Menciona también la veneración que se tiene en la India y Ceilán por los ejemplares sinistrorsos de la *Turbinella pirum*, que consideran como un atributo de la Divinidad y el elevadísimo precio que dan por un ejemplar, pues el que lo adquiere está en la creencia que ha de influir favorablemente en su salud y en todos los negocios que emprenda.

Liste des mollusques marins recoltés en 1915-1916, par M. Georges Lecointre sur le littoral occidental du Maroc. 8.°, 8 págs. París, 1917.

Esta memoria es una lista de las especies de moluscos recogidas en la bahía de Mazagán, y su litoral atlántico, en Casa Blanca, Cabo Cantin, etc.

Las especies mencionadas son unas 180, y la mayor parte de ellas viven también en las costas meridionales de España, Portugal, Italia, etcétera, y Norte de Africa.

Description de deux Mollusques nouveaux, provenant du Thibet.

Description d'un Macularia nouveau, provenant du Maroc.

DAUTZENBERG Y BAVAY.

Description de coquilles nouvelles, de l'Indo-Chine.

Estos tres artículos comprenden 14 págs., una lámina en color y dos figuras en el texto. 8.°, París, 1915.

Las nuevas especies descritas son: *Nanina Dejeanei*, *Clausilia Marteli*, *Helix Pauli y mellea*, *Pachydrobia pallidula*, *Buliminopsis abbreviatus*, *Clausilia Duporti y flaveola.* Las descripciones son extensas y las figuras, en color, inmejorables.

DAUTZENBERG Y FISCHER (H.)

Sur quelques types de Garidés de Lamarck. 8.°, 4 págs. París, 1913.

Este artículo contiene algunas observaciones acerca de siete especies de *Psammobia* publicadas por Lamarck, por el examen hecho de los ejemplares del Museo de París con la etiqueta del autor de las especies. Los autores hacen algunas rectificaciones.

Dautzenberg (Ph.) y Durouchoux.

Les Mollusques de la baie de Saint-Malo. 8.°, 82 págs. y 4 láminas en negro, con su explicación. París, 1913 y 1914.

En la introducción indican minuciosamente los autores los medios de que se han valido para recoger todas las especies de moluscos que luego citan en su trabajo, y que ascienden al número de 238 en el catálogo y 183 en el suplemento. En todas ellas se citan algunos autores, los sitios y condiciones en que se han recogido, y diversas observaciones, muchas de ellas extensas e interesantes. Es una fauna local bien estudiada. Las láminas representan especies ya conocidas, muy aumentadas de tamaño. En el ejemplar que tengo a la vista, las figuras han resultado demasiado oscuras.

Dautzenberg (Ph.) y Fischer (H.)

Etude sur le Littorina obtusata, et ses variations. 8.°, 44 págs. 2 láminas en negro y una en color. París, 1915.

Esta Memoria es un precioso trabajo monográfico de la *Littorina obtusata,* especie común en todo el litoral atlántico de Europa. Los autores mencionan la multitud de publicaciones que se ocupan de esta especie, describen las variedades de forma que figuran en dos láminas en negro, como igualmente las bonitas variaciones de color, muy bien representadas en otra lámina de este trabajo. También se citan muchas de las localidades en que se ha encontrado dicha especie.

Dautzenberg (Ph.) y Germain (L.)

Recoltes malacologiques du Dr. J. Becquaert dans le Congo Belge. 4.°, 73 págs. y 4 láminas en negro, con su explicación, 4.° Bruxelles, 1914.

Este trabajo contiene la enumeración de 96 especies de moluscos terrestres y fluviales recogidas en Africa, en el Congo belga, por Becquaert y que son: *1 Streptaxis*, *10 Ennea*, *2 Streptostele*, *2 Helicarion*, *5 Trochonanina*, *1 Thapsia*, *1 Kaliella*, *1 Zingis*, *2 Gonyodiscus*, *5 Buliminus*, *9 Achatina*, *2 Burtoa*, *1 Limicolaria*, *1 Perideriopsis*, *1 Ceras*, *2 Pseudoglessula*, *4 Subulina*, *1 Prosopeas*, *1 Opeas*, *1 Succinea*, *3 Limnœa*, *3 Planorbis*, *1 Segmentina*, *1 Bullinus*, *1 Physopsis*, *1 Ancylus*, *1 Tropidophora*, *1 Cyclophorus*, *2 Ampullaria*, *2 Lanis* *tes*, 3 *Vivipara*, 7 *Cleopatra*, 1 *Paludomus*, 1 *Bithinia*, 5 *Melania*, 1 *Potamides*, 1 *Aetheria*, 2 *Unio*, 1 *Spatha*, 1 *Mutelina*, 1 *Chelidonopsis*, 1 *Corbicula*, 1 *Sphœrium* y 1 *Eupera*.

Las nuevas especies son 19, a saber:

Ennea Joubini, Bequaerti, Lamyi, Jeanneli. Haullevillei y *Coarti. Streptostele Alluaudi.—Trochonanina Rodhaini.—Zingis Bequaerti.—Gonyodiscus Ponsonbyi* y *Smithi.—Achatina Schoutedeni.—Pseudoglessula Lemairei.—Prosopeas elegans.—Cleopatra Schoutedeni, hirta* y *Bequaerti.—Melania Bavayi y Eupera Bequaerti.*

En todas las especies, tanto en las ya conocidas como en las nuevas, se mencionan las localidades; en las primeras hay cita de muchos autores, y en las segundas minuciosas descripciones. Las figuras están considerablemente aumentadas.

Contribution à la faune malacologique des Açores. Folio, 112 páginas, tres láminas en color y una en negro, con su explicación. Mónaco, 1889.

En la introducción de este escrito indica el autor que de las 185 especies de moluscos que en él se mencionan de las islas Azores, 148 han sido recogidas por el príncipe de Mónaco, y las restantes 58 por M. Aguyar; del número total han resultado 24 enteramente nuevas para la ciencia.

Cita después los naturalistas que ya habían recogido antes cierto número de especies y las estaciones exploradas posteriormente por el príncipe de Mónaco.

Las páginas siguientes están destinadas a la bibliografía, y en ellas se consignan los títulos de 127 publicaciones.

A continuación se da el catálogo de las especies, con sus nombres, cita de algunos autores y los sitios donde se han encontrado. En algunas de ellas da noticias interesantes, y en las que se publican como nuevas frase latina, descripción en francés, localidad, observaciones más o menos extensas, etc. Las especies nuevas son una o dos en 19 géneros.

Después de la parte descriptiva hay cuadros de la distribución geográfica y geológica de las especies, como también de su distribución batimétrica.

El autor termina su escrito indicando que de las 348 especies que se conocen de las Azores, 58 no se han encontrado aún en otras regiones, y de las 290 restantes se han hallado algunas en los mares del Norte, y otras en España, en el Mediterráneo, en la costa occidental de Africa, etc., etc.

Al final hay una nota complementaria en que se menciona un trabajo del doctor Simroth, con otra lista de especies halladas también en las

Azores, entre las cuales figuran quince especies, no citadas aún en dichas islas.

Las figuras de las láminas que representan las especies nuevas, extraordinariamente ampliadas, son muy buenas.

Ehrmann (P.)

Zur Naturgeschichte der Landschenecken.familie Acmidœ. 8.°, 23 págs. Leipzig, 1908.

En esta memoria se ocupa el autor de los moluscos incluídos en la familia *Acmidœ,* en la cual admite tres géneros; *Acme,* con 20 especies vivientes y seis fósiles; *Pleuracme,* con nueve especies vivientes y una fósil, y *Caziotia,* con una especie viva. Da muchas noticias acerca de las especies de *Pleuracme* y de la *Caziotia,* y, por último, descripción de la especie *Pleuracme spectabilis*, de Rossmassler.

Frierson (L. S.)

A new pearly freswhater mussel of the genus Hyria, from Brazil. 8.°, 2 págs. y una lámina en negro. Washington, 1914.

Da el autor buena descripción y cinco excelentes figuras en negro de un nuevo molusco bivalvo del río Amazonas, en el Brasil, al cual da el nombre de *Hyria Amazonia.*

Fulton (H. C.)

On Stenopylis, a proposed new Genus of Endodontidæ. 8.°, 2 páginas. London, 1914.

Da a los caracteres del nuevo género *Stenopylis* y noticias sobre tres especies que estaban ya incluídas en otros géneros y citadas de Australia, Filipinas y Nueva Guinea.

Gatliff (J. H.) y Gabriel (C. J.)

On some new species of Victorian marine mollusca. 8.°, 5 páginas y 3 láminas en negro. Victoria, 1914.

Las nuevas especies descritas por estos autores son las siguientes: *Eulima Victoriœ*, *Leiostraca kilcundœ* y *Styliformis, Cyclostrema kilcundœ* y *Vercoi, Myodora subalbida, Dosinia Victoriœ.* Las figuras son buenas, pero casi todas están aumentadas de una manera enorme. Las más insignificantes diferencias sirven a muchos autores para establecer nuevas especies.

Additions to the catalogue of the marine shells of Victoria. 8.°, 5 págs. Victoria, 1914.

Adicionan 21 especies de moluscos marinos a la fauna de Victoria (con cita de obras, algunas observaciones y las localidades). Sólo figuran la *Voluta magnifica*, de Chemnitz; la *Foramelina exempla*, de Hedley, y la *Dosinia Victoriæ*, de Gatliff.

Alterations in the nomenclatura of some Victorian marine mollusca. 8.°, 3 págs. Victoria, 1914.

Las alteraciones en la nomenclatura de algunos moluscos de Victoria consisten casi todas en el cambio de nombre genérico; así, las antiguas denominaciones de *Mangelia, Fissurella, Mesodesma, Cardium, Venus, Poronia* y *Kellia* han sido sustituídas por las de *Parviterebra, Megatebennus, Anapella, Hemidonax, Gomphina, Lasœa* y *Cyamiomactra*.

GERMAIN (L.)

Note sur les Planorbes, recueillis par le Capitaine F. H. Stewart en Thibet. 4.°, 4 págs. y una figura. Calcutta, 1909.

El autor consigna los caracteres de cuatro especies de *Planorbis* recogidas por Stewart, en las montañas del Tibet, con cita de autores y localidades. Sus nombres específicos son: *Saigonensis*, *Himalayensis*, *Bàrrakporensis* y *Stewarti.* Este último está descrito como nuevo, y da de él una figura muy ampliada, puesto que su dimensión es apenas de cinco milímetros.

Les Chilina du Chili. 8.°, 6 págs. París, 1911.

Da Germain noticias sobre el género *Chilina* y una minuciosa descripción de la *Chilina ovolis*, de Sowerby; menciona después otras nueve especies de Chile, con cita de un autor y la localidad donde viven.

Le problème de l'Atlantide et la Zoologie. 8.°, 18 págs. París, 1913.

Memoria interesante en que el autor resume las noticias conocidas acerca de la Atlantida de Platon, de cuya existencia en época remota ya no puede dudarse, por coincidir de una manera completa los argumentos geológicos, zoológicos y botánicos, y la existencia actual de las islas Azores, Canarias y Cabo Verde, regiones más elevadas de la gran isla, que estaba situada entre Europa y América. La mayor parte de dicha isla quedó sumergida en el Océano Atlántico por grandes terremotos e inundaciones, sobrevenidas en siglos anteriores a los tiempos históricos, cuyo suceso se había transmitido por tradición entre los habitantes de las regiones inmediatas a dicho territorio del globo.

L'origine et la distribution géographique des faunes, d'eau douce de l'Amérique du Nord. 8.°, 13 págs. y carta geográfica Paris, 1915.

Indica en esta pequeña Memoria que existían ya los principales tipos de la fauna de agua dulce de la América del Norte en el cretáceo superior, pero que al fin del terciario numerosas formas de agua dulce pasaron, en virtud de corrientes emigratorias, por puentes de tierra, al Norte de América, desde el Norte de Asia, la Islandia y la Groenlandia; después, hacia el Norte, a causa de los hielos en todo el Norte, volviendo después hacia éste cuando fué más benigna la temperatura.

Quedaron en muchos sitios sistemas lacustres de una importancia considerable, siendo su fauna muy rica en especies.

Con la retirada de los hielos la fauna de la América del Norte experimentó grandes cambios y estuvo un momento en conexión con la cuenca del Mississipí.

Las dos grandes cordilleras de Norte a Sur constituyen para las especies de agua dulce una barrera infranqueable, y por eso las tres regiones del Pacífico, del Mississipí y del Atlántico, aunque de un mismo origen, conservan cada una su individualidad propia.

Etudes sur la faune malacologique terrestre et fluviatile de l'Asie antérieure. Parmacellidæ et Limacidæ (1e partie). 8.°, 46 págs., 4 láminas en color y figuras en el texto. París, 1912.

Este trabajo acerca de los *Parmacelidos* y *Limacidos* del Asia ha sido hecho (estudiando los ejemplares recogidos por M. Morgan, delegado en Persia) de la manera tan completa y tan científica como acostumbra Germain en sus escritos.

Este naturalista describe el animal de las *Parmacella*, enumerando después las especies conocidas de dicho género, con sus caracteres, cita de obras y distribución geográfica, a lo cual sigue la descripción de las nuevas especies *Parmacella Simrothi*, *Morgani*, *Pollonerai* e *Hyrcanensis.*

Las especies de *Limacidos* son todas nuevas y llevan los nombres de *Malacolimax Morgani, Toscannei, Pollonerai*, *Azerbaidjanensis* y *Mecquenemi.* La impresión de este trabajo, los grabados y las láminas son excelentes, representando estas últimas los animales y detalles anatómicos.

Parmacella Valenciennesi, Península ibérica, pág. 11. *Mollusques nouveaux de la Republique de l'Equateur.* 8.°,2 págs. Bull. Mus. Hist. Natur. París, 1908.

Describe tres nuevas especies de la República del Ecuador, que denomina *Veronicella Riveti* y *Equatoriensis* y la *Anodonta Hidalgoi.*

GEYER (D.)

Beitrage zur Vitrellenfauna Wurtemberg, partes una a cuatro, 8.°, 95 págs. y 14 láminas en negro, con su explicación. Wurtemberg, 1904 a 1907.

El autor describe en este trabajo gran número de conchas de *Vitrella* de la fauna de Wurtemberg, de un modo minucioso, con figuras muy bien hechas en sus láminas, pero con un aumento tal, que aparecen con la dimensión de 25 a 50 milímetros los ejemplares, cuyo tamaño es sólo de 2 a 5 milímetros. Las apenas perceptibles diferencias que hay entre las figuras de las conchas representadas, indican que Geyer ha superado con exceso a Bourgnignat en la creación de falsas especies.

Beitrage zur molluskenfauna Schwabens, partes una y dos, 8.°, 43 págs. y dos láminas en negro, con su explicación. Wurtemberg, 1907 y 1908.

Esta publicación es un catálogo de moluscos terrestres y fluviales de dicha localidad, pero las láminas representan especies de *Wallonia* bien hechas y muy aumentadas, como las del escrito anterior. Las diferencias son también insignificantes.

GRIEG (J. A.)

Evertebratefaunaen pau havdypet utenfor Tampen, 8.°, 18 págs., Bergen Museum, 1914.

En esta memoria da cuenta el autor de los moluscos recogidos en dicha región, que son 30 especies de los géneros *Pecten, Lima, Dacridium, Portlandia*, *Arca, Astarte, Kellia*, *Axinopsis, Cuspidaria, Lyonsella*, *Siphonodentalium, Natica*, *Bela, Neptunea, Buccinum*, *Rissoa, Odostomia*, *Scaphander* , *Cylichna*, *Philine, Chœtoderma*, *Limacina Chio*. Hay en el texto una figura muy amplificada de la *Rissoa Wyville-Thomsoni*, de Jeffreys.

HAAS (F.)

Estudio para una monografía de las Nayades de la Península ibérica, 8.°, 60 págs. Barcelona 1917.

Esta publicación es un resumen de todos los moluscos fluviales de España y Portugal designados con los nombres genéricos de *Unio*, *Anodonta* y *Margaritana*, y dados a conocer con multitud de nombres específicos, casi todos inadmisibles, en los escritos de 55 autores, de donde los ha copiado el autor, como también las localidades en que se encontraron. Todos ellos los considera como variaciones de siete especies, a excepción del *Unio Wolwichi* de Morelet, que es exótico, estando de acuerdo con Contagne y Simpson en la no admisión de multitud de pretendidas especies que son ligeras modificaciones de moluscos de concha muy variable.

Su trabajo es muy útil para la formación de la fauna malacológica de las Nayades de España y Portugal, que presenta todavía un punto difícil de resolver. Las especies que se citan de una o varias localidades sin descripción ni figura y por autores más o menos acreditados, ¿son realmente las que designa su nombre?

Nayades del Viaje al Pacífico, 8.°, 43 págs. y 2 láminas en negro. Madrid, 1916.

Este escrito continúa la enumeración de las especies de moluscos recogidos en la América meridional por una Comisión científica española durante los años 1862 a 1865. Los univalvos terrestres y marinos (en número de 566 especies, de las cuales 14 nuevas), fueron publicados por Hidalgo, y los bivalvos marinos (98 especies), por Martínez. (Véanse estos nombres.)

De los bivalvos fluviales se recogieron 32 especies, cuya descripción se da en el presente catálogo de Haas, hecho con los ejemplares existentes en el Museo de Madrid. Comprende 18 especies nuevas (13 ya publicadas por Lea y 2 por Hidalgo), más 3 ahora por Haas. Las restantes, en número de 14, estaban ya denominadas por Lamarck, Orbigny, Schumacher, Gray, Spix y Clessin.

Las láminas representan dos nuevas especies de Haas; *Diplodon Hidalgoi* y *Mycetopoda Bolivari.*

Sólo falta publicar los moluscos univalvos fluviales encontrados por dicha Comisión científica.

HAGG (R.)

Mollusca und Brachiopoda gesammelt von der schwedischen zoologischen Polarexpedition nach Spitzbergen, dem nordostlichen Groenland und Jan Mayen im J. 1900, 8.°, 66 págs., Stockholm, 1904.

Este escrito es la enumeración de 3 especies de Braquiopodos y 32 de Moluscos bivalvos recogidas en el Spitzberg, en Groenlandia y la isla de Jan Mayen. Todas ellas eran ya conocidas, y el autor, después de mencionar varios autores en que se halla descrita y figurada cada una, indica las condiciones en que vive, agrega algunas observaciones y se ocupa después de la distribución geográfica y batimétrica, que es *extraordinariamente completa y extensa* en muchas de las especies mencionadas, aun cuando algunas de ellas no descienden hasta la Península ibérica.

HEDLEY (C.)

Fisheries, Biological results of Endeavour, 1909-1914, Mollusca. 8.°, 10 págs. y 5 láminas en negro. Sydney, 1914.

En este escrito describe y figura el autor cuatro nuevas especies de moluscos que denomina *Ancilla coccinea*, *Cassidea stadialis*, *Argobuccinum retiolum* y *Foramelina exempla*, una variedad del *Triton nodiferus*, de Lamarck, y el *Altivasum aurantiacum* de Verco. Los dos nuevos géneros que establece *Altivasum* y *Foramelina*, no presentan (sobre todo el primero), caracteres de bastante importancia para separarlos de los géneros *Vasum* y *Anomia*. La descripción de las especies es minuciosa como en todos los trabajos de Hedley y las figuras de las láminas buenas.

Helle y Remy. Catalogue raisonné d'une collection considérable de coquilles rares et choisies du cabinet de M. de..., 12.°, 12 y 118 páginas y una lámina en negro. París, 1757.

Esta pequeña obra es un catálogo de una colección de conchas puesta a la venta en 670 lotes, compuesto cada uno de cierto número de ejemplares de especies distintas de las cuales se dan los nombres vulgares franceses (en parte de ellas), sus formas o colores, y en algunas se citan las figuras de la obra de Argenville o de Rumphius. La colección debía ser numerosa en ejemplares, y compuesta en su mayor parte de los que ofrecen más atractivo por sus formas y sus colores. También contenía algunas de las especies raras.

HEMPHILL (H.)

Description of a new California mollusk, 8.°, una pág., San Francisco, 1876.

Describe una nueva especie de molusco de la bahía de Humboldt, que denomina *Paludinella Newcombiana*.

HENDERSON (J. B.)

Rediscovery of Pourtales Haliotis, 8.°, 3 págs. y 2 láminas en negro. Washington, 1915.

En 1869 la expedición Pourtales encontró en la Florida una especie de *Haliotis* que no se parecía a las del Atlántico. Porteriormento, la describió Dall con el nombre de *Haliotis Pourtalesi,* y después, en una expedición al Pacífico, se recogió otra *Haliotis* bastante parecida, que se designó con el mismo nombre.

Transcurrido bastante tiempo, volvió a encontrarse en la Florida otro ejemplar de *Haliotis* semejante al primero, y habiendo dudas de que fuesen la misma especie la del Atlántico y la del Pacífico, se hizo un estudio comparativo y resultó que eran diferentes, por lo cual la de las islas Galápagos, en el Pacífico, ha sido denominada *Haliotis Dalli* por Henderson, el cual da su descripción y figuras en el escrito que ahora se menciona. Las dos láminas son buenas.

HENDERSON (J. B.) Y BARTSCH (P.)

Littoral marine mollusks of Chincoteagne island, Virginia, 8.º, 12 págs. y 2 láminas en negro. Washington, 1914.

Dan noticias acerca de la localidad (situada en la costa atlántica de Virginia) una lista de los moluscos allí encontrados, y minuciosa descripción de nuevas especies que denominan *Epitonium virginicum*, *Turbonilla Powhatani*, *Pocahontasae*, *Toyatani* y *Virginica*, *Odostomia Toyatani*, *Virginica* y *Pocahontasae*, *Triphoris Pyrrha*, *Diastoma Virginica* y *Cerithiopsis Virginica*. Dan buenas figuras de las especies, pero tan excesivamente aumentadas, que alguna, de 5 milímetros de tamaño, está representada por un decímetro de longitud.

HENDERSON (J. B.) Y DANIELS (L. E.)

Hunting mollusca in Utah and Idaho, 8.º, 25 págs. y 4 láminas en negro. Philadelphia, 1917.

Después de minuciosas noticias acerca de la región explorada y de los moluscos recogidos (ya conocidos casi todos), publican una especie nueva con el nombre de *Oreohelix tenuistriata*, y dan buenas figuras de las especies halladas de dicho género, en las cuatro láminas que acompañan al texto.

HIDALGO (J. G.)

Fauna malacológica de España, Portugal y las Baleares. Moluscos testáceos marinos, 8.º, 752 págs. Madrid, 1917.

Esta obra consta de una introducción en que se citan todos los autores que han mencionado de la Península hispanolusitánica especies de moluscos marinos y las páginas del tomo XV de las Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid, en que se enumeran los nombres científicos. A continuación hay una larga lista de estos que no pueden admitirse por diversas razones, pero se hace referencia a las especies de que son sinónimos. Sigue una relación de publicaciones de 200 autores, cuyas figuras se citan en las diferentes especies, porque son las mejores que se han publicado; luego la enumeración de las familias y géneros de la fauna, según la clasificación de Fischer, los nombres de los españoles que han explorado las costas de la Península (en las localidades que se mencionan), y una ligera indicación de las estaciones de los moluscos, pues esta parte está muy bien tratada en muchos de los libros publicados.

El catálogo de las especies de la fauna (que son más de 900, pertenecientes a 270 géneros) está dispuesto por orden alfabético de los nombres genéricos y específicos, y después del nombre de cada género están reunidas todas las descripciones en español de las especies pertenecientes al mismo, porque así se hace más fácil la clasificación de los ejemplares recogidos.

En cada especie se da su nombre científico, el del naturalista que la publicó y el escrito en que la dió a conocer, cita de autores *(mencionando sólo aquellos que tienen excelentes figuras en color y en negro de la especie)*, y después las localidades donde se ha encontrado (dispuestas por orden alfabético en cada una de las seis regiones de España que se admiten, tres en el Atlántico y otras tres en el Mediterráneo) y, por último, la estación, nombre vulgar si le tiene y dimensión constante o variable de los ejemplares.

Al final de la obra hay listas de la distribución geográfica de las especies que se han encontrado hasta ahora en las regiones que se citan del Atlántico o del Mediterráneo.

Esta obra completa el texto de la publicada hace años con el título *Moluscos marinos de España, Portugal y las Baleares.*

HINKLEY (A. A.)

Newfresh-water shells from the Ozark Mountains, 8.°, 3 páginas y una lámina en negro. Washington, 1915.

Describe y figura de dicha localidad tres moluscos nuevos con los nombres de *Anculosa Arkasensis*, *Pyrgulopsis Ozarkensis* y *Somatogyrus crassilabris.* Agrega una lista de 81 especies ya conocidas.

HUXLEY (TH. H.) Y PELSENEER (P.)

Observations sur Spirula. 8.°, 55 págs. con varios grabados intercalados en el texto y 6 láms. en negro. París, 1895.

En este trabajo se da una extensa y completa descripción anatómica del animal de la *Spirula Peronii*, indicando las modificaciones observadas en algunos órganos de otras dos especies que citan con los nombres de *Spirula australis* y *reticulata.* Consignan que no se ha encontrado ninguna *Spirula* con el animal vivo en la superficie del mar y que los individuos viven a gran profundidad. Sólo cuando mueren flotan las conchas en la superficie y se van acumulando en las playas por la acción del oleaje o las corrientes del mar. Esta interesante memoria está ilustrada con 62 excelentes figuras entre el texto y las láminas antes citadas.

JOHNSON CHARLES (W.)

Fauna of New England. List of the mollusca. 8.°, 231 págs. Boston, 1915.

En una corta introducción da cuenta de los autores que han escrito sobre la fauna malacológica de Nueva Inglaterra y de las personas que le han ayudado en la formación de su catálogo. Este contiene la enumeración de 738 especies y 71 variedades de moluscos halladas en dicha región, y una lámina en que se indican las profundidades de la área marina de Nueva Inglaterra. El catálogo comprende especies terrestres, fluviales y marinas, con sólo el nombre, cita de algunos autores y las localidades donde se han encontrado. Al final hay un índice de los géneros y subgéneros.

LAMY (E.)

Revision des Mesodesmatidœ vivants du Museum d'histoire naturelle de Paris. 8.°, 72 págs., París, 1914.

Estudia Lamy en este escrito todas las especies de moluscos incluídas en dicha familia, admitiendo los géneros *Mesodesma*, *Cœcella*, *Ervilia* y *Nesis*. Hay observaciones extensas en todas ellas, cita de muchos autores, descripción de variedades, países donde se encuentran, y muchas figuras intercaladas en el texto, representando las variaciones de la charnela en los diferentes subgéneros que se admiten.

Revision des Crassatellidœ vivants du Museum d'Histoire naturelle de Paris. 8.°, 74 págs. y 2 láms. en negro. París, 1917.

Es una completa monografía de las especies pertenecientes a los cinco géneros que se incluyen en la familia Crassatellidæ con los nombres de *Crassatella*, *Cuna*, *Cyamiomactra*, *Perrierina Hemidonax*, que comprenden 26 + 3 + 5 + 2 + 1 especies, con algunas variedades.

En todas ellas hay citación de muchas obras, buenas descripciones, notas críticas y enumeración de los países y localidades donde se han hallado, y, además, en el texto, figuras de las charnelas de algunas especies

Las dos láminas son buenas y representan nuevas especies de *Crassatella*, y además la *Amphidesma glabrella* de Lamarck.

Note sur les especes rangées par Lamarck dans son genre Lutraria. 8.°, 7 págs. París, 1913.

Estudia las especies de *Lutraria* descritas por Lamarck en su obra y consigna la identidad o diferencia de ellas con lo publicado en autores anteriores o posteriores al célebre naturalista, haciendo las rectificaciones necesarias. En una nota a la *Lutraria rugosa* (hoy *Eastonia rugosa)* dice que la *Eastonia Locardi* Oliveira, de Portugal, es una forma sólida, gruesa y ventruda de la *E. rugosa*, según los ejemplares cotipos de la colección Locard.

Revision des Scrobiculariidœ vivants du Museum d'Histoire naturelle de Paris. 8.°, 134 págs., 1 lám. en negro y figuras intercaladas en el texto. París, 1914.

Al principio de esta memoria establece el autor las diferencias que hay entre la concha y el animal de las *Scrobicularia* y de las *Tellina.*

Menciona, después, las 90 especies que incluye en la familia de las *Scrobicularia*, distribuídas del modo siguiente en diez géneros, a saber: 2 *Scrobicularia,* 4 *Leptomya*, 12 *Syndesmya*, 1 *Theora,* 1 *Souleyetia*, 1 *Oedalina*, 1 *Montrouziera*, 3 *Thyella*, 4 *Cumingia* y 32 *Semele.*

De todas ellas hace un estudio completo con sus caracteres, cita de autores, de localidades e interesantes observaciones críticas.

Enumera, además, 29 especies, a las cuales se ha dado erróneamente el nombre genérico de *Amphidesma*, y parte de las cuales las ha incluído ya en los géneros *Scrobicularia* y *Syndesmya.*

Las figuras de la lámina son excelentes y representan una *Leptomya*, dos *Syndesmya* y una *Semele* y las intercaladas en el texto las charnelas de diferentes especies.

Este escrito es un trabajo completo y muy bien estudiado, de los que sólo saben hacer los buenos autores.

Revision des Mactridœ vivants du Museum d'Histoire naturelle de Paris. 8.°, 224 págs., 2 láms. en negro y figuras en el texto. París, 1917 y 1918.

Esta nueva memoria de Lamy es tan buena como la anterior y está dispuesta del mismo modo. En ella se estudian de una manera completa 100 especies de *Mactridos*, se figuran 15 en las láminas y muchas charnelas en las diversas páginas del escrito.

Las especies se agrupan en diversos géneros que se designan con los nombres de *Mactra*, *Lutraria*, *Darinia*, *Anatinella*, *Standella, Spisula*, *Mulinia, Rangia*, *Eastonia* y otros varios.

MALUQUER (J.)

Notes oceanografiques. 8.°, 4 págs. y 1 grabado. Barcelona, 1916.

Menciona de la Selva, cerca del Cabo de Creus, las siguientes especies de moluscos:

Calyptræa chinensis, Lin.	*Pecten opercularis*, Lin.
Turritella triplicata, Brocchi.	— *inflexus*, Poli.
* *Fusus corrugatus*, Lamk.	*Cardium oblongum*, Chemn.
Scaphander lignarius, Lin.	* *Tapes decussatus*, Lamk.
Capulus hungaricus, Lin.	* *Meretrix chione*, Lin.
* *Aporrhais Serresianus*, Philippi.	*Corbula gibba*, Olivi.

En estas 12 especies hay un error de nombre genérico, otro de nombre específico y dos de autor.

Algunos moluscos terrestres de la isla Cabrera. 8.°, 2 págs., Madrid, 1917.

Este escrito es una lista de los moluscos terrestres recogidos por el autor en dicha isla, que son los siguientes:

Tudora ferruginea, Lamk.	*Cochlicella acuta*, Mull.
Pupa granum, Drap.	*Helix terrestris*, Chemn.
Rumina decollata, Lin.	— *Minoricensis*, Mittre.
Helix Homeyeri, Dohrn.	— *vermiculata*, Mull.
— *frater*, Dohrn.	— *axia*, Bourg.
— *lauta*, Lowe.	— *lenticula*, Feruss.

Amphineures de Catalunya. 8.°, 94 págs., 3 láms. en negro y figuras en el texto. Barcelona, 1915.

Después de algunas generalidades acerca de los Amfineuros y de la cita de muchos autores clásicos útiles para consulta, y en los cuales se trata con más o menos extensión de dichos moluscos, da cuenta de otros escritos en que se mencionan de las costas de España y de las Baleares especies pertenecientes a dicho grupo.

Siguen generalidades sobre los Placoforos con figuras en el texto, y enumera las especies que se han citado de Cataluña, en número de 10, y después otras varias que no se han encontrado en su litoral, y, por último, algunas exóticas designadas con igual nombre que varias del Mediterráneo.

Da luego la clasificación de los Placoforos, con clave dicotómica para las especies del Mediterráneo, y después la descripción de las especies admitidas, con cita de autores, localidades donde viven y figuras de las valvas en el texto.

En la cita de localidades se mencionan menos de Cataluña que de otros puntos del Mediterráneo, y las figuras de las láminas están muchas de ellas copiadas de los autores, y otras hechas por ejemplares del litoral de España.

Este escrito está bien redactado, con método, y la impresión es excelente.

MARSHALL (W. B.)

New and little-known species of South American fresh water mussels of the genus *Diplodon*. 8.°, 8 págs. y 6 láms. en negro. Washington, 1917.

Contiene la descripción de dos nuevas especies de *Diplodon* del Uruguay y de otras seis especies del mismo género, dadas ya a conocer del Uruguay y del Brasil por Simpson. Todas están representadas por buenas figuras en negro.

Three new species of Anodontites from Brazil. 8.°, 3 págs. y 3 láminas en negro. Wáshington, 1915.

Describe y da buenas figuras en negro de tres *Anodontites* del Brasil con los nombres específicos de *salmonea, Darochai* y *aurora*.

MARTEL (H.)

Coquilles de Cancale. Iconographie et critique de quelques petites espèces. 8.°, 8 págs. y 1 lám. en negro.

En este pequeño escrito hace el autor algunas rectificaciones respecto a lo consignado en algunos autores acerca de las *Odostomia interstincta* de Montagu, *clathrata* de Pfeiffer e *indistincta* de Montagu, las cuales representa con un aumento considerable en su lámina. Las figuras son buenas.

MONTEROSATO (M. di)

Ostrea ed Anomia del Mediterraneo. 8.°, 10 págs. y 4 láms. en color. Génova, 1915.

En este catálogo de las *Ostrea* y *Anomia* del Mediterráneo admite nueve especies de *Ostrea;* 2 de *Gryphœa*, 2 de *Ostreola*, 4 de *Pycnodonta,* 1 de *Anomia,* 1 de *Operculella,* y 4 de *Monia*, dando los caracteres de las mismas, de sus variedades y las localidades donde se encuentran. Las cuatro láminas en color son muy buenas y representan las especies que denomina *Ostrea scœva*, *alata*, *falcata, Pycnodonta navicula, frigida, laticardo, floribunda* y *ostreola crustacea*.

Molluschi viventi e quaternarii raccolti lungo le coste della Tripolitania dall'ing. Camillo Crema. 8.°, 28 págs., 1 lám. grande y otra pequeña, en negro. Roma, 1917.

En dicho escrito enumera gran número de especies de moluscos, unos vivientes y otros fósiles, dando en muchos los caracteres de los mismos, publicando algunos como nuevos, y mencionando, en todos, los sitios donde se han encontrado. Las figuras representan 25 especies, de las cuales 16 se dan como nuevas por Monterosato.

Note sull Arca Noe. 4.°, 3 págs., 1916.

A las tres variedades de esta especie descritas por Dautzenberg en su obra sobre los moluscos del Rosellon, agrega Monterosato otras 14, con lo cual resultan 17, de las cuales da los caracteres que sirven para distinguirlas.

Sur le genre Danilia. 8.°, 4 págs. y 1 lám. en negro. París, 1914.

Da noticias de cinco especies de este género y buenas figuras, de cuatro de ellas en la lámina que acompaña al texto.

Note sur les Argonauta de la Méditerranée. 8.°, 6 págs. y 4 láminas en negro. París, 1913.

En esta Memoria describe y figura el autor cinco especies de *Argonauta* con los nombres de *Argo, Sebœ, Gygnus, Monterosatoi* y *Ferussaci.* (Este último es de gran tamaño, vive en los mares de Filipinas y el Japón y estaba ya publicado por Blainville con el nombre de *Argonauta compressa.* Es el más parecido al *Argonauta Argo.)* Los otros dos, *Argonauta, Sebœ* y *Monterosatoi* presentan algunas diferencias; pero el *Argonauta Cygnus* sólo parece una anomalía del *Argonauta Sebœ.* Las figuras son buenas.

PALLARY (P.)

Liste des mollusques du Golfe de Tunis. 8.°, 27 págs. 1914.

Da noticias el autor sobre la situación y algunas particularidades del Golfo de Túnez, y a continuación una lista de las especies encontradas de moluscos, que son en número de 369. (1 Cefalópodo, 16 Pterópodos, 237 Gastrópodos, 3 Escafópodos y 112 Pelecípodos) más 5 Braquiópodos. De diversas especies hay indicación de alguna variedad.

Esta fauna difiere muy poco de la ya conocida de las costas mediterráneas de España, Francia e Italia, y de las islas Baleares, Córcega, Cerdeña, Sicilia, etc.

Description de quelques Mollusques, terrestres nouveaux du Sud du Maroc. 8.°, 5 págs. París, 1913

Los moluscos nuevos que describe del Sur de Marruecos son los siguientes: *Caracollina Huloti, Xerophila anflousiana, Xeroleuca Brulardi y rebiana* y variedades de otras cinco especies ya conocidas.

Bemerkungen ueber einige arten der Gattung Archelix. 8.°, 16 páginas y 2 láminas en negro. Frankfurt am Main, 1914.

Estudia el autor en esta memoria muchas especies creadas por diversos naturalistas, muy parecidas a las *Helix lactea* y *punctata,* y en realidad variaciones de éstas la mayor parte. Las incluye en el género *Archelix.* Da noticias sobre las mismas, indica las localidades donde se han encontrado y al final una larga lista con los nombres y las citas de tres publicaciones de importancia en que se hallan bien figuradas.

Helicidées nouvelles du Maroc. 8.°, 16 págs. y una lámina en negro. París, 1917.

Después de indicar los sitios de Marruecos en que se encuentran diversas especies de Helicidos ya conocidos, describe como nuevas en el presente escrito las especies que denomina *Archelix Le Chatelieri, Minettei, massesylica, gharbiana, slessica, galiyana y Cavelliana.* También da descripciones del *Archelix Pauli* Dautzenberg y *polita* de Gassies. Figura en la lámina las especies nuevas.

Mollusques marins des Dardanelles, colligés par M. Claude Bravard. 8.°, 6 págs. París, 1917.

La lista de moluscos de los Dardanelos que da Pallary comprende 32 especies de Tenedos y 82 de Galípoli. Casi todas son especies ya conocidas del Mediterráneo. No hay descripciones, sólo unas pocas observaciones.

PILSBRY (H. A.)

Notes on the anatomy of Oreohelix, with a catalogue of the species. 8.°, 19 págs. y 4 láminas en negro. Philadelphia, 1917.

En este escrito se ocupa Pilsbry de la distribución de las especies del género *Oreohelix* recogidas en el Utah y en la región Sur del Idaho. Da después detalles anatómicos de varias de sus especies, y a continuación un catálogo de las especies y subespecies con las regiones donde se han encontrado y observaciones referentes a varias de aquéllas. Las láminas representan tan sólo detalles anatómicos de algunas.

Descripción of a new Australian Glycymeris. 8.°, una pág. y figuras. Philadelphia, 1905.

Describe y figura el nuevo *Pectunculus insignis* de Australia, con el nombre genérico antes citado.

Note on the Australian Pupidœ. 8.°, 4 págs. y 5 figuras. Philadelphia, 1900.

Las especies de *Pupa* de Australia las incluye en cuatro genéros: *Pupoides, Pupa, Cylindrovertilla y Bifidaria,* dando descripción de dichos géneros, observaciones sobre varias especies y su distribución geográfica.

Note on Polynesian and East Indian, Pupidœ. 8.°, 2 págs. Philadelphia, 1900.

Admite cuatro grupos para las *Pupa* de dicha región, indicando algunos caracteres distintivos y citando varias especies de diversos países.

The air-breating mollusks of the Bermudas. 8.°, 19 págs. y una lámina en negro. New Haven, 1900.

En la introducción de este escrito indica el autor que la pequeña fauna de moluscos terrestres de las islas Bermudas se ha constituído con especies procedentes de Europa, de las Indias orientales y occidentales y alguna del continente americano. Menciona después 42 especies con descripción en algunas, y breves observaciones en otras, figurando casi la mitad de ellas en la lámina que acompaña el texto. Las figuras son buenas.

Mollusca of S. O. States, VI. The Hacheta grande. Florida and Peloncillo Mountains, New Mexico. 8.°, 28 págs. y 3 láminas en negro. Philadelphia, 1915.

Después de una descripción de la localidad, con dibujo topográfico, enumera las especies encontradas de moluscos, que son en corto número, y de ellas algunas nuevas. Estas las describe minuciosamente, como también varias subespecies. En el texto hay figuras con detalles anatómicos y las láminas representan muy bien la concha de las especies descritas.

Pilsbry (H. A.) y Ferrís.

Mollusca of S. O. States. VII. Dragoon, Mule, Santa Rita, etcétera. Arizona, 8.°, 56 págs. y 8 láminas en negro. Philadelphia, 1915.

Este escrito está dispuesto de la misma manera que el anterior, con descripción de muchas especies nuevas de los géneros *Sonorella*, *Holospira* y lista de otras especies ya conocidas.

Se ocupan también los autores de la distribución geográfica, y dan en el texto dibujos anatómicos y topográficos. Las tres láminas de especies de *Sonorella*, las dos de *Holospira* y las tres de dibujos anatómicos son muy buenas.

Pilsbry (H. A.) y Brown (A. P.)

The method of progressión in Truncatella. 8.°, 3 págs. y una lámina en negro. Philadelphia, 1914.

Los autores han tenido la paciencia de observar la progresión del animal del género *Truncatella*, y de ello dan cuenta minuciosa en su escrito, con varias figuras en la lámina.

List of land an freshwater mollusks of Antigua. 8.°, 3 págs. Philadelphia, 1914.

Mencionan 20 especies de dicha localidad con el sitio donde fueron encontradas, dan noticias de interés en la *Pleurodonta formosa* y figuran en una lámina una subespecie de la *Segmentina obstructa.*

PLATE (L.)

Expédition antarctique belge. Scaphopoden. Folio, 2 págs. Anvers, 1908.

El autor da descripción del *Dentalium majorinum* Mabille y Roch, y breves noticias de otro *Dentalium*, sin nombre específico.

ROBSON (G. C.)

Report on the mollusca collected by the British Wollaston, expedition in Dutch New Guinea. Folio, 11 págs. y dos láminas en negro, con su explicación. London, 1914.

En dicha excursión se recogieron 12 especies de moluscos, seis ya conocidas, tres cuyo nombre específico no se indica, y otras tres que publica el autor como nuevas con los nombres de *Antinous antropophagorum, Cronos sublimis y Papuina Wollastoni.*

Da extensas descripciones de estas especies, figuras de sus conchas y detalles anatómicos en el texto y en las láminas, como también de la *Papuina lituus* de Lesson.

ROSALS (J.)

Notes malacologiques. Moluscs vivents en Sant Feliú de Llobregat. 8.°, 11 págs. Barcelona, 1914.

Después de algunas noticias acerca de la localidad, enumera las siguientes especies con indicación de las condiciones en que se han hallado.

Testacella haliotidea.
Limax variegatus.
—agrestis.
Amalia gagates.
Hyalinia cellaria.
—lucida.
—nitida.
—Crystallina.
Euconulus fulvus.
Arion hortensis.
Pyramiduda rotundata.
Leucochroa candidissima.
Helicella variabilis.
—Arigonis.
—carthusiana.
Vallonia pulchella.
Helicodonta lenticula.
Helicigona lapicida.
Helix aspersa.
—vermiculata.
—punctata.
—nemoralis.
—pisana.
—splendida.
Buliminus quadridens.
Pupa Montserratica.
—granum.
—Brauni.
—muscorum.
—umbilicata.

Helicella pyramidata.
—conoidea.
—terrestris.
Helicella conspurcata.
—Penchinati.
—barbara.
—ventrosa.
Clausilia rugosa.
Stenogyra decollata.
Ferussacia folliculus.
—lubrica.
Cœcilianella acicula.
Ancylus fluviatilis.
Limnœa limosa.
Cyclostoma elegans.

Fauna malacológica de Salou. 8.°, 4 págs. Barcelona, 1913.

El autor da una lista de 65 especies de moluscos marinos recogidos en Salou, provincia de Tarragona. Todas son ya conocidas, pues viven en otros puntos del litoral de España o de las costas del Mediterráneo.

Impressions d'una excursió científica. 8.°, 4 págs. Barcelona, 1914.

En una excursión verificada por el autor en el litoral de la provincia de Tarragona, halló 37 especies de moluscos terrestres y fluviales, la mayor parte ya recogidas en San Feliú, y, además, las siguientes:

Heliccella acuta.
—trochoides.
Pupa cylindrica.
—polyodon.
Clausilia bidens.
Ferussacia subcylindrica.
Alexia myosotis.
Hydrobia similis.
Paludestrina acuta.
Truncatella truncatula.

Moluscs de Capellades. 8.°, 3 págs. Barcelona, 1914.

En este artículo menciona 24 especies de moluscos recogidos en dicha localidad. Casi todas son las mismas ya citadas en los escritos anteriores, excepto las tres siguientes:

Helicodonta obvoluta.
Bythinella abbreviata.
Pisidium fontinale.

Contribució a la fauna malacologica de la provincia de Girona. Molluscos terrestres i fluviatils de Torroella de Montgri. 8.°, 20 páginas. Barcelona, 1916. (En las publicaciones del Instituto de Ciencias).

Menciona los títulos de seis escritos sobre moluscos de Cataluña publicados por Bofill, Chia, Maluquer y Salvañá, describe la localidad de Torroella de Mongrí, y da cuenta a continuación de la lista de los moluscos recogidos, que son 42 especies terrestres y 10 fluviales. Todas ellas son especies conocidas y muy comunes, de las cuales da el nombre, las condiciones en que las ha encontrado y la cita de algunas otras localidades de Cataluña en que también viven. Sólo hay un nombre nuevo *Helicella roigiana* Bofill, que considera como variedad de la *Helicella variabilis* de

Draparnaud. Algunos autores han sufrido la influencia de la *nouvelle école* de Bourguignat, Servain y otros (mejor dicho, *mala escuela)* y han utilizado la variabilidad de ciertos moluscos terrestres para la creación de nuevos nombres, que se van relegando a la sinonimia a medida que se encuentran transiciones apenas perceptibles entre ejemplares que se han considerado erróneamente como especies distintas.

SERVAIN (G.)

Œuvres scientifiques de Mr. J. R. Bourguignat. 8.°, 256 págs. París, 1891.

Este autor hace un elogio de Bourguignat, menciona los 115 títulos de las publicaciones de éste, con noticias acerca de su contenido, a lo cual sigue un índice de los géneros nuevos que publicó (112), y otro de las especies nuevas (que son en totalidad 2.520).

Véase en la página 1.053 de nuestra Bibliografía crítica (Memorias de la Academia de Ciencias, tomo XV), lo que hemos dicho acerca de las publicaciones de Bourguignat, y en la obra de Germain *Mollusques de la Khroumerie,* todo lo que este autor consigna acerca de la *Helix pisana*, de Muller, que es una prueba irrecusable de que no son verdaderas especies la mayor parte de las publicadas por Bourguignat y de los que le han imitado posteriormente.

SHACKLEFORD (L. J.)

Two new species of Marginella from South Africa. 8.°, 2 páginas y 4 figuras en negro.

Describe y da figuras de dos nuevas *Marginella* del Sur de Africa que denomina *Marginella Kerochuta* y *Brocktoni.*

SHAW (H. O. N.)

On the anatomy of Conus tulipa, Linn. and Conus textile Linn. 8.°, 60 págs., 6 láminas en negro y 12 figuras en el texto. London, 1914.

Este trabajo es una minuciosa y completa descripción anatómica de los órganos y tejidos de las dos especies de *Conus* antes citadas, en que, no sólo se revela la paciencia y maestría del autor en una investigación tan difícil, sino también lo complicado de la organización de seres que hasta hace poco tiempo sólo se conocían por su concha en las colecciones. Las figuras son muy buenas, y la impresión excelente.

Description of colour varieties of Conus quercinus, Hwass and Cypræa Lamarckii Gray. 8.°, una página. London, 1915.

Describe una variedad de coloración del *Conus quercinus*, que denomina var. *albus*, y otra de la *Cypræa Lamarckii* con el nombre de var. *phyllidis*.

SMITH (E. A.)

Note on Murex mancinella, Linné. 8.°, 3 págs. London, 1913.

Hace un estudio del *Murex mancinella*, Linné, del cual deduce que la *Purpura mancinella* de los autores no concuerda con la descripción dada por Linné en la décima edición del *Systema naturæ*, que sólo corresponde en parte a la descripción dada en el *Museum Ludovicæ Ulricæ*, y que tampoco está de acuerdo con la descripción de la edición doce, y en vista de ello, admite dos especies, que denomina *Thais gemmulata*, Lamarck, y *Drupa cornus*, Bolten, citando en cada una de ellas las obras y figuras que juzga convienen mejor, y las localidades donde se han encontrado ejemplares de una y otra. Los que no son aficionados a crear tanto nombre genérico inútil o a sustituir denominaciones de buenos naturalistas por obras de malos autores, sólo por ser más antiguos, es seguro que no admitirán los nombres de *Thais* y *Drupa* que figuran en este escrito.

On a small collection of marine shells, from Herderson island. 8.°, 7 págs. y una lámina en negro.

Después de indicar la situación de la isla Henderson o isla Isabel, da cuenta Smith de los viajeros que la han visitado y una lista de 98 moluscos allí recogidos por Beechey, Cuming, Couturier y Jameson. Completa la descripción de especies ya conocidas «*Morum ponderosum, Lima bullifera, Broderipia iridescens* y *Natica Dillwyni*». Cita esta última del Mediterráneo, de Santa Helena, de las Antillas, de Mauricio, del Sur del Pacífico, y ahora de la isla Henderson, de este último mar. ¿Tiene realmente dicha *Natica* una distribución geográfica tan extensa?

Termina el artículo con la descripción de cuatro especies nuevas: *Engina fuscolineata, Tritonidea difficilis* y *rosacea*, y *Calliostoma roseopictum*, que están bien figuradas en la lámina en negro que acompaña al texto.

Note on Haliotis Sieboldii. 8.°, una página. London, 1914.

Da algunas noticias sobre un segundo ejemplar encontrado de esta especie, tal vez variación de la *Haliotis gigantea*, de Chemnitz.

Descriptions of some South African marine shells. 8.°, 6 págs. y una lámina en negro. London, 1914.

En este trabajo publica Smith la descripción de los nuevos moluscos del Sur de África, que denomina *Mangilia Shepstonensis, Cerithiopsis Natalensis, Glyphis levicostata, Tivela compressa* y *rejecta,* *Loripes Burnupi* y la *Tivela Dunkeri,* de Roemer. Las figuras de las láminas son muy buenas.

SOWERBY (G. B.)

Descriptions of fifteen New Japanese Marine Mollusca. 8.°, 5 págs. y una lámina en negro. London, 1914.

Describe 15 nuevas especies de moluscos de diferentes localidades del Japón con los nombres de *Turbo excellens*, *Leptothyra lœvigata, Gibbula awajiensis, Natica ovata*, *bibalteata* y *figurata, Nerita lœvilirata, Solarium acutissimum*, *Turritella fortilirata*, *Eutrochus pulcherrimus, Fissuridea elaborata*, *Dolium pyriforme*, *Lima oshimensis, Placunanomia radiata* y *Macoma awagiensis.* Todas ellas están bien figuradas en una lámina en negro.

New Pleurotoma, Oliva and Limopsis from Japan. 8.° una página y una lámina en negro. London, 1914.

Describe y figura las nuevas especies de moluscos del Japón, que denomina *Pleurotoma mirabilis*, *Oliva concavospira* y *Limopsis tajimœ.*

Mollusca from New Caledonia, Japan and other localities. 8.° 6 páginas y 9 figuras en el texto. London, 1914.

Describe y figura de Nueva Caledonia los nuevos moluscos *Natica paucimaculata* y *balteata, Anabathron pagodiformis* y *Dentalium festivum;* del Japón, las *Natica hilaris* y *euglypta*, y la *Chione euglypta;* del mar Rojo, el *Vertagus comptus*, y de la América del Sur, el *Brachydontes granosissima.*

STEARNS (R. E. C.)

Aboriginal shells Money. 8.°, 7 págs. y una lámina en negro. San Francisco, 1874.

Da cuenta de algunas conchas de moluscos empleadas como monedas por algunos pueblos, y figura en la lámina algunas de ellas, como la *Mercenaria violacea,* la *Lucapina crenulata*, la *Cypræa Moneta,* la *Olivancillaria biplicata* y un *Dentalium.*

Description of a new genus, an Two species of Nudibranchiate mollusks from the coast of California. 8.°, dos págs. con dos figuras. San Francisco, 1873.

Las dos especies descritas y figuradas son la *Lateribranchœa festiva* y la *Triopa Carpenteri.*

THE NAUTILUS

Tomos XXVII a XXXI. 8.°, 713 págs. y 32 láminas en negro. Philadelphia, 1913 a 1918.

Estos volúmenes, continuación de dicha obra periódica (Véase Memorias de la Academia de Ciencias, tomo XV, pág. 3.027) contienen la descripción de algunas especies nuevas, pequeños artículos acerca de moluscos terrestres, fluviales y marinos, y *multitud* de noticias sobre pequeñas especies halladas casi todas en diversas regiones de América, algunas en la isla de Cuba y un corto número en otros países del globo.

TRYON (G.) y PILSBRY (H.)

Manual of Conchology, segunda serie. Entregas 88 a 96. 8.°, 1.423 páginas, 179 láminas en color y 17 en negro. Philadelphia, 1911 a 1918. (Véase Memorias de la Academia de Ciencias, tomo XV, pág. 2.339.)

En estas entregas se dan a conocer muchas especies de moluscos terrestres del Japón, Islas Sandwich, Australia, Polinesia, India, Este del Asia, Antillas, etc., pertenecientes a los géneros *Amastra*, *Auriculella, Achatinella*, *Tornatellina*, *Leptachatina*, *Hypselostoma* y otros muchos. Es muy completo todo lo relativo a las descripciones, sinonimia y localidades. La mayor parte de las especies son de pequeño tamaño y están figuradas con aumento considerable. El atlas es muy bueno y son una preciosidad las láminas que representan de tamaño natural las especies de *Achatinella.*

VANATTA (E. G.)

Land and freswater shells from Eastern Canada. 8.°, 5 páginas y 3 figuras en el texto. Philadelphia, 1914.

Da una lista de unas 40 especies de moluscos terrestres y fluviales hallados en dicha región, con los sitios en que se han encontrado. Algunas de las especies viven también en Europa. Describe y figura la nueva *Succinea Bayardi.*

Montana shells. 8.°, 5 págs. y 2 figuras en el texto. Philadelphia, 1914.

Enumera 26 especies de moluscos de dicha región, con las localidades donde se han encontrado, describiendo y figurando una nueva con el nombre de *Hemphilia Danielsi.*

A new American species of Zonitoides. 8.°, una página. Philadelphia, 1899.

Describe y figura la nueva especie *Zonitoides nummus,* de Tejas.

VAYSSIERE (A.)

Recherches zoologiques et anatomiques sur les mollusques Amphineures et Gasteropodes (Opisthobranches et Prosobranches), segunda expedición antártica francesa. 4.°, 50 págs. y 4 láminas en negro.

Como acostumbra el autor en todas sus obras, da una completísima descripción morfológica y anatómica de los moluscos Opistobranquios y Prosobranquios, recogidos durante la segunda expedición antártica francesa mandada por Charcot. Las especies descritas son 11, de las cuales seis se habían ya dado a conocer por Smith, Cuvier, Vayssiere y Thiele, y las otras cinco se publican como nuevas con los nombres de *Archidoris granulatissima, Scyllœa Lamyi, Marseniopsis Charcoti, Marsenia Liouvillei* y *Harpovoluta striatula.* Los dibujos que representan la concha y los órganos de dichos moluscos son muy buenos, y están hechos por el autor con la misma exactitud y perfección que los de sus otras publicaciones.

Mollusques Eupteropodes (Pteropodes Thecosomes), provenant des campagnes des yachts Hirondelle et Princesse Alice. Un volumen folio, 220 páginas y 14 láminas en negro. Mónaco, 1915.

Esta magnífica obra, tan notable como todos los trabajos publicados por el eminente profesor de la Universidad de Marsella, trata del estudio de los moluscos Eupterópodos recogidos durante gran número de años en el Atlántico, Mediterráneo y el Océano glacial ártico, en las expediciones verificadas por el príncipe de Mónaco, que tanto impulso han dado a la Oceanografía y al conocimiento de los seres que viven en las aguas de dichos mares.

Se ocupa el autor en la introducción de los caracteres distintivos de los grupos de los Pterópodos, de la bibliografía acerca de los mismos y de las generalidades en que da a conocer los órganos de dichos seres, sus funciones y las condiciones en que viven.

Todo el resto del libro está dedicado a la parte descriptiva de las familias, géneros y especies que se mencionan, que son 29 especies, pertenecientes a 11 géneros y tres familias.

Las descripciones son muy completas y minuciosas, como igualmente las citas de autores y las condiciones en que se han recogido las especies.

Todos los más exagerados elogios que se hagan de esta obra no pueden dar idea de su mérito; es necesario verla y examinarla despacio para apreciar el valioso y difícil trabajo científico de Vayssière, y el no menos importante de las condiciones y exactitud de los sitios en que se han recogido las especies bajo la inteligente dirección del príncipe de Mónaco. Termina el texto con un índice bibliográfico muy completo.

Las láminas en negro son magníficas, con profusión de exactos y preciosos dibujos hechos por el mismo Vayssière, y que representan las conchas y los diversos órganos de las especies descritas en el texto.

VERRILL (A. E.)

Report on the Cephalopods, and some aditional species dredged by Steamer Fish Hawk during, 1880. on the East coast of the United States. 8.°, 18 págs. y 8 láminas en negro. Cambridge, 1881.

Las especies de Cefalópodos recogidas en dicha excursión son en número de 12, de las cuales publica Verrrill, como nuevas, las siguientes: *Mastigoteuthis Agasizii, Eledone verrucosa* y *Cheloteuthis rapax*. Las descripciones son muy completas y minuciosas, con citación de varios autores, y las figuras buenas, representando dichas especies, como también las que ya eran conocidas, a excepción del *Argonauta Argo*. Es curioso el *Octopus lentus*, por los dos apéndices puntiagudos que hay entre los ojos. Hay también figuras de las mandíbulas, de las ventosas, dientes de la radula, etc.

The Nudibranchs, and naked Tectibranchs of the Bermudas. 8.°, 6 págs. y una lámina en negro. New Haven, 1900.

Cita de dichas islas nueve especies de Nudibranquios, considerando como especies nuevas ocho de ellos, y estableciendo para uno el nuevo género *Pleurobranchopsis*. Da descripciones de los mismos, indica en qué condiciones se han encontrado, figura en la lámina siete de ellos, y además la concha de una nueva especie de *Siphonaria*.

VERRILL (A. E.) y BUSH (K. J.)

Additions to the marine Mollusca of the Bermudas. 8.°, 32 páginas y 3 láminas en negro. New Haven, 1900.

Mencionan de dichas islas 81 especies de moluscos, con cita de autores, observaciones y descripción, en las que publican como nuevas, que son en número de 23, correspondientes a los géneros *Lucina, Tellina, Tornatina, Bulla, Siphonaria, Emarginula, Eulima, Turbonilla, Odostomia, Scala, Cerilhiopsis, Cœcum* y *Rissoa*.

Las tres láminas son buenas, y representan las especies nuevas y parte de las ya conocidas.

WESTERLUND (C. A.)

Synopsis molluscorum extramarinorum Scandinaviæ. 8.°, 228 páginas. Helsingforsiæ, 1897.

En este extenso escrito da Westerlund, al principio, una relación de los trabajos publicados acerca de los moluscos terrestres y fluviales de Suecia, Noruega, Dinamarca y Finlandia; de los manuscritos de varios autores, y de las colecciones formadas por diversos naturalistas.

Sigue después la enumeración de los moluscos encontrados en dichos países, con su nombre, descripción de los tipos, y las variedades y localidades donde viven, todo muy minucioso y bien hecho, pero sin citar obras importantes ni figuras de los autores. Termina el trabajo con la lista general de los géneros y especies, y su distribución geográfica y el índice general de los moluscos citados.

WITHFIELD (R. P.)

Description of Lymnœa megasona Say. 8.°, 8 págs. y lámina en color. New York, 1882.

La descripción es minuciosa, y la lámina representa bien el animal y la concha.

Cuestiones relativas a la Geometría métrica proyectiva

por

Miguel Vegas

(CONTINUACIÓN)

25. Mas para esto precisa establecer una definición de área de un polígono que sea independiente de la intuición geométrica.

Sea D un punto cualquiera de la recta BC, se verifica la igualdad

$$(BC) = (DC) - (DB),$$

y también la

$$|BC| \times |AE| = |DC| \times |AE| - |DB| \times |AE|,$$

siendo AE la altura proyectiva del triángulo ABC. Si, pues, designamos por $|ABC|$ el área del triángulo ABC, la igualdad anterior conduce a esta otra

$$|ABC| = |ADC| - |ADB|,$$

dando a cada área el signo que corresponde al segmento que sirve de base al triángulo respectivo; luego

a) El área de un triángulo es la diferencia entre las áreas de los que determinan dos vértices con una ceviana cualquiera relativa al tercer vértice.

Ahora bien: si BF y CG son alturas de los triángulos ADB y ADC, se tiene

$$|ABC| = \frac{1}{2}|AD| \times |CG| - \frac{1}{2}|AD| \times |BF| = \frac{1}{2}|AD| \times [|CG| - |BF|],$$

y como la diferencia incluída en el paréntesis es igual a la proyección ortogonal del segmento BC sobre una perpendicular a la recta AD, podemos concluir; que

b) El área de un triángulo es igual al módulo de una ceviana cualquiera que parte de un vértice por la mitad del módulo de la proyección ortogonal del lado opuesto, sobre una perpendicular a la citada ceviana.

Con estos antecedentes podemos ya definir el área de un polígono, cuyos lados son menores que el segmento absoluto, y cuyo contorno no tenga puntos dobles, diciendo que es *la suma algébrica de las áreas de los triángulos obtenidos uniendo sus vértices con un punto del plano.*

Mas para admitir esta definición es preciso probar que esta suma es independiente del punto elegido.

En efecto: sean $A_1\,A_2 \ldots A_n\,A_1$ un polígono, O y O′ dos puntos de su plano, B_i el punto de intersección de la recta OO′ con la A_iA_{i+1}, S y S′ las sumas correspondientes a los puntos O y O′, y a_i la proyección ortogonal de A_i sobre una perpendicular a OO′. Evidentemente se verifican las igualdades siguientes:

$$S - S' = \sum_{i=1}^{n} |OA_iA_{i+1}| - \sum_{i=1}^{n} |O'A_iA_{i+1}| = \sum_{i=1}^{n} (|OA\,A_{i+1}| - |O'A_iA_{i+1}|) =$$

$$= \sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{2} |OB_i| \times |a_ia_{i+1}| - \frac{1}{2} |O'B_i| \times |a_ia_{i+1}| \right),$$

de donde

$$S - S' = \sum_{1}^{n} \frac{1}{2} |a_ia_{i+1}| \left[|OB_i| - |O'B_i| \right] = \frac{1}{2} |OO'| \times \sum_{1}^{n} |a_ia_{i+1}|,$$

y como la suma de las proyecciones ortogonales sobre una recta de los lados de una línea quebrada cerrada es nula, se deduce que

$$\sum_{1}^{n} |a_ia_{i+1}| = o$$

y, por tanto, que S = S′ como queríamos demostrar.

El signo que ha de atribuirse a cada triángulo corresponde al sentido de giro del rayo proyectante de los vértices del polígono, supuesto recorrido su contorno en un sentido constante.

26. En el espacio convendremos en que el *absoluto* sea un sistema plano polar Σ sin curva directriz. Según esto, la intersección del plano de ese sistema, llamado *plano absoluto,* con una recta o con un plano son el punto absoluto a la recta absoluta correspondiente, y la involución de puntos conjugados situada en el plano, es la involución absoluta de éste.

Llamaremos rectas proyectivamente paralelas, a las que concurren en el plano absoluto; planos proyectivamente paralelos, a los que tienen la misma recta absoluta; rectas o planos proyectivamente ortogonales o perpendiculares, a los que tienen sus puntos o rectas absolutos conjugados en el sistema polar absoluto, y recta perpendicular a un plano, a la que tiene como punto absoluto el polo de la recta absoluta del plano en el sistema polar absoluto.

Con estos convenios se verifican para estos elementos todas las propiedades de que gozan en la geometría euclídea, relativas a su determinación, como fácilmente puede comprobarse.

En cuanto a los valores absolutos o módulos de los vectores, se verifican, desde luego, la propiedad idéntica y la propiedad reflexiva o recíproca. También se verifica la propiedad transitiva, en virtud de la cual de

$$|OA| = |OB| \quad \text{y} \quad |OB| = |OC| \quad \text{es} \quad |OA| = |OC|;$$

pues la primera igualdad manifiesta que los puntos A y B están en una cónica tal, que la involución de puntos conjugados, situada en la recta absoluta del plano AOB, es precisamente la involución absoluta de este plano, y la segunda, que los puntos B y C se encuentran en otra cónica análoga a la anterior; y como estas dos cónicas están en la cuádrica definida por el sistema polar Σ, el polo O de su plano y el punto A, el plano AOC corta a esta superficie en una tercera cónica que es invariante en el giro de centro O que tiene, como involución fundamental, la involución absoluta del mencionado plano, y, por tanto, se verifica que

$$|OA| = |OC|.$$

Las propiedades formales de las operaciones con los vectores siguen verificándose cuando se trata de dos vectores, y la propiedad asociativa también se verifica en la suma, toda vez que, tanto $\underrightarrow{OA} + \underrightarrow{OB} + \underrightarrow{OC}$, como $\underrightarrow{OA} + [\underrightarrow{OB} + \underrightarrow{OC}]$, es la diagonal $\overrightarrow{OD}$ del paralelepípedo que tiene por aristas los segmentos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$. Pero no sucede lo propio en el producto de tres vectores no coplanares, ante la necesidad de estar el vector unidad correspondiente al producto de dos vectores en el plano de éstos.

La proporcionalidad de los valores absolutos de los vectores determinados en una radiación de rectas por un sistema de planos proyectivamente paralelos, y la de los vectores homólogos en toda dilatación, cuyo plano central es el absoluto, se establece de un modo análogo a como se hace en la Geometría ordinaria.

El área de una superficie poliédrica es la suma de las áreas de sus caras, y, por tanto, se sabe obtener.

Mas para establecer la teoría de los volúmenes de los poliedros, es preciso dar una definición de este concepto.

Consideremos un tetraedro ABCD de aristas menores que el segmento absoluto (fig. 2), sean C_1 y D_1 las proyecciones ortogonales de los vértices C y D sobre el plano perpendicular a la recta AB en el punto A, y sean asimismo D_2 y C_2 las proyecciones ortogonales de los puntos C_1 y D_1 sobre las rectas AD_1 y AC_1, respectivamente. Las áreas de los triángulos ABC y ABD, están dadas (24, *e*) por las igualdades

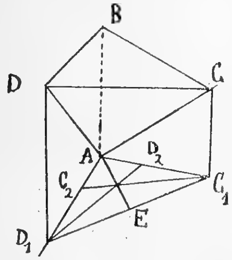


Fig. 2.ª

$$2|ABC| = |AB| \times |AC_1|,$$
$$2|ABD| = |AB| \times |AD_1|.$$

Pero siendo las rectas C_1C_2 y D_1D_2 antiparalelas respecto de las AC_1 y AD_2, se verifica que

$$|AC_1| \times |D_1D_2| = |AD_1| \times |C_1C_2|,$$

de donde

$$|AB| \times |AC_1| \times |D_1D_2| = |AB| \times |AD_1| \times |C_1C_2|,$$

o sea,

$$|ABC| \times |D_1D_2| = |ABD| \times |C_1C_2|;$$

luego, habida cuenta de que $|C_1C_2|$ y $|D_1D_2|$ son los módulos de las alturas del tetraedro propuesto, correspondientes a los vértices C y D, se deduce:

a) En todo tetraedro de aristas menores que el segmento absoluto, se verifica que los productos de las áreas de cada una de sus caras por el módulo de la altura correspondiente son iguales.

Al tercio de este producto constante se *llama* volumen del tetraedro.

Como el producto $|AD_1| \times |C_1C_2|$ es el duplo del área del triángulo AC_1D_1 proyección ortogonal de cualquiera de las dos caras ACD o BCD del tetraedro ABCD sobre el plano AC_1D_1, resulta:

b) El volumen de un tetraedro es igual a los dos tercios del producto del módulo de una cualquiera de sus aristas por el área de la proyección, sobre un plano perpendicular a ella de cualquiera de las dos caras que pasan por la arista opuesta.

Por otra parte se tiene

$$|AC_1D_1| = \frac{1}{2}|C_1D_1| \times |AE|,$$

siendo AE la tercera altura del triángulo AC_1D_1; luego si designamos por $|ABCD|$ el volumen del tetraedro ABCD, se verifica que

$$|ABCD| = \frac{1}{3}|AB| \times |C_1D_1| \times |AE|;$$

pero $|AE|$ es el valor de la mínima distancia entre las dos aristas AB y CD; luego

c) El volumen de un tetraedro es igual al tercio del producto del valor de una cualquiera de sus aristas por el de la proyección ortogonal, sobre un plano perpendicular a ella de la arista opuesta, por el de la mínima distancia entre ambas aristas.

Sea F un punto del plano del triángulo BCD, y unámosle con los cuatro vértices del tetraedro ABCD; se obtienen así otros tres tetraedros cuyos volúmenes están dados por las igualdades

$$|AEBC| = \frac{1}{3}|AE| \times |A_1B_1C_1|, \quad |AECD| = \frac{1}{3}|AE| \times |A_1C_1D_1|,$$

y

$$|AEDB| = \frac{1}{3}|AE| \times |A_1D_1B_1|,$$

siendo A_1, B_1, C_1 y D_1 las proyecciones ortogonales de los vértices del tetraedo sobre un plano perpendicular a la ceviana AE. Sumando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$|AEBC| + |AECD| + |AEDB| =$$

$$= \frac{1}{3}|AE|[|A_1B_1C_1| + |A_1C_1D_1| + |A_1D_1B_1|],$$

y como la suma encerrada en el paréntesis es el área del triángulo $B_1C_1D_1$ proyección del BCD sobre el mencionado plano, se concluye que

d) El volumen de un tetraedro es igual al tercio del producto de una ceviana cualquiera, relativa a uno cualquiera de sus vértices por el área de la proyección ortogonal de la cara opuesta sobre un plano perpendicular a la dicha ceviana.

Diremos que un sistema de triángulos en el espacio, en posición y sentido forman una superficie poliédrica cerrada, si cada lado de un triángulo tomado en sentido opuesto, es lado de otro triángulo.

Sea $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ una superficie poliédrica O y O′ dos puntos cualesquiera, A'_1, $A'_2 \ldots$, A'_n las proyecciones ortogonales de los vértices de la superficie sobre un plano perpendicular a la recta OO′; finalmente, si

ABCD es un tetraedro, diremos que tiene sentido positivo, cuando colocado un observador con los pies apoyados en el plano BCD y la cabeza al mismo lado de este plano que el vértice A, recorre el contorno del triángulo BCD en sentido positivo, es decir, dejando al triángulo a la izquierda, y diremos que el mencionado tetraedro tiene sentido negativo en caso contrario.

Si unimos los puntos O y O′ con los diferentes vértices del poliedro, se obtienen diferentes tetraedros, entre cuyas sumas respectivas V y V′ se verifica la relación

$$V - V' = \Sigma|OA_{i-1}A_iA_{i+1}| - \Sigma|O'A_{i-1}A_iA_{i+1}| =$$

$$= \Sigma[|OA_{i-1}A_iA_{i+1}| - |O'A_{i-1}A_iA_{i+1}|] =$$

$$= \Sigma\frac{1}{3}[|OB_i| \times |A'_{i-1}A'_iA'_{i+1}| - |O'B_i| \times |A'^{i-1}A'_iA'_{i+1}|],$$

siendo B_i el punto de intersección de la recta OO′ con el plano $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Por tanto, se verifica la igualdad

$$V - V' = \frac{1}{3}\Sigma|A'_{i-1}A'_iA'_{i+1}|\,|OO'| = \frac{1}{3}|OO'|\Sigma|A'_{i-1}A'_iA'_{i+1}| = 0,$$

por ser nula la suma de las áreas de las proyecciones de las caras de la superficie sobre un plano cualquiera, en virtud de la definición adoptada para la superficie poliédrica cerrada; de donde se deduce que

e) La suma algebraica de los volúmenes de los tetraedros obtenidos, uniendo los vértices de una superficie poliédrica cerrada con un punto del espacio, es independiente de la posición de este punto. Esta suma se llama *volumen* del poliedro.

De aquí pueden deducirse las expresiones de los volúmenes de los diferentes poliedros, llegando a obtener idénticas fórmulas que las establecidas en la geometría euclídea. Más aún: establecido el concepto de sentido en los segmentos, triángulos y tetraedros, queda subsistente para la métrica proyectiva, todo lo relativo a las figuras geométricas de Grasmann y el cálculo geométrico, que tan excelentemente ha sido expuesto para la geometría ordinaria, por el ilustre profesor Peano, en su notable obra titulada *Cálculo geométrico;* siendo esto una prueba más de que la Geometría proyectiva penetra aún en las teorías que parecen más alejadas de ella, justificándose así la famosa frase de Cayley: «La Geometría proyectiva es toda la Geometría.»

IV.—Teoría de la igualdad o del movimiento en la métrica proyectiva

27. Llamaremos movimiento a toda colineación en la cual son invariantes el sistema polar absoluto Σ, el módulo de un vector cualquiera, y el sentido de un tetraedro cualquiera; es decir, toda colineación, acorde en la cual, son invariantes, el sistema polar absoluto y el módulo de un vector cualquiera.

Sean A y A_1 dos puntos homólogos; a y a_1 dos rectas homólogas, que pasan por ellos; P y Q dos puntos de la recta a, y P_1 y Q_1, sus correspondientes de a_1. Como si P y Q están separados por A y el plano absoluto, también P_1 y Q_1 están separados por A_1, y el plano absoluto, resulta

a) En todo movimiento *a* en medio rayo que parte de un punto, corresponde otro medio rayo que parte del punto homólogo.

Si B y C son dos puntos exteriores a la recta a, pero coplanares con ella, y B_1 y C_1 sus homólogos; cuando aquellos dos puntos B y C están separados por la recta a, y el plano absoluto, los B_1 y C_1 están también separados por este plano, y la recta a_1, de donde se deduce que

b) En todo movimiento a un medio plano que parte de una recta, corresponde otro medio plano que parte de su recta homóloga.

Finalmente, si α y α_1 son dos planos homólogos y D-D_1 y E-E_1 son dos pares de puntos homólogos exteriores a estos planos, cuando dos puntos D y E están separados por el plano α y el plano absoluto, lo mismo acontece a los puntos D_1 y E_1 respecto de este último plano y el α; luego

c) En todo movimiento a un medio espacio que parte de un plano, corresponde otro medio espacio que parte del plano homólogo.

Ahora bien: fijados los dos puntos homólogos A y A_1, y dos medios rayos a' y a'_1 que parten de ellos, y dos medios planos homólogos α' y α'_1 que parten de las rectas a y a_1, que contienen aquellos medios rayos, dado un punto P de la recta a, queda determinado el correspondiente P_1, a causa de la igualdad

$$|AP| = |A_1P_1|;$$

del mismo modo, dado un punto B del plano α exterior a la recta a_1, queda determinado su homólogo B_1, toda vez que por las igualdades

$$|AB| = |A_1B_1|, \qquad |PB| = |P_1B_1|,$$

a un lado de la recta a_1; sólo existe un triángulo de vertices A_1 y P_1, y cuyos otros dos lados tienen valores dados; asimismo las igualdades

$$|AE| = |A_1E_1|, \quad |BE| = |B_1E_1| \quad \text{y} \quad |PE| = |P_1E_1|$$

y la igualdad de los sentidos de los tetraedros homólogos, prueban que dado un punto E fuera del plano α queda determinado su punto homólogo E_1; por tanto,

d) Un movimiento queda determinado por el conocimiento de dos puntos homólogos, dos medios rayos homólogos que parten de estos puntos, y dos medios planos homólogos que parten de las rectas que contienen aquellos medios rayos.

Como la colineación inversa de un movimiento es otro movimiento, y el producto de los movimientos es otro movimiento, en virtud de la definición de esta clase de homografías o colineaciones, se concluye que

e) Todos los movimientos forman un grupo, y la identidad es un movimiento.

Los elementos de coincidencia o dobles de un movimiento, se dice que son fijos en él, y como en la identidad son fijos todos los elementos, se deduce que

f) Todo movimiento en el que permanece fijo un punto, un medio rayo que parte de él y un medio plano que parte de la recta que contiene el citado medio rayo, es la identidad.

28. Si en un movimiento son fijos todos los puntos del plano absoluto, la colineación, es la identidad, una homología cuyo centro está en este plano, o sea una traslación o una dilatación, cuyo centro O debe estar armónicamente separado del plano central por cada par de puntos homólo A y A_1, a causa de la igualdad $|OA| = |OA_1|$, es decir, una *simetría proyectiva de centro O*. Pero, en esta simetría, si ABC y $A_1B_1C_1$ son dos triángulos homólogos los tetraedros OABC y $OA_1B_1C_1$ son de sentidos contrarios, luego no es un movimiento, y por tanto (27, d),

a) Todo movimiento en el cual son fijos los puntos del plano absoluto es la identidad o una traslación.

En una traslación de centro O, si A-A_1 y B-B_1 son dos pares de puntos homólogos al segmento absoluto AO, corresponde el segmento absoluto A_1O, y los puntos B y B_1 están al mismo lado de la recta fija AA_1; luego (27, d)

b) Todo movimiento en el cual hay una recta fija, fijo un medio plano que parte de ella, y tal que el medio rayo de la misma recta que parte de un punto corresponde el medio rayo que, partiendo de su punto homólogo, no contiene a aquel primer punto, es una traslación cuyo centro es el punto absoluto de la citada recta.

Si en un movimiento son dobles todos los puntos de un plano distinto del plano absoluto, este movimiento es la identidad (27, f); luego toda homología involutiva, respecto de un punto del plano absoluto y de un plano central distinto de éste, es decir, una *simetría proyectiva* respecto de este mismo plano, no es un movimiento, no obstante ser invariantes en esta colineación, el sistema polar absoluto y el módulo de un vector cualquiera, lo cual, se deduce también observando que si ABC es un triángulo situado en el plano central de simetría, y D-D_1 un par de puntos homólogos, los dos tetraedros ABCD y ABCD_1 son equivalentes, es decir, tienen volúmenes iguales, pero son de sentidos contrarios; por tanto,

c) Dos poliedros simétricos, respecto de un plano, no son iguales, pero sí son equivalentes.

Cuando, en un movimiento, son dobles todos los puntos de una recta propia p, también es doble la polar absoluta p_1 del punto absoluto P de aquélla, y, por tanto, es la identidad, o una homografía con los dos ejes p y p_1, o una torsión con estos mismos ejes. En el caso de la homografía con los dos ejes p y p_1, cada dos puntos homólogos A y A_1 están armónicamente separados por los dos ejes, y se llama simetría respecto del eje p. Todo plano α que pasa por el eje p es doble, correspondiéndose entre sí los dos medios planos en que los divide el citado eje, y son fijos un punto cualquiera del mismo eje y uno de los dos medios rayos en que esta recta determina este punto. Todo plano β perpendicular el eje p es también doble; si B es el punto de intersección y b una recta del mismo plano, trazada por el dicho punto, se corresponden entre sí los dos medios rayos de b que empiezan en B y los dos medios planos de β que empiezan en la recta b; luego

d) Todo movimiento en que son fijos un punto propio, un medio rayo que empieza con él y un plano que pasa por este medio rayo, pero correspondiéndose los dos medios planos en que queda dividido por la recta que contiene aquel medio rayo, es una simetría respecto de esta recta.

e) Todo movimiento que tiene fijos un punto A, una recta a que pasa por él y un plano α que pasa por esta recta, correspondiéndose los dos medios rayos de la recta a separados por el punto A y los dos medios planos de α separados por esta recta, es una simetría respecto de un eje p que pasa por el punto A y es perpendicular al citado plano.

En el caso de una torsión de eje principal p y de eje secundario p_1, éste es arista de un haz de planos dobles, cada uno de los cuales contiene una torsión plana, en la que son invariantes la involución absoluta y el módulo de cada vector, y, por tanto, es un giro en torno del punto de intersección del dicho plano con el eje p_1. Entonces la torsión se llama *giro o rotación proyectiva de eje p*. A un medio plano que parte de p, corresponde otro que cumple igual condición, y son dobles un punto cualquiera del eje y cada uno de los dos medios rayos en que queda dividido por aquel punto. Un plano perpendicular al eje en un punto P es doble, y si A y A_1 son dos puntos homólogos se corresponden los dos medios rayos PA y PA_1, y al medio plano PAA_1 corresponde el adyacente del PA_1A. Por tanto, se verifica que

f) Todo movimiento que tiene doble un punto y un medio rayo que parte de él, es un giro que puede reducirse a una simetría, cuyo eje es la recta que contiene el dicho medio rayo. Una simetría respecto de un eje es, pues, un giro con este mismo eje.

g) Todo movimiento en el que es fijo un punto P y un plano β que pasa por él, correspondiéndose los medios rayos de este plano PA y PA_1 y al medio plano PAA_1 el medio plano adyacente del PA_1A es un giro en torno de un eje perpendicular al plano β en el punto fijo P.

En la simetría, respecto del eje p, si A-A_1 es un par de puntos homólogos y P un punto del eje, el plano PAA_1 es doble y correspondientes los medios rayos PA-PA_1, y también los medios planos PAA_1 y PA_1A; luego

h) Todo movimiento en el que son fijos un punto P y un plano β que le contiene, correspondiéndose en este plano los dos medios rayos PA y PA_1 y los dos medios planos PAA_1 y PA_1A es una simetría cuyo eje está en el plano.

Cuando, en un movimiento, un punto es fijo es la identidad, cuando sea doble la figura del plano absoluto, o es una colineación en la cual existe otro plano doble que pasa por el dicho punto; luego de lo dicho en *g)* y *h)* se concluye que

i) Todo movimiento en el que un punto es fijo es un giro en torno de un eje que pasa por dicho punto.

Ahora bien: si A — A_1 es un par de puntos homólogos en un movimiento M cualquiera, y designamos por T la traslación $\overrightarrow{AA_1}$, en el movimiento $T^{-1}M$ el punto A_1 es fijo y, por tanto, es un giro G, es decir, que se verifica la igualdad

$$T^{-1}M = G,$$

de donde

$$TT^{-1}M = TG,$$

o sea,

$$M = TG,$$

lo que prueba, que

j) Todo movimiento es el producto de la traslación determinada por un punto y su homólogo, por un giro alrededor de un eje que pasa por este punto.

29. El producto de dos simetrías S y S_1, respecto de dos planos α y α_1,

es, desde luego, una homografía en la que son invariantes el sistema polar absoluto y el módulo de cada vector; además, si P y P_1 son dos tetraedros homólogos en la primera simetría y P_1-P_2 son homólogos en la segunda, en la simetría SS_1, producto de ambas, son homólogos P y P_2, y como P y P_1 son de sentidos contrarios, y también son de sentidos contrarios P_1 y P_2, son del mismo sentido P y P_2. Por otra parte, los puntos de la intersección r de los dos planos α y α_1 son dobles; luego si esta recta es propia, el movimiento SS_1 es un giro en torno de esta recta como eje, y si r no es recta propia, es decir, está en el plano absoluto, también es doble el polo absoluto R de esta recta, y, por tanto, las dos simetrías o colineaciones involutivas, tienen como centro común al citado punto, lo que prueba que el producto de las dos simetrías S y S_1 es una traslación, cuyo plano central es el absoluto, y cuyo centro es el punto R.

Y, recíprocamente, si M es el movimiento SS_1 se tiene la igualdad

$$SS_1 = M;$$

de donde

$$S^2S_1 = SM,$$

o sea,

$$S_1 = SM.$$

Por tanto,

a) El producto de dos simetrías, respecto de dos planos cuya intersección es una recta propia, es un giro G en torno de esta recta, giro que es una simetría cuando los planos de simetría son perpendiculares entre sí Y, recíprocamente, un giro puede engendrarse de infinidad de maneras por pares de simetrías, cuyos planos centrales pasan por el eje.

b) El producto de dos simetrías respecto de dos planos paralelos, es una traslación cuyo centro es el polo absoluto de la recta absoluta de aquellos planos, y, recíprocamente, toda traslación es el producto de una simetría cuyo plano central es cualquiera de los que pasan por la polar absoluta del centro de la traslación, por otra simetría cuyo plano ocupa igual posición que el anterior.

En ambos casos, todo plano α_2 perpendicular a los dos planos centrales α y α_1, es doble, y también son dobles las rectas a y a_1 de intersección de estos planos con aquél, y si M y M_1 y S_2 son las simetrías, respecto de a, a_1 y α_2, se verifican las igualdades

$$M = SS_2, \qquad M_1 = S_2S_1,$$

de las que se deduce que

$$MM_1 = SS_2{}^2S_1 = SS_1;$$

luego

c) Todo giro es el producto de dos simetrías respecto de dos ejes perpendiculares en el mismo punto al eje de giro, y recíprocamente, el producto de dos simetrías respecto de dos ejes que se cortan fuera del plano absoluto, es un giro cuyo eje es perpendicular al plano determinado por los ejes de las citadas simetrías en su punto de intersección.

d) Toda traslación es el producto de dos simetrías respecto de dos ejes paralelos perpendiculares a las rectas que pasan por el centro de la traslación, y recíprocamente.

Ahora bien: si A-A_1 son dos puntos homólogos en un movimiento cualquiera M, se verifica que

$$M = TG,$$

siendo T la traslación $\overline{AA_1}$ y G un giro en torno de un eje p_1 que pasa por el punto A_1. Sea $\overrightarrow{a_1}$ la perpendicular al plano Ap_1 en el punto A_1, y designemos por S_1 la simetría respecto de esta recta; sean asimismo S y S_2 las simetrías respecto de los ejes a y a_2, que junto con la S_1 componen respectivamente la traslación T y el giro G; se verifican las igualdades

$$T = SS_1 \quad \text{y} \quad G = S_1S_2,$$

de donde

$$M = TG = SS_1^2S_2 = SS_2,$$

por ser S_1^2 la identidad; luego

e) Un movimiento cualquiera que no es traslación ni giro, es el producto de dos simetrías respecto de ejes que se cruzan.

Las tres proposiciones anteriores pueden encerrarse en una, diciendo que

f) Todo movimiento es el producto de dos simetrías respecto de dos ejes.

Cuando el movimiento M no es traslación ni giro, los eje a y a_2 de estas simetrías se cruzan; y si p es la perpendicular común a estos dos ejes y S_3 la simetría respecto del eje a_3, paralelo al a trazado por el punto $a_1 p$ de intersección de las rectas a_1 y p, se verificarán las igualdades

$$S = T'S_3,$$

siendo T' una traslación cuyo centro es el punto absoluto de la recta p, y

$$S_1 = S_3G',$$

siendo G' un giro en torno de la misma recta p; luego

$$M = SS_1 = T'S_3^2G' = T'G',$$

y por tanto,

g) Todo movimiento es el producto de una traslación por una rotación cuyo eje pasa por el centro de la traslación. Este movimiento se llama *helicoidal;* por lo cual puede enunciarse este teorema

h) Todo movimiento es una traslación, una rotación o un movimiento helicoidal.

30. Ya hemos visto (26) que el producto de varias traslaciones es una traslación cuyo vector correspondiente es la suma de los vectores que corresponden a los factores.

Sean G_1 y G_2 dos rotaciones de ejes a_1 y a_2. Si estos ejes se cortan en un punto propio A, el producto $G_1\ G_2$ es un giro G en torno de un eje a que pasa por A, por ser doble este punto; y el eje a de la rotación resultante puede obtenerse observando que

$$G_1 = S_{p_1} S_p ,$$

siendo S_p y S_{p_1} dos simetrías respecto de dos ejes p y p_1, perpendiculares en el punto A a la recta a_1, uno de los cuales, el p, es perpendicular al plano $a_1\ a_2$: asimismo se verifica que

$$G_2 = S_p S_{p_2},$$

siendo S_{p_2} una simetría respecto de un eje p_2 perpendicular en el punto A a la recta a_2; luego

$$G_1 G_2 = S_{p_1} S_p{}^2 S_{p_2} = S_{p_1} S_{p_2} = G,$$

y el eje a de este giro es perpendicular en el punto A al plano $p_1\ p_2$. Es digno de notar que los ejes a, a_1 y a_2 forman el triedro polar del $p\, p_1\, p_2$ en la radiación rectangular de vértice A. Luego

a) El producto de varias rotaciones cuyos ejes concurren en un punto propio es una rotación cuyo eje pasa por este punto.

Cuando los ejes a_1 y a_2 son paralelos, los ejes p, p_1 y p_2 de las simetrías S_p, S_{p1} y S_{p2} están en un plano perpendicular a las rectas a_1 y a_2, y p está en el plano $a_1 a_2$; luego si p_1 y p_2 se cortan fuera del plano absoluto, el producto

$$G_1 G_2 = S_{p_1} S_{p_2}$$

es una rotación cuyo eje a es paralelo a los a_1 y a_2; pero si estos ejes p_1 y p_2 son paralelos el movimiento $S_{p_1} S_{p_2}$, es una traslación; por tanto,

b) El producto de varias rotaciones de ejes paralelos es una rotación de eje paralelo a las de los factores, o una traslación cuyo centro es conjugado con el punto absoluto de los dichos ejes en el sistema polar absoluto.

Si los ejes a_1 y a_2 se cruzan, el movimiento $G_1 G_2$ es helicoidal, y su eje a es la perpendicular común a las dos rectas p_1 y p_2; siendo p la perpendicular común a los dos ejes a_1 y a_2: luego,

c) El producto de varias rotaciones cuyos ejes no concurren en un mismo punto propio o impropio, es un movimiento helicoidal.

V.—La métrica-proyectiva general.

31. En la Métrica proyectiva, estudiada en los párrafos anteriores, el absoluto es una involución elíptica en el plano y un sistema plano polar sin directriz real en el espacio; mas, es claro que los conceptos establecidos experimentan una mayor generalización ampliando el concepto del absoluto.

Así, si tomamos como absoluto geométrico un sistema plano polar, en el plano; un sistema polar de tercera categoría, en el espacio, se obtiene otra rama de la Geometría métrica proyectiva; y de ella nos vamos a ocupar en lo que sigue, circunscribiéndonos a los dos casos que tienen más importancia; a saber: cuando la cuádrica directriz del sistema polar, o sea la *cuádrica absoluta,* es ordinaria o imaginaria, la Geometría correspondiente al primer caso la denominaremos *Métrica proyectiva hiperbólica,* y a la que corresponde al segundo, la llamaremos *Métrica proyectiva elíptica,* por ser generalizaciones de las Geometrías no eucledianas, de igual denominación; es decir, de las Geometrías de Lobatschefski y de Riemann.

En la Métrica elíptica, todos los puntos, rectas y planos ocupan la misma posición respecto de la cuádrica absoluta, y todos, por tanto, son propios; pero no acontece lo mismo en la Métrica hiperbólica, en la cual los puntos pueden ser interiores a la cuádrica absoluta, estar en esta cuádrica o ser exteriores a ella; y las rectas y los planos pueden ser secantes, tangentes o exteriores. Pues bien: llamaremos *propio* al espacio encerrado por la cuádrica absoluta; es decir, al conjunto de los puntos interiores; e *impropio,* al conjunto de los puntos restantes.

Según esto, una recta puede ser propia o impropia; una recta propia contiene infinitos puntos de ambas clases; pero una recta impropia sólo contiene puntos impropios; por tanto,

a) Dos puntos propios, o uno propio y otro impropio, determinan una recta propia.

Asimismo, un plano propio contiene puntos y rectas propios e impropios, y un plano impropio sólo contiene puntos y rectas impropios; luego,

b) El plano determinado por tres puntos no alineados, es propio cuando uno, al menos, de ellos, es propio. Si los tres puntos son impropios, el plano que determinan puede ser propio o impropio.

c) El plano determinado por una recta y un punto exterior a ella, es propio cuando uno de estos dos elementos es propio; pero si ambos elementos son impropios, el citado plano puede ser propio o impropio.

d) El plano determinado por dos rectas que tienen un punto común, es propio cuando una de ellas, o ambas, son propias; pero cuando ambas son impropias, el plano puede ser propio o impropio.

Dos rectas, o una recta y un plano, ambos propios, diremos que son proyectivamente paralelos, cuando se cortan en la cuádrica absoluta; y, asimismo, dos planos propios son paralelos cuando se cortan en una recta tangente a la mencionada cuádrica; de cuyas definiciones se deducen las siguientes proposiciones:

e) Por un punto propio exterior a una recta propia pasan dos paralelas a esta recta. Estas dos paralelas forman dos ángulos completos, uno de los cuales está constituído por todas las rectas que pasan por el punto y cortan a la recta dada en puntos propios; y el otro está formado por las rectas que proyectan los puntos impropios de la recta propuesta.

f) Por un punto propio exterior a un plano propio pasan infinitas rectas paralelas al plano dado, todas las cuales forman el cono proyectante de la cónica absoluta del dicho plano.

g) Por una recta propia que se cruza con otra, también propia, pasan dos planos paralelos a esta segunda recta.

h) Por un punto propio exterior a un plano propio pasan infinitos planos paralelos a él, todos los cuales son tangentes al cono formado por las rectas paralelas al plano dado que pasan por aquel punto.

En la Geometría elíptica, todos los puntos son propios, y no existe el paralelismo en el concepto antes establecido.

Dos puntos conjugados en el sistema polar absoluto, se llaman *asociados:* un punto asociado de sí mismo está en la cuádrica absoluta, y se llaman puntos absolutos; toda recta no tangente a la cuádrica absoluta contiene una involución de puntos asociados, la cual recibe el calificativo de absoluta; y todo plano no conjugado de sí mismo en el sistema polar absoluto, contiene un sistema polar que recibe el calificativo de absoluto. Por tanto,

i) En la Métrica elíptica, toda recta contiene una involución absoluta que es elíptica; y todo plano es base de un sistema polar absoluto sin directriz real.

j) En la métrica hiperbólica, toda recta propia contiene una involución absoluta que es hiperbólica; siendo los puntos dobles los puntos absolutos de la recta, puntos que son impropios; y todo plano propio contiene un sistema polar cuya directriz es la cónica absoluta del plano.

32. Dos rectas y dos planos, o una recta y un plano, se llaman proyectivamente perpendiculares u ortogonales, cuando son conjugados en el sistema polar absoluto. Según esto, se verifica que

a) Por un punto no conjugado con una recta pasan infinitas rectas perpendiculares a la dada, todas las cuales se encuentran en el único plano perpendicular a esta recta, trazado por el dicho punto. En la Geometría hiperbólica, por todo punto propio pasa un solo plano perpendicular a una recta propia, plano que es propio.

b) Por todo punto pasa una sola recta perpendicular a un plano o una infinidad, según que el punto sea distinto del polo absoluto o se confunda con este polo. En la Geometría hiperbólica de dos elementos polares absolutos, si uno de ellos es propio el otro es impropio; por tanto: por todo punto propio pasa una sola recta perpendicular a un plano propio, recta que es propia y está contenida en todos los planos perpendiculares al dado trazados por el mencionado punto.

c) Por una recta no perpendicular a un plano pasa un solo plano perpendicular a éste.

Si dos rectas a y b se cruzan, sus polares absolutas a' y b' se cruzan también: toda recta p que corta ortogonalmente a las a y b debe cortar asimismo a las a' y b', y también corta a estas cuatro rectas la polar absoluta p' de aquella recta p.

Pero sabemos que no existe ninguna recta que corte a cuatro que se cruzan: existe una sola, o dos, o una infinidad cuando las cuatro pertenecen a un mismo haz alabeado; mas, en el caso actual, no puede existir una sola recta que corte a las a, b, a' y b', puesto que había de confundirse con su polar absoluta lo que es imposible.

Ahora bien: si p y p' son dos rectas polares absolutas que cortan a las a, b, a' y b', los planos ap y ap' son perpendiculares entre sí y cortan a la recta b en los puntos asociados bp y bp'. Además, toda recta propia es arista de un haz de planos perpendiculares, la cual es elíptica; luego los puntos bp y bp' son los conjugados comunes a la involución absoluta de la recta b y a la involución que esta recta determina en el haz de planos rectangular de arista a; y como esta última, por lo menos, es elíptica, existen dos puntos conjugados comunes o una infinidad; luego,

d) En la métrica hiperbólica existe una sola recta propia que corta ortogonalmente a otras dos propias que se cruzan.

En la Métrica elíptica existen dos rectas que cortan ortogonalmente a otras dos que se cruzan, o existen una infinidad. En el segundo caso, las dos rectas dadas tienen sus perpendiculares comunes, y como esta propiedad caracteriza a las rectas paralelas en la Geometría ordinaria, de aquí que se llamen también *paralelas*, generalizando así el concepto de paralelismo del profesor Cliford.

e) En la geometría elíptica, todo punto es vértice de una radiación polar rectangular, sin cono director real; en la geometría hipérbolica gozan de esta propiedad sólo los puntos propios.

33. Llamaremos igualdad, congruencia o movimiento, a toda homografía acorde, en la cual es invariante el sistema polar absoluto. Los movimientos forman, pues, el subgrupo proyectivo de Cayley.

Fijado un par de puntos homólogos A y A_1, y dos medios rayos homólogos que parten de ellos, se corresponden los puntos absolutos contenidos en ellos, y también los contenidos en los medios rayos suplementarios; por tanto, queda determinada la relación proyectiva entre las dos rectas que contienen a los medios rayos. Si se dan además dos medios planos homólogos que parten de estas dos rectas, la colineación entre los dos planos que los contienen está determinada, toda vez que se correspondan los polos absolutos de aquellas rectas en estos planos, y, por tanto, a otro medio rayo que parte del punto A corresponde otro que parte del A_1, y también queda determinada la relación proyectiva entre las correspondientes rectas. Como también son homólogos en el movimiento los polos absolutos de estos planos, se deduce que si P es un punto cualquiera, a la cuádrica φ que pasa por él y por la cónica absoluta del primer plano corresponde otra φ' determinada, colineal con la φ, y como esta colineación es acorde el punto P' homólogo del P está determinado. Por tanto,

a) Un movimiento queda determinado por dos puntos homólogos, dos medios rayos que parten de él y dos medios planos que parten de las dos rectas que contiene a estos medios rayos. Proposición idéntica a la establecida en el párrafo (27, d).

Si en un movimiento son fijos todos los puntos de un plano, la colineación es una homología involutiva respecto de este plano, y cuyo centro es el polo absoluto del mismo plano o la identidad; pero un sistema homológico en involución es una homografía discorde; luego ha de ser la identidad.

Una homología involutiva uno de cuyos elementos centrales es propio, se llama *simetría* respecto de este elemento, cuando son polares absolutos entre sí. Por tanto,

b) Una simetría proyectiva respecto de un plano o respecto de un centro, no es un movimiento.

Cuando en un movimiento son dobles o fijos los puntos de una recta *p* que se cruza con su polar absoluta *p'*, también son dobles los planos del haz cuya arista es esta polar; luego la colineación es la identidad, una homografía involutiva con dos ejes que son las mencionadas rectas p y p', o un *giro proyectivo* cuyo eje principal es la recta p y el eje secundario, la recta p' (4).

Cuando uno de los ejes es propio en el segundo caso, la colineación se llama *simetría proyectiva* respecto de este eje. Asimismo, cuando en el caso tercero es propio el eje principal p, la colineación se llama *giro* en torno de este eje, y si es propio el eje secundario, la colineación se denomina *traslación proyectiva* de eje p'; y como son acordes todas estas colineaciones, se deduce que

c) Todo movimiento en el que son dobles todos los puntos de una recta propia, es la identidad o un giro en torno de esta recta, y como caso particular, una simetría respecto de esta misma recta.

d) Todo movimiento en el que son dobles todos los planos que pasan por una recta propia, es la identidad, una simetría respecto de esta recta, o una traslación cuyo eje es la misma recta.

Demostradas estas proposiciones, por razonamientos análogos a los hechos en el párrafo IV se demuestran todas las propiedades y relaciones entre los movimientos expuestos en él, aplicadas a elementos propios cuando se refieran a la métrica hiperbólica.

34. Para establecer las relaciones métricas, es necesario sentar los conceptos fundamentales de distancia entre dos puntos, y de ángulo de dos rectas o de dos planos, a condición de que sea invariante en todo movimiento y que satisfaga a la igualdad,

$$AB + BC = AC.$$

Es claro que en la definición de distancia entre dos puntos propios A y B ha de intervenir el absoluto del espacio, y, por tanto, la involución absoluta de la recta así como el concepto de segmento proyectivo, y de aquí que puedan considerarse como distancia AB la proyectividad definida por el par de puntos homólogos A-B, y la involución unida que es la absoluta de la recta AB; es decir, lo que el señor Rey llama en su obra mencionada segmentos de segunda especie, o la prospectividad definida por el par A-B, y que tiene como punto doble el punto A′ asociado al origen A, es decir, el segmento de primera especie definido por la relación proyectiva $\overline{A'A}\ldots \barwedge \overline{A'B}\ldots$ Tomando el primer concepto de distancia, se obtiene la métrica proyectiva de Cayley, o sea la Geometría cayleyana; el segundo concepto, a nuestro juicio, conduce a las relaciones métricas correspondientes a las Geometrías no euclidianas por un procedimiento más natural que el primero, y de él nos vamos a ocupar en los párrafos siguientes.

Llamaremos como en el párrafo 23, segmento absoluto, al positivo determinado por un punto propio y su asociado en una recta cualquiera. Todos los segmentos absolutos, así como todas las involuciones absolutas son homólogos en todo movimiento y, por tanto, los consideramos como iguales.

Tratándose de segmentos coplanares de origen común O, todo movimiento en el que sean dobles el plano y el punto es un movimiento en el mencionado plano, siendo doble la polar absoluta del punto O e invariante la involución absoluta situada en esta recta; por tanto, este movimiento es la identidad, o un giro en torno de este punto, y como caso particular una simetría cuyo centro es este mismo punto; movimiento que coincide con los establecidos en la Geometría cuyo absoluto está en el plano polar absoluto del punto O, estudiada en el párrafo IV, y que por analogía designaremos con el calificativo de *parabólica*.

Por consiguiente, cuando se consideran segmentos que tienen un origen común, se verificarán las relaciones métricas establecidas en la métrica parabólica.

En la métrica elíptica o hiperbólica existen triángulos con uno, dos o tres ángulos rectos; pero sólo en el primer caso los tres lados del triángulo son menores que el segmento absoluto, y de ellos es de los que hemos de ocuparnos en lo sucesivo.

En consecuencia, se verifican las proposiciones siguientes:

a) Las distancias proyectivas de un punto a los de intersección de los rayos del haz de rectas, cuyo vértice es este punto, con un sistema de rectas concurrentes en la polar absoluta del dicho vértice, son proporcionales (23, c).

b) El módulo de un cateto de un triángulo rectángulo es medio geométrico entre los módulos de la hipotenusa y de la proyección ortogonal sobre esta recta del dicho cateto (24 b).

Es claro que el teorema de Pitágoras, relativo a los triángulos rectángulos, no se verifica en la métrica elíptica ni en la hiperbólica, por no tener origen común los lados; pero si sustituímos uno de los catetos AB por su proyección ortogonal CD sobre la recta perpendicular al otro trazada por el vértice opuesto C, como en la Geometría parabólica se verifica

$$|AB| = |CD|;$$

el teorema de Pitágoras conduce a la

$$|CB|^2 = |CA|^2 + |CD|^2,$$

la cual ya se aplica a las métricas elíptica e hiperbólica, y que dice así:

c) El cuadrado de la distancia de un punto a otro es igual a la suma de los cuadrados de las distancias del primero a las proyecciones ortogonales del otro, sobre dos rectas perpendiculares trazadas por aquél.

Sustituyendo la altura de un triángulo relativa a un lado, por su proyección ortogonal sobre la perpendicular al lado opuesto trazada por uno de sus extremos, la proposición establecida en 24 e) se transforma en la siguiente, aplicable a las tres Geometrías métricas.

d) En todo triángulo, los productos de uno de dos de sus lados por la proyección ortogonal de la altura correspondiente sobre la perpendicular al citado lado trazada por el vértice común, es igual al producto análogo relativo al otro lado.

Si designamos por H el punto común a dos alturas AA_1 y BB_1 de un triángulo cualquiera ABC, y cortamos los lados del cuadrivértice completo ABCH por la polar absoluta del punto H, se obtiene una involución que se confunde con la absoluta de esta recta, por ser asociados los puntos de intersección con los lados AA_1 y BC, y también los de intersección con los lados BB_1 y AC; luego también son asociados los puntos de intersección de los otros dos lados CH y AB, y, por tanto, la recta CH es la tercera altura, lo que prueba que

e) En las tres Geometrías, parabólica, elíptica e hiperbólica, las alturas de un triángulo cualquiera concurren en un punto H, que denominaremos ortocentro del triángulo.

Designemos con el nombre de punto medio de un segmento al punto armónicamente separado de su asociado por los extremos, y sean A_2, B_2 y C_2 los puntos medios de los lados de un triángulo ABC, y A_2', B_2' y C_2' sus asociados en cada lado. Por ser armónicas las series AC_2BC_2' y AB_2CB_2', las rectas B_2C_2, BC y $B_2'C_2'$ concurren en un punto P', y las B_2C_2', $B_2'C_2$ y BC en otro punto P armónicamente separado del P' por los B y C. Ahora bien: las perpendiculares a los lados AB y AC en sus puntos medios, es decir, las *mediatrices* relativas a estos lados, se cortan en un punto O, polo absoluto de la recta $B_2'C_2'$, por ser las citadas mediatrices polares absolutas de los puntos B_2' y C_2', luego son alturas del triángulo B_2C_2P, y, por tanto, la recta OP es la tercera altura del citado triángulo y, por consiguiente, perpendicular a la recta B_2C_2 y también perpendicular a BC, por ser la polar absoluta del punto P'. Luego los puntos P y P' son asociados y, por consiguiente, se confunden con los A_2 y A_2', de donde

f) En las tres Geometrías métrico proyectivas, las mediatrices de un triángulo concurren en un punto O, que denominaremos *circuncentro* del triángulo. Además, siendo homológicos los dos triángulos ABC y $A_2B_2C_2$ por cortarse los pares de lados opuestos en puntos A_2', B_2' y C_2'

de una recta. las rectas AA_2, BB_2 y CC_2, a sea, las *medianas* del triángulo ABC, concurren en un punto G, que denominaremos *baricentro* del triángulo; por tanto,

g) En las tres Geometrías métrico-proyectivas, las medianas de un triángulo concurren en un punto.

Para averiguar la posición relativa de los tres puntos H, O y G, es decir, del ortocentro, circuncentro y baricentro, consideremos los dos triángulos BB_2B' y CC_2C' formados por la altura, mediana y mediatriz correspondientes a cada uno de los dos lados AC y BC, cuyos vértices B' y C' son, por tanto, los polos absolutos de los mencionados lados. Como los puntos H, O y G son los de intersección de los tres pares de lados homólogos, estarán estos puntos en línea recta cuando las rectas BC, B_2C_2 y $B'C'$ sean concurrentes en el punto A_2', el cual ha de ser, por tanto, polo absoluto de la tercera mediatriz, según hemos visto, y también de la tercera altura, por ser $B'C'$ la polar absoluta del vértice A. Luego, o estas rectas son distintas, y entonces estaremos en el caso de la métrica parabólica, por tener ambas el mismo polo, o se confunden en una, y entonces el triángulo es isósceles; por consiguiente,

h) Sólo en la métrica parabólica se verifica el teorema de Euler, que dice que en todo triángulo están en línea recta el ortocentro, el baricentro y el circuncentro.

35. Si ABC es un triángulo de lados menores que el segmento absoluto y D es un punto de uno de los lados BC, el segmento AD es también menor que el segmento absoluto: pues si fuese AD igual al segmento absoluto, la recta perpendicular en D a la AD debe cortar a uno de los otros dos lados AB o AC del triángulo propuesto, y entonces este lado sería mayor que el segmento absoluto. Si AD es mayor que el segmento absoluto tomando AE igual a este segmento, el punto E es interior al triángulo ABC, la recta BE corta al lado AC en F, y la perpendicular a la recta AE en el punto E, por cortar al lado BF del triángulo ABF, debe cortar también a uno de los otros dos lados AB o AF; es decir, que AB o AF es mayor que el segmento absoluto, y, con mayor razón, AC es mayor que el citado segmento, lo que es contrario al supuesto. Más aún: siendo menores que el segmento absoluto los segmentos AD, DC y AC, también es menor que el segmento absoluto el segmento DF, luego

a) En todo triángulo de lados menores que el segmento absoluto, todo segmento limitado por el perímetro es también menor que el segmento absoluto.

Por ser invariante la perpendicularidad en todo movimiento, se deduce que todos los ángulos rectos son iguales, y si llamamos agudo a un ángulo menor que uno recto, y obtuso a un ángulo mayor que el recto, bien entendido que nos referimos en este párrafo a segmentos y ángulos ordinarios, considerando un triángulo ABC rectángulo en A, el ángulo en B no puede ser recto, porque, de lo contrario, el vértice C sería el polo absoluto a la recta AB y los dos lados CA y CB serían iguales al segmento absoluto; tampoco puede ser obtuso el ángulo B, porque entonces la perpendicular a AB en el punto B sería interior al ángulo B y cortaría al lado opuesto en el polo absoluto de AB, siendo, por tanto, el lado AC mayor que el segmento absoluto. Si el ángulo A del triángulo ABC es obtuso, el ángulo B es forzosamente agudo, toda vez que la perpendicular a AB en A es interior al ángulo A y corta al lado opuesto BC en un punto D, formándose así el triángulo ABD de lados menores que el segmento absoluto, rectángulo en A, y del cual forma parte el citado ángulo B. Por tanto:

b) Un triángulo de lados menores que el segmento absoluto, no puede tener más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso, siendo agudos los dos ángulos restantes. De aquí que puedan clasificarse los triángulos, como en la Geometría ordinaria, en acutángulos, rectángulos y obtusángulos.

Ahora bien: si ABC es un triángulo rectángulo, como en las tres Geometrías métrico proyectivas, se verifican evidentemente las propiedades del triángulo isósceles, el cateto AC no puede ser igual a la hipotenusa BC, porque entonces el ángulo B sería también recto, ni tampoco AC puede ser mayor que BC, porque, si así fuese, tomando en AC un segmento CD igual al BC, en el triángulo CBD se verificaría, por ser isósceles, que los ángulos CDB y DBC serían iguales, lo cual es absurdo, porque el segundo es agudo por ser agudo el ángulo ABC que lo comprende, y el primero es obtuso como adyacente al ángulo BDA perteneciente al triángulo rectángulo ABD, luego

c) En todo triángulo rectángulo de lados menores que el segmento absoluto, cada cateto es menor que la hipotenusa.

Aplicando, pues, el mismo razonamiento que el empleado en el párrafo 24, se demuestra la proposición d) de este mismo párrafo, que relaciona los lados de un triángulo rectilíneo.

Del mismo modo, empleando razonamientos análogos a los que se efectúan en la Geometría ordinaria, se establecen los tres casos fundamentales de igualdad de dos triángulos.

Consideremos ahora el caso en que dos triángulos ABC y A′B′C′ tengan respectivamente iguales los tres ángulos. En el movimiento en que son homólogos los vértices A y A′ y los pares de rectas AB-A′B′ y

AC-A′C′, si los dos triángulos no son homólogos, los puntos homólogos de los B y C serían otros dos B_1 y C_1, situados, respectivamente, en las rectas AB y AC. Ahora bien: en la simetría respecto del punto O medio del segmento BB_1, son homólogos los puntos B y B_1 y también las rectas BC y B_1C_1, por formar ángulos iguales con la BB_1, luego la perpendicular a la recta BC trazado por O es también perpendicular a la B_1C_1, y es, por tanto, polar absoluta del punto P común a estas dos rectas. Por razón análoga, la perpendicular a BC trazada por el punto medio del segmento CC_1 es también perpendicular a B_1C_1 y polar absoluta del mismo punto P. Y como existe un punto P con dos polares absolutas, no puede existir sistema polar absoluto, y, por consiguiente,

d) Sólo en la métrica parabólica la igualdad de los ángulos de dos triángulos no entraña la de estas figuras.

36. Consideremos un cuadrilátero ABCD rectángulo en A, B y C, de lados menores que el segmento absoluto. Las dos diagonales AC y BD se cortan en un punto E interior al segmento AC. En la Geometría parabólica, el cuarto ángulo D es también recto, y recíprocamente. En la Geometría elíptica, si B′ y A′ son los puntos conjugados con los B y A en la involución absoluta situada en la recta AB, como esta involución es elíptica, los pares A-A′ y B-B′ están separados y, por tanto, también lo están los pares de rectas DA-DA′ y DB-DB′, y los pares de puntos A-F y E-C secciones de las rectas anteriores por la AC, y siendo A exterior al segmento EC, el punto F será interior, y la recta DA′, perpendicular a la DA, es interior al ángulo ADC siendo, en consecuencia, obtuso este ángulo.

Un razonamiento análogo prueba que, si es hiperbólica la involución absoluta de base AB, el ángulo ADB es agudo, y como aquella circunstancia se verifica para las rectas propias, podemos concluir que

a) El cuarto ángulo de un cuadrilátero trirrectángulo de lados propios menores que el segmento absoluto, es recto, agudo u obtuso, según que se trate de la métrica parabólica, hiperbólica o elíptica.

Ahora bien: si por los vértices A, B y C de un triángulo se trazan (fig. 3) las perpendiculares AD, BE y CF a la recta A_1B_1 que une los puntos medios de los lados AC y BC, y por el punto C_1 medio del tercer lado se traza, asimismo, la perpendicular C_1G a la misma recta A_1B_1 se verifica la igualdad de los ángulos FCB_1 y DAB_1 como homólogos en la simetría respecto del punto B_1, y también la igualdad de los ángulos FCA_1 y EBA_1

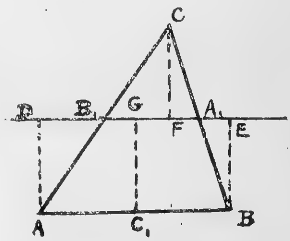


Fig. 3.ª

como homólogos en la simetría del centro A_1, de donde se concluye que la suma de los tres ángulos del triángulo propuesto es igual a la suma de los ángulos DAC_1 y EBC_1, y como por ser la recta C_1G perpendicular a las dos rectas AB y A_1B_1 estos dos ángulos son los cuartos correspondientes a los dos cuadriláteros trirrectángulos AC_1GD y BC_1FE, son ambos rectos, agudos u obtusos, según que se trate de una u otra rama geométrica: podemos, pues, decir que

b) La suma de los tres ángulos de un triángulo de lados propios menores que el segmento absoluto, es igual a dos ángulos rectos en la Métrica parabólica, menor que dos rectos en la Métrica hiperbólica y mayor que dos rectos en la Métrica elíptica.

(Se continuará).

Contribución al conocimiento de la fauna índica

Orthoptera (Locustidæ vel Acridiidæ)

por

Ignacio Bolívar

(CONCLUSIÓN)

ERIANTHUS BIFIDUS Kirby.

l. c., pp. 86-88, fig. 76 (1914), haud fig. 77 (larva).

Loc. Ceilan.

Respecto a esta especie, que debe llevar el nombre de *Kirbyita bifida* (Kirby), bastará referirse al trabajo publicado por mi hijo en el *Boletín de la R. S. E. de H. N.*, abril, 1916. Notas sobre Eumastacinos (Orth.-Locust.) p. 196, donde ha quedado demostrado que no pertenece al género *Erianthus,* el cual carece siempre de lóbulos foliáceos en las tibias posteriores y de prolongaciones caudiformes en las alas, y para el que ha propuesto el nombre *Kirbyita* en memoria del ilustre Kirby.

Respecto a la figura 77 de la misma página que dice representa la larva de la nueva especie, bastará fijarse en la forma de los fémures anteriores para comprender que es de un *Orchetypus*, y en modo alguno de un *Erianthus.*

19. BENNIA BURRI C. Bolívar.

Trab. Mus. Nac. Cien. Nat. Madrid, Ser. zool. núm. 16, pp. 10, 11 (1914).

Loc. South Canara Dt.: Kollur Ghat., 3.000 ft., 18-21-IX-1913, T. V. Ramakrishna; Malabar, Tamarasseri, 17-22-I-1913, Y. Ramachendra.

BENNIA OBERTHURI Bolívar.

Kirby, l. c. p. 92.

Loc. British Bootang: Maria Basti.

Cuando describí esta especie no conocía el género *Bennia* sino por la descripción por lo que propuse con duda para ella el nov. gen. *Butania* que luego se ha visto debía subsistir estableciéndose la distinción sobre caracteres bien definidos, por lo que esta especie debe denominarse *Butania oberthuri* (Bolívar) (1).

20. Mastacides nilgirisicus C. Bolívar.

Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. zool. núm. 16, pp. 21-22, figura 5 (1914).

Loc. Nilgiris, Ootacamund, V-1912. K. S. P.

Haré observar que el género *Mastacides* fué descrito por mí, aun cuando la descripción fuese publicada por Burr; así lo hace constar éste expresamente en su monografía.

Subfamilia III. **Tryxalinæ**

21. Acrida brevicollis (Bolívar).

Tryxalis brevicollis Bolívar, Feuille des Jeunes Nat., XXIII, pp. 162, 164 (1893).

Acrida brevicollis Burr, Trans. Ent. Soc. London, pp. 157, 170 (1902).

Loc. Samalket, 2-I-1909, T. V. Ramakrishna; Madras: Purasusakaim, I-X-1909, J. S. A.; Anappadi, 30-V.

Kirby sólo la cita de Ceilan, a pesar de que yo la he indicado de Madura, Kodaicanal.

Mr. Kirby, en «Syn. Catal. of Orth.», III, p. 94, ha colocado esta especie en la sinónimia de *exaltata* Walker, y lo mismo hace en «Fauna British India», p. 99, en lo que creo está equivocado, porque *A. brevicollis* tiene las alas hialinas en toda su extensión, sin mancha alguna central en las posteriores. Por cierto que Kirby ha tratado, en la última obra citada, de distinguir *A. exaltata* Walker y *lugubris* Burr, sin haberlo conseguido; los caracteres que señala son puramente sexuales; así sucede con el tamaño, pues por las figuras se ve que los ejemplares representados son ♂ el de *lugubris,* y ♀ el de *exaltata;* así puede medir 30 mm. el uno y 50 mm. el otro; debería haber señalado el tamaño del ♂ y de la ♀ de *lugubris*. Este último nos le ha dado Burr, y es de 54,5-64,5; esto es, lo mismo que el de la ♀ de *exaltata*, y como los caracteres tomados de la coloración del cuerpo y de los élitros son tan variables, resulta imposible la distinción de estas especies, que quizás sean una misma.

---

(1) Bol. R. Soc. Esp. de H. Nat., p. 303 (1903).

22. Acrida lugubris Burr.

Acrida lugubris Burr, Trans. Ent. Soc. Lond., pp. 157, 170 (1902); Kirby, Fauna British India, p. 90 (1914).

Loc. Coimbatore, 10-VII-1912, P. S.; Madura, 29-VII-1911, VIII-1912, P. S. N.; Chepank, 24-VIII-1907, T. V. Ramakrishna.

Citada de Kashmir, Hunza y Madrás.

23. Acridella nasuta (L.)

Gryllus (Acrida) nasutus L., Syst. Nat, ed. x, I, p. 427 (1758).
Truxalis scalaris, miniata, variabilis, procera et *conspurcata* Klug, Symb. Phys. (1830).
Truxalis unguiculata Rambur, Faune de l'Andàl, II, p. 72 (1839).
Acrida nasuta Stål, Rec. Orth., I, p. 99 (1873); Bolívar, Ortopt. Esp., pp. 102, 103 (1876).
Acridella nasuta Kirby, Fauna British India, Orth., p. 100 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Beeravalli, 10-VIII, 10-IX, 1913, C. N.

La he citado ya de Kodaicanal.

Esta especie se halla también en Europa, Africa, W. Asia, Beluschistan, India, Ceilan y Birmania.

24. Pasiphimus sagittæformis Bolívar.

Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid. Ser. zool. núm. 20, p. 103 (1914).

Loc. South Canara Dt.: Nagody, 2.500 ft., 19-IX-1913, T. V. Ramakrishna.

25. Aswatthamanus cylindricus Kirby.

Aswatthamanus cylindricus Kirby, Fauna British India, Orth., p. 101. figs. 82, 83 (1914).

Loc. Bengala: Pusa, 10-IX-1908, 13-VII-1909, G. M. C. et K. S. P.

Uno a la luz y otro sobre la hierba.

Este curioso género tiene por completo la forma y aspecto del género *Carsula* Stål, pero la carencia de tubérculo prosternal lo lleva indefectiblemente a los truxalinos. El prosternón presenta tan sólo una pequeña protuberancia en el medio, no distinta de la que se ve en *Gelastorrhinus*, y los lóbulos geniculares posteriores son agudos. La colocación de este género no me parece ser la que le ha dado su autor, guiado sólo por la forma prolongada de la cabeza, sino que deberá ponerse en la proximidad del *Gelastorrhinus*, al final de los truxalinos, enlazando este grupo con los acridinos por medio de los *Mesops*.

26. Perella insignis Bolívar.

Perella insignis Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 88 (1914).

Loc. Bengala: Pusa, 1-VIII-1909, K. S. P.

Tanto el género como la especie han sido descritos en una publicación española, por lo que me creo relevado de reproducir aquí su descripción.

27. Phlæoba Ramakrishnai Bolívar.

Phlœoba Ramakrishnai Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, pág. 92 (1914).

Loc. South Canara Dt.: Nagody, 2.500 ft., 19-IX-1913, T. V. Ramakrishna.

Por iguales razones que las ya dichas respecto a *Perella insignis,* dejamos de incluir aquí la descripción de esta especie.

28. Phlæoba Panteli Bolívar.

Phlœoba Panteli Bolívar, Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 589 (1902); Kirby, Fauna British India, p. 104 (1914).

Phlœoba Walhousei Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 138 (1910).

Loc. Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 21-IV, 4-V-1913, Y. Ramachendra; Shevaroys, 5.000 ft., 14-22-X-1912, Fletcher; Gaujam Chicacote, 22-IV-1910; T. V. Ramakrishna.

Hasta ahora sólo se conocía mi cita de Madras: Madura. Tipos en la colección Pantel y Bolívar.

29. Zygophlæoba atractocera Bolívar.

Zygophlœoba atractocera Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 86 (1914).

Loc. Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 21-IV, 4-V-1913, Y. Ramachendra; S. Mysore: Goorghalli Estate, 3.300 ft., 14-24-III-1913, P. S.; Bellary Dt.: Bellahunai to Hampasagaram road, 31-VIII-1912; Bellary Dt.: Siruguppa, 12-IX-1912, Y. Ramachendra; Bellary Dt.: Adoni to Yemmiganur road, 18-29-IX-1912, Y. Ramachendra; Nilgiris: Ootacamund, 20-31-XII-1912, Fletcher; Malabar: Taliparamba, 24-30-IX-1913, C. N.

30. Zygophlæoba foveopunctata Bolívar.

Zygophlœoba foveopunctata Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, pp. 68, 87 (1914).

Loc. Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 21-IV, 4-V-1913, Y. Ramachendra.

31. Phlæobida angustipennis (Bolívar).

Paraphlœoba angustipennis Bolívar, Ann. Soc. Entom. de France; LXX, pp. 592, 593, pl. IX, fig. 30 (1902).

Phlœobida angustipennis Kirby, Fauna British India, Orth. Acr., p. 107.

Loc. Coimbatore, 23-II-1913, C. N.; Nilgiris: Ootacamund, 29-V-1913, C. N., 23-31-XII-1912, Fletcher.

Kirby la cita sólo de Madras: Trichinopoly.

32. Duroniopsis bitæniata Bolívar.

Duroniopsis bitœniata Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 81 (1914).

Loc. Shervaroys, 20-VIII-1907, Y. Ramachendra.

Gen. **Capulica** nov.

Corpus subcylindricum, gracile. Caput conicum pronoto subæque longum. Vertex inter oculos costa frontali latior. Fastigium productum vix longius quam latius, hemihexagonale, antice subrotundatum; marginibus cariniformibus, antice sulco marginali (foveolæ verticis) a supero haud distincto. Frons valde reclinata, costa sulcata, apicem versus sensim ampliata pone ocellum subcoarctata. Oculi obliqui distincte longiores quam latiores inferne rotundati superne angustati. Antennæ, læviter subcompressæ in ♂ dimidium corporis attingentes. Pronotum cylindricum compressum, dorso angustissimo tricarinato, carina media parce elevata a sulco typico longe pone medium interrupta; carinis lateralibus subparallelis. Lobi laterales trapezoidales superne obtuse angulati. Elytra perfecte explicata, area scapularis basi angusta postice ampliata, area mediastina haud lobata. Alæ abortivæ. Pedes antici graciles. Femora postica lobis genicularibus obtusis apice rotundatis. Tibiæ cylindricæ extus spinis 9, spina apicali nulla. Tarsi graciles. Lobi mesosternales ♂ transversi spatio transverso sejuncti; lobi metasternales pone foveolas subcontigui.

Este género puede llevarse al grupo *Chrysochraontes*, donde podrá colocarse al lado de *Kraussella* Bol., distinguiéndose por lo reducido de la metazona del pronoto que forma aproximadamente la tercera parte de su longitud total, y por la forma de las fositas del vértex que tienen una disposición especial, pues los bordes laterales del fastigio forman una depresión junto a los ojos, que se continúa, a modo de estrecho surco, a lo largo del borde del fastigio hasta el extremo del mismo, hallándose colocados estos surcos, que parecen representar las fositas del vértex, en un plano vertical, de modo que no se distinguen examinando el fastigio por encima.

33. CAPULICA PULLA sp. nov.

Colore griseo pallido. Capite thoraceque albidis fascia castanea pone oculos usque tympanum abdominalem extensa instructis. Elytra apicem abdominis haud attingentia venis plurimis fuscis, areis plus minusve infuscatis. Alæ abortivæ. Femora postica extus pallide rusfescentia, superne indistincte fusco trifasciata, geniculis fuscescentibus carinis internis necnon lobo geniculari basi nigris, latere interno pallido, inferne basim versus virescentia. Tibiæ posticæ villosæ basi necnon marginibus inferioribus fuscis, spinis tibiarum apice nigris. Lamina supraanalis trigona basi foveolata. Cerci breves lamina supraanalis haud superantes, fere conici. Lamina subgenitalis obtuse conica.

♂ Long. corp. 10,5; pron. 1,8; elytr. 4,5; fem. post. 6,5 mm.

Loc. Bellary Dt.: Kamalapuram, 6-IX-1912, Y. Ramachendra.

34. LEVA INDICA (Bolívar).

Gymnobothrus indicus Bolívar, Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 596, pl. IX, f. 31 (1902); Kirby, Fauna British India, p. 113 (1914).

Leva indica Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 64 (1914).

Loc. Coimbatore, 4-X-1913, Y. Ramachendra.

Sólo se conocía mi cita de Madras: Madura.

35. LEVA SOLUTA Bolívar.

Leva soluta Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 65 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Hadagalli, X-1911, Y. Ramachendra.

36. LEVA TRAPEZOIDALIS Bolívar.

Leva trapezoidalis Bolívar Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 65 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Hadagalli, X-1911, Y. Ramachendra; Salem, 28-VIII-1907, Y. Ramachendra.

37. LEVA CRUCIATA Bolívar.

Leva cruciata Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 66 (1914).

Loc. Salem, 28-VIII-1907, Y. Ramachendra; Coimbatore, 4-X-1913, Y. Ramachendra, 4-VI-1912, R. S. V., 30-VII-1912, P. S.

38. STAURODERUS BONNETI (Bolívar).

Stenobothrus epacromioides Krauss (haud Walker), Sitz. Ac. Wiss. Wien, Mat. Nat. Cl. LXXVI (1), p. 54 (1877).
Stenobothrus Bonneti Bolívar, Le Naturaliste, 7ème année, p. 116 (1885); An. Soc. Esp. H. N., XVI, p. 93 (1887).
Stenobothrus Nigrovittatus Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 180 (1914).
Var. *Stenobothrus epacromioides* v. *nigrovittatus* Krauss, Zool. Anz. XV, p. 166 (1892).

Loc. Bellary Dt.: Harivanam, VIII-1913, C. N.

El nombre *Stenobothrus epacromioides* Krauss (haud Walker) había sido ya empleado para una especie de *Stenobothrus* con anterioridad, por lo que debe sustituirse por el de *St. Bonneti* Bol., puesto que se refiere a la misma especie. El de *nigrovittatus*, empleado por Krauss para la variedad, es posterior al indicado, y tampoco puede dar nombre a la especie.

39. STAURODERUS EXEMPLARIS sp. nov.

A *Staur. bicolore* præcipue differt:

Stramineus, fusco maculatus. Antennæ breves, capite et pronoto unitis vix longiores. Foveolæ verticis suboblongæ vix duplo longiores quam latiores. Vertex inter oculos angustus, latitudine maxima costæ frontalis haud latior. Costa deplanata ad ocellum fossulata, apicem versus sensim ampliata. Lobis lateralibus pronoti margine inferiori medio obtuse angulato, dimidio antico oblicuo haud sinuato. Elytra angustiora.

Loc. Anamtapur Dt.: Gooty, 19-VIII-1913, T. V. Ramakrishna; S. Arcot Dt.: Konar-kuppam, 16-20-VI-1913, P. S.

Las principales diferencias entre esta especie y la europea citada están en la coloración, pues podría decirse que es un *Stauroderus* con la coloración de un *Dociostaurus* y en la forma de la cabeza, que es más pequeña y más estrecha, con los ojos tan aproximados uno a otro, que el vértex tiene igual anchura que la quilla frontal en su porción más ancha. Las fositas del vértex, que en la especie europea son longitudinales y rectas, y tan prolongadas que vienen a ser tres veces más largas que anchas, aquí son algo ovaladas, por tener el borde superior curvo, y su longitud total apenas llega al doble de su anchura. Su coloración clara constituye otra diferencia y recuerda por completo la del *Dociostaurus maroccanus*.

40. AULACOBOTHRUS TÆNIATUS Bolívar.

Aulacobothrus tæniatus Bolívar, Ann Soc. Ent. France, LXX, p. 600 (1902); Kirby, Fauna British India, p. 125 (1914); Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 55 (1914).

Loc. S. Mysore: Goorghalli Estate, 3.300 ft., 14-24-III-1913, P. S.

Kirby sólo la cita de S. India, tipo en la col. de St. Joseph's College, Trichinopoly.

41. JULEA INDICA Bolívar.

Julea indica Bolívar, Trab. Mus. Nac. Cienc. Nat. Madrid, Ser. Zool. núm. 20, p. 59 (1914).

Loc. S. Mysore: Goorghalli Estate, 3.300 ft., 14-24-III-1913, P. S.

Por hallarse la descripción de este género y de la especie en una publicación española, no creo necesario reproducirla aquí.

Gen. **Bababuddinia** nov.

Gen. *Juleæ* affinis sed pronoto valde rugoso, postice subtruncato rotundato, carinis lateralibus fere parallelis medio irregulariter explicatis, sulco typico valde pone medium sito, metazona quam prozona sesqui breviora. Elytris areis discoidali atque scapulari subæque latis; area discoidali vena intercalata gracillima vel venis duabus instructa.

Capite a latere viso vertice angulato, marginibus fastigii latiusculis impresso punctatis, fastigium superne antice subacutangulum, impresso marginatum, medio convexum, imperfecte carinatum. Antennæ breves compressiusculæ anguste subensiformes. Costa frontalis ad medium sulcatula. Pronotum dorso planum, tricarinatum, carinis lateralibus medio irregulariter explicatis, dorso antice subtruncato postice obtusissime angulato-rotundato; lobis perpendiculariter deflexis, altioribus quam longioribus inferne antrorsum fortiter sinuatis, postice rectangularibus margine postico subsinuato. Elytra apicem abdominis attingentia, apice obtusata; area ulnaria lata vena intercalata instructa; area discoidali vena intercalata necnon venis duabus irregularibus instructa. Area scapulari haud ampliata, area mediastina prope basin læviter dilatata. Femora compressiuscula, postica apicem abdominis parum superantia, lobis mesosternalibus valde transversis spatio subtransverso sejunctis, metasternalibus pone foveolas subcontiguis. Valvulæ ovipositoris breves subsinuatæ haud mucronatæ.

Este género conviene con *Julea* en la disposición de las márgenes del fastigio, que son anchas y punteadas, pero difiere en otros caracteres que ya quedan señalados.

42. BABABUDDINIA BIZONATA sp. nov.

Pallide ferruginea fusco varia; pronoto dorso fasciis duabus transversis nigris prope marginem anticum et pone sulcum typicum sitis, vel unicolor. Capite pronotoque valde rugosis. Elytris pedibusque maculis parvis fuscis variegatis ♀.

♀ Long. corp. 23; pron. 4; elytr. 15; fem. post. 12 mm.

Loc. Mysore: Bababuddin Hills, 4.700, 1-VI-1915, Ramakrishna coll.

43. AEOLOPUS AFFINIS (Bolívar).

Epacromia affinis Bolívar, Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 600, (1902).

Aeolopus Affinis Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 192 (1910); Fauna British India p. 122, f. 92 (1914.)

Loc. Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.; Coimbatore, 5-IV-1913, Fletcher; Bellary Dt.: Beeravalli, 10-VIII, 10-IX-1913, C. N.; Shervaroys 20-VIII-1907, Y. Ramachendra; Tinnevelly Dt.: Koilpatti, XI-1909, Y. Ramachendra.

La figura 92 de Kirby en la última de las publicaciones citadas se refiere indudablemente a esta especie y no a *E. tamulus* F.

Citada por mí de Madras: Madura. Kirby la indica de Bombay: Bandra.

44. AEOLOPUS TAMULUS (Fabricius).

Gryllus tamulus Fabricius, Ent. Syst. Suppl. p. 195 (1798).

Gryllus dorsalis Thunberg, Mém. Ac. Pétersb. V. p. 228, 229 (1815).

Gomphocerus tricoloripes Burmeister, Handb. Entom, II, p. 649 (1838).

Epacromia simulatrix Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 773 (1870).

Epacromia tamulus Brunner, Syst. Orth., p. 128 (1893).

Aeolopus Tamulus Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 192 (1910); Fauna British India p. 122 (f. 92 delenda) (1914).

Loc. Coimbatore, 4-X-1913, Y. Ramachendra, 20-VI-1913, S. N., 4-I-1912, R. S. V.; Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.; Godavari Dt.: Pasarlapudi, 30-XII-1912, 3-I-1913, T. V. Ramakrishna; Godavari Dt.: Thanelanka, 23-24-XII-1912, T. V. Ramakrishna; S. Arcot Dt.: Palur Farm, 11-VI-1913, P. S.; Chingelput, 17-VII-1907, T. V. Ramakrishna.

Yo la había citado de Maduré y Kodaikanal.

Véase la observación anterior respecto a la figura 92 de la publicación de Kirby (1914).

Subfamilia IV. **Oedipodinæ**

45. CHLOEBORA CRASSA (Walker).

Oedipoda crassa Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 741 (1870)
Chloebora crassa Saussure, Mém. Soc. Genève, XXXII, p. 33 (1888); Kirby, Fauna British India, p. 131 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Yemmiganur, 18-24-XII-1912, C. N.; Bellary Dt.: Hadagalli, 2-IX, 5-9-X-1912, Y. Ramachendra; Kurnool Dt.: Devana-Devanakonda, 26-30-IX-1912, T. V. Ramakrishna.

Citada sólo del N. de Bengala.

46. CHLOEBORA BRAMINA Saussure.

Chloebora bramina Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII (9) p. 132 (1888); Kirby, Fauna British India, p. 131 (1914).

Loc. Coimbatore, 11-II-1913, P. S.

Citada sólo de «India».

PTERNOSCIRTA BIMACULATA (Thunberg).

Kirby, l. c., p. 136.

Loc. Ceylon.

Kirby omite la cita de Kodaikanal que hice de esta especie en Orth. Saint-Joseph's College.

En la sinónima de esta especie se ha cometido el error inexplicable de haber incluído en ella el *Acrotylus Humbertianus* Sauss., Mém. Soc. Genève, XXVIII (9) pp. 187, 189, (1884), que, por lo demás, aparece otra vez entre los *Acrotylus* en la pág. 153 de la obra de Kirby; puede haber sido por confusión con *Pternoscirta Humbertiana* Sauss.

47. MORPHACRIS CITRINA Kirby.

Cosmorhyssa sulcata Saussure (nec Thunberg), Mém. Soc. Genève, XXVIII (9) p. 124 (1884); XXX (1) p. 37 (1888); Bolívar, Ann. Soc. Entom. France, p. 602 (1902)
Morphacris Citrina Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 219 (1910); Fauna British India p. 137 (1914).

Loc. Coimbatore, 13-VIII-1912, P. S. N.; Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.; Godavari Dt.: Thanelanka, 22-24 XII-1912, T. V. Ramakrishna; Palkonda Vizagapatam, 23-IV-1910, T. V. Ramakrishna.

Kirby la cita de la India, Ceilan, Siria y Abisinia.

48. Dittopternis ceylonica Saussure.

Dittopternis ceylonica Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII, (9), pp. 125, 126 (1884); XXX, (1), pp. 19, 44 (1888); Kirby, Fauna British India, p. 139 (1914).

Loc. Marudamalai, 14-V-1913, C. N.

Citada sólo de Ceylan.

49. Heteropternis respondens (Walker).

Acrydium respondens Walker, Ann. Mag. N. H. (3), IV, p. 223 (1859), sec. Kirby.

Heteropternis pyrrhoscelis Stål, Rec. Orth., I, p. 128 (1873); Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII (9), pp. 129, 130 (1884); XXX (1), p. 46 (1888).

Heteropternis Respondens Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 220 (1910); Fauna British India, Orth., p. 141 (1914).

Loc. Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 21-IV, 4-V-1913, Y. Ramachendra; Coonoor, 27-28-V-1913, C. N.; Salem, 28-VIII-1907, Y. Ramachendra; Coimbatore, 12-VIII-1912, P. S. N.

Kirby la cita de India, Ceilan, Birmania, China, Malaca, Java y Sumatra.

Oedaleus nigrofasciatus (De Geer).

Kirby, l. c. f. 143 (fig. 102 delenda).

Loc. S. Europa; W. Asia; India; Ceilan.

Evidentemente, la figura 102 no representa esta especie; pues en *Oe. nigrofasciatus* (De Geer), la faja transversa negra es menos curva, nada angulosa y no invade el borde anal del ala. Además, la forma angulosa y prolongada del borde posterior del pronoto, y hasta el tamaño, todo aboga para que veamos en esa figura un ♂ de *Gastrimargusmarmoratus* (Thunberg). El mismo Kirby dice, en la página 144, en la descripción del género *Gastrimargus*, al distinguirle del *Oedaleus*... «with the pronotum long, pointed behind...» carácter que se manifiesta perfectamente en la figura y que distingue a primera vista los dos géneros. Véase más adelante *Gastrimargus marmoratus* (Thunberg).

50. OEDALEUS SENEGALENSIS (Krauss).

Pachytylus senegalensis Krauss, Sitz. Akad. Wiss. Wien, Math. Nat. Cl. LXXVI (1), p. 56, pl. 1, f. 9 (1877).
Oedaleus senegalensis Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII (9), pp. 110, 117 (1884); XXX (1), pp. 40, 42 (1888); Kirby, Fauna British India, p. 143 (1914).

Loc. Tinnevelly Dt.: Koilpati, XI-1909, Y. Ramachendra.

Sobre «Cumbu».

Distribuído entre Asia y Africa.

51. OEDALEUS ABRUPTUS (Thunberg).

Gryllus abruptus Thunberg, Mém. Acad. Pétersb., V, p. 233 (1815); IX, pp. 396, 412, pl. XIV, f. 5 (1884).
Pachytylus (Oedaleus) abruptus Stål, Recens. Orth., I, p. 127 (1873).
Oedaleus abruptus Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII (9), pp. 110, 117 (1884); XXX (1), p. 40 (1888).

Loc. Mysore, 20-IV-1913, T. V. Ramakrishna; Coimbatore, 11-VI-1913, C. N., 29-V-1912, R. S. V.; Chepak, 25-VII-1907, T. S. A.; S. Arcot Dt.: Konankuppam, 16-20-VI-1913, P. S.; Manganallur, 15-III-1913, C. N.; Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.

Según Kirby en India, Ceilán y China.

52. GASTRIMARGUS MARMORATUS (Thunberg).

Gryllus marmoratus Thunberg, Mém. Acad. Pétersb., V, p. 232 (1815); IX, p. 410, Tab. 14, f. 3 (1824).
Pachytylus (Oedaleus) marmoratus Stål, Rec. Orth., I, p. 123 (1873).
Oedaleus marmoratus Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII (9), pp. 109, 112 (1884); XXX (1), p. 39 (1888).
Gastrimargus transversus Kirby, Fauna British India, p. 145 (1914).

Loc. Tinnevelly Dt.: Koilpati, XI-1909, Y. Ramachendra; Chepank, 16-VIII-1907, J. S. A.; Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 23-IV, 4-V-1913, Fletcher; Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.; Mysore: Goorghalli Estate, 3.300 ft., 14-24-III-1913, P. S.

Especie extraordinariamente variable, en la que algunos creen reconocer especies diversas; Kirby admite, como distinta, el *transversus* Th.; pero no justifica esta manera de ver señalando las diferencias que entre ellas existan, como pudiera haberlo hecho con ocasión de la publicación de la *Fauna British India*. Yo no encuentro caracteres fijos que permitan hacer esa separación.

Kirby lo cita de Kashmir: Baltistan; Nepal; United Provinces: Garhwal; Assam: Sylhet; Bengal; Madras: Shevaroy Hills; Java, Celebes. La especie se encuentra también en Africa.

53. PACHYTYLUS DANICUS (L.).

Gryllus Locusta Danicus L., Syst. Nat. ed. XII, I, p. 702 (1767).
Gryllus cinerascens Fabricius, Spec. Ins., I, p. 369 (1781).
Pachytylus cinerascens Fieber, Lotos III, p. 121 (1853); Syn. Eur. Orth., p. 21 (1854); Fischer, Orth. Eur., p. 392 (1853).
Pachytylus Danicus Aurivillius, Ent. Tidskr., XXI, pp. 246, 247 (1900); Bolívar, Ann. Sc. Nat. Porto, V, p. 18 (1898).
Locusta Danica Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 230 (1910); Fauna British India, p. 147, fig. 104 *delenda* (1914).

Loc. Bellary Dt.: Yemmiganur, 13-VIII, 2-IX-1913, A. G. R.

Kirby sostiene el nombre *Locusta* para las especies del género *Pachytylus*. Corríjase en Kirby el nombre *migratorioides* escrito allí siempre *migratoroides*. La fig. 104 no representa la *L. danica* L., sino la *L. migratorioides* R. et F.

54. TRILOPHIDIA TURPIS (Walker).

Epacromia turpis Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 775 (1870); sec. Kirby, Fauna of Brit. India, Orth., p. 149 (1914).
Trilophidia annulata var *ceylonica* Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII (9), p. 158 (1884).

Loc. Malabar: Taliparamba, 24-30-IX-1913, C. N.; Coonoor, 27-28-V-1913, C. N.; Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 21-IV, 4-V-1913, Y. Ramachendra; Palghat, 19-VI-1912, T. V. Ramakrishna; Gaujam: Rambha, 18-IV-1910, T. V. Ramakrishna; Coimbatore, 14-X-1911, T. V. Ramakrishna; 4-X-1913, Y. Ramachendra; 3-X-1913, Fletcher; 25-VII-1912, P. S.; 4-VI-1912, R. S. V.; 2-21-VI, 7-VII, 10-VII-1913, C. N.

Bajo la fé de Kirby aceptamos esta sinonimia, toda vez que el tipo, descrito como *Epacromia* por Walker, se conserva en el Museo de Londres. Kirby la cita de India y Ceilán.

55. ACROTYLUS HUMBERTIANUS Saussure.

Acrotylus Humbertianus Saussure, Mém. Soc. Genève, XXVIII (9), p. 169 (1884).
Oedipoda inficita varietas Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 742 (1870).

Loc. South India: Coimbatore, 4-X-1913, V. R. coll.; 31-I-1913, Fletcher coll.; Madura, 29-VII, 4-VIII-12, P. S. N. coll.; Coimbatore, 4-VI-1912, R. S. V. coll.; Tinnevelly Dt.: Koilpati, XI-1909, Y. Ramachendra.

Kirby en *Fauna British India* sólo cita esta especie de Ceilán omitiendo, sin razón, la indicación que yo hice de ella: Maduré, Kodaikanal, en Orth. St.-Joseph's College.

56. ACROTYLUS, sp.?

Loc. S. India: Coimbatore, 18-VI-1913, C. N. coll.

Es una especie parecida a *A. patruelis* por sus formas esbeltas y alargadas, pero con alas amarillas. Sólo he visto un ejemplar.

57. SPHINGONOTUS BENGALENSIS Saussure.

Sphingonotus bengalensis Saussure, Mém. Soc. Genève, XXX (1), pp. 77, 80 (1888).

Loc. Bellary Dt.: Daroji, 7-8-II-1913, C. N.; Bellary Dt.: Adoni, 9-IX-1912.

Citada por Kirby de «North Bengal».

Subfamilia V. **Pyrgomorphinae**

Esta subfamilia, cuya sistematización propuse en la *Monografía de los Pirgomorfinos* (1), he vuelto a revisarla, corrigiendo las deficiencias y dando a conocer nuevas especies, en *Notas sobre los Pirgomorfidos* (2), y, recientemente, en el *Genera Insectorum*, de Wytsmann en 1909.

El cuadro propuesto por Waterhouse en la obra de Kirby, podría conducir a resultados erróneos por basarse sobre caracteres de escasa importancia, como la forma de los élitros, y porque no se ha procurado, con el debido cuidado, la exclusión, en los miembros de la clave, de los géneros que pudieran ofrecer duda en cuanto a su colocación; así, dentro del grupo 1.°, caracterizado por tener los élitros ordinariamente de forma alargada, se incluyen géneros ápteros; en el grupo 14, con espina apical externa en las tibias posteriores, está el *Orthacris*, en el que unas especies la tienen y otras carecen de ella; por esto creo necesario proponer una nueva clave, libre de esos inconvenientes, para los géneros de la India y que es la siguiente:

1. Borde del prosternón extendido y levantado alrededor de la boca. CHROTOGONUS Serville.

---

(1) *Anales de la Sociedad Esp. de Hist. Nat.*, vol. 13, Madrid, 1884.
(2) *Boletín de la R. Soc. Esp. de Hist. Nat.*, 1904-1905.

1. 1. Borde prosternal no levantado alrededor de la boca, o sólo levantado ligeramente en el medio.

2. Fositas metasternales muy pequeñas y anchamente separadas entre sí, de modo que el espacio interlobular resulta transverso.

3. Bordes superiores de las últimas tibias obtusos. Élitros y alas redondeados en la punta.

4. Antenas situadas entre los estemas o entre los ojos, rara vez y muy ligeramente, por delante de los primeros; pero esto sólo ocurre en géneros que tienen los élitros cortos o nulos.

5. Placa esternal (meso-metasternal) desprovista por delante de una margen formada por un surco paralelo al borde y próximo al mismo. AULARCHES Stål.

5. 5. Placa esternal con la margen expresada anteriormente.

6. Antenas filiformes, fuertes, largas, formadas por artejos alargados. Pronoto cónico sin quillas por encima.

7. Vértex más corto que los ojos. Élitros y alas bien desarrollados. POECILOCERUS Serville.

7. 7. Vértex más largo que los ojos. Élitros cortos, que apenas alcanzan la base del abdomen. Alas rudimentarias. CHLORIZEINA Brunner.

6. 6. Antenas cortas, deprimidas en la base o ensiformes, formadas por artejos, en general, transversos o apenas alargados. Pronoto más o menos aplanado por encima y con el dorso limitado a cada lado por una quilla o cuando menos por una línea granulosa.

8. Quilla media de la frente surcada entre las antenas. Abdomen liso.

9. Elitros y alas bien desarrollados. PYRGOMORPHA Serville.

9. 9. Elitros rudimentarios y laterales. Alas nulas.

10. Elitros lanceolados. ZARYTES Bolívar.

10. 10. Elitros lineales. RAMAKRISHNAIA, gen. nov.

8. 8. Quilla media de la frente comprimida y desprovista de surco entre las antenas. Abdomen estriado a lo largo. ANARCHITA Bolívar.

4. 4. Antenas insertas entre los estemas y el ápice del fastigio del vértex. Élitros y alas bien desarrollados. TAGASTA Bolívar.

3. 3. Bordes dorsales de las tibias posteriores comprimidos y cortantes. Élitros y alas, cuando existen, puntiagudos. ATRACTOMORPHA Saussure.

2. 2. Fositas metasternales grandes, abiertas, contiguas o apenas separadas, a veces continuadas por surcos convergentes por detrás, el espacio interlobular muy estrecho.

11. Cuerpo muy prolongado, subcilíndrico o fusiforme. Insectos ápteros o imperfectamente alados.

12. Insectos ápteros y con el cuerpo cilindráceo. ORTHACRIS Bolívar.

12. 12. Insectos con élitros lineales, laterales, y con el cuerpo fusiforme. COLEMANIA Bolívar.

11. 11. Cuerpo muy comprimido. Organos del vuelo bien desarrollados, con élitros anchos y sinuados antes del ápice. TRIGONOPTERYX Charpentier.

58. CHROTOGONUS FUSCESCENS Kirby.

Chrotogonus fuscescens Kirby, Fauna British India, Orth., p. 163 (1914).

Loc. Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.

Kirby lo cita de Bombay: Bandra.

59. CHROTOGONUS ROBERTSI Kirby.

Chrotogonus robertsi Kirby, Fauna British India, Orth., p. 164, f. 111 (1914).

Loc. Bengala: Pusa, 5-VI-1911, T. B. F.; Godavari Dt.: Kotipalli, XII-1911, T. V. Ramakrishna; Hagari, 27-III-1907, Y. Ramachendra.

Sobre un campo de tabaco.

Kirby lo cita sólo de Beluchistan: Quetta.

60. CHROTOGONUS PALLIDUS (Blanchard).

Ommexycha pallidum Blanchard, Ann. Soc. Ent. France, V, p. 623, pl. XXII, f. 10 (1836).

Chrotogonus pallidus Bolívar, An. Soc. Españ. H. N., XIII, p. 43 (1884); Bol. Soc. Españ. H. N., IV, p. 98 (1904); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 162 (1914).

Loc. Godavari Dt.: Machavaram, 26-28-XII-1912, T. V. Ramakrishna; Bellary Dt.: Beeravalli, 24-30-VII-1913, Y. Ramachendra.

Sólo citado por Kirby, de Bombay.

61. CHROTOGONUS LIASPIS (Blanchard).

Ommexycha liaspis Blanchard, Ann. Soc. Ent. France, V, p. 620, pl. XXI, f. 8 (1836).

Chrotogonus liaspis Bolívar, An. Soc. Españ. H. N., XIII, p. 46 (1884); Bol. Soc. Españ. H. N., IV, p. 103 (1904); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 165 (1914).

Loc. Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.

Kirby sólo lo cita de Bombay.

62. CHROTOGONUS SAUSSUREI Bolívar.

Chrotogonus Saussurei Bolívar, An. Soc. Españ. H. N., XIII, pp. 39, 47, 494 (1884); Bol. Soc. Españ. H. N., IV, pp. 93, 104 (1904); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 166 (1914).

Chrotogonus oxypterus Bolívar (nec Blanchard), Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 605 (1902).

Loc. Coimbatore, 27-VII-1907, Y. V. P.; Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.; Bellary Dt.: Hadagalli, 11-VII-1913; Ramnad. Dt.: Nathampatti, 15-22-XI-1912, P. S.; Shevaroys Yergaud, 21-IV, 4-V-1913, 4.500 ft., Y. Ramachendra; Virudupatti, 24-31-III-1913, Ponniah; S. Arcot Dt.: Konankuppam, 15-20-VI-1913, P. S.

Citado sólo de Madras: Trichinopoly, Bellary.

63. CHROTOGONUS OXYPTERUS (Blanchard).

Ommexycha oxypterum Blanchard, Ann. Soc. Entom. France, V, p. 622, pl. XXII, f. 9 (1836).

Chrotogonus oxypterus Bolívar, An. Soc. Españ. H. N., XIII, p. 48 (1884): Bol. Soc. Españ. H. N., IV, p. 103 (1904); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 166 (1914).

Loc. Bengala: Pusa, 25-IX-1908, T. N. J.; Bengala: Cuttack, XI-1905, C. S. M.; Kurnool Dt.: Devanakonda, 13-14-XII-1912, C. N.

Sobre la hierba.

Kirby lo cita de Madrás: Malabar.

64. AULARCHES MILIARIS (L.).

Gryllus (Locusta) miliaris L., Syst. Nat., ed. X, 1, p. 432 (1758); Mus. Lud. Ulricae R., p. 142 (1764).

Acrydium verrucosum De Geer, Mém. Ins., III, p. 486. pl. XI, f. 6 (1773).

Gryllus (Locusta) punctatus Drury, Ill. Exot. Ent., II, pl. XLI, f. 4 (1773).

Gryllus scabiosae Fabricius, Ent. Syst., II, p. 51 (1793).

Aularches miliaris Stål, Rec. Orth., I, p. 18 (1873).

Loc. Shevaroys, 5.000 ft., 14-22-X-1912, Fletcher; South India: Nedungayam, 29-XI-1912, V. S. Aiyar.

La distinción de tres especies de *Aularches*, basada tan sólo en la coloración, nunca me ha parecido admisible. Son, a lo sumo, variaciones de coloración que hasta para considerarlas variedades o razas locales sería necesario mayor número de observaciones. Los ejemplares examinados corresponden a la forma *punctatus* Drury.

65. Pyrgomorpha conica (Olivier).

Acrydium conicum Olivier, Encycl. Méth. Ins., VI, p. 230 (1791).
Truxalis grylloides Latreille, Hist. Nat. Crust. Ins., XII, p. 148 (1804).
Truxalis (Pyrgomorpha) rosea Serville, Ins. Orth., p. 584 (1839).
Pyrgomorpha conica Jacobs et Bianchi, Prem. i Lozhn., Ross. Imp., pp. 198, 291, f. 30 (1902); Bolívar, Bol. Soc. Españ. H. N., IV, pp. 452, 454 (1904); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 175 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Yemmiganur, 12-14-VIII-1913, T. V. Ramakrishna; Ramnad Dt.: Nathampatti, 15-22-XI-1912, P. S.; Samalkota, 18-VI-1909, Y. Ramachendra.

Citada de S. Europa; N. y W. Africa y Asia. Es la especie común en España.

66. Zarytes squalina (Bolívar).

Pyrgomorpha squalina Bolívar, An. Soc. Esp. Hist. Nat., XIII, pp. 422, 423, 495 (1884); Ann. Soc. Entom. France, LXX, p. 606 (1902).
Zarytes squalina Bolívar, Bol. Soc. Esp. Hist. Nat., IV, p. 456 (1904); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 177 (1914).

Loc. S. Mysore: Goorghalli Estate, 3.300 ft., 14-24-III-1913, P. S.

Citada por Kirby de Madrás: Madura.

Gen. **Ramakrishnaia** nov.

Corpus fusiforme. Caput conicum pronoto æque longum vel sublongius. Fastigium longius quam latius, antrorsum angustatum atque rotundatum. Costa frontalis sulcata. Oculi ovati, inferne subtruncati, vix longiores quam latiores, parte infra oculari genarum breviores. Antennæ breves, basi subensiformes, articulis plurimis subquadratis raro elongatis, basalibus subtransversis compositæ, inter ocellos fere ante eos insertæ. Pronotum conicum postice subsinuatum, carina media vix elevata a sulco typico longe pone medium interrupta, carinis lateralibus subrectis sed irregularibus a sulcis interruptis necnon spatiis lævibus dorsalibus appositis; lobis lateralibus rectangularibus margine, inferiore recto, postice rectangulo. Elytra linearia, angusta, subspatuliformia abbreviata, tympanum tantum tegentia. Pedes anteriores ♂ incrassati. Femora postica compressiuscula, area inferoexterna quam externomedia haud multo angustiora; lobis genicularibus trigonalibus. Tibiæ posticæ carinis obtusatis, extus spina apicale explicata. Tarsi breves. Lamina sternalis antice sulco marginali instructo. Lobi mesosternales ♂ vix distantes intus rotundati, postice sinuati; metasternales pone foveolas conjuncti. Lobi mesosternales ♀ spatio subtransverso sejuncti, metasternales haud contigui.

Este género tiene algún parecido con *Colemania*, sobre todo por la forma de los élitros; pero pertenece al grupo de las *Pyrgomorpha*, donde debe colocarse junto a *Zarytes* Bol., del que, sin embargo, difiere notablemente. Su aspecto es más bien el de una *Parasphena* Bol.

67. RAMAKRISHNAIA NOTABILIS sp. nov.

Corpore ruguloso punctato. Colore ferrugineo ♂ vel pallido vel virescente ♀, lateribus fascia fusca rufescente ab oculos usque apicem abdominis perducta plerumque obsoleta, in ♂ capite pronotoque lateribus fascia flava subyacente; plerumque fascia altera dorsali a vertice usque apicem abdominis rufa. Abdomen superne utrimque carinis tribus parum distinctis. Lamina supraanalis subcompressa, acute trigona superne medio profunde sulcata. Cerci ♂ breves, compressi, introrsum subcurvati, acuminati. Lamina subgenitalis ♂ obtusa compressa.

♂ Long. corp. 18-21 ; pron. 3,5 ; elytr. 3. ; fem post. 9 mm.
♀ » » 25 ; » 4,5 ; » 3,5 ; » » 10 »

Loc. Mysore: Bababuddin Hills, 4.700 ft., 1-VI-1915, T. V. Ramakrishna.

Uno de los ejemplares presenta una coloración diferente. Es verde pardo, con una faja dorsal media pardo rojiza que recorre todo el cuerpo; las fajas laterales son en él muy anchas y de igual color que la dorsal, faltando la faja lateral amarilla, que en los restantes ejemplares se extiende por la cabeza y tórax por debajo de la faja parda lateral.

68. ATRACTOMORPHA CRENULATA (Fabricius).

Truxalis crenulata Fabricius, Ent. Syst., II, p. 28 (1793).
Atractomorpha crenulata Saussure, Ann. Soc. Entom. France (4), I, p. 475 (1861).

Loc. South India: Coimbatore, 9-IV-1913, C. N., 27-I-1913, 12-II-1913, P. S.; South India: Madura, 24-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.; Anantapur Dt.: Gooty, 19-VII-1913, T. V. Ramakrishna.
Sobre plantas de tabaco.

Citada de Bengala y Madrás.

69. ATRACTOMORPHA OBSCURA nov. sp.

Atract. crenulatæ forma et statura haud disimilis sed capite magis elongato, fastigio verticis oculo parum sed distincte longiore, alæque totæ infumatæ differt.

♂ Long. corp. 19 ; pron. 3,8; elytr. 17 ; fem. post, 10,5 mm.
♀ » » 28 ; » 6,5 » 23 ; » » 12,5 »

Loc. Shevaroys-Yergaud, 25-IV, 4-V-1913, 4.500 ft., Y. Ramachendra; Godavari Dt.: Annampallee, 19-22-VII-1912, T. V. Ramakrishna.

Se parece a *A. infumata* Bol., de Sumatra, pero el cuerpo es más ancho; el espacio interlobular mesosternal más fuertemente transverso y los élitros algo más largos proporcionalmente y sobre todo más aguzados en el ápice.

Las dimensiones de esta última especie son:

♂ Long. corp. 17 ; pron. 3,5 ; elytr. 17,5 ; fem. post. 9 mm.
♀ » » 28 ; » 6,3 ; » 26 ; » » 13 »

70. ORTHACRIS SIMULANS Bolívar.

Orthacris simulans Bolívar, Ann. Soc. Entom. France, LXX, pp. 608, 611 (1902); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 188 (1914).

Loc. Tinnevelly Dt.: Koilpati, XI-1909, Y. Ramachendra; Melrosopuram, 18-X-1807, J. S. A.

Citada sólo por mí, de Madrás: Madura.

71. ORTHACRIS ELEGANS Bolívar.

Orthacris elegans Bolívar, Ann. Soc. Entom. France, LXX, pp. 608, 609 (1902); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 186 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Hampiruins, 23-VII-1912, Y. Ramachendra.

Citado sólo por mí, de Madrás: Madura. Tipos en las col. Pantel y Bolívar.

72. ORTHACRIS ACUTICEPS Bolívar.

Orthacris acuticeps Bolívar, Ann. Soc. Entom. France, LXX, pp. 608, 610, (1902); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 187 (1914).

Variat: Corpore superne utrinque linea albida pone oculos oriunda fere usque ad apicem producta.

Loc. Coimbatore, 4-VIII-1912, 3-III-1909, T. V. Ramakrishna, 26-V-1913, 4-X-1913, Y. Ramachendra, 18-V-1913, Fletcher, 12-VIII-1912, P. S. N.; Bellary Dt.: Kamalapuram, 5-IX-1912, Fletcher; S. Arcot Dt.: Palur Farm, 13-VI-1913, P. S.

Sobre planta de batata.

Sólo citado por mí, de Madras: Kodaikanal, Madura; tipos en las col. Pantel y Bolívar.

73. Orthacris fusiformis sp. nov.

Olivaceus. Caput breve, superne seriato punctatum, medio carinatum. Fastigium latum, transversum, antice obtuse angulatum. Frons læve, punctata, carinis flavo albidis. Antennæ marginem posticum pronoti superantes, articulis elongatis fuscis apice pallidioribus. Pronotum retrorsum ampliatum, postice obtuse excisum, punctatum; lobis lateralibus fascia lata fusciore callis albidis includentia; margine inferiore medio sinuato, littura extus albida intus sanguinea, callosa. Pedes in ♂ incrassati. Femora præcipue in ♂ rufa, in ♀ viridi rufa vel olivaceo fusca. Tibiæ griseo villosæ, virescentes, apice breviter infumatæ, spina apicali externa perfecte explicata. Segmentum primum abdominale tympano instructum. Lobi mesosternales spatio valde angustiore, ♂ elongato, ♀ vix longiore quam latiore sejuncti; metasternales ♂ contigui, ♀ distantes. Segmentum anale ♂ medio profunde excisum lobis oblongis formante. Lamina subgenitalis postice compressa, carinata, a latere visa subsinuata. Valvulæ ovipositoris superne obtuse denticulatæ.

♂ Long. corp. 19; pron. 3,5; fem. post. 10 mm.
♀ » » 27; » 4 » » 12 »

Especie afin a O. *ruficorne*, y, como ella, provista de espina apical externa en las tibias posteriores y de tímpano abdominal, pero de cuerpo más ancho en el medio, sobre todo en la ♀, con el fastigio del vértex también más ancho, las antenas bastante más largas, con artejos más delgados y prolongados y de coloración más oscura. Los lados del cuerpo están recorridos por una faja de un verde muy oscuro, y el borde inferior de los lóbulos laterales del pronoto más fuertemente sinuado. Los fémures son rojizos y las tibias posteriores verdes, con una pequeña mancha apical parda.

Loc. Nilgiris: Hallakari, 500 ft., 9-IX-1908, Y. Ramachendra; Nilgiris: Coonoor, 5.800 ft., 29-VIII-1908, Y. Ramachendra, 27-28-V-1913, 7-11-V-1912, K. S. P.

Sobre *Camphora*.

74. Orthacris Ramakrishnai sp. nov.

Olivaceus. Caput conicum, lateribus superne punctatum pone oculos linea fusca ornatum. Fastigium verticis æquilaterum, trigonum, antice obtusatum. Frons unicolor antice punctata. Pronotum punctatum, postice truncatum; lobis lateralibus nigris, linea callosa sanguinea, necnon margine inferiore fere recto angustissime pallide limbato. Pedes olivacei. Femora postica intus rufescentia, carina inferiore areæ externomediæ pallida. Tibiæ olivaceæ, apice breviter infumatæ atque griseo villosæ. Segmentum abdominale primum tympano instructa. Spatio interlobulare mesosternale ♀ elongatum sesqui longiore quam latiore, lobis valde augustiore. Valvulæ ovipositoris obsoletæ denticulatæ.

♀ Long. corp. 25; antenn. 7,5; pron. 4; fem. post. 11 mm.

Pertenece esta especie al grupo del *O. ruficornis*, pero tiene el fastigio del vértex más estrecho, las antenas más largas, el borde inferior de los lóbulos laterales recto o indistintamente sinuado, y los fémures posteriores con la quilla inferior del área externomedia pálida.

Loc. Shevaroys, 4.000 ft., 17-18-VIII-1907, Y. Ramachendra, 5.000 ft., 14-22-X-1912, Fletcher.

75. COLEMANIA SPHENARIOIDES Bolívar.

Colemania sphenarioides Bolívar, Bol. Soc. Españ. H. N., X, p. 320 (1910); Maxwell Lefroy, Journ. Bombay Soc., XIX p. 1007 (1910); Coleman, Journ. Bombay Soc., XX, p. 879 (1911); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 189 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Beeravalli, 12-XI-1912, T. B. F.; Hadagalli, 5-9-XII-1912, Y. Ramachendra; Kurnool Dt.: Pattikonda 29-30-IX-1912, T. V. Ramakrishna; Kurnool, 1-X-1910, T. V. Ramakrishna.

Ataca a *Setaria* y *Andropogon*.

Citado sólo de Madras: Mysore, Bellary. Se la ha citado de varias partes de la India como destructora del *Andropogon sorghum*.

Subfamilia VII. **Pamphaginæ**

Véase lo que se ha dicho anteriormente acerca de la no existencia de Panfaginos en esta fauna.

Subfamilia VIII. **Catantopinæ**

76. EUTHYMIA KIRBYI Finot.

Euthymia Kirbyi Finot, Ann. Soc. Ent. France, LXXI, pp. 622, 629, 630, figs. 6,7 (1903); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 196 (1914).

Loc. Coorg. Sidapur Rockhill, 3.500 ft., 23-26-IV-1913, T. V. Ramakrishna.

Sólo citada de Madras: Kodaikanal.

El ♂ de esta especie no era conocido.

♂ Long. corp. 23; pron. 4; elytr. 17; fem. post. 12 mm.

La placa supraanal es grande, triangular, con dos sinuosidades en los bordes laterales y el ápice un poco prolongado en el medio, a modo de lengüeta; y con dos quillas separadas por un surco ancho y superficial, limitado posteriormente por una línea transversa impresa; la placa es cóncava y como acanalada a los lados de la elevación que lleva las quillas referidas. Cercos delgados, largos, arqueados en toda su longitud y adelgazados desde la base, donde son anchos. La placa infraanal tiene también una escotadura a cada lado del ápice, cerca del mismo.

77. Oxya velox (Fabr.).

Gryllus velox Fabricius, Mant. Ins., I, p. 239 (1787).
Gryllus chinensis Thunberg, Mém. Acad. Pétersb., V, p. 253 (1815).
Heteracris apta Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 666 (1870).
Oxya velox Burmeister, Handb. Ent., II, pp. 602, 634 (1838).

El carácter señalado por Brunner para la distinción de esta especie, y que consiste en dos pequeñas quillas longitudinales en el último segmento ventral de la ♀ es más seguro y constante que el pequeño diente que forma en el ápice la quilla dorsal de la rodilla.

Loc. Citada por mí de Madras; Tinnevelly Dt.: Kezanathum, 1-11-X-1913, Ponniah; Tinnevelly Dt.: Palamcottah, 27-30-IX-1913, Ponniah; Tinnevelly Dt.: Koilpati, 16-VIII-1907, Y. Ramachendra; S. Arcot Dt.: Palur Farm, 11-VI-1913, P. S.; South India: Coimbatore, 3-XII-1912, Fletcher.

Hieroglyphus bilineatus sp. nov.

Hieroglyphus bilineatus, Kirby, l. c. pp. 202,203. Saussure, M. S.

Loc. Bengala. Tipos en el British Museum.

Esta especie es el *Hieroceryx bilineatus,* que he descrito en 1912; sin duda, esta publicación no llegó a conocimiento de Kirby en su debido tiempo. (Estudios entomológicos. Trab. del Museo de Ciencias Naturales de Madrid, núm. 6, pág. 60.)

78. Hieroglyphus Banian (Fabricius).

Gryllus Banian Fabricius, Ent. Syst. Suppl., p. 194 (1798).
Acridium furcifer Serville, Ins. Orth., p. 677, pl. XIV, f. 12 (1839).
Hieroglyphus Banian Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 396 (1910); Bolivar, Trab. Mus. N. C. N. Madrid, Ser. Zool. n. 6, Ortóp. p. 53 (1912); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 204 (1914).

Loc. South Canara Dt.: Karkala, 25-27-IX-1913, T. V. Ramakrishna;

Coimbatore, 8-XII-1910, T. V. Ramakrishna; Godavari Dt.: Samalkot, 20-IX-1907, T. V. Ramakrishna; Godavari Dt.: Pithapur, 23-IX-1907, T. V. Ramakrishna.

Sobre plantas de arroz y maíz.

Citado de Bombay: Kaphot; Central Provinces: Bilaspur; Birmania Bhamó y por mi de Maduré.

79. Hieroglyphus sp.

Un ejemplar de los que forman parte de esta colección difiere notablemente de los restantes de la especie *Banian*, tanto por la coloración verde uniforme, sin vestigio apenas de las fajas negras que ocupan en dicha especie los surcos del pronoto ni de los anillos de la base de las tibias posteriores, ni por fin de las manchas de la base del primer artejo de los tarsos posteriores de las que sólo queda un punto a cada lado, como por el tamaño, mayor que el de los más grandes ejemplares del *Banian*, como se indicará luego, y por la forma del fastigio del vértex, que es fuertemente transverso. Sin embargo, no habiendo visto más que un solo ejemplar, no me decido a considerarle como de especie bien caracterizada, a pesar de las diferencias señaladas, siendo de esperar de la pericia de los colectores del «Agricultural College» que lleguen a recoger mayor número de ejemplares de ambos sexos para aclarar esta duda. Las dimensiones son: ♀ Long. corp., 51; pròn., 9,5; elytr., 39; fem. post., 29 mm.

Loc. Tinnevelly Dt.: Palamcottah, 27-30-IX-1913, Ponniah.

80. Hieroglyphus nigrorepletus Bolívar.

Hieroglyphus nigrorepletus Bolívar, Trab. Mus. N. C. N. Madrid, Ser. Zool. n. 6, p. 56 (1912), forma *brachyptera* Bol., ibd. p. 58.
Hieroglyphus Bettoni Kirby, Fauna British India, Orth., p. 203, figs. 118, 119, f. *brach.* (1914).

Describí esta especie, y su variedad o forma *brachyptera,* en 1912, en el trabajo citado, cuyo título era «El género *Hieroglyphus* Krauss y otros próximos», el que sin duda no ha llegado a conocimiento del Sr. Kirby, que por esta razón ha vuelto a describir la especie con el nombre de *H. Bettoni*, dos años más tarde.

Loc. Bellary Dt.: Beeravalli, 12-IX-1912, Y. Ramachendra; Bellary Dt.: Kotekal, 3-IX-1912, Y. Ramachendra; Bellary Dt.: Hadagalli, 2-IX-1912, X-1911, Y. Ramachendra.

Ataca a *Setaria* y *Andropogon*.

Con el nombre de *H. Bettoni*, lo cita Kirby de Assam: Cachar y Bombay, Moghal Sarai.

CASTETSIA DISPAR Bolívar.

Kirby, l. c., p. 207 (1914).

Loc. Madras: Madura (Tipos en las col. Pantel y Bolívar).

Por error tipográfico aparece siempre escrito en «Fauna Brit. India» *Castetria* en vez de *Castetsia* en todas partes, págs. 192 (nota), 206 y 207.

81. SPATHOSTERNUM PRASINIFERUM (Walker).

Heteracris prasinifera Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., V. Suppl., p. 65 (1871), apud Kirby.
?*Caloptenus caliginosus* Walker, l. c., p. 69 (1871).
Stenobothrus strigulatus Walker, l. c., p. 82 (1871).
Oxya Prasinifera Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 394 (1910).
Spathosternum prasiniferum Kirby, Fauna British India, Orth., p. 208, f. 121 (1914).

Loc. South Canara Dt.: Someshwar, 2.000 ft, 24-IX-1913, T. V. Ramakrishna; S. Arcot Dt.: Konankuppam, 16-20-VI-1913, P. S.; Shevaroys, 5.000 ft., 14-22-X-12, Fletcher; S. Mysore: Goorghalli Estate 3.300 ft., 14-24-III-1913, P. S.; Coimbatore, 25-V-1912, 7-I-1913, Y. Ramachendra, 26-II-1912, R. S. V.; Saidapet, 20-IX-1907, J. S. A.

Kirby lo cita de Bombay, Bengala: Pusa. El *S. venulosum* Stål, lo he indicado yo de Madura y Kodaikanal.

Por los caracteres que señala Kirby en «Fauna British India», los ejemplares que he visto pertenecerían a esta especie; pero, ¿cómo admitir que sean un mismo insecto, las especies descritas por Walker como *Heteracris*, *Caloptenus* y *Stenobothrus*, y que por fin no serían nada de esto sino *Spathosternum*? ¿Qué seguridad pueden ofrecer las determinaciones de Walker? El *S. venulosum* Stål, parece debe venir también a la sinónimia de esta especie.

82. TRISTRIA LACERTA Stål.

Tristria lacerta Stål, Rec. Orth., I, p. 80 (1873); Karny, Sitz. Akad. Wiss. Wien, Math. nat. Kl. CXVI, p. 295 (1907).

Loc. South Canara Dt.: Nagody, 2.500 ft., 19-IX-1913, T. V. Ramakrishna.

En «Fauna British India» no se cita esta especie, lo que no deja de ser extraño, puesto que yo la enumeré entre las especies de Saint-Joseph's College, en 1902, en Ann. Soc. Entom. de France, p. 615.

WACATA CEYLONICA Kirby.

l. c., p. 220, fig. 123 (1914).

Loc. Ceilan: Maha Illupulana, 31-VIII-1910, Trincomali, IX-1911. Tipo en el British Museum.

El género *Wacata* es para mí muy dudoso, pues, aunque nada dice su autor respecto a la disposición del vértex, parece representar la figura un Pirgomorfino.

Gen. **Pileolum** nov.

Statura parva. Corpus fusiforme. Caput pronoto brevius. Vertex inter oculos costa frontali latior, triangularis, deplanatus subhorizontalis cum fronte acute angulatus, costa marginibus parallelis instructa usque apicem extensa, sulcata. Oculi oblongiusculi, parum exserti, parte infraoculari genarum longiores. Antennæ breves fusiformes subcompressiusculæ, in ♀ dimidium pronoti extensæ. Pronotum antice truncatum, retrorsum sensim ampliatum, postice obtuse angulato sinuatum, medio leviter carinatum, sulcis continuis carina interrumpentibus, sulco typico longe pone medium sito propter hoc metazona brevissima quarta parte pronoti formante: lobi laterales angulo acuto inserti sed carinis lateralibus nullis, in prozona angulis nitidis carinis imitantibus; lobis trapezoidalibus, subtus dimidio antico valde sinuatis, angulo postico subrotundato. Elytra lateralia, abbreviata, tympanum tantum tegentia. Pedes graciles. Femora postica compressiuscula, lobis genicularibus triangularibus apice obtusatis. Tibiæ posticæ spinis 7-8 superne armatæ sed spina apicali externa nulla. Prosternum tuberculo trigono, basi ab antico compresso. Lobi mesosternales ♀ transversi intus rotundati, spatio subquadrato sejuncti; metasternales ♀ pone foveolas subcontigui.

Viene a colocarse este género junto a *Trigoniza* Brunner, y al lado de *Aspidophyma,* llevado indebidamente a los Pirgomorfinos en un principio, y que tiene aquí su colocación natural. Kirby, lo mismo en su Syn. Catalogue of Orth., III, que en su «Fauna British India, Orth.», p. 190, lleva el género *Aspidophyma* a los Panfaginos, sin que explique las razones de esta asimilación, evidentemente equivocada, y que implicaría la existencia de Panfaginos en la India, donde este grupo no se hallare presentado.

Las relaciones del nuevo género con sus afines puede resultar de este cuadro:

a) Quillas laterales del pronoto, fuertes, divergentes, a veces borrosas en la metazona.

b) Angulo posterior de los lóbulos laterales del pronoto recto ó subobtuso, y el borde posterior de estos mismos lóbulos, entero. Gen. *Trigoniza* Brunner.

bb) Angulo posterior de los lóbulos laterales del pronoto, anchamente redondeado, y el borde posterior de los mismos sinuado, por ser saliente el ángulo humeral del pronoto. Gen. *Aspidophyma* Bolívar.

aa) Quillas laterales del pronoto ligeramente indicadas en la prozona, desapareciendo después en la metazona. Gen. *Pileolum* Bolívar.

83. PILEOLUM KIRBYI sp. nov.

Pallide testaceum lateribus corporis necnon pedibus virescentibus. Caput superne rufulum pone oculos nigro signatum. Pronotum dorso testaceum, impresso punctatum, prozona utrinque ad carinas læviuscula, lobis lateralibus viridibus superne ad dorsum nigricantibus. Elytra viridia. Pedes virescentes. Tibiæ posticæ dimidio apicali sanguineæ, geniculis necnon apice tibiarum nigris; spinis basi viridibus apice tantum nigris. Tarsi rufi. Abdomen fascia nigra laterali ornatum ♀.

♀ Long. corp. 16; pron. 3,5; elytr. 1,8; fem. post. 9,5 mm.

Loc. Nilgiris: Ootacamund, 11-17-V-1912, K. S. P.

84. ORTHACANTHACRIS FLAVESCENS (Fabricius)

Gryllus flavescens Fabricius, Ent. Syst., II, p. 52 (1793).

Gryllus (Locusta) crucifer Stoll, Spectres, Saut., p. 30 pl. 146, f. 51 (1813).

Acridium semifasciatum Serville, Ins. Orth., p. 655 (1839).

» *pardalinum* Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., III, p. 587 (1870).

Orthacanthacris Flavescens Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 445 (1910); Fauna British India, Orth., p. 225, f. 127 (1914) (1).

Las figuras de «Fauna Bristish India», referentes a esta y otras especies, están cambiadas, lo que puede inducir a error a los que se sirvan de esta obra, por lo que importa rectificarlas; así, la 125 no es el *Orth. flavescens* F., sino el *Cyrtacanthacris succinctus* L.; la 126 es el *C. rosea* De Geer, y la 127 es el *Orth. flavescens* F. Como se ve, estos errores son debidos simplemente a una equivocación en la distribución de los tacos de las figuras que no ha sido rectificada entre las erratas, como debió serlo.

---

(1) Kirby la cita de Madras y Ceilán.

Loc. Marudaimalai, 1.600 ft., 17-V-1913, P. S.; South India: Coimbatore, 7-VI-1913, P. S., 9-VI-1913, Fletcher.

Gen. **Genimen** nov.

Statura parva. Corpus fusiforme. Caput pronoto brevius, vertice inter oculos latitudine antennarum haud latiore. Fastigium declive, pyriforme antice latiore, ante oculos productum, in costa frontalis sensim arcuato continuatum. Costa frontalis usque ocellum perfecte explicata, ante ocellum fronte tantum sulcata; carinis lateralibus frontis subsinuatis. Oculi modice exserti, parte infraoculari genarum longiores. Antennæ filiformes, inter oculos insertæ. Pronotum teres, retrorsum vix ampliatum, superne medio indistincte carinatum, margine antico subarcuatum, postice obtusissime sinuatum; metazona brevissima; lobis lateralibus superne antice posticeque rotundatis, medio obtuse angulatis. Elytra alæque nullæ. Pedes antice longiusculi. Femora postica lævia, basi parum ampliata, lobis genicularibus apice obtusis. Tibiæ posticæ spinis intus præter spinam apicalem 7, extus 7, armatæ, spina apicali externa nulla. Tarsorum posticorum articulo secundo parvo, articulo tertio articulo primo sesqui longiore. Prostuberculo apice conico. Lobi mesosternales transversi spatio latiore sejuncternum ti, metasternales pone foveolas breviter contigui. Abdomen segmento primo lateribus tantum impressum sed tympano nullo.

Este género es afin de *Gerenia*, pero se distingue, sobre todo, por la falta de élitros. Stål ha fijado en estos órganos la característica de este pequeño grupo, que consiste en tener una mancha negra en el élitro, y como aquí falta el órgano, el carácter deja de existir necesariamente; pero, no obstante esta falta, se reconoce la semejanza del insecto con el género tipo del grupo.

85. Genimen prasinum sp. nov.

Colore viride cœruleo. Capite antice dilutiore, postice obscuriore, pone oculos fascia nigra usque marginem posticum pronoti extensa ornato; oculis castaneis; antennis fusco nigris, apice breviter pallidis; mandibulis flavescentibus, lobis lateralibus inferne dilutioribus. Pedes rufescentes, griseo villosi, tibiis anticis virescentibus; femoribus posticis medio fasciis duabus nigris transversis, apice superne rufescentibus, arcu geniculari utrinque fusco; tibiis posticis cœruleis, pilosis, condylo nigro, tarsis ferrugineis. Abdomine superne obscuriore linea pallida parum explicata, inferne pallido. Segmento anale ♂ sinuato. Cerci conici. Lamina subgenitali ♂ conica obtusa; ♀ magna, triangulari, compressa; cerci minuti.

♂ Long. corp. 10,5; pron. 1,8; fem. post. 7,2 mm.

♀ Long. corp. 15; pron. 2,2; fem. post. 8,5 mm.

Loc. Mysore: Bababuddin Hills, 4.700 ft., 1-VI-1915, T. V. Ramakrishna; South Canara Dt.: Kollur Ghat., 3.000 ft., 18-21-IX-1913, T. V. Ramakrishna.

Gen. **Etesius** nov.

Corpus crassum sub compressum. Vertex latus transversus. Fastigium declive cum fronte in arcu continuum, inter oculos latitudine oculorum subæque latum. Costa frontalis clypeum versus sensim attenuata, ante id evanescens ad ocellum læviter impressa, carinis lateralibus divergentibus inter oculos a margine oculorum parallelis. Oculi duplo longiores quam latiores, superne subacuminati, inferne rotundati, parte infraoculari genarum subduplo longiores. Antennæ filiformes, in ♀ angulos humerales pronoti haud superantes. Pronotum obtuse tectiforme, carina media arcuata, carinis lateralibus nullis, margine antico obtuse angulato producto, postico obtusangulo sulcis transversis explicatis sed haud profundis, sulco typico versus medium sito; lobis lateralibus medio impressis, subtus margine inferiore antice oblique ascendente, angulo postico rotundato. Elytra perfecte explicata, latiuscula, apice oblique truncata. Alæ elytra vix breviores, parte anteriore apice oblique truncata. Tuberculum prosternale conicum, rectum. Lobi mesosternales ♀ fortiter transversi, intus rotundati, spatio angustiore sejuncti, metasternales pone foveolas distantes. Femora postica basi latiuscula, canthis superioribus serrulatis; lobi geniculares rotundati. Tibiæ posticæ spinis intus 10, extus 8 armatæ, spina apicali externa nulla. Tarsi postici articulo secundo parvo. Ovipositoris valvulæ breves, sinuatæ; inferiores dentatæ.

A primera vista pudiera tomarse este género por un *Acridoderes* por su aspecto y forma general; pero los lóbulos mesosternales distintamente transversos, redondeados interiormente, hacen rectificar esta primera apreciación; pues sabido es que en el género citado son casi cuadrados, con el ángulo postero-interno agudo; pero, aparte de esto, sus afinidades con el grupo de las *Coptacra* son evidentes, por lo que le colocamos en él y al lado del género citado. Es de advertir que los élitros ofrecen una pequeña mancha negra en el área ulnaria, carácter que no hemos mencionado en la descripción porque pudiera ser de escasa importancia y propio de la especie; pero hasta conocer otras formas afines no podrá decidirse acerca de su valor taxonómico, pues hay grupos en que detalles semejantes llegan a ser, por su constancia en todos los géneros, de un gran valor para la clasificación.

86. Etesius Waterhousei sp. nov.

Læte viridis. Caput antice ruguloso punctatum. Costa frontalis punctata. Oculi fusco-testacei. Pronotum marginibus antico et postico fusco maculatis, dorso ruguloso-punctato, pilis erectis griseis marginalibus facile conspicuis. Elytra corpore concoloria, campo axilari maculis fuscis fasciis transversis irregularibus formantibus. Alæ hyalinæ, campo axilari basin versus subcœruleo. Pedes quatuor antici griseo pilosi, femoribus apice obscurioribus, tibiis fusco maculatis. Femora postica superne maculis fuscis subtransversis in area externomedia plus minusve, præcipue macula tertia pone medium sita, productis: canthis denticulatis; denticulis canthis areæ externæ apice nigris; area interna necnon tibiis posticis virescentibus, spinis tibiarum apice nigro. Abdomen dorso præcipue basin versus obscurum.

♀ Long. corp. 38; pron. 10,5; elytr. 35; fem. post. 23 mm.

Loc. Coimbatore, 16-IV-1913, C. N.

Gen. **Pirithous** nov.

A gen. *Cyphocerastes* et *Eucoptacra* differt: fastigio verticis magis declivis; pronoto dorso subcylindrico, subdeplanato, carina media fere nulla, sulcis tribus percurrentibus; elytris angustioribus; tibiis posticis spinis extus tantum septem intus novem armatis.

El dorso del pronoto es algo deprimido, ensanchando gradualmente hacia atrás, y por delante es obtusamente anguloso; la quilla media es poco perceptible, sobre todo en la prozona; los élitros pasan algo de los fémures posteriores y son estrechos, y las tibias posteriores tienen menor número de espinas que en *Cyphocerastes* y *Eucoptacra*, en la que llegan a nueve en el borde interno y diez en el interno. Además, los lóbulos mesosternales son transversos y están separados entre sí por un espacio ancho, y los metasternales casi se tocan o son contiguos por detrás de las fositas correspondientes, lo que también constituye diferencia con los géneros mencionados.

87. Pirithous Ramachendrai sp. nov.

Pallide rufescens utrinque fascia fusca ab oculos usque marginem posticum loborum lateralium pronoti extensa. Oculi castanei. Elytra griseo testacea, apicem femorum posticorum superantia. Alæ succineæ. Femora postica fusco biannulata necnon basi areæ externomediæ maculis fuscis; canthis nigro punctatis, geniculis obscuratis. Tibiæ posticæ griseæ fusco variegatæ, atque griseo villosæ. Pectus fusco varium. Abdomen fusco-testaceo variegatum.

♀ Long. corp. 20; pron. 4,8; elytr. 16,5; fem. post. 11,5 mm.

Sólo he podido examinar un ejemplar hembra y no completo por carecer de antenas, faltándole, además, uno de los élitros.

Loc. Palmi, 1-X-1907, Y. Ramachendra.

88. Coptacra ensifera Bolívar.

Coptacra ensifera Bolívar, Ann. Soc. Entom. France, LXX, p. 621 (1902); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 239 (1914).

Loc. Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 21-IV, 4-V-1913, T. V. Ramakrishna; Shevaroys, 5.000 ft., 14-22-X-1912, Fletcher.

Citada por mí, de Madras: Madura.

89. Eucoptacra præmorsa (Stål).

Acridium (Catantops) præmorsum Stål, Eugen. resa Orth., p. 330 (1860).

Acridium saturatum Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 628 (1870) apud Kirby.

Caloptenus strigifer Walker, l. c., V, Suppl., p. 66 (1871).

Caloptenus sinensis Walker, l. c., IV, p. 704 (1870).

Caloptenus obliterans Walker, l. c., p. 712 (1870).

?*Coptacra cyanoptera* Brunner, Ann. Mus. Civ. Genova, XXXIII, p. 159 (1873).

Eucoptacra præmorsa Bolívar, Ann. Soc. Entom. France, LXX, p. 263 (1902); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 240 (1914).

Loc. Salem, 28-VIII-1907, Y. Ramachendra.

Citada por mí anteriormente de Madura. Kirby la indica, además, de Bombay: Bandra; Birmania; Bhamo; Tenasserim: Maliwou, y China.

Traulia cachara Kirby.

l. c., p. 245, fig. 132 (1914)

Loc. Assam: Cachar: Tipo en el British Museum.

Mi hijo ha demostrado ya que esta especie debe pasar al género *Caryanda*.

90. Catantops Henryi sp. nov.

Obscure testaceus. Fastigium verticis parvum, vix longius quam latius. Frons punctato impressa. Costa frontalis inter antennas sublatiore, planiuscula. Pronoto dorso angusto minute punctato, postice obtuse angulato, sulcis parum impressis, sulco typico vix ante medium exarato, linea media tenuiter elevata; lobis lateralibus concoloribus superne obscurioribus. Metapleuræ linea elevata pallida. Elytra apicem femorum posticorum superantia præcipue in parte basali fusco adspersa, campo discoidali maculis griseis irregularibus seriatis et in loco stigmatico linea angusta griseo albida. Alæ vitreæ apicem versus læviter nebulosæ, disco interno lævissime cœrulescentes? Femora postica fasciis duabus transversis fuscis superne parum conspicuis et in area externo media usque ad carinam inferiorem oblique productis; area internomedia fasciis quatuor subindistinctis, basali parva, apicali suprageniculare; area inferoexterna griseo flavescente; area inferointerna necnon tibiis posticis rufo sanguineis; carina inferiore areæ externomediæ prope apicem punctis raris nigris; area geniculare nigro fusca; carina inferiore femorum maculis nigris flavis alternantibus. Spinis tibiarum basi rufis, apice nigris. Cerci ♂ parvi, lamina supraanalis vix longiores, graciles, conici, subcompressi, apice bifidi.

♂ Long. corp. 24; pron. 5,8; elytr. 22; fem. post. 13,5 mm.
♀ » » 30; » 7,5; » 27; » » 18 »

Loc. Malabar: Tamarasseri, Puthupad Tored; 17-22-I-1913, Y. Ramachendra.

Esta especie es afín a *C. intermedius* y la tenía yo en mi colección procedente de la India, pero sin más indicación de localidad; de estos ejemplares he tomado las dimensiones de la ♀, pues el único ejemplar de Malabar que he podido observar es ♀.

91. CATANTOPS KARNYI Kirby.

Catantops Karnyi Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 183 (1910); Fauna British India, Orth., p. 251 (1914).
Catantops pulchellus Karny (nec Walker), Sitz. Akad. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl., CXVI, pp. 317,339 (1907).

Loc. Shevaroys-Yergaud, 21-IV, 4-V-1913, T. V. Ramakrishna.

Kirby lo cita de Nepal: Ternani.

92. CATANTOPS INDICUS Bolívar.

Catantops indicus Sauss. in litt., Bolívar, Ann. Soc. Entom. France LXX, p. 686 (1902); Karny, Sitz. Akad. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl., CXVI, pp. 319,342 (1907); Kirby, Fauna British India, p. 251 (1914).

Loc. Coimbatore, 3-III y 3-VII-1913, C. N., 17-IV-1913 y 4-X-1913, Y. Ramachendra; 4-V-1913, Fletcher; 3-I-1913, Ponniah; Koilpati, XI-1909, Y. Ramachendra; Chepuk, 21-VII-1907, T. S. A.; Chepank, 18-IX-19, J. S. A.; S. Arcot Dt.: Palur Farm, 12-VI-1913, P. S.; Guindy, 16-24-VIII-1913, Fletcher; Ramnad. Dt.: Nathampatti, 15-22-XI-1912, P. S.; Pithapuram, 23-IX-1907, T. V. Ramakrishna.

Citado por mí de Madras: Kodaikanal; además, por Kirby, de Ceilan, Corea y China. El tipo existe en mi colección.

93. CATANTOPS SPLENDENS (Thunberg).

Gryllus splendens Thunberg, Mém. Ac. Pétersb., V, p. 236 (1815); IX, pp. 395,408 (1824).

Acridium luteolum Serville, Ins. Orth., p. 661 (1839).

Cyrtacanthacris nana et *ferrina* Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., III, p. 568 (1870).

Acridium rufitibia Walker, Ann. and Mag. N. H. (3) IV, p. 223 (1859).

Acridium ceramicum Walker, l. c., p. 591 (1870).

Catantops splendens Stål, Recens. Orth., I, p. 71 (1873); Karny, Orth.-fauna des Sudans, pp. 311,326 (1907); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 250 (1914).

Loc. Shevaroys-Yergaud, 4.500 ft., 21-IV, 4-V-1913, Y. Ramachendra.

Kirby da las localidades siguientes: India, Ceilan, islas Andamans y Nicobar; Birmania y Java.

94. CATANTOPS ERUBESCENS (Walker).

Caloptenus erubescens Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 703 (1870).

Catantops Erubescens Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 183 (1910); Fauna British India, Orth., p. 253 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Beeravalli 10-VIII, 10-IX-1913. C. N. Coll.

Además, según Kirby, North Bengal. El tipo en el Museo Británico.

Según Walker, el ejemplar que describió era una ♀. Kirby nada dice respecto a este particular, y el único ejemplar que yo he visto es también de este sexo, por lo que nada puede saberse de la forma de los órganos anales del ♂. El espacio interlobular es de igual forma que en *C. pulchellus* Walker, así como los lóbulos mesosternales; pero su anchura es mayor, llegando a medir entre los lóbulos cerca de un milímetro de anchura.

95. CATANTOPS PULCHELLUS (Walker).

Cyrtacanthacris pulchellus Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., III, p. 574 (1870) sec. Kirby.

Catantops Pulchellus Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 483 (1910); Fauna British India, Orth., p. 252 (1914).

Loc. Bellary Dt.: Yemmiganur, 13-VIII, 2-IX-1913, A. G. R. coll.

XI-09 en «Cumbu» Koilpati Y. R. 10-VIII, 10-IX-1913 Bellary Dt.: Beeravalli C. N. coll. La especie estaba citada de la India, con duda.

Ni Walker ni Kirby han dado a conocer las dimensiones de los diversos órganos de esta especie: el primero da el sexo del ejemplar que describió, y que era un ♂, el segundo nada dice del suyo; pero por el tamaño total puede deducirse que pertenecía también al mismo sexo. Tampoco describe ninguno de estos autores las piezas anales. Procuraré subsanar estas omisiones, ya que he podido examinar ejemplares de uno y otro sexo.

♂ Long. corp. 32; pron. 7; elytr. 31; fem. post. 17 mm.
♀ » » 44; » 9; » 38; » » 22 »

Los lóbulos mesosternales en el ♂ son casi transversos, con el borde interno obtusamente anguloso, de modo que el espacio interlobular tiene la forma de una X que en su parte central mide medio milímetro de anchura; los metasternales se reunen en sutura larga por detrás de las fositas correspondientes. En la ♀, el espacio interlobular mesosternal es apenas más ancho que en el ♂, y la altura de los lóbulos metasternales es algo más corta. Los cercos del ♂ son comprimidos, adelgazados hacia el ápice, que es obtuso, y encorvados hacia dentro y arriba; la placa subgenital es cónica, comprimida hacia el extremo por arriba.

96. Catantops annexus sp. nov.

C. pulchello Walker (haud Karny) affinis sed: colore badio; pronoto fascia nigra laterali usque sulcum typicum tantum extensa, vittis obliquis citrinis nullis; elytris bicoloribus, parte externa a campo antico et discoidali formata, basi externa pallida excepta, griseo fusca minute griseo reticulata; parte reliqua griseo flavescente; alæ hyalinæ, base interna dilutissime colorata?; femoribus posticis superne tantum in area superointerna et in parte alta areæ internomediæ fusco fasciatis; area externomedia punctis discoidalibus fuscis sparsis; carina superiore linea nigra apposita medio interrupta a basi et apice remota; carina inferiore prope apicem necnon arcu geniculari nigris; lobis genicularibus internis rufis; area inferoexterna grisea, inferointerna rufescente; tibiis superne flavescentibus subtus rufescentibus.

♂ Long. corp. 30; pron. 5,5; elytr. 27; fem. post. 16 mm.
♀ » » 37; » 8; » 34; » » 20,5 »

Loc. Virudupati, 21-31-III.-1913, Ponniah coll.

Navasia insularis Kirby.

l. c. p. 255, fig. 135 (1914).

Loc. India: Narandam Island. Tipo en el British Museum.

A juzgar por la figura que dá Kirby, este insecto tiene todo el aspecto de una *Traulia.*

Gen. **Opharus** nov.

Corpus breve subfusiforme villosum, nitidum, superne grosse punctatum. Caput pronoto brevius antice obtusum, vertex inter antennas costa frontali augustior vel subæque latus, fastigium declive impressum, elongatum, ante oculos parum productum a supero visum subtransversum, cum costa frontali in arcu continuum. Costa frontalis ad fastigium angustata, apicem versus sensim ampliata. Oculi magni, lati, parte infraoculari genarum longiores. Antennæ filiformes longiusculæ. Pronotum subconicum, antice truncatum postice sinuatum, superne depressiusculum, obtusissime tectiforme, medio carinula percurrente a sulco typico longe pone medium sito tantum interrupta; metazona brevissima, quarta parte pronoti formante; lobi laterales margine inferiore antice subsinuati postice late rotundati. Elytra brevia lateralia, tympana tantum tegentia. Alæ nullæ. Pedes antici graciles, postici validi. Femora postica intus convexa, carina dorsali subdenticulata apice in dentem producta; lobi geniculares obtusi. Tibiæ posticæ cylindricæ extus 7 intus 7 vel 8 spinosæ, spina apicali externa nulla. Prosternum medio gibboso subdentiforme. Lobi mesosternales transversi spatio transverso præcipue in ♀ sejuncti; metasternales ♂ valde approximati in ♀ distincte distantes.

Este género es de dudosa colocación, y, a pesar de sus diferencias con los *Catantops,* me parece debe ponerse al lado de éstos. Es notable la forma del tubérculo prosternal, que está representado por un engrosamiento o gibosidad del prosternón, sin que exista un tubérculo bien definido, como en los restantes insectos de la tribu. El vértex inclinado y continuado en arco con la frente; la falta de quillas laterales en el pronoto, con carencia de espina apical externa en las tibias posteriores y la brevedad de los élitros, que son dos lóbulos cortos, laterales, estrechos en la base y ensanchados hacia el extremo, donde están redondeados, son los caracteres más notables de este género, que, por su pequeño tamaño y por sus élitros cortos, parece a primera vista afín a *Platyphyma.* Podrá colocarse al lado de *Paracardenius,* género africano cuyas especies son también braquípteras y con el que ofrecen alguna relación sus piezas esternales, salvo en lo relativo al tubérculo prosternal.

97. Opharus Ballardi sp. nov.

Pallide flavescens nigro varius. Caput superne nigrum, pone oculos fasciis nigris latis lobos laterales pronoti maxima parte ocupantibus nec_ non segmento primo abdominis utrinque extensis. Frons superne obscurior. Elytra nigra intus flava. Metapleuræ fascia parva flavescente ornatæ. Femora postica intus sanguinea, superne extusque præcipue in dimidio apicali nigra maculis albidis ornatis quarum duabus dorsalibus éxtus extensis fasciis transversis fere formantibus, alteris rotundatis juxta carinam inferiorem areæ externomediæ sitis. Tibiæ posticæ dimidio basali nigræ, denique sanguineæ annulo basali necnon maculis geniculari busalbidis, spinis apice nigris. Tarsi griseo albidi. Lamina supraanali trigona apice rotundata, basi costa obtusa transversa. Cerci breves subconici. Lamina subgenitalis obtusa. Lamina supraanalis ♀ magna postice rotundata. Ovipositoris valvulæ sinuatæ.

♂ Long. corp. 9; pron. 2; elytr. 2,8; fem. post. 6,5 mm.
♀ » » 13; » 2,8; » 1; » » 7,5 »

Loc. Bellary Dt.: Kamalapuram, 6-IX-1912, Fletcher; Bellary Dt.: Yemmiganur, 18-24-IX-1912, Y. Ramachendra.

98. BRACHYXENIA SCUTIFERA (Walker).

Caloptenus scutifer Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 704 (1870).
Brachyxenia scutifera Kirby, Fauna British India, Orth. p. 256, f. 136 (1914).

Loc. Coimbatore, 29-VII-1912, Fletcher; Bellary Dt.: Siruguppa, 29-XI-1912, D. P.; Bellary Dt.: Yemmiganur, 13-VIII, 2-IX-1913, Y. Ramachendra; Bellary Dt.: Tekkalokota Road, 30-VII-1912, Y. Ramachendra.

Según Kirby, en el Sur de la India.

99. CALOPTENOPSIS SAUSSUREI Martínez.

Caloptenopsis Saussurei Martínez, Act. Soc. Esp. Hist. Nat., p. 11 (1896); An. Soc. Esp. H. N. XXX, pp. 282-290 (1902).

Loc. Kurnool Dt.: Pattikonda Tg., 6-7-IX-1913, Y. Ramachendra; Bellary Dt.: Hadagalli, 2-IX-1912, Y. Ramachendra; Bellary Dt.: Yemmiganur, 12-VIII, 2-IX-1913, Y. Ramachendra.

No creo que esta especie sea la misma descrita por Walker, a pesar de que Kirby ha reunido como pertenecientes a la misma especie nada menos que tres: *insignis, spissus* y *clarus* Walker; en ninguna de las descripciones encuentro caracteres que permitan reunir a ella el *Saussurei* Mart.

100. CALOPTENOPSIS GLAUCOPSIS (Walker).

Caloptenus glaucopsis Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, p. 702 (1870).
Caloptenopsis crassiusculus Martínez, Act. Soc. Españ. H. N., p. 11

(1896); An. Soc. Españ. H. N., XXX, pp. 282-284(1902); Bolívar, Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 628 pl. 9, f. 38 (1902).

Euryphymus Glaucopsis Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 547 (1910).

Caloptenopsis glaucopsis Kirby, Fauna British India, Orth. pp. 258,259 (1914).

Loc. Mysore, 20-IV-1913, T. V. Ramakrishna; South India: Coimbatore, 3-IV-13, C. N.; Kurnool Dt.: Pattikonda, 12-XII-1912, Y. Ramachendra.

En el norte de la India, según Kirby.

El reconocer las especies descritas por Walker en el «Cat. of Derm. of British Museum» es una empresa siempre difícil y las más de las veces imposible, y como los tipos no siempre existen en las colecciones del referido Museo, sólo por conjeturas puede en muchos casos llegarse a la identificación de ellas. Kirby da, como diferencia entre *C. glaucopsis* y *liturifer* Walker, una pequeña variación en el color de la cara externa de los fémures posteriores, «hind femora with the lower outer carina marked with an interrupted black line» *(glaucopis)* (sic) o «hind femora with the lower outer carina pale», y en las descripciones aparece como muy importante la forma diversa del tubérculo prosternal: «Prosternal tubercle thick, obtuse, slightly transverse *(glaucopsis)* y «Prosternal tubercle rather small conical *(liturifer)*»; pero el primero de éstos caracteres no parece de gran importancia y sería necesario demostrar su constancia en gran número de ejemplares, y, respecto al segundo, basta repasar las descripciones originales (Walker, Cat. Orth. Saltat., IV, pp. 702-703) para poder apreciar que la tal diferencia no existe; así dice en el cuadro:

C. glaucopsis: prosterni spina crassa, transversa.

C. liturifer: prosterni spina crassa, transversa apice rotundata.

y en la descripción está:

Prosternal spine thick, transverse, rounded much broader than thick *(glaucopsis)*.

Prosternal spine thick, transverse, twice broader than thick, rounded at the tip *(liturifer)*.

de modo que en las dos es ancho, transverso y en ninguna de ellas cónico.

De todos modos, el *C. crassiusculus* Mart., se refiere a *C. glaucopsis* (Walk.) mejor que a *liturifer* (Walk.).

101. CALOPTENOPSIS LITURIFER (Walker).

Caloptenus liturifer Walker sec. Kirby, Faun. of Brit. India, Orth., p. 259 (1914) (haud *Caloptenopsis crassiusculus* Mart., An. Soc. Esp. H. N., p. 11 (1896).

Loc. Bellary Dt.: Hadagalli, X-1911. «In Agola field», Y. Ramachendra.

Refiero a esta especie el único ejemplar que he visto, que carece de rasgo negro en la porción apical de la quilla inferoexterna del fémur posterior. Los élitros son más estrechos que en la especie anterior, y la quilla de la prozona es entera.

¿Será realmente el *C. liturifer* Walker?

102. Euprepocnemis alacris (Serville).

Acridium alacre Serville, Ins. Orth., p. 682 (1839).

Acrydium deponens Walker, Ann. Nat. Hist. (3), IV, p. 222 (1859). Sec. Kirby.

Heteracris rudis Walker, Cat. Derm. Salt. B. M., IV, pp. 622-664 (1870). Sec. Kirby.

Euprepocnemis plorans v. *intermedia* Bolívar, Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 630 (1902); Trab. Mus. C. N. Madrid, Ser. Zool. 20, p. 10 (1914); Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 560 (1910).

Thysoicetrus alacris Bolívar, Trab. Mus. Nac. C. N. Madrid, Ser. Zool., 20, p. 23 (1914).

Euprepocnemis Alacris Kirby, Syn. Cat. Orth., III, p. 561 (1914); Fauna British India, p. 267 (1914).

Loc. Coimbatore, 7-I-1913, Fletcher; Madura, 29-VII, 4-VIII-1912, P. S. N.; Bellary Dt.: Yemmiganur, 13-VIII, 2-IX-1913, A. G. R.; Kurnool Dt.: Devanakonda, 26-30-VIII-1913, Ponniah.

Madras: Madura y Ceilán, según Kirby.

Como consecuencia de un nuevo estudio que he hecho de esta especie, creo que puede admitirse la identificación que hace Kirby del *Acridium alacre,* de Serville, que yo había considerado equivocadamente, y sin haber visto ejemplares auténticos, como un *Thysoicetrus* y el *Euprepocnemis plorans* Charp. var. *intermedia* Bol.

103. Thisoicetrus pulcher (Bolívar).

Euprepocnemis pulchra Bolívar, Ann. Soc. Ent. France, LXX, p. 630 (1902); Kirby, Fauna British India, Orth., p. 267 (1914).

Thisoicetrus pulcher Bolívar, Trab. Mus. N. C. N. Madrid, Ser. Zool. n. 20, p. 23 (1914).

Le cité anteriormente de Kodaikanal. Tipos en la col. Pantel y Bolívar.

En la última de las publicaciones citadas he propuesto una nueva agrupación de las especies de los géneros *Euprepocnemis* y *Thisoicetrus*, por la que el *E. pulchra* pasa al género *Thisoicetrus* por la forma de los cercos.

Loc. Coimbatore, 13-VI-1907, T. V. Ramakrishna, 1-I-1913, Y. Ramachendra: Erode, sobre la hierba.

En la colección que examino he visto ejemplares bastante mayores y de coloración más pálida, griseo testácea, y no verdes en las partes claras, y en los que las fajas pardas transversas de los fémures posteriores son borrosas; pero estas diferencias no pasan, a mi juicio, de variaciones locales. Las dimensiones que alcanzan estos ejemplares son:

♂ Long. corp. 24; pron. 5; elytr. 21; fem. post. 17 mm.
♀ » » 50; » 9,5; » 40; » » 31 »

Loc. Kurnool Dt.: Devanakonda, 26-30-VIII-1913, Ponniah; Samackot, X-1907, T. V. Ramakrishna.

Métodos gráficos que puede seguir el aeronauta, aviador o navegante para la determinación de coordenadas geográficas.

por

Honorato Castro Bonel

La determinación de las coordenadas geográficas de un lugar es un problema de excepcional importancia, al que astrónomos y geodestas de todos los tiempos han dedicado especial atención, estudiando métodos diversos, cada uno de los cuales tiene aplicación preferente según sea mayor o menor la precisión que el observador se proponga obtener, según sea mayor o menor el tiempo de que disponga para la observación y cálculo, y según sea, finalmente, el instrumento utilizado por el operador.

Un observador adiestrado que tenga a su disposición instrumentos apropiados instalados con la necesaria solidez, que no se encuentre abrumado por premuras de espacio y tiempo para observar y calcular, podrá alcanzar en la determinación una precisión que no es dable conseguir al observador que, como el tripulante de un aeroplano, de un dirigible o de un navío, debe resolver el problema de fijar la posición de su cénit, operando, para medir ángulos, con instrumentos de escasa precisión, y disponiendo para la operación total de un tiempo reducido y de un espacio limitado.

El tripulante de una aeronave, conociendo la velocidad de su marcha, orientado por medio de la brújula magnética o giroscópica, observando los accidentes topográficos más salientes y examinando la disposición de las líneas férreas (sobre todo si opera en un país como España, donde son éstas tan poco numerosas), reunirá fácilmente elementos de juicio suficientes para fijar sobre un mapa la ruta que sigue y la posición donde se encuentra en un momento determinado.

Los procedimientos apuntados serán, sin duda, suficientes en la generalidad, mas no en la totalidad de los casos que al piloto se presenten. De nada le servirá la observación de los accidentes topográficos, si realiza su viaje sobre un país desconocido.

Otras veces no es posible efectuar la referida observación, como sucede en viajes nocturnos, o cuando la nave aérea se encuentra sobre una capa de nubes. En circunstancias tales, se fijará la posición del observador, partiendo de la determinación de las distancias cenitales del sol, de la luna o de estrellas de coordenadas conocidas que se encuentren sobre el horizonte.

El piloto de una nave aérea ha de sacrificar la precisión en beneficio de la rapidez. Por ello se ha procurado siempre resolver esta cuestión por métodos gráficos, empleando ábacos que la simplifican notablemente.

Me propongo en esta nota exponer dos procedimientos gráficos para determinar las coordenadas geográficas del punto en que se encuentra un observador. En el primero es necesario medir previamente las distancias cenitales simultáneas de dos estrellas por medio de un instrumento apropiado, como es, por ejemplo, el cuadrante de nivel Butenschon, que describe el capitán de Ingenieros D. Emilio Herrera y Linares, en sus «Apuntes de navegación aeronáutica», publicados en el tomo XXVIII de la quinta época del *Memorial de Ingenieros del Ejército*. El sextante giroscópico del almirante francés Fleuriais y el astrolabio, con amortiguador Favé, son aparatos destinados a medir alturas, con los que alcanzará buen éxito un observador experimentado.

El punto de partida del segundo método es la medida de la distancia cenital y acimut de un punto de coordenadas celestes conocidas.

I. *Por observación de dos distancias cenitales.*

La distancia cenital de una estrella es la misma para todos los observadores situados sobre una circunferencia trazada en la superficie terrestre, supuesta esférica, con un radio esférico igual a la distancia cenital medida, y haciendo centro en el punto en que corta a la superficie terrestre la recta que une la estrella observada con el centro de la tierra. Dicha circunferencia (a la que daremos, indistintamente, los nombres de círculo de distancias equicenitales, o círculo de posición, como le llama Sumner) es, pues, un lugar geométrico de puntos, entre los que se encuentra aquél sobre el cual el observador está situado, o sea, aquel punto de la superficie terrestre que tiene el mismo cénit que el observador.

Si se miden las distancias cenitales de dos estrellas, obtendremos dos lugares geométricos, y uno de los elementos comunes a los mismos nos proporcionará la solución del problema.

Como cada uno de estos lugares geométricos es una circunferencia, serán dos los puntos comunes a las mismas que, en general, se presenten como solución; pero el conocimiento aproximado de la situación del observador, y la elección conveniente de las estrellas observadas, permitirán fijar, sin vacilación, cuál de los dos puntos de intersección de las circunferencias referidas es la verdadera solución del problema.

Si el observador dispusiera de un globo terrestre, le sería muy sencillo resolver el problema; pues para ello, una vez determinadas las distancias cenitales simultáneas de las dos estrellas, no tendría que hacer más operaciones que trazar con un compás esférico, y con aberturas iguales a las distancias cenitales observadas, las dos circunferencias que determinarán por uno de los dos puntos de su intersección el lugar que ocupa el observador. Para fijar sobre el globo terrestre los centros de estas circunferencias téngase en cuenta que cada uno de ellos está situado sobre el paralelo de latitud igual a la declinación de la estrella observada, y que su longitud, contada hacia el occidente de Greenwich, será igual a la diferencia entre la hora sidérea de Greenwich (que podemos conocer por medio de un cronómetro) y la ascensión recta de la estrella observada.

Este procedimiento, tan rápido como elemental, no es aplicable al caso de un observador situado sobre un aeroplano o un dirigible, puesto que, si se quiere alcanzar alguna precisión en la determinación, será preciso dar al globo celeste un tamaño excesivo, y no debemos olvidar que la economía de espacio no es menos importante que la de tiempo en esta clase de operaciones. Sin perjudicar en lo más mínimo la sencillez del anterior método, podemos prescindir del empleo de globo celeste y resolver el problema operando sobre una superficie plana de dimensiones reducidas. Para ello supongamos que la superficie plana de que disponemos es una representación estereográfica de la esfera celeste sobre el plano del ecuador.

Como en toda proyección estereográfica, los círculos se proyectan según círculos, resulta que, según círculos se proyectarán los de distancias equicenitales, y el problema quedará resuelto si llegamos a encontrar los centros y radios de la proyección de dichos lugares geométricos, toda vez que, conocidos aquellos elementos, bastará trazar con un compás las circunferencias correspondientes y ver las coordenadas que corresponden al punto de intersección que sea solución del problema. Veamos, pues, cómo podemos determinar la posición de las proyecciones de los círculos de distancias equicenitales.

Supongamos que el cénit de un observador sea el punto M de la figura 1.ª, y que son U y U′ las estrellas observadas. La estrella U se verá a igual distancia cenital desde cada uno de los puntos de la superficie terrestre que tiene su cenit sobre la circunferencia AMA_1, que será, por tanto, el círculo de distancias equicenitales de la estrella U que contiene al punto M. Análogamente el círculo BMB_1 es el de distancias equicenitales de la estrella U′, que contiene al punto M. Las proyecciones este-

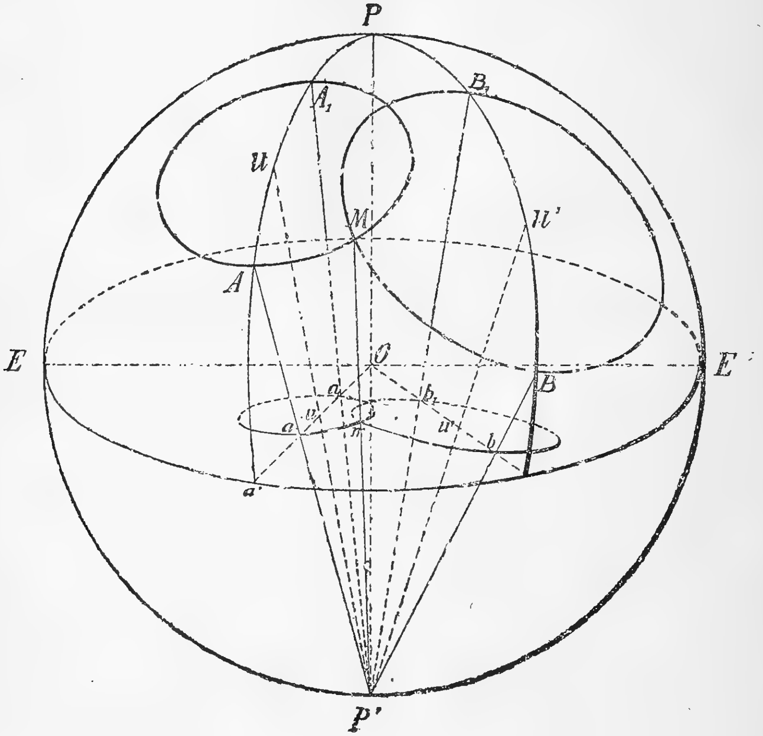


FIG. 1.ª

reográficas ama_1, bmb_1 de los círculos de distancias equicenitales tienen común el punto m, que es la proyección estereográfica del punto M, cénit del observador.

Para determinar la circunferencia ama_1 vamos primeramente a demostrar que su centro está situado sobre la recta oa', que es la proyección estereográfica del círculo de declinación del astro. Como el vértice de cono circunscrito a la esfera, que tenga con ella como línea de contacto la circunferencia de distancias equicenitales AMA_1, es un punto de la recta oU, y este punto pertenece al círculo de declinación del astro, quedará demostrada la propiedad que anteriormente se ha enunciado, si se prueba que el centro de la circunferencia ama_1 es la proyección estereográfica del vértice del referido cono circunscrito. Supongamos que en la figura 2.ª representan:

O el vértice de un cono circunscrito a una esfera, siendo MPM' la línea de contacto de sus superficies.

mpm' la proyección estereográfica sobre el plano Q de la circunferencia MPM'.

Q′ y Q″ planos paralelos al Q, trazados por los puntos S y O, respectivamente.

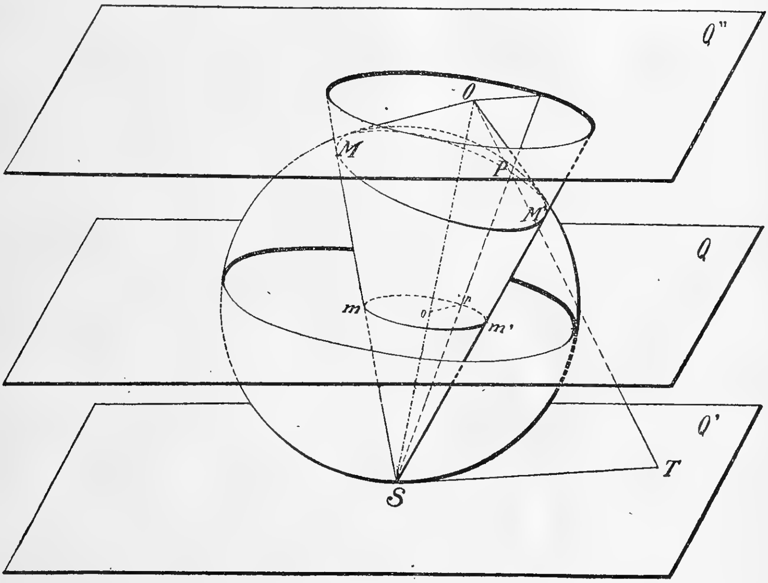


FIG. 2.ª

p proyección estereográfica de P sobre el plano Q.

p_1 intersección de la recta SP con el plano Q″.

T intersección de la generatriz OP del cono O con el plano Q′.

El paralelismo de las rectas Op_1 y ST, situadas en los planos paralelos Q′ y Q″, sirve para establecer la semejanza de los triángulos OPp_1 y TPS, y de esta semejanza la relación

$$\frac{PT}{TS} = \frac{PO}{Op_1}.$$

Y como PT es igual a TS, por ser tangentes trazadas a la esfera desde el punto T, se deduce que $Op_1 = OP$.

Resulta, pues, que cuando el punto P se mueve sobre la circunferencia MPM′, el punto p_1 se moverá sobre otra circunferencia que tendrá su centro en O, por ser constante la magnitud de todas las generatrices OP del cono y constantemente iguales los segmentos OP y Op_1.

Según lo que antecede, la proyección estereográfica de la circunferencia MPM′ sobre el plano Q es la misma que la proyección estereográfica sobre el mismo plano de la circunferencia *mpm′*. Pero la línea *mpm′* es la sección producida por el plano Q en la superficie cónica definida por el vértice S y la circunferencia *mpm′* como directriz, y siendo circular la directriz y paralelos los planos Q y Q″, será también circular la sección. El centro de esta sección es el punto *o*, proyección estereográfica de O, como se deduce de la consideración de los triángulos semejantes SOp_1 y Sop, puesto que será

$$\frac{SO}{So} = \frac{Op_1}{op}.$$

La constancia de la relación $\frac{SO}{So}$ y del radio Op_1 demuestra la constancia de *op*.

Volvamos ahora a examinar la figura 1.ª, y, si tenemos en cuenta la propiedad enunciada, resulta que la recta *oa′*, que es la proyección estereográfica del círculo de declinación del astro, contendrá el centro de la circunferencia apa_1, proyección estereográfica del círculo de distancias equicenitales. Las proyecciones estereográficas a y a_1 de los puntos A y A_1, situados en el círculo de declinación del astro, son, por consiguiente, los extremos de un diámetro, y el conocimiento de la posición de estos puntos a y a_1 nos permitirá trazar con un compás la circunferencia apa_1.

Para fijar sobre el mapa las posiciones de los puntos a y a_1 tengamos presente que el punto A está situado sobre un paralelo cuya latitud es igual a la diferencia entre la declinación de la estrella y la distancia cenital medida, puesto que

$$Aa' = a'U - AU.$$

Análogamente, el punto A está situado sobre un paralelo de latitud igual a la suma de la declinación de la estrella con la distancia cenital de la misma, ya que

$$A_1a' = a'U + UA_1.$$

Cuando la suma de la distancia cenital y la declinación de la estrella observada sea mayor de 90°, la proyección estereográfica a_1 del punto A_1 (que estará separada por el polo de la proyección estereográfica de la estrella) se encontrará situada sobre un paralelo de declinación, que distará del polo un número de grados igual al exceso de aquella suma sobre 90. Se cumplirá la condición antedicha cuando el círculo de distancias equicenitales comprenda en su interior al polo terrestre.

Cuanto se ha dicho hasta aquí justifica el modo de operar para determinar las coordenadas geográficas de un lugar que a continuación se expone.

Supongamos que el observador haya determinado las alturas simultáneas de dos estrellas conocidas. Supongamos, igualmente, que dispone de un mapa celeste, dibujado en proyección estereográfica sobre el plano del ecuador, como es el representado por la figura 3.ª. En esta carta celeste deberán ir dibujadas, además de las proyecciones estereográficas de las estrellas, los radios que representan los círculos de declinación de las mismas y las circunferencias que representan los paralelos. Unos y otros llevarán inscrita su correspondiente graduación. El observador deberá disponer de un cronómetro, arreglado al tiempo sidéreo de un lugar determinado, por ejemplo, Greenwich, con estado y movimiento conocido.

Para mayor claridad ilustraremos con datos numéricos la explicación.

Supongamos que, cuando un reloj de tiempo sidéreo de Greenwich marque las veinte horas treinta y cinco minutos, se han observado las distancias cenitales de las estrellas Vega o α de la constelación de la Lira, y de Altair o α del Aguila. Supongamos que las distancias cenitales simultáneas, corregidas de refracción, sean de 17° y de 32°, respectivamente.

En el radio del planisferio que pasa por la proyección de Vega tomemos a uno y otro lado de la referida proyección distancias de 17°, medidas con la escala que definen los paralelos de deiineación para obtener los puntos a y a'.

Estos puntos a y a' son los extremos de un diámetro de la proyección del círculo de distancias equicenitales, que podremos dibujar rápidamente, sobre todo si disponemos de uno de los llamados *compás de reducción*, arreglado de modo que una de las aberturas sea doble de la otra, puesto que, en tal caso, si hacemos coincidir cada uno de los extremos de los brazos de mayor longitud con los puntos a y a', respectivamente, la abertura de los brazos de menor longitud será igual al radio del círculo que se pretende trazar.

De manera enteramente análoga se trazará el círculo que tenga por extremos de un diámetro los puntos b y b', puntos situados sobre el radio que pasa por la proyección estereográfica de Altair, y que, situados a uno y otro lado de dicha proyección, distan de ella magnitudes iguales a 32°, medidos con la escala de los paralelos de declinación.

Podrá suceder, como ocurre en el caso de Altair, que el punto b' salga fuera de los límites del dibujo, por estar situado b' a una distancia mayor de 5° por bajo del Ecuador. Para obtener al radio del círculo salvando esta dificultad, llevará el planisferio una línea XX′ como la de la figura 3.ª, con una graduación que corresponde a las proyecciones estereográficas de los distintos paralelos de declinación. En dicha línea se pueden marcar las posiciones de los puntos a, a', b, b', y determinar, por tanto, el radio de la proyección del de distancias equicenitales. El trazado de la línea XX′ evita, además, tener que graduar los radios del planisferio.

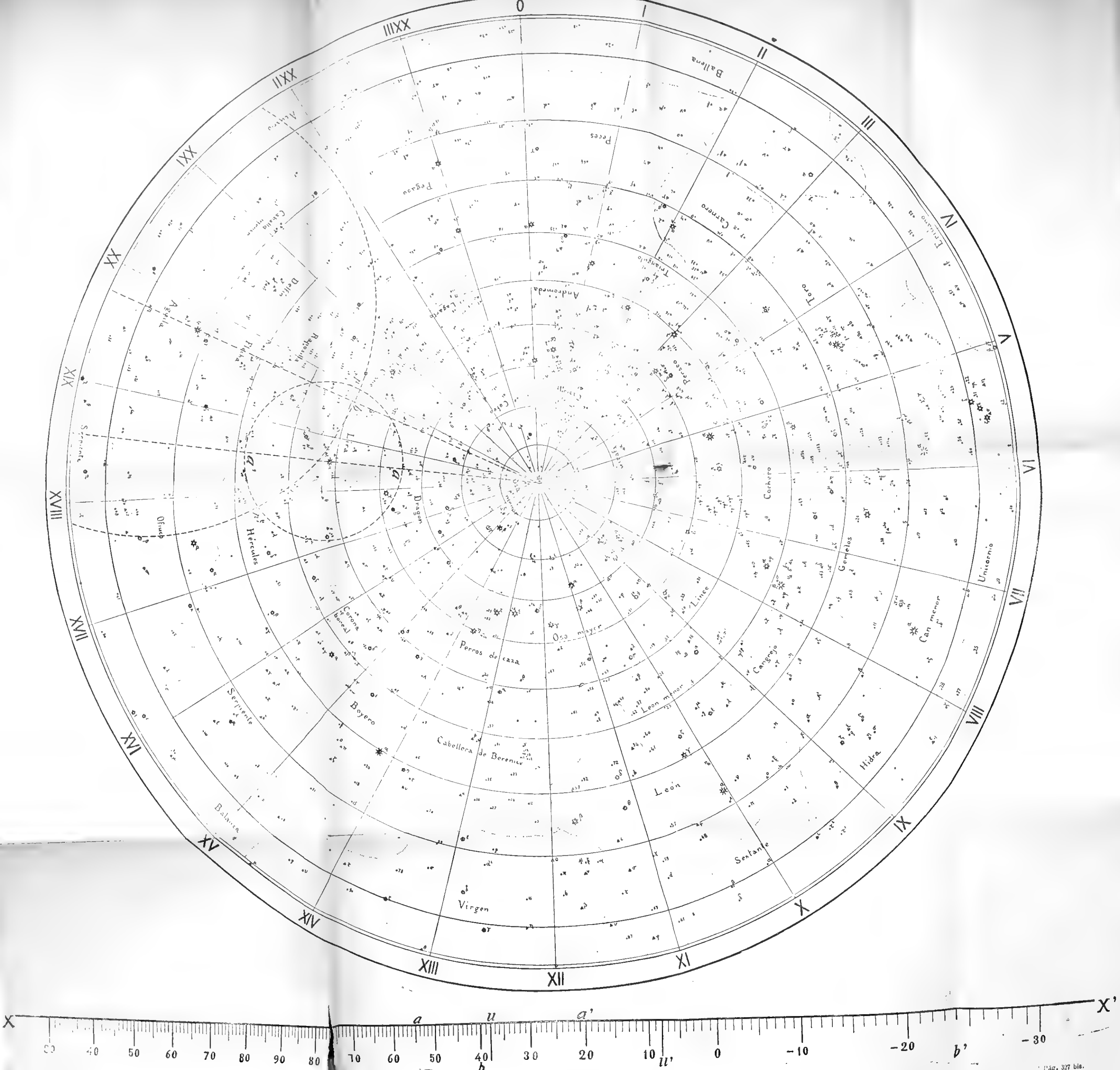
Los círculos trazados se cortan en los dos puntos p y p_1. Un conocimiento aproximado de la posición del observador nos permite desechar la solución p_1. Esta elección será tanto más sencilla cuanto mayor sea la separación de los puntos p y p_1, separación que depende de la posición de las estrellas observadas. De este extremo hemos de ocuparnos más adelante. Como el punto p está situado sobre el paralelo de declinación de los 40° y 24′, esa será precisamente la latitud del lugar de observación.

El radio del planisferio que pasa por el punto p, es la proyección de círculo de declinación de las estrellas que tienen una ascensión recta igual a veinte horas y veinte minutos, que será la hora sidérea local del punto p, y como la hora que marca el reloj en el momento de la observación excede en quince minutos a la que corresponde al punto p, resulta que el observador se encontrará en un lugar situado a 15° al Occidente de Greenwich.

Una determinación precisa exige el conocimiento de las alturas simultáneas de las dos estrellas. Y si es uno solo el observador, será físicamente imposible efectuar las dos medidas en un mismo instante. Las medidas serán sucesivas, no simultáneas; entre una y otra observación habrá transcurrido un tiempo que será mayor o menor, según sea menor o mayor la destreza y costumbre de quien hace la determinación. Es preciso, además, tener en cuenta que el observador está en movimiento, y que son diferentes, por consiguiente, los lugares desde los que observa las alturas de cada una de las estrellas.

Veamos ahora el procedimiento más ventajoso de operar para que estas dos causas de error tengan una influencia mínima en la determinación.

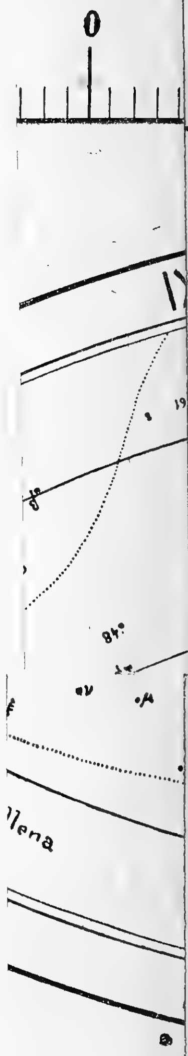
Sabido es cómo se deduce del examen de las relaciones diferenciales entre las alturas h y h', acimutes A y A′ latitud φ y ángulo horario τ,



Rev. Acad. de Ciencias.—XVII.—Enero-Febrero-Marzo, 1919.

Fig. 3.ª

Pág. 327 bis.


0
19
84°
llena

$$d\varphi = -\frac{\text{sen A}'}{\text{sen (A}'-\text{A)}}\,dh + \frac{\text{sen A}}{\text{sen (A}'-\text{A)}}\,dh',$$

$$\cos\varphi\, d\tau = \frac{\cos \text{A}'}{\text{sen (A}'-\text{A)}}\,dh - \frac{\cos \text{A}}{\text{sen (A}'-\text{A)}}\,dh',$$

las condiciones más favorables para que los errores cometidos en la determinación de las alturas tengan una influencia mínima en el valor del resultado obtenido.

La diferencia de acimutes A′-A, debe ser lo más próxima posible a 90°, y, en tal caso, las relaciones que preceden se transformarán en

$$d\varphi = -\text{ sen A}'dh + \text{sen A}dh',$$
$$\cos\varphi\, \text{d}\tau = \cos \text{A}'dh - \cos \text{A}dh'.$$

Si una de las estrellas se observa en el meridiano y la otra en el primer vertical; es decir, si

$$\text{A} = 0 \quad \text{y} \quad \text{A}' = \pm 90°,$$

será:

$$d\varphi = -\text{ sen A}'dh,$$
$$\cos\varphi d\tau = -\cos \text{A}dh',$$

fórmulas que no son otra cosa que la expresión de que la precisión de la latitud obtenida depende de la delicadeza con que se aprecie la altura medida en el meridiano, y que el valor obtenido para el ángulo horario será tanto más preciso cuanto mayor sea la precisión con que se mida la altura de la estrella situada en el primer vertical.

Además de todo esto, es necesario tener en cuenta que la variación de altura de una estrella es máxima cuando atraviesa el primer vertical, y que es muy pequeña cerca del meridiano, siendo nula cuando la estrella pasa por él.

Por todo ello será conveniente observar una estrella en el primer vertical y otra en el meridiano, y tomar como tiempo de la observación el momento en que se haya medido la altura de la estrella situada en el primer vertical. No será preciso, para una determinación de esta naturaleza, hacer la reducción de la altura observada en el meridiano a la que tendría en el momento en que la otra estrella pasó por el primer vertical, pues aun admitiendo que entre uno y otro momento transcurran dos minutos de tiempo, la variación de la altura en ese intervalo, calculada por la fórmula

$$dh = \cos\varphi \text{ sen A}dt,$$

para una estrella ecuatorial situada cerca del meridiano en un vertical de un grado de acimut, será de treinta y cinco segundos de arco, y la influencia de este error en la latitud obtenida no será mayor de veinticinco segundos, error que es seguramente menor que los procedentes de la observación misma, por las especiales condiciones en que ella se hace.

Otra de las causas de error apuntadas es la variación de lugar del observador.

La observación de altura hecha en segundo término, no es la misma que la que tiene en el mismo instante observada desde el primer lugar de observación.

La corrección aplicable a esta variación de altura es, según Chauvenet (art. 209, fórmula 380),

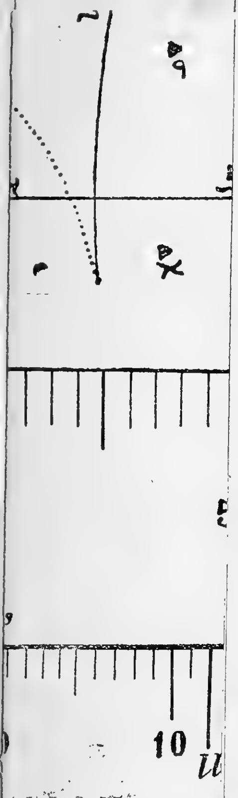
$$ZS = Z'S - ZZ' \cos ZZ'S,$$

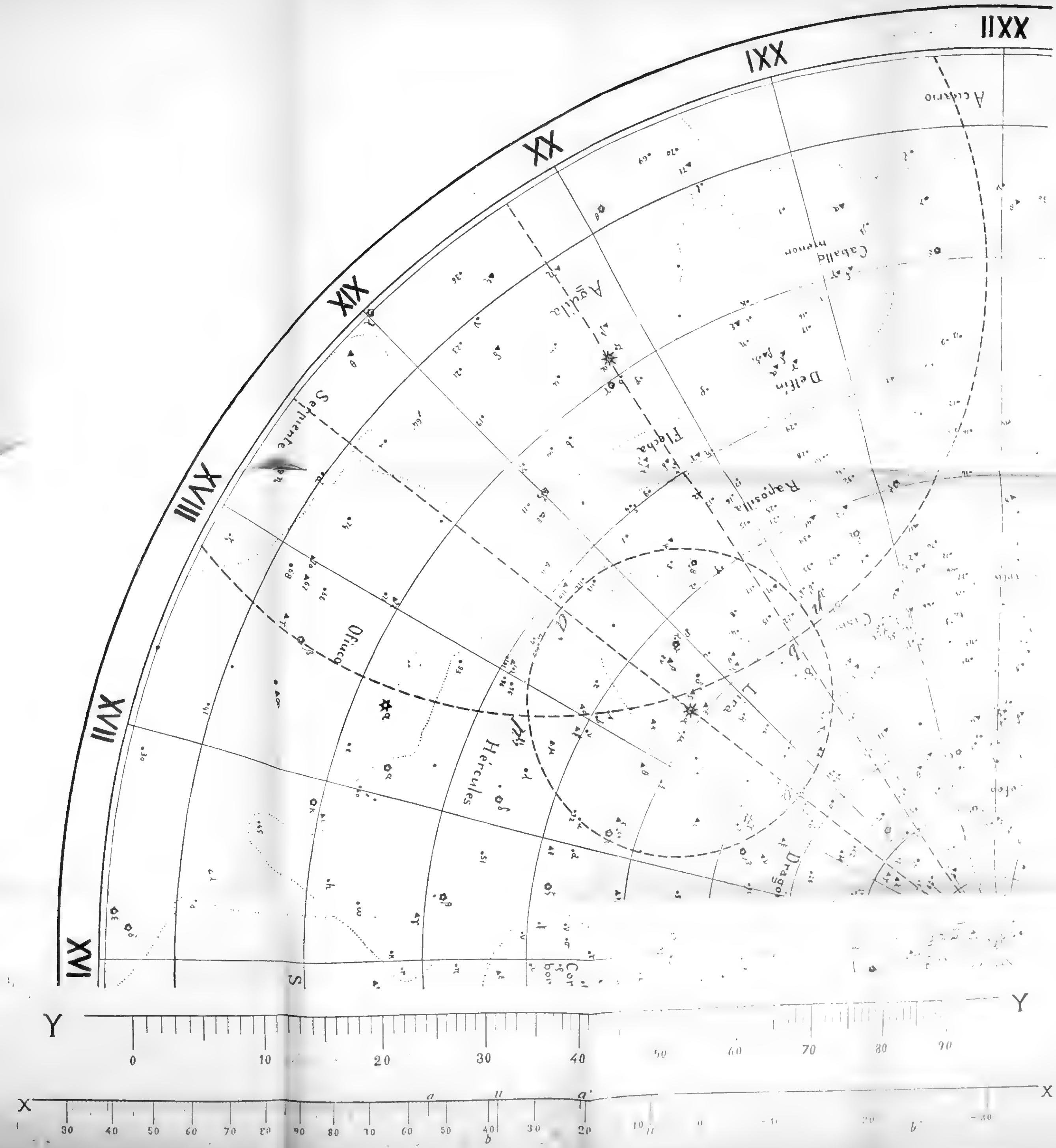
donde Z' representa el cenit del observador en el momento de la primera observación, Z el cenit en el segundo instante, y S la estrella observada.

Si el movimiento del observador fuese con rumbo del E. al W. o del W. al E., el ángulo ZZ'S valdría 90°, por estar situada la estrella observada en el meridiano, y la corrección por esta causa de error sería nula.

Otra de las causas de error que vamos a examinar es inherente a todos los métodos gráficos. Es preciso aminorar, ya que no sea posible evitar, la influencia que en la determinación tienen los errores de dibujo. Y como a dos de estos, ε y ε', de la misma magnitud lineal o superficial absoluta, cometidos en dibujos de escala diferente, corresponden errores en los resultados cuyo valor está en razón inversa de la magnitud de la escala, se deduce que será conveniente emplear planisferios ecuatoriales del mayor tamaño posible. Y no pudiendo exceder de un cierto límite las dimensiones del planisferio, procede prescindir de toda porción que no haya de ser utilizada en el trazado.

La parte utilizada es tan sólo un sector del planisferio celeste, algo mayor que el comprendido entre los círculos de declinación de las estrellas observadas. Para deducir la amplitud máxima que debemos dar a cada sector, observemos que dichas estrellas se encuentran, respectivamente. en el meridiano y en el primer vertical, o sea en planos verticales separados por un ángulo acimutal de 90°. Pero el meridiano, a la vez que vertical, es círculo de declinación de una de las estrellas, por lo que la amplitud máxima del ángulo formado por los círculos de declinación de ambas estrellas corresponderá a una declinación nula de la estrella situada en el primer vertical. Este valor máximo es de 90°. Sin embargo, a este valor máximo no es posible llegar en la práctica, porque las estrellas ecuatoriales, cuando pasan por el primer vertical, están a 90° del cenit, y la absor-


10


XVI
XVII
XVIII
XIX
XX
XXI
XXII
Serpiente
Ofiuco
Hércules
Aguila
Flecha
Delfín
Caballo menor
Acuario
Raposilla
Lira
Dragon
Cor. bor.
Y
X
X'

ción de luz por la atmósfera y la refracción hacen imposible su observación. Y como a medida que aumenta la altura de la estrella situada en el primer vertical decrece el valor absoluto de su ángulo horario, resulta que el sector de planisferio empleado será siempre muy inferior a 90°. No obstante, el sector del planisferio debe comprender 90°, y será conveniente que el observador disponga, no solamente de cuatro que completen todo el Ecuador, sino de veinticuatro; comprendiendo el primero, desde las cero horas hasta las seis horas; el segundo, desde la una hora hasta las siete horas, y así sucesivamente.

El observador elegirá el sector que contenga las dos estrellas observadas. Con sólo cuatro sectores, podría suceder que cada una de las estrellas estuviese contenida en distinto sector.

Puede ocurrir, en circunstancias que anteriormente hemos anotado, que el círculo de distancias equicenitales comprenda en su interior al polo terrestre. En tal caso, la proyección del punto A_1 (figura 2.ª) se hallará situada en el sector opuesto por el vértice del que contenga la proyección de la estrella, y el empleo del sector nos impide fijar el punto que determina uno de los extremos del diámetro de la proyección del círculo de posición. Se puede salvar esta dificultad, si en cada uno de los sectores se lleva dibujada una línea, como se ve en la figura 4.ª, que represente la proyección sobre el plano del Ecuador de un círculo de declinación, con una graduación que corresponde a la intersección con los paralelos, y dibujada en escala igual a un medio de la que sirvió para dibujar el planisferio. Sobre esa línea XX′ se marcan los puntos a' y a'_1, y su separación medirá el radio de la proyección del círculo de posición. Fácil será ya su trazado, una vez que conocido su radio marquemos sobre el sector la posición del punto a.

Sobre la escala yy' de la figura 4.ª se medirá la distancia op que define la latitud.

Otra de las causas de error que hemos de considerar, es el producido por la refracción. En las determinaciones hechas en la superficie terrestre, la altura barométrica y las temperaturas del mercurio del barómetro y la del aire ambiente, son datos que nos permiten hallar la corrección que debe aplicarse a una distancia cenital para eliminar el error de refracción. En determinaciones de poca precisión, como es la que nos ocupa, se obtendrá una aproximación suficiente aplicando la corrección de refracción media de la tabla siguiente, que publica el *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid:*

Refracción astronómica media

z	0′	20′	40′	60′	z	0′	20′	40′	60′
°	″	″	″	″	°	″	″	″	″
0	0,0	0,3	0,7	1,0	35	40,4	40,9	41,4	41,9
1	1,0	1,3	1,7	2,0	36	41,4	42,7	43,0	43,5
2	2,0	2,4	2,7	3,0	37	43,5	44,0	44,6	45,1
3	3,0	3,4	3,7	4,0	38	45,1	46.6	46,2	46,7
4	4,0	4,4	4,7	5,0	39	46,7	47,3	47,8	48,4
5	5,0	5,4	5,7	6,1	40	48,4	49,0	49,5	50,1
6	6,1	6,4	6,7	7,1	41	50,1	50,7	51,3	51,9
7	7,1	7,4	7,8	8,1	42	51,9	52,5	53,2	53,8
8	8,1	8,4	8,8	9,1	43	53,8	54,4	55,1	55,7
9	9,1	9,5	9,8	10,2	44	55,7	56,4	57,0	57,7
10	10,2	10,5	10,9	11,2	45	57,7	58,4	59,0	59,7
11	11,2	11,6	11,9	12,3	46	56,7	60,4	61,1	61,8
12	12,3	12,6	13,0	13,3	47	61,8	62,6	63,3	64,0
13	13,3	13,7	14,0	14,4	48	64,0	64,8	65,6	66,3
14	14,4	14,8	15,1	15,5	49	66,3	67,1	67,9	68,7
15	15,5	15,8	16,2	16,6	50	68,7	69,5	70,4	71,2
16	16,6	16,9	17,3	17,7	51	71,2	72,0	72,9	73,8
17	17,7	18,0	18,4	18,8	52	73,8	74,7	75,6	76,5
18	18,8	19,1	19,5	19,9	53	76,5	77,4	78,4	78,3
19	19,9	20,3	20,6	21,0	54	79,3	80,3	81,3	82,3
20	21,0	21,4	21,8	22,2	55	82,3	83,3	84,4	85,4
21	22,2	22,5	22,9	23,3	56	85,4	86,5	87.6	88,7
22	23,3	23,7	24,1	24,5	57	88,7	89,8	91,0	92,2
23	24,5	24,9	25,3	25,7	58	92,2	93.4	94,6	95,8
24	25,7	26,1	26,5	26,9	59	95,8	97,1	98,4	99,7
25	26,9	27,3	27,7	28,1	60	99,7	101,0	102,4	103,8
26	28,1	28,6	29,9	29,4	61	103,8	105,2	106,7	108,2
27	29,4	29,8	30,3	30,7	62	108,2	109,6	111,2	112,8
28	30,	31,1	31,6	32,0	63	112,8	114,4	116,0	117,8
29	32,0	32,4	32,9	33,3	64	117,8	119,6	121,4	123.2
30	33,3	33,8	34,2	34,7	65	123,2	125,0	127,0	129,0
31	34,7	35,1	35,6	36,1	66	129,0	131,0	133,0	135,2
32	36,1	36,5	37,0	37,5	67	135,2	137,4	139,6	141,9
33	37,5	37,9	38,4	38,9	68	141,9	144,3	146,8	149,3
34	38,9	38,4	39,9	40,4	69	149,4	151,9	154,5	157,3
35	40,4	40,9	41,4	41,9	70	157,3	»	»	»

II. — *Por observación del acimut y la distancia cenital de un astro.*

Durante el día no es posible determinar la posición de un lugar utilizando el método que anteriormente se ha expuesto. Las estrellas no son visibles con los instrumentos usados en esta clase de operaciones, y es, por tanto, imposible medir sus distancias cenitales. Las medidas del acimut y distancia cenital del Sol, nos proporcionan elementos suficientes para resolver esta cuestión. Claro está que el método es aplicable al caso de observaciones de una estrella de coordenadas conocidas lo mismo que al de observaciones del Sol. Lo esencial es conocer el acimut y distancia cenital de un astro de coordenadas conocidas cuando un reloj de tiempo sidéreo marque una hora θ.

Como en el método anterior, resolveremos la cuestión utilizando una proyección estereográfica de la esfera celeste sobre el plano del Ecuador. La medida de la distancia cenital del Sol nos proporcionará un lugar geométrico de puntos que contiene al cenit. Este lugar es el círculo de distancias equicenitales que se proyectará sobre el Ecuador según una circunferencia que ya sabemos trazar. Si conseguimos hallar otro lugar geométrico de puntos que contenga al cenit, no tendremos más que ver cuál de los elementos comunes a estos dos lugares geométricos resuelve la cuestión.

Consideremos para ello en la figura 5.ª el triángulo formado por el polo, el cenit y el Sol.

Tracemos las tangentes al meridiano ZR y al vertical del Sol ZT. El ángulo de estas dos tangentes (que es el acimut del Sol, medido desde el N), se proyecta en su verdadera magnitud en la proyección estereográfica sobre el plano del Ecuador. Pero la tangente ZR se proyecta según un diámetro; es decir, según una recta que pasa por el punto o, y la tangente ZT se proyecta según la recta zt; es decir, según una recta que pasa por el punto t. Si fijamos la posición del punto t por el procedimiento que indicaremos después, tendremos un lugar geométrico del punto z trazando el arco capaz de un ángulo igual al acimut que pase por los puntos o y t.

Para fijar la posición del punto t, observemos que es la proyección estereográfica del punto T; que este punto T pertenece, a la vez que a la tangente ZT, a la recta oT, intersección del vertical y del círculo de declinación del Sol. Si ahora rebatimos sobre el Ecuador el círculo de declinación del Sol en torno de la recta ot, la recta oT tomará la posición oT de la figura 6.ª, formando un ángulo Tot igual a la declinación del Sol; la distancia oT es igual a la secante de la distancia cenital del Sol; el centro de proyección P′ (figura 5.ª) ocupará en el rebatimiento la posición P′ de

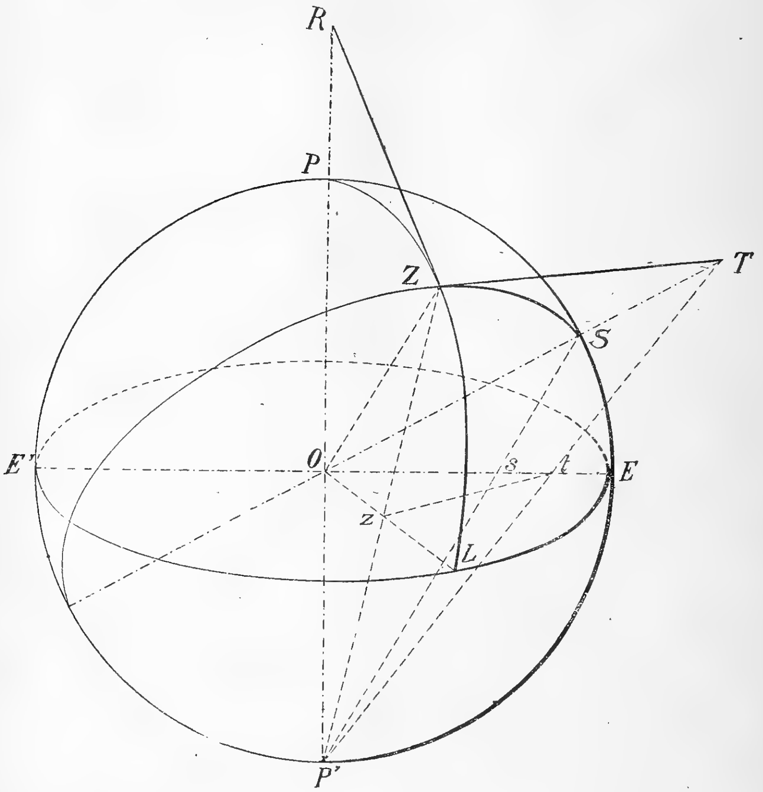


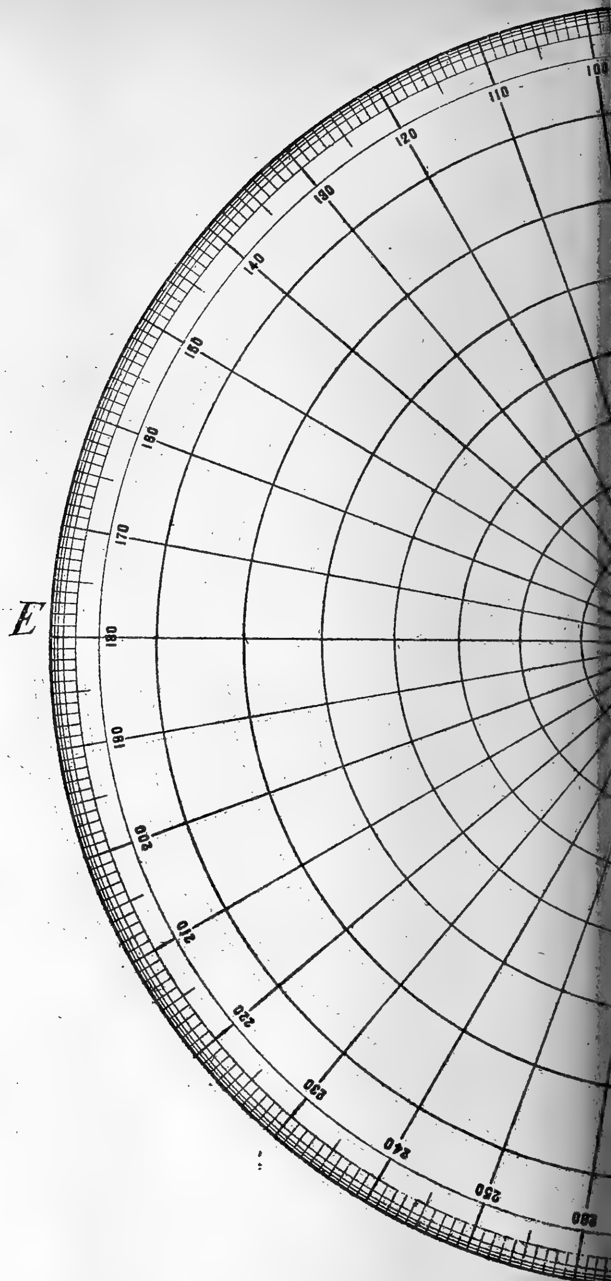
FIG. 5.ª

la figura 6.ª, y la recta P′T cortará a la recta oE, charnela del rebatimiento, en el punto t.

La práctica del método se reduce, en definitiva, a lo siguiente:

El operador deberá disponer de un reloj de tiempo sidéreo y de una proyección estereográfica como la de la figura 6.ª. En ella deberá llevar trazado en el diámetro EE′ que corresponda a una graduación cero, la proyección estereográfica s del astro observado.

También deberá llevar dibujada la línea oS, que forme con la oE′, un ángulo igual a la declinación del astro. Sobre esta línea se habrá dibujado una graduación que corresponderá a las secantes de los distintos valores angulares. Con estos elementos, y por medio de instrumentos apropiados,


E
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260

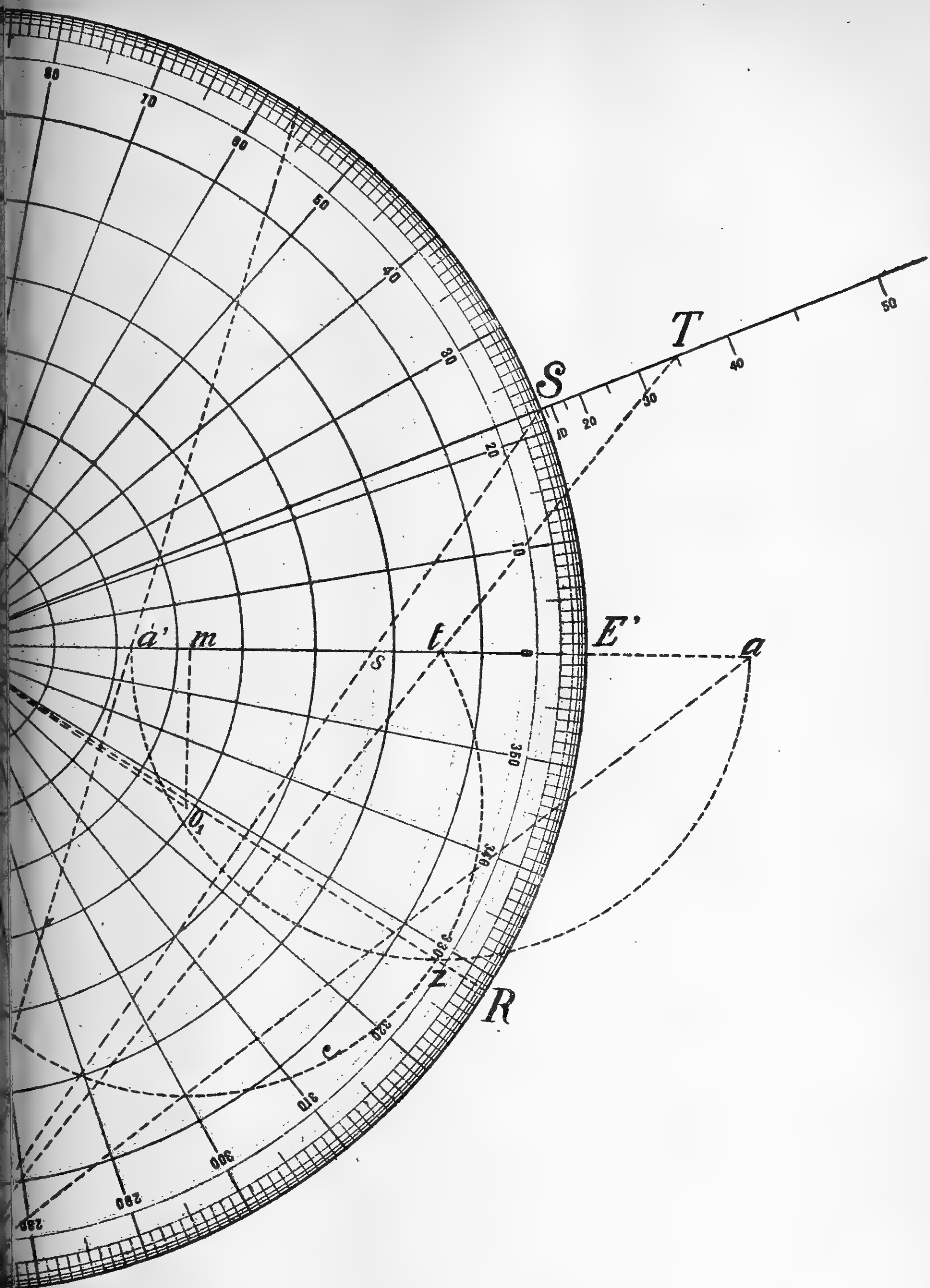


FIG. 6.ª

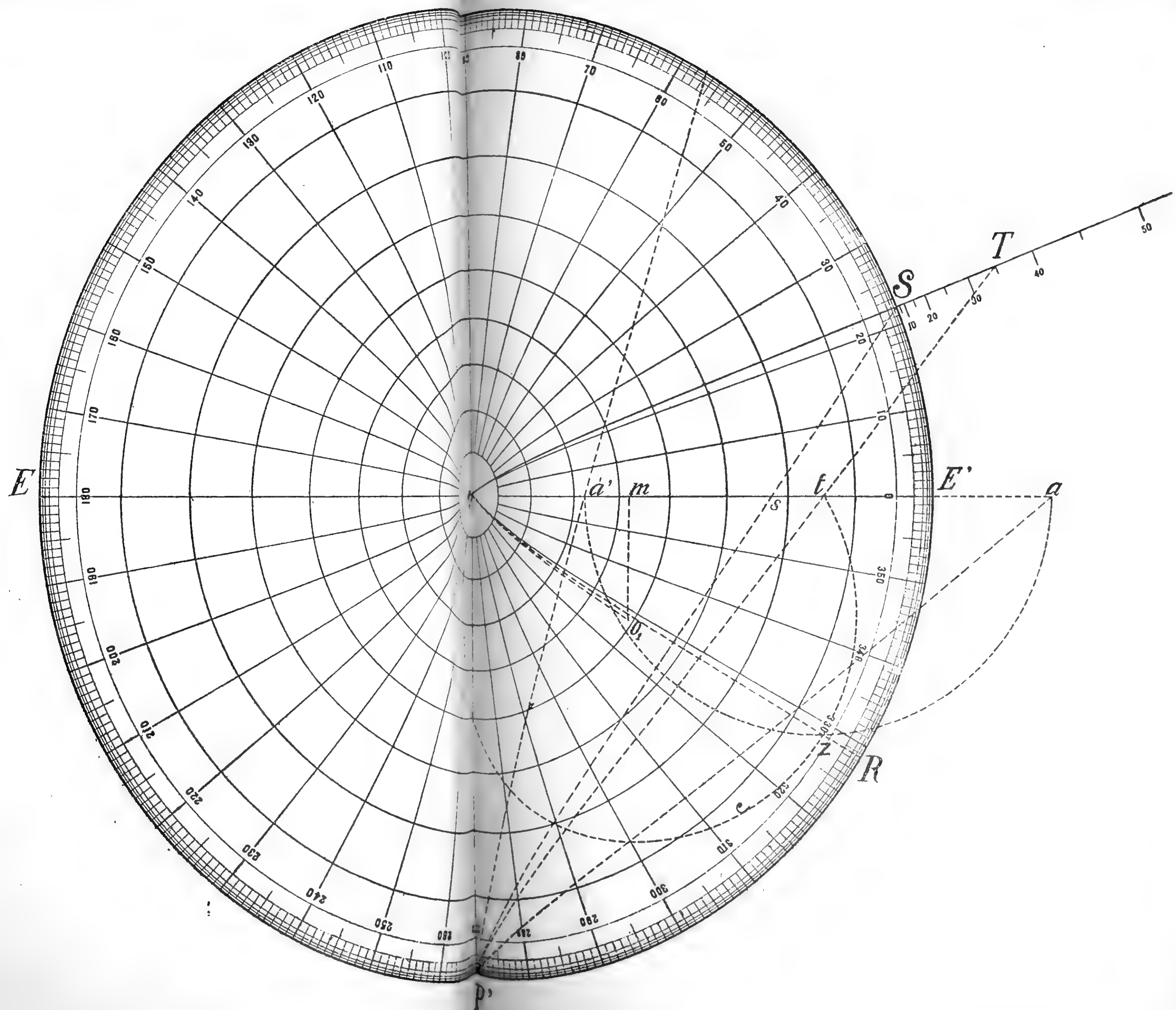


FIG. 6.ª

hállense las coordenadas acimutales del astro, corregidas de refracción y desviación de la brújula, y de semidiámetro, si es el Sol el astro observado.

Sobre *o*S márquese el punto T en la división que corresponda a la distancia cenital del astro. Únase T con P′ para obtener *t* como intersección de PT con *o*E′. Trácese el radio oo_1 formando con *o*E′ un ángulo igual al complemento del acimut del astro observado. Esta recta y la perpendicular en el punto medio *m* del segmento *ot*, determinan el centro o_1 de un arco de círculo *oct*, que es un lugar geométrico de puntos que contiene la proyección estereográfica del cenit del observador.

Para obtener otro lugar geométrico, tracemos la proyección del círculo de distancias equicenitales que, según se indicó en el procedimiento de observación de las alturas de dos estrellas, está determinado por los puntos *a* y *a′* como extremos de un diámetro.

El punto *z*, intersección de los dos lugares geométricos indicados, es la proyección estereográfica del cenit. La latitud será igual a la declinación del paralelo que pase por él, y la hora local será igual a la ascensión recta del astro con el valor angular del arco E′R reducido a tiempo. El punto R es aquel en que corta al círculo graduado el radio que pasa por *z*. Esta hora local, comparada con la marcada por el reloj en el momento de la observación, nos dará la longitud respecto del lugar a cuyo tiempo sidéreo esté ajustado el reloj.

Como indica la figura 6.ª, sólo una parte se utiliza en el trazado, y será conveniente prescindir de la porción no utilizada a fin de poder aumentar, dentro de dimensiones límites, el tamaño de la proyección, y con ello la precisión en la determinación.

Cuando el astro observado sea el Sol, como su declinación máxima es inferior a 24°, será suficiente el empleo de un sector de 115°.

Si es una estrella el astro observado, puede ser insuficiente un sector de 115°, y deberá tener una amplitud tanto mayor cuanto mayor sea la declinación de la estrella.

Las dimensiones del dibujo podrán reducirse notablemente si se tiene en cuenta la siguiente consideración: La posición del punto *t* sobre la recta OE′ es función de la distancia cenital y de la declinación del astro observado. Si se trata de observaciones del Sol será, pues, una función de dos variables. Una de estas variables, la declinación, está sujeta a oscilaciones tan lentas, que bien puede considerarse como constante dentro de un intervalo de tiempo proporcionado.

Podemos, pues, considerar como constante la declinación, asignándole un valor determinado que, naturalmente, deberá estar comprendido entre la máxima y la mínima declinación del Sol, y con este valor de la declinación, dibujar sobre una recta una graduación que corresponda a la posición del punto t para cada uno de los valores de la distancia cenital observada.

Y claro está que será preciso construir escalas de esta clase para cada uno de los distintos valores de la declinación del Sol, siendo suficiente hacer crecer a esta variable de grado en grado desde el valor mínimo al máximo e interpolando entre dos sucesivos que correspondan a valores inmediatos de la declinación. Si estas graduaciones se dibujan a escala igual a un medio de la que sirvió para el resto del dibujo, se obtendrá la posición del punto m, en vez de la posición del punto t, con lo cual habremos obtenido una nueva simplificación.

Contribución al estudio del efecto polar en el arco eléctrico

por

Luis Vegas

INTRODUCCIÓN

Dada la enorme importancia que han adquirido, desde poco tiempo acá, los estudios espectroscópicos, sobre todo en atención a su poderosa valía para la resolución del arduo y complejo problema de la constitución de la materia, y a su aplicación a la Física estelar, se concibe que multitud de sabios tanto físicos como astrónomos, se hayan dedicado de lleno a esta clase de estudios.

De aquí la inmensa cantidad de trabajos referentes a espectroscopia, cantidad tan abrumadora que verdaderamente parece imposible que exista cuestión por resolver; pero bien puede observarse, que aunque los trabajos de espectroscopia en general son muchos, los útiles para el estudio de fenómenos concretos son relativamente pocos, y desde luego, insuficientes.

Los espectros producidos por los cuerpos son de dos clases: de *absorción* y de *emisión,* pudiendo ser estos últimos de *bandas* o de *líneas*. Hablando en términos generales puede afirmarse, que si se persigue la constitución molecular, ha de acudirse preferentemente a los espectros de absorción y de bandas, en tanto que los de líneas ofrecen mayores recursos si se intenta descubrir la constitución atómica, puesto que está fuera de duda que son emitidos por átomos en libertad. La complejidad de estos espectros de líneas puede interpretarse suponiendo que en cada átomo existen tantos focos emisores cuantas sean las líneas del espectro del elemento en cuestión, originando cada foco una de ellas; mas como este supuesto obliga a admitir estructuras atómicas en extremo complicadas, es más razonable suponer que en cada átomo existe un pequeño número de *mecanismos* emisores, a cada uno de los cuales corresponden varias líneas distinguibles por ciertas particularidades análogas. Estos grupos de origen común, de los cuales parecen ejemplo natural las *series espectrales*, pueden compararse a los armónicos emitidos por un mismo tubo o cuerda. De aquí la enorme importancia que tiene la resolución de los espectros emitidos por los cuerpos, en *series*, problema fácil para los elementos cuyos átomos tienen estructura sencilla, pero no en los que la tienen compleja. En tales casos, puede dar mucha luz el estudio de fenómenos que afecten más o menos directamente a las rayas espectrales, en atención a que parece cosa indudable que las rayas pertenecientes a una misma serie, son en general, afectadas del mismo modo. De aquí el gran interés que ofrece el estudio de estos fenómenos; aparte de que incluso pueden dar notables indicaciones sobre la constitución misma de los mecanismos emisores.

Analizando los espectros de líneas, se ha reconocido desde un principio que cada elemento produce dos distintos: el de *arco* y el de *chispa;* cuyos nombres proceden del modo ordinario de excitar la emisión en cada caso. Mas en rigor, no son incompatibles entre sí estos espectros, pues por ejemplo, en el arco aparecen también líneas características de la emisión de chispa, y tanto más fácilmente cuanto más alta es la frecuencia. El valor de la longitud de onda de una raya determinada y aun de modo más general la constitución misma de la raya, no es siempre la misma, sino que se altera frecuentemente, bien por la acción de diferentes agentes como el campo eléctrico, el campo magnético, la presión, etc., bien de un modo aparentemente espontáneo, y entre estas modificaciones circunstanciales figuran los denominados «efectos polares» por la región donde se producen, que en realidad comprenden dos formas: *aumento* de intensidad y *corrimiento* del máximo de ésta. Es el primero un efecto consistente en un esfuerzo de la intensidad luminosa de las rayas en las regiones polares y el segundo se refiere a pequeñas variaciones que se producen en la longitud de onda de algunas rayas, al pasar de la región central a la polar negativa especialmente.

Dar a conocer los resultados de mis investigaciones sobre el primero de estos efectos y las variaciones que experimenta al cambiar las condiciones eléctricas del arco, es lo que me propongo en esta Memoria.

Como la literatura referente al estudio de la emisión espectral, que puede tener relación con el fenómeno estudiado, está bastante embrollada, me parece preferible adoptar en su exposición el orden histórico, que tiene también la ventaja de manifestar al lector el verdadero proceso seguido en esta clase de investigaciones.

I

Ya en el año 1894 Thomas (24) da una ligera idea de la constitución del arco eléctrico, como resultado de sus estudios sobre espectros de arcos entre dos carbones, con sales metálicas, valiéndose del procedimiento fotográfico. Deduce que el arco en esas condiciones está constituído por un núcleo y una envoltura. En el núcleo se encuentran los cuerpos que emiten los espectros de bandas, combinaciones del carbono con los gases atmosféricos; en la envoltura circulan del polo positivo hacia el negativo los vapores que provienen de las sales disociadas, que en seguida se combinan con el oxígeno del aire.

Más tarde Arthur L. Foley (26) estudia los espectros de doce elementos Cr, Cd, Al, Rb, Ti, Ba, Zu, Ca, Sr, K y Li, mediante carbones huecos, que rellena del elemento que estudia, y ya observa y aun interpreta el «efecto de polo» en el arco. Deduce que el arco eléctrico es electrolítico. Los elementos electropositivos se dirigen al polo negativo y los electronegativos al positivo, originando el «refuerzo» de las líneas metálicas en este polo. Busca el origen de todos estos efectos en la corriente de convección y en la diferencia de temperatura entre los dos polos del arco. También deduce que, encerrando el arco en un vaso, no se producen rayas metálicas, y atribuye este efecto a que es necesaria una rápida desintegración de los carbones para introducir en el arco los vapores del metal incluído, desintegración que deja de producirse cuando la llegada del aire es interrumpida.

Hartmann (13) y G. Eberhard, produciendo en el seno del agua un arco entre dos electrodos de magnesio, de sílice, de zinc y de cadmio, ven aparecer en su espectro ciertas rayas que son consideradas como *características* del espectro de chispa; algunas muy intensas se hacen bastante mejor definidas que en la chispa, donde son débiles y difusas. Puede suponerse, según los autores, que la presencia del agua tiene por efecto enfriar los electrodos, haciendo entonces al arco más semejante a la chispa; sin embargo, una corriente de aire líquido a través del arco, no produce ningún cambio en el espectro. Por el contrario, deducen que, haciendo saltar la chispa entre un electrodo de hierro y una superficie de zinc, algunas rayas son transformadas como lo hacen en el arco. Este segundo hecho lo atribuyen los autores a un exceso de vapores metálicos, y piensan que la transformación de las rayas del arco en el agua debe ser debida a la presencia del hidrógeno. Han obtenido un efecto del todo semejante, haciendo saltar el arco en una corriente de este gas.

Estudiando también Hartmann (14) el espectro del magnesio, observó que la raya λ 4481 no se percibe bien con una intensidad notable, más que en la chispa condensada. Busca en qué condiciones se le puede ver en el espectro de arco, y llega a la sorprendente conclusión de que aparece tanto más fuerte cuanto más débil sea la intensidad de la corriente. De este experimento, y de algunos otros llevados a cabo por el autor, deduce que las vibraciones moleculares que dan origen a las rayas de chispa, no tienen un origen térmico, sino un origen esencialmente eléctrico.

Henry Crew (1) ha estudiado también la aparición de la raya de chispa λ 4481 del magnesio en el espectro, valiéndose sucesivamente de una red plana y de un oscilógrafo de Duddell, y buscado ciertas condiciones eléctricas necesarias para su aparición. Modifica el arco soplándole y cambiando la inductancia del circuito, y también rodeándole de diversas atmósferas. Todos estos cambios producen variaciones más o menos importantes en la fuerza electromotriz. El autor ha encontrado que cada vez que se produce una extracorriente notable, es cuando aparece en el arco la raya λ 4481 de chispa. Después de un estudio detenido, deduce también el autor, que una fuerza electromotriz elevada y rápidamente variable, es una condición necesaria para la aparición de las rayas de chispa en el espectro del arco, y que la aparición de rayas de chispa en el espectro del arco cuando se le rodea de hidrógeno y otros gases es debida a que estas atmósferas producen en el arco rupturas más rápidas.

A. S. King (2) estudia los espectros de chispa y de arco en el cobre, haciendo variar entre límites los más lejanos posibles, las condiciones necesarias para su producción.

En la chispa los elementos más activos para producir diferencias de intensidad relativa en las rayas del espectro del cobre, son: la introducción de autoinducción en el circuito, el empleo de electrodos bastante finos para ponerse al rojo, y el empleo de atmósferas distintas del aire. Las grandes variaciones de capacidad o de fuerza electromotriz producen poca variación en el espectro. Lo mismo que sucede para otros elementos estudiados, en el espectro del cobre, pueden aislarse un grupo de líneas, sobre todo en el ultravioleta, que depende principalmente de la intensidad y de la frecuencia de las oscilaciones, otro grupo de rayas que dependen en menor grado, de la acción eléctrica, y por último, otras rayas tienen un origen bastante más complejo. El voltaje del circuito empleado varía entre 36 y 440 voltios, y la intensidad de la corriente entre 0,5 y 54 amperios.

Estudia también corrientes más débiles; pero entonces el arco se interrumpe constantemente, dando lugar a una sucesión de relámpagos, en los cuales la intensidad no se eleva por encima de 0,3 amperes. Deduce que las variaciones de intensidad de la corriente y el empleo del arco interrumpido, son las causas que tienen más influencia en las variaciones del espectro, en tanto que las variaciones de voltaje no producen efecto alguno apreciable.

Según el autor, las variaciones en la intensidad de la corriente no hacen aparecer en el espectro de arco las rayas que comúnmente están ausentes, pero tienen gran influencia sobre las rayas de chispa sensibles a la self-inducción que introduce en el circuito del arco. Estas rayas son muy débiles en un arco continuo y de pequeña intensidad (220 voltios, 0,5 amperios); pero, por el contrario, son fuertes y muy intensas con un arco de intensidad más pequeña aun, pero discontinuo (440 voltios, 0,3 amperios), y algunas veces llegan a ser en este caso más intensas que en un arco de más intensidad (220 volt., 5 amp.). Piensa el autor, como resumen de sus investigaciones, que los cambios en el espectro no pueden ser explicados de una manera satisfactoria por cambios de densidad del vapor. Comparando el espectro de arco con el de chispa bajo ciertas condiciones, y teniendo en cuenta posibles oscilaciones en el arco, fuertes con una corriente intensa, reducidas en un arco débil y continuo, y de nuevo reforzadas en el arco interrumpido, se justifica, según el autor, la conclusión de que en el arco como también en la chispa, la intensidad relativa de un gran número de rayas (al menos en el cobre que es el que especialmente estudia) depende especialmente del carácter de las oscilaciones.

J. Barnes (15), tratando de explicar el fenómeno que ocurre con la raya λ 4481 del espectro del magnesio, que es muy intensa en el espectro de las estrellas, en tanto que en los focos terrestres es débil o no aparece; cosa que Scheiner atribuía a la temperatura de las estrellas, pero que Hartmann (13), según hemos visto anteriormente, dedujo que esta raya el de chispa, aunque se la puede ver en el espectro de arco bajo ciertas condiciones eléctricas, sin poder deducir de su presencia ninguna condición sobre la temperatura del foco que la origina; deduce que en el aire a la presión atmosférica las rayas del arco se debilitan cuando la intensidad de la corriente disminuye, en tanto que la raya de chispa se refuerza notablemente, y a intensidad constante las rayas de arco se debilitan cuando la presión decrece, en tanto que sucede lo inverso con la raya de chispa. Estos mismos fenómenos se producen en atmósfera de hidrógeno, pero se manifiestan en menor grado.

B. Walter (18), estudiando los espectros de chispa producidos entre electrodos hechos con aleaciones metálicas para comprobar los estudios realizados por Kowalski y Huber, deduce la siguiente explicación de los fenómenos que ocurren en el arco; explicación que, según el autor, confirma a su vez la coexistencia de rayas de arco, no afectadas por un campo magnético, y de rayas de chispa que aparecen en las inmediaciones del catodo, atraídas hacia él por el campo magnético que se produce, y también comprueba la desaparición de las rayas de chispa producidas por la acción de la self-inducción. Las partículas metálicas arrastradas hacia el catodo, llevan consigo cargas negativas más o menos grandes y que las conservan cuando están incandescentes en las proximidades del catodo, pero que las pierden luego lentamente en la parte media de la chispa; estas partículas electrizadas son las que emiten el espectro de chispa, en tanto que producen el espectro de arco cuando están desprovistas de cargas eléctricas. El efecto de la self-inducción es aumentar el período, disminuyendo por consecuencia, la intensidad media de la corriente en cada chispa, siendo entonces necesario mucho más tiempo para que se produzca la incandescencia de las partículas pulverizadas, teniendo tiempo suficiente de perder su carga antes de llegar a ser luminosas. Se concibe por tanto, perfectamente, que un aumento de la self-inducción del circuito produzca la desaparición de las rayas de chispa, sobre todo en el espectro de aquellos metales que son más difíciles de pulverizar.

E. Neculcea (21) deduce de un estudio muy detallado sobre la constitución de los espectros ultravioletas de las descargas oscilantes, las siguientes importantes conclusiones: Que en la región extrema ultravioleta de los espectros de chispa, la self-inducción actúa en general, de una manera muy intensa; que las diferentes rayas ultravioletas de los metales que estudia, pueden clasificarse en tres grupos, desde el punto de vista de la variación de su intensidad por causa del aumento de la self-inducción en el circuito de descarga, comprendiendo el primer grupo las rayas que se debilitan rápidamente con el aumento de la self-inducción; el segundo grupo, las que se debilitan gradualmente con el aumento de la self; y el tercero, las rayas que presentan máximo y mínimo relativo de intensidad cuando aumente la self en el circuito de descarga. Esta misma clasificación la ha hecho Hemsalech en su estudio sobre la región visible de los espectros de chispa.

Estas tres clases de rayas pueden coexistir separadamente en los espectros estudiados. Los grupos que se encuentran más frecuentemente son el primero y segundo, pues el tercero es raro en la región extrema ultravioleta. La self-inducción modifica la frecuencia y la intensidad de las oscilaciones de la descarga del condensador, de donde resulta que las vibraciones forzadas resultantes de los átomos luminosos pueden variar y entrañar, como resultado, el aumento de intensidad de algunas rayas y la disminución de la intensidad de otras. La capacidad aumentará la densidad del vapor metálico, y probablemente la temperatura, habiendo algunos físicos que creen haber notado una modificación en los espectros, teniendo precisamente como origen este calor, pero más modernamente, afirma el autor, no puede darse una explicación satisfactoria y completa del efecto producido por la modificación de las condiciones eléctricas del circuito de descarga sobre la variación de la intensidad de las rayas espectrales, por ser muy incompletos los conocimientos referentes a la emisión luminosa de un vapor metálico excitado por la descarga eléctrica.

Fowler (16) estudia la región visible del espectro del hierro y observa la presencia de rayas de chispa emitidas en los alrededores de los electrodos, aunque no da explicación concreta del fenómeno.

W. J. Humphreys (4) estudia, la causa por la cual el espectro de arco varía con la región del arco examinada, apareciendo según él, las rayas metálicas más pronunciadas en la región del polo negativo, y opina que esto debe provenir de la presencia de un número enorme de corpúsculos negativos, en las cercanías del catodo, provistos de velocidades tan grandes que son capaces de poner en vibración los residuos positivos de los átomos, y tal vez también se produzca en el mismo lugar una acumulación de estos residuos positivos.

La ionización por sí misma, no puede explicar la producción de rayas espectrales, puesto que estas rayas son menos visibles precisamente cerca del polo positivo, donde este fenómeno es más pronunciado.

W. Geoffrey Duffield (17), estudiando el espectro del hierro, observa que en el arco aparecen ciertas rayas que son más intensas en las proximidades de los polos y disminuyen de intensidad hacia el centro. El autor da la lista de estas rayas «polares» comprendidas entre las longitudes de onda λ 2400 a λ 3500, y hace notar que la mayor parte de estas rayas tienen la misma intensidad en los dos polos, y algunas llegan a ser más intensas en el polo positivo. Entre λ 2350 y λ 2631 casi todas las rayas del espectro aparecen confinadas a las proximidades de los polos, pero se observa que estas rayas son precisamente las rayas del espectro de chispa condensada, con las mismas intensidades relativas.

En cuanto se rebasa la longitud de onda λ 2361, casi todas las rayas son más intensas en el centro, aunque aparecen también algunas rayas polares, a las cuales corresponden casi siempre rayas de chispa, que en esta región son en número mucho menor y de más débil intensidad.

Se observa también con claridad, que sobre todo en la región extrema ultravioleta, las rayas polares son estrechas y perfectamente definidas, en tanto que las rayas centrales son nebulosas y difusas.

W. B. Huff (7) observa, que para corrientes débiles, la descarga presenta en los dos polos de un arco caracteres esencialmente diferentes. Para corrientes intensas y grandes cantidades de vapores metálicos, la estructura de la descarga no es tan bien definida. La descarga, en el polo negativo parte de una pequeña región muy caliente y se difunde hacia el electrodo positivo; parece ser que la descarga está formada por una gran corriente de partículas sólidas emitidas por el polo negativo incandescente y dotadas de pequeña velocidad, comparada con la velocidad de las partículas que forman la descarga en los tubos de vacío, o en la chispa a la presión ordinaria.

Los que han hecho un estudio más completo y detallado de cuanto se relaciona con el espectro del arco entre electrodos metálicos, y aun con la naturaleza misma del arco, han sido Ch. Fabry y H. Buisson (5). Como resumen de sus cuantiosas investigaciones, deducen que en el arco eléctrico los iones negativos los emite el catodo elevado a una alta temperatura, quedando suprimida por tanto, la necesidad de ionización por los iones positivos, no siendo tampoco necesario que el campo eléctrico alcance un gran valor. La teoría del arco eléctrico puede ahora formularse así: los iones negativos son emitidos por el polo negativo, y en su veloz carrera hacia el anodo producen por choques, iones positivos (lo que no exige un campo eléctrico muy intenso); los iones positivos así formados, se dirigen al catodo, chocando con él, y manteniéndole por efecto de este bombardeo, a la alta temperatura necesaria para la emisión de nuevos electrones. Como se ve, el catodo juega en este fenómeno un papel muy importante. El arco eléctrico es susceptible de comportarse de dos modos diferentes, según las condiciones eléctricas, aunque en ambos el espectro presenta el mismo aspecto en los alrededores del polo negativo, siendo también necesaria en ambos la elevada temperatura del catodo, pues han demostrado que con un catodo frío no se produce arco, en tanto que sí puede existir con un anodo frío. En las proximidades del catodo hemos visto que los iones positivos deben tener una gran velocidad, necesaria para mantenerle a la elevada temperatura que exige la producción del arco, mediante choques, por tanto, el campo eléctrico debe tener en esta región un valor mayor que en el centro del arco, y precisamente se ha visto que en esta región aparecen rayas polares, que son las rayas de chispa del metal.

De otra parte, hemos visto que es necesario para que el arco se mantenga, que los electrones emitidos por el catodo produzcan, al menos en alguna parte del arco, iones positivos por choques con los átomos neutros; pues bien, este fenómeno tiene lugar en las proximidades del anodo, donde debe existir un campo eléctrico muy intenso. En esta región se observa en el espectro, que son emitidas rayas polares, que son rayas de chispa (primer régimen, en el que la ionización se produce por choque de los electrones con los átomos neutros del vapor metálico) o el espectro del gas ambiente (segundo régimen, en el que la ionización se produce a expensas de las moléculas del gas).

Es fácil comprender que la dependencia entre el potencial, la intensidad de corriente, distancia entre electrodos y demás factores que influyen en la producción del arco, debe ser extremadamente compleja. La composición de la atmósfera en cuyo seno salta el arco, su temperatura, y la movilidad de iones, todo depende de estas condiciones. El crecimiento de tensión en función de la presión, debe corresponder a la disminución de movilidad de los iones.

Desde el punto de vista de emisión de electrones, los diversos cuerpos calientes se comportan de muy distinto modo. Hay emisión muy enérgica para los óxidos metálicos, y menos enérgica para los metales puros; así el arco entre electrodos de hierro, no es estable nada más que cuando se produce una gota de óxido sobre el electrodo negativo, y no puede el arco existir, si por cualquier causa, se impide la formación de esta gota. En los metales muy volátiles, este efecto no es apreciable.

R. Rossi (6) trata de encontrar el origen de las rayas polares que aparecen en el espectro del arco entre electrodos metálicos, y deduce que puede sin error afirmarse que las rayas polares del espectro arco son rayas características del espectro de chispa, y que el origen de este fenómeno es la distribución de la temperatura en el seno del arco, y los distintos gradientes de potencial que se producen en las distintas regiones del mismo.

Haciendo investigaciones sobre el espectro del hierro, Charles E. St. John y Harold B. Babcok (9) llegan a las conclusiones siguientes, referentes al llamado por ellos «efecto polar», referente al corrimiento de las rayas en la región polar negativa, y que hacemos constar aquí para presentar al lector un conjunto de los fenómenos que ocurren en el arco y que pueden ser útiles para una explicación de lo que en el arco eléctrico sucede, deducen, pues, que los corrimientos de la máxima intensidad de ciertas líneas no simétricas, al pasar desde el centro al polo negativo del arco, son manifestados: 1.° Por la persistencia de los corrimientos, cuando las anchuras de las líneas en el polo son menores que en el centro del arco; 2.° Por el cambio de la intensidad máxima de las curvas fotométricas, y finalmente, 3.° Por la posición relativa de la máxima en el polo y en el centro, tomando como referencia líneas superpuestas de absorción de iodo. Las observaciones hechas sobre líneas simétricas sometidas a considerables cambios de presión, no demuestran que se realice ningún aumento general de ésta al pasar desde el centro al polo negativo, suficiente para la producción de los corrimientos observados. Las longitudes de onda de las líneas sensibles no son afectadas por un cambio décuple en la densidad del vapor de hierro y son independientes de un cambio de temperatura entre los límites de observación (2100° a 2600°), y con excepción de algunos casos especiales, parece ser que estos corrimientos polares son independientes de las condiciones eléctricas, pues desaparecen en el vacío, y tampoco están íntimamente relacionadas con las diferencias de luminosidad entre el polo negativo y el positivo.

La variación de este efecto polar con la longitud de onda, no sigue la misma ley que los corrimientos por presión, y por consiguiente, un aumento de presión localizado en el polo y en el seno del arco; donde es proporcionalmente mayor la contribución a la intensidad total de estas líneas, por lo menos, en comparación con otros grupos; no lo explica por sí solo.

Entre las longitudes de onda λ 2979 y λ 6678 de las 1570 líneas examinadas, 286 manifestaban corrimiento hacia el rojo, y 80 hacia el violeta, y las líneas afectadas no aparecen distribuídas en el espectro con ninguna clase de uniformidad, aunque muestran una cierta tendencia a agruparse en ciertas regiones, y en las regiones comprendidas entre λ 4900 y λ 5050, λ 5500 y λ 6000, casi todas las líneas tienen este carácter.

Aun cuando la corriente sea constante, sólo una zona central estrecha queda prácticamente sin afectar por el efecto polar considerado, y por tanto, creen necesario los autores tener en cuenta este efecto polar, cuando el arco se emplea en comparaciones de intensidad, como patrón para determinación de longitudes de onda y en investigaciones astrofísicas.

La causa de estos corrimientos en el arco eléctrico ha sido estudiada por Charles E. St. John y Harold B. Babcock (9), Walter T. Whitney (11) y Henry G. Gale y W. T. Whitney (10); los dos físicos primeros en el arco de hierro, y los segundos en el de calcio, atribuyendo el corrimiento en el polo, a la mayor amplitud de vibración de los electrones. Parece, aunque de modo poco preciso, que depende del gradiente de intensidad existente a lo largo del arco.

T. Rodys (12), al hacer la crítica de los trabajos anteriores de Gale y Whitney, demuestra la poca exactitud de las dependencias existentes entre los corrimientos y el gradiente de intensidad, puesto que la intensidad de las líneas es grande en aquellas regiones donde ocurre el fenómeno, pero lo mismo ocurre en líneas que no han sufrido corrimiento alguno; por este y otros motivos (*), cree que el fenómeno en cuestión depende del carácter no simétrico de las líneas espectrales, pero tanto la intensidad, carácter no simétrico, etc., no son causas, sino efectos que le acompañan, debidos probablemente, a la misma causa que ellos.

Hace ver también, que la causa no es el aumento de amplitud en la vibración de los electrones en el átomo, puesto que, siendo el procedimiento más seguro de aumentar dicha amplitud la elevación de temperatura, debieran ser los corrimientos en el arco un efecto de la temperatura, cosa que no es cierta, puesto que, entre otras razones, los corrimientos alcanzan mayor grado en el polo negativo, en tanto que el polo más caliente está plenamente confirmado (16) que es el positivo.

Como resumen de multitud de experimentos realizados con electrodos de diversas sustancias, y de las observaciones de W. G. Duffield (28), deduce el autor, que no puede haber otra causa que explique satisfactoriamente los corrimientos de ciertas líneas espectrales, que la densidad del vapor metálico; mas la comprobación de este aserto es difícil, porque actualmente no se conoce ningún foco luminoso donde la densidad del vapor pueda variarse entre límites bastante amplios.

II

El aparato empleado en mis investigaciones ha sido un espectrógrafo de la casa Hilger de Londres. Consta de un colimador con una lente de cuarzo en su extremo B, colocada en un fuelle para facilidad de enfoque del aparato, y en el otro extremo lleva un tubo enchufado, que es el portador de la rendija A. La graduación de la rendija se efectúa mediante un tornillo micrométrico que aprecia 0,01 de milímetro.

La plataforma sobre la cual descansa el sistema dispersor, se compone de dos partes: una, fija al aparato, que puede efectuar giros de 360°, y otra que va colocada sobre la anterior mediante tornillos de nivel.

El aparato fotográfico lleva un objetivo de cuarzo y un fuelle posterior muy ancho, con un soporte destinado a recibir el chasis. Ese soporte gira alrededor de un eje vertical, determinándose estos giros mediante el círculo graduado E. El chasis puede desplazarse de arriba abajo en el soporte, fijándose su posición mediante una escala vertical que el soporte

(*) *Kodaikanal Observatory Bulletin*, números 38 y 40.

lleva. El conjunto del aparato fotográfico puede girar sobre un círculo graduado D, concéntrico con el eje vertical que pasa por el centro de la plataforma del prisma.

Mediante todos estos movimientos se consigue colocar la placa fotográfica tangente a la diacáustica, producida por no estar las lentes corregidas de aberración cromática. Sin embargo, en la región ultravioleta, por mí estudiada, sale casi la totalidad de la placa enfocada, por ser en ella la diacáustica sensiblemente una recta.

Las lentes son plano-convexas de 47 milímetros de diámetro, y talladas normalmente al eje óptico, siendo levogira la lente del colimador y dextrogira la del objetivo de la cámara fotográfica, con objeto de compensar la polarización. El sistema dispersor está formado por dos prismas yuxtapuestos de 30°, tallado el uno en un bloque de cuarzo levogiro y el otro en un bloque dextrogiro, y de tal modo, que cada uno tenga una de las caras del ángulo refringente perpendicular al eje óptico. Este es el sistema de Cornú, mediante el cual, en la posición de mínima desviación que es en la que debe operarse, los rayos luminosos atraviesan simétricamente el prisma, según el eje óptico, desapareciendo así la doble refracción y la polarización rotatoria. Con objeto de alcanzar una mayor dispersión, he empleado varias veces un sistema de dos prismas, cada uno de los cuales tiene la estructura descrita; más entonces me fué preciso utilizar un soporte accesorio, construído con este fin en el Laboratorio de Automática, que consiste en dos plataformitas circulares graduadas A, A′ que giran independientemente una de otra, sobre cada una de las cuales se coloca un prisma. Este soporte, cuyo esquema presento adjunto, se coloca sobre la plataforma unida al soporte del aparato, de la cual ya he hablado.

El enfoque del aparato, por tratarse de la región ultravioleta, es muy complicado. Felizmente, por el uso continuo que se hace de este aparato en el Laboratorio, sólo hemos tenido que hacer las pequeñas correcciones frecuentemente necesarias. La técnica empleada para esta operación es la de Neculcea (21), empleada ya en este Laboratorio por el Profesor del Campo en su estudio sobre el espectro de bandas del silicio (22), y por el Doctor Catalán Sañudo, al hacer el estudio espectro-químico del magnesio (23). Para el enfoque se emplea el espectro del hierro, que es muy rico en rayas y permite determinar muy bien la región netamente enfocada.

El estudio de espectrogramas lo he efectuado con un comparador, construído en el Instituto del Material Científico, que permite apreciar $\frac{1}{1000}$ de milímetro, si bien no he hecho medidas de precisión, pues para mi objeto no hacía falta más que la identificación de rayas.

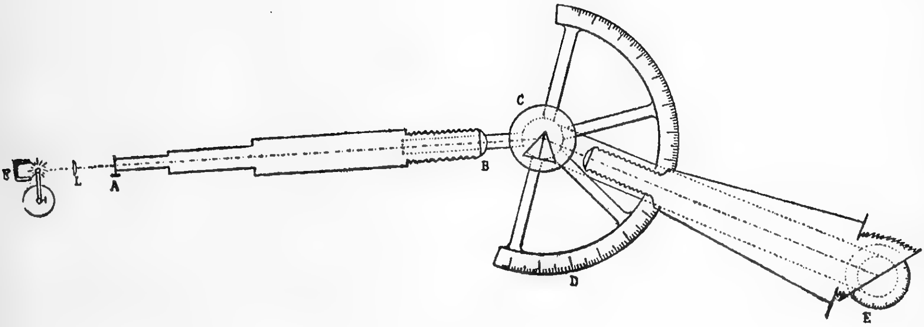


FIG. 1.[a]

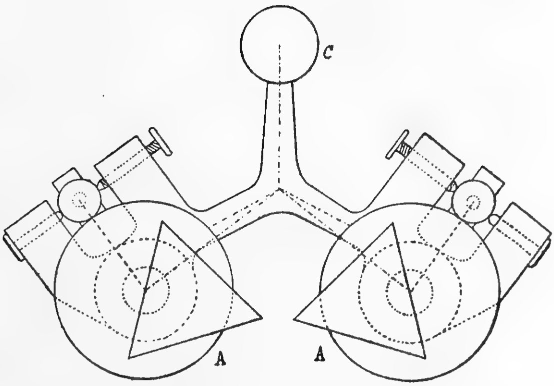
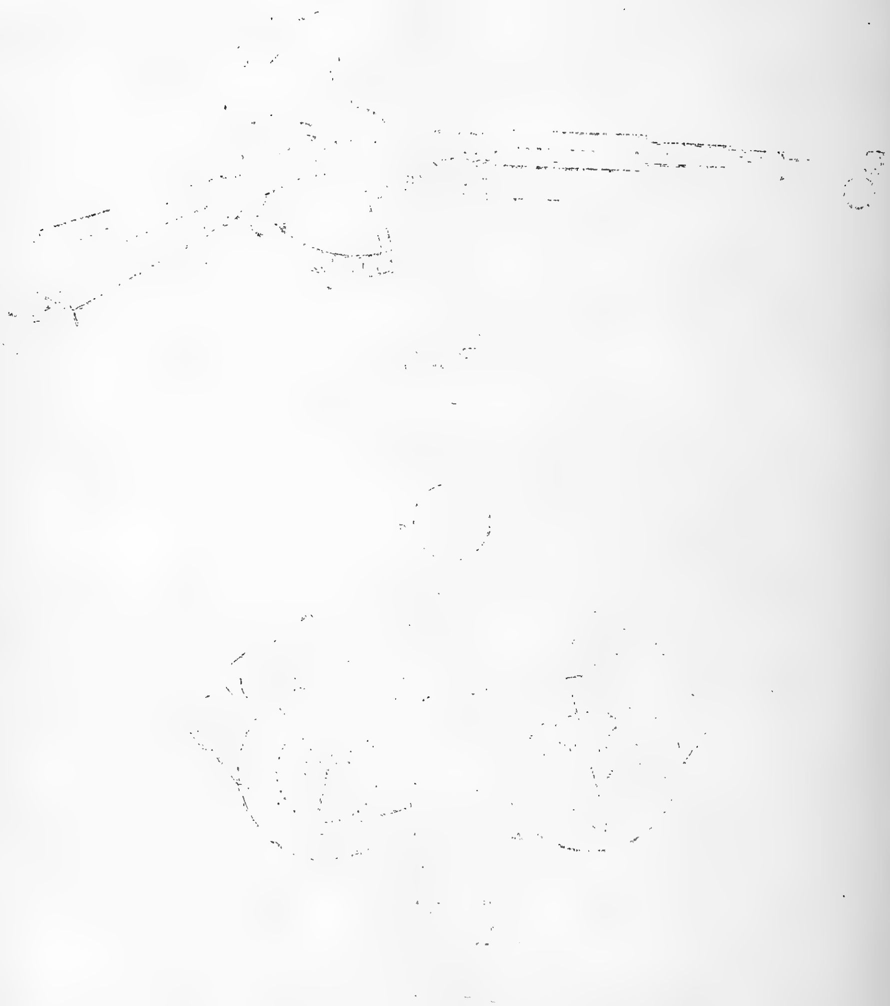


FIG. 2.[a]



Para mis estudios he operado del modo siguiente:

Hacía saltar el arco entre dos electrodos del metal estudiado, utilizando corriente continua, y, mediante un reostato variaba las condiciones eléctricas del arco, midiendo la diferencia de potencial entre los electrodos y la intensidad de corriente mediante un voltímetro y un amperímetro intercalados en el circuito; también podía variar la distancia entre electrodos. Con objeto de obtener los espectros polares bien marcados, producía un pequeño soplo sobre el arco con un electroimán F, que crea un campo débil. De este modo he podido fijar los puntos de los electrodos entre los que salta el arco en la región que miraba hacia el espectrógrafo, al mismo tiempo que obtenía un régimen más constante del arco. Mediante una lente plano-cilíndrica de cuarzo L, producía una imagen real del arco sobre la rendija del colimador, obteniendo así sobre la placa fotográfica las rayas estudiadas en sus tres porciones: las dos polares y la central. Mediante el movimiento vertical del chasis, podía sacar varias fotografías en una misma placa.

Operé primeramente con electrodos de cobre electrolítico de 9 milímetros de diámetro, obteniendo multitud de fotografías, variando todas las condiciones del arco, incluso la situación de los polos, pues unas veces he colocado el polo positivo arriba y otras abajo. Las únicas condiciones que han permanecido invariables, son las relativas a la atmósfera en cuyo seno salta el arco, pues siempre se ha producido en el aire a la presión ordinaria.

Como las condiciones eléctricas de intensidad y caída de potencial, y la distancia entre los electrodos están íntimamente ligadas en la producción del arco eléctrico, para poder determinar mejor la acción particular de cada factor he obtenido cuatro grupos de fotografías: 1.° Manteniendo la intensidad constante, variando la distancia y la caída de potencial; 2.° Manteniendo la caída de potencial constante, y variando simultáneamente la intensidad y la distancia; 3.° Permaneciendo constante la distancia, y cambiando la intensidad y la caída de potencial; y 4.° Variando todos estos factores.

La región principalmente estudiada, por existir en ella menos rayas y ser, por tanto, más perceptible el fenómeno, es la comprendida entre λ 2250 y λ 3100. Además, según diremos luego, en las otras regiones el fenómeno se produce con idénticos caracteres que en ésta.

He aquí el resultado de mis investigaciones:

Un primer examen de los espectrogramas obtenidos con pequeñas intensidades de corriente (menores de 2 amperios), permite clasificar las rayas en tres grupos: 1.° Aquellas que se extienden con igual intensidad en las tres regiones, central y polares. 2.° Las que presentan «efecto polar», es decir, que tienen gran intensidad en las regiones polares y poca en la central. 3.° Rayas francamente polares, que aparecen muy marcadas en la región del polo negativo, y no se aprecian o aparecen poco marcadas en la región del polo positivo, careciendo de región central. Existe además el espectro de bandas del gas ambiente.

Conviene insistir en que este efecto polar, cuyas propiedades me he propuesto estudiar, no debe confundirse con el desplazamiento que sufren muchas rayas en las regiones polares, que ya dijimos ha sido estudiado por Charles E. St. Jhon y Harold B. Babcok (9) y buscada su causa por Royds (12).

Veamos cuáles son los cambios que se producen en los diferentes grupos señalados, al cambiar las condiciones del arco:

1.° *Manteniendo constante la intensidad de corriente.*—Como resumen del estudio de 15 placas obtenidas con distintas intensidades, y de las que es muestra la A, que corresponde a 2,5 amp. y 45 y 60 voltios de caída de potencial entre los electrodos, puede afirmarse que no varía absolutamente nada el aspecto del espectro con la variación de potencial.

2.° *Manteniendo constante la caída de potencial entre los electrodos.*—La fig. B es muestra de las veintitantas placas obtenidas con este objeto, correspondiéndoles un potencial constante de 30 voltios e intensidades de 2 amp. (1), 4 amp. (2), 6 amp. (3), 8 amp. (4) y 10 amp. (5).

El estudio detenido de todas ellas conduce a las siguientes conclusiones:

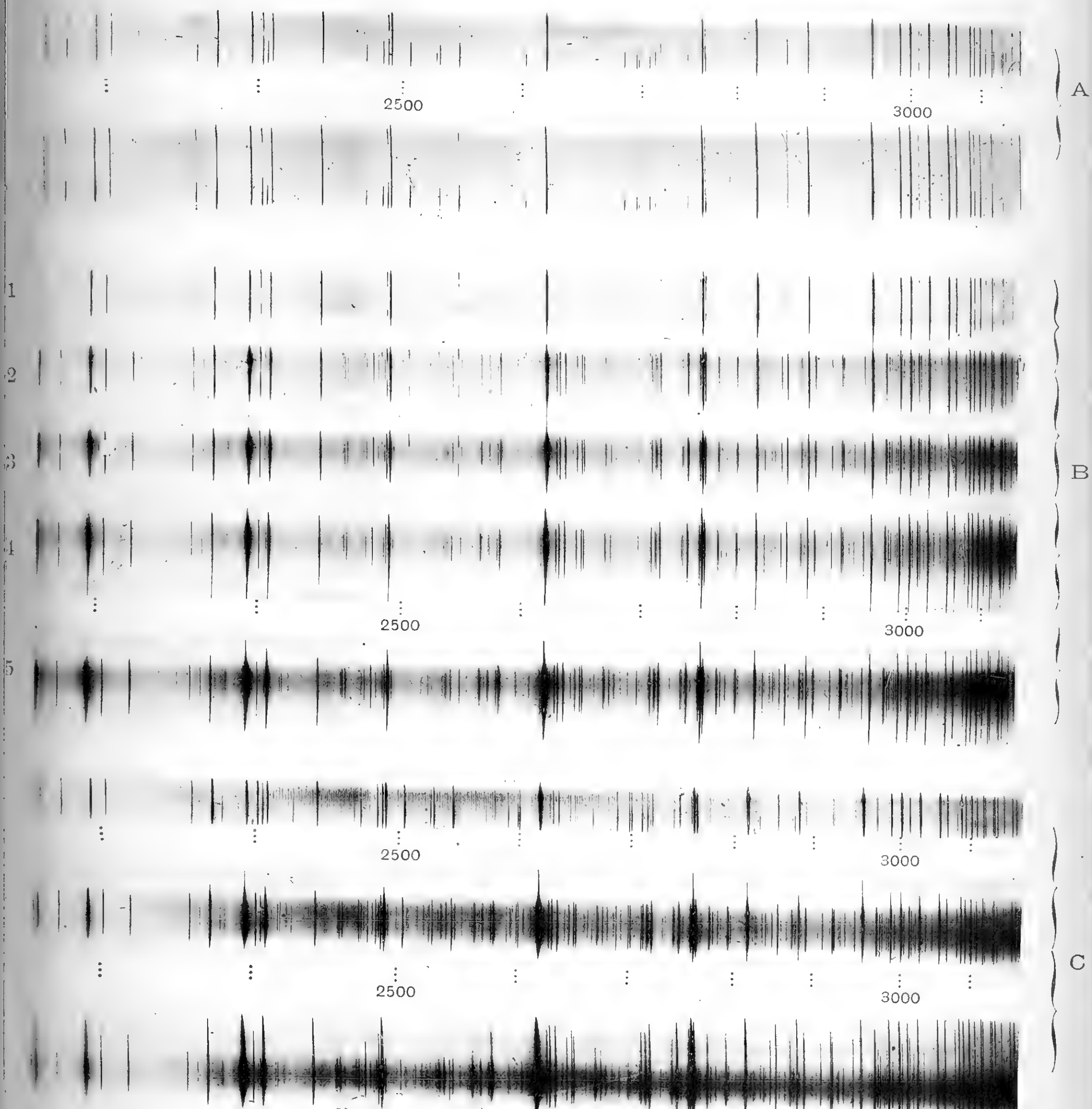
a) El primer grupo de rayas no es influído absolutamente en nada por las variaciones de intensidad.

b) Las rayas del segundo grupo, o sea las que a pequeña intensidad aparecen muy reforzadas en los polos, van perdiendo gradualmente el efecto polar con el aumento de intensidad. Ello se produce reforzándose la región central y debilitándose las polares, hasta igualarse en intensidad las tres regiones; pero de tal modo, que la cantidad total de luz emitida, esto es, la intensidad *total* de la raya, es constante. Parece, pues, que el aumento de intensidad de corriente actúa sobre este grupo de rayas espectrales, de tal modo que reparte la energía luminosa de un modo uniforme a lo largo de la raya.

c) Las rayas francamente polares, que en un principio aparecen con gran intensidad en la región del polo negativo, comienzan por debilitarse en esta región, en tanto que en la positiva permanecen con la misma débil intensidad, hasta llegar un momento en que se igualan ambas regiones. Si el aumento de la corriente prosigue, la disminución de intensidad con-

ESPECTROS DE ARCO ELÉCTRICO

Cobre



Clichés de L. Vegas

Fototipia de Hauser y Menet.-Madrid

tinúa uniformemente hasta la extinción; en todo el proceso, la intensidad en la región central es nula.

d) El espectro del gas ambiente va desapareciendo poco a poco, y no de una manera brusca, a medida que aumenta la intensidad de corriente, comenzando a desaparecer por la región polar negativa y acabando por la positiva; y, simultáneamente, aparece un nuevo grupo de rayas con claridad también creciente, que al principio no existen, y que hacen su aparición por la región polar negativa cuando comienza la desaparición del espectro del gas ambiente, extendiéndose en el sentido del arco conforme el del gas desaparece, y llegando a manifestarse claramente en sus tres regiones cuando aquél desaparece del todo.

3.° *Manteniendo constante la distancia entre los electrodos.*—La fig. C, obtenida con una distancia de 8 milímetros, con potenciales de 40, 32 y 27 voltios, e intensidades de 2, 5 y 8 amp., respectivamente, es una muestra de las treinta y tantas fotografías obtenidas con este objeto. Se observan claramente los cuatro grupos de rayas de que hemos hablado, siguiendo cada grupo el mismo proceso que dije en el caso anterior, conforme aumenta la intensidad de corriente, aun cuando disminuye al mismo tiempo el potencial. Todo lo dicho es independiente de que el electrodo superior sea el positivo o el negativo.

4.° *Variando las tres condiciones simultáneamente.*—Se observa en los espectrogramas obtenidos lo mismo que en el caso anterior.

Con objeto de determinar las rayas del espectro que pertenecen a cada grupo de los ya mencionados, practiqué un estudio detenido de los espectrogramas; y como mi objeto no era determinar rayas nuevas o corregir las ya determinadas, me concreté más bien a su identificación, para cuyo trabajo utilicé las tablas de Eder y Valenta (31, 32), F. Exner y Haschek (29, 30), Kayser y Runge (34), Kayser (35), y Hartley y Adeney (33).

Descartadas bastantes rayas de impurezas que llevan consigo los electrodos, expongo a continuación el cuadro de las rayas, clasificadas en los grupos a que antes me he referido.

Grupo 1.º	Grupo 2.º	Grupo 3.º	Grupo 4.º	CONOCIDA EN Arco	Chispa
3073,87	»	»	»	a !	ch
»	»	»	3070,86	a !	ch
3063,50	»	»	»	a !	ch
»	»	»	3057,73	a	»
»	»	»	3053,52	a	»
»	»	»	3052,73	a	»
»	»	»	3044,18	a	»
3036,17	»	»	»	a !	ch
»	»	»	3030,33	a	»
»	»	»	3025,07	a	»
»	»	»	3022,65	a !	ch
»	»	»	3012,09	a	»
3010,92	»	»	»	a !	ch
2997,46	»	»	»	a !	ch
»	»	»	2991,91	a	»
»	»	»	2986,10	a	»
»	»	»	2982,91	a !	ch
»	»	»	2979,52	a !	ch
»	»	»	2978,42	a	»
2961,25	»	»	»	a !	ch
»	»	»	2951,38	a	»
»	»	»	2925,61	a	»
»	»	»	2924,99	a	»
»	»	»	2911,29	a	»
»	»	»	2897,77	a	»
»	»	»	2890,97	a	»
2883,03	»	»	»	a !	ch
»	»	»	2879,04	a	»
»	»	2877,97	»	»	ch
»	»	»	2875,66	a	»
»	»	»	2874,60	a	»
2824,50	»	»	»	a !	ch
»	»	»	2792,07	a	»
»	»	»	2786,65	a	»
»	»	»	2783,67	a	»
»	»	»	2782,73	a	»
»	»	2769,95	»	a	ch
»	2769,37	»	»	»	ch !
2766,50	»	»	»	a !	ch
»	»	»	2751,86	a	»
»	»	»	2751,38	a !	ch
»	»	»	2724,04	a !	ch
»	»	2719,02	»	a	ch
»	»	»	2715,67	»	»
»	»	2713,76	»	»	ch
»	»	2703,42	»	»	ch
»	»	2701,21	»	»	ch
»	»	»	2696,83	a	»
»	»	2689,56	»	»	ch
»	»	»	2687,85	a	»

Grupo 1.º	Grupo 2.º	Grupo 3.º	Grupo 4.º	CONOCIDA EN Arco	Chispa
»	»	»	2681,16	a	ch
»	»	»	2676,59	a	»
»	»	»	2672,24	a	»
»	»	2666,52	»	»	ch
»	»	»	2651,78	a	»
»	»	»	2649,93	a !	ch
»	»	»	2645,45	a	»
»	»	»	2635,02	a !	ch
»	»	»	2630,15	a !	ch
»	»	»	2627,49	a	»
2618,46	»	»	»	a !	ch
»	»	»	2605,08	a	»
»	»	2600,49	»	»	ch
»	»	2599,03	»	»	ch
»	»	2590,75	»	»	ch
»	»	»	2580,52	a !	ch
»	»	»	2579,40	a !	ch
»	»	»	2570,76	a	»
»	»	»	2569,99	a !	ch
»	»	»	2567,17	a !	ch
»	»	»	2563,54	a !	ch
»	»	»	2553,38	a	ch
»	»	»	2547,67	a	»
»	»	2545,02	»	»	ch
»	»	2529,50	»	»	ch
»	»	2526,79	»	»	ch
»	»	2506,51	»	»	ch
»	»	»	2494,97	a	»
2492,22	»	»	»	a !	ch
»	»	2489,70	»	»	ch
»	»	2485,99	»	»	ch
»	»	2473,55	»	»	ch
»	»	»	2460,98	a !	ch
»	»	»	2458,97	a !	ch
2441,72	»	»	»	a !	ch
2406,82	»	»	»	a !	ch
»	»	2403,58	»	»	ch
»	2400,18	»	»	a	ch !
2392,71	»	»	»	a !	ch
»	»	2376,51	»	»	ch
»	2369,97	»	»	a	ch !
»	»	»	2363,28	a !	ch
»	2356,68	»	»	a	ch
»	»	»	2345,59	a !	ch
»	»	»	»	a !	ch
2303,18	»	»	2319,70	a !	ch
»	2294,44	»	»	a	ch !
2293,92	»	»	»	a !	ch
»	»	»	2282,20	a	»
2276,30	»	»	»	a !	ch
2263,20	»	»	»	a !	ch

El signo (!) indica donde alcanza la raya su mayor intensidad.

Las rayas que pertenecen al primer grupo aparecen en los espectros de arco y de chispa, si bien son muy intensas en el arco y poco en la chispa; son, pues, rayas muy características del espectro del arco.

Las del segundo grupo son rayas pertenecientes también a ambos espectros, aunque aparecen en el arco con mucha menor intensidad que en el espectro de chispa.

Las del tercer grupo son características del espectro de chispa y aparecen en él con bastante intensidad.

Y, por último, los rayos pertenecientes al cuarto grupo son: unas características del espectro de arco, aunque de pequeña intensidad en relación con las del primer grupo, y otras comunes a los espectros de arco y de chispa, y más intensas en el primero que en el segundo, pero siempre de pequeña intensidad.

Adquiridas por los estudios anteriores ideas precisas respecto de las particularidades del efecto polar en la región 2250-3100, me ha sido fácil reconocer, mediante un estudio menos detenido del resto del espectro del cobre, que los fenómenos se producen siempre con caracteres análogos.

No se oculta a nadie el interés que tiene extender estos resultados a otros elementos, y para ello me he dirigido al arco de hierro y al de la plata. El primero lo he estudiado también con bastante detenimiento, sobre todo en la región comprendida entre λ 3080 y λ 2260, y aunque no se aprecian tan claramente las variaciones del espectro como en el cobre, por necesitar límites más amplios en las variaciones de las condiciones eléctricas, que los que permiten el diámetro de los electrodos y el montaje empleado, puede apreciarse suficientemente que ocurren fenómenos idénticos a los que he estudiado en el arco de cobre. Sin embargo, no es tan fácil la separación de las rayas pertenecientes a cada uno de los cuatro grupos antes citados, pues si bien las del tercero se manifiestan claramente, no sucede lo mismo con los otros tres por la multitud de rayas espectrales que el hierro posee y lo mal determinadas que están algunas de ellas.

Las dificultades que ofrece la plata con la técnica descrita son muy grandes debido a la facilidad con que se funde, principalmente, el electrodo superior. Ello ha hecho que, hasta el presente, sólo hayamos logrado resultados muy incompletos, pero que ya permiten vislumbrar una conducta idéntica a la de los otros elementos. He empleado electrodos de diez milímetros de diámetro con objeto de que, al aumentar la intensidad de corriente, no se fundan; pero en cambio, esto dificulta la estabilidad del arco entre dos puntos fijos. A pesar de todo, trabajando con intensidades de

9 a 10 amperios, ya se funden los electrodos antes de terminar el tiempo necesario para la exposición.

Todo esto ha dificultado grandemente mis investigaciones, que pienso proseguir en trabajos posteriores, cambiando algo el procedimientos ahora empleado.

III

Como al dar un esbozo de explicación física del arco eléctrico, fundándome en los fenómenos observados y en el capítulo anterior expuestos, y en otros fenómenos importantes y comprobados, estudiados por varios físicos, y de los cuales he dado una idea, aunque ligera, en la parte primera de esta Memoria, he de apoyarme principalmente en la teoría de las líneas espectrales y de la constitución del átomo, debida al doctor Bohr (36, 37, 38) de Copenhague, me parece acertado dedicar esta tercera parte a dar una idea siquiera de esta teoría tan importante, derivada de la moderna teoría del *quantum,* y que va sobreponiéndose a las teorías basadas en la radiación continua de energía.

E. Rutherford (39), al querer explicar la dispersión de los rayos α concibió que el átomo consiste en un núcleo central cargado positivamente, rodeado por un grupo de electrones, siendo en el núcleo donde está contenida la parte esencial de la masa del átomo, y teniendo dimensiones muy pequeñas, comparadas con las distancias que separan a los electrones que le rodean. Como resultado de experimentos sobre la dispersión de los rayos mencionados, deduce que la carga del núcleo corresponde a un número de electrones por átomo aproximadamente igual a la mitad del peso atómico; pero como resultado de experimentos sobre fenómenos muy diferentes se ha llegado posteriormente a la idea más precisa, expuesta por van den Brock (40), de que el número de cargas del núcleo y por tanto el de electrones corticales, está determinado por el número atómico, o sea el número del elemento correspondiente en la serie ordenada por pesos atómicos crecientes.

Bohr desarrolla la teoría del átomo de Rutherford, admitiendo la hipótesis de van den Brock. El núcleo según este físico, es de muy pequeño volumen, cargado positivamente con una carga equivalente a la de N electrones, siendo N el lugar del elemento correspondiente en la serie periódica, siendo indiferente para el desarrollo de la teoría la constitución misma del núcleo atómico. En derredor de este núcleo gravitan N electrones distribuídos en anillos coplanarios concéntricos, a cada uno de los cuales corresponde un número de electrones determinado por las condiciones de estabilidad del sistema, condiciones que están fijadas mediante las leyes de la mecánica clásica.

Podemos decir, pues, que la teoría de Bohr descansa sobre los siguientes principios fundamentales:

A. Un sistema atómico posee cierto número de estados durante los cuales no existe radiación alguna de energía, aun cuando las partículas tengan movimientos relativos entre sí. Estos estados se denominan *estacionarios* del sistema.

B. Cualquier emisión o absorción de radiación de energía corresponde a la transición entre dos estados estacionarios. La radiación emitida durante la misma transición es homogénea y la frecuencia ν, está determinada por la relación

$$h\nu = A_1 - A_2, \qquad [1]$$

en que h es la constante de Plank y A_1 y A_2 son las energías propias del sistema en los dos estados estacionarios.

C. Que el equilibrio dinámico del sistema en los estados estacionarios esté regido por las leyes de la mecánica clásica, en tanto que el tránsito de un estado a otro no se rige por estas leyes.

D. Que los varios estados estacionarios posibles, de un sistema formado por un núcleo positivo cualquiera y un electrón girando a su alrededor, están determinados por la relación

$$T = \frac{1}{2} nh\omega, \qquad [2]$$

en que T es el valor medio de la energía cinética del sistema, ω la frecuencia de rotación y n un número entero.

E. En un sistema cualquiera atómico o molecular formado por un núcleo positivo, alrededor del cual giran uno o varios electrones, estando el núcleo en reposo relativo y describiendo los electrones órbitas *circulares,* el momento angular de cada electrón, alrededor del centro de esta órbita, es igual a $\frac{h}{2\pi}$ en el estado *normal* del sistema, o sea el estado en el cual la energía total es un minímo.

La importancia del momento angular en la discusión de sistemas atómicos, según la teoría de Plank, ha sido expuesta primeramente por J. W. Nicholson (41).

F. Una configuración que satisfaga al principio *E,* es estable si la energía total del sistema, es menor en ella que en cualquier otra configuración próxima que satisfaga a la misma condición de momento angular de los electrones.

Los principios *A* y *B* han recibido un fuerte apoyo, al explicar de una manera sencilla el principio general de combinación de líneas espectrales, descubierto por Ritz al exponer las series ordinarias de los espectros de los elementos y que ha adquirido creciente interés, por los trabajos de Fowler sobre las series espectrales de líneas reforzadas, emitidas por muchos elementos cuando están sujetos a descargas eléctricas fuertes.

El principio *A* ha tenido también comprobación directa por los experimentos de A. Einstein y J. W. de Hass (42) y de Bamett, que han logrado descubrir y medir un efecto rotatorio mecánico producido cuando una barra de hierro o níquel es imantada.

Debe tenerse en cuenta que únicamente en el caso de órbitas circulares, tiene el momento angular antes mencionado, alguna relación con los principios de la teoría del *quantum*. Si, por tanto, la aplicación de las leyes de la mecánica clásica a los estados estacionarios de los sistemas, no condujesen a órbitas exactamente circulares, el principio E no puede aplicarse. Esto ocurre si consideramos configuraciones en las cuales los electrones están ordenados en diferentes anillos en los cuales no giran con la misma frecuencia, y sin embargo, tales configuraciones son necesarias aparentemente para explicar muchas propiedades características de los átomos. Bohr intenta en sus primeras memorias vencer en ciertos casos estas dificultades, presumiendo que si una pequeña alteración de las fuerzas hiciese posible órbitas circulares en la mecánica clásica, la configuración y energía del sistema actual diferiría muy poco de las calculadas para el sistema alterado. Está idea está íntimamente relacionada con el principio *F* sobre estabilidad de las configuraciones.

Debe notarse que toda aplicación de la mecánica clásica está esencialmente unida a la hipótesis de órbitas periódicas y la primera parte del principio *C* podría enunciarse diciendo:

«La relación entre la frecuencia y la energía de las partículas en los estados estacionarios, puede ser determinada mediante las leyes de la mecánica clásica, y estas leyes conducen a órbitas periódicas.»

Estos principios generales sobre que descansa la teoría de Bohr explican de modo sencillo muchos fenómenos; pero algunas veces no explican de modo satisfactorio otros, lo que muestra, que aunque Bohr ha dado un avance grande hacia la verdadera teoría, ésta no ha sido aun alcanzada.

ESPECTROS EMITIDOS POR SISTEMAS QUE CONTIENEN MÁS DE UN ELECTRÓN

Según Rydberg y Ritz la frecuencia de una línea en el espectro ordinario está dada por

$$\nu = f_r(n_1) - f_s(n_2), \qquad [3]$$

en que n_1 y n_2 son números enteros y f_1, f_2 ... son una serie de funciones de n, las cuales pueden ser expresadas por

$$f_r(n) = \frac{K}{n^2}\,\Phi_r(n), \qquad [4]$$

siendo K una constante universal y Φ una función que para grandes valores de n se aproxima a la unidad. El espectro completo se obtiene combinando los números n_1 y n_2, como también las funciones f_1, f_2 ... de todos los modos posibles.

En la presente teoría, esto indica que el sistema que emite el espectro, posee un número de series de estados estacionarios, para los cuales la energía en el n^{mo} estado de la $r^{ésima}$ serie está dado por

$$A_{n,r} = C - \frac{hK}{n^2}\,\Phi_r(n), \qquad [5]$$

en la cual C es una constante arbitraria que tiene el mismo valor para todo el sistema de estados estacionarios.

Bohr da una sencilla explicación del hecho de que en cada serie Φ (n) se aproxima a 1 para valores grandes de n, considerando que en los estados estacionarios correspondientes al mismo valor de n, uno de los electrones que rodean al núcleo atómico, se mueve a gran distancia del núcleo comparada con la distancias a que están situados los demás. Si el átomo es neutro, el electrón exterior estará aproximadamente sujeto a las mismas fuerzas que el electrón en el átomo neutro de hidrógeno, que se compone de un núcleo positivo con una carga equivalente a un electrón y un electrón girando a su alrededor (1). La [5] indica la presencia de un número de series de estados estacionarios del átomo, en los cuales, la configuración de los electrones interiores es aproximadamente la misma para todos los estados de una serie, en tanto, que la configuración del electrón exterior cambia de un estado a otro de la misma serie, aproximadamente de la misma manera que lo hace el electrón en el átomo de hidrógeno.

De [5] se deduce que para grandes valores de n, la configuración de los electrones interiores es la misma en toda la serie de estados estacionarios correspondientes al mismo espectro [3]. Las diferentes series de estados estacionarios deben corresponder a diferentes tipos de órbitas del electrón exterior, envolviendo diferentes relaciones entre la energía y la frecuencia. Para fijar ideas consideremos el átomo de helio.

---

(1) *Phil. Mag.* XXX, pág. 400, 1915.

Este átomo contiene únicamente dos electrones. El espectro del helio contiene dos sistemas completos de series, dados por fórmulas del tipo [3] y los experimentos debidos a Rau (1) indican que las configuraciones del electrón interior en los dos sistemas correspondientes de estados estacionarios poseen la misma energía. Es de presumir que la órbita del electrón en uno de los sistemas sea circular y en el otro muy alargada. Para grandes valores de n, el electrón interior en las dos configuraciones actuaría sobre el exterior, aproximadamente como un anillo de carga uniformemente distribuída con el núcleo en su centro, o como una línea cargada atravesando al núcleo, respectivamente, y en ambos casos existen diferentes tipos de órbitas para el electrón exterior; por ejemplo, órbitas circulares normales al eje del sistema, o muy aplastadas paralelas al eje. Las distintas configuraciones del electrón interior pueden ser debidas a diferentes maneras de alejarse el electrón del átomo neutro. Así, si se aleja en virtud de un choque perpendicular al plano del anillo, la órbita del electrón que queda es circular, y si se aleja en virtud de un choque en el plano del anillo, la órbita debe ser alargada. Esto demuestra que no es difícil obtener, mediante los principios generales de la teoría, sencillas interpretaciones de los espectros observados, aunque en comparaciones cuantitativas con medidas hechas nos encontramos con las dificultades, ya enunciadas antes, de aplicar principios análogos a (C) y (D) a sistemas para los cuales la mecánica clásica no conduce a órbitas periódicas.

La anterior interpretación de las fórmulas [3] y [4] ha obtenido recientemente fuerte apoyo mediante los trabajos de Fowler [43] sobre series de líneas reforzadas en los espectros de chispa. Fowler demuestra que las frecuencias de las líneas en este espectro puede ser representada, lo mismo que la de las líneas en el espectro ordinario, por la fórmula [3]. La única diferencia es que la constante K de Ridberg en [4] está sustituída por una constante cuyo valor es 4 K, y esto es precisamente lo que en la presente teoría sucede si el espectro está emitido por átomos que han perdido dos electrones y han recuperado uno. En este caso, el electrón exterior giraría alrededor de un sistema de doble carga positiva, y es lógico presumir, que en los estados estacionarios, tendría configuraciones análogas a las del electrón que gira alrededor del núcleo de helio. Resulta, pues, que el espectro del helio tiene exactamente la misma relación con los espectros de líneas reforzadas de otros elementos, que el del hidrógeno con las series de los espectros ordinarios de esos mismos elementos. Puede esperarse también, según esto, observar espectros de una nueva clase,

(1) *Sitz Ber. d. Phys. Med.*, Würzhng-1914.

correspondientes a pérdida de tres electrones del átomo neutro y en los cuales la constante K de Rydberg esté reemplazada por la constante 9 K. No ha sido, sin embargo, obtenida una prueba definitiva de la existencia de tales espectros.

Una comprobación de la fórmula [5] se deriva del resultado de los experimentos de Stark [44], sobre la acción de los campos eléctricos sobre las líneas espectrales, y experimentalmente, por las medidas directas del voltaje mínimo necesario para la producción de líneas espectrales, efectuadas por Rau [43].

Ultimamente, A. Sommerfel [45], ha dado una teoría sobre la emisión de líneas espectrales y constitución del átomo, que es una pequeña mejora de la teoría de Bohr, pues considera órbitas elípticas, en vez de considerarlas sólo circulares.

IV

Voy ahora a exponer, como consecuencia de todo lo anterior, una explicación hipotética de lo que en el seno del arco eléctrico ocurre y que esté acorde con los principales fenómenos que en él se han observado. No es esto tan fácil como a primera vista parece; pues, como se habrá observado en los anteriores apartados, es el arco eléctrico asiento de multitud de fenómenos de todos los ordenes, y en general, de naturaleza muy compleja.

Además, son la mayor parte de ellos de muy difícil estudio actualmente, como sucede por ejemplo, con el de la distribución de densidad de corriente y con la variación del gradiente potencial a lo largo del arco, cuyas leyes de variación no se han podido encontrar aún, no obstante ser dos fenómenos cuyo exacto conocimiento habría de dar mucha luz a la formación de la teoría del arco, por no haber al presente medios experimentales con que realizar su estudio. Es de esperar, sin embargo, que llegue un día en que estudio tan importante se pueda realizar, dado el gran número de físicos que con gran afán se dedican a ello, y a la enorme importancia que el arco eléctrico tiene en el terreno de la Espectroscopia, y entonces ya se podrá, quizás sin gran esfuerzo, encontrar, no ya una explicación más o menos concordante con los fenómenos actuales que en el arco se desarrollan, sino una verdadera *teoría* del arco eléctrico.

Hemos deducido, como resumen de los apartados anteriores, las siguientes conclusiones:

1.ª Que en el espectro del arco eléctrico existe un grupo de líneas bastante intensas, que también aparecen en el espectro de chispa, aunque con poca intensidad, las cuales no son prácticamante influenciadas por las variaciones eléctricas estudiadas, pero que en el espectro de chispa con auto-inducción en el circuito de descarga, aumentan de brillo con el aumento de la auto-inducción [21, 21 b].

2.ª Que existe otro grupo de mucho menor número de líneas con efecto polar en ambos polos que, cuando permaneciendo constante la intensidad de corriente en el arco varían el potencial y la distancia entre los electrodos, no sufren variación sensible; pero que, cuando es constante el potencial variando los otros dos elementos, desaparece su efecto polar, disminuyendo en intensidad en los polos y aumentando en la región central, a medida que aumenta la intensidad de corriente, hasta igualarse en brillo prácticamente las tres regiones. Estos rayos son comunes a los espectros de arco y de chispa, apareciendo en el arco con mucha menor intensidad relativa que en la chispa.

3.ª Que aparece un grupo de líneas francamente polares, con bastante intensidad en el polo negativo y débilmente intensas, y aun con intensidad nula, en el positivo, que no son alteradas de manera apreciable cuando, permaneciendo constante la intensidad de corriente en el arco, varían la distancia entre los electrodos y la caída total de potencial; pero que, cuando es constante la caída de potencial, van perdiendo intensidad más rápidamente en el polo negativo que en el positivo hasta desaparecer, a medida que aumenta la intensidad de corriente. Estas líneas son características de la chispa y aparecen en ella con bastante intensidad relativa en general, y en el espectro de chispa con auto-inducción desaparecen lentamente al aumentar L.

4.ª Que para pequeñas intensidades aparece el espectro del gas ambiente, el cual, cuando es constante la intensidad, no cambia de aspecto con las variaciones del potencial y la distancia entre electrodos. Cuando permanece el potencial constante, en los elementos cobre y plata se ve con claridad que va desapareciendo lentamente con el aumento de intensidad de corriente, comenzando la desaparición por la región del polo negativo y acabando por la positiva. En el hierro no se ve tan claro esta desaparición, pues el espectro de gas necesita intensidades menores de tres amperios. (Según Fabry y Buisson [5] existen dos modos de ser del arco, según que aparezca el espectro del gas ambiente o no; pero es probable que aquí se pase también de un espectro a otro lentamente con el aumento de intensidad de corriente.

5.ª Que existe un grupo muy numeroso de líneas que comienzan a aparecer cuando, variando la intensidad de corriente, va desapareciendo el espectro del gas ambiente, según se ha dicho antes. Comienzan por ser más intensas en la región polar negativa y van aumentando en intensidad hacia el otro polo conforme el espectro del gas ambiente desaparece, llegando a estar igualmente intensas en sus tres regiones cuando el espectro del gas ha desaparecido por completo. Estas líneas son en general del espectro de arco, aunque de poca intensidad relativa, y algunos pertenecen también a la chispa, aunque con una intensidad pequeñísima.

6.ª Que cuando la distancia entre los electrodos es constante, el aumento de intensidad de corriente va unido a una disminución de caída de potencial; cuando esta caída permanece fija el aumento de intensidad se hace a expensas de aumento de distancia entre los electrodos, y cuando la intensidad permanece constante, un aumento de potencial implica un aumento de esta distancia.

7.ª Que, según la teoría actual de la constitución del átomo y emisión de líneas espectrales, parece ser que en los elementos cuyo espectro se resuelve en series espectrales, se emite el espectro de chispa por átomos que han perdido dos electrones en el momento de recuperar uno, y el de arcos por átomos que, habiendo perdido un electrón, le recuperan. Aunque en los elementos que se han estudiado en esta Memoria no se ha resuelto su espectro en series, es lógico suponer que la emisión espectral en ellos obedece a la teoría de Bohr, pues la falta de series conocidas se debe probablemente a la complejidad misma del espectro. La temperatura se traduce en aumento de vibración de los átomos, sin que influya este movimiento en el sistema interior de ellos.

Examinando estas conclusiones detenidamente, se deduce, como primera consecuencia, que el campo eléctrico es el que influye más, al parecer, en los fenómenos que se han estudiado. En efecto; cuando aumentan el potencial y la distancia entre los electrodos, permaneciendo la intensidad constante, o sea cuando el campo no varía, el aspecto del espectro se ha visto que no sufre alteración ninguna. Por el contrario, cuando el potencial es constante, aumentando la intensidad y la distancia, o sea, cuando el campo eléctrico disminuye, se ha observado que el espectro cambia de aspecto desapareciendo el espectro de chispa en el arco.

Parece ser, pues, que en el arco eléctrico sucede lo siguiente:

El metal del polo negativo, debido a su alta temperatura, emite, como todo metal caliente, electrones e iones positivos. Los iones son retenidos en el metal por el campo eléctrico exterior, en tanto que los electrones son arrastrados por dicho campo hacia el polo positivo. Debido a la energía que el citado campo les comunica y al movimiento de agitación térmica, algunos de estos electrones pueden, por choque, ionizar a los átomos neutros que encuentren y aun aquellos otros que ya hayan perdido algún electrón y sean por ello iones positivos. En cambio aquellos otros cuya energía cinética respecto del átomo con quien chocan sea menor que la potencial del sistema que forman, quedarán soldados al átomo, reconstituyendo la molécula neutra si los referidos átomos estuviesen antes ionizados, o formando iones negativos, si no lo estuvieran.

Los iones positivos formados se dirigen hacia el polo negativo, y los que logren llegar a él sin un nuevo encuentro que les haga desaparecer chocarán con el electrodo, manteniendo así la alta temperatura necesaria para la misión electrónica. Los iones negativos siguen el camino opuesto y provocan fenómenos análogos en el polo positivo, el cual emite al elevarse su temperatura, electrones e iones positivos; pero los primeros son retenidos por el campo eléctrico exterior, en tanto que los segundos se dirigen al polo negativo, arrastrados por dicho campo.

Como los iones positivos se producen con mucha más facilidad que los negativos, según hemos visto, se explica fácilmente el arrastre de materia que se produce del polo positivo al negativo y la necesidad de que la temperatura del cátodo sea elevada para mantener el arco, según han demostrado los experimentos realizados por Fabry y Buisson.

No obstante, es sabido que la temperatura del *cráter* que se forma en el electrodo positivo es superior a la del polo negativo; pero esto podría explicarse fácilmente, puesto que la forma del mismo diminuye la pérdida de calor por radiación si se compara con la superficie convexa de emisión en el catodo.

Cuando la caída de potencial en el arco es constante y la intensidad de corriente es pequeña, las superficies de los electrodos entre las que el arco salta son poco extensas, estando entonces las regiones que rodean a esas superficies sometidas a fuertes campos eléctricos, probablemente por un mecanismo análogo a lo que ocurre en los tubos de vacío. Esto hace que los electrones, en esas regiones, sean capaces de arrancar más de uno a los átomos neutros, dada su gran energía, y lo iones positivos, con dos cargas que así resultan, al recombinarse, emiten el espectro de chispa, de acuerdo con lo que hemos dicho en el anterior apartado. Sin duda, al mismo tiempo que este espectro, se producirá el correspondiente a los átomos con una sola carga, que es el de arco. En la región central el campo eléctrico es mucho menor y la energía de los electrones es también menor, lo que explica que allí se produzca sólo este último espectro. En la región polar positiva hemos visto, en anteriores apartados, que el espectro de chispa aparece con mucha menos intensidad que en la negativa, y este hecho puede explicarse fácilmente considerando que el campo eléctrico en la región anódica es menor que en la catódica, aunque siempre mayor que en la central, debido a la forma cóncava del cráter, y esto hace que en ella la energía relativa de los electrones respecto de los átomos con quienes chocan, sea más pequeña que aquella que poseen los electrones en la región catódica, siendo, por tanto, aquí más difícil la formación de iones positivos con dos cargas capaces de emitir el espectro de chispa al recombinarse.

Cuando la intensidad de corriente va aumentando con la distancia entre los electrodos, a potencial fijo, el campo eléctrico disminuye, y como las superficies de los electrodos entre las cuales el arco salta aumentan, la distribución del campo eléctrico es más homogénea en las tres regiones, explicando así la producción de rayas de chispa a lo largo de todo el arco, si bien con mucha menor intensidad que la que antes tenían en la región polar negativa. Si sigue disminuyendo el campo, se concibe que el espectro de chispa desaparezca, porque los electrones no tienen ya la energía suficiente para arrancar más de un electrón a los átomos neutros.

Además, cuando la corriente es débil, la emisión de vapores metálicos producida en los electrodos es pequeña, por no ser muy alta la temperatura en ellos; mas cuando aquélla es grande, esta temperatura se eleva y la emisión de vapores aumenta. Estos vapores están formados por átomos electrizados positivamente en su mayoría, y por tanto, los producidos en el anodo se dirigen rápidamente a la región catódica, desalojando de ella al gas ambiente. En la región anódica por la forma cóncava del cráter y la gran velocidad con que salen de él los átomos ionizados que constituyen el vapor, se ejerce una absorción sobre el gas ambiente, el cual penetra rápidamente en ella, por un fenómeno análogo al que se produce cuando un flúido sale con gran velocidad por un tubo cónico convergente. Cuando la temperatura es muy elevada, es ya tal la extensión de la superficie donde los vapores se emiten, y la cantidad de éstos, que aunque la citada absorción se produce, los átomos del gas no penetran en el seno del cráter. Estas consideraciones explican fácilmente el hecho de que, cuando la intensidad es débil, aparezca el espectro parásito del gas, y que cuando el citado campo disminuye, desaparezca del modo que anteriormente expuse; puesto que en el primer caso, los electrones, al chocar con los átomos del gas ambiente, los ionizan, y estos iones, al neutralizarse, emiten el espectro del gas mencionado, en tanto que en el segundo este espectro va desapareciendo porque los átomos de los vapores metálicos van desalojando a los del gas.

También justifican las anteriores consideraciones la aparición de las rayas del cuarto grupo, y su modo de presentarse a medida que el espectro parásito del gas ambiente desaparece, puesto que, siendo estas rayas de pequeña intensidad luminosa, necesitan para manifestarse que exista un gran número de átomos que las emitan. Esto sólo sucede cuando los átomos del gas ambiente van siendo sustituídos por el gran número de átomos libres que constituyen el vapor metálico. No puede suponerse que estas rayas estuviesen en un principio sin manifestarse en el espectro por estar veladas por el del gas ambiente, porque se puede ver claramente en los espectrogramas, que muchas de ellas corresponden a regiones del espectro comprendidas entre dos bandas del gas y que por tanto no se impide en ellas su observación.

Es también probable que la mayor cantidad de átomos que existen en las cercanías del polo negativo, como consecuencia de suponer allí una mayor densidad de vapor metálico, origine acciones mutuas entre ellos siendo causa estas acciones, de los corrimientos de muchas de las líneas espectrales en esta región.

Sólo me resta hacer constar mi reconocimiento y gratitud a mi querido maestro el Doctor don Blas Cabrera, director del Laboratorio de Investigaciones Físicas y al Doctor D. Angel del Campo, profesor de la Sección Espectrográfica, y ambos catedráticos de la Universidad Central, por las facilidades que me han dado y los sabios consejos con que me han favorecido.

BIBLIOGRAFIA

1. Henry Crew.—«On the conditions which govern the apperance of spark lines in arc spectra.» *The Astrophysical Journal,* tomo XX, página 274, 1904.
2. A. S. King.—«A detailed study of the line spectrum of copper.» *The Astrophysical Journal*, tomo XX, pág. 21, 1904.
3. F. G. Hull.—«Are luminous metallic particles thrown out from the poles in the spark discharge.» *The Astrophysical Journal*, tsmo XXVI, página 66, 1907.
4. W. J. Humphreys.—«Note on the difference between anode and catode arc spectra.» *The Astrophysical Journal*, tomo XXVII, página 200, 1908.
5. Ch. Fabry et Buisson.—«Etude de quelques propriétés spectroscopique et électriques de l'arc entre métaux.» *Journal de Physique théorique et appliqueé*, tomo IX, pág. 929, 1910.
6. R. Rossi.—«On a possible origin of the spectrum lines near the poles of a metallic arc.» *The Astrophysical Journal*, tomo XXXV, página 279, 1912.
7. W. B. Hutt.—«Observations on the structure of the arc.» *The Astro phisical Journal,* tomo XXXVIII, pág. 59, 1908.
8. Philip Ely Robinson.—«The espectra of cathode metals.» *The Astro physical Journal,* tomo XLII, pág. 473, 1915.
9. Charles E. St. John and Harold B. Babcock— «A study of the pole effect in the iron arc.» *The Astrophysical Journal,* tomo XLII, página 231, 1915.
10. Henry G. Gale and Walter T. Whitney.—«On the pole effect in a calcium arc.» *The Astrophysical Journal,* tomo XLIII, pág. 161, 1916.
11. Walter T. Whitney.—«The pole effect in a calcium arc.» *The Astrophysical Journal*, tomo XLIV, pág, 65, 1916.
12. T. Royds.—«The cause of the soucalled pole-effect in the electric arc.» *The Astrophysical Journal*, tomo XLV, pág. 112, 1917.
13. J. Hartmann and G. Eberhard.—«On the occurrence of spark lines in arc spectra.» *The Astrophysical Journal,* tomo XVII, pág. 229, 1903.
14. J. Hartmann.—«On a new relationship betwena arc and spark spectra.» *The Astrophysical Journal*, tomo XVII, pág. 270, 1903.

15. J. Barnes.—«On the spectrum of magnesium.» *The Astrophysical Journal,* tomo XXI, pág. 74, 1905.

16. A. Fowler.—«Enhanced Lines of Iron int he región F. to C.». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* tomo LXVII, página 154, 1907.

17. W. Geoffrey Duffield.— «The spectrum ne ar the poles of an iron arc.» *The Astrophysical Journal,* tomo XXVII, pág. 260, 1908.

18. B. Walter.—«Über die Bildungsweis un das Spectrum des Metalldampfes in elektrischen Funken.» *Annalen der Physik,* tomo, XXI, página 223, 1906.

19. B. Eginites.—«Sur l'echauffement des pôles et les spectres des étincelles.» *Bul. Astrons*; tomo XXI, pág. 27, 1904.

20. A. S. King.—«A Study of the relation of arc and spark lines by means of the tube arc.» *The Astrophysical Journal,* tomo XXXVIII, página 315, 1913.

21. E. Neculcea.—«Recherches théoriques et experimentales sur la constitution des spectres ultraviolets d'étincelles oscillantes.» París, 1907.

21 bis G. A. Hemsalech.— «Sur l'influence de self-induction sur les spectres d'étincelles.» *Comptes Rendus,* tomo CXXXII, pág. 959, 1901.
—«Recherches experimentales sur les spectres d'étincelles.» *Bull. Astrons.* tomo XXI, pág. 27, 1904.

22. A. del Campo.—«El espectro de Bandas del silicio.» *Anales de la Sociedad española de Física y Química,* tomo XIII, pág. 26, 1915.

23. M. A. Catalán.—«Espectroquímica del magnesio.» «Nuevas líneas en su espectro y en el de la plata.» Zaragoza, 1917.

24. Thomas.—«Sur la constitution de l'arc électrique.» *Comptes Ren dus,* tomo CXIX, pág. 720, 1894.

25. Caroline W. Baldwin.— «A photographie study of arc spectra.» *Physical Review*, tomo III, pág. 370, 1895.

26. Arthur L. Foley.—«Arc spectra.» *Physical Review*, tomo V, página 129, 1897.

27. Beckmann.—«Zeitschrift für wissenschaftliche Potographie», tomo IV, pág. 335, 1906.

28. W. Geoffrey Duffield.—«A comparison of the Arc and Spark Spectra of Nickel produced under Pressure; vith a Note upon the Influence of Temperature and Density Gradients upon the Displacements of Spectrum lines.» *The Philosophical Magazine,* tomo XXX, página 381, 1915.

29. F. Exner und E. Haschek.— «Tabelle der Funkn spectra.» Wien, 1902.

30. F. EXNER UND E. HASCHEK.—«Tabelle der Bogen spectra.» Wien. 1904.

31. J. M. EDER UND E. VALENTA.—«Normalspectren einige Elemente zur Wellenlängenbestimmung in äus sersten Ultraviolett.» Denkshr. Wien. Akad. 68 pág. 531, 1913. *Beiträge Zur Photochemie*, página 377.

32. J. M. EDER UNDE E. VALENTA.—«Ueber die Spectren von Kupfer, Silber und Gold. Denkschr. Wien. Akad. 63, pág. 189 1896. *Beiträge zur Photochemie,* pág. 161.

33. W. N. HARTLY AND W. E. ADENEY.— «Measurements of the wabe lengths of lines of high refrangibility in the spectra of elementary substances.» *Phil. Trans* 175, I, pág. 63, 1884.

34. H. KAYSER UND C. RUNGE.—«Ueber die spectren der Flemente.» 5. Abschnitt. «Ueber die spectren von Kupfer silber und Gold». Abnandl. Berl. Akad 1892. Wiendem. Anna. 46, pág. 225, 1892.

35. H. KAYSER.—«Note on the arc spectrum of copper.» *The Astrophysical Journal,* tomo I, pág. 84, 1895.

36. N. BOHR.—«On the constitution of atoms and molecules.» *Philosophycal Magazine,* tomo XXVI, págs. 1, 476, 857; 1913.

37. N. BOHR.—«On the Effect of Electric and Magnetic Fields on Spectral Lines». *The Philosophycal Magazine*, tomo XXVII, pág. 506, 1914.

38. N. BOHR.—«On the Quantum Theory and the structure of the Atom.» *The Philosophycal Magazine,* tomo XXX, pág. 394, 1915.

39. E. RUTHERFORD.—«The Structure of the Atom.» *The Philosophical*, página 488, 1914.

40. A. VAN DEN BROCK.—«Die Radioelemente, das periodische System und die Konstitution der Atome.» Phys. Zeits. Tomo XIV, pág. 32, 1913.

41. J. W. NICHOLSON. — «The Constitution of the Solar Corona». *Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, tomo LXXII, página 677, 1912.

42. A. EINSTEIN Y W. J. DE HAAS.—«Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme.» *Berichte des Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, tomo XVII, pág. 152, 1915.

43. A. FOWLER.—«Series lines in Spark Spectra.» *Philosophycal Transaction of the Royal Society of London*. Serie A, vol. 214, página 225, 1914.

44. . STARK.—*Elektrische Spektralanalyse chemister Atome*. Leipzig, 1914.

45. A. SOMMERFELD.—«Zur Quantentheorie der Spektrallinien.» *Annalen der Physik*. Tomo II, pág. 1. 1916.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Págs.

I. Suplemento a la bibliografía crítica malacológica publicada en el tomo XV de las Memorias de la Real Academia de Ciencias, por *J. G. Hidalgo* 309
II. Cuestiones relativas a la Geometría proyectiva, por *Miguel Vegas* (Continuación) 350
III. Contribución al conocimiento de la fauna índica Orthoptera (Locustidæ vel Acridiidæ), por *Ignacio Bolívar* (Conclusión) 374
IV. Métodos gráficos que puede seguir el aeronauta, aviador o navegante para la determinación de coordenadas geográficas, por *Honorato Castro Bonel* 413
V. Contribución al estudio del efecto polar en el arco eléctrico, por *Luis Vegas* 429

La suscripción a esta Revista se hace por tomos completos, de 500 a 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, Madrid.

Precio de este cuaderno: **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XVI: 1.º DE LA 2.ª SERIE

NÚMEROS 10, 11 Y 12: ABRIL, MAYO Y JUNIO DE 1918

SMITHSONIAN INSTITUTION
APR 7 1927
NATIONAL MUSEUM

MADRID
IMPRENTA CLÁSICA ESPAÑOLA
GLORIETA DE CHAMBERÍ
1918

Cuestiones relativas a la Geometría Métrica Proyectiva

por

Miguel Vegas

(CONCLUSIÓN)

VI.—Trigonometría métrico-proyectiva

37. Se sabe que en una figura de primera categoría se establece un sistema de abscisas proyectivas fijando el elemento límite, el origen y el elemento unidad. Así, en una serie rectilínea, si L, O y U son los puntos de referencia, la abscisa de un punto A es el número $\frac{(OA)}{(OU)}$, que corresponde al segmento proyectivo (OA), siendo L el punto límite del grupo de las prospectividades; y en este sistema de abscisas se verifica que la cuaterna o razón doble $(A_1 A_2 A_3 A_4)$, está dada por la de sus abscisas, es decir, que

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x^2 - x_4},$$

que la relación que enlaza las abscisas de los puntos de una serie armónica es

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = -1, \quad \text{o sea} \quad 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + 2x_3 x_4 = o,$$

y que la ecuación bilineal

$$Axx' + Bx + Cx' + D = o$$

representa una proyectividad, la cual es involutiva cuando la ecuación es simétrica, es decir, cuando B = C, y que cuando son conjugados en una involución el origen y el punto límite, la ecuación de la misma tiene la forma

$$Axx' + 1 = o.$$

Un caso particular, que es la generalización de las abscisas distancias ordinarias es aquel en el que se verifica que el punto límite es el asociado al origen, en cuyo caso la abscisa de un punto es la distancia proyectiva del mismo al origen. Entonces la involución absoluta está representada por la ecuación

$$kxx' - 1 = o \qquad [1]$$

siendo k una constante que tiene un valor particular, y que conserva el mismo valor para todas las rectas, a causa de ser invariante la mencionada involución en todo movimiento. Por tanto, la ecuación del absoluto es $kx^2 - 1 = 0$, o en abscisas homogéneas, $kx^2 - z^2 = o$; siendo la constante k positiva, nula o negativa, según que se trate de la Métrica hiperbólica, parabólica o elíptica.

El problema métrico fundamental en la recta es la determinación de la distancia proyectiva entre dos puntos A_1 y A_2 en función de sus abscisas x_1 y x_2; y vamos a resolverle. Para ello, designemos por A'_1 y A'_2 los puntos asociados a los A_1 y A_2, y sean x'_1 y x'_2 sus abscisas; según lo dicho anteriormente, tenemos:

$$(A'_1\, A'_2 A_1 A_2) = \frac{x'_1 - x_1}{x'_1 - x_2} : \frac{x'_2 - x_1}{x'_2 - x_2} = \frac{\dfrac{1}{kx_1} - x_1}{\dfrac{1}{kx_1} - x_2} : \frac{\dfrac{1}{kx_2} - x_1}{\dfrac{1}{kx_2} - x_2} =$$

$$= \frac{(1 - kx_1^2)(1 - kx_2^2)}{(1 - kx_1\, x_2)^2}.$$

Por otra parte, en el sistema de abscisas $(A'_1 A_1 U_1)$, siendo $\overline{OU} = \overline{A_1 U_1}$, la distancia $d = (A_1\, A_2)$ es la abscisa del punto A_2, y la de A'_1 es $d_1 = \infty$; y, por tanto, se verifica que:

$$(A'_1\, A'_2\, A_1\, A_2) = \frac{d_1}{d_1 - d} : \frac{\dfrac{1}{kd}}{\dfrac{1}{kd} - d} = \frac{\dfrac{1}{kd} - d}{\dfrac{1}{kd}} = 1 - kd^2.$$

Luego,

$$1 - kd^2) = \frac{(1 - kx_1^2)(1 - kx_2^2)}{(1 - kx_1\, x_2)^2},$$

de donde,

$$d = \frac{x_1 - x_2}{1 - kx_1\, x_2}. \qquad [2]$$

Obsérvese que si A, B y C son tres puntos de una recta, entre los segmentos ordinarios $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ existe la relación $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, mientras que entre las distancias proyectivas correspondientes se verifica, que

$$(\mathrm{AC}) = \frac{(\mathrm{AB}) + (\mathrm{BC})}{1 + k(\mathrm{AB})(\mathrm{BC})}$$

que se confunde con la anterior, sólo en el caso de ser $k = o$, es decir, en la Métrica parabólica.

Si A, A_1 A_2 son tres puntos de una recta, y designamos por $-\lambda$ el número que corresponde a la razón doble (AL A_1 A_2), y por x, x_1, x_2 las abscisas de aquellos puntos, se tiene:

$$-\lambda = \frac{x - x_1}{x - x_2} \quad \text{de donde} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad [3]$$

expresión que da la abscisa de un punto en función de las de otros dos.

La ecuación de los movimientos se obtiene fácilmente, recordando que son proyectividades en las cuales es invariante el absoluto. En efecto: viniendo representada una proyectividad por la transformación lineal

$$x = \frac{ax' + b}{cx' + d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x',$$

la ecuación $kx^2 - 1 = o$, representante del absoluto, se transforma en la

$$(ka^2 - c^2)\, x'^2 + 2\,(kab - cd)\, x' + kb^2 - d^2 = o,$$

y, por tanto, se verifican las relaciones,

$$\frac{k\,a^2 - c^2}{k} = d^2 - kb^2, \quad kab - cd = o$$

de las cuales se deducen las

$$d = \pm\, a, \qquad c = \pm\, kb.$$

Las ecuaciones de los movimientos en la recta, son, pues:

$$x = \frac{ax' + b}{kbx' + a}, \qquad x = \frac{ax' + b}{-kbx' - a};$$

la segunda representa una involución, es decir, una simetría respecto de un punto; la primera representa una traslación; y como se pasa de la una a la otra cambiando x en $-x$, se deduce que toda traslación es el producto de dos simetrías; como ya sabíamos.

Si en la primera ecuación hacemos $x' = o$, resulta $x = \dfrac{b}{a} = m$; de modo que la ecuación de la traslación en función de la abscisa del punto homólogo del origen, es:

$$x = \frac{x' + m}{1 + kx'm};$$

y análogamente, si $m = -\frac{b}{a}$ es la abscisa del punto simétrico del origen, la segunda ecuación se transforma en

$$x = \frac{m - x'}{1 - kmx'}.$$

Ahora bien: si queremos obtener la fórmula del cambio de origen, y O, O′ y P son los dos orígenes y un punto cualquiera P, y P′ es el homólogo de P en la traslación (O O′), se verifica que (O P) = (O′ P′); y, por tanto, cambiando en la ecuación de la traslación últimamente obtenida x' por x, se obtiene para el cambio de origen la relación,

$$x' = \frac{x + m}{1 + kxm} \qquad [4]$$

la cual se puede obtener también fácilmente aplicando la ecuación [2].

38. En las figuras planas ha lugar a considerar también un sistema particular de coordenadas proyectivas, que es una generalización del sistema cartesiano de la Geometría ordinaria. En este sistema, el triángulo de referencia es autopolar en el sistema polar absoluto; y, por tanto, los ejes OX y OY son perpendiculares entre sí, y la recta límite del sistema de coordenadas es la polar absoluta del origen O.

Toda recta viene representada, pues, por una ecuación lineal, completa cuando no pasa por ningún vértice; carece de término independiente cuando pasa por el origen, y encierra una sola variable cuando pasa por el polo absoluto de uno de los ejes coordenados OX y OY.

Problema 1.º Hallar la polar absoluta de un punto, y el polo absoluto de una recta.

Si A (x_1, y_1) es el punto dado, su polar absoluta a pasa por los polos absolutos de las rectas AA_1 y AA_2, perpendiculares a los ejes coordenados, es decir, por los puntos A'_1 y A'_2, asociados a las proyecciones ortogonales A_1 y A_2 del punto A sobre los dichos ejes; pero siendo las coordenadas de estos puntos (x_1, o) y (o, y_1), las de los A'_1 y A'_2 son, respectivamente

$$\left(\frac{1}{kx_1}, o\right) \quad \text{y} \quad \left(o, \frac{1}{ky_1}\right),$$

siendo k la constante característica; por tanto, la ecuación pedida es:

$$kx_1 x + ky_1 y - 1 = o.$$

Para hallar el polo de la recta representada por la ecuación

$$Ax + By + C = o,$$

basta observar que esta recta viene representada por la ecuación

$$kx_1 x + ky_1 y - 1 = o;$$

si (x_1, y_1) son las coordenadas de su polo absoluto, y, por tanto, las ecuaciones que determinan estas coordenadas son:

$$\frac{x_1}{A} = \frac{y_1}{B} = -\frac{1}{kC}.$$

Si el punto está en su polar absoluta, sus coordenadas verifican la ecuación

$$kx^2 + ky^2 - 1 = o \qquad [5]$$

la cual representa, por consiguiente, la cónica absoluta del plano.

Por medio de esta ecuación es fácil buscar la condición para que dos puntos sean asociados, y la que debe verificarse para que dos rectas sean perpendiculares; pues basta establecer la condición de ser ambos puntos o rectas conjugados respecto de la citada cónica.

Así, suponiendo que dos rectas están representadas por las ecuaciones

$$y = mx + n, \quad y = m_1 x + n_1;$$

la condición de perpendicularidad de las mismas es:

$$mm_1 + 1 = knn_1 \qquad [6]$$

la cual depende, como es natural, de la constante característica, excepto en el caso de ser nula alguna de las cantidades k, n o n_1; es decir, cuando se trata de la Métrica parabólica o cuando alguna o ambas rectas pasan por el origen, en cuyos casos la condición anterior se reduce a la

$$mm_1 + 1 = o;$$

que es la que se verifica en la Geometría ordinaria.

Problema 2.° Hallar la distancia proyectiva d entre los dos puntos

$$A_1 (x_1 y_1) \quad y \quad A_2 (x_2, y_2).$$

Si $A'_1 (x'_1, y'_1)$ y $A'_2 (x'_2, y'_2)$ son los puntos asociados a los A_1 y A_2 en la recta $A_1 A_2$, y designamos por $-\lambda$ y $-\mu$ las razones dobles

$$(A'_1 L A_1 A_2) \quad y \quad (A'_2 L A_1 A_2);$$

siendo L el punto de intersección de la recta $A_1 A_2$ con la polar absoluta del origen de coordenadas, se verifican, en virtud de la fórmula [3], las relaciones

$$x'_1 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y'_1 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad x'_2 = \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu}, \quad y'_2 = \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu}.$$

Ahora bien; se tiene que

$$(A'_1\, A'_2\, A_1\, A_2) = \frac{x'_1 - x_1}{x'_1 - x_2} : \frac{x'_2 - x_1}{x'_2 - x_2} = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - kd^2$$

como antes se ha visto; y como, por ser asociados los pares de puntos $A_1 - A'_1$ y $A_2 - A'_2$, entre sus coordenadas se verifican las relaciones

$$kx_1 \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + ky_1 \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} - 1 = o$$

y

$$kx_2 \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu} + ky_2 \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu} - 1 = o,$$

de las cuales se deduce que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(kx_1^2 + ky_1^2 - 1)(kx_2^2 + ky_2^2 - 1)}{(1 - kx_1\, x_2 - ky_1\, y_2)^2}$$

resulta para la distancia pedida el valor dado por la igualdad

$$d^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - k\,(x_1\, y_2 - y_1\, x_2)^2}{(1 - kx_1\, x_2 - ky_1\, y_2)^2}, \qquad [7]$$

de la cual se obtiene, como caso particular, la [2].

La distancia de un punto a una recta se obtiene por medio de las fórmulas [6] y [7]. En particular, si se trata de hallar la distancia AA_1 de un punto A al eje OX, se reduce a encontrar la que separa los dos puntos $A\,(x_1, y_1)$ y $A_1\,(x_1, o)$; y, por tanto, se tiene:

$$(AA_1) = \frac{y_1}{\sqrt{1 - kx_1^2}} = \frac{(OA_2)}{\sqrt{1 - k\,(OA_1)^2}},$$

siendo A_1 y A_2 las proyecciones ortogonales del punto A sobre los ejes OX y OY.

De esta igualdad, resulta que:

a) En todo cuadrilátero $OA_1\, AA_2$ trirrectángulo, un lado (AA_1) común a dos ángulos rectos es menor, igual o mayor que el lado opuesto; según que se trate de la Métrica elíptica, de la parabólica o la hiperbólica.

Y, por medio de la simetría cuyo eje es la perpendicular a OA_1 en su punto medio, se vuelve a obtener la naturaleza del cuarto ángulo del cuadrilátero trirrectángulo, ya hallada.

Las ecuaciones de los movimientos se obtienen buscando las de aquellas colineaciones que dejan invariable la cónica absoluta; en particular, las de los movimientos elementales, es decir, las de los giros y traslaciones, se obtienen hallando las colineaciones con la cónica absoluta invariante, y, además, con un punto fijo, y también su polar absoluta.

Así, si se quiere hallar la ecuación de los movimientos en que es fijo el origen de coordenadas, basta observar que las ecuaciones de la homografía, en la que son dobles este punto y su polar absoluta, o sea la recta límite del sistema de coordenadas, son de la forma:

$$x = a_1 x' + b_1 y', \qquad y = a_2 x' + b_2 y',$$

entre cuyos coeficientes, si ha de ser invariante la ecuación [5], deben existir las relaciones:

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1, \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 = o,$$

de las cuales se deducen las

$$b_1 \pm a_2, \qquad b_2 = \mp a_1, \qquad a_1^2 + a_2^2 = 1;$$

por tanto, las ecuaciones pedidas son:

$$x = a_1 x' + a_2 y', \qquad y = a_2 x' - a_1 y' \qquad [8]$$

que representa una simetría respecto de un eje que pasa por el origen; o las

$$x = a_1 x' - a_2 y', \qquad y = a_2 x' + a_1 y', \qquad [9]$$

que representan un giro que se reduce a una simetría respecto del origen cuando $a_2 = o$.

39. Si r es la distancia proyectiva del origen O de coordenadas a un punto A (x, y), se verifica la igualdad $x^2 + y^2 = r^2$; pues bien, designando por α y β los ángulos ordinarios que la recta OA forma con el eje OX en su sentido positivo, se tienen por definición las siguientes igualdades, idénticas a las de Trigonometría ordinaria

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{y}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$$
$$\sec\alpha = \frac{r}{x}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}, \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}, \qquad [10]$$

y como entre las dos primeras existen las relaciones

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$$

se deduce que las relaciones entre las funciones trigonométricas de un ángulo son las mismas en las tres Geometrías métrico-proyectivas.

Ahora bien: si P, Q, P′ y Q′ son puntos tales que

$$(OP) = (OQ) = (OP') = (OQ') = r,$$

y los pares P — P′ y Q — Q′ son homólogos en el giro representado por las ecuaciones [9] estando el punto P′ en el eje OX, las coordenadas de estos puntos son

$$P'(r, o), \quad P(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha), \quad Q'(r\cos\alpha', r\,\mathrm{sen}\,\alpha') \text{ y } Q(r\cos\gamma, r\,\mathrm{sen}\,\gamma).$$

Sustituídas estas coordenadas en las ecuaciones [9], se obtienen las igualdades

$$a_1 = \cos\alpha, \quad a_2 = \mathrm{sen}\,\alpha,$$
$$\cos\gamma = a_1\cos\alpha' - a_2\,\mathrm{sen}\,\alpha', \quad \mathrm{sen}\,\gamma = a_2\cos\alpha' + a_1\,\mathrm{sen.}\,\alpha',$$

y teniendo en cuenta que $\gamma = \alpha + \alpha'$ por ser iguales los ángulos P′OQ′ y y POQ, resultan en definitiva las relaciones

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \alpha') &= \cos\alpha\cos\alpha' - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha', \\ \mathrm{sen}(\alpha + \alpha') &= \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha' \end{aligned} \tag{11}$$

que son independientes de la constante característica y que prueban, por tanto, que todas las fórmulas relativas a la suma, diferencia y múltiplos y submúltiplos de los ángulos, establecidas en la Trigonometría ordinaria, subsisten en la métrica proyectiva.

40. Vamos ahora a buscar las relaciones que enlazan los elementos de un triángulo rectilíneo ABC, a cuyos lados (AB), (AC) y (BC) llamaremos, respectivamente, c, b y a.

Primer caso. El triángulo es rectángulo en A. Tomando como ejes coordenados los dos catetos, las coordenadas de los vértices son

$$A(o, o), \quad B(o, c), \quad C(b, o)$$

y aplicando la fórmula [7] resulta la ecuación

$$a^2 = b^2 + c^2 - kb^2c^2$$

equivalente a la

$$\sqrt{1 - ka^2} = \sqrt{1 - kb^2}\sqrt{1 - kc^2} \tag{12}$$

que enlaza los tres lados.

De la definición del coseno de un ángulo se deducen las relaciones

$$b = a\cos C, \qquad c = a\cos B \tag{13}$$

que enlazan un cateto, la hipotenusa y el ángulo comprendido.

De las primeras ecuaciones [12] y [13] se deduce

$$a^2 = a^2 \cos^2 C + c^2 - kb^2 c^2, \quad \text{o sea} \quad a \operatorname{sen} C = c\sqrt{1 - kb^2},$$

que por medio de la segunda ecuación [12] da lugar a la relación

$$\frac{c}{\sqrt{1 - kc^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - ka^2}} \operatorname{sen} C$$

y análogamente

$$\frac{b}{\sqrt{1 - kb^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - ka^2}} \operatorname{sen} B \qquad [14]$$

que enlazan un cateto, la hipotenusa y el ángulo opuesto al cateto.

De las dos primeras ecuaciones [13] y [14] y de la segunda [12] resultan

$$c = \frac{b}{\sqrt{1 - kb^2}} \operatorname{tg} C \quad \text{y su análoga} \quad b = \frac{c}{\sqrt{1 - kc^2}} \qquad [15]$$

que enlazan los dos catetos y un ángulo.

De la segunda ecuación [12], segunda [13] y primera [14] se obtiene

$$\cos B = \frac{\operatorname{sen} C}{\sqrt{1 - kb^2}} \quad \text{y su análoga} \quad \cos C = \frac{\operatorname{sen} B}{\sqrt{1 - kc^2}} \qquad [16]$$

que enlazan un cateto y los dos ángulos oblicuos.

Finalmente de las ecuaciones [15] se deduce la

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \sqrt{1 - ka^2} \qquad [17]$$

que relaciona la hipotenusa y los dos ángulos oblicuos.

Segundo caso. El triángulo es oblicuángulo. Trazando la altura CD relativa al vértice C, aplicando a los dos triángulos ACD y BCD las ecuaciones [14], y repitiendo lo mismo a los dos triángulos rectángulos obtenidos por el trazado de otra altura, resultan las ecuaciones

$$\frac{a}{\sqrt{1 - ka^2}} : \operatorname{sen} A = \frac{b}{\sqrt{1 - kb^2}} : \operatorname{sen} B = \frac{c}{\sqrt{1 - kc^2}} : \operatorname{sen} C \qquad [18]$$

Aplicando la fórmula [12] al triángulo rectángulo BCD resulta

$$\sqrt{1 - ka^2} = \sqrt{1 - k\,(\mathrm{CD})^2}\,\sqrt{1 - k\,(\mathrm{BD})^2};$$

pero en virtud de las fórmulas [15] y [13] aplicadas al triángulo CDA, se tiene que

$$1 - k\,(\mathrm{CD})^2 = \frac{1 - k\,(\mathrm{AD})^2 \sec^2 \mathrm{A}}{1 - k\,(\mathrm{AD})^2} = \frac{1 - kb^2}{1 - kb^2 \cos^2 \mathrm{A}}$$

y

$$\sqrt{1 - k\,(\mathrm{CD})^2} = \frac{\sqrt{1 - kb^2}}{\sqrt{1 - kb^2 \cos^2 \mathrm{A}}}\,;$$

y, en virtud de las fórmulas [2] y [13], se tiene que

$$\sqrt{1 - k\,(\mathrm{BD})^2} = \frac{\sqrt{1 - kc^2}\,\sqrt{1 - k\,(\mathrm{AD})^2}}{1 - kc\,(\mathrm{AD})} = \frac{\sqrt{1 - kc^2}\,\sqrt{1 - kb^2 \cos^2 \mathrm{A}}}{1 - kcb \cos \mathrm{A}}\,;$$

luego

$$\sqrt{1 - ka^2} = \frac{\sqrt{1 - kb^2}\,\sqrt{1 - kc^2}}{1 - kcb \cos \mathrm{A}}\,.$$

Por tanto, las unaciones que enlazan un ángulo y los tres lados, son

$$\frac{1}{\sqrt{1 - ka^2}} = \frac{1 - kcb \cos \mathrm{A}}{\sqrt{1 - kb^2}\sqrt{1 - kc^2}}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - kb^2}} = \frac{1 - kac \cos \mathrm{B}}{\sqrt{1 - ka^2}\sqrt{1 - kc^2}}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - kc^2}} = \frac{1 - kab \cos \mathrm{C}}{\sqrt{1 - ka^2}\sqrt{1 - kb^2}}\,. \qquad [19]$$

Designando por α y β a los ángulos ACD y BCD, se tiene la igualdad

$$\cos \mathrm{C} = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

que, por aplicación de las fórmulas [16], se transforma en la

$$\cos \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B}}{\sqrt{1 - k(\mathrm{AD})^2}\sqrt{1 - k(\mathrm{BD})^2}} - (1 - k\,(\mathrm{CD})^2) \operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B}.$$

Pero en virtud de las fórmulas [15], aplicadas a los dos triángulos ACD y BCD, se verifica que

$$(\mathrm{CD}) = \frac{(\mathrm{AD})}{\sqrt{1 - k(\mathrm{AD})^2}} \operatorname{tg} \mathrm{A} = \frac{(\mathrm{BD})}{\sqrt{1 - k(\mathrm{BD})^2}} \operatorname{tg} \mathrm{B}\,,$$

luego

$$\cos \mathrm{C} = \frac{1 + k\,(\mathrm{AD})(\mathrm{DB})}{\sqrt{1 - k(\mathrm{AD})^2}\sqrt{1 - k(\mathrm{BD})^2}} \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} - \operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B}.$$

La ecuación [2] aplicada al lado c conduce a la

$$c = \frac{(\mathrm{AD}) + (\mathrm{DB})}{1 + k\,(\mathrm{AD})\,(\mathrm{DB})}$$

de donde

$$\frac{1}{\sqrt{1-kc^2}} = \frac{1+k(\mathrm{AD})(\mathrm{DB})}{\sqrt{1-k(\mathrm{AD})^2}\sqrt{1-k(\mathrm{BD})^2}} \qquad [20]$$

y por tanto, se obtiene en definitiva la ecuación

$$\cos \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B}}{\sqrt{1-kc^2}} - \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B}$$

y sus análogas

$$\cos \mathrm{B} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{C}}{\sqrt{1-kb^2}} - \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} \qquad [21]$$

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} \mathrm{C}}{\sqrt{1-ka^2}} - \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}.$$

Estas fórmulas prueban que si k no es nulo, un triángulo queda determinado por los tres ángulos, lo que demuestra de nuevo la proposición *d)* del párrafo 35.

Además, según que $k \gtreqless o$, así

$$\cos \mathrm{C} \gtreqless \operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B} - \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} = \cos [2\mathrm{R} - (\mathrm{A} + \mathrm{B})],$$

o sea

$$\mathrm{C} + \mathrm{A} + \mathrm{B} \gtreqless 2\mathrm{R},$$

designando por R un ángulo recto, lo que vuelve a probar la proposición *b)* del párrafo 36.

Asimismo de las igualdades [19] se deduce que como $\cos \mathrm{A} > -1$, se verifica que

$$\frac{1}{\sqrt{1-ka^2}} < \frac{1+kbc}{\sqrt{1-kb^2}\sqrt{1-kc^2}},$$

y si designamos por $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ y $\overline{b}+\overline{c}$ los segmentos ordinarios de los lados del triángulo y el formado por la reunión de los dos últimos, la ecuación [20] prueba que

$$\frac{1+kcb}{\sqrt{1-kb^2}\sqrt{1-kc^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-k(\overline{b}+\overline{c})^2}}$$

y, por tanto, se tiene

$$\sqrt{1-ka^2} > \sqrt{1-k(\overline{b}+\overline{c})^2}$$

de donde $a < (\overline{b} + \overline{c})$ y, por tanto, $\overline{a} < \overline{b} + \overline{c}$, por existir la misma relación de igualdad y desigualdad entre los segmentos proyectivos positivos y los segmentos ordinarios; y de este modo queda de nuevo demostrada la proposición *d)* del párrafo 24.

41. En los haces de rectas y de planos pueden establecerse también sistemas particulares de abscisas proyectivas. Como el haz de planos puede, para estos efectos, sustituirse por el haz de rectas, sección del mismo, por un plano perpendicular a su arista; nos referiremos a un haz de rectas. En él un rayo OB queda determinado por la tangente del ángulo que forma con el rayo OX de origen, en cuyo caso los rayos de referencia son el OX, el OY perpendicular a éste, y el rayo bisector OU del ángulo XOY que forman estos dos, de modo que el ángulo proyectivo (XOB), no es otra cosa que la tangente del ángulo ordinario XOB.

Ahora bien: en el sistema de coordenadas planas de ejes OX y OY, la condición de perpendicularidad de dos rectas OA y OB que pasan por el origen es

$$\text{tg XOA} \times \text{tg XOB} = -1;$$

luego, designando por x y x' las abscisas de dos rayos cualesquiera del haz O, perpendiculares entre sí, la ecuación de la involución absoluta en el mencionado haz o sea la involución rectangular, es

$$xx' + 1 = o. \qquad [22]$$

Comparando esta ecuación con la [6] se ve: 1.°, que es independiente de la constante característica k, y 2.°, que se deduce de aquella ecuación poniendo $k = -1$. Por tanto,

a) Todas las fórmulas obtenidas en las series rectilíneas dan lugar a las correspondientes de los haces, cambiando los segmentos proyectivos por las tangentes de los ángulos ordinarios, y haciendo $k = -1$.

Así, la fórmula [7] que da la distancia proyectiva entre dos puntos se transforma en

$$\text{tg AOB} = \frac{\text{tg XOB} - \text{tg XOA}}{1 + \text{tg XOB tg XOA}},$$

que permite obtener la tangente de la diferencia entre dos ángulos en función de las tangentes de ellos, y que ya habíamos obtenido.

Las ecuaciones de los movimientos en el haz son las mismas [8] y [9] que representan, respectivamente, una simetría respecto de un eje y un giro que en algún caso se confunde con la simetría respecto del centro O. Y como se pasa de una ecuación a la otra cambiando x en $-x$, vuelve a demostrarse que un giro en un plano es el producto de dos simetrías respecto de dos ejes que pasan por el centro.

Asimismo puede establecerse en una radiación de vértice propio un sistema particular de coordenadas, tomando el triedro de referencia O.XYZ trirrectángulo y considerando como coordenadas x e y de una recta las tangentes de los ángulos diedros que forman con el plano XOY los determinados por ella y cada uno de los ejes OY y OX, respectivamente.

Si $(x_1\, y_1)$ son las coordenadas de una recta OA, OA_1 y OB_1 son sus proyecciones ortogonales sobre los planos XOZ e YOZ y OA_2 y OB_2 son las perpendiculares a estas rectas en su respectivo plano, las coordenadas son

$$OA_1\,(x_1,\, o), \quad OB_1\,(o,\, y_1), \quad OA_2\,(x'_1,\, o), \quad OB_2\,(o,\, y'_1);$$

existiendo entre ellas las relaciones

$$x_1\, x'_1 + 1 = o, \quad y_1\, y'_1 + 1 = o;$$

por tanto, la ecuación del plano A_2OB_2 perpendicular a la dicha recta OA, es decir, del plano polar absoluto de esta recta en la radiación, es

$$x x_1 + y y_1 + 1 = o$$

y la que representa el cono absoluto es

$$x^2 + y^2 + 1 = o. \qquad [23]$$

Estas ecuaciones manifiestan: 1.°, que las relaciones métrico-proyectivas en la radiación propia son las mismas en las tres Geometrías, parabólica, hiperbólica y elíptica, y 2.°, que estas relaciones se deducen de las correspondientes en el plano, cambiando los segmentos proyectivos por ángulos rectilíneos proyectivos, o sea por las tangentes de los respectivos ángulos ordinarios, y poniendo $k = -1$. Por tanto,

b) Las relaciones que enlazan los ángulos proyectivos de las caras de un triedro con los ángulos diedros ordinarios, son las mismas en las tres Geometrías métricas; y

c) Las ecuaciones relativas a la Trigonometría de la radiación propia, se deduce de las correspondientes de la Trigonometría rectilínea, cambiando los lados por las tangentes de las caras y poniendo $k = -1$; y son por consiguiente,

$$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 b}\,\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 c}, \quad \mathrm{tg}\, b = \mathrm{tg}\, a \cos C,$$

$$\frac{\mathrm{tg}\, b}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 b}} = \frac{\mathrm{tg}\, a}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}} \operatorname{sen} B, \quad \mathrm{tg}\, b = \frac{\mathrm{tg}\, c}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 c}} \mathrm{tg}\, B,$$

$$\cos B = \frac{\operatorname{sen} C}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 b}}, \quad \mathrm{tg}\, B\, \mathrm{tg}\, C = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}$$

para los triedros rectángulos, las cuales se transforman en

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \mathrm{tg}\, b = \mathrm{tg}\, a \cos C, \quad \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$$
$$\mathrm{tg}\, b = \operatorname{sen} c\, \mathrm{tg}\, B, \quad \cos B = \cos b \operatorname{sen} C, \quad \cos a = \cot B \cot C;$$

y para los triedros cualesquiera, se obtienen las

$$\frac{\mathrm{tg}\, a}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}} \operatorname{sen} B = \frac{\mathrm{tg}\, b}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 b}} \operatorname{sen} A,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}} = \frac{1+\mathrm{tg}\, b\, \mathrm{tg}\, c \cos A}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 b}\,\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 c}},$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 c}} - \cos A \cos B$$

o sea

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A, \quad \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c, \qquad [24]$$

las cuales, como se ve, se confunden con las de la Trigonometría esferica ordinaria.

42. En el espacio se establece un sistema particular de coordenadas, análogo al cartesiano de la Geometría ordinaria, tomando como tetraedro fundamental uno que sea autopolar en el sistema polar absoluto, es decir, un tetraedro formado por un triedro O.XYZ trirrectángulo y el plano polar absoluto del origen O. En este sistema las coordenadas de un punto son las distancias proyectivas del origen de coordenadas a las proyecciones ortogonales del dicho punto sobre los tres ejes coordenados

OX, OY y OZ.

Designando por α, β y γ los ángulos que forma con los ejes coordenados, la perpendicular p a un plano trazada por el origen, se obtiene para ecuación normal del plano la

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p;$$

y si r es la distancia proyectiva del origen a un punto cualquiera A de este plano, y α_1, β_1, γ_1 y θ son los ángulos ordinarios que la recta OA forma con los ejes y con la recta que contiene la distancia p, por ser

$$(r \cos \alpha_1,\ r \cos \beta_1 \text{ y } r \cos \gamma_1)$$

las coordenadas del punto A y verificarse que $p = r \cos \theta$, la ecuación anterior conduce a la igualdad

$$\cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 = \cos \theta \qquad [25]$$

que es la misma de la Geometría ordinaria e independiente del valor de la constante k característica de la Geometría métrica.

Aplicando esta fórmula al triedro O.ABC (fig. 4.ª) rectángulo en la arista OA, y designando a las caras, como siempre, por a, b y c, se obtiene la ecuación hallada $\cos a = \cos b \cos c$. Asimismo aplicando la ecuación [25] al triedro O.ABC$_1$ (fig. 4.ª), designando también sus caras por a, b y c, se obtiene la ecuación $\cos a = \cos XOB \cos XOC_1 + \cos ZOB \cos ZOC_1$ por ser recto el ángulo YOB; pero $\cos XOB = \text{sen}\, a$, $\cos ZOB = \cos a$ y en el triedro rectángulo XC$_1$ C$_2$ se verifica que $\cos XOC_1 = \cos XOC_2 \cos C_2OC_1$ siendo $\cos XOC_2 = \cos A$ y $\cos C_2OC_1 = \text{sen}\, b$; luego resulta la segunda ecuación [24], con lo cua se demuestra nuevamente la proposición $b)$.

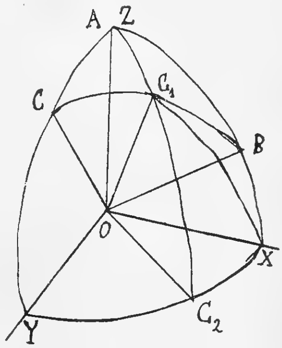


Fig. 4.ª

Las ecuaciones y fórmulas relativas a la incidencia e intersección de rectas y planos son las mismas que las de la Geometría analítica ordinaria.

Si A_1, B_1 y C_1 son las proyecciones ortogonales de un punto $A(x_1, y_1, z_1)$ sobre los tres ejes coordenados, las coordenadas no nulas de los puntos A'_1, B'_1 y C'_1 asociados con aquellos tres en los respectivos ejes, son

$$\frac{1}{kx_1},\quad \frac{1}{ky_1},\quad \frac{1}{kz_1}$$

y, por tanto, la ecuación del plano determinado por los puntos A'_1, B'_1 y C'_1, es decir, del plano polar absoluto del punto A, es

$$kxx_1 + kyy_1 + kzz_1 - 1 = o \qquad [26]$$

y, en consecuencia, la ecuación de la cuádrica absoluta es

$$kx^2 + ky^2 + kz^2 - 1 = o, \qquad [27]$$

por cuyo medio es fácil resolver los problemas relativos a la perpendicularidad de rectas y planos, recordando que los elementos perpendiculares en el sentido proyectivo son conjugados respecto de la cuádrica absoluta.

Los problemas sobre distancias y ángulos se reducen a los anteriores y a la determinación de la distancia d entre dos puntos, la cual se obtiene por el mismo procedimiento que la fórmula [7] en el plano, y resulta

$$d^2 = \frac{\left.\begin{array}{r}(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - k\,[(x_1\,y_2 - y_1\,x_2)^2 + \\ + (x_1\,z_2 - z_1\,x_2)^2 + (y_1\,z_2 - z_1\,y_2)^2]\end{array}\right\}}{(kx_1\,x_2 + ky_1\,y_2 + kz_1\,z_2 - 1)^2} \qquad [28]$$

Tratemos de buscar la condición de paralelismo de dos rectas en la Métrica elíptica. Para ello recordemos que para que dos rectas que se cruzan sean paralelas en esta Geometría, basta con que existan dos rectas que las corten ortogonalmente y que no sean polares absolutas entre sí.

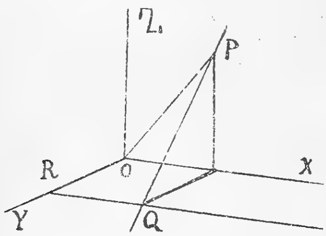


Fig. 5.ª

Sean OR y PQ (fig. 5.ª) las dos rectas ortogonales a las dadas OP y RQ; tomemos un sistema de ejes coordenados de modo que el origen sea el punto O, la recta OR, el eje OY y el plano ORQ, el XY, pongamos (OR) $= b$ y $m =$ $=$ tg XOP, entonces las coordenadas de los puntos P y Q son, respectivamente (x_1, o, mx_1), (x_2, b, o) y las ecuaciones de los planos perpendiculares a las rectas dadas OP y RQ en los puntos P y Q, son

$$x - x_1 + m\,(z - mx_1) = o, \qquad y - b = \frac{kb^2 - 1}{kbx_2}\,(x - x_2),$$

mas como ambos pasan por los dos puntos P y Q, se verifican las condiciones

$$x_2 = (1 - kb)\,x_1 = x_1\,(1 + m) \text{ de donde } m = b\sqrt{-k}.$$

Ahora bien; en virtud de la fórmula [28] se tiene que

$$(\text{OP}) = x_1\sqrt{1 - kb^2} \quad \text{y} \quad (\text{RQ}) = x_1\sqrt{1 - kb^2},$$

luego (OP) = (RQ), es decir, que

a) Los trozos de paralelas de Cliford comprendidos entre paralelas son iguales.

Este teorema permite trazar por un punto O las paralelas a una recta RQ en la Métrica elíptica. Pues, basta, en efecto, trazar por el punto la recta OR que corta ortogonalmente a la recta dada, y la perpendicular OX a esta recta OR; después, por un punto cualquiera Q de la recta dada y en el plano OQR determinado por ella y por el punto dado O, se traza la perpendicular a esta recta, por su punto de encuentro S con la recta OX se traza asimismo la perpendicular a esta recta, y uniendo el punto dado O con los de intersección de esta última perpendicular con la circunferencia de centro O y radio RQ, son las rectas que se buscan; de aquí resulta que

b) En la Métrica elíptica por cada punto del espacio pasan dos rectas paralelas a una dada.

Como los triángulos ORQ y POQ son iguales por tener sus tres pares de lados iguales, resulta que

c) En la Métrica elíptica toda secante de dos paralelas forma con ellas ángulos iguales.

Estas dos últimas propiedades coinciden con las de las rectas paralelas de la Geometría ordinaria, y justifican el nombre de paralelas dado a las rectas de que se trata.

VII.—La Geometría absoluta

43. Suponemos establecida la Geometría proyectiva utilizando, como ya hemos dicho, los axiomas gráficos, es decir, los de ordenación y enlace, y un postulado de continuidad, como se hace en la citada obra del profesor Rey Pastor.

Para establecer las propiedades métricas con independencia de la proposición V de Euclides, es decir, independientemente de toda hipótesis acerca del paralelismo, no bastan los mencionados postulados o axiomas, sino que se hace preciso establecer postulados de congruencia o del movimiento. Así admitimos que

I. Existen ciertas colineaciones llamadas movimientos, en las cuales a un segmento rectilíneo corresponde otro segmento rectilíneo;

II. Los movimientos forman un grupo, y

III. Un movimiento queda determinado por dos puntos homólogos, dos medios rayos homólogos que parten de estos puntos y dos medios planos homólogos que parten de estos medios rayos.

Las figuras homólogas en un movimiento se llaman iguales, y como se deduce de los dos primeros axiomas, la relación que las enlaza satisface a las propiedades idéntica, recíproca y transitiva.

Si en un movimiento existe un plano doble, a toda figura situada en él corresponde otro situada también el plano. La colineación plana entre estas figuras constituye el movimiento de una figura plana en su plano, y de este movimiento vamos a ocuparnos ahora.

Llamemos α y α_1 los dos medios planos en que el plano considerado queda dividido por una de sus rectas, y sean a y a_1 los dos medios rayos en que esta recta queda dividida por uno A de sus puntos.

Suponiendo fijos o dobles el punto A y la recta citada, existen los siguientes movimientos en virtud del axioma tercero.

a) El medio rayo a y, por tanto, su complementario a_1, son dobles y también son dobles los dos medios planos α y α_1. Este movimiento es la identidad, puesto que en la colineación idéntica se verifican estas condiciones y existe un solo movimiento determinado por los pares A-A, a-a, α-α.

b) El medio rayo a es doble y al medio plano α corresponde el α_1;

c) Al medio rayo a corresponde el a_1, y el medio plano α es doble, y

d) Son correspondientes los medios rayos a y a_1 y los medios planos α y α_1.

Como el cuadrado de cada uno de estos movimientos es la identidad, se deduce que los tres últimos son colineaciones involutivas: Además, el producto de cada dos de ellos es igual al tercero; de modo que designando por $M_0 = 1$ la identidad y por M_1, M_2 y M_3 los otros tres movimientos involutivos, se verifican las relaciones

$$M_0^2 = 1, \quad M_1^2 = 1, \quad M_3^2 = 1; \quad M_0 M_1 = M_1 M_0 = M_1,$$
$$M_0 M_2 = M_2 M_0 = M_2, \quad M_0 M_3 = M_3 M_0 = M_3, \quad M_1 M_2 = M_2 M_1 = M_3,$$
$$M_2 M_3 = M_3 M_2 = M_1, \quad M_3 M_1 = M_1 M_3 = M_2,$$

luego,

e) Existen cuatro movimientos en los cuales permanecen fijos un plano, una recta de él y un punto de esta recta, los cuales forman un grupo abeliano, y excepción de la identidad, los otros tres son involutivos.

En el movimiento M_1 el eje del sistema plano en involución que define es la recta $a\,a_1$, pues si un punto genérico B de a distinto del A, no fuese doble, le correspondería otro punto B_1 situado también en a, y que estaría en el segmento $\overline{AB}$ o en su prolongación $\overrightarrow{AB}$, y en ambos casos se verificaría que al punto B_1 correspondería el B, al segmento AB el AB_1 y al punto B_1 interior o exterior al primer segmento, correspondería el punto B exterior o interior al segundo segmento, lo cual está en contradicción con el postulado I.

Este movimiento se llama *simetría respecto del eje* aa_1, el centro A de la homología involutiva, se llama *polo absoluto* del citado eje, y las rectas dobles que pasan por este punto se dicen *perpendiculares* al mismo eje.

En el movimiento M_3, el punto A es el centro de la homología involutiva, puesto que, siendo doble, el eje no puede pasar por él toda vez que habían de corresponderse los dos medios rayos en que lo divide el punto A, a causa de corresponderse α y α_1. Este movimiento se llama *simetría respecto del centro* A.

Consideremos la simetría S respecto de la recta AC perpendicular a la a en el punto A. En la simetría M_1 al medio rayo AC corresponde su complementario AC_1, y al medio plano C_1Aa corresponde el mismo, pues si P-P_1 es un par de puntos homólogos, el P estará con el C o con el C_1 a distintos lados respecto del eje aa_1; supongamos que sea el C_1; entonces los segmentos PC_1 y P_1C se cortan en un punto B del citado eje, y por tanto, los puntos P y P_1 están con B al mismo lado de AC, y en consecuencia, ellos, entre sí, están también al mismo lado de esta recta.

De aquí resulta que en el producto SM_1, es doble el punto A, y son homólogos los medios rayos AC-AC_1 y los medios planos CAa y CAa_1 y, por tanto, el movimiento SM se confunde con el M_3, por verificarse en este movimiento aquellas tres condiciones. Y como para que el producto de dos homologías involutivas cuyos ejes se cortan sea otra homología involutiva cuyo centro sea el punto común a los ejes, es necesario que el centro de cada una de aquellas esté en el eje de la otra, y entonces la recta que une estos centros es el eje de la homología producto; se deduce que

f) Si una recta es perpendicular a otra, ésta lo es a aquélla, es decir, que la perpendicularidad de dos rectas es una propiedad recíproca. En otros términos: si dos rectas son perpendiculares el polo absoluto de cada una de ellas está en la otra.

Como un razonamiento análogo al anterior aplicado a las dos simetrías respecto de dos ejes perpendiculares cualesquiera que pasan por el punto A, resulta como producto de ellas la simetría respecto de este punto, se deduce que

g) Los polos absolutos de todas las rectas que pasan por un punto, se encuentran en una recta que es el eje de la simetría cuyo centro es este punto. Por esta razón a esta recta se llama *polar absoluta* del punto.

h) El movimiento M_2 es una simetría respecto de un eje perpendicular a la recta aa_1 en el punto A.

Si por un movimiento cualquiera M el par de rectas perpendiculares AB y AC se transforman en las A_1B_1 y A_1C_1, designando por AC' y $A_1C'_1$ los medios rayos complementarios de los AC y A_1C_1 por M^{-1} el movimiento inverso del M y por S la simetría respecto del eje AB, en el movimiento $M^{-1}SM$ permanecen fijos el punto A_1 y el medio rayo A_1B_1, y como son homólogos A_1C_1 y $A_1C'_1$, se corresponden los medios planos $B_1A_1C_1$ y $B_1A_1C'_1$, lo que prueba que el movimiento en cuestión es una simetría respecto de la recta A_1B_1, siendo en ella homólogos los medios rayos A_1C_1 y $A_1C'_1$; luego

i) La perpendicularidad de rectas es una propiedad invariante respecto del grupo de los movimientos.

Consideremos en un plano un segmento AB y tratemos de averiguar cuántos segmentos iguales al dado existen en un medio rayo A_1B_1 del mismo plano que parten del extremo A_1. Para ello supongamos que en un movimiento M_1 se corresponden los puntos A-A_1 y los B-B_1, siendo doble el plano que los contiene; y que en otro movimiento M_2 se corresponden los pares A-A_1 y B-B_2, siendo también doble el plano ABA_1; entonces en el movimiento $M_1^{-1}M_2$ son dobles el punto A_1 y el medio rayo A_1B_1, luego o es la identidad o la simetría respecto de la recta A_1B_1, y en ambos casos son dobles todos los puntos de esta recta y, por tanto, se confunden en uno los dos puntos B_1 y B_2, es decir, que

j) En una recta y a un lado de sus puntos existe un solo punto que con aquél determina un segmento igual a un segmento dado en un plano que pasa por la recta. Asimismo se verifica que

k) Dado un medio rayo en un plano, sólo existe un medio rayo que parte del extremo de aquél y que estando a uno de los dos lados del mismo, forma con él un ángulo igual a otro dado.

Pues, si BAC es el ángulo dado y A_1B_1 el medio rayo también dado de extremo A_1, suponiendo que en un movimiento M_1 se corresponden los puntos A-A_1, los medios rayos AB-A_1B_1 y los AC-A_1C_1, y que en otro movimiento M_2 se corresponden los puntos A-A_1, los medios rayos AB-A_1B_1 y los medios planos BAC y $B_1A_1C_2$, estando los medios rayos A_1C_1 y A_1C_2 al mismo lado de A_1B_1, en el movimiento $M_1^{-1}M_2$ son dobles el punto A_1, el medio rayo A_1B_1 y el medio plano $B_1A_1C_1$; y por consiguiente, este movimiento es la identidad, lo que prueba que coinciden los dos medios rayos A_1C_1 y A_1C_2.

De la proposición *i)* se deduce que en todo movimiento a dos elementos polares absolutos corresponden otros dos también polares absolutos. Ahora bien: si dos puntos A y B tienen la misma polar absoluta a, otro punto C no alineado con ellos determinará con los mismos sendas rectas AC y BC cuyos polos absolutos deben estar en la recta a polar común y, por tanto, esta recta es también polar absoluta del punto C; y lo mismo acontece con un punto cualquiera D de la recta AB, toda vez que no estará alineado con los A y C. Luego si los dos puntos A y B tienen polares absolutas distintas, lo mismo acontece a los demás puntos del plano, y entonces, como son concurrentes las polares absolutas de los puntos de una recta, una figura plana y la formada por sus elementos polares absolutos, son correlativas; y, verificándose además, que en el triángulo formado por dos rectas perpendiculares y la polar absoluta de su punto común, a cada vértice corresponde el lado opuesto, las mencionadas figuras constituyen un sistema polar, el cual, recibe el nombre de *sistema polar absoluto* del plano, designándose también con el calificativo de *absoluta* a su cónica directriz, slstema y cónica, que son invariantes en el grupo de los movimientos, así como en este mismo grupo es doble la polar absoluta común de todos los puntos del plano, cuando esta circunstancia se verifica, en cuyo caso esta *recta* recibe el calificativo de *absoluta.*

Conclúyese de aquí que

l) Existen tres clases de Geometrías planas absolutas llamadas por Klein parabólica, hiperbólica y elíptica, según que exista en el plano recta absoluta, cónica absoluta real, o cónica absoluta imaginaria, las cuales son casos particulares de las Métricas proyectivas de igual denominación, estudiadas en los capítulos anteriores.

44. Consideremos en el espacio el movimiento en el cual son dobles un punto A y un medio rayo AB que parte de este punto, siendo homólogos los dos medios planos α_1 y α_2 en que queda dividido por la recta AB un plano α que pasa por esta recta. Como en el párrafo anterior, se verifica que la homografía correspondiente es involutiva, siendo dobles todos los puntos de la recta AB; y como todo movimiento en el cual son dobles todos los puntos de un plano es la identidad, en virtud del axioma tercero, se deduce que el movimiento en cuestión es una homografía involutiva con dos ejes, uno de los cuales es la recta AB y el otro A_1B_1 se cruza con esta recta.

Ahora bien: siendo doble todo plano que pasa por la recta AB, se corresponden los medios planos en que queda dividido por esta recta, y la simetría plana respecto de esta misma recta como eje está contenida en el movimiento de que se trata, y el centro de esta simetría o sea el polo absoluto de la recta AB está en el eje A_1B_1. Por esta razón al movimiento de que se trata se llama *simetría* respecto del eje AB, y la recta A_1B_1 recibe el nombre de *polar absoluta* de la AB.

Por otra parte, si *b* y *c* son dos rectas perpendiculares a la rectá AB en uno A de sus puntos, son dobles en el movimiento y, por tanto, también es doble el plano *bc* que determinan y la intersección *d* de este plano con otro cualquiera S que pasa por la recta AB, verificándose, consiguientemente, que la recta *d* pasa por el punto A y es perpendicular a la recta AB. De donde se deduce que

a) Los polos absolutos de una recta, en los diferentes planos que pasan por ella, están en su recta polar absoluta;

b) Toda recta que corta a otra perpendicularmente, corta a la polar absoluta de esta recta; y recíprocamente, toda recta que corta a otra y a la polar absoluta de ésta, es perpendicular a ella;

c) Todas las rectas perpendiculares a otra en uno de sus puntos, están en un plano. Este plano se llama perpendicular a la recta, y a esta recta se llama perpendicular al plano;

d) Todo plano perpendicular a una recta contiene a su polar absoluta;

e) Si una recta corta ortogonalmente a dos rectas de un plano, es perpendicular a este plano.

f) En una radiación las perpendiculares a los planos que pasan por una recta, están en el plano perpendicular a ella, y recíprocamente.

De esta última proposición se deduce que, si hacemos corresponder en una radiación de vértice propio a cada recta su plano perpendicular, se obtienen dos figuras correlativas o recíprocas; y como en todo triedro trirrectángulo se verifica que cada arista es homóloga de la cara opuesta, las dichas figuras forman un sistema polar sin superficie directriz real; por tanto, en cada plano de la radiación existe una involución de rectas conjugadas, las cuales forman un haz rectangular, y cada recta de la radiación es arista de un haz en involución de planos conjugados, el cual es también rectangular, si llamamos planos perpendiculares a dos tales, que cada uno de ellos contiene la perpendicular al otro. De donde se deduce que

g) La radiación rectangular es un sistema polar, el cual se llama sistema polar absoluto del vértice.

h) Todo haz de rectas o de planos rectangular es involutivo. Esta propiedad referente al haz de rectas, estaba ya demostrado en la Geometría elíptica e hiperbólica, por estar constituído por pares de rectas conjugadas respecto de la cónica absoluta del plano del haz.

De lo dicho se sigue que en todo movimiento plano con un punto fijo, no sólo es invariante la polar absoluta de este punto, sino también la involución que en esta recta determina la involución rectangular cuyo vértice es aquel punto (43, *i)*). Por consecuencia, el citado movimiento es una simetría respecto del punto, una simetría respecto de un eje que pasa por él o un giro; correspondiendo a cada uno de estos casos, en la proyectividad de primera categoría, cuyo vértice es el punto fijo del movimiento, la identidad, una involución o una proyectividad cuya involución unida es la rectangular.

Si A es el punto fijo y $AB\text{-}AB_1$ un par de medios rayos homólogos, no complementarios, en la proyectividad de vértice A, son homólogas las dos rectas distintas AB y AB_1 y, por tanto, esta proyectividad es involutiva o es un giro, según que al medio plano BAB_1 corresponda el B_1AB o el B_1AB', siendo AB' el medio rayo complementario del AB. En el primer caso el movimiento es una simetría respecto de un eje AC que es, por tanto, bisector del ángulo BAB_1; y si AD es la perpendicular a AC, como el producto de la simetría respecto de la recta AB por la simetría respecto del punto A es la simetría respecto de la recta AD (43, *h*), esta recta es la bisectriz; del ángulo B_1AB' adyacentes del BAB_1.

Por tanto,

i) Un ángulo cualquiera es igual al mismo invertido, lo que prueba la proposición relativa a la inversión del ángulo rectilíneo y. por tanto, del diedro;

j) Todo ángulo rectilíneo tiene una bisectriz que es perpendicular a la de su adyacente y lo análogo ocurre en el ángulo diedro.

Sea O.XYZ un triedro trirrectángulo y OA la bisectriz del ángulo YOZ: designemos por S_Z y S_A las simetrías respecto de las rectas OZ y OA. Como en S_Z es doble el punto O y la recta OZ, y homólogas las rectas de las parejas OX-OX′, OY-OY′ (fig. 6.ª), y en la simetría S_A es doble el punto O y homólogas las rectas de los pares OX-OX′, OZ-OY, en el movimiento producto de ambas simetrías son dobles el punto O y el medio rayo OX, y homólogos los medios rayos OZ y OY, y también los medios planos XOZ y XOY. Luego en el cuadrado de este movimiento son dobles el punto O y el medio rayo OX y homólogos los medios rayos OZ-OZ′ y los medios planos XOZ y XOZ′; por tanto, el movimiento $(S_Z S_A)^2$ es la simetría respecto de OX.

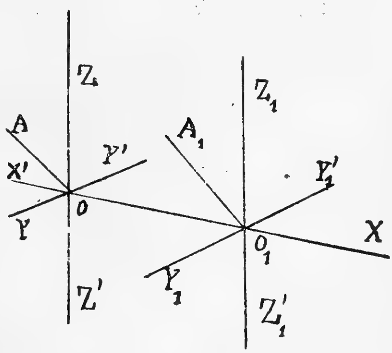


Fig. 6.ª

Ahora bien: si en el movimiento $S_Z S_A$ a un punto cualquiera B de OX correspondiese otro distinto B_1, a éste corresponde el B, por ser dobles los puntos de OX en $(S_Z S_A)^2$, y sucedería que siendo homólogos los segmentos OB y OB_1 al punto B_1, interior o exterior al primer segmento correspondería el punto B exterior o interior al segundo, lo que es absurdo. Luego todos los puntos de la recta OX son dobles en $S_Z S_A$, y como el razonamiento anterior subsiste aun cuando las rectas OY y OZ no sean perpendiculares, se deduce que

k) En todo movimiento que sean fijos un punto y un medio rayo que parte de él, todos los puntos de la recta que contiene este medio rayo son dobles.

Tracemos por un punto O_1 de OX las rectas $Z_1Z'_1$ e $Y_1Y'_1$ perpendiculares a OX situadas en los planos XOZ y XOY, y tracemos asimismo la bisectriz O_1A_1 del ángulo $Y_1O_1Z_1$; sea S_{A_1} la simetría respecto de esta recta. En S_{A_1} es doble O_1 y correspondientes los medios rayos de los pares O_1X-O_1X', $O_1Z'_1$-$O_1Y'_1$ y O_1Z_1-OY_1 y, por consiguiente, en el movimiento $(S_Z S_A S_{A_1})$ son dobles el punto O_1 y el medio rayo O_1Z_1 y homólogos los medios rayos O_1Y_1-$O_1Y'_1$, y siendo en consecuencia la simetría respecto de la recta O_1Z_1 esta recta es perpendicular a la O_1Y_1; de donde se deduce que

i) Dos rectas perpendiculares a un plano están en un plano.

j) Todas las rectas perpendiculares a un plano forman una radiación. Pues están cada dos en un plano y no están todas en un plano.

El vértice de esta radiación pertenece a las polares absolutas de todas las rectas del plano, puesto que las perpendiculares a una recta de un plano concurren en el polo absoluto de esta recta en el plano, y este punto está, como antes hemos visto, en la polar absoluta de la citada recta. Por esta razón, al mencionado vértice se llama *polo absoluto* del plano, el cual goza de la propiedad siguiente:

k) Las polares absolutas de todas las rectas de un plano pasan por el polo absoluto del plano.

Cortándose las polares absolutas de dos rectas concurrentes, en el polo absoluto del plano que estas determinan, se deduce que

l) Las polares absolutas de todas las rectas que pasan por un punto están cada dos en un plano y no pasan todas por un punto y, por tanto, están en un plano que contiene los polos absolutos de todos los planos que pasan por el punto, plano que por esta razón recibe el calificativo de *polar absoluto* del punto considerado.

Ahora bien: como en el párrafo 43 se demuestra que si dos puntos tienen un mismo plano polar absoluto, lo propio acontece a todos los demás, llamándose entonces a este plano polar *plano absoluto*.

Si, pues, dos puntos tienen planos polares absolutos distintos, a cada punto le corresponde un plano polar absoluto, y al conjunto de estos puntos y planos, en virtud de las propiedades anteriores, dan lugar a dos figuras correlativas; y como a cada vértice del tetraedro formado por un triedro trirrectángulo y el plano polar absoluto del vértice, corresponde la cara opuesta, aquel conjunto es un sistema polar el cual recibe el calificativo de *absoluto*. En este sistema polar cada recta se cruza con su correspondiente, luego su cuádrica directriz es ordinaria o imaginaria.

Por tanto, podemos concluir que

m) Existen tres clases de Geometrías absolutas llamadas por Klein, parabólica, hiperbólica y elíptica, las cuales son casos particulares de las Métricas proyectivas de igual denominación, estudiadas en los capítulos anteriores.

Todas las relaciones métricas que se han establecido en las Métricas proyectivas, subsisten, pues, en la Geometría absoluta, así como todas las fórmulas y ecuaciones obtenidas en el capítulo VI. Podemos. pues, establecer en la Geometría absoluta las siguientes proposiciones fundamentales:

n) La suma de los tres ángulos de un triángulo rectilíneo de lados menores que el segmento absoluto, es igual, menor o mayor que dos rectos, según que se trate de la Geometría parabólica, hiperbólica o elíptica.

p) La Trigonometría esférica es independiente del postulado de las paralelas y las fórmulas correspondientes se deducen de las relativas a la Trigonometría rectilínea sustituyendo las distancias proyectivas por las tangentes de los diedros del triedro y dando a la constante característica que en ellas interviene el valor — 1.

q) En la Geometría parabólica existe una sola recta que corta ortogonalmente a otras dos que se cruzan; en la Geometría hiperbólica existen dos que son polares absolutas entre sí; en la Geometría elíptica existen dos polares entre sí, o hay una infinidad que forman un haz alabeado. En este último caso aparecen las paralelas de Cliford, llamadas así por tener muchas propiedades comunes con las rectas paralelas de la Geometría euclidiana.

45. Para terminar, vamos a probar la identidad de las tres Geometrías absolutas con las de Euclides, de Lobatcheuski y de Riemman; para lo cual averiguaremos cuántos puntos impropios existen en una recta propia y su disposición en la recta.

Recordemos que el movimiento de traslación sobre una recta es una prospectividad cuyo punto doble es el de intersección con el plano absoluto en la Geometría parabólica, y una proyectividad que tiene como involución unida la de puntos asociados de la recta, en la Geometría hiperbólica y en la elíptica.

Conclúyese de aquí que el punto armónicamente separado del punto medio entre otros dos es el asociado con él en la recta que los contiene a todos; de donde se deduce que en la Geometría hiperbólica si fuesen propios los puntos dobles de la involución absoluta de la recta, el segmento que determinan debía tener infinitos puntos medios, lo que es absurdo.

También en la Geometría parabólica es impropio o ideal el punto absoluto de toda rectapropia; puesto que, como son iguales, todos los segmentos absolutos de la recta, de ser propio aquel punto, se seguiría el absurdo de que debía equidistar de todos los puntos propios de la misma. Por tanto,

a) En la Geometría parabólica el plano absoluto es impropio; y en la Geometría hiperbólica es impropia la cuádrica absoluta.

Consideremos la serie armónica ACBD; sea I el punto medio del segmento AB e I′ su asociado en la recta. El punto I′ no puede estar en el segmento BD, porque si lo estuviese tendría su simétrico I_1 respecto de I, en esta simetría serían homólogas las cuaternas AIBI′ y $BIAI_1$, y resultaría el absurdo de existir dos puntos I′ e I_1 armónicamente separados de uno mismo I por otros dos A y B. Suponiendo que el punto B está en el segmento AD, como los dos pares C-D e I-I′ no están separados, el punto I es exterior al segmento CD y, por tanto, debe encontrarse en el AC, de donde se deduce que $\overline{AC} > \overline{AI} = \overline{IB} > \overline{CB}$.

De aquí se deduce que si $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n \ldots L$ es una red armónica cuyos puntos son todos propios y ordenados, se verifican las desigualdades

$$A_0 A_1 > A_1 A_2 > A_1 A_3 > \ldots\ldots > A_{n-1} A_n .$$

Esto sentado sea $A_0 B_1 B_2 B_3 \ldots\ldots$ la serie de puntos homólogos sucesivos del punto A_0 en la traslación $A_0 B_1$, es decir, tales que se verifican las igualdades $A_0 B_1 = B_1 B_2 = B_2 B_3 = \ldots = B_{n-1} B_n = \ldots$

Si P es punto del medio rayo $A_0 B_1$ o se confunde con uno de la serie anterior o no; en este último caso, sea L un punto de la prolongación del segmento $A_0 P$ a partir de P, y construyamos la red armónica

$$A_6 B_1 A_2 A_3 \ldots A_n \ldots L,$$

con lo cual se verifica que

$$\overline{A_0 B_1} = \overline{A_0 B_1};\ \overline{B_1 A_2} < \overline{B_1 B_2};\ \overline{A_2 A_3} < \overline{B_2 B_3};\ \ldots\ldots;\ \overline{A_{n-1} A_n} < \overline{B_{n-1} B_n}$$

y, por tanto, que

$$\overline{A_0 B_1} + \overline{B_1 A_2} + \ldots + \overline{A_{n-1} A_n} < \overline{A_0 B_1} + \overline{B_1 B_2} + \ldots + \overline{B_{n-1} B_n};$$

o sea

$$\overline{A_0 A_n} < \overline{A_0 B_n}.$$

Pero se ha demostrado(*) que existe un punto A_n de la red armónica tal que se verifica que $A_0 A_n > A_0 P$; luego en la escala natural $A_0 B_1 B_2 \ldots$ existe

(*) *Fundamentos de Geometría superior*, de Rey, pág. 161.

un punto B_n que cumple con la condición $A_0B_n > A_0P$, de donde resulta demostrado el postulado de Arquímides; es decir, que

b) Construída en una recta una escala natural, un punto cualquiera de la recta pertenece a la escala o está comprendido entre dos puntos consecutivos.

En la Geometría parabólica, dos rectas AC y BD, perpendiculares a una tercera AB, tienen común un punto impropio, el polo absoluto de la recta AB, es decir, que aquellas dos rectas no se encuentran. Además, si CD es una secante cualquiera en la simetría respecto del punto medio del segmento $\overline{CD}$ son homólogos los ángulos alternos y los correspondientes, y por tanto, estos ángulos son iguales entre sí. Por consiguiente, si a partir del vértice de un ángulo simple se construye en uno de los lados una escala natural y por los puntos de ella se trazan las perpendiculares a uno cualquiera de los dos lados, se obtiene en el otro lado otra escala natural, como se desprende de la igualdad de los triángulos rectángulos obtenidos trazando por los puntos de una de las escalas las rectas perpendiculares a las secantes.

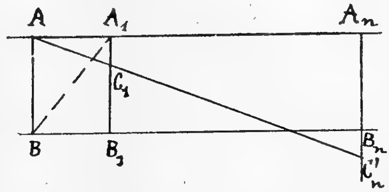


Fig. 7.ª

Construyamos (fig. 7.ª) en una recta BB_n una escala natural $BB_1B_2...$, tracemos en el punto B una recta perpendicular a ella y la perpendicular a esta recta en un punto A. Esta recta cortará en los puntos $A_1A_2A_3...$ de otra escala natural a las perpendiculares a la primera recta BB_n en los puntos $B_1B_2B_3...$ Hemos visto que las dos rectas AA_n y BB_n no se encuentran. Si AC_1 es una recta interior al ángulo recto BAA_n corta al segmento BB_1 y, por tanto, a la recta que la contiene, o no corta al dicho segmento; y como corta al segmento BA_1, la consideración del triángulo BA_1B_1, prueba que en el último caso la recta A_1C_1 corta en un punto C_1 al segmento A_1B_1. Ahora bien: si construimos en la recta A_1C_1 la escala natural $A_1C_1C_2...$, el punto B_1 coincide con el C_n o está comprendido entre dos consecutivos C_{n-1} y C_n, es decir, que se verifica que

$$\overline{A_1B_1} \leqq \overline{A_1C_n} = n\,\overline{A_1C_1}:$$

pero la recta A_nB_n corta a la AC_1 en un punto C'_n que cumple con la condición

$$\overline{A_nC'_n} = n\,\overline{A_1C_1}; \quad \text{luego} \quad \overline{A_nB_n} = \overline{A_1B_1} \leqq \overline{A_nC'_n};$$

lo que prueba que B_n coincide con C'_n o los puntos A_n y C'_n están a distintos lados del B_n y, por tanto, a distintos lados de la recta BB_n y, como los A y A_n están al mismo lado de esta recta, los A y C'_n están a lados distintos; en ambos casos la recta AC_1 corta a la BB_n. Pero las rectas del haz de vértice A exteriores al ángulo BAA_1 son simétricas de las interiores respecto de la recta AB; luego también cortan a la recta BB_n y, por tanto,

c) En la Geometría parabólica, por un punto exterior a una recta en el plaoo que determinan pasa una sola recta que no corta a la propuesta. La Geometría parabólica es, pues, idéntica a la Geomeiría euclidiana.

En la Geometría hiperbólica ya hemos visto que los puntos dobles de la involución absoluta de la recta BB_1 (fig. 8.ª), son impropios y, por tanto, también es impropio el punto asociado a un punto propio, puesto que si fuesen propios dos puntos asociados como en el segmento que determinan, debe estar uno de los puntos dobles de aquella involución, este punto sería propio.

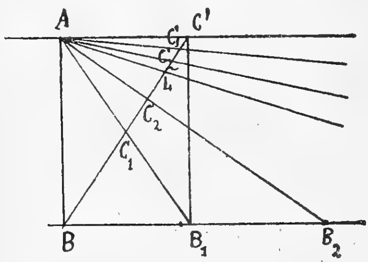


Fig. 8.ª

Proyectemos desde el punto A exterior a la recta BB_1 la involución absoluta de esta recta: al rayo proyectante del punto asociado al pie B de la perpendicular a la recta es la perpendicular AC′ al citado rayo AB, y los rayos dobles de la involución obtenida están uno AL dentro del ángulo BAC′ y el otro fuera de este ángulo.

Sean BB_1B_2... los puntos de una escala natural y $B'B'_1B'_2$... sus asociados en la recta; la perpendicular a esta recta en el punto B_1 corta a la AC′ en un punto C′, que unido con el B por una recta se obtiene un segmento que corta a la recta AL en un punto L_1 por ser esta recta interior al ángulo BAC′. Como la recta AB_1 corta al segmento AC′ en un punto C-propio, por ser la recta qne une los otros dos puntos diagonales del cua$_1$ drivértice ABB_1C' de lados menores que el segmento absoluto, exterior a los segmentos BC′ y AB_1, el triángulo B_1AB_2 cortado por la recta AC′ manifiesta que esta recta corta a la AB_2 en un punto C_2 y del mismo modo a la citada recta AC′ cortan las AB_3, AB_4... en puntos C_3, C_4... los cuales están ordenados, y como las rectas AB'_1, AB'_2... son también interiores al ángulo BAC′, cortan al segmento AC′ en puntos C'_1, C'_2, C'_3... que determinan con sus conjugados C_1C_2... de la involución obtenida proyectando desde el punto A la involución BB'-$B_1B'_1$-$B_2B'_2$..., segmentos tales que cada uno está contenido en el anterior y que todos contienen en su interior el punto L y, por tanto, este punto es límite común de las dos sucesiones $BC_1C_2C_3$... y $C'C'_1C'_2$... Ahora bien: si P es un punto cualquiera del segmento BL, en la primera sucesión existe un punto C_n, situado en el segmento PL, y como la recta AC_n pasa por el punto B_n que es propio, la recta AP corta el segmento BB_n. Luego,

d) En la Geométría hiperbólica las rectas que desde un punto exterior a otra recta dada, proyectan los puntos dobles de la involución absoluta, dividen al haz de rectas del plano, cuyo vértice es el citado punto en dos ángulos completos, de tal modo, que todas las rectas interiores a uno de ellos cortan a la propuesta y no la cortan las interiores al otro. Los lados de este ángulo tampoco cortan a la recta y son las llamadas por Lobatcheuski y Boliai, paralelas a la citada recta. La Geometría hiperbólica, coincide, por tanto, con la Geometría lobatcheuskiana.

En la Geometría elíptica, si por el punto A exterior a una recta BB_0 (figura 9.ª), se traza la perpendicular AB a esta recta, y proyectamos desde el citado punto la involución absoluta de la recta BB_0 se obtiene otra involución en lo cual dos rayos conjugados AB-AC′ están separados por otros dos conjugados AB_0-AC'_0 y, por tanto, los rayos AC_0 y AC′ son interiores al ángulo BAC'_0, y cortan al segmento BC'_0 en dos puntos C_0 y C′, estando C′ en el segmento $C_0C'_0$, como se desprende de la involución BC′-$C_0C'_0$ sección de la de vértice A por la recta BC′.

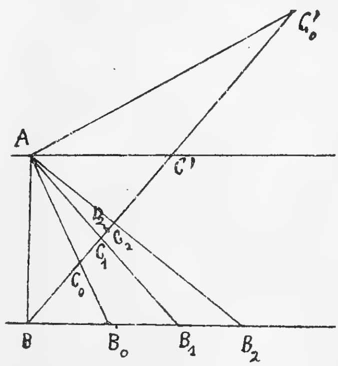


Fig. 9.ª

Construyendo ahora una escala natural $BB_0B_1B_2$... en la recta dada y proyectándola desde el punto A sobre la recta BC′, se obtiene una serie ordenada $AC_0C_1C_2$..., en la que se verifica que, por ser armónica la serie $B_0B_1B_2B'_1$, siendo B'_1 el asociado al B_1, también es armónica su proyección

$$C_0\,C_1\,C_2\,C'_1.$$

Construyamos por otra parte la red armónica $C_0C_1D_2D_3...C'_0$, en ella se verifica que es armónica la serie $C_0C_1D_2C'_0$, luego $C_0C_1C_2C'_1 \barwedge C_0C_1D_2C'_0$ y, por tanto, C_0C_1-$C_2C'_0$-$D_2C'_1$ es una involución; y como el par C_0-C_1 no está separado por el C_2-C'_0, éste tampoco lo está por el D_2-C'_1. Pero C'_1 está fuera del segmento $C_2C'_0$, luego lo propio ocurre al punto D_2, y por consecuencia, se tiene que $\overline{C_0C_2} > \overline{C_0D_2}$.

Análogamente, considerando la escala natutal $B_0B_2B_4$... con su perspectiva $C_0\,C_2\,C_4\ldots$ y la red armónica $C_0\,C_2\,F\ldots C'_0$, se verifica que $\overline{C_0C_4} > \overline{C_0F}$. Ahora bien; de esta red se deduce que es armónica la serie $C_0FC_2C'_0$ y de la red anterior que también es armónica la serie $C_0D_2D_4C'_0$ y, por tanto, que $C_0C'_0$-D_4C_2-D_2F es otra involución; y como el par C_0-C'_0 no está separado por el C_2-D_4 tampoco lo está este par por el D_2-F; pero el punto D_2 está fuera del segmento C_2D_4, luego el punto F está en el $D_4C'_0$, y por consiguiente, se verifica que $\overline{C_0F} > \overline{C_0D_4}$, y finalmente que

$$\overline{C_0C_4} > \overline{C_0D_4}.$$

Repitiendo el razonamiento se prueba que $\overline{C_0C_{2n}} > \overline{C_0D_{2n}}$. Siendo C' un punto del segmento $C_0C'_0$, por el postulado de Arquímedes en su forma proyectiva, se deduce que existe un número entero m tal que se verifica la desigualdad $\overline{C_0C_m} \gtreqless \overline{C_0C'}$, y como existe un entero n que cumple la condición $2^n > m$, se deduce que existe en el segmento $C_0\,C'_0$ un punto C_{2n} tal que se verifica que $\overline{C_0C_{2n}} > \overline{C_0C'}$.

Pero la recta AC_{2n} corta a la propuesta en el punto B_{2n}, luego también la corta la recta AC' y, por tanto, el punto B' asociado al B es propio; y como si P' es el punto asociado a uno genérico propio P de la citada recta, se verifica que $\overline{BB'} = \overline{PP'}$, por ser iguales todos los segmentos absolutos, se concluye que el punto P' es propio. Por tanto,

e) En la Geometría elíptica, dos rectas cualesquiera de un plano se cortan y, por tanto, esta Geometría coincide con la riemaniana.

Observemos finalmente, que en la Geometría hiperbólica, si bien hay dos rectas que cortan ortogonalmente a otras dos que se cruzan, estas dos rectas son polares entre sí y, por tanto, sólo una de ellas es propia; mientras que en la Geometría elíptica hay dos rectas propias que cortan ortogonalmente a otras dos que se cruzan o hay una infinidad, todas las cuales forman un haz alabeado de segundo orden, siendo en este último caso las rectas paralelas en el concepto de Cliford, las cuales tienen una multitud de propiedades comunes con las rectas paralelas de la Geometría euclídea.

Algunos insectos de la República Argentina

por el

R. P. Longinos Navás, S. J.

Los insectos de que voy a dar cuenta los he recibido, casi todos, para su estudio, de don Carlos Bruch, del Museo de Historia Natural de La Plata, quien ha tenido la generosidad de permitirme reservar para mi colección algunos de los duplicados. No todos los recogió él mismo, sino que algunos los recibió, a su vez, de otros naturalistas, cuyos nombres en su propio lugar se citarán.

Aunque todos ellos pertenecen al orden de los Neurópteros en su acepción más amplia, sin embargo, admitida la desmembración de este orden antiguo en otros autónomos, seguiré en la enumeración esta clasificación moderna.

Neurópteros

FAMILIA ASCALÁFIDOS

1. **Ululodes brachycera** Nav.

En ejemplares ♀ de La Rioja, cogidos por M. S. Pennington, el estigma es mucho más obscuro que en el tipo y casi de igual color en ambas alas.

2. **Colobopterus par,** sp. nov. (fig. 1).

Sinrilis *peruviano* Weele. Minor, reticulatione densiore.

Caput fuscum, pilis plerisque fuscis; antennis ala anteriore haud longioribus, illi subæqualibus, fulvis, ad articulationes seu apice articulorum fuscis; in quarto basilari pilis verticillatis longitudine mediocribus, fuscis, obliquis; clava pyriformi, basi late, apice anguste fusca, medio late flavida.

Thorax fuscus, fusco pilosus, pilis longis. Mesonotum quatuor maculis parum definitis, metanotum duabus, fulvis, notata.

Abdomen fuscum, superne primis segmentis (pleraque desunt) macula vel stria longitudinali fulvo-testacea.

Pedes fusci, fusco pilosi, tibiis posticis pallidioribus; calcaribus nigris, vix arcuatis, 4 primos tarsorum articulos æquantibus; tarsis fulvis, apice articulorum fusco; unguibus nigris, divergentibus, parum arcuatis.

Alæ hyalinæ, angustæ, subacutæ; reticulatione fusco-ferruginea; stigmate elongato, seu longiore quam altiore, margine interno parum, externo fortiter obliquo (fig. 1); flavido, 4-5 venulis fortibus, interdum aliqua furcata, vel ad subcostam cum proxima confluente; area apicali lata, triareolata; sectore radii 6 ramis.

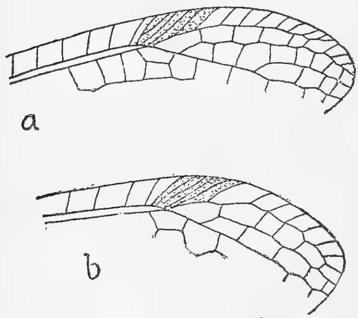


Fig. 1.
Colobopterus par ♀ Nav. Región apical de las alas: *a* anterior, *b* posterior.

Ala anterior area apicali (fig. 1, *a*) quadriareolata, prima seu anteriore serie areolarum regulari, areolis postice in lineam rectam dispositis; 3 venulis radialibus internis, 5 cubitalibus internis, quarum una ad sectorem sive ramum obliquum inserta; area postcubitali simplici; una venula inter axillarem 1 et 2; angulo axillari rotundato, leviter prominulo; subcosta inter venulas pallida.

Ala posterior brevior, stigmate breviore; area apicali subæque lata, constanter triareolata (fig. 1, *b*); vena postcubitali vix arcuata, citra medium alæ terminata.

Long. al. ant. ♀	22,5	mm.
— — post.	20	—
— antenn.	22	—

Patria. República Argentina: Puerto Bermejo (Corrientes), Bruch. El tipo no existe, pues al regresar al Museo de La Plata, según me escribe el señor Bruch, fué abierta la caja, y este ejemplar desapareció totalmente con otros, destruídos.

Es muy parecido al *C. peruvianus* Weele, según ejemplares típicos de mi colección. El tamaño es menor; más cortas las antenas; los colores del cuerpo, y especialmente de las patas, diferentes; la malla de las alas, visiblemente más densa; el campo apical del ala posterior, más ancho.

FAMILIA MIRMELEÓNIDOS

3. **Ledoscius**, gen. nov.

Similis *Glenuro* Hag. Genus Dendroleinorum.

Antennæ longæ fere ut thorax, insertione minus distantes diametro primi articuli, clava parum dilatata.

Prothorax longior quam latior.

Abdomen alis brevius.

Pedes graciles, longi; tibiæ fere suis femoribus longiores; calcaria parum arcuata, fere duos primos tarsorum articulos æquantia; tarsi articulis primo et quinto longis, intermediis brevibus.

Alæ grandes, ad regionem stigmatis amplæ; reticulatione in tertio apicali densa; area costali in duobus tertiis internis venulis plerumque simplicibus; area apicali lata, venulis densis, furcatis ramosisque, paucis transversis vix in series gradatas dispositis; ramo cubiti in angulum apertum, cum postcubito haud vel vix parallelo; nulla linea plicata.

Ala posterior brevior angustiorque.

El tipo es la especie siguiente.

Del género *Glenurus* Hag. difiere, principalmente, por la cortedad del ala posterior, y en tener en ella dos venillas radiales internas en vez de una que poseen los géneros afines de los Dendroleínos.

4. **Ledoscius Penningtoni,** sp. nov. (fig. 2).

Caput fuscum; maculis in vertice, annulo ad antennarum basim et fascia anteriore clypei et labro flavis; oculis fuscis; palpis flavis, labialium pænultimo articulo apice, ultimo subtoto fuscis; hoc ultimo fusiformi, acuto; antennis thorace parum brevioribus, ferrugineo-fuscis, inferne flavis.

Thorax fuscus, superne fascia media longitudinali flava. Prothorax longior quam latior, antrorsum angustatus, pilis lateralibus brevibus, griseis fuscisque.

Abdomen fulvo-ferrugineum, duobus primis segmentis superne fuscescentibus, stria media longitudinali flava; pilis brevibus griseis fuscisque.

Pedes tenues longique, flavo-fulvi, fusco setosi, fulvo pilosi; calcaribus rectis, apice arcuatis, ferrugineis, duos primos tarsorum articulos æquantibus; tarsis articulis primo et quinto longitudine subæqualibus; articulis tarsorum anteriorum fuscescentibus, posteriorum inferne apice fuscis.

Alæ hyalinæ, irideæ; reticulatione fulva, in maculis fuscis fusco varia; stigmate rotundato, roseo; area costali in duobus tertiis basilaribus venulis simplicibus; area apicali lata, venulis densis, furcatis aut ramosis, aliquot venulis transversis vix in series gradatas manifeste dispositis.

Ala anterior latior; area radiali fere 8-9 venulis internis, aliquot cellulis ante ortum sectoris divisis; sectore radii ultra ramum cubiti et ad apicem postcubiti orto, fere 14 ramis. Multæ venulæ fusco limbatæ exiguas maculas formantes: costales pleræque ad subcostam, radiales multæ late ad radium, intercubitales fere omnes late totæque, postcubitales ad postcubitum, aliæ præterea in disco; stria lata obliquaque ad anastomosim. Præterea fascia transversa lata fusca in regione stigmatis a margine anteriore citra stigma usque ad angulum externum; fascia hæc transversa extrorsum dilatata nec marginem externum attingens nisi sub apicem, areolam triangularem hyalinam ad anastomosim cubitorum et alias anteriores liberans, extrorsum in maculas soluta, quarum una apicalis, parva, alia magna costalis ultra stigma.

Ala posterior (fig. 2) brevior angustiorque, 2 venulis radialibus internis; sectore radii citra ortum rami cubiti et apicem postcubiti orto, fere 12 ramis. Fascia transversa fusca citra stigma integra, lata, a margine costali usque ad angulum posteriorem, ubi emarginata, interne bis angulosa, seu introrsum leviter dilatata, in areis radiali et procubitali, externe ad medium conjucta sum alia fascia in modum X obliqua, ramis margines attingentibus, externo sub apicem, cum macula brevi apicali triangulari contiguo.

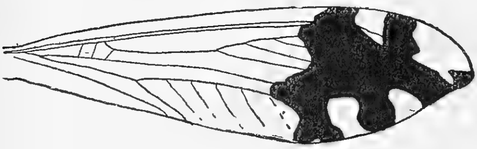


Fig. 2.ª

Ledoscius Penningtoni. Nov. Ala posterior (esquemática). Mus. de La Plata.

Long. corp. ♂		32	mm.
—	al. ant	39,5	—
—	— post	38,4	—

Patria. República Argentina: La Rioja, M. S. Pennington leg. (Mus. de La Plata.).

FAMILIA CRISÓPIDOS

5. **Chrysopiella argentina** Banks, var. **acysta** nov. (fig. 3).

A typo differt:

Ala anteriore cellula divisoria nulla.

Mendoza (Rep. Argentina).

Un ejemplar ♂ en mi colección, enviado por el señor Banks.

He llamado *acysta* a esta variedad o aberración por la carencia de la celdilla divisoria del ala anterior; de κύστη, vejiga, célula.

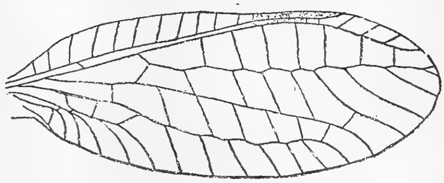


Fig. 3.ª

Chysopiella argentina Banks, var. *acysta* Nav. Ala anterior (Col. m.).

6. **Chrysopiella argentina** Banks, var. **extranea** nov. (fig. 4).

A typo differt:

Cellula divisoria in ala anteriore libera, seu venula prima intermedia ultra cellulam divisoriam procubito inserta.

San Juan (Mendoza), C. S. Reed. El tipo fué destruído o desapareció al regresar al Museo de La Plata.

Revisando los numerosos ejemplares que poseo de esta especie argentina, no he encontrado ninguno en que la venilla intermedia estuviese tan marcadamente alejada de la celdilla divisoria; en algunos cae cerca de ápice o en el ápice mismo; en los más, en el tercio apical de dicha celdilla.

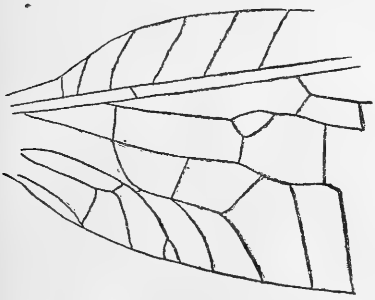


Fig. 4.ª

Chrysopiella argentina Banks, var. *extranea* Nav.

7. **Chrysopiella argentina** Banks, var. **trapezia** nov. (fig. 5).

Ala anterior cellula procubitali 3 in duas polygonales divisa, similiter ac in genere *Nothochrysa* Mac Lachlan, seu ramulo divisorio a venula tia procubitali retrorsum in angulum retracta (fig. 5).

Mendoza, 1907. (Col. m., Banks ded.).

Esta variación puede considerarse como anomalía. En el ejemplar que tengo a la vista existe en ambas alas anteriores, pero se ve más marcada en la izquierda (fig. 5).

8. **Chrysopa lanata** Banks, var. **climacia** nov.

Caput flavum, vertice immaculato; facie stria rubra ante antennas.

Prothorax transversus, angulis anticis oblique truncatis, immaculatus.

Ala anterior venulis gradatis fere 6/8, prima intermedia et cubitali inter sectorem et cubitum totis, radialibus ad radium nigris; venulis intermediis 5, prima vix ultra cellulam divisoriam procubito inserta.

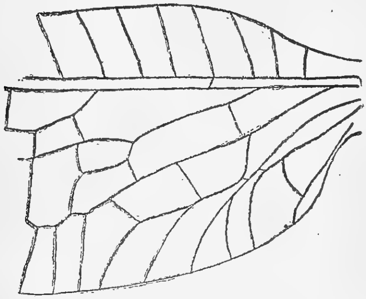


Fig. 5.ª
Chrysopiella argentina Banks, var. *trapezia* Nav. (Col. m.)

Long. corp. ♀..		10,7 mm.
—	al. ant...	13,9 —
—	— post..	12,5 —

Patria. Argentina: San Juan (Mendoza), C. S. Reed. También este tipo pereció en su regreso al Museo de La Plata.

La estructura y forma de las alas y, en general, del cuerpo, es tan parecida a la *Ch. lanata* Banks, que no oso separar específicamente esta forma, a pesar de la divergencia en el color y en la posición de la primera venilla intermedia.

La apellido *climacia* de κλῖμαξ, grada, por alusión a las venillas gradiformes negras.

FAMILIA HEMERÓBIDOS

9. **Hemerobius pinnatus**, sp. nov.

Caput fulvum, superne ad latera fuscum; oculis fuscis; genis fuscis; palpis subtotis fuscis; antennis fulvis.

Thorax fusco-niger, pilis fulvis, superne ad medium fulvus. Prothorax transversus.

Abdomen totum fusco-nigrum, pilis fulvis.

Pedes toti fulvi, tibiis posticis leviter dilatatis.

Alæ hyalinæ, irideæ, latæ, apice elliptice rotundatæ; reticulatione fulva, fusco varia; subcosta tota fulva; stigmate parum sensibili.

Ala anterior area costali venulis ferme furcatis aut ramosis, fusco punctatis striatisve; radio reliquisque venis ramisque punctis striolisve fuscis signatis; sectore radii 3 ramis; his reliquisque pone ramis venisque umbris penniformibus, ad marginem externum densioribus arcuatisque fusco-fulvis limbatis; venulis gradatis 5/6, nigris; venula radiali interna prope basim, longe citra divisionem procubiti; venulis procubitali et cubitali internis in lineam rectam, nigris fuscoque limbatis; nulla alia venula cubitali, seu cellula cubitali secunda aperta.

Ala posterior nullatenus maculata; reticulatione fulva; venulis gradatis 2/7 totis cum tractibus venarum ramorumque vicinis in medio alæ anteriore, item tractu sectoris radii ad medium seu ad originem ramorum et apice postcubiti cum suis ramis apicalibus fusco-nigris; ramo recurrente inter sectoris radii ortum et procubitum brevi.

Long. corp. ♀	....	4,5 mm.
— al. ant	....	7,4 —
— — post	....	6,3 —

Patria. República Argentina: Quilanes, prov. de Buenos Aires, marzo de 1916, M. S. Pennington leg. (Mus. de La Plata).

Megalópteros

FAMILIA NEURÓMIDOS

10. **Corydalus primitivus** Weele.

Tucumán, C. S. Reed. Localidad clásica, única en que se ha encontrado esta especie. Un ejemplar ♀.

Tricópteros

FAMILIA LIMNOFÍLIDOS

11. **Isocentropus,** gen. nov.

Etim. Del gr. ἴσος, igual, y κέντρον, espolón.

Similis *Platycentropo* Ulm.

Abdomen ♂ cercis brevibus.

Calcaria 1, 3, 4, ultimis tibiæ posterioris in ♂ longitudine subæqualibus; tenuibus, sive haud dilatatis; tarsis articulo primo longiore secundo, quinto sine spinulis nigris infernis.

Alæ apice rotundatæ; cellula discali longa; furcis apicalibus 1, 2, 3, 5 plerumque sessilibus; cellulis apicalibus II et IV basi seu ad anastomosim latis, vel II paulo latiore, rectangulis.

Ala anterior lata; margine externo convexo; area thyridiali longa; cellulis basilaribus 1 et 2 in unam grandiorem fusis.

Ala posterior latior, margine externo ad cubiti apicem leviter emarginato sive concavo.

Parécese al género *Platycentropus* Ulm. en la forma de las alas, especialmente en la malla del ala anterior, con la fusión en una de las dos celdillas basilares, y en la posterior, con el margen externo cóncavo. Difiere en el número de espolones y en su forma, carencia de espinillas negras en la cara inferior del último artejo de los tarsos, etc.

El tipo es la siguiente especie:

12. **Isocentropus lutzinus,** sp. nov., (fig. 6).

Caput testaceo-ferrugineum; vertice macula grandi fusca medio longitudinaliter divisa; verrucis posterioribus transversis, serie pilorum nigrorum erectorum hirsutis; oculis fuscis; ocellis ferrugineis; palpis fuscescentibus; maxillarium articulo primo brevi, fulvo, secundo quater saltem longiore, tertio paulo breviore secundo; antennis alæ anteriori longitudine subæqualibus, fuscis, ad apicem articulorum paulo pallidioribus, primo articulo testaceo-ferrugineo, capite paulo breviore, apice leviter dilatato.

Thorax superne fusco-ferrugineus, pilis nigris erectis longis, in seriem transversam ad pronotum, in duas lineas longitudinales in medio anteriore mesonoti, in lineam mediam longitudinalem in medio posteriore, item ad scapulas mesonoti; aliis fulvis ad alarum basim; inferne testaceo-ferrugineus.

Abdomen testaceum, fulvo breviter pilosum; cercis superioribus et inferioribus (fig. 6, *a, b*) brevibus, uniarticulatis, pilosis; processu ultimi tergiti in duos lobulos breves angustosque; dentibus decimi tergiti acutis; processu laterali interno decimi segmenti longo, angusto, in primo tertio leviter geniculato, mox extrorsum leviter arcuato, compresso, ferrugineo, apice nigro.

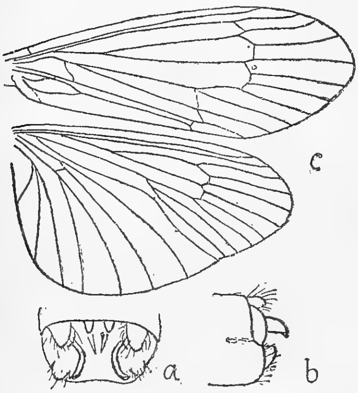


Fig. 6.ª

Isocentropus lutzinus ♂ Nav. *a, b*. Extremo del abdomen visto por encima y de lado.—*b*. Alas (Mus. de La Plata).

Pedes testaceo-fulvi, fulvo pilosi, coxis pilis longis, fulvis in seriem externam; tibiis tarsisque nigro spinulosis, ultimo articulo excepto; calcaribus 1, 3, 4, testaceis, longis, tenuibus, subrectis, acutis; tarsis articulo primo sesquilongiore secundo, ultimo inferne ad apicem duobus pilis fulvis spinulas breves simulantibus.

Alæ (fig. 6, *c*) latæ, apice prabolice rotundatæ; reticulatione fulva; stigmate insensibili; cellula discali saltem triplo longiore suo pedunculo;

furcis apicalibus 1, 2, 3, 5 sessilibus, 1 in cellulam discalem usque ad sextum apicale penetrante; radio et sectore usque ad apicem discretis.

Ala anterior membrana minutissime granulosa, fulvo tincta, pubescentia plerumque fusca; obscuriore et longiore ad subcostæ basim, ad cubitos (cubitum et postcubitum) et venas axillares, item ad apicem areæ intermediæ seu interne ad basim cellulæ apicalis IV in modum arcus semicircularis, convexitate externa, maculas parvas fulvas liberante, præsertim in tertio externo; macula thyridiali albida parum definita et striola brevi alba ad arculum; furcis apicalibus 1, 2, 3, 4, 5.

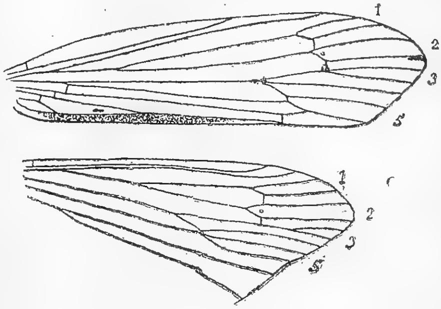


Fig. 7.ª

Nostrafilla Luzi ♀ Nav. Ala anterior y parte de la posterior. (Mus. de La Plata.)

Ala posterior lata, hyalina, iridea; membrana levissime fulvo tincta; pubescentia tota fulva; furcis apicalibus 1, 2, 3, 5.

Long. corp. ♂ .... 11,7 mm.
— al. ant. .... 20 —
— — post .... 18,4 —

Patria. República Argentina: Valle Túnel (Santa Cruz), Dr. Lutz Witte leg. (Mus. de La Plata).

13. **Nostrafilla,** gen. nov.

Affinis *Leptophylaci* Banks.

Pedes calcaribus 1, 3, 4; tarsis articulo primo longiore secundo, ultimo spinulis infernis nigris destituto.

Alæ cellula discali clausa, longa; furca apicali 1 sessili.

Ala anterior angusta, margine externo obliquo, recto, haud convexo nave concavo, vel ad ramorum apicem levissime concavo.

Ala posterior lata, margine externo manifeste concavo; radio a ramo primo apicali sejuncto; furca apicali 3 pedunculata.

Difiere del género *Leptophylax* Banks en la estructura de las alas, pues en ambas la horquilla 5 apical está sentada.

El tipo es la siguiente especie:

14. **Nostrafilla Lutzi,** sp. nov. (fig. 7).

Caput fulvum, fulvo pilosum; superne linea media longitudinali fusca usque ad metanotum continuata; oculis ocellisque nigris; palpis fulvis; antennis fortibus, longis, ala anteriore paulo longioribus.

Thorax fuscus. Mesonotum ad scapulas et stria laterali juxta lineam mediam fulvis.

Abdomen fusco-ferrugineum, margine postico segmentorum pallidiore.

Pedes fulvi, fulvo pilosi; femoribus inermibus; tibiis calcaribus 1, 3, 4 et spinulis aliis fulvis; tarsis nigro spinulosis, ultimo articulo inermi; tarsorum articulis fere longitudine decrescentibus; unguibus testaceis, arcuatis.

Alæ (fig. 7) reticulatione fulva; cellula discali multo longiore suo pedunculo; furca apicali 1 longa, sessili; stigmate haud sensibili.

Ala anterior apice parabolico, subacuto, pubescentia fulva, apicem versus fuscescente, fimbriis marginis externi fusco-fulvis; striola fusca ad apicem quarti rami apicalis, striola transversa nigra ad venulam intermediam seu ad basim cellulæ apicalis IV; puncto bino nigro citra et ultra thyridium; striola nigra longitudinali in cellula basilari anteriore; area posteriore subtota fuscata; furcis apicalibus 1, 3 et 5 longis, sessilibus, 2 latiore; cellula discali triplo longiore suo pedunculo.

Ala posterior lata, immaculata, hyalina, iridea; fimbriis fulvis; furca apicali 1 longa, sessili, 3 breviore prima, paulo longiore suo pedunculo; cellula discali duplo longiore suo pedunculo.

Long. corp. ♀	....	11,5	mm.
— al. ant	....	14	—
— — post	....	12,2	—

Patria. República Argentina: Valle Túnel (Santa Cruz), Dr. Lutz Witte leg. (Mus. de la Plata).

14. **Nostrafilla stigmata,** sp. nov.

Caput ferrugineum; vertice parum convexo, fusco-cinereo; pilis fulvis; oculis ocellisque nigris; verrucis occipitalibus grandibus, ellipticis, oblique positis, testaceo-fuscis, apice articulorum pallidiore; primo articulo in ♂ fusco, capite breviore, apice leviter dilatato.

Thorax ferrugineus, stria media longitudinali ad mesonotum fusca; pilis anterioribus fuscis, ceteris fulvis.

Abdomen testaceo-fuscum, in ♂ obscurius, apice segmentorum pallidiore; dentibus ultimi tergiti tenuibus, cylindricis, apice incrassatis, fulvis, decussatis, fulvo pilosis, longius apice, cercis superioribus brevibus, ovalibus, testaceis; cercis inferioribus gracilibus, laminaribus, adscendentibus, margine inferiore toto regulariter convexo, posteriore concavo, superiore recto, brevi, externe convexis, interne concavis, testaceis, fulvo pilosis; valvis copulatoris angustis, longis, apice leviter dilatatis et deflexis, testaceo-ferrugineis, nitidis; in ♀ valvis superioribus subrectangularibus, longis, fulvis.

Pedes testacei, fulvo pilosi; coxis fuscis, serie externa pilorum aureorum; ♂ in femoribus 2 et 3 subtotis fuscis; calcaribus 1, 3, 4; tibiis aliquot spinulis nigris; tarsorum articulis longitudine decrescentibus, tribus primis spinulis infernis nigris dotatis, ultimo inermi; unguibus testaceis, arcuatis.

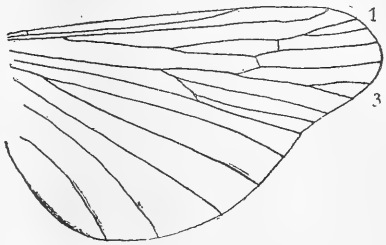


Fig. 8.ª

Nostrafilla bruchina ♂. Nav. Ala posterior. (Mus. de La Plata).

Alæ stigmate sensibili, in ala anteriore macula fusca elongata distincto, in posteriore parum sensibili, nebula fusca diluta.

Ala anterior membrana flavido tincta, tota fusco maculata, exceptis areis costali et subcostali, puncta sive maculas subrotundas aureas plerumque confluentes liberante, seu fusca et maculis flavis irrorata; cellula discali angusta, longa, plus triplo longiore suo pedunculo; furca apicali 1 longa, sessili, 3 paulo breviore, sessili vel breviter pedunculata; area axillari subhyalina, reticulatione concolore.

Ala posterior hyalina, iridea; membrana in tertio apicali levissime fulvo tincta; reticulatione fulva; fimbriis pallidioribus; cellula discali subduplo longiore suo pedunculo; furca apicali 1 longa, 3 breviore, duplo longiore suo pedunculo.

		♂	♀
Long.	corp......	7,5 mm.	8,5 mm.
—	al. ant.....	12,5 —	12 —
—	— post....	11 —	10,5 —

Patria. República Argentina: Valle Túnel (Santa Cruz), Dr. Lutz Witte (Mus. de La Plata y col. m.)

15. **Nostrafilla bruchina,** sp. nov. (fig. 8).

Caput fuscum, fulvo pilosum, oculis fusco-aureis; verrucis occipitalibus fusco-testaceis, ovali-ellipticis, oblique positis; palpis fulvis; antennis testaceo-fuscis, ad apicem articulorum pallidioribus; articulo primo fusco, fulvo piloso, capite breviore.

Thorax fuscus, pilis fulvis, aliquot anterioribus fuscis. Pectus medio fulvum.

Abdomen fuscum, linea laterali et appendicibus fulvis; dentibus decimi tergiti ♂ spinæformibus, longis, deorsum arcuatis, testaceis; cercis superioribus brevibus, ovalibus, inferioribus triangularibus, grandibus, adscendentibus.

Pedes fulvi, fulvo breviter pilosi, tibiis tarsisque nigro spinulosis, ulimo articulo tarsorum subtus inermi; calcaribus 1, 3, 4 fulvis, mediocribus.

Ala anterior angusta, apice elliptice rotundata; reticulatione fuscescene; pubescentia fusca, atomis guttisve fuscis tota respersa; disco fulvopallido visibile ad nygma, seu ad ortum 2 furcæ apicalis; striola pallida transversa ad thyridium et ad arculum; cellula discali angusta, sesquilongiore suo pedunculo; furca apicali 1 longa, sessili, 2 longiore, ad axillam seu ad nygma leviter dilatata, 3 pedunculata, sesquilongiore suo pedunculo.

Ala posterior hyalina, iridea; reticulatione fulva; membrana vix sensibiliter tincta; in tertio apicali pubescentia fulva obscuriore; fimbriis fulvis, pallidis; cellula discali angusta, vix longiore suo pedunculo; furcis apicalibus 1 et 3 pedunculatis (fig. 8), duplo longioribus suo pedunculo, 1 longiore secunda.

Long.	corp. ♂..............	6	mm.
—	al. ant..............	8,5	—
—	— post..............	7	—

Patria. República Argentina: Provincia de Buenos Aires, C. Bruch (Mus. de La Plata).

FAMILIA HIDROPSÍQUIDOS

18. **Rhyacophylax mesembrinus,** sp. nov. (fig. 9).

De μεσημβριός, meridional.

Caput fulvo-cereum, fulvo-albido pilosum; oculis nigris; palpis fulvis, pallidis; antennis fulvis, pallidis, apice articulorum anguste fulvo annulatis, inferne ad medium leviter convexis crenatisque.

Thorax fulvus, albido pilosus.

Abdomen fulvum, margine postico segmentorum pallidiore; filamento laterali quarti segmenti ♂ longo, apicem sexti segmenti subattingente, fulvo, arcuato, ad medium subgeniculato, medio apicali tenuiore; cercis inferioribus longis, subhorizontalibus, primo segmento elongato, ad apicem parum dilatato, secundo tenui.

Pedes fulvi, pallido pilosi, pilis in tibia posteriore longis; calcaribus 1, 4, 2 longis.

Ala anterior (fig. 9) reticulatione fulva; pubescentia fulva, pilis fuscis, per plagas sparsis, quasi fascias binas breves transversas ad tertium apicale formantibus; item puncto fusco ad utrumque nygma externum et internum et ad basim areæ costalis.

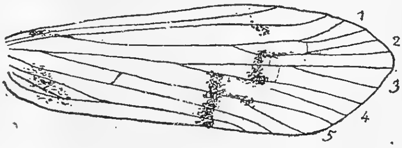


Fig. 9.ª
Rhyacophylax mesembrinus ♂ Nav. Ala anterior (Mus. de La Plata).

Ala posterior paulo latior, hyalina; reticulatione pallida; membrana immaculata; furcis apicalibus 2, 3, 5 longitudine subæqualibus, 5 duplo latiore.

Long. corp. ♂ .... 4,2 mm.
— al. ant. .... 6,5 —
— — post. .... 4,9 —

Patria. República Argentina: Provincia de Buenos Aires, 9 de enero de 1907. C. Bruch (Mus. de La Plata).

El género es nuevo para la América meridional.

19. **Blepharophus diaphanus** Kol., var. **reltculata** Ulm.

Misiones. Varios ejemplares. Nuevo para la República Argentina.

FAMILIA FILOPOTÁMIDOS

20. **Chlmarrha canosa,** sp. nov. (fig. 10).

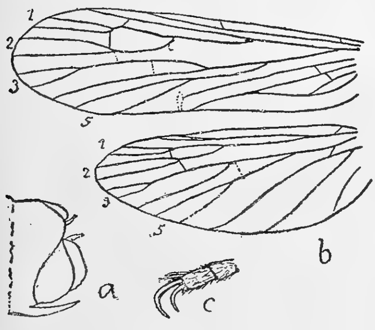


Fig. 10.
Chimarrha canosa ♂ Nav. *a*. Extremo del abdomen.—*b*. Alas.—*c*. Extremo de la pata anterior (Mus. de La Plata).

Atra.

Caput vertice ad latera et facie antice pilis densis longisque albis hirsutum; oculis fuscis; ocellis pallidis; palpis maxillaribus fortibus, pubescentia grisea vestitis, articulo primo fasciculo pilorum apicali griseo, pilis divergentibus; articulo tertio paulo longiore secundo, quinto paulo longiore quarto; palpis labialibus multo brevioribus, pubescentia fusco-grisea;

antennis fortibus, insertione distantibus, atris, ala anteriore paulo longioribus.

Thorax pilis anterioribus ad scapulas albidis, dorsalibus atris, longis.

Abdomen sternito pænultimo ♂ in aculeum longum testaceum producto (fig. 10, *a*); tergito ultimo medio emarginato; cercis superioribus (?) dentiformibus, inferioribus brevibus.

Pedes atri, pubescentia grisea vestiti; calcaribus 1, 4, 4, tibiæ, anterioris brevi, ceteris longis; unguibus (fig. 10, *c*) longis, arcuatis, apice testaceis, externo multo longiore.

Alæ (fig. 10, *b*) angustæ, apice elliptice rotundatæ; reticulatione fusco-nigra, pubescentia fusco-nigra; membrana fusco-cinerea; furca apicali 1 angusta, 3 longiter pedunculata.

Ala anterior cellula discali lata, margine superiore initio levissime concavo, inferiore initio fortiter conveso; striolis albidis pone cellulam discalem, ad basim, ad venulas posteriores anastomoseos, alia longiore et distinctiore ad arculum.

Ala posterior venulis parum distinctis, vix pallidioribus; furca apicali 3 parum longiore suo pedunculo.

Long. corp. ♂	4,5	mm.
— al. ant.	6,4	—
— — post	5	—

Patria. República Argentina: Mendoza. C. S. Reed (Mus. de La Plata).

El género es nuevo para la Argentina: de la América meridional se conocían algunas especies propias del Brasil.

Zaragoza, 12 de mayo de 1918.

Los caballos del cuaternario superior según el arte paleolítico

por

Eduardo Hernández-Pacheco

La caverna de la Peña de Candamo y sus obras de arte.—Una de las cavernas más interesantes, por las figuras de animales grabados o pintados en sus paredes por los hombres de los tiempos paleolíticos, es la que existe junto a San Román de Candamo, en el valle del Nalón (Asturias), y cerca de lo alto de un abrupto cerro de caliza devónica, que se eleva junto a la citada aldea asturiana; cerro llamado La Peña.

En las obras de arte que guarda la caverna domina la representación del caballo, pues hasta diez figuras de este animal existen: unas mediante dibujo de línea en rojo, siena o negro; otras grabadas con diversidad de técnica y estilo, y alguna pintada en negro por el procedimiento de manchas difuminadas y modeladas.

Corresponden estas diversas pinturas y grabados del arte troglodita a diversas épocas del paleolítico superior; las rojas, probablemente, al *auriñaciense,* y las restantes a diversas fases del *magdaleniense*. Todas las figuras están representadas en las paredes del gran salón o rotonda central de la caverna, espléndida y vistosa por su ornamentación profusa de estalactitas, colgantes y relieves de blancas concreciones.

Varios son los sitios del salón donde la figura del caballo se reproduce, que no detallo, pues el presente trabajo no es sino avance de otro en que, minuciosamente, describiré la caverna y las obras de arte que encierra, inmediata a otra con restos de la primitiva industria humana y paleontológicos de la fauna de mamíferos pleitócenos.

En la nota de ahora me ocuparé tan sólo de los caballos representados en la cueva, describiéndolos, y, al establecer comparaciones con las figuras semejantes de otras cavernas españolas y francesas, trataré de obtener deducciones de carácter general respecto a las subespecies, o, por lo menos, tipos de caballos que existirían en España y Francia durante las épocas remotas a que hay que referir las figuras de animales del arte troglodita.

Me lleva a tales consideraciones la observación de una de las más hermosas obras que existen del arte fósil, que es la que representa la lámina 1.ª, reproducción fotográfica del original de la caverna de la Peña de Candamo; conjunto pictórico donde están representados juntos dos tipos bien distintos de caballo.

Descripción de las figuras de caballo de la caverna de la Peña de Candamo.—En el gran lienzo de pared que existe en el fondo del gran salón de la caverna, hay diversas figuras pintadas en rojo y en negro, y encima profusión de figuras grabadas, formando una maraña de líneas entrecruzadas en todas direcciones y con numerosas superposiciones; grabados que, sólo después de una pacienzuda y difícil labor, pueden aislarse en los calcos.

Las figuras inferiores del conjunto son las de color rojo, y entre ellas destaca una cabeza de caballo, que describiré la primera.

Fig. 1.ª Cabeza de caballo en rojo del gran lienzo de la caverna de la Peña de Candamo, referible probablemente a la época auriñaciense.

I. *Cabeza de caballo en rojo.*—Se trata de una figura trazada mediante una sencilla línea de contorno, sin detalles interiores a éste. Está representado el animal de perfil: el ojo se señala por una pequeña pincelada, y las orejas por dos trazos dirigidos hacia delante, en la actitud de recelo, tan característica en los équidos, detalle de acuerdo con la posición levantada de la cabeza. De la figura da idea el grabado número 1.

II. *Cabeza pequeña de caballo grabada.*—En el gran lienzo de pared mencionado existe un pequeño grabado, claro y limpio, que representa una cabeza de caballo incompleta, pues le falta la parte superior, desaparecida por el conjunto de líneas trazadas posteriormente.

Tiene la figura una longitud de tan sólo unos 10 centímetros, y está grabada con seguridad y corrección, mediante líneas sencillas y cortos trazos discretamente hechos, que señalan el ojo, la nariz y los pelos de la quijada.

Varias líneas extrañas a la figura la cruzan, apreciándose en el original que ha sido trazada la cabeza de caballo con anterioridad a otras figuras también grabadas, tales como las que representan toros, efectuadas por el procedimiento de líneas de contorno en haz, que son las que han borrado la parte superior de la cabeza de caballo, que reproduce el número 2 de las ilustraciones de este trabajo.

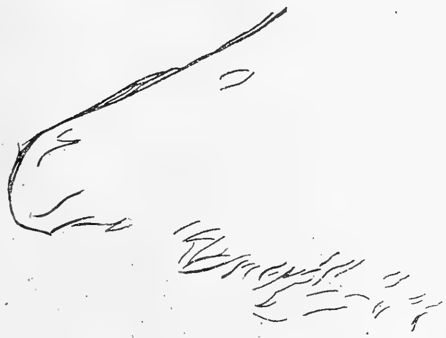


Fig. 2.ª Cabeza de caballo grabado en el gran lienzo de la caverna de la Peña de Candamo, referible a la época magdaleniense.

III. *Caballo grabado.*—En el mismo lienzo de pared, algo más abajo de la anterior figura, existe otra, también grabada, y en extremo interesante.

Tiene una longitud de unos 60 centímetros; está representado el caballo de perfil y detallado, salvo las partes inferiores de las patas, que están tan sólo iniciadas (fig. 3.ª).

Por las proporciones entre sus diversas partes, por lo corto y rechoncho del tronco y por la cabeza grande, tiene todo el aspecto de un caballo de poca alzada.

Esta figura es una de las de mayor modelado, mediante el procedimiento de hacer resaltar ciertas partes con zonas anchas de numerosas líneas paralelas grabadas. El contorno es un haz de líneas que se ensancha en ciertos sitios, como en el cuello; la zona de las crines se señala limitándola fuertemente en su contorno, como se observa ya en los más antiguos dibujos y grabados de los tiempos paleolíticos. Las crines, la zona

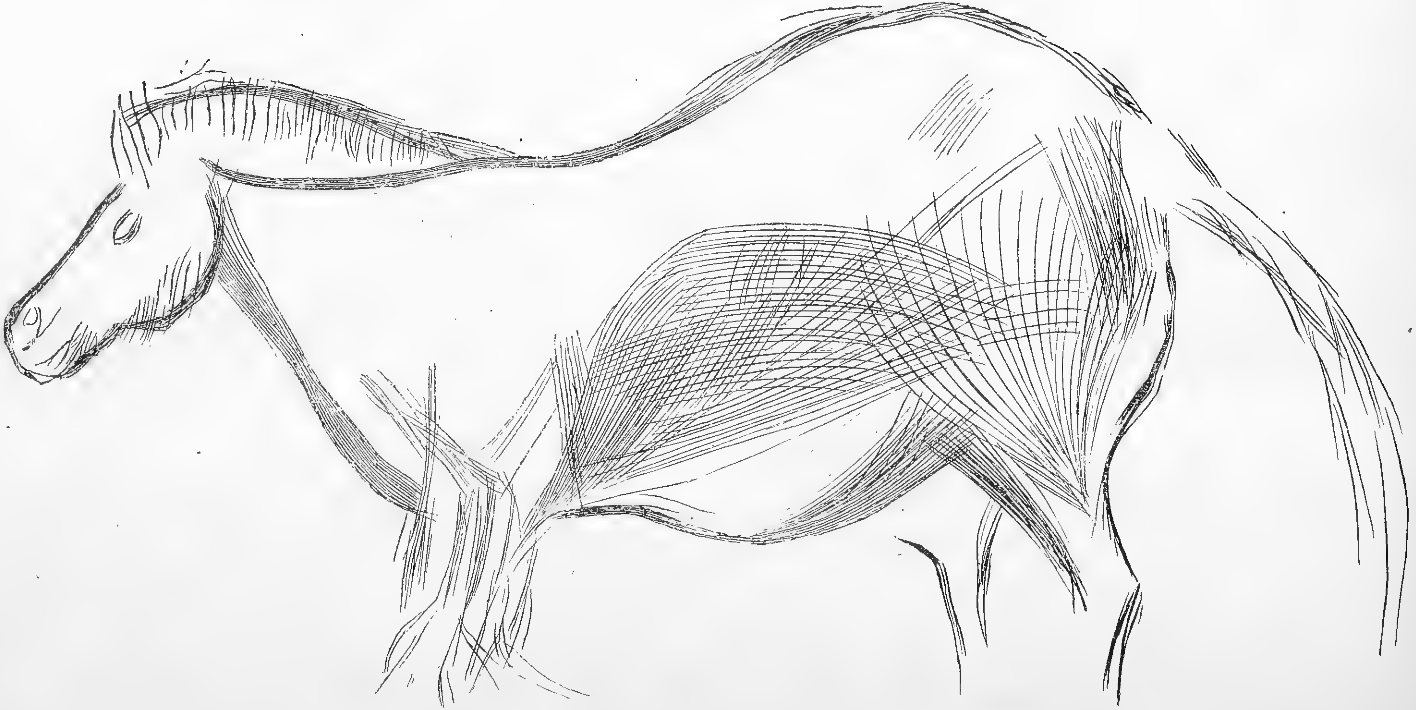


Fig. 3.ª Caballo grabado en el gran lienzo de pared de la caverna de la Peña de Candamo, referible a la época magdaleniense.

pelosa de la quijada y la cola están formadas por líneas fuertes. Las patas están muy desdibujadas, señalándose bien tan sólo la parte superior de las posteriores; las anteriores apenas se señalan.

La figura está aislada y superpuesta a una ancha zona raspada, situada en la parte correspondiente al cuello.

IV. *Cabeza de caballo grabada.*—En el extremo izquierdo del gran lienzo de pared, en una mancha roja del muro, se aprecia, limitando la mancha, una cabeza de caballo, formada por un ancho haz de líneas, con el ojo muy señalado, grande y ovalado, y las orejas formadas mediante líneas sencillas de contorno.

Esta figura aparece en parte confundida con otra, que representa una cabeza de cabra; de ella da idea la figura 4.ª.

Fig. 4.ª Cabeza de caballo grabada en el gran lienzo de pared de la caverna de la Peña de Candamo, referible a la época magdaleniense.

V. *Cabezas de caballo grabadas en una estalagmita.* — En un gran mogote estalagmítico, que existe en el salón de la caverna de la Peña de Candamo, junto al gran lienzo de pared que contiene tantas figuras, existe un complicado conjunto de grabados, fuertemente incisos, entre el que destaca dos cabezas de caballo.

Están situadas en el extremo de la izquierda; dibujadas con trazo seguro (fig. 5.ª), señalados los detalles más importantes del hocico y los pelos de la quijada; el ojo, en la mayor, es en forma de almendra, y las orejas constituídas por dos trazos cortos.

VI. *Caballo pintado con color siena y grabado.*—En la parte alta de un empinado talud estalagmítico, que hace esquina con el gran muro de los grabados descritos, existe una figura de caballo grabada y complementada con pintura de color siena. Una tenue capa de concreción translúcida cubre a la figura, debilitando la intensidad del color.

Comprende tan sólo la cabeza, cuello y parte del tronco, faltando las patas y la cola; su longitud es de 66 centímetros.

La técnica es diferente de la empleada en los demás grabados de la caverna, pues nada hay semejante a las líneas de contorno en haz ni a los

Fig. 5.ª Conjunto de grabados en una estalagmita de la caverna de la Peña de Candamo en el que destacan en la izquierda dos cabezas de caballo, referibles a la época magdaleniense.

Fig. 6.ª Caballo grabado y pintado en la caverna de la Peña de Candamo, de edad magdaleniense.

raspados, que en esta parte de la cueva no tendrían objeto, pues el muro es de color blanquecino, y no superficialmente rojizo, como el gran lienzo de los grabados.

Rayas finas continuas señalan el contorno del lomo y de la grupa, mientras que las crines del cuello están señaladas por una serie de grupos de pequeños trazos curvos, que se cruzan dos a dos en ángulo hacia arriba. Trazos interrumpidos de pintura, que parecen hechos con el dedo, señalan el contorno de la cabeza y del cuello; pequeños toques corresponden a las orejas, y la zona de las crines se ha señalado encima de los grupos de trazos angulares, grabados por una sucesión de pequeñas manchas.

VII. *Cabeza de caballo en color rojizo de trazo ancho.*—Las figuras que falta describir de la caverna de la Peña de Candamo están todas pintadas en el muro de un pequeño recinto que existe en el salón grande de la cueva, cerca del techo, en lo alto de una cascada estalagmítica, por donde se asciende difícilmente a la entrada del recinto en cuestión, medio oculta por las estalactitas.

Destaca en el centro del conjunto de figuras allí pintadas (lámina I) una cabeza de caballo, señalando el perfil un trazo ancho y difuso de almagre, que en ciertas partes se ensancha, mientras en otras se interrumpe; una oreja está formada por un trazo rectilíneo, y el ojo por una mancha redondeada. La longitud de la cabeza es de unos 18 centímetros.

La figura 7.ª da idea de esta pintura.

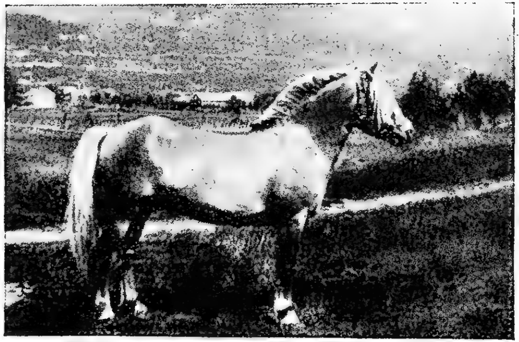
VIII. *Yegua dibujada en negro.*—En el mismo recinto aparece trazado, con soltura, el contorno de una yegua preñada.

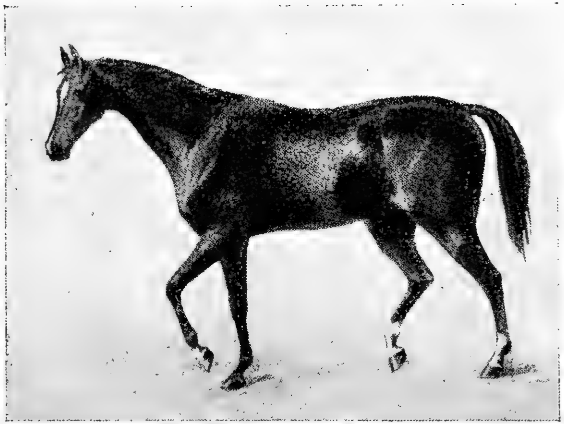
La figura es muy completa, midiendo una longitud de 1,15 centímetros, desde el hocico a la cola. Está bien detallada, señalándose en las patas, especialmente en las delanteras, los corvejones, menudillos, cuartillas con sus largos pelos, y los cascos; en la cabeza se señala bien el ojo y la nariz y los pelos de la quijada; las crines del cuello se indican por el doble contorno de la línea superior del cuello y la que limita la zona de las crines, procedimiento que ya se observa en las antiguas figuras de la época auriñaciense.

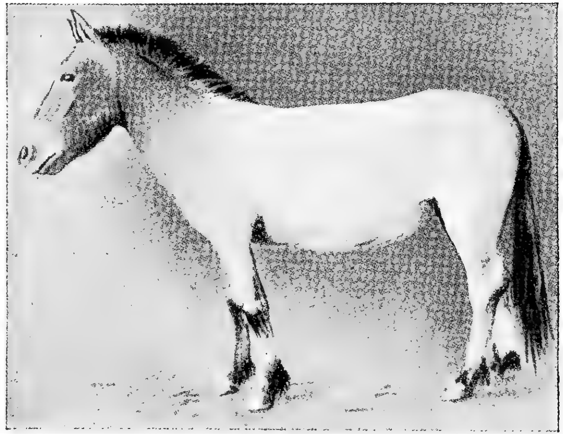
Muy pocas líneas interiores tiene esta figura, pues están reducidas a la que señala la paletilla en las patas delanteras y la del muslo en la trasera.

El animal está representado de perfil, parado, con las manos casi juntas, y la pata derecha avanzada sobre la izquierda. No puede dudarse que se trata de yegua, pues lo abultado del vientre y la forma de éste lo delata; el artista aprovechó, para dar idea del relieve de la barriga, un abultamiento del muro, lo cual hace que el dibujo resultante de los calcos apa-

Lám. I. **Reproducción fotográfica de las pinturas del recinto llamado El Camarín, en la caverna de la Peña de Candamo.**







Lám. II. Los tipos de caballos actuales, según grabados escogidos de la obra de Lydekker «The horse and its relatives»: 1. Caballo padre noruego referible al *Equus caballus typus;* 2. Poneis de las islas Shetland, referibles al *Equus caballus celticus;* 3. Caballo árabe, referible al *Equus caballus libycus;* 4. Yegua tarpan. *Equus Przewalski.*

Fig. 7.ª Cabeza de caballo, en color rojizo, de la caverna de la Peña de Candamo. Época magdaleniense.

rezca más desproporcionado que los dibujos hechos a mano alzada o mediante la fotografía (fig. 8).

La esbeltez del animal, lo largo del tronco, la finura de las patas y del cuello y la forma de la cabeza, con otros caracteres reseñados, son bien distintos de los que se aprecian en otras figuras de caballos de las cavernas paleolíticas, indicando un tipo morfológico de caballo diferente de otros reseñados en este trabajo, especialmente del grabado en el gran lienzo de pared, y que, en la descripción que hago, lleva el número IX; parece corresponder a una sub-especie distinta.

IX. *Caballo de color siena.*—Esta figura, de unos setenta centímetros de longitud, es la mejor trazada, más movida, vistosa y elegante de la caverna.

Iluminando el recinto donde está pintada, colocando la lámpara detrás de una estalactita de la entrada, y quedando el observador abajo en el salón, sumido en la oscuridad, se ve al caballejo (por un efecto escénico que producen las tintas y relieves del muro y las concreciones calcáreas), como en el centro de un paisaje, pareciendo que atraviesa entre las espumas de un arroyo torrencial, produciendo la pintura y el camarín donde está, así iluminado, efecto maravilloso.

El caballo está pintado mediante líneas anchas de contorno, de color siena, trazadas con soltura y precisión en elegantes curvas: la cabeza es irreprochable en su sencillez; las crines se señalan mediante trazos cortos difuminados en los bordes; la cola está formada de dos trazos que no se unen y las patas, aunque incompletas en sus detalles, tienen en el conjunto un movimiento realmente sugestivo. Toda la figura revela vida y movimiento, que acentúa la sencillez con que está trazada. (Fig. 9.ª)

Claramente se ve que es un caballo de poca alzada, vivo y ágil, y diferente por completo, en sus caracteres morfológicos, de la yegua cuyas líneas cruza.

Está pintado posteriormente a la yegua negra; pues, al trazar la cabeza, se han borrado algunas líneas de la pata de ésta.

X. *Cabeza de caballo pintada con negro difuminado.*—A la izquierda de los caballos de los números VIII y IX existe una mancha negra, de unos cuarenta y cinco centímetros de larga por quince de ancha; que, examinada con alguna atención, se resuelve en una figura de cabeza y cuello de caballo con las crines colgando hacia la cabeza. (Fig. 10.)

Esta figura se aparta de todas las restantes de la caverna por el procedimiento empleado en su ejecución, pues se ha trazado el contorno y rellenado el interior con pintura negra de carbón, modelando, mediante

Fig. 8.ª Yegua dibujada en negro de la caverna de la Peña de Candamo; época magdaleniense.

Fig. 9.ª Caballo pintado en color siena en la caverna de la Peña de Candamo. Época magdaleniense.

hábiles sombreados y difuminados, las diversas partes, señalándose, con rasgos y toques vigorosos, ciertas partes como el ojo, la nariz, el hocico, las crines colgantes, los pelos de la quijada, etc.

Análogas a esta figura, por el procedimiento y técnica, son las de bisonte en negro, modelado y difuminado, de la caverna de Altamira, cerca de Santillana del Mar (Santander), y las de bisonte, caballo y reno de la caverna de Font de Gaume, en Francia, correspondientes todas al magdaleniense superior, si bien algo más antiguas que los policromados de las cavernas mencionadas y de otras españolas, que señalan la culminación del arte fósil.

Ancestrales del caballo actual.—Los restos de caballos son, después de los de ciervo, los más abundantes en los depósitos osíferos de las cavernas españolas correspondientes al paleolítico, abundancia indicadora de que las manadas de caballos salvajes en la Península serían numerosas, y su caza intensa por los hombres del cuaternario superior.

La genealogía del caballo, en sus líneas generales, se ha establecido más claramente que la de otros mamíferos, debido a los numerosos restos fósiles del gran número de especies de Equidos conocidas, de los diversos pisos del Mioceno, Plioceno y Pleistoceno, tanto del antiguo como del nuevo mundo.

Durante el Mioceno medio, el *Anchitherium* era muy abundante en toda la Península; en el Mioceno superior, el *Hipparion* era el cuadrúpedo de gran talla más numeroso en España. En el Plioceno, invade la Europa un verdadero caballo, el *Equus stenonis*, mientras que en Asia es su equivalente el *Equus sivalensis*.

La generalidad de los paleontólogos tienden, modernamente, a suponer que los caballos europeos no derivan del *Hipparion*, sino de formas americanas que emigraron del viejo mundo durante el Plioceno inferior, y dieron origen a las especies de *Equus* mencionadas.

El *Equus stenonis* presentaba ya, juzgando por los restos fósiles, diversificaciones o subespecies, que son dos fundamentales: una, de pequeña talla, con el esmalte de los molares poco plegados y los lóbulos externos en media luna abierta; otra, de gran talla, con molares de esmalte muy plegados y lóbulos externos en media luna cerrada. De estas mutaciones se ha supuesto que derivan probablemente: de la primera, los equidos de tipo zebroide, y de la segunda, en el cuaternario, el caballo actual *Equus caballus*, Lin.

Los estudios relativos a los caballos fósiles del cuaternario, y en especial de la época paleolítica, son numerosos, y la especie *Equus caballus*, de Linneo, ha sido subdividida en numerosas especies, que, en opinión de

Fig. 10. Cabeza de caballo pintada en negro difuminado de la caverna de la Peña de Candamo; época magdaleniense superior.

Boule (1), no corresponden, en la mayor parte de los casos, a verdaderas especies, sino unas veces a simples variaciones individuales y otras a subespecies o formas geográficas. Procede esto, en gran parte, dice, de que los restos sobre los que se ha trabajado son muy incompletos, generalmente molares aislados o fragmentos de mandíbulas, pues los cráneos completos de caballos fósiles cuaternarios son en extremo escasos, y también las piezas esqueléticas completas; por otra parte, las variaciones individuales, en los detalles de los molares, son numerosas y aparecen los caracteres enmascarados por la edad. Sólo con numerosas series de restos fósiles podrán establecerse las variaciones específicas, que de otro modo resultan dudosas.

De todos modos, las variaciones observadas demuestran que el caballo, durante los tiempos paleolíticos, presentaba variaciones morfológicas correspondientes a diversidad de formas locales o geográficas, a verdaderas subespecies.

Lydekker (2), por una parte, y Cossar Ewart (3), por otra, que han estudiado detenidamente la cuestión del origen de los caballos actuales, suponen que de las diversas formas del paleolítico han derivado las razas actuales.

Tipos de caballos actuales.—Teniendo en cuenta las opiniones y datos aportados por los autores citados y por algún otro, tal como Ridgeway, pueden agruparse las actuales razas de caballos en los siguientes tipos (Lam. II.):

1.° *Equus caballus typus* (Caballo de bosque).—De cara ancha, corta y cóncava, con la misma dirección que el cráneo cerebral; con seis vértebras lumbares; patas cortas y robustas, cascos anchos; tamaño grande y porte pesado. Representantes actuales de este tipo son la mayor parte de las razas pesadas y robustas de Europa occidental.

2.° *Equus caballus celticus* (Caballo de praderas).—De cara estrecha, cóncava y larga, e inclinada con relación al eje del cráneo cerebral; con cinco vértebras lumbares; de patas delgadas; tamaño, a veces, pequeño. Los representantes más genuinos de este tipo son los poneis, de Islandia y de las islas Shetland y Hébridas, si bien la mayor parte de las razas actuales españolas encajan en este tipo mejor que en los otros.

(1) M. Boule.—*Les grottes de Grimaldi*, tom. I, fasc. III. «Géologie et Paleontologie». Monaco, 1910.
(2) Lydekker.—*The Horse and its relatives*. London, 1912.
(3) Cossar Ewart.—*The multiple origin of Horse and Poneis* (Reproducción en el «Annual report of the Smithsonian institution», págs. 437-455. Washington, 1905.)

3.ª *Equus caballus libycus,* cuyo prototipo actual es el caballo árabe, y, en general, los caballos corredores.

4.º *Equus Przewalski.*—De cara muy larga, inclinada hacia abajo, en relación con el eje del cráneo cerebral; con cinco vértebras lumbares; patas largas y cascos altos y estrechos. Es el caballo salvaje del desierto de Gobi, el *tarpan*, con caracteres marcadamente asnales, y que para algunos autores es un cimarrón, al modo de los caballos de las pampas argentinas; si bien otros zoólogos consideran resuelta la cuestión de ser un caballo aún en estado salvaje.

La cuestión estriba en saber si estos tipos existían ya durante el cuartenario, o, por lo menos, en los tiempos del paleolítico superior. Los paleontólogos han creído reconocer tal o cual tipo en diversos yacimientos, si bien los datos son incompletos e inconexos; un estudio paleontológico de conjunto, con abundancia de materiales de diversas procedencias, está aún por hacer.

Tipos morfológicos de los caballos del pleistoceno superior, según el arte paleolítico.—Pero si un estudio paleontológico, fundamentado en abundantes series de fósiles ofrece la gran dificultad de reunir estos materiales, en cambio puede intentarse algún avance respecto a los grupos o tipos morfológicos de caballos que existiesen durante el pleistoceno superior examinando y comparando entre sí los documentos que del arte de los tiempos paleolíticos tenemos relativos al caballo, documentos procedentes casi en su totalidad de la mitad meridional de Francia y de la Península ibérica.

Algo de esto se ha intentado ya; así, Piette creyó reconocer diversos tipos de caballos en las esculturas y grabados del arte moviliar de la edad del reno, tales como uno de cuerpo rechoncho y cabeza muy grande, además de otros equidos, tales como el onagro, la cebra, etc.

Al relatar Capitan y Breuil (1) el descubrimiento de los grabados de la caverna de Combarelles, exponen claramente su opinión que en el numeroso conjunto de figuras representando al caballo, se distinguen dos especies muy diferentes, una de las cuales correspondiente a un tipo de «caballos gruesos, de crin recta, cola abundantemente guarnecida, cabeza grande y hocico romo, con labios muy gruesos.»

«Otros caballos, dicen, son más esbeltos, más finos; la cabeza pequeña, la crin igualmente recta y corta, llegando hasta encima de la cabeza, que es notablemente más pequeña; la nariz parece mucho más recta que

(1) Capitán et Breuil.—«*La grotte de Combarelles.*» Revue de l'Ecole de Anthropologie. Tomo XII, págs. 33-46. París, 1902.

en los procedentes, y, en fin, la cola está implantada unas veces más bajo, y otras, por el contrario, más alto, como en los bóvidos, cola que es rala y comúnmente terminada por un mechón de pelos.»

Aunque no son los tipos diferenciados por los autores mencionados, los mismos exactamente que los que resultan del presente trabajo, juzgando por el conjunto de las ya muy numerosas figuras de caballos del arte rupestre y moviliar de las épocas auriñaciense y magdalaniense, es ndudable que el primero que Capitán y Breuil llaman de formas pesa-

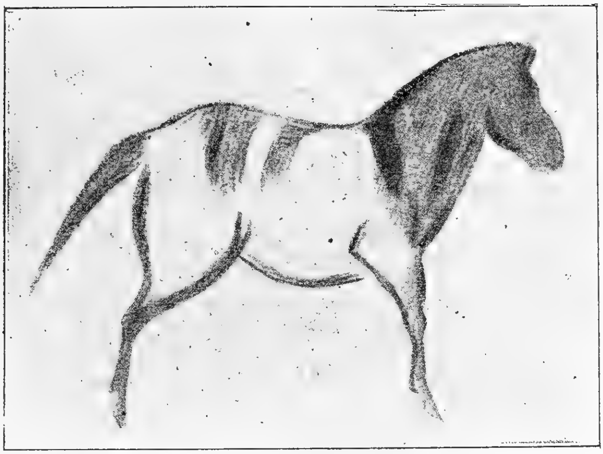


Fig. 11 Caballito pintado en la caverna del Castillo (Santander), según Breuil.

das, encaja en el *tipo primero* aquí admitido: el segundo, de cabeza muy semejante a la de los actuales caballos de raza árabe, encaja perfectamente en el *tipo segundo* de esta nota.

Munro (1) reconoce los dos tipos de caballos descritos por Capitán y Breuil en la caverna de Combarelles, sobre todo en lo que respecta al tipo semejante al árabe.

En cuanto a la significación de los caballos manchados, o sea píos, y a los listados al modo de las cebras, parece resuelto que tales caracteres no tienen la significación específica que se supuso, y que estos caracteres de las figuras del arte paleolítico sean debidos a la técnica empleada por el artista para representar las zonas pelosas y el modelado de las diversas partes, y no a coloraciones que ofreciese la piel del animal representado.

(1) Robert Munro.—«*On the prehistoric horses of Europe and their supposed domestication in palaeolithic times*». The Archœological Journal. Vol. LIX, 1902.

Actualmente los documentos relativos a figuras de caballos en el arte fósil, son mucho más numerosos que hace unos años, cuando se intentaron las determinaciones reseñadas; y de su estudio comparativo he creído poder deducir la consecuencia que en las obras de arte, tanto moviliar como parietal del paleolítico superior se han representado dos tipos morfológi-

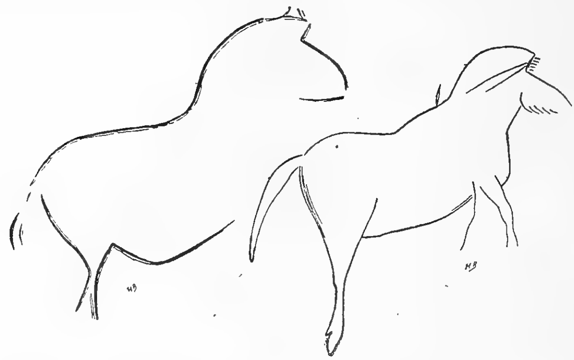


Fig. 12. Caballos grabados esquemáticamente en la caverna de Hornos de la Peña (Santander), referibles a la época auriñaciense, según Breuil.

cos de caballos, que, por no prejuzgar la cuestión, y en espera de estudios paleontológicos deducidos de los restos óseos, no designo con denominaciones especiales.

Debe advertirse que, para establecer esta deducción, me he fijado, especialmente, en los grabados, pinturas y esculturas, que destacan, por lo bien ejecutados que están, artísticamente considerados, desechando las obras imperfectas, muy incompletas o borrosas; sin embargo, el conjunto de las figuras de caballos del arte troglodita, me lleva a la misma conclusión que el estudio de aquellas que pueden considerarse como notables, en el concepto puramente artístico.

Tipo primero.—La mayoría de los caballos representados en el arte cuaternario corresponden, en su mayoría, a un tipo morfológico, caracterizado por ser caballos con aspecto de poca alzada, rechonchos, de cuerpo corto, cuello también corto, cabeza grande en proporción al cuerpo, patas cortas y bastas; peludos, especialmente, en la quijada y patas, y con crines abundantes. Tienen muchos de estos caballos gran semejanza con los caballejos llamados «poneis», y de buscar su analogía con los grupos de caballos actuales, que más atrás se han especificado, podrían encajar en la subespecie *Equus caballus celticus*, de los que pudieron considerarse, quizá, como sus ancestrales pleistocenos.

Se encuentran figuras de este tipo de caballos, tanto en las cavernas españolas como en las francesas, y también representadas en las obras de arte moviliar de los yacimientos del paleolítico superior de ambas naciones, lo cual nos indica que, durante el cuaternario superior, serían estos caballos abundantes en toda la Península y Francia.

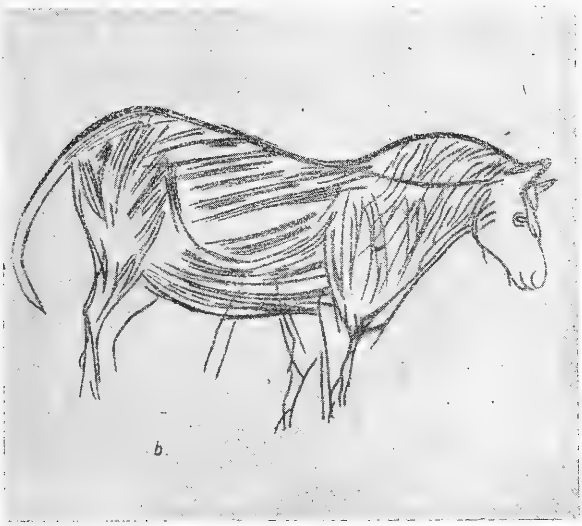


Fig. 13. Caballo grabado en la cueva del Buxo (Asturias).

Entre los grabados que anteceden, de la caverna de la Peña de Candamo, corresponden claramente al tipo descrito, el caballo grabado en el gran lienzo de pared, que corresponde al número III de la descripción y figura 3, y el caballo de color siena a que se refiere el número IX y representa la lámina I y fig. 9.ª

De otras cavernas españolas, como ejemplos de caballos de este tipo, reproduzco el caballito pintado en negro, de la caverna del Castillo en Puente Viesgo (Santander) (1), que, por su tronco y cuello corto, cabeza relativamente grande y demás caracteres, tiene todo el aspecto de un ponei (fig. 11.)

Muchos de los caballos que existen grabados en la caverna de Hornos de la Peña (Santander) (2), en extremo esquemáticos, y que los autores que la describieron consideran como de época auriñaciense, encajan también en el tipo descrito (fig. 12.)

(1) Alcalde del Río, Breuil et Sierra.—*Les cavernes de la région cantabrique*, fig. 139. Mónaco, 1912.
(2) Id. íd., fig. 89.

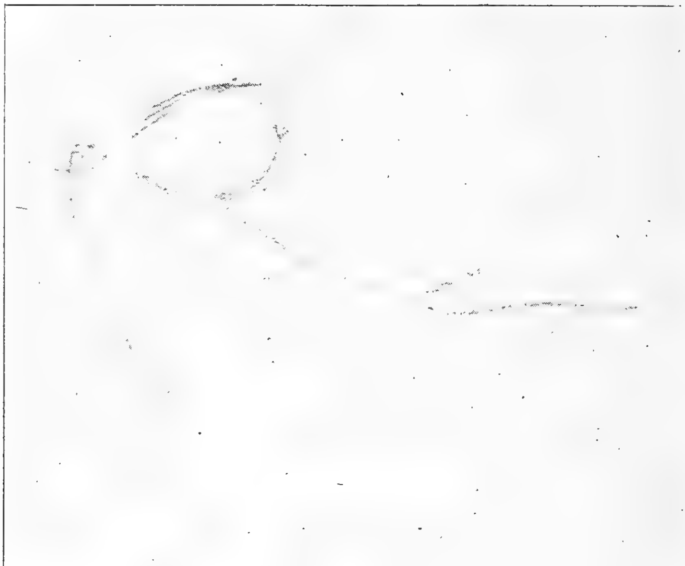


Fig. 14. Caballo de la cueva de San Antonio, en Rivadesella (Asturias).

En la caverna del Buxo, cerca de Cangas de Onís (Asturias) (1), existen grabadas diversas figuras de caballos de edad magdaleniense, que constituyen excelentes obras artísticas; estos caballos coinciden, por sus

Fig. 15. Caballo dibujado en amarillo de la caverna de la Pileta (Serranía de Ronda), según Breuil.

Fig. 16. Caballo dibujado en negro en la caverna de La Pileta (Serranía de Ronda), según Breuil.

caracteres, con el tipo que se ha descrito, como puede juzgarse por la adjunta figura (fig. 13.)

Otro tanto acontece con el caballito que existe dibujado en negro en la cueva de San Antonio, en Rivadesella (Asturias) (fig. 14.)

En la región meridional de la Península se observan figuras de caba-

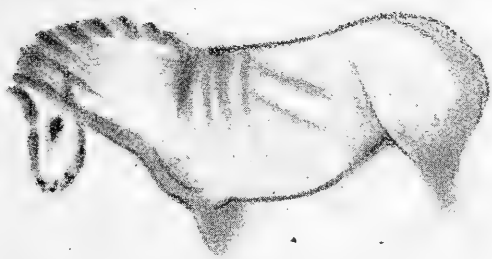


Fig. 17. Caballo en negro sombreado de la caverna de Font-de-Gaume (Francia), según Breuil.

llos con caracteres semejantes a los anteriores. Tal sucede con los caballos de la caverna La Pileta (2), en la serranía de Ronda; muchos de los

(1) Obermaier y Conde de la Vega del Sella.—*La cueva del Buxo.* Com. Inv. Paleont. y Prehist., Mem. 20. Madrid, 1918.

(2) Breuil, Obermaier et Wernert.—*La Pileta.* Láminas VII y XIII. Mónaco, 1915.

caballos allí figurados son de dibujo bastante imperfecto para que sobre ellos puedan establecerse deducciones; pero otros, aunque esquemáticos,

Fig. 18. Silueta de caballo de la caverna de Font-de-Gaume (Francia), según Breuil.

son de factura más correcta, que permite apreciar que, por sus caracteres morfológicos, son semejantes a los mencionados del Norte de la Península Ibérica; así acontece con el caballo dibujado en amarillo (fig. 15), que aquí se reproduce, y con el de dibujo esquemático en negro (fig. 16.)

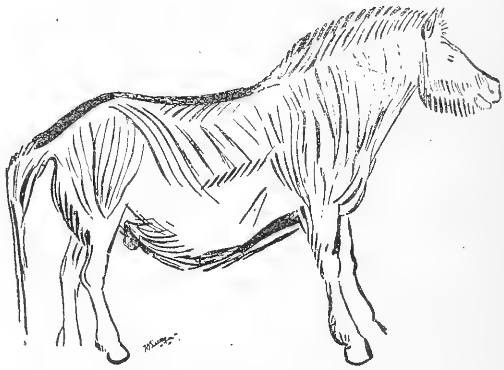


Fig. 19. Caballo en negro de la caverna de Niaux (Francia), según Breuil.

En las cavernas francesas existen, como en las españolas, abundantes representaciones de caballos, que encajan en el tipo descrito. Así de la Font-de-Gaume (Dordoña) (1), se reproducen aquí dos de las pinturas más características; una, un caballito pintado en negro, difuminado y modela-

(1) Capitan, Breuil et Peyrony.—*La caverne de Font-de-Gaume*. Pl. I y XIII. Mónaco, 1910.

do (fig. 17), y otra siluetado en negro uniforme, obra de la época magdaleniense (fig. 18.)

De la región francesa del Ariège se escoge la caverna de Niaux (1), en donde existen, pintados en negro, algunos caballos de dibujo correcto y buena factura, que corresponden al tipo de caballo corto, rechoncho, peludo y poco fino, a que me vengo refiriendo (fig. 19.)

Tipo segundo.—Además del tipo morfológico descrito, se reconoce en el conjunto de documentos gráficos, relativos al arte fósil, otro tipo de

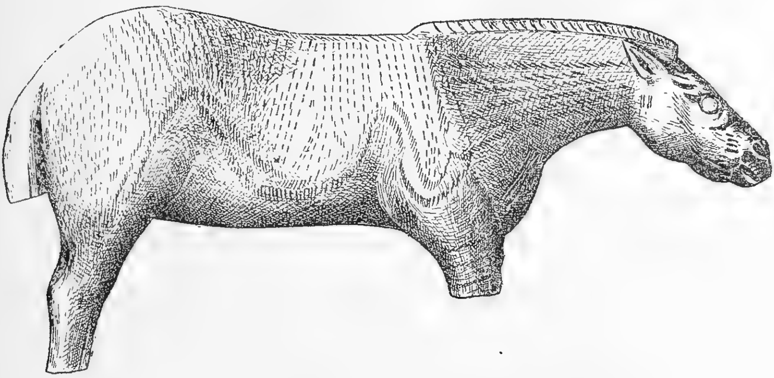


Fig. 20. Escultura en marfil de la caverna de Espélungues Lourdes (Francia), según E. Piette. Tamaño natural.

caballo diferente, el cual, de establecer analogías con las razas de caballos actuales, se advierte que con la que tiene más semejanza es con el grupo correspondiente al *Equus caballus lybicus*.

Son caballos, los del tipo segundo, esbeltos, de tronco largo, cuello delgado y arqueado, cabeza pequeña, patas finas y largas, con menudillos largos y cascos pequeños, y, a diferencia de los del tipo primero, poco peludos; el aspecto general da la impresión de una alzada mayor.

En este grupo debe incluirse la maravillosa escultura en marfil, encontrada en la caverna de Espélugues, en Lourdes, y que se conserva en el Museo Arqueológico de Saint-Germain en Laye. Expone Piette (2) la opinión que la pequeñez de la cabeza de esta bella obra de arte, obedecería a ser estrecho el fragmento de marfil en la parte correspondiente a la cabeza; sin embargo, la observación de la escultura no produce esta impresión, pues es en todas sus partes perfectamente armónica (fig. 20.)

(1) Cartailhac et Breuil.—«*Les pintures et gravures murales des cavernes pyrénéennes.—Niaux. (Ariège).* LAnthropologie, t. XIX. París, 1908.
(2) Piette.—*L'art pendant l'age du renne.* París, 1897.

Al mismo tipo corresponde el caballo que representa la figura 21, reproducción del grabado que existe en el bastón perforado del abrigo Mège (1), en Teyjat (Dordoña).

Los autores, al describir esta bella figura, la caracterizan por las pa-

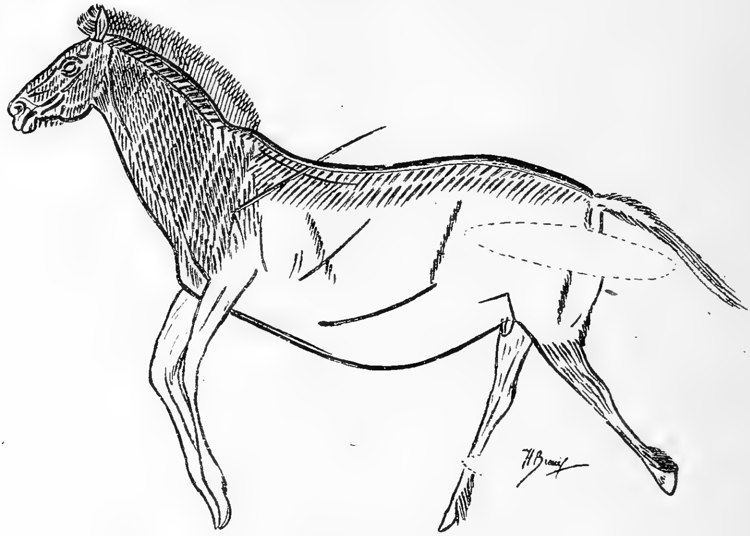


Fig. 21. Caballo al galope grabado en el bastón perforado del abrigo Mége, según Breuil.

tas finas y delgadas, el casco pequeño, la cola relativamente corta y poco guarnecida; la crin abundante y recta; la línea facial también recta. Los detalles de la cabeza están cuidadosamente trabajados: ojos, nariz, boca, labios: la barba apenas indicada.

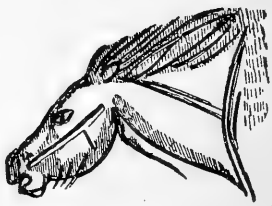


Fig. 22. Cabeza de caballo semejante al tipo árabe, de la caverna de Combarelles, según Breuil.

En este grupo también debe incluirse la cabeza de caballo muy semejante al tipo arabe, procedente de la caverna de Combarelles, en la Dordoña, y del que por esta semejanza se han ocupado diversos autores. (Fig. 22.)

Caracteres morfológicos semejantes tiene el caballo grabado, procedente de la caverna de Tayngen, que se reproduce a continuación (fig. 23.) Esta figura, por las proporciones de las diversas partes, por lo alargado del tronco, la finura de las patas, el cuello arqueado, la pequeñez de la cabe-

(1) Capitan, Breuil, Bourrinet y Peyrony.—*Observations sur un bâton de commendement orné de figures animales et de personnages semihumaines*. Rev. de l'Ecole d'Anthr. de París, t. XIX, fig. 5, 1909.

za los pelos cortos y sin zona pelosa en la quijada, es una de las más típicas del grupo.

Muy semejantes en los caracteres morfológicos es la cabeza de caballo

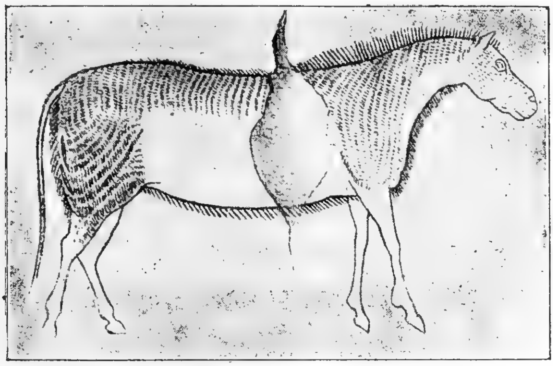


Fig. 23. Caballo grabado procedente de la caverna de Tayngen, reproducido por Piette.

grabada en un fragmento de asta de cérvido, procedente de la caverna de Espélungues en Arudy (Francia) (fig. 24.)

El arte parietal de las cavernas francesas, lo mismo que el arte movi-

Fig. 24. Cabeza y cuello de caballo, grabado en un hueso procedente de la caverna de Espélungues, según Piette.

liar, ofrece otros ejemplos de figuras de caballos del tipo esbelto y fino, y en este respecto son muy característicos algunos de los grabados de la caverna de Maursolas, en el Alto Garona, según los dibujos contenidos en el trabajo de Cartailhac y Breuil (1) (fig. 25.)

En las cavernas españolas puede reconocerse este mismo tipo de caballo en la caverna de la Peña de Candamo en la yegua del núm. VIII de la descripción y figura 8.ª, en la cabeza de caballo en negro difuminado núm. X de la descripción y figura 10, y, no tan definida, en el caballo pintado de color siena y grabado del núm. VI, figura 6.ª De otras cavernas españolas pue-

(1) Cartailhac et Breuil.—*Les peintures et gravures murales des cavernes pyrenéennes. II. Maursolas.* L'Antrophologie. Tomo XVI. París 1905.

den referirse a este tipo morfológico de caballo esbelto un cierto número

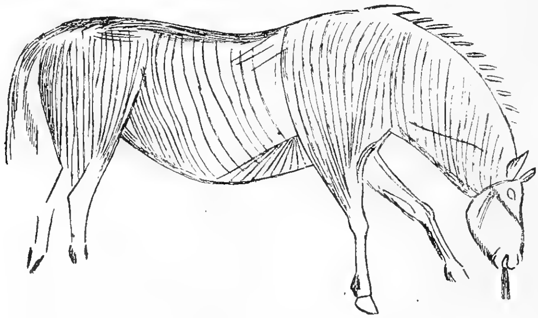


Fig. 25. Caballo grabado en la caverna de Maursolas (Alto Garona, Francia), según Cartailhac y Breuil.

de las pinturas en rojo de la caverna de la Pasiega (1), en Santander (fig. 26.)

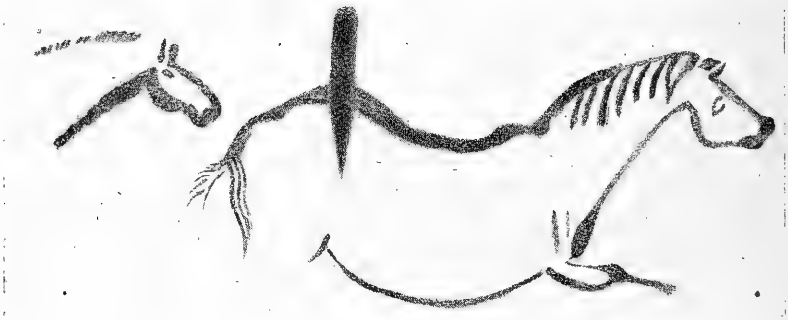


Fig. 26. Cabeza de caballo y caballo pintado en rojo en la caverna La Pasiega (Santander) según figura de la obra titulada «La Pasiega».

La cabeza de caballo que representa la figura adjunta, reproducción de un dibujo en negro de la caverna del Castillo (2), coincide también y puede agruparse con los caballos que incluímos en el tipo segundo (fig. 27.)

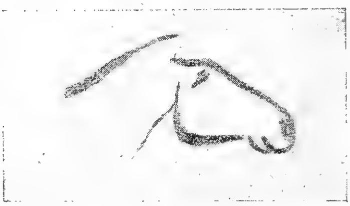


Fig. 27. Cabeza de caballo, pintada en negro en la caverna del Castillo (Santander), según un grabado de la obra «Les cavernes cantabriques».

Independientemente de los dos tipos de caballos que creo reconocer en el arte palelítico, quiero hacer mención de la figura de un equido que existe pintado en rojo en la caverna del Castillo, en Puente Viesgo (Santander), y que los autores de *Les*

(1) Breuil, Obermaier et Alcalde del Río.—*La Pasiega*. Lámina 2.ª—Mónaco 1912.

(2) Alcalde del Río, Breuil et Sierra. *Les cavernes de la région cantabrique*. Figura 130.—Mónaco 1912.

cavernes de la région cantabrique consideran como un equido con acentuados caracteres asnales. La adjunta figura 28, reproducción de la publica-

Fig. 28. Equido con caracteres asnales de la caverna del Castillo en Puente Viesgo (Santander). Figura reproducida de «Les cavernes de la región cantabrique».

da en la obra citada, hace ver patentemente tales caracteres, difíciles de explicar, como debidos a incorrección del dibujo, sino más bien significativos de una especie de equido alejado, por sus caracteres, de los que presentan los demás caballos figurados en cavernas, si bien por tratarse de una sola figura cualquier juicio que se aventure resulta dudoso en extremo.

Descripción de tres esponjas nuevas del litoral español

por

Francisco Ferrer Hernández

En un trabajo que, en colaboración con Del Río Ortega, publiqué en el *Boletín de la Real Sociedad Española de Historia Natural*, hablaba de la histología de una especie de esponja calcárea, incluída en el género *Leucandra*, indicaba que era nueva para la ciencia, y prometía su descripción para más adelante.

Ahora que a ella puedo unir el estudio de dos especies más, nuevas también para la ciencia, aprovecho gustoso la buena acogida que me dispensa la Real Academia de Ciencias, para entregarle la pequeña presente contribución.

Proceden las tres especies de las costas de Santander, recogidas por el personal de la Estación de Biología Marina, a las órdenes de don José Rioja, su antiguo director.

Dichas especies son:

LEUCANDRA SULCATA, nov. sp.

Poseo varios ejemplares de diferentes tamaños, pero de forma aproximadamente igual. Son casi cilíndricos, más bien piriformes y un tanto aplastados, con el diámetro mayor cerca del ósculo unas veces, cerca de la base otras.

El ejemplar mayor mide 105 mm., y su espesor es de 35 mm. junto al ósculo.

Su superfie externa, un poco áspera, presenta surcos longitudinales profundos, irregularmente dispuestos.

El ósculo es una hendidura estrecha, larga de 20 mm. en su dimensión mayor, y de contornos muy irregulares y sinuosos; en él, las paredes de la esponja adelgazan notablemente.

La cavidad gástrica se extiende hasta cerca de la base, de modo que es de grandes dimensiones, si bien por el achatamiento, según uno de los diámetros, se encuentra algo reducida y en sección no se presenta circular.

El sistema acuífero contiene extensísimas lagunas inhalantes y exhalantes y celdillas vibrátiles esféricas y grandes. Los detalles histológicos de esta especie fueron ya expuestos en el trabajo citado al principio.

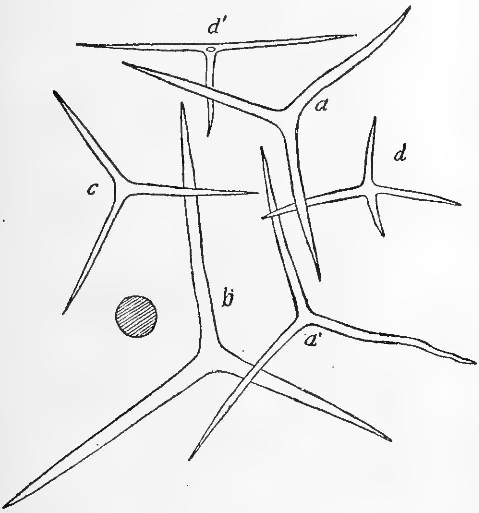


Fig 1.ª

El sistema esquelético consta, según norma en las especies del género *Leucandra*, de triactinas dérmicas y celdillares y tetractinas gástricas; le completan grandes oxeas radiales y microxeas apretadamente dispuestas en la superfie (stachen mörtel).

Triactinas dérmicas.—Son espículas algo irregulares, de forma y tamaño variable. Se disponen tangencialmente y constituyen una capa de un espesor no muy grande. Sus radios son a veces flexuosos con dos encorvaduras situadas, una, en su parte media, y la otra, cerca del ápice. Otras veces, los radios son de trazo más igual y se presentan rectos o encorvados gradualmente desde su base. Ya se ha dicho que el tamaño de los mencionados radios varía mucho, mas puedo dar como límites 0,21 y 0,32 mm., presentando todos un espesor de 0,018 mm. en la base (fig. 1.ª a, a', c).

Triactinas celdillares.—Son también irregulares con tendencia a sagitales, y sus radios presentan varias inflexiones. Las que constituyen la última capa asentada sobre el esqueleto gástrico son completamente sagitales; pero, por lo demás, en nada difieren de las otras espículas celdillares (fig. 1.ª b).

El tamaño de estas espículas es, en general, algo mayor que el que poseen las trirradiadas dérmicas, si bien algunas son parecidas a éstas; sus límites pueden fijarse entre 0,3 a 0,4 mm. de longitud. En lo que más difieren unas y otras es en el diámetro de las bases que en las celdillares de que tratamos es por término medio de 0,03 mm.

Alrededor de los canales exhalantes estas espículas adquieren un cuarto radio apical recto o un poco encorvado hacia la punta.

Tetractinas gástricas.—Son espículas más delgadas que todas las anteriores, y que pueden distribuirse en dos grupos (fig. 1.ª d, d′).

Unas presentan tres de sus radios, que son largos y delgados, dispuestos tangencialmente en la superficie gástrica; el cuarto radio, o sea el apical, es más grueso que los otros, y se muestra afilado y recto o algo encorvado y ensanchado en su base.

Otras, constan de un radio basal corto, semejante al apical y de los radios orales largos y rectos, que tienen el mismo espesor que los otros dos.

Oxeas.—Son grandes espículas diactinas, colocadas perpendicularmente a la superfie externa, empotradas casi completamente en la masa de la esponja, pues únicamente sale al exterior una pequeña porción distal de las mismas.

Su forma es bastante irregular, puesto que algunas están encorvadas y ensanchadas por uno de sus extremos, mientras que otras mantienen las dos puntas bien afiladas y algún tanto flexuosas.

Su tamaño varía entre 0,95 a 1,5 mm. de largo por 0,7 mm. de grueso en el punto de su mayor espesor (fig. 1.ª *círculo*).

Esparcidas por la superficie, sobresalen largas tricoxeas que, como se sabe, no son sino formas jóvenes de las oxeas citadas.

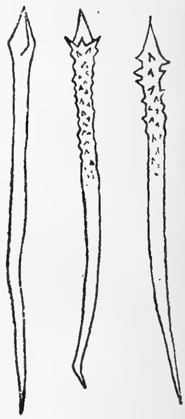


Fig. 2.ª

Microxeas.—Abundan estas espículas en la superficie, donde se disponen en haces apretados y perpendicularmente a ella. Son pequeñas, 0,08 a 0,1 mm., rectas o un poco retorcidas por un extremo, y terminadas en punta de lanza por el extremo opuesto; su superficie se presenta lisa unas veces, espinosa otras, en el primer tercio de su longitud, y aun hasta su porción media.

La particularidad más notable de estas microxeas se encuentra en la base de la porción lanceolada, en forma de un rodete espinoso con púas de regular tamaño (fig. 2.ª).

LEUCANDRA RIOJAI, nov. sp (1).

Es una esponja globosa que alcanza una talla de 50 mm. y presenta un ósculo circular rodeado de su correspondiente peristoma; puede presentar varios ósculos, situados todos hacia un mismo lado de la colonia.

Su superficie exterior presenta depresiones extensas, circundadas por crestas distribuídas sin orden determinado. La cavidad gástrica es pequeña y circular, debido al gran espesor de las paredes de la esponja.

El sistema acuífero, parecido al de la especie anterior, contiene lagunas inhalantes y exhalantes, si bien no tan amplias, y sus celdillas vibrátiles son también de menor tamaño.

El sistema esquelético consta de espículas dérmicas, celdillares y gástricas, estas últimas tetrarradiadas; además posee oxeas colosales, dispuestas perpendicularmente a la superficie, y microxeas en las capas dérmica y gástrica, aparte de las tricoxeas que constituyen el peristoma.

Trirradiadas dérmicas.—Son espículas tangenciales y sagitales, cuyos radios pares miden 0,16 a 0,21 mm. de longitud por 0,012 a 0,014 mm. de grueso en la base. El radio basal es recto y algo más corto que los orales, que son, a veces, rectos y otras veces se hallan encorvados desde la base (fig. 3.ª a).

Trirradiadas celdillares.—Son mn y variadas, apareciendo como semirregulares o como sagitales; sobre todo, son completamente sagitales las colocadas inmediatamente encima de la capa gástrica. Sus radios, que varían entre 0,18 a 0,24 mm. de longitud, son más o menos flexuosos, y aun a veces presentan retorcimientos notables. El espesor de los mismos, en su base, es de 0,02 a 0,03 mm (fig. 3.ª b).

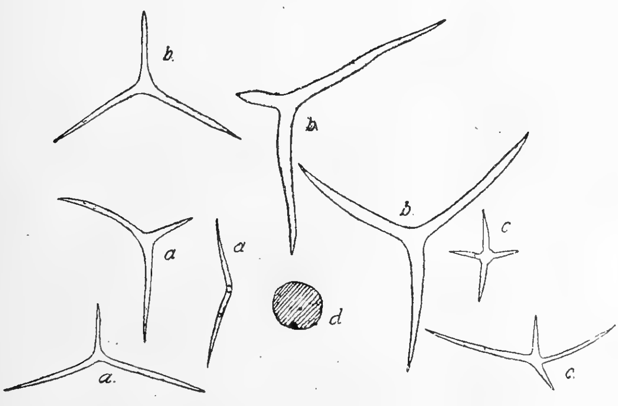


Fig. 3.ª

---

(1) Dedico esta especie al ex director del Laboratorio de Biología Marina de Santander, señor Rioja, al que debo infinitas atenciones.

Se encuentran muy abundantes, entrelazadas y apiñadas en la región celdillar, y adquieren un radio apical al tapizar las cavidades exhalantes.

Contrastan, por sus dimensiones, con las espículas de la corteza dérmica.

Tetrarradiadas gástricas.—Algunas de estas espículas son típicamente cruciformes, con sus radios todos de igual espesor, y los orales algo más cortos que el basal y el apical; son, además, rectos y afilados.

Otras presentan los radios pares mucho más largos que los otros dos, y algún tanto más delgados. Aquí también los radios basal y apical se encuentran en línea recta (fig. 3.ª *c*).

Son muy abundantes, disponiéndose paralelamente unas a otras, pero en muy apretada formación.

Oxeas.—Estas espículas son más largas y más gruesas que las de laespecie anterior. Sus formas son también irregulares, y no ajustadas a un tipo único; unas, se encorvan y espesan por un extremo; otras, se adelgazan igualmente por sus extremos.

Se disponen en sentido radiado, no sobresaliendo apenas de la superficie. Miden 1,6 a 2,5 mm. por 0,09 a 0,1 mm. (fig. 3.ª *círculo).*

Las tricoxeas abundan esparcidas por la superficie de la esponja como formas jóvenes, y, además, rodean el ósculo para constituir el típico esqueleto de la corona peristómica.

Microxeas.—Son mucho más largas que las de la especie anterior, y se encuentran esparcidas en la superficie dérmica y gástrica con igual abundancia.

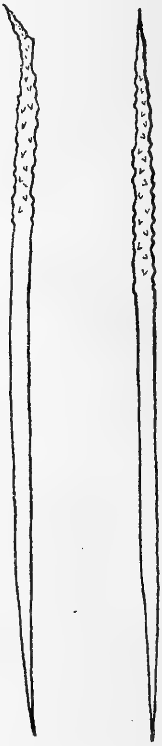


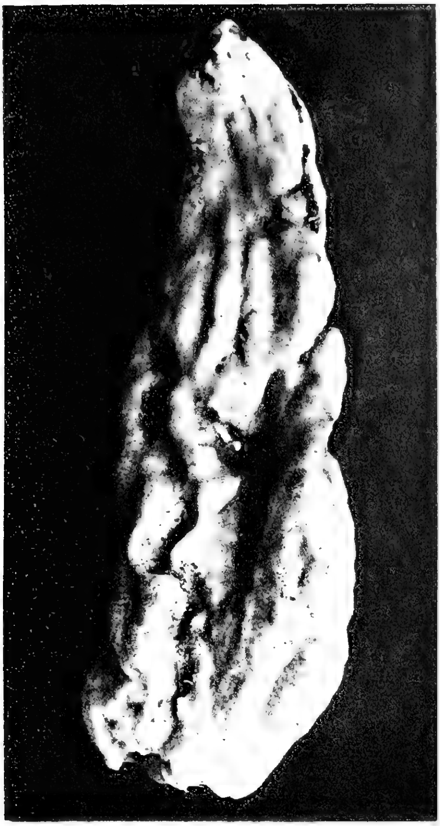
Fig. 4.ª

Rectas, cilíndricas, con pronunciado adelgazamiento en ambos extremos; son, algunas, completamente lisas, pero la mayoría de ellas se muestran llenas de espinitas en untercio de su longitud. Miden 0,1 a 0,24 mm., (fig. 4.ª).

Artemisina hispanica, nov. sp.

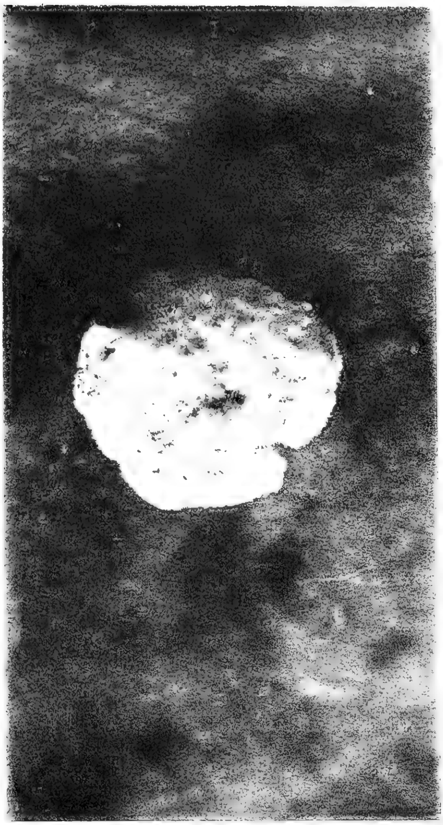
Poseo varios ejemplares de dimensiones diferentes, que recuerdan mucho la especie *arciger* O. S.

Su cuerpo es globoso y está sostenido por un pedículo recto o encorvado.



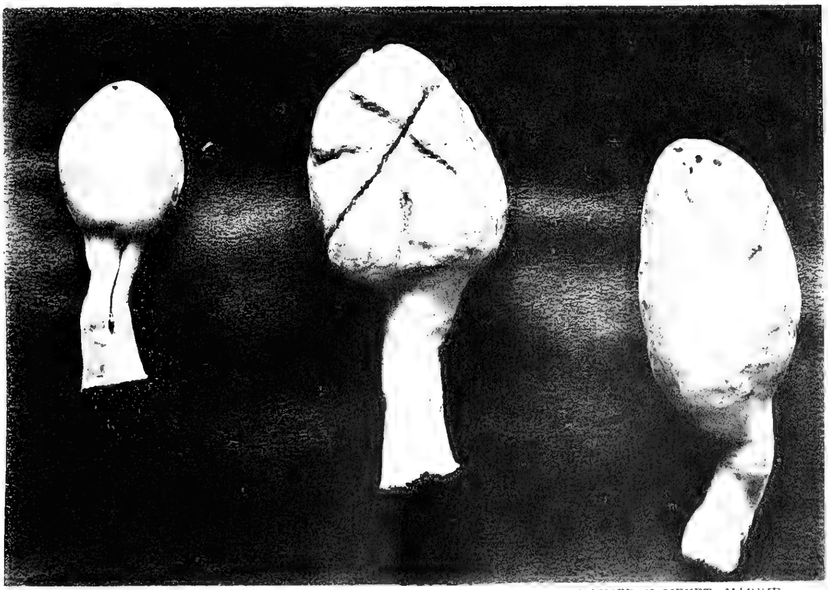
Fot. Molina

Leucandra sulcata



Fot. Rioja

Leucandra Riojai



Fot. Molina

FOTOTIPIA DE HAUSER Y MENET.-MADRID

Artemisina hispánica

Los ósculos, en forma de criba, se encuentran en el punto culminante de la masa esférica.

Al tacto, da la impresión de un *suberites*, confirmada luego al microscopio por la identidad de estructura. En efecto, hacia el interior de la masa se ven haces espiculosos entrecruzados, generalmente en direccio-

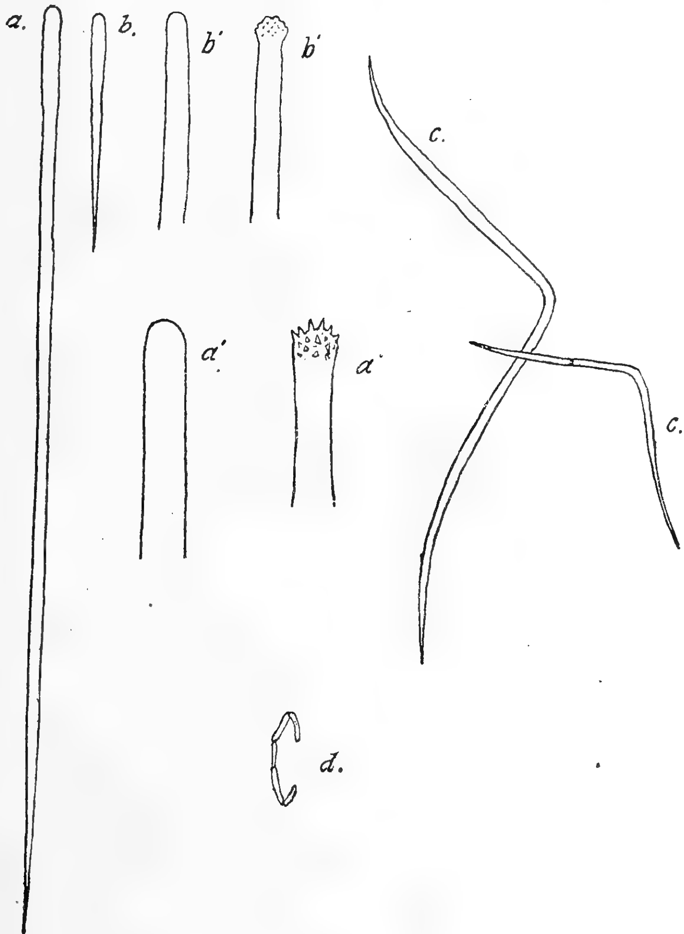


Fig. 5.ª

nes octogonales; cerca de la superficie dichos haces se apelmazan más y se disponen paralela y perpendicularmente a la susodicha superficie; por último, ésta se encuentra tapizada y atravesada por manojos o brochas de estilos más pequeños que los del coanosoma.

Por dichos caracteres coincide la presente especie con *A. arci-*

ger, O. S., de que se diferencia por la presencia de estilos con espinitas en la cabeza y por sus toxas completamente lisas.

También se parece esta especie a *A. transiens*, Tops. (de Asturias), distinguiéndose de ella por sus pequeños estilos de la superficie, por el tamaño de las toxas y por la abundancia de estilos lisos, mezclados con los espinosos de que ya hice mención.

Espículas.

a) *Estilos coanosómicos.*—Son espículas largas de 0,6 mm. redondeadas por un extremo, en el que, a veces, se marca muy poco una cabeza, y otras veces, siendo el caso general, no presenta diferenciación alguna; puede ser completamente liso o presentar varias coronas de espinitas, abundando de un modo igual ambos caracteres, en el conjunto de esta espiculación.

Desde el extremo redondeado, las espículas van adelgazando lentamente hasta el extremo opuesto, que es muy aguzado.

Como ya he dicho, forman el esqueleto coanosómico, en el que se disponen paralelas unas a otras para formar haces bastante gruesos.

b) *Estilos dérmicos.*—Son pequeños, sobre todo comparados con los anteriores, pues generalmente oscilan entre 0,15 a 0,24 mm. de longitud. Por un extremo se redondean y diferencian, a veces, en una cabeza poco marcada, erizada de espinitas, o bien la espícula es enteramente lisa; no se nota un predominio de ninguno de estos dos tipos expuestos.

Desde este extremo se adelgaza rápidamente la espícula, acabando en una punta muy aguda.

Estas espículas externas revisten completamente la superficie de la esponja, a la que atraviesan en manojos o en brochas perpendiculares a ella. Esta disposición es exactamente la misma que la que se nota en el género *Polymastia.*

c) *Toxas.* — Estas microscleras, afines a las de la especie *transiens* Tops., si bien algo mayores, son de extremos lisos, de gran curvatura central, y, además, muestran dos inflexiones laterales, una hacia cada punta.

Su cuerda mide 0,1 mm. y, a veces, más.

d) *Isoquelas.*—Estas espículas, esparcidas por el coanosoma, son muy parecidas en todas las seis especies que ahora comprende el género *Artemisina.*

Son pequeñísimas, de 0,02 mm. y muy delgadas, de modo que, mezcladas con el resto de la espiculación, es, a veces, difícil sorprenderlas.

TRABAJOS CONSULTADOS

BREITFUSS, 1898.—Kalkschwämmefauna der Westküste Portugals. *Zool. Jahrbuch. Syst. Abth.*

DENDY Y ROW, 1913.—The classification and phylogeny of the calcareous sponges, etc. *Proc. Zool. Soc.* London.

FRISTEDT, 1887.—«Vega Exp.» *Vetensk. Iakttag.*

HAECKEL, 1872.—Die Kalkschwämme, eine Monographie.

HANITSCH, 1895.—Notes on a collection of Sponges from the West Coast of Portugal. *Trans. Liverpool Biol. Soc.*

LACKSCHEWITSCH, 1886.—Über die Kalkschwämme Menorcas. *Sitzber. Naturf. Ges.* Universität Dörpat.

LENDENFELD, 1885.—A Monograph of the Australian Sponges. *Proc. Linn. Soc. New South Wales.*

POLÉJAEFF, 1888.—The Calcarea. *Challenger Report.*

RIDLEY, 1881.—Spongida collected during the Expedition of H. M. S. *Alert Proc. Zool. Soc.* London.

RIDLEY Y DENDY, 1887.—The Monaxonida. *Challenger Report.*

SCHMIDT, O, 1870.—Grundzüge einer Spongien fauna des Atlantischen Gebietes.

THACKER, 1908.—On collections of the Cape Verde Islands Fauna etc. *Proc. Zool. Soc.* London.

TOPSENT, 1892.—Contribution à l'étude des Spongiaires de l'Atlantique Nord. *Campagnes scientifiques.* Prince de Monaco.

—1904.—Spongiaires des Açores. *Campagnes scientifiques.* Prince de Monaco.

—1907.—Éponges calcaires recueillies par le Français dans l'Antarctique. (Expédition du Dr. Charcot.) *Bull. Mus. Hist. Nat.* Paris.

URBAN, 1905.—Kalifornische Kalkschwämme. *Arch. für Naturgesch.*

—1908.—Die Kalkschwämme der deutschen Tiefsee-Expédition. *Zool. Anzeiger.*

VOSMAER, 1880-1.—The Sponges of the «Willen Barents» Expedition.

Magnetoquímica de los cloruros de cromihidrinas

por

José Baltá Elías

I

Indicación de algunos principios fundamentales de magnetismo. — Principales leyes de magnetoquímica. Magnetón. Las propiedades magnéticas y la estructura del átomo.

Si colocamos un cuerpo cualquiera en un campo magnético uniforme $\vec{H}$, cada elemento de masa *dm* queda *polarizado*, es decir, convertido en un imán elemental, y el estado magnético en cada punto de aquél está definido por el vector *momento magnético* $\vec{M}$, igual al producto de la masa magnética o cantidad de magnetismo de cada polo, por la longitud *dl*, del imán elemental, y dirigido en el sentido del polo sur al norte de este último.

Cuando $\vec{M}$ está dirigido en sentido contrario al campo exterior (caso el más frecuente), la sustancia es repelida por este último y se denomina *diamagnética:* la casi totalidad de los cuerpos conocidos, como el agua, compuestos orgánicos, el bismuto, etc., pertenecen a esta clase; en cambio, si $\vec{M}$ tiene el mismo sentido que aquél, el cociente $\frac{\vec{M}}{\vec{H}}$ es constante para las sustancias *paramagnéticas* que son débilmente atraídas por el campo, tales como el oxígeno, el platino y las sales de hierro, cobalto, níquel, manganeso, cobre, cromo y tierras raras, y dicho cociente es una función de $\vec{H}$ para las *ferromagnéticas,* las cuales son fuertemente atraídas por el imán; tal sucede con el hierro, níquel, cobalto, acero, magnetita, etc.

La experiencia demuestra que, en primera aproximación (leyes de Curie):

1.° El momento magnético de los cuerpos diamagnéticos es independiente de la temperatura.

2.° En los cuerpos paramagnéticos, el producto $\vec{M}T$ es constante (T es la temperatura absoluta).

3.° En los cuerpos ferromagnéticos, $\overset{\smile}{M}$ y T están relacionados por una función complicada; pero de tal suerte que también $\overset{\smile}{M}$ disminuye cuando T aumenta; para un cierto valor de T (llamado *pnnto de Curie)* el ferromagnetismo desaparece y el cuerpo se convierte en paramagnético.

En todo cuerpo polarizado magnéticamente, *la intensidad de imantación* es un vector $\overset{\smile}{I}$ dirigido del polo sur al norte, y cuya intensidad es el cociente $\frac{\overset{\smile}{M}}{V}$ del momento magnético al volumen; en un elemento de masa *dm,* la derivada $\frac{d\overset{\smile}{M}}{dm}$ del momento magnético respecto a la masa define la *intensidad de imantación específica* en aquel punto; es evidente que esta última se obtiene de la primera, dividiéndola por la densidad.

Recibe el nombre de *susceptibilidad magnética* $\varkappa$ el cociente $\frac{\overset{\smile}{I}}{\overset{\smile}{H}}$ de la imantación por el campo; esta magnitud es negativa para las substancias diamagnéticas y positiva para todas las demás. La susceptibilidad *específica* χ es el cociente de la imantación específica por el campo, por consiguiente, esta última se deduce de la anterior dividiéndola por la densidad de la substancia o sea $\chi = \varkappa : \rho$; la determinación de la susceptibilidad tiene gran importancia en magnetoquímica, y de los procedimientos utilizados para su medida daremos detalles más adelante.

La susceptibilidad *molecular* $\chi^{(M)}$ se deduce de la específica, multiplicando esta última por el peso molecular del compuesto en cuestión.

Ahora bien: todas estas magnitudes que acabamos de definir se refieren a cuerpos constituídos por una sola clase de moléculas y, por consiguiente, de idéntico momento magnético; en cambio, si el compuesto estudiado es una mezcla de moléculas de diferente naturaleza, pero perfectamente mezcladas, la susceptibilidad específica del conjunto se deduce de las correspondientes a cada una de aquéllas, pues la acción de cada molécula es independiente de la de las restantes, de modo que si la unidad de masa contiene *m* gramos del cuerpo A, evidentemente contendrá 1-*m* del B y la susceptibilidad específica total vale

$$\chi = m\,\chi_A + (1 - m)\,\chi_B\,.$$

Esta ley, debida a Wiedemann, tiene gran importancia, pues permite deducir una de las susceptibilidades del segundo miembro, cuando se conoce la composición de la mezcla y se mide la del primer miembro; precisamente el caso más frecuente es el estudio de soluciones de sales de metales paramagnéticos, de modo que se puede deducir la susceptibilidad de la molécula de aquéllas midiendo la de la solución, considerando como tal, en el sentido más amplio de la palabra, toda asociación entre la molécula sólida y un número dado de moléculas de agua, tal como las sales cristalizadas; en este caso particular, las moléculas del otro cuerpo son de agua, cuya susceptibilidad está perfectamente determinada; este es el fundamento del método seguido en nuestras medidas.

Pero, como hemos dicho, es condición indispensable, para la aplicación de dicha ley, la invariabilidad de la naturaleza de las moléculas de la solución estudiada, en la cual el disolvente tiene por único objeto facilitar la libertad de movimientos de la substancia paramagnética, impidiendo la acción de los campos moleculares; por consiguiente, en los casos en que aquella ley no se cumpla, hay que buscar la explicación en la formación de nuevas moléculas, distintas de las preexistentes (combinaciones de la sal disuelta con el disolvente, solvatos o sales básicas debidas a la hidrolisis, complejos, polimerización, etc.); así pues, el estudio magnetoquímico de las soluciones ofrece un nuevo medio de investigación que ha de contribuir al mejor conocimiento de aquellos sistemas de constitución tan compleja.

Intimamente ligada con la susceptibilidad molecular está la atómica, que se deduce de la primera, en virtud de la ley enunciada por Pascal (1); según ella, *la susceptibilidad molecular es la suma de las atómicas, más un término de corrección, dependiente de los enlaces interatómicos,* se comprende, pues, la importancia que tienen las determinaciones magnéticas para el estudio de estos últimos; así, en los compuestos orgánicos están perfectamente determinados, gracias a los trabajos del mismo Pascal (2), los términos de corrección que, en el coeficiente de imantación de aquéllos, es preciso tener en cuenta por la introducción o salida de un núcleo determinado (bencénico, naftalénico, elemento halógeno, etc.) en la molécula del compuesto estudiado; asimismo el paso de un término a otro, en una serie homóloga, se caracteriza por un descenso en el valor de la constante magnética, con lo que puede calcularse la de un término cualquiera, conociendo la de uno solo de la serie y el número y naturaleza de los enlaces (etilénico, acetilénico, etc.); en cambio, en la química mineral, por no haber llegado a una sistemática tan perfecta como la orgánica, no es posible notar una variación tan regular en los compuestos de un mismo elemento, o elementos afines, y por eso el estudio de su susceptibilidad puede contribuir a esclarecer la constitución de aquéllas.

Para las soluciones estudiadas por nosotros, la susceptibilidad atómica

(1) P. Pascal. *Ann. Chim. Phys.* (8), **19**,5 1910.
(2) P. Pascal, loc. cit.

del metal la hemos deducido de la molecular, corrigiéndola del diamagnetismo del anión, según lo indicado por Weiss, por la fórmula

$$\chi^{(a)} = \frac{1}{N}\left[\chi^{(M)} - A\right],$$

en que N es el número de átomos del metal que figuran en la molécula salina, y A una constante igual al producto de la susceptibilidad atómica del anión por el número de veces que el mismo entra en la molécula.

El producto $\chi^{(a)}$. T de la susceptibilidad atómica, por la temperatura absoluta a que se verificó la medida, es una constante C, llamada *constante de Curie*, del catión, hallándose ésta ligada al momento molecular M_0 por la relación dada por Langevin como aproximada:

$$C = \frac{M_0^2}{3R},$$

de la cual se puede deducir el valor de M_0, pues R es la constante de los gases perfectos referida a la molécula-gramo ($R = 83,155.10^6$ C. G. S.); la constante de Curie sólo guarda su verdadera significación en los gases y soluciones, los cuales cumplen con dicha ley, por estar sus elementos paramagnéticos lo suficientemente alejados para evitar toda perturbación mutua; acaso por no cumplirse esta condición en los metales bien puros, bien en aleaciones, el momento magnético atómico es menor que en sus sales, debido probablemente a la menor movilidad de los átomos en los primeros, que seguramente deben estar unidos por enlaces rígidos, análogos a los existentes en el seno de un complejo, sobre lo cual insistiremos más adelante.

Finalmente, recordemos que Weiss (1) ha sentado la teoría de la discontinuidad del magnetismo, estableciendo que los momentos atómicos de los metales son múltiplos enteros de un cierto divisor común, al que llama *magnetón* (por analogía con lo que representa el electrón, respecto las cargas eléctricas) y cuyo valor para el átomo-gramo es 1123,5, ó $18,5.10^{-22}$ para el átomo propiamente dicho; por consiguiente, dividiendo por este valor, el momento atómico de los metales paramagnéticos, deben obtenerse cocientes enteros de magnetones, dentro de los errores de la experimentación.

Este hecho constituye la llamada *ley de los números enteros*, de Weiss, y para su comprobación y desarrollo, multitud de investigadores en estos últimos años, han estudiado gran número de sales paramagnéti-

(1) P. Weiss, *Jour. de Phys.*, V. **1**, 900, 965, 1911.

cas sólidas y en solución, así como los metales ferromagnéticos puros o formando parte de aleaciones en diversa proporción, confirmando en la mayor parte de los casos la exactitud de la citada ley, y resultando que el número de magnetones varía para un mismo elemento paramagnético, según la naturaleza de la molécula de que forma parte; así, por ejemplo, el oxígeno posee 7 magnetones, y 9 el óxido nítrico, gases que según se sabe, son paramagnéticos; el hierro tiene 11 magnetones a la temperatura del hidrógeno líquido, y 12, 10 y 20 respectivamente, para los estados β_1 β_2 y γ, etc., etc.

Sin embargo, el estudio de las soluciones acuosas de las sales, cuyo metal es alguno de los de la llamada familia del hierro (Ti. V. Cr. Mn. Fe. Co. Ni. Cu.) ha demostrado ciertos hechos que vamos a resumir brevemente y que ponen de manifiesto los diversos casos en que no es aplicable la ley de Wiedemann a las soluciones de algunas sales, por la presencia de nuevas combinaciones entre estas últimas y el disolvente, según antes hemos indicado.

En el caso del cloruro, sulfato y nitrato de níquel, Cabrera y Moles (1), y más recientemente, Weiss y Bruins (2), deducen la existencia de 16,0 magnetones para el átomo de dicho metal, sea cualquiera la concentración de las soluciones, lo que confirma que a ellas es aplicable la ley de Wiedemann; lo mismo sucede en las sales manganosas (cloruro, nitrato y sulfato), pues permanece invariable la constante de Curie (3), pero el número de magnetones que de ella se deduce, resulta ser 29,3 es decir, francamente fraccionario, sin que hasta la fecha se haya emitido ninguna explicación de esta anomalía, que desde luego no constituye un argumento decisivo contra la teoría de Weiss, por ser uno de los poquísimos casos en que esto sucede; además, para el SO_4 Mn. sólido K. Ohnes y E. Oosterhuis, obtienen 29 magnetones, número entero.

Por el contrario, en las sales férricas, el valor del momento magnético aumenta con la concentración de la solución, lo cual ya fué atribuído por Wiedeman al fenómeno bien característico de la hidrólisis de aquéllas que, por ser más notable en las soluciones diluídas, la cantidad de sales básicas será mayor, y tanto menor el momento magnético; en los trabajos de Cabrera y Moles (4) sobre el Cl_3 Fe y $(SO_4)_3$ Fe_2 se observa que

---

(1) B. Cabrera, E. Moles, J. Guzmán, *An. Soc. Esp. Fís. Quím.*, **12**, 131, 1914.

(2) P. Weiss y E. D. Bruins, *Proc. Roy. Acad. Ams.*, **18**, 266, 1915.

(3) B. Cabrera, E. Moles, M. Marquina, *An. Soc. Esp. Fís. Quím.*, *13*, 256, 1915.

(4) B. Cabrera y E. Moles., *An. Soc. Esp. Fís. Quím.*, *10*, 316, 1912; **11**, 398, 1913.

la curva de variación del número de magnetones con la concentración es asintótica para los números 29 y 27 de los mismos, respectivamente; que el efecto de dicha variación es debido a la hidrólisis, lo comprueba no sólo el descenso de la susceptibilidad de dichas soluciones al someterlas a un aumento de temperatura, favoreciendo la formación de sales básicas, sino el aumento de la constante magnética de aquellas soluciones al añadir cantidades crecientes de ácido que, según se sabe, hace retrogradar la hidrolisis por el exceso de iones H; en el Cl_3 Fe, dicho aumento es muy rápido para pequeñas cantidades de ácido, traduciéndose gráficamente por una rama de un gran coeficiente angular, la cual corta en ángulo muy acentuado a otra rama distinta que se obtiene para cantidades mayores de ácido, y que prolongada hasta el eje de ordenadas, le corta cerca de los 29 magnetones; un efecto análogo se obtiene para el $(NO_3)_3$ Fe; pero, en cambio, en el $(SO_4)_3$ Fe_2 se obtiene una curva continua, que para grandes cantidades de ácido añadido es asintótica asimismo con los 29 magnetones, siendo muy probable que esta continuidad de la curva sea debida a la existencia de algún complejo en el seno de la solución.

Muy distinto de los casos anteriores es el de las combinaciones salinas del $Cu^{\cdot\cdot}$ y $Co^{\cdot\cdot}$, que constituyen un grupo característico, ya que en ellas el valor de la constante magnética varía de un modo especial; en el Cl_2 Cu $(NO_3)_2$ Cu y (SO_4) Cu, Cabrera y Moles (1) han demostrado un aumento de la constante magnética con la dilución, y, más recientemente, Cherbuliez (2), en soluciones muy diluídas de $(NO_3)_2$ Cu, estudiadas con el fin de dilucidar la contradicción entre los indicados resultados y el valor constante del momento magnético obtenido posteriormente por la señorita Jacobson (3) para diversas sales cúpricas, ha confirmado la variación denunciada por Cabrera y Moles, encontrando, además, después de dicho aumento, una brusca disminución, y, por fin, un nuevo aumento, lo cual hace suponer la formación de moléculas complejas, pues el efecto de la disociación electrolítica de dichas soluciones no puede tener una influencia tan grande sobre su susceptibilidad; en definitiva, estos cambios conducen por extrapolación a $n = 10$, número entero de magnetones previsto ya en los trabajos de los citados investigadores españoles.

En el cobalto, el estudio de las soluciones de Cl_2 Co, So_4 Co y

(1) B. Cabrera y E. Moles, *An. Soc. Esp. Fís. Quím.*, **12,** 373, 1914.
(2) E. Cherbuliez, *Promotionsarbeit,* Zurich, 1917.
(3) M. Jacobson, *Promotionsarbeit,* Zurich, 1916.

$(NO_3)_2$ Co, pone en evidencia, según Cabrera, Jimeno y Marquina (1), una rápida disminución de la constante magnética de las mismas para concentraciones menores de 0,01 gramos por gramo de solución, y luego una disminución menor para mayores concentraciones, análoga a la observada en las sales de cobre, de modo que la gráfica está constituída por dos ramas distintas, cuya unión constituye un punto singular; prolongando ambas ramas en el sentido de las concentraciones decrecientes, cortan al eje de ordenadas en dos puntos que dan 24 y 25 respectivamente para el valor del número de magnetones; Trümpler (2), en un reciente trabajo, llega a las mismas conclusiones para sus medidas efectuadas en la balanza de Curie; pero, en cambio, las soluciones que estudió por el método de desnivelación acusan aparentemente la invariabilidad del número de magnetones igual a 24,5; es decir, fraccionario.

Del aspecto de estas curvas parece deducirse la existencia de dos combinaciones distintas de la molécula salina con el agua, una para concentraciones pequeñas y otra para las mayores y caracterizadas respectivamente por 24 y 25 magnetones; la asociación de aquellas en partes iguales podría simular, según Weiss ha indicado recientemente (3), el valor fraccionario de *n* hallado por Trümpler; sin embargo, esta explicación no es completamente satisfactoria, y por ello conviene estudiar la influencia del tiempo y de las condiciones de preparación en las soluciones de las sales de Co. La adición de pequeñas cantidades de ácido a las soluciones de Cl_2 Co y $(NO_3)_2$ Co, eleva el valor de la constante de Curie; pero aumentando la proporción de aquél, esta última sufre un descenso, de modo que la gráfica que expresa dicha variación tiene mucha semejanza con las correspondientes a las sales neutras; prolongando la segunda rama de la curva hasta el eje de ordenadas, se obtienen 25 magnetones, como en los casos anteriores; como puede verse, este hecho guarda íntima relación con el conocido cambio de color de las soluciones de Cl_2 Co, pasando del rojo al azul intenso al calentarlas o añadirlas ClH.

Respecto las sales crómicas, los resultados experimentales, desde el punto de vista magnético, no son tan numerosos como para los metales anteriores; en un trabajo reciente de Cabrera y Marquina (4) se demuestra que en el $(NO_3)_3$ Cr y $(SO_4)_3$ Cr_2, el átomo de cromo po-

---

(1) B. Cabrera, E. Jimeno, M. Marquina, *An. Soc. Esp. Fís. Quím.*, **14**, 357, 1916.

(2) A. Trümpler, *Tesis*, Zurich, 1917.

(3) P. Weiss.. *Rev. Gen. de l'Elect.*, **2**, 931, 1917.

(4) B. Cabrera y Marquina, *An. Soc. Esp. Fís. Quím.*, **15**, 199, 1917.

see 19 magnetones, y este valor es independiente de la concentración de las soluciones de aquellas sales, cumpliendo por consiguiente con la ley de Wiedemann; el valor menor de la constante magnética para el sulfato verde, procede indudablemente de la mayor disimulación del cromo en un grupo complejo, análogamente a lo que sucede en el $(SO_4)_3 Fe_2$, pudiéndose admitir para explicar aquella disminución, que los ejes de los dos átomos metálicos no son paralelos, y, por consiguiente, el momento total es menor, o que los átomos de Cr en dichos complejos se deforman.

Es evidente el interés que ofrece un estudio análogo de los cloruros crómicos, por ser sales que, según se sabe, han sido objeto de un acabado estudio químico-físico, conociéndose actualmente de un modo muy preciso su constitución, comportamiento de sus soluciones y condiciones de transformación; sin embargo, hasta ahora, sólo Mlle. Feytis (1) ha determinado en la balanza de Curie la susceptibilidad molecular de las hidrinas verde y violeta de cloruro crómico al estado sólido, deduciendo que a ellas es aplicable la ley de aditividad, lo mismo que a otras combinaciones salinas crómicas; nosotros, en el presente trabajo, nos proponemos dar a conocer nuestras medidas de susceptibilidad de las soluciones acuosas de ambas sales, a fin de estudiar su comportamiento a diferentes concentraciones, sus variaciones posibles por la calefacción y la adición de cantidades distintas de ClH, y, por fin, su transformación recíproca con el tiempo desde el punto de vista magnético.

Los casos en que, como en las sales manganosas, crómicas, etc., según acabamos de ver, la susceptibilidad de la solución es constante e independiente de la concentración de esta última, nos indican que la disociación electrolítica no tiene influencia sobre el momento magnético de la molécula, o sea que el enlace de los iones es de tal naturaleza que no perturba el momento del átomo metálico a diferencia de otra clase de enlaces, según vamos a ver.

En efecto: según el modelo de átomo de Rutherford-Bohr, éste está constituído por una masa central de electricidad positiva, alrededor de la cual y describiendo órbitas coplanares, gravitan los electrones negativos en número igual al indicado por el *número atómico* (que vale, aproximadamente, la mitad del peso atómico del elemento) de modo que la suma de sus cargas se neutraliza con la de la esfera central; es sabido que estas cargas en rotación, equivalen a imanes elementales, y recientemente Eins-

---

(1) E. Feytis. *Le paramagnétisme, appliqué à l'étude des sels métalliques*. *Pub. de la Soc. de Chim.-Phys.*, 1914. París.

tein y Haas, han comprobado *experimentalmente* en el hierro, la realidad de las corrientes de Ampére; además Parson (1), ha fundado en este concepto del magnetón (completamente distinto del de Weiss) toda una teoría de las propiedades magnéticas de la materia principalmente para la explicación de los fenómenos químicos (valencia), aún cuando desde el punto de vista físico, adolece de graves defectos.

Hoy día se admite que los enlaces de los iones de una molécula disociada, o sean sus *valencias electrolíticas*, se efectúan precisamente por el intercambio de un número dado de electrones corticales (igual al de valencias, y por eso se llaman *de valencia),* entre el catión que los deja libres y el anión que los fija y retiene; esta unión electrónica, podríamos decir exterior al átomo, deja a este último una cierta libertad de orientación, lo cual está perfectamente de acuerdo con los recientes descubrimientos de Bragg, previstos por Laue, sobre la constitución de los cristales, utilizando la difracción de los rayos X sobre éstos, los cuales resultan estar perfectamente disociados, pudiéndose asegurar «la completa desaparición de la molécula como entidad perfectamente definida y elemento integrante del cuerpo» (2).

Además de este resultado de gran transcendencia, se ha averiguado, gracias a dicho fecundo y moderno medio de investigación de la estructura de la materia, que la unión entre los átomos constituyentes de un radical, o en general de un grupo complejo (como el CO_3 en el CO_3 Ca), es mucho más íntima que la debida a los electrones de valencia entre los iones de la sal; por otra parte, es sabido que la disimulación de un átomo paramagnético es un ión complejo, lleva consigo un descenso en el valor del momento magnético de aquél, lo cual permite suponer, teniendo en cuenta lo dicho para los rayos X, que las uniones no disociables de los átomos se efectúan por los campos electromagnéticos correspondientes a los electrones cuyas órbitas son más interiores en el átomo; es presumible que dicha unión se efectúa por la interposición de las órbitas electrónicas de un átomo en las del otro, las cuales se dislocarían por reacción, y, por consiguiente, no estando en un mismo plano, sus momentos no podrán sumarse aritméticamente, lo cual origina una disminución del momento total (3).

En la moderna teoría de los complejos, debida a Werner, se distinguen ambas clases de enlaces, pues además de las valencias electrolíti-

---

(1) A. L. Parson. *A magneton theory of the structure of the atom*, Smithsonian Miscell. Collec, vol. LXV, núm. 11.

(2) B. Cabrera, *An. Soc. Esp. de Fís. y Quím., 13,* 84, 1915.

(3) B. Cabrera, *Scientia, 2*1, 377, 1917.

cas, con su significación ordinaria, admite otras valencias intraiónicas de naturaleza especial, llamadas *valencias de coordinación;* al número de moléculas enteras (casi siempre agua, amoníaco, etc.), o de iones simples unidos a un átomo metálico por estas valencias especiales, se le llama *índice de coordinación*, el cual muchas veces es distinto de la valencia ordinaria del átomo, pero puede también ser igual a ella; así el índice de coordinación para el cromo (como para el platino, cobalto y metales análogos), vale 6 (1).

La importancia de las teorías que acabamos de indicar brevemente pone de manifiesto la conveniencia del estudio magnetoquímico de los cloruros de cromihidrinas, pues en ellos, según veremos inmediatamente, el cromo forma parte de un ion complejo, y del comportamiento de su molécula, desde el punto de vista magnético, pueden deducirse consecuencias respecto a la naturaleza de los enlaces interatómicos, estructura de la molécula de dichas sales, etcétera.

II

Química-física de los cloruros cromihidrinas.—Transformación recíproca de sus soluciones.—Existencia real del cloruro intermedio; Trabajos de Bjerrum.

La teoría de Werner (2) permite prever las siguientes hidrinas (3) de cloruro crómico, cuya denominación, según la nomenclatura de dicho autor, exponemos en el siguiente cuadro:

$[Cr(H_2O)_6]Cl_3$ cloruro de cromi-hexahidrina (gris-azul o violeta).

$\left[Cr \begin{matrix} Cl \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right] Cl_2$ » de cromi-cloro-pentahidrina (de Bjerrum).

$\left[Cr \begin{matrix} Cl_2 \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right] Cl$ » de cromi-dicloro-tetrahidrina (verde-esmeralda).

$\left[Cr \begin{matrix} Cl_3 \\ (H_2O)_3 \end{matrix}\right]$ Cromi-tricloro trihidrina (desconocido; no electrolito).

---

(1) F. Swarts, *Chimie Inorganique,* pág. 742, 1914. París.

(2) Puede verse un resumen de la misma en la *Introduction à la chimie des complèxes,* de G. Urbain, et A. Sénechal, pág. 132, 1913. París.

(3) Recibe este nombre toda combinación salina con agua *de constitución.*

El modo de establecer este cuadro, así como la regularidad en la variación de sus componentes (análoga a la de cualquier otra serie de complejos del Cr, por ejemplo, los cloruros de cromiamminas) hace ver claramente que las seis moléculas de agua de la hexahidrina deben considerarse como agua de constitución, o, lo que es lo mismo, que en todas las sales de cromo y metales análogos, el metal forma parte de un ión complejo.

Como las hidrinas, por regla general, son compuestos *metaestables* (es decir, inestables termodinámicamente) que difieren mucho del estado de complejo perfecto, su estudio tiene más dificultades que el de estos últimos, y ello explica la variedad de hipótesis que se emitieron antes de los trabajos clásicos de Recoura, para explicar, no sólo la coloración ya verde, ya violeta, ya dicroica (verde por reflexión y violado-rojiza por refracción) que, según las condiciones de preparación, presentan las soluciones de los cloruros verde y gris-azul (los únicos conocidos antiguamente), sino también las leyes que rigen sus transformaciones recíprocas; la deshidratación, la modificación isomérica del sesquióxido crómico, formación de sales básicas, etc., etc., fueron otras tantas explicaciones que se dieron de aquel fenómeno.

Recoura (1), como hemos dicho, fué el primero que reconoció que las diferentes propiedades de ambas sales en solución, dependen, no solamente de la temperatura, sino también de su concentración, del tiempo que transcurrió desde la preparación de la sal, etc., etc.; utilizando el análisis termoquímico, es decir, precipitando exactamente dentro del calorímetro las soluciones de los dos cloruros por una solución equivalente de sosa, reconoció que la cantidad de calor desprendida era de 31,5 calorías para el cloruro verde, y de 22,2 calorías para el violeta, por atomo-gramo de Cr precipitado al estado de hidróxido.

Pero como el análisis calorimétrico no proporciona ningún dato sobre la constitución de los cuerpos, Werner (2) utilizó posteriormente los procedimientos crioscópicos, los cuales permiten calcular el peso molecular, y, por consiguiente, el número de moléculas disueltas, puesto que, si el compuesto se disocia electrolíticamente, los iones libres, según se sabe, actúan como si fuesen moléculas enteras, de modo que para una dilución suficiente (disociación completa), el peso molecular observado es el cociente del peso molecular verdadero por el número de sus iones.

---

(1) A. Recoura, *Ann. de Phys. et Chim.*, (6), **10**, 1, 1887.
(2) A. Werner y Gubser, *Berichte*, **34**, 1579, 1901.

Así Werner encontró para el peso molecular del cloruro gris-azulado el valor 76,3, y para el verde 125,0 que concuerdan (dentro de la aproximación en esta clase de medidas) con los valores teóricos, pues aun cuando son algo superiores a estos últimos, hay que tener en cuenta que la disociación electrolítica no es total; como por otra parte el análisis de ambas sales indica igual composición centesimal, resultan comprobadas las fórmulas de constitución para cada una de ellas, o sean

$$[Cr(H_2O)_6]Cl_3, \qquad \left[Cr\begin{matrix}Cl_2\\(H_2O)_4\end{matrix}\right]Cl + 2H_2O,$$

que indican cuatro iones para la primera y dos para la segunda; como puede verse, el caso de isometría de ambas sales es la llamada *de hidratación*, por Werner.

La existencia teórica de las hidrinas de que antes hablábamos queda así comprobada experimentalmente, pues en el cloruro gris azul las seis moléculas de agua son *de constitución*, y, por consiguiente, forman parte integrante de la molécula, mientras que en el cloruro verde quedan sólo cuatro moléculas en el complejo, constituyendo las otras dos *agua de hidratación*, que puede perder en el vacío seco (lo que indica su carácter externo a la molécula), cosa que no sucede con el cloruro gris, pues sólo las pierde a 80°, transformándose en sal verde, y demostrándose con eso la profunda disgregación de su molécula.

Otras muchas propiedades demuestran claramente la diferencia esencial entre ambas sales; así, el cloruro violeta cristaliza en el sistema monoclínico, presentándose en prismas de 6 caras de color gris violeta por refracción y verde por reflexión, es muy delicuescente e insoluble en la acetona; en cambio, el cloruro verde cristaliza en tabletas pseudo-exagonales muy birrefringentes, pertenecientes al sistema rómbico (1), no es tan delicuescente como el anterior, y es muy soluble en la acetona, propiedad que, según veremos más adelante, se utiliza en la preparación y separación de ambas sales. El punto de fusión de esta última parece ser alrededor de los 83°, mientras que la primera funde a los 91°4, si bien la temperatura, durante la fusión, sube a 94°4, para descender luego a 91°6 cuando la fusión es completa, lo que hace suponer que durante esta última hay una transformación parcial de la sal violeta en verde.

Una comprobación de orden químico de la constitución de la sal verde es que no todo el cloro de su molécula es precipitable por el nitrato argéntico, cosa que Peligot ya había observado, aunque, según él, se pre-

---

(1) J. Olie.—*Zeit. anorg. Chem.* **51**, 29, 70, 1906.

cipitan los $\frac{2}{3}$ del cloro total, pero Werner ha demostrado plenamente que a baja temperatura sólo precipita $\frac{1}{3}$ de este último; en cambio en el cloruro gris, los seis átomos de cloro son precipitables íntegramente por el nitrato argéntico.

La medida de la conductividad eléctrica de las soluciones de los cloruros de hidrinas que nos ocupa, ha contribuído a profundizar en el estudio de su constitución; además, por este medio, confirmó Bjerrum la existencia del cloruro intermedio, según veremos en seguida.

Werner ha demostrado que la conductividad de las soluciones violetas *no varía* sensiblemente con el tiempo entre los límites de concentración, para los cuales persiste dicha coloración; así obtuvo

$$\text{a } 25^\circ, \quad \begin{matrix} \Lambda_{125} = 321{,}5 \\ \Lambda_{1000} = 429{,}8 \end{matrix} \qquad\qquad \text{a } 0^\circ, \quad \Lambda_{125} = 173{,}1,$$

en que Λ_a representa la conductividad molecular de una solución que contiene una molécula de sal en a litros de agua.

En cambio, la conductividad de las soluciones verdes es mucho menor (lo cual es una nueva prueba de la disimulación en el catión de los dos átomos de cloro, ya que de un modo general, la conductividad molecular de los complejos va disminuyendo con el número de iones libres) *y crece rápidamente* con el tiempo, tendiendo hacia un límite, que es precisamente la conductividad del cloruro violeta a 0° (para la misma concentración), lo que prueba la espontánea transformación del cloruro verde en violeta en las soluciones diluídas. Heydweiller, en un reciente trabajo (1), ha estudiado esta transformación en tres soluciones de sal verde (con una riqueza en Cl_3Cr de 0,853, 0,640 y 0,427 mol. por litro), siguiendo paralelamente sus variaciones de conductividad y densidad con el tiempo; los valores inicial y final de estas magnitudes, para la primera y última de dichas soluciones, se expresan en los siguientes cuadros, en los que K representa la conductividad molecular en cms^{-1} Ohms^{-1} y σ la diferencia entre la unidad y la densidad;

$$\begin{aligned} K_0 &= 71{,}6 \,.\, 10^{-3}, & \sigma_0 &= 10{,}972 \,.\, 10^{-2}; \\ K_\infty &= 99{,}8 \,.\, 10^{-3}, & \sigma_\infty &= 11{,}440 \,.\, 10^{-2}; \\ K_0 &= 42{,}87 \,.\, 10^{-3}, & \sigma_0 &= 5{,}333 \,.\, 10^{-2}; \\ K_\infty &= 67{,}70 \,.\, 10^{-3}, & \sigma_\infty &= 5{,}843 \,.\, 10^{-2}. \end{aligned}$$

De las tablas de valores intermedios (pues sus medidas se refieren a

(1) A. Heydweiller.—*Zeit. anorg. Chem.* **91**, 661, 1915.

un lapso de tiempo de ciento cincuenta y tres días para la primera solución, y de sesenta y uno para las otras dos) deduce que la ley de variación, según podía preverse, es una función logarítmica, obteniendo

$$l \, . \, \frac{K_\infty - K_0}{K_\infty - K_t} = a \, . \, t, \qquad [\alpha]$$

$$l \, . \, \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{\sigma_\infty - \sigma_t} = b \, . \, t, \qquad [\beta]$$

para la conductividad y la densidad, respectivamente, en las que a y b son constantes, cuyo valor determina, siendo el de b 0,0462, 0,0675 y 0,1255 para cada una de dichas soluciones, respectivamente.

En las soluciones concentradas de cloruro verde estudiadas por nosotros, hemos notado una variación análoga de su densidad, la cual nos fué necesario determinar, pues interviene en el cálculo de la susceptibilidad de aquéllas, según veremos más adelante; en los cuadros siguientes indicamos la riqueza m de ambas soluciones en gramos de sal por gramos de solución y el valor de su densidad, determinada en los intervalos de tiempo correspondientes.

SOLUCIONES DE CLORURO VERDE

$m = 0,3114$		$m = 0,1965$	
Horas	Densidad a 25°	Horas	Densidad a 25°
0	1,319	0	1,181
22	1,319	18	1,181
23	1,319	48	1,181
71	1,319	72	1,181
145	1,320	408	1,185
167	1,320	599	1,186
191	1,321	5400	1,192
234	1,321		
576	1,322		
809	1,322		
5129	1,323		

Las dos rectas que representan gráficamente la ecuación (β), al calcularla con estas dos series de valores, resultan casi paralelas, y tienen, respectivamente, 0,0033 y 0,0011 por valor de su coeficiente angular (calculado por el método de Cauchy); ambos son mucho menores que el menor de los que Heydweiller obtiene para b (correspondiente a su solución más concentrada), lo cual es perfectamente lógico, pues el coeficiente angular aumenta con la dilución de sus soluciones y las dos estudiadas por nosotros tienen una riqueza en sal mucho mayor que la más concentrada de aquéllas. Sin embargo, los valores de *b* obtenidos para nuestras soluciones, seguramente son algo mayores que los que realmente les corresponderían, pues hay que recordar que Heydweiller estudió la transformación a 18° y nosotros a 25°, y como para estas sales la velocidad de reacción casi se cuadruplica por cada 10° de aumento en la temperatura (1), necesariamente la transformación observada por nosotros debe ser mucho más rápida, lo que se traduce en un aumento del coeficiente angular.

Análogamente a lo hecho con el cloruro verde, determinamos también la variación de la densidad con el tiempo en las dos soluciones más concentradas de cloruro violeta, cuya susceptibilidad hemos estudiado, según indicamos a continuación:

SOLUCIONES DE CLORURO VIOLETA

$m = 0{,}2152$		$m = 0{,}1914$	
Horas	Densidad a 25°	Horas	Densidad a 25°
0	1,230	0	1,198
4	1,230	18	1,198
5	1,230	46	1,198
21	1,230	473	1,198
50	1,230	708	1,197
101	1,230		
219	1,229		
622	1,229		
886	1,229		

En estos cuadros se acusa inmediatamente una variación en sentido inverso del correspondiente a los dos anteriores, constituyendo una prueba más de la transformación parcial de la sal violeta en verde, principalmente en soluciones saturadas y de concentración media, hasta establecerse el equilibrio entre ambas, dependiente de la concentración inicial y de la temperatura; de todo lo expuesto se deduce el interés que presenta un estudio completo de dichas variaciones de densidad con métodos de gran precisión, como el utilizado por Cabrera (2) y sus colaboradores para el estudio de la dilatación de las soluciones.

Vamos ahora a exponer sucintamente los ingeniosos trabajos del in-

---

(1) A. Sénechal.—*L'étude physico-chimique des sels chromiques. Pub. de la Soc. Chim.-Phys.*, 1913, París.

(2) B. Cabrera.—*An. Soc. Esp. Fís. y Quím.* **12**, 284, 1914.

vestigador danés Bjerrum, para comprobar la existencia del cloruro intermedio $\left[Cr \begin{matrix} Cl \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right] Cl_2$, previsto por la teoría; en ellos se evidencia la gran importancia que han alcanzado las determinaciones de conductividad en las investigaciones químico-físicas.

Hasta la época de sus trabajos, esta sal prevista en la sistemática de Werner, no había podido ser aislada, no obstante la constancia de los esfuerzos del sabio profesor de Zurich; esto indicaba ya que, en caso de existir aquélla, debía ser muy inestable. Recoura, por precipitación fraccionada (por una corriente de ClH gaseoso a baja temperatura) de las soluciones dicroicas de cloruro crómico, sólo pudo obtener la sal gris azulada, que es la que primeramente precipita, y la verde esmeralda que sólo lo hace al cabo de unas veinticuatro horas del paso de la corriente.

Bjerrum (1) supuso que una solución dicroica, es decir, una solución de cloruro verde en vías de transformación a violado, contenía las tres sales, de modo que llamando a, b, c las concentraciones respectivas de la verde, intermedia y violeta, y admitiendo que la transformación de la primera en la última se efectúe en dos fases, es decir:

$$\left[Cr \begin{matrix} Cl_2 \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right] Cl + 2H_2O \rightarrow \left[Cr \begin{matrix} Cl \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right] Cl_2 + H_2O,$$

$$\left[Cr \begin{matrix} Cl \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right] Cl_2 + H_2O \rightarrow [Cr(H_2O)_6]Cl_3,$$

tendremos dos reacciones monomoleculares, y será aplicable a ellas la ley de acción de las masas.

Por consiguiente, para la primera, la velocidad de reacción vendrá dada por la conocida ecuación diferencial,

$$\frac{da}{dt} = -K_1 \cdot a,$$

para la segunda tendríamos una relación análoga; pero como la velocidad con que desaparece el cloruro intermedio es evidentemente igual a la con que aparece el violeta, se puede sustituir $-\frac{db}{dt}$ por $\frac{dc}{dt}$ de modo que tendremos:

$$\frac{dc}{dt} = K_2 \cdot b.$$

---

(1) N. Bjerrum. - *Zeit. phys. Chem.* **59**, 336, 581, 1907.—**73**, 723, 1910.

Si llamamos a_0 la concentración inicial del cloruro verde, se tiene en todo momento:

$$a_0 = a + b + c;$$

además, para el tiempo $t = 0$ se tiene evidentemente $a = a_0$, $b = c = 0$; con lo dicho, la integración de las dos ecuaciones anteriores no tiene ninguna dificultad, y de aquélla se deducen para las constantes a, b y c los valores:

$$a = a_0 \,.\, e^{-K_1 t} \quad b = a_0 \frac{K_1}{K_1 - K_2} [e^{-K_2 t} - e^{-K_1 t}]$$

$$c = a_0 \left[1 - \frac{K_1}{K_1 - K_2} e^{-K_2 t} + \frac{K_2}{K_1 - K_2} e^{-K_1 t} \right].$$

Para calcular K_1 y K_2, y deducir si son o no constantes durante la transformación, es preciso conocer a cada momento a, b y c por algún reactivo físico, y el adoptado por Bjerrum fué la conductividad eléctrica de las soluciones.

En efecto: admitiendo que la conductividad de una solución dicroica de cloruro crómico cumple con la ley de aditividad, Bjerrum pudo deducir en todo momento de la transformación la concentración de cada una de las tres sales precitadas (existentes en dicha solución), midiendo la conductividad de esta última y conociendo la de la sal verde y violeta por medidas previas en sus soluciones respectivas inmediatamente después de preparadas; en cuanto al cloruro intermedio, supuso que su conductividad debía ser muy próxima de la media de las dos sales anteriores.

Operando de este modo, Bjerrum adquirió la certidumbre de la existencia de esta última sal, la cual consiguió aislar de las otras dos, empezando por precipitar el cloruro gris-azul de una solución dicroica, por una corriente de ClH gaseoso a baja temperatura y agotando el líquido restante con éter etílico, en el cual es insoluble la sal ordinaria verde-esmeralda; por fin, en el líquido resultante de la filtración, encontró Bjerrum una sal extraordinariamente soluble en agua, aun en la saturada de ClH, pero precipitable por un exceso de éter clorhídrico, depositándose en estas condiciones en forma de cristales de color verde-pálido, cuya fórmula de constitución coincide sensiblemente con

$$\left[Cr \begin{matrix} Cl \\ (H_2O)_5 \end{matrix} \right] Cl_2 + H_2O$$

pues el NO_3 Ag, sólo precipita los dos tercios del cloro total en sus soluciones recientemente preparadas; asimismo, conforme con lo supuesto por Bjerrum, su conductividad es sensiblemente igual al promedio de la de los cloruros verde y violeta. Pero sus soluciones son sumamente inestables, y se transforman rápidamente en cloruro verde-esmeralda, de modo que la cantidad de cloro precipitable en ellas disminuye gradualmente con el tiempo.

Finalmente, antes de terminar este breve resumen sobre la químico-física de los cloruros de cromihidrinas, debemos hacer notar la influencia preponderante que la hidrolisis de sus soluciones acuosas ejerce sobre su transformación recíproca.

Es indudable, después de las investigaciones de Bjerrum, que las soluciones de uno cualquiera de los dos cloruros crómicos que llevan algún tiempo de preparadas, por ser dicroicas, contienen en proporción variable (dependiente de la naturaleza de la sal con que se preparó la salución primitiva, así como del tiempo transcurrido desde sú preparación) los tres cloruros de que hemos hablado (1); así, las soluciones concentradas de sal verde son más estables que las diluídas, las cuales evolucionan (tanto más rápidamente, cuanto menor es su riqueza en sal) transformándose en poco tiempo en dicroicas, y, por fin, violetas completamente; en cambio las soluciones diluídas de la sal gris, que son las más estables, por la acción del calor o del ácido clorhídrico, sufren la transformación inversa y pasan a sal verde, aunque después de enfriadas retrogradan lentamente a dicroicas.

Como dijimos, este ciclo de transformaciones se explica actualmente por la influencia de la hidrolisis en dichas soluciones; en efecto la aparición de ClH libre en las del cloruro verde, puede interpretarse como sigue, por intervención del disolvente agua;

$$\left[\mathrm{Cr}\begin{matrix}\mathrm{Cl_2}\\ \\ \mathrm{(H_2O)_4}\end{matrix}\right]\mathrm{Cl} \rightleftarrows \left[\mathrm{Cr}\begin{matrix}\mathrm{OH}\\ \mathrm{Cl_2}\\ \mathrm{(H_2O)_3}\end{matrix}\right] + \mathrm{ClH},$$

esta cromi-hidroxi-dicloro-trihidrina resultante, aunque no electrolito, se ioniza algo en solución (como sucede con los compuestos análogos),

(1) El equilibrio se establece muy lentamente a la temperatura ordinaria; según el citado autor danés, a los 25°, una solución 1,06 N sea de cloruro verde o gris-azul, no alcanza su composición estable sino a los 80 días de preparada, conteniendo entonces

85,4 % de $[\mathrm{Cr(H_2O)_6}]\mathrm{Cl_3}$; 1,2 % de $\left[\mathrm{Cr}\begin{matrix}\mathrm{Cl}\\ \\ \mathrm{(H_2O)_5}\end{matrix}\right]\mathrm{Cl_2}$; 13,4 % de $\left[\mathrm{Cr}\begin{matrix}\mathrm{Cl_2}\\ \\ \mathrm{(H_2O)_4}\end{matrix}\right]\mathrm{Cl}$.

y tendremos

$$\left[Cr \begin{matrix} OH \\ Cl_2 \\ (H_2O)_3 \end{matrix}\right] + H_2O \rightleftarrows \left[Cr \begin{matrix} OH \\ Cl \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right] Cl;$$

a su vez, este nuevo cloruro de hidrina hipotético, en presencia del HCl resultante de la hidrolisis del cloruro verde, debe transformarse en la sal de Bjerrum por el exceso de iones H, de modo que

$$\left[Cr \begin{matrix} OH \\ Cl \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right] Cl + ClH \rightleftarrows \left[Cr \begin{matrix} Cl \\ \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right] Cl_2;$$

pero, al mismo tiempo, el cloruro hipotético anterior debe hidrolizarse, según la reacción

$$\left[Cr \begin{matrix} OH \\ Cl \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right] Cl + H_2O \rightleftarrows \left[Cr \begin{matrix} OH \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right] Cl_2,$$

y como el líquido es ácido, tenemos finalmente

$$\left[Cr \begin{matrix} OH \\ \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right] Cl_2 + ClH \rightleftarrows [Cr(H_2O)_6]Cl_3,$$

o sea el cloruro violeta.

Esta serie de ecuaciones explica, además de la existencia simultánea de los tres cloruros en solución, su transformación recíproca, pues por un mecanismo análogo al anterior, se explica la de la sal violeta en verde por el aumento de temperatura de la solución o adición de una base.

Según veremos más adelante, la presencia de las sales básicas intermedias que acabamos de exponer, la pone de manifiesto el descenso de la constante magnética de las soluciones estudiadas por nosotros, de modo que el papel de aquéllas en la transformación antedicha, es la de verdaderos catalizadores positivos, que favorecen la marcha de la hidrolisis; Bjerrum por el método electrométrico (pilas de concentración) y Weinland y Koch (1) por el de la adición de ciertas sales de plata como reactivos, han estudiado detenidamente las condiciones de dicha transformación y el valor de las constantes de la misma.

---

(1) Weinland y Koch, *Zeit. anorg. Chem.*, **39**, 296, 1904.

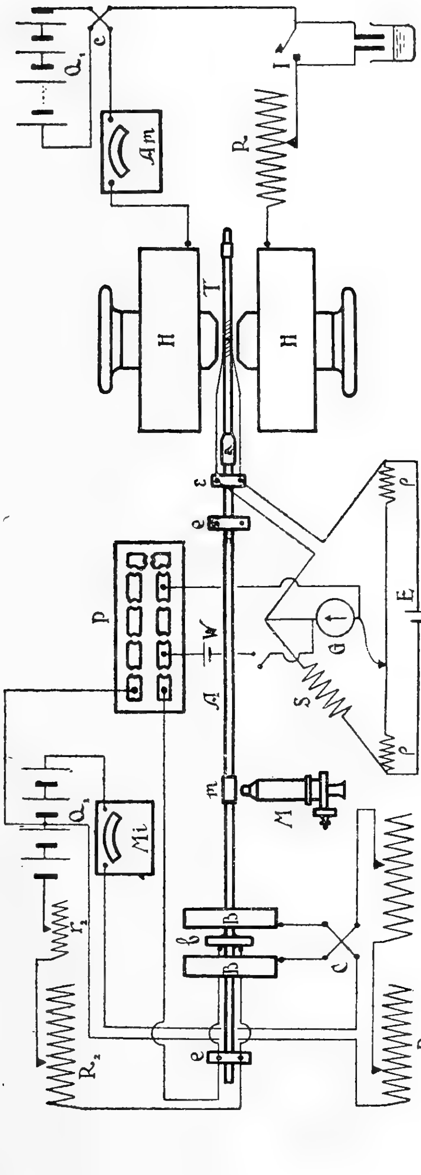


Fig. 1.ª

III

Instalaciones utilizadas en el presente trabajo.—Su funcionamiento y teoría.

Nuestras medidas de susceptibilidad que más adelante detallamos, han sido efectuadas en las instalaciones que posee el «Laboratorio de Investigaciones Físicas», puestas amablemente a nuestra disposición por su digno director don Blas Cabrera, quien nos instruyó en el manejo de las mismas, determinación de sus constantes, etc.; por todo lo cual debemos hacer constar el más profundo agradecimiento a nuestro querido maestro.

El estudio completo de ambas instalaciones puede verse en las comunicaciones de dicho investigador a la «Sociedad Española de Física y Química», y en los «Trabajos del Laboratorio de Investigaciones Físicas». Nosotros, en lo que sigue, damos una breve descripción de cada una de ellas, y que basadas en el método llamado del *cilindro* y en el *del tubo de Quincke,* sirven respectivamente para el estudio de las soluciones concentradas y diluídas.

MÉTODO DEL CILINDRO

Descripción y funcionamiento de la instalación.—El fundamento de este método, debido a Gouy, y perfeccionado por Weiss y Föex y Cabrera, es la acción de un campo magnético sobre un cilindro de la substancia estudiada, una de cuyas extremidades está dentro de un campo sensiblemente uniforme, mientras la otra se encuentra en un campo prácticamente nulo.

Tratándose del estudio de una solución salina, en la instalación que vamos a describir (véase en la fig. 1.ª el esquema de la misma en proyección horizontal; los circuitos eléctricos están indicados con trazo fino), aquélla se introduce en un tubo de vidrio, T, que mide 24 cms. de largo y 6 mm. de diámetro interior, y está dividido en dos porciones iguales por un tabique impermeable, normal al eje. Uno de sus extremos está provisto de una armadura, *a*, de cobre, con rosca, y la mitad del tubo correspondiente a este extremo se llena con agua de conductividades, mientras la otra mitad recibe la solución que debe estudiarse, cerrándose su extremo con un tubito de goma, obturado, a su vez, por una varilla de vidrio.

En la región central del tubo, y ocupando una longitud de 3 cms. a cada lado del tabique, está arrollado exteriormente a aquél y fijo al mismo por una capa de goma-laca, un alambre de plata, cuya resistencia aproximada es de 1,5 ohms., terminando sus extremos en dos alambres de cobre, de 0,5 mm. de diámetro, soldados al de plata, y que inmergen en dos pocillos llenos de mercurio, abiertos en una pieza de ebonita, ε, fija cerca del extremo de un tubo, A, de aluminio, de 1 metro de longitud y 8 mm. de diámetro exterior, en cuyo extremo se atornilla el tubo de vidrio por la citada armadura de cobre, constituyendo este último una prolongación del de aluminio.

Próximas a ambos extremos de este último, y solidarias con él, existen dos piezas triangulares de ebonita, *e*, cada una de las cuales tiene sujetos los extremos de un par de hilos finísimos de cobre de 1 metro de longitud, los cuales divergen, a partir de su unión con dichas piezas, formando cada par un ángulo agudo, cuyo vértice está en aquéllas, y cuyo plano es perpendicular al eje del tubo de aluminio; los extremos opuestos de dichos alambres están sujetos a unos pequeños rectángulos metálicos, movibles por medio de tornillos situados en los vértices de un bastidor rectangular de madera (que no hemos dibujado para no complicar el esquema), sólidamente clavado en la pared maestra del Laboratorio, y a más de tres metros sobre el suelo; el conjunto constituye una doble suspensión pendular del tubo de aluminio. A lo largo de este último, y fijos en él, se encuentran: 1.° Una escala micrométrica, *m*, grabada sobre vidrio y dividida en décimas de milímetro, la cual se observa con un microscopio micrométrico, M (con retículo móvil), con el cual los errores de puntería sobre una división de la escala no llegan nunca a 0,001 de mm.; y 2.° Una bobina discoidal de aluminio, *b*, coaxial con el tubo, cuyo arrollamiento tiene sus extremos unidos con el par de hilos de suspensión más próximos a aquélla, y por los cuales recibe la corriente; esta bobina tiene adheridas en sus dos caras sendas láminas de mica, que sumergidas en un baño de aceite de petróleo, sirven como amortiguador de los movimientos del tubo de aluminio.

Para evitar la acción perturbadora de las corrientes de aire, este último va encerrado en una caja cilíndrica de latón (no visible en el esquema), con los agujeros correspondientes, para el paso de los hilos de suspensión y objetivo del microscopio micrométrico; dentro de esta caja, y fijas a sus paredes, hay dos bobinas de madera, B, semejantes a la de aluminio, dispuestas paralelamente una a cada lado a poca distancia de aquélla, y su parte central es hueca para dar paso libre al tubo A; de lo dicho se deduce que el conjunto de las tres bobinas constituye un electrodinamómetro cuya bobina móvil es la solidaria con el tubo de aluminio.

El tabique central del tubo-laboratorio que al principio hemos descrito, corresponde sensiblemente al centro del campo uniforme creado por las piezas polares plano-paralelas (2 cms. de diámetro) de un electroimán, H, del tipo Weiss, con refrigeración por corriente de agua; en el entrehierro de este último (10 mm. aproximadamente), y concéntricamente con el tubo-laboratorio, hay otro de cobre, de un diámetro un poco mayor que aquél (a fin de permitir su completa libertad de movimientos), soldado en el interior de una caja prismática de latón (no visible en el esquema), sostenida por las piezas polares del electroimán, y por la cual circula una corriente de agua procedente de un depósito de nivel constante (situado a 3 metros sobre el electroimán), cuya temperatura se regula mediante un serpentín que contiene alambre de niquelina, por el que circula una corriente eléctrica de calefacción.

La temperatura *media* de la parte central tubo-laboratorio, y, por consiguiente, de la solución estudiada, la indica el hilo de plata arrollado sobre aquél, pues se utiliza como termómetro de resistencia eléctrica, a cuyo efecto constituye un brazo de un puente de Wheatstone, completado con otra resistencia, S, del mismo valor que dicho hilo, y un alambre de manganina, sobre el que se desliza el contacto móvil, en cuyas extremidades se han añadido dos resistencias iguales ρ, convenientemente calculadas, para que pueda apreciarse con toda exactitud la centésima de grado; se utiliza la f. e. m. de un acumulador Tudor, E, y el galvanómetro G es del tipo Broca. La conexión del puente con el hilo termométrico se realiza en el mismo momento de hacer la lectura, levantando, por medio de una cremallera sostenida por un soporte, una pieza de ebonita, con dos pocillos llenos de mercurio, en los que vienen a introducirse los extremos del hilo termométrico; de este modo, durante las medidas, los movimientos del tubo de aluminio no son impedidos por ninguna unión permanente.

La corriente que circula por la bobina móvil del electrodinamómetro procede de la mitad de una batería de acumuladores Q_2, y llega a ella, según antes dijimos, por el par de hilos de suspensión más próximo a la misma; en su circuito están dispuestos en serie una caja de resistencias P, de Otto Wolff, un reostato de variación continua rápida R_2, y otro de variación lenta r_2, y cuatro resistencias de 500 ohms cada una (que no hemos dibujado en el esquema), de las cuales pueden introducirse las convenientes en el circuito, por medio de un conmutador.

De la caja de resistencias se deriva un segundo circuito, que contiene un interruptor adecuado, por medio del cual puede introducirse en este circuito el galvanómetro Broca utilizado en el puente termométrico, y además un elemento-patrón W, de Weston, dispuesto de modo que la f. e. m. de sus terminales sea opuesta a la caída de potencial en los extremos de la resistencia de la caja, sobre la cual se deriva; de este modo, y por medio de los reostatos existentes en el circuito principal, se consigue que en el derivado no circule corriente, lo que se acusa por la inmovilidad de la imagen en la escala del galvanómetro (método del cero); es evidente que entonces la intensidad i' de corriente que pasa por la bobina móvil vale $i' = \frac{1{,}018}{r}$, siendo r la resistencia (o suma de resistencias) de la caja, introducidas en el circuito.

El circuito de las bobinas fijas del electrodinamómetro recibe la corriente de la otra mitad de la batería de acumuladores Q_2, y su intensidad se regula por medio de dos reostatos, R_1 y r_1, de variación continua (rápida y lenta, respectivamente), en serie con un conmutador C para invertir el sentido de aquélla, y con una miliamperimetro de precisión Mi, de Siemens y Halske, en el que se aprecia perfectamente la décima de miliamperio.

Finalmente, por el circuito del electroimán, alimentado también por su correspondiente batería de acumuladores Q_1, circula una corriente que se mantiene constante a 17 amperios (pues las medidas se efectuaron igualmente a campo constante), por medio de un reostato R, de variación continua; el sentido de aquélla puede invertirse por un conmutador apropiado, c, y su valor se determina por medio del amperímetro de precisión Am, de Siemens y Halske, cerrándose el circuito con un interruptor de palanca I para cortar intensidades relativamente grandes, y que para disminuir la chispa de ruptura tiene derivado entre los puntos en que ésta se produce, dos conductores que terminan en sendas placas de cobre, las cuales se sumergen en el momento de abrir el circuito en un baño de SO_4Cu, con lo que casi toda la extracorriente pasa por dicho baño, shuntando la chispa, que así pierde su intensidad.

El amperímetro del electroimán, y el miliamperímetro antes descrito, están dispuestos de modo que pueden leerse sucesivamente, mediante un anteojo giratorio alrededor de su soporte, y que no hemos dibujado para no complicar el esquema; de esta suerte, a más de conseguir una gran comodidad para las lecturas, se evitan por completo los errores de paralaje, y dado el aumento del anteojo, es mucho mayor la precisión en las lecturas. Las que efectuamos en el miliamperímetro nunca fueron muy inferiores a la división 100 de su escala (lo cual es siempre posible haciendo variar la corriente en el circuito de la bobina móvil del electrodinamómetro), pues así se tiene la seguridad en las lecturas dentro del 1 por 1.000, que es el error admisible en la medida de la acción que el campo ejerce sobre el tubo-laboratorio.

El método operatorio con esta instalación es como sigue: llena la mitad correspondiente del tubo-laboratorio con la solución que debe estudiarse, después de asegurarnos de la completa libertad de movimientos del sistema móvil, y conseguida su inmovilidad absoluta, se refiere una división dada de la escala micrométrica m del tubo de aluminio, a la cruz filar del microscopio micrométrico; entonces se cierran *simultáneamente* el circuito del electroimán y el de las bobinas fijas del electrodinamómetro, con lo que la acción de este último contrarresta la ejercida por el campo magnético sobre la substancia estudiada, a cuyo fin se da el valor conveniente a la corriente i de las bobinas fijas por medio de los reostatos existentes en el circuito de aquéllas; la igualdad de ambas acciones, de sentido contrario, se acusa por la idéntica posición del micrómetro de referencia, antes y durante el paso de corriente por el electroimán y las bobinas fijas.

Conseguido dicho equilibrio *simultáneamente* con la constancia del campo (para lo cual conservábamos constante la corriente de excitación del electroimán), se abría el circuito de este último, y anotábamos la indicación del miliamperímetro, abriendo seguidamente su circuito.

Después invertíamos el sentido del campo (por medio del conmutador del electroimán), y repetíamos las mismas operaciones que acabamos de indicar; además, después de cada par de lecturas, se comprobó la constancia de la corriente en el circuito de la bobina móvil, según indicamos antes, y se anotaba la posición del contacto móvil del puente termométrico, para deducir el valor de la temperatura por medio de una tabla apropiada de equivalencias. Por fin, para valor de i, hemos tomado la media de diez observaciones efectuadas invirtiendo alternativamente el campo, según acabamos de indicar; multiplicando este promedio por i', se obtiene el producto $(ii')_s$, que corregido de la acción del campo sobre el tubo-laboratorio vacío, interviene en el cálculo de la susceptibilidad de la solución estudiada, según veremos más adelante en la teoría de la instalación.

Inmediatamente después de efectuada una serie de diez observaciones, se desatornilla el tubo-laboratorio del de aluminio y se sustituye la solución estudiada por una solución-patrón (después de bien lavado el tubo con agua de conductividades, a fin de evitar toda contaminación), cuya susceptibilidad está perfectamente determinada, y con ella se efectúa una serie de diez observaciones, análogamente al caso anterior, con lo cual se obtiene el producto $(ii')_p$ para la solución-patrón.

El valor de la acción del campo sobre el tubo vacío es proporcional al producto $i_0 i'_0$ de las corrientes en el electrodinamómetro, necesarias para compensar la acción que el campo ejerce sobre el sistema móvil, con las dos mitades del tubo-laboratorio llenas de agua de conductividades; para la determinación de dicha constante efectuamos series de observaciones de la desviación sufrida por el sistema móvil, bajo la acción: 1.°, del mismo campo en que se efectuaron las medidas, y 2.°, del electrodinamómetro, por cuyas bobinas se deja circular la corriente necesaria para compensar la atracción debida al campo; dichas desviaciones se aprecian con el tambor graduado del retículo del microscopio micrométrico. Conociendo, pues, el valor de $(ii')_e$ para la desviación debida al electrodinamómetro y el valor de esta última, se deduce por una sencilla proporción el de $(ii')_c$ que correspondería a la desviación por el campo; el valor de $i_0 i'_0$, que determinamos en el transcurso de nuestras medidas, era en 9 de junio de 1917:

$$i_0 i'_0 = 239 \,.\, 10^{-6},$$

y sólo es necesario determinarlo cada tres o cuatro meses, pues sus variaciones con el tiempo son muy pequeñas.

Teoría de la instalación.—Es sabido que si en un campo magnético uniforme H, se coloca un cilindro de sección ds, constituído por dos substancias de susceptibilidad $\varkappa$ y $\varkappa'$, respectivamente, en la superficie de separación de ambas se ejerce una fuerza definida por:

$$F = \frac{1}{2}(\varkappa - \varkappa')H^2 ds.$$

Según se ve, esta fuerza es proporcional a ds, de modo que para áreas finitas, si la superficie es plana o casi plana, la fuerza será finita, y, por consiguiente, medible.

Este es el caso del tubo-laboratorio en el método que nos ocupa; de modo que si llamamos $\varkappa_s$ y $\varkappa_{aq}$ las susceptibilidades del cuerpo estudiado y del agua, i e i' las corrientes que circulan por las bobinas fijas y la móvil del electrodinamómetro, respectivamente, K la constante de este último, s la sección del tubo, y k la constante procedente de la acción del campo sobre el tubo vacío, la ecuación de equilibrio será:

$$\frac{1}{2}(\varkappa_s - \varkappa_{aq})\,H^2\,s + k = K\,(ii')_s,$$

de la cual puede deducirse $\varkappa_s$, conociendo los restantes valores que intervienen en ella; pero si en las mismas condiciones de antes tenemos, en vez de la solución estudiada, una solución-patrón, la ecuación de equilibrio será análogamente:

$$\frac{1}{2}(\varkappa_p - \varkappa_{aq})\,H^2 s + k = K\,(ii')_p.$$

Ahora bien: el valor de la constante k, debida a la acción del campo sobre el tubo vacío, es proporcional, según antes hemos dicho, al producto $i_0 i'_0$ de las corrientes que circulan por las bobinas del electrodinamómetro cuando el tubo-laboratorio está lleno de agua de conductividades en sus dos ramas, pues en estas condiciones la ecuación de equilibrio (teniendo en cuenta el sentido de la desviación) es:

$$k = -K i_0 i'_0;$$

sustituyendo este valor en las dos ecuaciones anteriores, y dividiéndolas ordenadamente, se obtiene:

$$\frac{\varkappa_s - \varkappa_{aq}}{\varkappa_p - \varkappa_{aq}} = \frac{(ii')_s + i_0 i'_0}{(ii')_p + i_0 i'_0},$$

o sea

$$\varkappa_s = (\varkappa_p - \varkappa_{aq})\,\frac{(II')_s}{(II')_p} + \varkappa_{aq},$$

ecuación que permite calcular la susceptibilidad de la solución en función de magnitudes todas conocidas, pues $(II')_s$ y $(II')_p$ son datos experimentales y $\varkappa_p - \varkappa_{aq}$ depende exclusivamente de la solución-patrón.

Como tal, en nuestras medidas hemos utilizado dos soluciones de $SO_4\,Mn$, con una concentración de 0,1891 y 0,2124 gramos de sal por gramo de solución, y para las cuales se tiene respectivamente:

$$\varkappa_p - \varkappa_{aq} = 240{,}5[1 - 0{,}00396(t-20)]\,10^{-7},$$
$$\varkappa_p - \varkappa_{aq} = 258{,}2[1 - 0{,}00396(t-20)]\,10^{-7},$$

en las que t es la temperatura a que se efectuó la medida.

Estas ecuaciones, si bien pueden determinarse experimentalmente estudiando la solución-patrón en la instalación del tubo de Quincke, que más adelante describiremos, resulta más rápido deducirlas por el cálculo; a continuación exponemos el que conduce a la última ecuación.

Según se demuestra en el ya citado trabajo de Cabrera, Moles y Marquina, las soluciones de las sales manganosas cumplen con la ley de Wiedemann, luego la susceptibilidad específica de dicha solución a 20° vale:

$$\varkappa_{20} = 0{,}2124\,.\,981{,}1\,.\,10^{-7} + (1 - 0{,}2124)\,7{,}193\,.\,10^{-7},$$

siendo $981,1 \cdot 10^{-7}$ la susceptibilidad del SO_4Mn y $-7,193 \cdot 10^{-7}$ la del agua, según la ecuación de Piccard (1),

$$\varkappa_{aq} = -7,193[1 - 0_3, 12(t - 20)]\ 10^{-7};$$

y multiplicando χ_p por la densidad de la solución a 20°, obtendremos χ_p. Ahora bien: para que dicha solución pueda servir como líquido patrón, es preciso conocer la variación de su susceptibilidad con la temperatura, para lo cual, recordando que el coeficiente de esta última para aquélla es igual al de los gases perfectos, tendremos:

$$\chi_p = \chi_{20}[1 - 0,00366(t - 20)]\ 10^{-7}.$$

Asimismo, la densidad de dicha solución en función de la temperatura, obedece a la ecuación:

$$\rho = 1,2383\,[1 - 0,_33\,(t - 20)]$$

deducida por el método de Cauchy de los cuatro valores de aquella que hallamos experimentalmente a 12°, 16°, 20° y 24°, con un picnómetro de Sprengel-Ostwald de 20 c. c. próximamente; tendremos, pues, despreciando los términos de orden superior,

$$\varkappa_p = \chi_p \cdot \rho = \chi_{20}\,\rho_{20}[1 - 0,00366(t - 20)][1 - 0,00030\,(t - 20)]\,10^{-7} =$$
$$= 251,0[1 - 0,00396(t - 20)]\ 10^{-7},$$

y, finalmente, restando de esta ecuación, el producto de $\varkappa_{aq}$ por la densidad del agua a 20° (con lo que se obtiene $\varkappa_{aq}$) resulta el valor de $\varkappa_p - \varkappa_{aq}$ que dimos al principio de este desarrollo.

Conocido ya el valor de $\varkappa_s$, y dividiéndolo por la densidad de la solución estudiada a la temperatura a que se efectuó la medida magnética, se obtiene χ_s; de ésta se deduce la susceptibilidad específica χ_c de la sal, corrigiendo la de la solución del diamagnetismo del agua, a cuyo efecto el valor de χ_c está dado por

$$\chi_c = \frac{1}{m}[\chi_s - (1 - m)\chi_{aq}],$$

siendo m la riqueza de la solución expresada, como siempre, en gramos de sal por gramo de aquélla. Multiplicando χ_c por el peso molecular 158,6 del Cl_3Cr, obtendremos la susceptibilidad molecular $\chi^{(M)}$, de la cual se deduce la del átomo de cromo, por la relación ya indicada,

$$\chi_{Cr} = \frac{1}{N}[\chi^{(M)} - A],$$

(1) A. Piccard., *Arch. des Sc. Phys. et Nat.*, **35**, 340, 458. 1913.

en la que N = 1 (número de átomos del metal que contiene la molécula de cloruro crómico) y $A = -3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}$ (pues $-20 \cdot 10^{-6}$ es la susceptibilidad del cloro); finalmente, según ya vimos, la constante de Curie del cromo $C_{Cr} = \chi_{Cr} \cdot T$, está ligada al momento magnético por la relación

$$M_0 = \sqrt{249{,}46 \cdot C_{Cr}} \cdot 10^3$$

del cual se deduce el número de magnetones del metal por la igualdad $n = 8{,}901\, M_0\, 10^{-4}$.

MÉTODO DE LA DESNIVELACIÓN

Descripción y funcionamiento de la instalación.—Este método fué ideado por Quincke, y sirve principalmente para el estudio de soluciones diluídas.

Supongamos un líquido de susceptibilidad χ y densidad ρ en un sistema de vasos comunicantes, una de cuyas ramas se sitúa en un campo magnético intenso y uniforme, mientras que la otra está suficientemente alejada de éste, para que su acción sea prácticamente nula comparada con la primera; si la atmósfera gaseosa en contacto con el líquido tiene una susceptibilidad χ' y densidad ρ', por la excitación del campo, se originará un desnivel h definido por la ecuación

$$\frac{1}{2}(\chi - \chi')H^2 = h\, g\, (\rho - \rho'),$$

que expresa el equilibrio entre la acción debida al campo magnético y la presión hidrostática originada por el desnivel h en el campo gravitatorio terrestre, cuya intensidad es g; dicha acción está dirigida en el mismo sentido que g si el líquido es diamagnético, y en sentido contrario si es paramagnético.

Por medio de la ecuación anterior se comprende que se pueda determinar χ, midiendo con un microscopio micrométrico la variación de nivel al excitar el campo, tal como hicieron Quincke y otros investigadores; pero operando de este modo se tropieza con el grave inconveniente (sobre todo en desniveles un poco grandes) de que en las dos posiciones ocupadas por el menisco, seguramente no tienen el mismo valor, ni la constante capilar del tubo (aunque se haya hecho una cuidadosa selección del mismo), ni el campo magnético correspondientes a aquéllas, dado lo muy difícil que resulta prácticamente obtener campos magnéticos completamente uniformes.

A fin de evitar estas causas de error, y siguiendo el ejemplo de Olli-

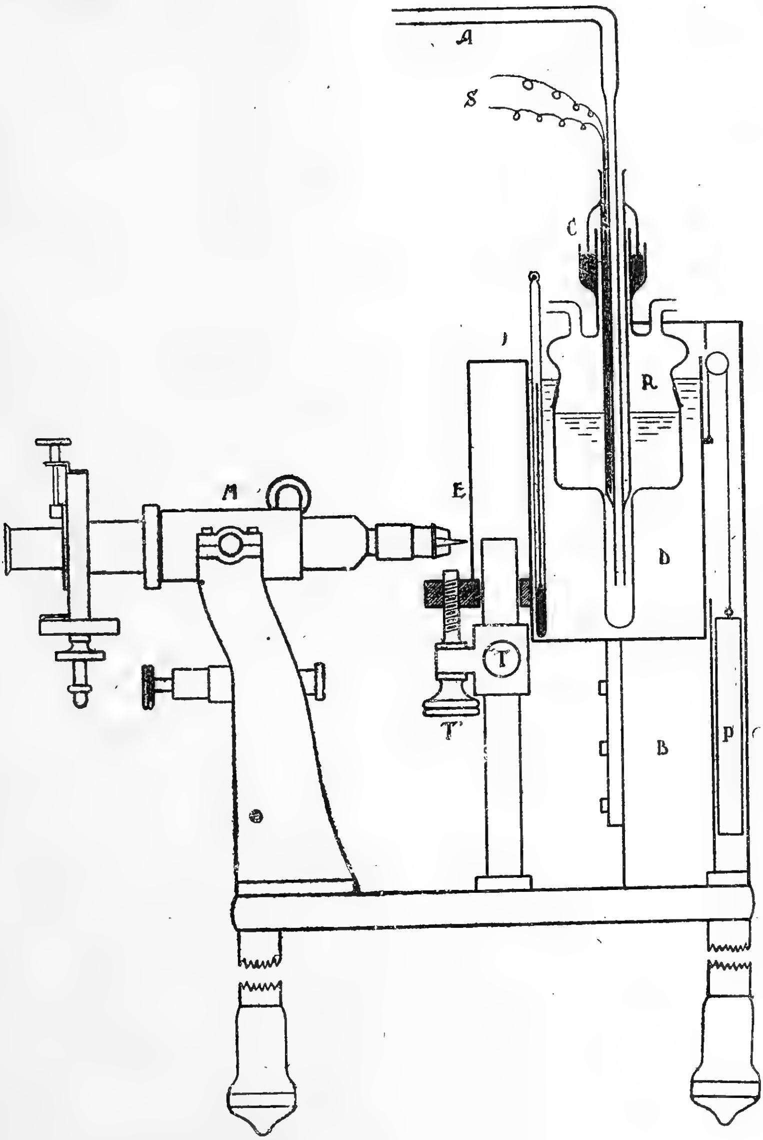


Fig. 2.ª

vier y Piccard, en la instalación que vamos a describir, en vez de determinar las variaciones de nivel en la rama del tubo-laboratorio, situada en el campo, se mantiene el menisco inmóvil, compensando el efecto magnético sobre este último por un corrimiento del recipiente de vidrio R (fig. 2.ª) (cuya forma especial permite trabajar con volúmenes relativamente pequeños del líquido estudiado), en el que está sumergido el extremo de la rama A del tubo-laboratorio alejada del campo, la cual atraviesa la tapa de dicho recipiente por el intermedio de un cierre de mercurio; de este modo, sin perturbar la libertad de movimientos de aquél, se puede establecer una corriente de hidrógeno sobre el líquido en cuestión (necesaria en los casos en que sea oxidable) por medio de las tubuluras de entrada y salida, soldadas a dicha tapa.

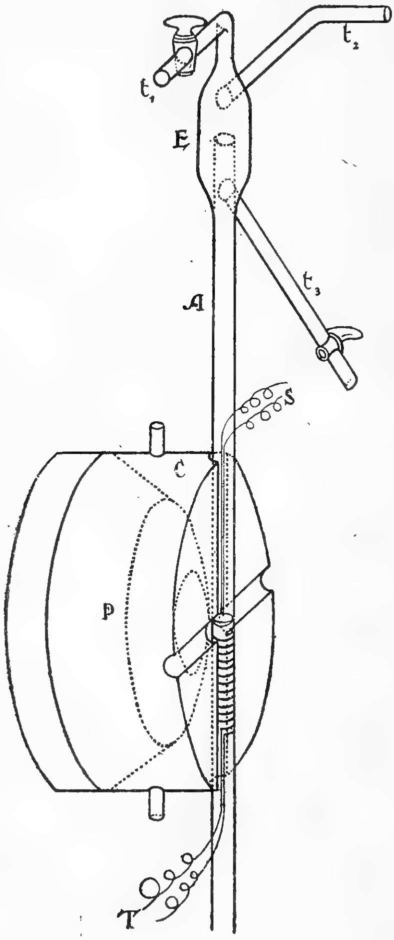


Fig. 3.ª

El recipiente R está sostenido dentro de un depósito cilíndrico D de bronce (equilibrado en cualquier posición con el contrapeso P de plomo), en cuya parte anterior tiene fija una escala E dividida en milímetros y grabada sobre acero, la cual se observa por medio del microscopio M, que aprecia la milésima de milímetro; además, por medio de los tornillos de presión T y de coincidencias T′ (cuando se trata de pequeños movimientos) se efectúan los corrimientos del depósito D en dirección vertical, y a lo largo de un fuerte bastidor semicilíndrico B, también de bronce, determinando el valor de aquéllos por medio del citado microscopio M; como puede verse en el dibujo, el conjunto del aparato descansa sobre tornillos de nivelación. El tubo A está doblado en U y tiene la otra rama situada verticalmente entre las piezas polares P (fig. 3.ª) (plano-circulares de 18 milímetros de diámetro) de un electroimán Weiss con refrigeración por corriente de agua; cada una de ellas sostiene, respectivamente, una caja cilíndrica C de cobre del mismo diámetro que el de las piezas polares (en la figura sólo se ha dibujado una caja en obsequio a la claridad), ajustando perfectamente entre sí por su base plana, a cuyo efecto están provistas de dos canales semicirculares que rodean al tubo en cuestión; perpendicularmente a éstos existen otros dos canales que limitan un espacio cilíndrico, por el que se observa el menisco del líquido, enrasándolo siempre con la cruz filar de un microscopio micrométrico, fijo al electroimán.

El extremo de la rama A sometida al campo termina en un ensanchamiento cilíndrico E al que están soldados; un tubo t_3 vertical descendente con llave, que sirva para vaciar el aparato del líquido que contenga; otro tubo horizontal t_1 con llave, que al aspirar por él se llena el tubo y el ensanchamiento terminal cuando convenga, y por fin otro tubo horizontal-ascendente t_2 que por medio de una llave de tres vías (no visible en el dibujo) permite la comunicación del interior del tubo A con la atmósfera o con el hidrógeno procedente de un aparato de producción continua, pues todas las medidas se efectuaron en una atmósfera de dicho gas, lo cual simplifica mucho los cálculos, pues así se evita la corrección debida al magnetismo del aire atmosférico.

Inmediatamente por debajo de la posición del menisco en el tubo-laboratorio, y arrollada en hélice por el exterior de este último, hay una delgada cinta de platino de unos 25 centímetros de longitud, cuyos extremos T están soldados a dos alambres de cobre, cuya resistencia total es la centésima parte de la de la cinta, y que sirven para establecer la conexión con un puente de Wheastone, análogo al descrito en la instalación del cilindro, por medio del cual se determinan las variaciones de resistencia de la cinta, y de ellas se deducen las de temperatura por un calibrado previo. Los brazos de proporción están constituídos por una cinta de platino-plata sobre el que frota el contacto móvil; la sección de la misma es de unos 0,3 mm² y tiene un metro de longitud, prolongándose sus extremos por dos resistencias aproximadamente iguales a diez veces las de la cinta; estas resistencias, así como todas las restantes que constituyen el puente, son de manganina, y todas están arrolladas sobre un mismo tubo de vidrio y sumergidas en un baño de aceite de petróleo; el galvanómetro es del tipo Broca, y las desviaciones de la imagen luminosa se leen sobre una escala situada a 1,50 m. de aquél y al lado mismo del electroimán; una tabla calculada de una vez para todas, da los valores de la temperatura del menisco (dentro de la centésima de grado) en función de las lecturas del puente.

La uniformidad en la temperatura del líquido, a lo largo del tubo-laboratorio, es condición indispensable para la exactitud de las medidas, pues en caso de no cumplirse ésta, el desnivel magnético resultaría falseado por el térmico, debido a diferencias de temperatura entre ambas ramas del tubo-laboratorio; con el fin de evitarlas, además de estar envuelto este último por una capa de hilo de amianto, circulan por las cajas C, así como por el depósito D, sendas corrientes de agua procedentes de un mismo termóstato; un par termoeléctrico constatan-cobre S tiene una de sus soldaduras en la región del tubo próxima al menisco, mientras que la otra está fija en el extremo de aquél, introducido en el recipiente R; por medio de un conmutador adecuado se introduce el galvanómetro del puente en el circuito de dicho par, a fin de medir su f. e. m., y de la desviación leída se deduce la diferencia de temperaturas en sus soldaduras, que nunca debe llegar a 1°, lo que se consigue regulando dichas corrientes de agua.

Todas las medidas las efectuamos a campo constante, excitando el electroimán con una corriente de 20 amperios, que se mantiene constante por medio de un reostato de variación continua, y se mide con un voltímetro de precisión de Weston, derivado sobre una resistencia conveniente de cinta de manganina, sumergida en un baño de petróleo; las lecturas de dicho voltímetro se efectuaron por medio de un anteojo, próximo al microscopio micrométrico M, con lo que, además de evitarse los errores de paralaje, se pueden efectuar las lecturas casi simultáneamente con el enrase del menisco, condición indispensable en este método.

Lleno con la solución que va a estudiarse el recipiente R, se procede a expulsar el aire existente sobre el menisco, a cuyo efecto, después de abrir la llave del aparato de hidrógeno, se dirige la corriente de este gas al ensanchamiento cilíndrico E por medío de la llave de tres vías soldada al tubo t_2; aspirando varias veces por t_1 se llena dicho ensanchamiento con el líquido contenido en el tubo-laboratorio, el cual vuelve a descender en seguida por la presión del hidrógeno, de modo que, repitiendo esta operación, se consigue crear sobre el menisco una atmósfera de dicho gas *exenta de aire;* por fin se dispone la llave de tres vías, de modo que la corriente del gas se bifurque por una parte hacia el menisco y por otra hacia la atmósfera, con lo que se evitan las sobrepresiones en el interior del tubo, que falsearían las medidas; además, con estos repetidos lavados se mojan uniformemente las paredes del tubo, pues de otro modo, por desecación de éste, las variaciones del menisco son muy irregulares, debidas probablemente al depósito sobre las paredes interiores del tubo, del vidrio disuelto por la solución, y en estas condiciones es muy difícil obtener lecturas concordantes.

El método operatorio con esta instalación es el siguiente: a fin de conseguir la tangencia del menisco con el retículo del microscopio de referencia, se mueve a mano el depósito de latón D, y con el tornillo de coincidencias T′ se perfecciona el enrase y se anota la lectura del microscopio M; después se efectúa la lectura del puente que da la temperatura del menisco, y se observa la diferencia de temperaturas entre este último y el recipiente R, mediante la disposición del par termoeléctrico ya descrito; por fin se cierra el circuito del electroimán, moviendo convenientemente el depósito D, para que el menisco permanezca enrasado lo mismo que antes de excitar el campo, y se efectúan *simultáneamente* las lecturas en la escala E del depósito de bronce y en la del voltímetro para asegurarnos de la constancia del campo; después se efectúan estas mismas operaciones, invirtiendo el sentido del campo por medio de un conmutador existente en el circuito del electroimán.

La media de diez observaciones efectuadas según hemos indicado, se toma como valor del corrimiento del depósito y de la temperatura a que se efectuó la medición; inmediatamente se vacía el depósito R por medio del tubo de desagüe t_3, y después de lavar aquél varias veces con agua de conductividades se llena una última vez con la misma, y con ella repetimos las mismas operaciones que en el caso anterior, tomando asimismo como valor definitivo del corrimiento del depósito y de la temperatura el promedio de una serie de diez lecturas.

Teoría de la instalación.—Hemos visto ya que su ecuación fundamental es:

$$\frac{1}{2}(\varkappa - \varkappa')\, H^2\, ds = hg(\rho - \rho');$$

pero como todas las medidas se efectúan en una atmósfera de hidrógeno, $\varkappa'$ y ρ' son prácticamente despreciables comparados con $\varkappa$ y ρ; luego

$$\frac{1}{2}\,\varkappa H^2\, ds = h\, g\, \rho$$

Ahora bien: como en realidad no medimos el desnivel h en el tubo-laboratorio, sino el corrimiento Δ del depósito de bronce, sustituiremos h por su valor en función de este último, o sea

$$h = \frac{S + s}{S}\,\Delta$$

siendo S el área de la superficie libre del líquido en el recipiente R y s la sección del tubo-laboratorio sometido a la acción del campo; sustituyendo y despejando tendremos para la solución estudiada

$$\Delta_s = \frac{2S}{(S+s)g} H^2 \chi_s$$

de cuya ecuación podría deducirse la susceptibilidad específica, conociendo los restantes valores que entran en ella; pero como, según dijimos, inmediatamente después de la medida de dicha solución se efectúa (a la misma temperatura que ésta aproximadamente) la del agua como líquido-patrón, tendremos para ella análogamente:

$$\Delta_{aq} = \frac{2S}{(S+s)\,g} H^2 \chi_{aq}$$

por división ordenada de ambas ecuaciones y despejando χ_s, se obtiene

$$\chi_s = \chi_{aq} \frac{\Delta}{\Delta_{aq}}$$

relación en la que todo es conocido, pues χ_{aq} está dada por la ecuación de Piccard ya citada; no debe olvidarse, sin embargo, que aquella relación es válida solamente para el caso en que sean iguales o difieran muy poco las temperaturas a las que se efectuó la medida de la solución estudiada y la del agua; en caso contrario, dicho cociente de desniveles debe multiplicarse por el de los binomios de dilatación, del líquido estudiado y del agua.

Por consiguiente, si la solución que se estudia tiene una riqueza de m gramos de sal por gramo de solución, según la ley de Wiedemann, se verificará

$$\chi_s = m\,\chi_c + (1 - m)\,\chi_{aq}$$

como casi todas nuestras medidas las efectuamos alrededor de los 20°, y teniendo en cuenta la pequeñez del coeficiente de temperatura de la ecuación de Piccard, hemos adoptado

$$\chi_{aq} = -7{,}193 \,.\, 10^{-7}$$

de modo que por eliminación de χ_s entre las dos últimas ecuaciones, resulta después de despejar

$$\chi_c = -\frac{7{,}193}{m}\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{aq}} + m - 1\right) 10^{-7}$$

para el valor de la susceptibilidad específica de la sal estudiada; de esta última se deducen la susceptibilidad molecular y la atómica, luego la constante de Curie y el momento magnético, y por fin el número de magnetones del cromo por un cálculo exactamente igual al que detallamos en la teoría del método del cilindro, y por eso no insistimos sobre ello.

IV

Obtención de las sales estudiadas.—Preparación y análisis de sus soluciones.

Debido a la gran inestabilidad de la sal de Bjerrum y la relativa dificultad de su preparación, nuestras determinaciones se refieren solamente a los cloruros de cromihidrinas verde y violeta.

La sal verde que utilizamos fué preparada en gran cantidad por el profesor de la Universidad Central L. Gómez, siguiendo el método de Recoura (1) y Bjerrum (2), o sea reduciendo en un matraz, con refrigerante de reflujo, la cantidad correspondiente de ácido crómico por clorhídrico concentrado; después de dos a tres horas de ebullición cesa el desprendimiento de cloro, y la reacción se da por terminada.

El líquido, que presentaba una coloración verde intensa, se solidificó por enfriamiento, y la masa así obtenida fué disuelta en la menor cantidad posible de agua fría; la solución resultante, enérgicamente enfriada, fué sometida a una rápida corriente de ClH gaseoso, con lo que precipitó la mayor parte del cloruro verde en estado cristalino, y el que seguía disuelto se recuperó tratando el líquido resultante con un volumen igual de éter etílico y corriente gaseosa de ClH; al cabo de pocos días precipitaba totalmente el resto de la sal.

Esta fué lavada, en primer lugar, con una mezcla en partes iguales de éter y ácido clorhídrico; luego con acetona clorhídrica, y, por fin, con éter y acetona puros; se obtuvieron así grandes masas de color verde-obscuro, con aspecto cristalino finamente dividido, y que, por ser delicuescentes, se guardaron en un desecador con $SO_4 H_2$.

El cloruro violeta lo preparó nuestro distinguido amigo D. Emilio Gimeno Gil, catedrático de la Universidad de Oviedo, siguiendo dos procedimientos distintos: el primero de ellos consiste en disolver por pe-

(1) A. Recoura: *Ann. Phys. et Chim.*, 10, 12, 1887.
(2) N. Bjerrum: *Zeit.*, *Phys. chem.*, 59, 339, 1907.

queñas porciones el hidróxido crómico bien lavado (procedente de la precipitación por la sosa de diferentes sales crómicas) en una solución saturada de ClH, cuya temperatura se mantenía por bajo de 0°, y por la que además se hacía pasar una corriente gaseosa del mismo ácido, a fin de favorecer la disolución del hidróxido y la precipitación consiguiente del cloruro violeta; éste se depositaba en forma de precipitado finamente cristalino, de color gris-azulado, muy denso y adherente a las paredes del vaso de precipitados en donde se efectuaba la reacción. La sal así obtenida fué separada por decantación del líquido, en cuyo seno se había formado, el cual presentaba un ligero color verdoso, pues se formaba siempre algo de sal verde simultáneamente con el cloruro gris-azulado; éste se redisolvió en agua enfriada a 0°, por la cual se hacía pasar otra vez corriente gaseosa de ácido clorhídrico, con las mismas precauciones de antes, a fin de evitar un aumento de temperatura; decantado el líquido sobrante, después de la reprecipitación del cloruro gris, se trató éste por acetona clorhídrica, y, finalmente, se lavó varias veces con acetona pura encima de un filtro de porcelana, a fin de arrastrar al cloruro verde que pudiese contener la sal gris, la cual, según dijimos, es insoluble en dicho líquido; finalmente, esta última se desecó entre platos porosos, y se guardaba en un desecador con $SO_4 H_2$, en el cual se hacía el vacío.

El segundo procedimiento, debido a G. O. Higley (1), es de un rendimiento mucho mayor que el preconizado por Recoura (2), y consiste en tratar una solución clorhídrica al 25 por 100 de alumbre de cromo (enfriada por bajo de 10°) por una corriente gaseosa de ClH, con lo cual se precipita el cloruro gris; pero como este último retiene algo de sal potásica, de la cual es muy difícil separarle, el catedrático de la Universidad Central, D. Angel del Campo, ideó la sustitución del alumbre de cromo por el sulfato crómico violeta, de cuya sal se disponía en gran cantidad; el depósito cristalino, procedente de la primera precipitación, se redisolvió en agua y volvió a precipitarse en frío por corriente clorhídrica, repitiendo el mismo tratamiento algunas veces más, hasta tener la seguridad de la ausencia del sulfatión.

Las soluciones estudiadas por nosotros fueron preparadas con estas sales, pesando las proporciones convenientes de sal y agua de conductividades para obtener soluciones de riqueza próximamente igual a la deseada, y enfriando el agua a 0° antes de disolver el cloruro gris-azul, a fin de evitar un aumento de temperatura que favoreciese su transformación en sal

(1) G. O. Higley: *Jour. Amer. Chem. Soc.*, 26, 613, 1904.
(2) A. Recoura: loc. cit.

verde; las soluciones concentradas de esta última presentaban un intenso color verde-obscuro por refracción, pero las diluídas, aunque verdes por reflexión, tenían un color violado-rojizo al observar la luz de una lámpara eléctrica a su través.

El análisis de dichas soluciones lo efectuamos siguiendo las instrucciones de Treadwell (1), es decir, precipitando el hidróxido crómico de una cantidad pesada de solución, por la proporción estrictamente necesaria de amoníaco (solución 2N aproximadamente), evitando, por consiguiente, un exceso de este último, de modo que, en caso contrario, se hervía el líquido hasta ausencia del olor de aquél; después de filtrar y lavar cuidadosamente el precipitado se desecaba en una estufa de aire a 100°, y, por fin, lo calcinábamos al soplete en un crisol de platino durante veinte minutos, pesando luego el sesquióxido así formado; de cada solución efectuamos, por lo menos, dos análisis, que concordaban dentro del 2 a 4 por 1000 y la media de los mismos se tomó como riqueza definitiva de la solución.

Los frascos con las soluciones estudiadas fueron mantenidos durante la temporada en que efectuamos nuestras medidas, en un termóstato de Ostwald con agitador mecánico, regulado a 25°, temperatura a la que se efectuó la transformación de las sales; además, en el mismo termóstato, sumergían casi completamente cuatro picnómetros de Sprengel-Ostwald para líquidos, cuyo volumen (que determinamos previamente) variaba entre 2 y 5 c. c., por medio de los cuales se estudió las variaciones de densidad de las soluciones concentradas. Pues, según ya hemos indicado, el valor de aquélla entra como término de corrección en el cálculo de su susceptibilidad; para evitar toda evaporación en el transcurso del tiempo o la introducción de cualquier partícula, se cerraron con un tubito de goma los terminales de cada picnómetro.

---

(1) F. P. Treadwell: *Analyse Quantitative*, 96, 1912. París.

V

Resultados experimentales

Los exponemos en los cuadros adjuntos, en los que constan nuestras medidas sobre cinco soluciones de $\left[Cr \begin{matrix} Cl_2 \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right] Cl \,.\, 2H_2O$ y cuatro de $Cr(H_2O)_6]Cl_3$, todas de distinta concentración y efectuadas en los intervalos de tiempo que se indican; cada solución está numerada con cifras romanas y su concentración m (en gramos de sal, por gramo de solución), así como los símbolos que encabezan las columnas, tienen la misma significación que en todo lo que llevamos expuesto.

CLORURO VERDE

SOLUCIÓN I. $m = 0{,}3114$

Horas	T_s	T_p	$(II')_s$	$(II')_p$	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	293°,43	292°,34	0,006642	0,010093	0,0060198	1,784	18,77
22	293 39	297 62	6673	9869	60687	1,798	18,85
23	295 07	297 62	6642	9869	60435	1,801	18,86
71	296 66	294 22	6540	9920	60077	1,800	18,86
145	298 08	297 92	6499	9828	59270	1,785	18,78
167	291 89	293 73	6678	9890	61499	1,812	18,92
191	297 02	299 98	6530	9757	59447	1,789	18,80
234	293 33	294 49	6623	9961	60692	1,798	18,85
576	298 00	296 85	6530	9869	59507	1,791	18,81
809	297 78	296 12	6545	9930	59472	1,789	18,80

SOLUCIÓN II. $m = 0{,}1965$

Horas	T_s	T_p	$(II')_s$	$(II')_p$	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	292°,56	293°,73	0,003736	0,009889	0,0060962	1,801	18,86
18	296 97	292 60	3680	9900	60189	1,805	18,88
48	295 02	292 74	3695	10002	59764	1,781	18,76
72	299 47	295 18	3405	9940	58739	1,777	18,74
408	299 04	296 85	3690	9869	59473	1,796	18,84
599	296 59	297 11	3731	9859	60028	1,798	18,85

SOLUCIÓN III. $m = 0,09503$

Horas	Ts	Taq	Δ_s	Δ_{aq}	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	292°,39	292°,47	+ 6,3459	— 1,5392	0,0059748	1,765	18,67
17	291 59	292 65	+ 6,3022	— 1,5433	59280	1,746	18,57
70	291 92	293 61	+ 6,2804	— 1,5382	59274	1,748	18,58
430	294 36	295 35	+ 6,2675	— 1,5385	59164	1,759	18,64

SOLUCIÓN IV. $m = 0,03343$

Horas	Ts	Taq	Δ_s	Δ_{aq}	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	291°,90	292°,65	+ 1,2504	— 1,5433	0,0060019	1,770	18,70
25	292 85	291 71	+ 1,2006	— 1,5467	58872	1,742	18,55
73	294 20	294 03	+ 1,2080	— 1,5249	59410	1,765	18,67
409	294 45	295 35	+ 1,2070	— 1,5385	59153	1,760	18,65

SOLUCIÓN V $m = 0,01724$

Horas	Ts	Taq	Δ_s	Δ_{aq}	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	293°,02	291°,71	— 0,1005	— 1,5467	0,0060118	1,779	18,75
16	292 18	293 61	— 0,0984	— 1,5382	60184	1,776	18,73
34	293 87	294 03	— 0,1083	— 1,5249	59723	1,773	18,72
389	294 87	294 28	— 0,1050	— 1,5362	59897	1,784	18,77

CLORURO VIOLETA

SOLUCIÓN I $m = 0,2152$

Horas	Ts	Tp	(II')s	(II')p	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	297°,77	299°,32	0,004204	0,009859	0,0059129	1,779	18,75
4	298 53	296 54	4178	9920	58993	1,779	18,75
5	298 47	296 54	4189	9920	59147	1,784	18,77
21	299 63	297 38	4153	9910	58592	1,773	18,72
50	294 83	301 11	4249	9757	59889	1,783	18,77
101	295 67	297 62	4214	9869	59596	1,780	18,75
219	299 04	297 92	4143	9828	58811	1,770	18,70
622	299 06	295 19	4097	9951	58172	1,758	18,64
886	298 15	297 76	4153	9930	58412	1,759	18,64

SOLUCIÓN II. $m = 0{,}1914$

Horas	T_s	T_p	$(II')_s$	$(II')_p$	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	292°,93	296°,24	0,003771	0,009890	0,0061715	1,825	18,99
18	295 78	291 67	3629	10073	59396	1,775	18,73
46	294 60	297 92	3614	9828	59103	1,759	18,64
473	294 34	298 08	3593	9818	58827	1,749	18,59
708	298 73	299 04	3642	9756	59027	1,775	18,73

SOLUCIÓN III. $m = 0{,}04366$

Horas	T_s	T_{aq}	Δ_s	Δ_{aq}	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	294°,08	294°,81	+2,1229	−1,5359	0,0060484	1,796	18,84
24	295 87	295 38	+2,1033	−1,5427	60000	1,793	18,82
88	295 93	296 50	+2,1027	−1,5287	60313	1,802	18,87

SOLUCIÓN IV. $m = 0{,}01725$

Horas	T_s	T_{aq}	Δ_s	Δ_{aq}	$\chi^{(M)}$	C_{Cr}	n
0	294°,37	293°,88	−0,0952	−1,5390	0,0060286	1,771	18,71
16	294 41	294 81	−0,1017	−1,5359	59999	1,784	18,78
116	296 45	296 50	−0,1033	−1,5287	59913	1,793	18,82

De los cuadros anteriores se deduce claramente que la constante magnética de las soluciones citadas *no varía* durante la transformación de la sal verde en violeta, o recíprocamente, al menos en el intervalo de tiempo a que se refieren nuestras medidas. En efecto: las diferencias que pueden observarse para el valor de Cr en una misma disolución, son del orden de los errores experimentales o inherentes al observador, y, por consiguiente, no puede deducirse de aquéllas ninguna ley de variación.

Como consecuencia de esto, no parece posible utilizar la susceptibilidad magnética como medio de reconocer o distinguir el cloruro verde del violeta, aun cuando la de este último sea, en general, algo inferior a la del primero; a esta misma conclusión llega Mlle. Feytis para ambas sales al estado sólido (1), obteniendo para su susceptibilidad molecular los valores indicados en la primera columna del cuadro adjunto; en la segunda constan los resultados obtenidos por nosotros en la balanza magnética de Curie-Chéneveau:

$$[Cr(H_2O)_6]Cl_3 \ldots \quad \chi^{(M)} = 5920 \,.\, 10^{-6} \quad \chi^{(M)} = 6181 \,.\, 10^{-6}$$

$$\left[Cr \begin{matrix} Cl_2 \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right] Cl \,.\, 2H_2O \quad \chi^{(M)} = 6100 \,.\, 10^{-6} \quad \chi^{(M)} = 6179 \,.\, 10^{-6}$$

Resulta, pues, evidente, que la diferencia esencial entre el agua de

(1) E. Feytis: *Comptes. Rendus*, **156**-886, 1913.

constitución y la de hidratación, caracterizadas por el distinto valor de su enlace con el resto de la molécula, no es acusada por las medidas magnéticas de ambas hidrinas, lo cual hace suponer que no hay variación en el magnetismo de su catión complejo, que es indudablemente el que da el carácter paramagnético a la molécula de aquéllas, pues el diamagnetismo del anión sólo debe influir disminuyendo débilmente aquel carácter.

Como consecuencia de esto, y teniendo presente que el índice de coordinación del cromo es igual en ambas sales, no es aventurado suponer que son equivalentes, en cuanto a su influencia sobre las propiedades magnéticas, los enlaces del cromo con los dos átomos de cloro y con las moléculas de agua que se introducen en el radical al salir aquellos de este último, cuando pasa la sal verde a violeta.

Además, la susceptibilidad molecular de ambas sales se obtiene directamente sumando la de sus componentes, *sin término ninguno de corrección*, por los enlaces moleculares, como generalmente sucede, según la ley enunciada por Pascal; por consiguiente, así como la profunda diferencia que en determinadas propiedades físicas presentan los cloruros crómicos, es indudablemente debida a particularidades de constitución de su molécula, en cambio la invariabilidad de su coeficiente de imantación indica que se trata de una propiedad aditiva, dependiente sólo de los componentes de aquélla, cumpliéndose, por consiguiente, la ley de Wiedemann.

Finalmente, el hecho de que las diferentes hidrinas de cromo tengan igual valor para su constante magnética, indica que las propiedades paramagnéticas del metal se atenúan muy poco en dichos complejos, demostrando que en ellos la unión del cromo con los restantes átomos o radicales sometidos a su esfera de coordinación, debe efectuarse por las órbitas electrónicas más exteriores del átomo; lo contrario sucede en el Co, no obstante la analogía del Cr con aquel metal, pues la variación tan característica de la constante magnética de sus soluciones con la concentración, sólo es explicable admitiendo que cada una de las hidrinas que se forman en el seno de aquéllas (cuya composición se desconoce, pero cuya presencia acusan las medidas de susceptibilidad) posee un valor de la constante magnética distinto del de las restantes, y, por consiguiente, variando con la concentración la proporción relativa de sus dichos complejos que están en equilibrio, debe variar asimismo la susceptibilidad del conjunto; esta modificación de las propiedades paramagnéticas del cobalto en sus complejos, y que en algunos (cobaltaminas) llegan aquéllas a anularse por completo, nos indica la perturbación profunda producida en el átomo metálico por sus enlaces de coordinación, los cuales deben efectuarse por electrones mucho más profundos que en el caso del cromo.

VI

Retrogradación de la hidrolisis por adición de ácido clorhídrico.—Efecto inverso producido por el aumento de temperatura.

Aquí, lo mismo que en el sulfato y nitrato crómicos (1), se deduce la existencia de 19 magnetones en el átomo de cromo, pues aun cuando los valores de la columna *n* en los cuadros anteriores son todos inferiores a dicho número, no debe olvidarse que por hidrolisis de ambos cloruros en solución (y cuya influencia en la transformación mutua de aquéllos ya hicimos notar en el estudio de la química-física de ambas sales), seguramente hay formación de sales básicas intermedias, lo cual ocasiona, como en el caso del $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$, una disminución de la constante magnética; esto lo comprueba la simple inspección de los cuadros anteriores, pues el valor C_{Cr} (sobre todo en la sal verde) es tanto menor, en general, cuanto mayor es la dilución o, lo que es lo mismo, la hidrolisis.

Tiene, por consiguiente, verdadero interés efectuar las medidas de susceptibilidad, evitando la acción de aquélla; según se sabe, la adición de ácido clorhídrico a las soluciones de dichas sales ocasiona una retrogradación de la hidrolisis (ley de acción de las masas), lo cual nos ofrece un medio para asegurarnos del verdadero número de magnetones del cromo.

Ahora bien: de los trabajos de Bjerrum sobre la conductividad de las soluciones de cloruro verde, a que antes hicimos referencia, se deduce que, para concentraciones de aquél, oscilando entre 0,0033 y 0,0096 molécula-gramo por litro de solución, la adición de 0,01 molécula-gramo de ClH es suficiente para anular la hidrolisis casi por completo; tomando este dato como cantidad máxima de ácido que debe añadirse, resulta aproximadamente el valor 3 para la relación

$$\frac{\text{mol ClH}}{\text{mol Cl}_3\text{Cr}}\cdot$$

Como el interés de las determinaciones con ácido consiste en agregar cantidades crecientes de éste, pero no todo de una vez, hemos calculado las cantidades del mismo necesarias para que dicha relación molecular adquiera, aproximadamente, los valores 0,1, 0,3, 0,6, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0, etcétera.

---

(1) B. Cabrera y M. Marquina.—*Loc. cit.*

La solución que estudiamos en estas condiciones fué una de cloruro verde en que $m = 0,2130$; las de la sal violeta no las hemos estudiado bajo este aspecto, pues por tener su constante magnética, sensiblemente igual a la de las verdes, debe de obtenerse idéntico resultado, además de que por la simple adición de ácido su transformación en sal verde se efectúa rápidamente, por actuar aquél como catalizador, según ya hemos indicado.

La cantidad de ácido que debe añadirse para una relación molecular dada α, se deduce fácilmente, pues siendo $\frac{m}{158,6}$ la concentración de la solución expresada en molécula-gramo, la del ClH que debe añadirse, expresado también en la misma unidad, vale evidentemente $\alpha \frac{m}{158,6} \cdot 36,5$.

El ácido clorhídrico, empleado por nosotros, procedente de la casa Merck, apenas presentaba coloración amarillenta sensible, con lo que la cantidad de hierro que pudiera contener no ha debido de influir en nuestras determinaciones, lo cual, por otra parte, también lo comprueba su diamagnetismo, pues el valor de la susceptibilidad de aquél es igual a $-20 \cdot 10^{-6}$, calculado anteriormente por Cabrera al estudiar la magnetoquímica del cobalto; su riqueza, deducida de su densidad (que determinamos a 15°), era de 32,10 por 100; como las primeras cantidades de ácido añadidas fueron muy pequeñas (para $\alpha = 0,1$, la cantidad de ClH añadido fué de 0,0149 grs. por gramo de solución) las pesábamos en un vasito con tapa esmerilada por medio de una pipeta capilar, constituída sencillamente por un tubo estirado al soplete; para cantidades mayores utilizamos una bureta de 2 c. c., dividida en 0,02 de c. c., análoga a las usadas en volumetría físico-química; conociendo la densidad del ClH a la temperatura ambiente, deducíamos el volumen equivalente al peso necesario del ácido.

Ahora bien: con la adición de este último varía evidentemente la concentración inicial de la solución, y como ésta debe permanecer constante durante el curso de las medidas, es necesario añadir la cantidad conveniente de una solución concentrada de dicho cloruro o esta misma sal en estado sólido, a fin de compensar la disminución de concentración debida a la adición de ácido; se adoptó este último procedimiento, pues el cloruro verde utilizado por nosotros contenía en estado sólido 57,74 por 100 de Cl_3Cr, según análisis que efectuamos previamente.

La cantidad que debe añadirse de dicha sal se calcula del modo siguiente: siendo la concentración inicial de la solución estudiada de m grs. por gramo de aquélla, al añadir M grs. de ácido deben también añadirse x grs. de sal sólida, cuya concentración es m', de tal modo que se cumpla la ecuación; $$\frac{m + xm'}{1 + M + x} = m$$

que expresa la invariabilidad de la concentración, pues siendo esta última igual al peso de sal contenido en la unidad de masa (1 gramo) de la solución, al aumentar su peso con el del ácido y el de la sal añadidos la nueva concentración estará evidentemente expresada por el quebrado anterior; de esta ecuación se deduce x que, multiplicado por el número de gramos de solución, nos daba la cantidad total de sal necesaria.

Después de cada nueva adición de ácido y sal efectuábamos la correspondiente medida magnética, siguiendo una marcha exactamente igual a la de los casos anteriores.

El cálculo de la susceptibilidad se efectúa de un modo análogo al que antes hemos expuesto; pero teniendo en cuenta la corrección debida al diamagnetismo del ácido clorhídrico, para el cual se tiene $\chi_{ClH} = -20 . 10^{-6}$; si m y n son, respectivamente, el número de gramos de sal y ácido anhidro contenidas en 1 gramo de solución, la susceptibilidad específica del cloruro crómico está dada por las relaciones:

$$\chi_c = \frac{1}{m} [\chi_s - n\chi_{ClH} - (1 - m - n)\chi_{aq}]\, 10^{-7},$$

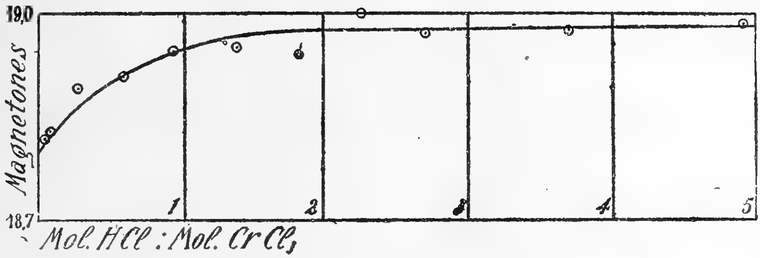
$$\chi_c = -\frac{\chi_{aq}}{m}\left[\frac{\Delta_s}{\Delta_{aq}} - n\frac{\chi_{ClH}}{\chi_{aq}} - (1 - m - n)\right] 10^{-7},$$

correspondientes al método del cilindro y al de desnivelación y deducidas por simple aplicación de la ley de Wiedemann. En la siguiente tabla de valores están contenidos los resultados de nuestras medidas:

$$\left[Cr\begin{matrix}Cl_2\\ \\(H_2O)_4\end{matrix}\right]Cl\,.\,2H_2O + HCl$$

Mol $\frac{HCl}{CrCl_3}$	$CrCl_3$	T_s	T_p	$(II')_s$	$(II')_p$	$\chi_{(M)}$	C_{Cr}
0	0,2130	300°,41	299°,36	0,004229	0,010724	0,0058901	1,788
0,0102	0,2130	298 85	297 27	4255	10806	59251	1,789
0,0281	0,2124	299 83	300 33	4243	10694	58879	1,783
0,0576	0,2115	291 97	294 80	4332	11050	60266	1,777
0,0976	0,2115	297 00	292 67	4276	11132	59615	1,788
0,289	0,2135	290 00	294 19	4434	11085	61587	1,803
0,568	0,2130	296 05	292 08	4358	11155	60442	1,807
0,932	0,2128	293 20	296 81	4495	10993	61361	1,817
1,374	0,2126	294 95	293 58	4480	11138	61061	1,818
1,821	0,2129	292 41	294 64	4566	11095	61490	1,815
2,262	0,2131	295 53	294 19	4571	11137	61371	1,831
2,708	0,2132	294 72	296 24	4582	11034	61202	1,822
3,794	0,2233	292 00	291 15	4576	11103	61830	1,823
3,794	0,2233	292 38	291 95	4601	11121	61921	1,827
4,860	0,2268	292 01	293 01	4622	11106	6109	1,801

El examen de este cuadro, y, aun mejor, el de la gráfica adjunta construída con los valores de aquel, demuestra claramente el aumento de la constante magnética de la solución, al añadirle cantidades crecientes de ácido, el cual actúa en virtud del exceso de iones H', destruyendo las sa-



les básicas formadas por hidrolisis de los tres cloruros (que, según ya vimos, existen en toda solución de uno cualquiera de ellos) y desplazando el equilibrio entre éstos y aquéllas, en el sentido de la regeneración de la sal verde, que es la única estable en sistema ácido; la rama asintótica de dicha curva nos parece que deja fuera de toda duda la existencia de 19 magnetones para el átomo de Cr, cumpliéndose una vez más la ley de los números enteros de Weiss.

Como, por otra parte, según se sabe, la disimulación de nuevos iones en las hidrinas es de origen endotérmico, convenía estudiar el efecto del aumento de temperatura en las soluciones de los cloruros crómicos, a fin de completar nuestro estudio sobre ellos; a este efecto, dos soluciones de sal verde, con una riqueza en Cl_3 Cr de 20,10 por 100 y 1,894 por 100, respectivamente, fueron sometidas en distintos intervalos de tiempo a las temperaturas que se indican en los siguientes cuadros, junto con el correspondiente valor de la constante magnética de la solución, determinada inmediatamente después de cada nuevo aumento de temperatura; a fin de conservar invariable la concentración de dichas soluciones, las pesábamos, antes y después de calentarlas, en el mismo matraz de Erleumeyer, que las contenía, compensando la pérdida de peso por evaporación con la cantidad necesaria de agua de conductividades.

CLORURO VERDE $m = 0{,}2010$

Sin calentar	$C_{Cr} = 1{,}796$
Sin calentar	$= 1{,}789$
Después de 10 minutos a 60°	$= 1{,}779$
— de 24 horas	$= 1{,}800$
— de 40 minutos a 60°	$= 1{,}804$
— de 45 minutos a 84°	$= 1{,}748$
— de 4 horas	$= 1{,}745$
— de 20 minutos a 88°	$= 1{,}730$
— de 48 horas	$= 1{,}721$
— de 35 minutos a 102°	$= 1{,}703$

CLORURO VERDE $m = 0{,}01895$

Sin calentar	$C_{Cr} = 1{,}786$
Después de 39 minutos a 60°	$= 1{,}805$
— de 45 minutos a 86°	$= 1{,}808$
— de 24 horas	$= 1{,}784$
— de 50 minutos a 102°	$= 1{,}776$

En la solución concentrada se ve claramente la brusca disminución de su constante magnética alrededor de los 80°, a cuya temperatura la molécula de cloruro crómico (sea verde o violeta) se altera profundamente, según ya demostró Recoura por procedimientos termoquímicos; dicha disminución se acentúa notablemente para temperaturas más altas, lo que prueba que la disimulación del Cr es aún mayor en las llamadas *sales verdes incristalizables,* que son las que se forman en dichas condiciones, y en las que no sólo abundan los cationes

$$\left[Cr \begin{matrix} OH \\ \\ (H_2O)_5 \end{matrix}\right]^{\cdot\cdot} \left[Cr \begin{matrix} Cl \\ (HO) \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right]^{\cdot} \left[Cr \begin{matrix} (HO)_2 \\ \\ (H_2O)_4 \end{matrix}\right]^{\cdot} \text{ etc.}$$

sino otros que contienen más de un átomo del metal en el interior del complejo, pero cuya constitución está poco conocida, a causa de las dificultades de su aislamiento.

En cambio, para la solución diluída no parece que la marcha de los valores de su constante magnética sea tan uniforme como en el caso anterior; el aumento sufrido por aquélla entre 60° y 86°, podría explicarse recordando que en soluciones de cloruro crómico, por cada 10° de aumento en la temperatura, aproximadamente, se cuadruplica la velocidad de reacción, aumentando también el porcentaje de sal violeta entre dichos límites de temperatura, según Bjerrum ha demostrado (1); pero al rebasar los 85°, las sales verdes son las que predominan en la solución, y ello explica el nuevo descenso del valor de C_{Cr}; no obstante, dada la complejidad del problema, es conveniente repetir este estudio más detalladamente y con métodos de mayor precisión.

Antes de dar fin a este trabajo, debemos hacer constar nuestro agradecimiento y profunda gratitud a nuestro querido maestro D. Blas Cabrera, catedrático de la Universidad Central, quien, con sus sabios consejos y ayudándonos a resolver todas las dificultades, nos ha facilitado grandemente nuestra labor.

---

(1) El primitivo procedimiento de Recoura, para obtener el cloruro gris-azul, se fundaba en esta propiedad.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo damos a conocer nuestras determinaciones de la susceptibilidad del cloruro de cromi-hexahidrina (gris-azul o violeta) y del cloruro de cromi-dicloro-tetrahidrina (verde esmeralda) en solución acuosa.

De aquéllas parecen deducirse en primera aproximación las siguientes conclusiones:

1.ª La susceptibilidad de las soluciones de ambas sales es independiente de la concentración, y cumplen, por consiguiente, con la ley de aditividad de Wiedemann.

2.ª La conocida transformación de las soluciones de cloruro verde en violeta, o viceversa, no es acusada por ningún cambio en el valor de la constante magnética de aquéllas, a diferencia de la mayor parte de sus restantes propiedades físicas, que son específicas de cada sal (conductividad, densidad, tensión de vapor, poder refringente, etc.).

3.ª El hecho de poseer ambas hidrinas el mismo valor para su constante magnética, demuestra que la unión del cromo con los restantes radicales o moléculas sometidos a su esfera de coordinación, se efectúa por las órbitas electrónicas más externas del átomo, al contrario de lo que sucede con las hidrinas de cobalto.

4.ª La hidrolisis de las soluciones de ambas sales disminuye el valor de su constante magnética, a causa de la formación de sales básicas; pero destruyendo estas últimas por adición de cantidades crecientes de ácido clorhídrico, se comprueba para el átomo de cromo la existencia de 19 magnetones, número entero, igual al obtenido para el nitrato y sulfato crómicos.

(Laboratorio de Investigaciones Físicas.)

Madrid, enero, 1918.

Electroanálisis
del bismuto sin electrodos de platino

por

Pelayo Poch Aguilá

INTRODUCCIÓN

Entre los metales que se depositan cuantitativamente en el cátodo por la corriente eléctrica, es el bismuto de los que más dificultades presentan en su valoración electrolítica, las cuales fueron causa de que durante mucho tiempo no hubiese manera de llevarla a cabo prácticamente. Pero el empleo de cátodos de red, y la agitación del líquido durante la electrólisis, hicieron desaparecer unos inconvenientes y aminorar otros, convirtiendo el método electrolítico en el más rápido, preciso y sencillo para la determinación del bismuto.

Sólo restaba evitar un inconveniente; lo costoso que resultan los electrodos de platino, y más en la actualidad, en que este metal ha adquirido elevadísimo precio. Tal es el problema que hemos abordado en el presente trabajo.

Tiene, además, interés esta sustitución, porque evita el inconveniente que resulta al eliminar el depósito de bismuto sobre el cátodo de platino, ya que fácilmente se forma algo de aleación Pt-Bi, que es soluble en la mezcla nítrico-tartárica usada para la limpieza de aquél. Claro está que la sustitución de los electrodos de platino lleva implícita la revisión de todos los métodos propuestos de valorar electrolíticamente el bismuto, cuya modificación nos ha sido precisa para llegar a prescindir del platino como material electródico.

TÉCNICA OPERATORIA

Todas las electrólisis se han llevado a cabo agitando el líquido durante ellas, ya que la experiencia ha demostrado que los metales se depositan con mayor densidad de corriente, y, por tanto, más rápidamente, a la vez que con mayor adherencia y uniformidad, cuando se agitan las disoluciones que cuando se electrolizan en reposo. Podemos considerar este fenómeno, en cierto modo, como el inverso de la disolución, donde se precisa agitar el líquido para conseguir acelerarla.

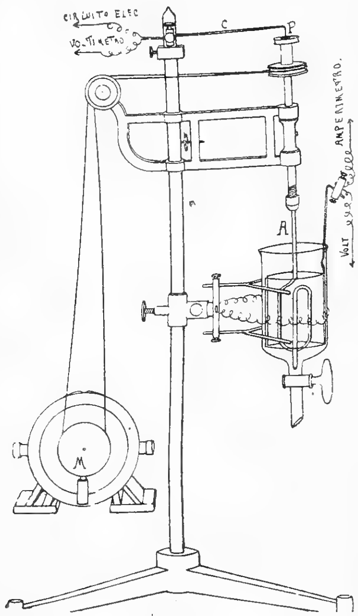


Fig. 1.ª

La parte teórica acerca de la precipitación electrolítica con agitación, puede verse en los tratados de Fischer (1), o Treadwell (2).

***

El aparato que hemos utilizado es el representado en el dibujo adjunto (fig. 1.ª), construído en los talleres del Laboratorio de Automática, y que fundamentalmente sólo es una modificación del propuesto por A. Fischer (1).

El contacto con la varilla anódica rotatoria se hace por medio de un alambre de cobre *c*, cuya punta amalgamada se introduce en un pocillo P, que contiene mercurio, recibiendo movimiento la primera, mediante un juego de poleas y un cordón de goma, de un motor M, que lleva adicionada una resistencia para regular su velocidad.

Como materiales anódicos hemos utilizado el grafito y el hierro. El ánodo de grafito es un cilindro de diez centímetros de longitud y un centímetro de diámetro, terminado en forma cónica, y que comercialmente se vende como lapicero de la casa Faber; va sujeto por presión dentro de un tubo de latón provisto de rosca en su parte superior interna, mediante la que se une a la varilla rotatoria anódica. A fin de evitar un posible ataque del latón, se recubre éste en su contacto con el grafito de una mezcla de cera y colofonia. Para que la agitación resulte más eficaz, ambas piezas no son coaxiales.

El ánodo de hierro tiene la forma indicada A, en la fig. 1.ª, y está constituído por un alambre de hierro de un milímetro de sección que pasivamos en todos los casos momentos antes de su empleo, lo que fácilmente se logra sumergiéndolo durante corto tiempo en ácido nítrico concentrado, lavándole y secándole inmediatamente.

El cátodo es de forma análoga al de platino de Cl. Winkler (3) y consiste en un rectángulo de 10 × 5,5 cm. de tela de cobre con 100 mallas por cm.², al que se sujeta directamente por su parte central sin alambre auxiliar ni soldadura, un vástago de niquelina de 0,5 mm. de diámetro por 15 cm. de largo, que atraviesa dos veces la tela y la sujeta con un doblez en su extremidad, conforme se ve en el dibujo (fig. 2.ª). La citada tela se arrolla en forma cilíndrica, de modo que se ajuste casi exactamente al interior de la vasija electrolítica. Se calcula fácilmente la superficie S de este cátodo utilizando la fórmula de sencilla deducción:

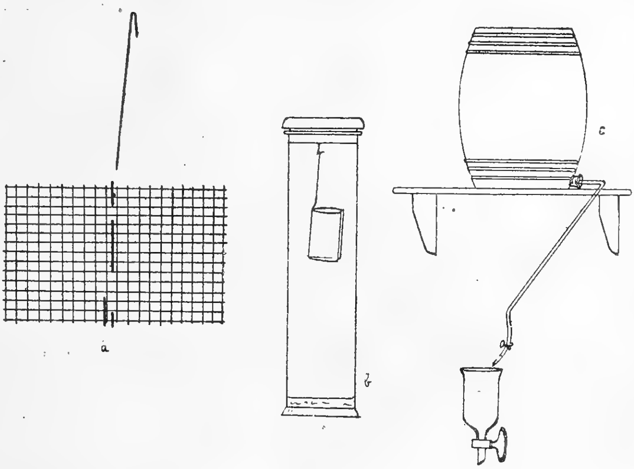


Fig. 2.ª

$$S = 2\pi \, l.a.d.\sqrt{n} = 2.3,14.\ 10.5,5.0,04.\ \sqrt{100} = 138 \text{ cm.}^2$$

Antes de utilizar por primera vez el cátodo, se le sumerge en mezcla crómica fría, lavándole abundantemente con agua y procediendo en seguida a platearlo. El plateado se efectúa durante diez minutos en disolución cianurada con ánodo de grafito, según la técnica establecida por J. Guzmán y J. Alemany (4). Se precisa esta previa operación debido a que, según se ha dicho, y hemos comprobado, el bismuto se adhiere mal al cobre. La adhesión del precipitado depende principalmente de la superficie catódica: la plata presenta un depósito mate magnífico, en el cual es probable se forme una aleación Ag-Bi que favorezca la obtención de depósitos de bismuto de gran adherencia. Teniendo en cuenta que la precipitación en disolución nítrica se efectúa prácticamente en las mismas condiciones sobre la plata que sobre el bismuto, decidimos operar sobre este metal, a fin de ahorrarnos así la preparación del cátodo antes de cada análisis. Para lograr lo cual damos a la superficie plateada dos capas sucesivas de bismuto (0,4 grs. en total), cepillando cada vez fuertemente la red, con lo que conseguimos en los cátodos así bismutados superficies compactas y adheren-

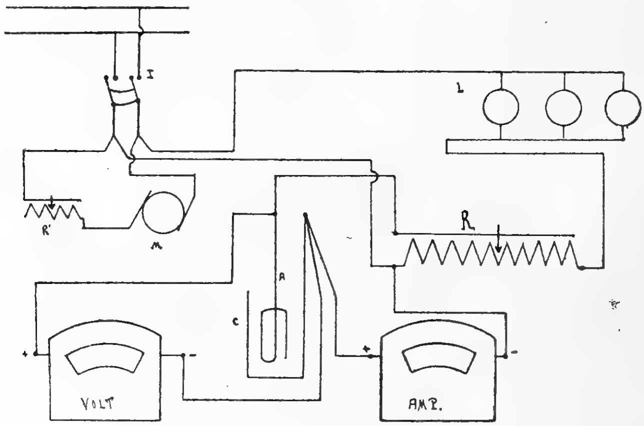


Fig. 3.ª

tes, condiciones óptimas para la posterior precipitación. Hemos llegado a depositar, en sucesivas valoraciones, hasta 5 grs. de bismuto. Una vez la red casi cegada, se prescinde de seguir utilizando el cátodo, ya que su limpieza presenta dificultades y el reducido coste del mismo no justifica llevarla a cabo.

Antes de emplear el cátodo, y después de bien cepillado, se lava abundantemente con agua, pasándole en seguida por alcohol, se tiene de 10 a 15 minutos en la estufa a 90°-100°, y, finalmente en un desecador en forma de campana conteniendo ácido sulfúrico, de cuya tapa, que lleva un ganchito de alambre sujeto con lacre (fig, 2 *b),* se le cuelga con objeto de evitar roces a la superficie catódica.

En la mayor parte de las determinaciones hemos utilizado la corriente industrial, para lo cual establecemos un circuito cerrado en la forma que se indica en esquema en la fig. 3. Este circuito está constituído por un juego de lámparas en derivación y cerrado sobre la resistencia de R, 10-15 ohmios, de la cual como potenciómetro obtenemos un circuito derivado que utilizamos en la electrólisis. Intercalamos en este último un amperímetro A. y por medio del voltímetro V, conocemos la diferencia de potencial entre los electrodos.

En las determinaciones que hemos efectuado con medida del potencial catódico, nos ha sido más conveniente utilizar la corriente de una batería de 5 acumuladores asociados en serie, con el fin de obviar las diferencias de intensidad que a veces se producen al utilizar la corriente industrial, que dificultan grandemente la realización de las medidas de potencial catódico. Por lo demás, el circuito en el caso de usar acumuladores, está montado en la forma indicada anteriormente en la fig. 3. Los terminales extremos de los acumulares sustituyen a los polos del circuito industrial; claro está que, en este caso, se prescinde de la resistencia de lámparas.

* * *

Para efectuar cada análisis tomamos por pesada un volumen constante de disolución de bismuto. El problema convenientemente preparado se pasa cuidadosamente a la vasija electrolítica, en la que previamente echamos agua destilada hasta llenar el tubo donde va la llave. Esto último se hace, no sólo para evitar que la disolución concentrada se ponga en contacto con la grasa de la llave, sino para evitarse el descuido de haber quedado ésta abierta y perder el problema.

Colocado el ánodo, se introduce el cátodo en la vasija y se sube ésta a lo largo del vástago del aparato hasta quedar los electrodos coaxiales, asegurando así una densidad de corriente idéntica en toda la superficie catódica. El líquido electrolítico debe alcanzar un nivel de 2-3 mm. por encima de la malla del cátodo.

Una vez establecidas todas las conexiones, se pone en movimiento el motor, graduando su velocidad, a fin de obtener una agitación suficiente a los fines requeridos, peró que no sea demasiado violenta para no experimentar pérdidas por proyección del líquido; al final de la determinación debe disminuirse algo aquélla para conseguir la precipitación de las últimas porciones de metal, evitando el inconveniente que Sand (6) ya señaló, de que al mezclarse las zonas anódica y catódica queda siempre una porción de metal sin reducir, especialmente tratándose de metales que posean más de una valencia electrolítica.

Parécenos innecesario tener en cuenta, como hacen la mayoría de investigadores, la velocidad de rotación del ánodo, ya que no hay nada mejor que la práctica para regular la agitación, además de que el voltímetro indica si se puede forzar o no la velocidad, puesto que hasta un cierto límite, a un aumento de ésta corresponde una disminución de la diferencia de potencial electródico.

En todas las valoraciones en disolución ácida se lava sin interrumpir la corriente con una disolución al 2 por 100 de sosa hasta reacción alcalina, y después con agua filtrada hasta que el amperímetro marque cero, y en el caso en que suceda esto último al final del análisis, por la índole especial de la electrólisis, se determina de una vez para siempre el volumen necesario para el lavado completo, recogiendo en todas las operaciones sucesivas la misma cantidad de aguas de lavado. Efectuamos éste, vertiendo el agua contenida en un depósito adecuado (fig. 2.ª, *c)* dentro de la vasija electrolítica mediante un tubo de goma, graduándose la salida del agua de lavado con una pinza. La vasija va provista de una llave en su parte inferior, cuya disposición facilita extraordinariamente y abrevia el lavado. El cátodo se sumerge después en alcohol de 96°, y se pone en la estufa durante diez minutos entre 90 y 100°. La que hemos usado corrientemente es la de gas, teniendo montada para cuando había interrupciones en el suministro de este flúido, una estufa eléctrica construída en este laboratorio, y que consiste en un vaso poroso rodeado de una resistencia de alambre de níquel de 29 ohmios, recubierta de una pasta hecha con tierra de infusorios y yeso, metido el conjunto en un bote de hojalata. Eléctricamente va montada en serie con una resistencia de lámparas y utilizamos la corriente industrial.

Al sacar el cátodo de la estufa debe colocarse inmediatamente en el desecador y efectuar la pesada de diez a quince minutos después.

Las pesadas han sido efectuadas en una balanza Sartorius, y siempre por diferencia, colocando una pesa de mayor valor que el peso de la vasija más la disolución en un platillo, y equilibrando en el otro el vaso vacío con pesas, apreciando el miligramo.

Después, una vez puesta la disolución, volvíamos a establecer el equilibrio, y las pesas retiradas de este platillo representan, por tanto, el peso de ella.

Análogamente procedíamos para pesar el cátodo y el depósito de bismuto; mas en este caso apreciábamos la décima de miligramo.

* * *

Para llevar a cabo nuestro trabajo hemos comenzado primeramente por hacer ensayos preliminares para fijar las condiciones óptimas de precipitación y obtener con la mayor belleza posible del depósito determinaciones cuantitativas. Inmediatamente hacíamos las series siguientes de análisis:

1.ª Con ambos electrodos de platino.
2.ª Anodo de platino y cátodo de cobre.
3.ª Cátodo de platino y ánodo de hierro o grafito.
4.ª Cátodo de cobre y ánodo de hierro o grafito.

De esta manera era posible apreciar la variación de condiciones de voltaje, densidad de corriente y temperatura del electrólito con los diversos materiales electródicos estudiados.

Realizado esto, aplicamos la observación del potencial catódico, a fin de fijar el grado de exactitud de los análisis con su empleo y si era o no conveniente su aplicación en la práctica.

I. Valoración del bismuto en disolución nítrica

La precipitación del bismuto en esta disolución es de mucha dificultad, porque las últimas porciones se depositan pulverulentas, además de que el depósito del metal en conjunto se presenta cristalino como en todas las disoluciones ácidas, y los cristales, que pueden verse recurriendo al auxilio del microscopio, se disuelven con mucha facilidad debido a su gran superficie en el líquido que los impregna, siendo preciso tener mucho cuidado al lavar, para evitar su disolución y su desprendimiento.

Las primeras investigaciones cuantitativas en disolución nítrica se deben a C. Luckow (7), que operó con disoluciones débilmente ácidas, empleando corrientes de 0,01-0,05 amperios, condiciones en que trabajaron más tarde A. Classen y M. A. v. Reiss (8), concluyendo que el depósito de bismuto resultaba esponjoso, separándose pequeñas porciones de metal que recogían sobre un filtro y pesaban. Formábase también óxido en el ánodo, no consiguiendo su eliminación con la adición de oxalato amónico al electrólito.

Wieland (9), siguiendo estos procedimientos, obtuvo depósitos buenos, y únicamente en el cátodo; en cambio H. Reinhard y R. Ihle (10) no alcanzaron resultados positivos.

En 1890, A. Classen (11) obtuvo de disoluciones nítricas depósitos cuantitativos de bismuto. Smith y Saltar (12) encontraron que se obtienen buenos depósitos cuando se añade a la disolución de bismuto la cantidad de ácido nítrico suficiente para impedir la formación de sal básica, entonces a 0,2 amperios la precipitación es completa y el depósito tiene bello aspecto. En caso de emplear más ácido, aquél es negruzco y esponjoso, formándose además óxido en el ánodo.

Edgar F. Smith y J. Bird (13) han operado asimismo con disoluciones nítricas.

Dmitry Balachowsky (14) observa para la precipitación cuantitativa del bismuto las siguientes condiciones:

Disolución ácida débil. Ausencia de grandes cantidades de halógenos. Pequeña densidad de corriente (como máximo 0,06 amperios por dm^2). Cátodo de superficie mate. Adición de urea o aldehido. Si la densidad de corriente es demasiado elevada, el metal se oxida (?). Para 0,6-1,07 gramos de sulfato de bismuto empleaba de 5 a 7 c. c. de ácido nítrico, y 3,5-5 gramos de urea, agregando 150 c. c. de agua. Electrolizaba a 60°-70° con 1,7-2 voltios, y ND_{100} = 0,04-0,06 amperios. La duración era de seis a diez horas, hallando errores de — 0,7 por 1.000 a + 0,7 por 1.000. Resultados análogos obtuvo agregando 8-10 c. c. de aldehido fórmico o acético. Depositando cantidades mayores de Bi se aumentan los errores.

Uno de los mejores métodos, empleando electrodos fijos, es el de O. Brunck (15), que hace uso del cátodo de red de platino. La disolución de la sal de bismuto debe tener suficiente ácido libre para que, al diluirla a 100 c. c., no se precipite sal básica; pasando del 2 por 100 de ácido, el depósito sale cristalino y se experimentan pérdidas en el lavado, además de formarse óxido en el ánodo. El voltaje empleado no excedía de dos voltios, usando un acumulador o varios montados en paralelo. El baño le mantiene a 90°, depositando 0,1 gramos de bismuto con 0,5 amperios en una o dos horas. Al final es conveniente bajar la intensidad a algunas centésimas de amperio, aunque trabajando a diferencia de potencial constante no es necesario tomar esta precaución. La presencia de ácido sulfúrico no perturba en lo más mínimo la marcha del análisis. Brunck es el primer investigador que hizo uso de los electrodos de red de Winkler y que ha dado más detalles y mejores resultados en el análisis que nos ocupa.

Karl Wimmenauer (16) aplicó por vez primera el ánodo rotatorio a la electrólisis del bismuto, haciéndolo girar mediate una turbina de agua.

Revisó los diferentes métodos que se conocían hasta entonces, recomendando el siguiente procedimiento: disolver el nitrato de bismuto (0,1—0,3 gramos) en una mezcla de una parte de glicerina y dos de agua. Electrolizar con la cápsula de Classen a 50° (calentando durante la electrólisis con un mechero pequeño), empleando una densidad de corriente ND_{100} = 0,1 amp. y 2 voltios. Secaba el cátodo con alcohol y éter pasándolo después por encima de una llamita de gas. Una vez limpio, era llevado al rojo. La glicerina impide la hidrólisis de la sal bismútica, evitando, por tanto, la adición de ácido libre. La rotación anódica ayuda a disolver el óxido de bismuto que se encuentra siempre en contacto con ácido nítrico. El estrato gaseoso que se forma sobre el ánodo cuando está en reposo, favorece la formación del peróxido.

A. Fischer y R. J. Boddaert (17), empleando ánodo rotatorio de alambre de platino, en forma de espiral, no obtuvieron ningún resultado aceptable, no obstante seguir las instrucciones de Wimmenaer.

B. L. Murray (18) emplea para el análisis de bismuto en el bimetanaftol y después de calcinado este compuesto, el método electrolítico, disolviendo el residuo de óxido de bismuto en ácido nítrico.

La valoración del bismuto en disolución nítrica con electrodos rotatorios, la realizó Sand (19) de manera inmejorable, con observación del potencial catódico. Disolvía 0,3 gramos de metal en 2,5 c. c. de nítrico concentrado, diluía a 85 c. c. y electrolizaba en frío con sus electrodos, empleando una intensidad de 3-2 amp. y una diferencia de potencial de 2,1-2,9 voltios, con una duración de ocho a once minutos y errores de 3 a 5 por 1.000.

Nosotros, teniendo en cuenta algunas de las indicaciones de los autores antes citados, hemos partido de una disolución preparada por pesada de óxido amarillo de bismuto (Bi_2O_3) Kahlbaum, que contenía 1.345 por 100 de metal, 2 por 100 de ácido tartárico, y 20 por 100 de ácido nítrico, además del preciso para disolver el óxido empleado, con lo cual evitábamos la hidrólisis.

En cada determinación añadimos 1 c.c. de ácido nítrico (D = 1,4).

A.—Determinaciones con electrodos de platino

La primera de las series de análisis la efectuamos con electrodos de platino, no solamente para ver la marcha de la operación al utilizar formas de electrodos diferentes a las utilizadas por los diversos autores, sino también para comprobar el contenido en bismuto de la disolución.

El ánodo estaba formado de un cilindro de red de platino, con un eje central que va sujeto por presión a la varilla rotatoria del soporte, y el cátodo, asimismo de platino, tenía la forma y dimensiones del cátodo de cobre descrito anteriormente, y que después hemos utilizado.

Las electrólisis se efectuaban en frío, comenzando a 1,6 voltios. Cuando la intensidad quedaba constante, elevábamos a 1,7, después a 1,8, finalizando a 2 voltios cuando el amperímetro marcaba 0,02 amp. La duración de la operación es de treinta minutos. El final de ella es conveniente, sin embargo, reconocerlo, mediante una toma del líquido electrolítico con una pipeta, y ensayando con el estannito potásico.

El depósito es de color blanco ceniciento, de una adherencia perfecta y muy compacto. Los resultados son:

Bi puesto en gramos	Bi encontrado	Diferencia en mgrs.
0,1365	0,1367	+ 0,2
0,1320	0,1323	+ 0,3
0,1272	0,1274	+ 0,2

En vista de la concordancia de los análisis, consideramos innecesario repetirlos, tomando como título de la disolución con que operábamos 1,347 por100, resultado medio de las tres determinaciones efectuadas.

Después de cada análisis es preciso quitar inmediatamente el depósito de bismuto, sumergiendo el cátodo en una mezcla de ácido nítrico y ácido tartárico. De no tener esta precaución se pierde bastante platino, pues la aleación Bi-Pt que se forma es fácilmente soluble en aquella mezcla; aun así, el cátodo con que hemos operado ha perdido 0,3 centigramos en el transcurso de este trabajo.

B.—Determinaciones con ánodo de platino y cátodo de cobre bismutado

Dispuesto el problema como en la serie anterior, se empieza la electrólisis con una diferencia de potencial de 1,6 voltios, que se mantiene constante diez minutos, subiendo luego a 1,7, y cuando el amperímetro marca casi cero, se tiene cinco minutos a 1,8, elevando durante el lavado a 2 voltios.

La preparación del cátodo y el lavado del mismo en el final de la operación se efectúan según hemos indicado anteriormente. El depósito es gris, algo rosado, pero adherente.

En esta serie obtuvimos los resultados siguientes:

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1314	0,1315	+ 0,1
0,1253	0,1251	— 0,2
0,1237	0,1236	— 0,1
0,1283	0,1282	— 0,1
0,1254	0,1251	— 0,3

C.—Anodo de grafito, cátodo de platino

Preparado el problema en la misma forma que anteriomente, se electroliza diez minutos a 1,4 voltios, manteniendo después una diferencia de potencial constante de 1,5 voltios, y cuando el amperímetro marca casi cero, se eleva a 1,8 voltios, y se lava.

El ánodo debe dejarse sumergido en agua destilada (dentro de un tubo de ensayo); pues hemos observado que así se obtienen mejores resultados.

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1340	0,1336	— 0,4
0,1315	0,1313	— 0,2
0,1347	0,1345	— 0,2
0,1256	0,1255	— 0,1
0,1336	0,1335	— 0,1
0,1253	0,1250	— 0,3

El depósito no ofrece tan bello aspecto, aun siendo el cátodo de platino, como cuando el ánodo es también de este metal.

D.—Anodo de grafito, cátodo de cobre bismutado

El ánodo de grafito presenta la particularidad de impregnarse algo de la disolución que se electroliza, resultando de aquí disminuída la cantidad de Bi precipitada. Si se opera en condiciones iguales en todos los análisis, se observa que los valores obtenidos siguen un orden creciente hasta un límite que podemos llamar de saturación del ánodo, y una vez alcanzado entran en la categoría de cuantitativos. Por esto es preciso, antes de usar ánodos de grafito, someterlos en las mismas condiciones del análisis a varias operaciones cualitativas (generalmente bastan cinco), hasta conseguir el citado límite de saturación.

La electrólisis se comienza a 1,4 voltios, subiendo lentamente la diferencia de potencial, a fin de que la intensidad no exceda nunca de0,2 amp.; a los quince minutos se eleva a 1,5, que se mantiene hasta que el amperímetro permanece constante. Entonces, durante diez minutos, se tiene a 1,6 voltios, lavando en seguida. La agitación debe ser rápida, y el lavado debe efectuarse con mucho cuidado, pues la última porción de metal se deposita algo pulverulenta, y es preciso evitar su desprendimiento.

El centímetro cúbico de ácido nítrico empleado es el estrictamente necesario para mantener disuelta la sal de bismuto; un exceso de ácido es muy perjudicial. El depósito es gris, algo rosado.

Este método, que exige gran cuidado en las operaciones, especialmente al manipular con el cátodo conteniendo el depósito, nos ha dado los resultados siguientes:

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1297	0,1292	— 0,5
0,1287	0,1284	— 0,3
0,1195	0,1189	— 0,6
0,1289	0,1290	+ 0,1
0,1253	0,1247	— 0,6
0,1207	0,1204	— 0,3
0,1218	0,1215	— 0,3

Análisis con observación del potencial catódico

Vistas las dificultades que presenta la valoración del Bi en disolución nítrica, tratamos de evitarlas, como recientemente han hecho algunos investigadores, utilizando la medida del potencial catódico.

Hemos comenzado por seguir exactamente las indicaciones de Sand. A este fin montamos el aparato, según indica el esquema de la figura 4.ª. N representa el electrodo normal de Sand de sulfato mercurioso. E el electrómetro capilar de Lippman provisto de anteojo, sirviendo como instrumento cero. I es el interruptor montado de tal forma que el electrómetro capilar quede cerrado sobre sí mismo, cuando no se hacen observaciones. P es un puente de hilo provisto de contacto móvil que utilizamos como voltímetro, y que acusa la diferencia de potencial entre dicho contacto y un extremo, para lo cual graduamos directamente el hilo del puente en voltios mediante una pila tipo Weston de F. E. M. 1,0186 voltios, que oponemos al acumulador unido a los extremos del puente.

El circuito del electrodo normal ofrece las siguientes conexiones: El cátodo está unido con el contacto móvil del puente. El extremo de éste por donde empieza la numeración se une el terminal 1 del interruptor. El electrómetro capilar está cerrado en circuito sobre sí mismo mediante los terminales 2 y 3 de aquél, y el terminal 4 comunica con el mercurio del electrodo de Sand, cuyo sifón se sumerge en el electrólito lo más cerca posible del cátodo.

Teóricamente, el potencial de precipitación del Bi sobre el platino es de $-0,35+0,676=0,33$ voltios, pues el potencial del bismuto contra una disolución diluída de sulfatos es 0,35 voltios, y el del elemento normal de Sand es de 0,676 voltios contra el de hidrógeno, como cero. Sin embargo, en la práctica la precipitación del Bi empieza en disolución tartárica a 0,63 voltios, llegando al final a 0,9 voltios.

Esta diferencia entre 0,63 y 0,33 se supone corresponde al estado de complejo en que se encuentra el bismuto en disolución tartárica. No obs-

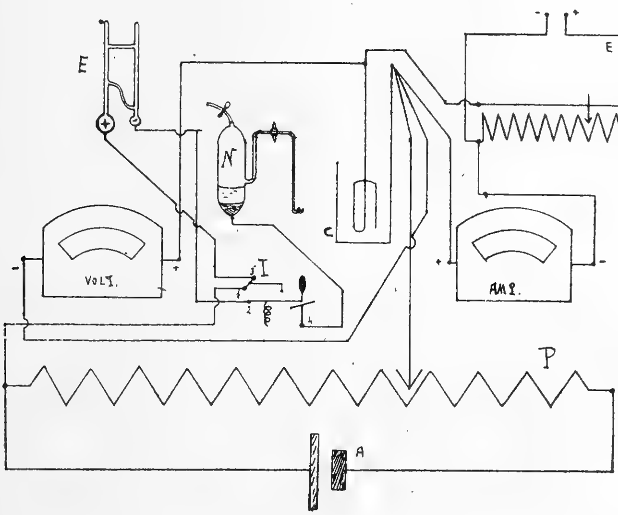


Fig. 4.ª

tante, Richardson (20) deduce de las medidas por él efectuadas que no existe tal formación de complejo, reduciéndose el papel del ácido tartárico a impedir la formación de óxido en el ánodo.

La determinación se lleva a cabo de la manera siguiente: primero se deja cubrir el cátodo de bismuto, y entonces se pone el contacto móvil del puente en la división correspondiente al voltaje mínimo de precipitación. Cuando la solución se empobrece en iones metálicos, el potencial, según la fórmula de Nernst, se eleva. Entonces ya no está por debajo del potencial del hidrógeno (tomado como cero) que empieza a desprenderse, por lo cual el metal se deposita esponjoso y negro.

Se sube el potencial una cierta cantidad inferior al que necesita el hidrógeno para desprenderse, y se deposita una nueva porción de metal, y así se continúa hasta que el primero se eleva más y la intensidad permanece constante; a partir de este momento, en que ya se ha depositado la mayor parte del metal, se deja la operación en marcha la mitad del tiempo transcurrido desde el principio hasta este instante, realizando en seguida una prueba final.

Antes de lavar se quita el elemento normal, se limpia bien el sifón exteriormente, y se deja caer por su interior unas gotas de la disolución de que está aquél lleno, a fin de eliminar la porción de electrólito que haya entrado por difusión.

Primera determinación:

La preparación de la disolución fué idéntica a la de la *disolución tartárica*, empleada por nosotros al ocuparnos posteriormente de valorar el Bi en ella.

Electrodos de platino. Puestos el acumulador (tipo Tudor pequeño) y el elemento Weston en oposición, cerrados en circuito sobre el puente de hilo, correspondía a los extremos de éste una diferencia de potencial de 1,93 voltios.

Lecturas	Voltaje (*contra el elemento Sand*)
241,2	0,47 voltios.
278,2	0,54 voltios.
300,0	0,58 voltios.

Las dos determinaciones siguientes corroboraron ser 0,47 voltios el potencial catódico mejor para la precipitación del bismuto sobre platino, con la forma de electrodos usada en este trabajo. La diferencia de potencial entre los electrodos variaba de 1,8 a 1,9 voltios. La intensidad de 0,35-0 amp. Vista ya la técnica de las operaciones con observación de potencial catódico, aplicamos este método a la disolución *nítrica*.

1. *Disolución nítrica, ánodo de platino, cátodo de cobre bismutado.*

Empieza la precipitación a 0,44 voltios, siendo al final de 0,46 voltios.

La diferencia de potencial entre los electrodos varía de 1,6 a 1,5 voltios.

Duración cuarenta y cinco minutos, algo mayor que por el método sencillo.

2. *Anodo de grafito, cátodo de platino.*

El potencial catódico varía de 0,45 a 0,47 voltios. La intensidad de 0,2 a 0 amperios.

3. *Anodo de grafito, cátodo de cobre bismutado.*

El potencial catódico varía de 0,44 a 0,46 voltios; la diferencia de potencial entre los electrodos de 1,4 a 1,35 voltios, y la intensidad de 0,2 a 0 amperios.

Hechos varios análisis cuantitativos con observación del potencial catódico, obtuvimos series de resultados en absoluto análogas a las ya encontradas; sólo la duración era algo mayor. Este método se distingue por la seguridad de sus resultados, su elegancia y comodidad, pues la precipitación del metal es automática. Sin embargo, el tener que emplear energía de baterías de acumuladores y varios aparatos no usuales, hace que no sea asequible a todos los laboratorios, además de que un poco de práctica suple fácilmente las indicaciones del potencial catódico ahorrando mucho tiempo, y, principalmente, porque las molestias que ocasiona efectuar tales medidas no están justificadas por los resultados.

II. Valoración del bismuto en disolución tartárica

Th. Moore (21) electrolizaba disoluciones tartáricas neutralizadas con amoníaco, conteniendo además un gran exceso de ácido fosfórico, con 0,03-0,05 amp., finalizando a 0,7. El depósito, esponjoso al principio, se pone luego compacto.

H. J. Sand (22) trabajó en esta disolución con electrodos rotatorios, aplicando por vez primera al bismuto la observación del potencial catódico. Añadía a la disolución 8 gramos de tartrato sódico. A una temperatura de 60° depositaba 0,3 grs. de Bi a 2,1—3,0 voltios en diez a quince minutos, variando la intensidad de 3 a 0,2 amperios.

La diferencia de potencial contra el electrodo sulfato mercurioso-ácido sulfúrico doble normal, mantenida constante, era 0,63 voltios; al final elevaba a 0,9, neutralizando la disolución con 5 c. c. de amoníaco concentrado.

A. Fischer (23) ha comprobado los excelentes resultados de este método, proponiendo se lleve una corriente de gas del alumbrado a la superficie del baño electrolítico, al lavar, para evitar la oxidación del metal depositado.

Burt P. Richardson (24) utiliza también las disoluciones nítrico-tartáricas. En oposición a lo dicho por Sand, Fischer y Brunck, empleando potenciales superiores a 2 voltios, obtienen depósitos esponjosos y negruzcos. Vió la imposibilidad de precipitar el Bi sobre el cobre, y que la adición de glucosa y ácido fórmico al electrólito no da resultado, mientras que los ácidos cítrico y láctico contribuyen a la obtención de un bello depósito. Este investigador emplea ánodo rotatorio Perkin y cátodo Winkler. Las mejores condiciones de precipitación son: una temperatura de 50°, adición de 15 grs. de tartárico y una difererencia de potencial de 1,9-1,5 voltios. Duración, treinta y cinco minutos.

***

Nosotros añadimos a la disolución problema 5 grs. de tartrato sódico pulverizado, disuelto previamente en caliente. Echamos primeramente el problema en la vasija electrolítica, lavando después con la disolución de tartrato el vaso que contenía el líquido para analizar, a fin de impedir que por la hidrólisis de la sal bismútica quede adherido algo de precipitado a las paredes del vaso. La temperatura del baño es de 40° — 50°.

A.—Electrodos de platino

La disolución preparada del modo dicho fué electrolizada con una diferencia de potencial de 1,7 voltios durante diez minutos, mantenida después a 1,8 hasta que la intensidad permanecía constante. Obtuvimos los siguientes resultados:

Bi puesto en gramos	Bi encontrado	Diferencia en mgrs.
0,1165	0,1166	+ 0,1
0,1320	0,1320	± 0,0
0,1307	0,1305	— 0,2
0,1304	0,1305	+ 0,1

Depósito de bellísimo aspecto, muy adherente. Duración, treinta minutos.

B.—Anodo de platino, cátodo de cobre bismutado

Manteniendo la diferencia de potencial a 1,9 voltios hasta que el amperímetro permanezca constante, sin necesidad de otra prueba final, obtuvimos magníficos resultados. Las demás condiciones son análogas a las de la serie anterior.

Bi puesto en gramos	Bi encontrado	Diferencia en mgrs.
0,1248	0,1245	— 0,3
0,1267	0,1264	— 0,3
0,1254	0,1253	— 0,1
0,1309	0,1305	— 0,4
0,1293	0,1292	— 0,1

C.—Anodo de grafito, cátodo de platino.

Conseguimos obtener depósitos cuantitativos, operando a 1,5 voltios, potencial que manteníamos constante hasta intensidad próxima a cero. Es conveniente, al empezar la operación, subir lentamente el voltaje, a fin de que la intensidad no pase de 0,25 amp.; de lo contrario, el depósito sale negro. Antes de la completa precipitación del metal, se debe neutralizar el líquido poco a poco con sosa al 5 por 100, a fin de quitar el exceso de ácido que va quedando en el electrólito. No debe llegarse a reacción alcalina para que no precipite sal básica de bismuto.

Los valores obtenidos vienen expresados en el siguiente cuadro:

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1320	0,1316	— 0,4
0,1296	0,1296	± 0,0
0,1280	0,1279	— 0,1
0,1242	0,1242	± 0,0
0,1280	0,1281	+ 0,1

D.—Anodo de grafito, cátodo de cobre bismutado

Preparada la disolución como en los casos anteriores se electroliza a 1,5 voltios constante. Cuando la intensidad llega a 0,05 amp., añadimos, sucesivamente, con intervalos de uno a dos minutos, 1 c. c. hasta 5, de disolución de sosa al 15 por 100. Es probable que las últimas porciones de bismuto, debido a la gran concentración de iones H, que resulta al final, se depositen mal, desprendiéndose al lavar.

El depósito obtenido es de mejor aspecto que el de la disolución nítrica.

Los valores hallados en esta serie son los siguientes:

Bi puesto en gramos	Bi encontrado	Diferencia en mgrs.
0,1315	0,1312	— 0,3
0,1331	0,1330	— 0,1
0,1347	0,1350	+ 0,3
0,1324	0,1327	+ 0,3
0,1310	0,1309	— 0,1
0,1327	0,1325	— 0,2

El carbón de arco, que intentamos utilizar a fin de suplir la falta de los lápices de grafito que se deja sentir desde el comienzo de la guerra, da lugar al mismo fenómeno de saturación que el grafito; pero tiene el inconveniente grave de que se desmorona, especialmente en sus disoluciones ácidas. Una muestra de carbón inglés, que nos fué proporcionada amablemente por el profesor señor Del Campo, resistía mucho mejor; pero no se solventó el problema, pues tampoco nos pudimos proporcionar más ánodos del citado carbón.

Con este último obtuvimos los siguientes números en disolución nítrica:

Bi puesto en gramos	Bi encontrado	Diferencia en mgrs.
0,1217	0,1212	— 0,5
0,1197	0,1195	— 0,2

III. Valoración del bismuto en disolución sulfúrica

En 1883, dos americanos, N. Whiley Thomas y Edgar F. Smith (24) emplearon disoluciones sulfúricas diluídas, preparadas, disolviendo Bi_2O_3 en ácido sulfúrico concentrado, diluyendo a volumen constante y electrolizando con una batería de tres elementos de bicromato. Smith, en otro trabajo en colaboración con E. B. Knerr (25), precisa sus procedimientos de investigación. Precipita 0,02 grs. de Bi de una disolución conteniendo ácido sulfúrico libre, llevada a un volumen de 25 c. c., utilizando como cátodo una pequeña cápsula de platino. A la temperatura ordinaria la duración de la operación es de 1,5 horas. El óxido que se forma al principio se disuelve en el transcurso de ella.

Karl Wimmenauer (16) ha comprobado este método, y encuentra que no es aplicable a la práctica por lo inseguro de los resultados y la duración de los análisis.

A. Lewis Kammerer (26) hizo uso de la cápsula de Classen, el cátodo de red y los ánodos de espiral y de cesta en todas las posibles combinaciones. Da preferencia a las disoluciones sulfúricas de sulfato de bismuto obtenidas disolviendo el óxido en ácido nítrico y tratando por el ácido sulfúrico en caliente hasta humos blancos de este ácido. Electroliza a la temperatura ordinaria, conteniendo la disolución para 0,1 — 0,2 grs. de Bi, 2 c. c. de ácido sulfúrico (D = 1,84). Un exceso de ácido hace que la precipitación no sea cuantitativa. La adición de un gramo de sulfato potásico contribuye al éxito de la operación; en cambio el sulfato amónico da lugar a la formación de óxido en el ánodo. Durante la operación, la densidad de corriente es $ND_{100} = 0{,}02$ am. y 0,15 amp. al final. La diferencia de potencial es de 1,8 voltios. Duración, ocho a nueve horas.

El autor cree que, al pasar el cátodo por alcohol, se disuelve algo de metal.

A. Hollard y L. Bertiaux (27) electrolizan disoluciones sulfúricas, añadiendo alcohol al electrólito.

J. Peset (28) precipita sobre el depósito de Bi una pequeña cantidad conocida de cadmio, a fin de impedir la oxidación del primero y que su adherencia sea mayor. Efectua la electrólisis del sulfato de bismuto a 50° en disolución sulfúrica (a 2 voltios y 0,002 — 0,001 amp.) con una duración de diez y ocho a veinticuatro horas para depositar 0,04 — 0,08 grs. de Bi. Cuando el sulfuro amónico no acusa Bi, añade el sulfato de cadmio, elevando la diferencia de potencial a 2,5 — 3,5 voltios, que mantiene constante durante tres horas.

Este método de precipitar otro metal posteriormente al que se trata de valorar, fué empleado, antes que por Peset, por J. de la Escosura (29) para el plomo. Nosotros no lo encontramos práctico, puesto que los errores que se cometen al precipitar el segundo metal se acumulan en la valoración del primero, y así se explica que los errores en el trabajo de Peset varíen de 1 al 13 por 100, por lo cual no reputamos bueno el procedimiento.

W. D. Treadwell (2) declara que la presencia de ácido sulfúrico no perjudica en las determinaciones en disolución nítrica.

Se obtiene el sulfato de bismuto evaporando una disolución nítrica con ácido sulfúrico hasta la aparición de humos blancos de SO_3. Su preparación, a partir del óxido, presenta alguna dificultad.

Wimmennauer (16) asegura que la disolución obtenida por el primer procedimiento con el tiempo precipita una sal básica, lo cual hemos comprobado para disoluciones débilmente ácidas, pero añadiendo cantidad suficiente de ácido sulfúrico se obtienen disoluciones transparentes, que abandonadas largo tiempo a sí mismas, no han depositado ninguna sal.

* * *

Limitamos nuestras observaciones a notar la influencia del ácido sulfúrico en los análisis de bismuto en disolución nítrica. Para cada determinación añadimos 1 c. c. de dicho ácido concentrado. La adición de sulfato potásico que recomienda Kammerer no tiene influencia alguna sobre las condiciones generales de la operación; en cambio, la de 15 c. c.

de alcohol etílico, como aconseja Hollard, hace que los depósitos obtenidos a 1,5 voltios sean muy bellos. Esta diferencia de potencial se mantiene constante hasta que el amperímetro marque 0,04 amperios; entonces se tiene diez minutos a 1,6 voltios, y se prueba el final con estannito.

Duración total, cuarenta y cinco minutos.

Anodo de grafito, cátodo de cobre bismutado

Valores hallados:

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1206	0,1203	— 0,3
0,1204	0,1201	— 0,3
0,1199	0,1197	— 0,2

La adición de glicerina o alcohol a las disoluciones nítricas no modifica en absoluto las condiciones del depósito de bismuto.

IV.—Valoración del bismuto en disolución acética

Luckow (7) fué el que primeramente empleó las disoluciones acéticas.

F. J. Metzger y H. F. Beans (30) obtienen en esta clase de disoluciones, en presencia de ácido bórico, magníficos depósitos.

A la disolución nítrica de bismuto añaden fenoltaleína y sosa, gota a gota, hasta reacción alcalina. El precipitado se disuelve en 20-30 c. c. de ácido acético al 50 por 100. La opalescencia restante desaparece agregando 2 grs. de ácido bórico. Se calienta a 70°-80°, electrolizando con cátodo cilíndrico rotatorio. El hidróxido de bismuto se disuelve completamente en acético; los autores emplean el ácido bórico a fin de que resulte la disolución con acidez más débil, y también porque las últimas porciones se depositan en forma más compacta.

A.—Electrodos de platino

Preparada la disolución siguiendo las indicaciones antes expresadas, sin adición de ácido bórico, se electroliza manteniendo el voltaje constante a 2,6 voltios hasta que el amperímetro marque 0,1 amp. Entonces se prueba con estannito potásico. Al principio hay mucho desprendimiento de burbujas, cesando al final.

Los resultados de los análisis se resumen en el siguiente cuadro:

Bi puesto en gramos	Bi encontrado	Diferencia en mgrs.
0,1138	0,1138	± 0,0
0,1180	0,1178	— 0,2
0,1136	0,1134	— 0,2
0,1137	0,1136	— 0,1

Como las condiciones de electrólisis según se deduce de los análisis efectuados, no dependen más que del ánodo, cosa evidente además, por ser prácticamente de bismuto el cátodo empleado, siendo el potencial catódico idéntico al del caso de cátodo de platino recubierto de una película de aquel metal, decidimos suprimir las series de análisis ánodo de grafito, cátodo de platino y ánodo de platino, cátodo de cobre.

B.—Anodo de grafito, cátodo de cobre bismutado

En este caso basta aplicar una diferencia de potencial de 1,6 voltios. El amperímetro al final señala 0,01 amp. El depósito es blanco ceniza, muy adherente y de buen aspecto.

Los resultados obtenidos son:

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1117	0,1113	— 0,4
0,1143	0,1143	± 0,0
0,1156	0,1158	+ 0,2
0,1142	0,1139	— 0,3
0,1128	0,1129	+ 0,1
0,1148	0,1144	— 0,4

V.—Valoración del bismuto en disolución clorhídrica

Eugene P. Schoch y Denton J. Brown (31), determinan el bismuto en disoluciones que contienen Cl H libre, preparadas partiendo de oxicloruro. Las disoluciones clorhídricas han dado siempre depósitos malos, debidos seguramente a la acción oxidante del cloro desprendido en el ánodo. Los autores utilizan los aparatos y electrodos Sand Fischer, limitando el potencial catódico contra un elemento de calomel a — 0,25 voltios, o menos, hasta que la mayor parte del metal se haya depositado y la intensidad se haya reducido a un mínimo. Entonces se aumenta el potencial, sin que la intensidad se eleve hasta que alcance 0,5 voltios, y se finaliza la determinación. Para 0,3 grs. de Bi, agregan 5 c. c. de Cl H y 2 grs. de clorhidrato de hidroxilamina, electrolizando a una temperatura de 55° — 75°.

Preparamos una disolución chorhídrica de bismuto partiendo del óxido. Nos fué imposible operar solamente con la disolución así obtenida, a la que añadimos 2 c. c. de ácido clorhídrico para evitar la hidrólisis, pues tiene gran conductividad, y necesitando 2,5 voltios para iniciar la precipitación del metal, en cuyo caso pasaban 2 amp., el depósito resultaba negruzco y deleznable, tardando la operación cerca de dos horas. Probamos después de añadir 5 grs. de ácido tartárico; entonces, a 1,6 voltios, obteníamos depósitos bastante bonitos, que se desprendían, no obstante, al lavar.

Tampoco dió resultado la adición de urea, con lo que el voltaje desciende a 1,3 voltios.

Siguiendo el método de J. Tafel (32), preparamos 10 grs. de clorhidrato de hidroxilamina. Llevamos a cabo tres análisis, añadiendo cada vez 3 grs. de esta sustancia. Los depósitos presentaban un magnífico color blanco, pero eran cristalinos y los resultados salen altos, seguramente por retener aquéllos algo de electrólitro en su entrecruzamiento.

La adición de alcohol no dió resultados prácticos. Añadiendo glicerina y mezclas de alcohol y glicerina, tampoco logramos obtener números concordantes.

Entonces recurrimos a las disoluciones tartárico-amoníacales, de cuya preparación nos ocupamos más adelante.

El ánodo de hierro, lo mismo pasivado que empavonado, no resistió a la acción del cloro, por lo que fué preciso emplear ánodo de grafito.

Con una diferencia de potencial de 1,8 voltios, y al final 2, cuando el amperímetro queda constante, obtuvimos depósitos buenos, pero de color algo más oscuro que cuando no existe el ion cloro en el electrólito.

La duración es de 35 — 45 minutos.

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1210	0,1213	+ 0,3
0,1210	0,1210	± 0,0
0,1209	0,1208	— 0,1

VI.—Valoración del bismuto en disolución amoniacal

La propiedad que tiene el hidróxido de bismuto de disolverse en un exceso de álcali en presencia de una pequeña cantidad de ácido tartárico, da lugar a un método precioso de valoración de este metal.

En la copiosa bibliografía existente acerca de la valoraciòn del bismuto, únicamente Schmucker (33) ha utilizado disoluciones tartárico-amoníacales, empleando electrodos de platino. A la disolución nítrica que contiene 0,05 gramos de bismuto añade 5 gramos de ácido tartárico y 15 c. c. de NH_3, obteniendo muy buenos resultados.

La disolución del hidróxido de bismuto precipitado exige una cantidad bastante grande de ácido tartárico, mientras que la adición de un cristal del mismo ácido a la disolución de una sal de bismuto hace que el hidróxido se disuelva completamente añadiendo un exceso de álcali. Esta acción es análoga a la disolución del hidróxido de cinc en los álcalis para formar cincatos, siendo ejemplo de reacciones de cuerpos en estado *naciente* cuando no han sufrido todavía polimerizaciones o deshidrataciones.

La preparación de la disolución para este método se efectúa añadiendo unos cristales de ácido tartárico, luego amoníaco hasta redisolución del precipitado que primeramente se forma, y 3 gramos de tartrato amónico, disuelto previamente en caliente en un pequeño volumen de agua (15-20 c. c.)

Efectuando la electrólisis con electrodos de platino se forma una película de color dorado en el ánodo, debida a la presencia de óxido, coloreándose, además, la disolución de amarillo. El óxido anódico se disuelve lentamente, pero no desaparece por completo. Es poco conductor, y, a medida que va disolviéndose, la intensidad de la corriente aumenta.

A fin de que el depósito no salga negro, debe mantenerse el voltaje a 2,5 voltios, siendo entonces la duración de la operación de dos horas.

Con ánodo de platino y cátodo de cobre bismutado pasa el mismo fenómeno.

El empleo del ánodo de hierro pasivado ha dado excelentes resultados, según puede verse en las series de análisis correspondientes a este procedimiento.

La temperatura del electrólito no debe exceder de 20°-25°, a fin de no destruir el pasivado del hierro. Se electroliza manteniendo una diferencia de potencial constante de 2,2 voltios hasta que la intensidad llegue a 0,06 amperes, pudiéndose prescindir de la prueba con el estannito.

Ánodo de hierro; cátodo de cobre bismutado

Los resultados obtenidos con estos electrodos, preparando el problema como queda dicho, son:

Bi puesto en gramos	Bi hallado	Diferencia en mgrs.
0,1266	0,1270	+ 0,4
0,1212	0,1213	+ 0,1
0,1197	0,1193	— 0,4
0,1168	0,1167	— 0,1
0,1204	0,1207	+ 0,3
0,1193	0,1191	— 0,2

El depósito obtenido es muy bonito, de color algo dorado, En nuestro concepto, éste es el mejor método para la determinación del bismuto sin el empleo de electrodos de platino, pues en el caso de usar éstos, es preferible hacer los análisis en disolución tartárica. Puede utilizarse el sulfato amónico en vez del tartrato, pero la operación dura más y el depósito no resulta tan bello.

Los depósitos obtenidos son tan adherentes que, por un fuerte cepillado, no pierden más de 2 ó 3 miligramos de peso.

En todas las disoluciones alcalinas de bismuto que hemos estudiado, se ha formado al electrolizar en el ánodo de platino la capa de color amarillo-rojizo citada anteriormente, dando lugar a una fuerte disminución de intensidad de la corriente empleada. Este fenómeno, conocido con el nombre de *efecto de válvula del bismuto*, tiene lugar también al electrolizar disoluciones de este metal en varios electrólitos, funcionando el bismuto como ánodo. Según Schulze (34), el efecto de válvula es debido a la formación, sobre el ánodo, de una capa de óxido esponjoso impregnada de oxígeno, originando la llamada *película activa*.

Forzando el voltaje hemos llegado a anular el efecto de válvula en perjuicio del depósito catódico, que se presentaba sin ninguna adherencia. Unicamente puede salvarse esta dificultad con el empleo del ánodo de hierro, según ya hemos indicado. El efecto de la temperatura del electrólito sobre el fenómeno de que nos ocupamos, es muy poco sensible.

VII.—Valoración del bismuto en disolución oxálico tartárica

Classen, en colaboración con Ludwig y Eliasberg (35), operó con disoluciones oxálicas. Agregaba a la disolución de la sal de bismuto 10 c. c. de oxalato potásico al 30 por 100 y oxalato amónico sólido suficiente para que aquélla quedase limpia; diluía a 150 c. c. y electrolizaba a 70°-80° C. La operación tardaba veinticuatro horas, siendo preciso agregar, a las diez y seis horas de empezada, ácido oxálico hasta reacción ácida. El depósito le lavaba sin interrumpir la corriente, pesándolo después de sumergido en alcohol y seco. El depósito era adherente y cristalino; pero, debido a una oxidación parcial del bismuto, los resultados salían altos con un promedio de 0,7 por 100. Eliasberg disolvía el depósito con ácido nítrico en la misma cápsula, y calcinaba pesando al estado de óxido; pero no conseguía eliminar el error por las pérdidas que experimentaba el nitrato de bismuto durante la calcinación. La corriente utilizada era de 0,01 amperios procedente de dos elementos Meidinger. Aumentando la intensidad, Wimmenauer (loc. cit.) consiguió reducir la duración del análisis a ocho-nueve horas.

Según A. Fischer (1), esta disolución da excelentes depósitos. Disuelve la sal de bismuto en una mezcla de oxalato potásico y sal de Seignette. Está última da lugar a la formación de un complejo, mientras la primera aumenta la conductividad del baño, dando durante la reducción una débil reacción alcalina y ayudando a la oxidación del resto ácido del tartrato en la región anódica. El bismuto se deposita compacto, adherente y de color gris rosado. Para 0,5-1 gramos de bismuto es suficiente añadir 10 gramos de oxalato potásico y 5 gramos de sal de Seignette.

Como en las disoluciones anteriores, este autor hace también uso del potencial catódico. A 75° la electrólisis se lleva a cabo con una diferencia de potencial de 1,6 a 1,2 voltios y una duración de 11-12 minutos.

***

Operamos nosotros con una disolución de nitrato de bismuto exenta de ácido tartárico, a fin de evitar la posible precipitación del tartrato potásico ácido. Empleando 10 grs. de oxalato potásico y 5 de sal de Seignette no logramos disolver más de 0,05 grs. de bismuto casi a la ebullición. Para la electrólisis empleamos un vaso sin llave, calentado con un mechero. En cuanto descendía un poco la temperatura, se precipitaba inmediatamente una sal cristalizada en agujas, que quizá sea un oxalato de bismuto, pues empleando ácido oxálico con tartrato sódico se obtuvo también, quedando excluída la posibilidad de que fuese bitartrato potásico.

Neutralizando la disolución de nitrato de bismuto con sosa en presencia de fenoltaleína, agregando 5 grs. de oxalato potásico y 3 grs. de sal de Seignette, operando con electrodos de platino, se deposita óxido en el ánodo, y si éste es de grafito, la disolución se queda amarilla y turbia. Lo mismo se observa preparando el problema como primeramente se ha dicho, aunque el óxido desaparece en el transcurso de la electrólisis.

A fin de mantener la disolución límpida, es preciso que la temperatura permanezca casi en el punto de ebullición del líquido, con lo cual se desprende gran cantidad de vapor que se condensa sobre el aparato, a pesar de tener recubierta la vasija electrolítica con una lámina de celuloide, lo que hace posible una corrosión del mismo. No pudiendo emplear vasija con llave, aumenta la incomodidad y la inexactitud del análisis; además, en las condiciones en que operamos, resulta insuficiente el volumen del electrólitro empleado para contener en disolución la gran cantidad de la mezcla de oxalato potásico y sal de Seignette necesaria para disolver la cantidad de Bi que precipitamos en cada análisis (0,1-0,15 grs), por todo lo cual desistimos de utilizar este método.

***

Resultó imposible la completa disolución del óxido de bismuto en ácido hidrofluosilícico, pues se desprende al parecer F H, y queda un residuo blanco pulverulento, interpuesto en la disolución; por lo cual no pudimos aplicar el procedimiento que emplean Foerster y Schwabe (36) para la refinación del bismuto.

Determinación del bismuto en otras disoluciones

Además de los métodos que llevamos ya expuestos, otros autores se han ocupado todavía de la valoración del bismuto en distintas disoluciones.

A. Brand (37) agrega a la disolución ácida de bismuto, cuatro a cinco veces la cantidad de pirofosfato sódico necesario para formar una sal doble; alcaliniza ligeramente con carbonato amónico; añade 3-5 grs. de oxalato de amonio y diluye a 200 c. c. La electrólisis empieza a 0,01-0,05 amperios, finalizando a 0,2-0,3 amp. En doce horas se depositaban 0,25 grs. de Bi. En caso de formarse peróxido en el ánodo, se eliminaba, añadiendo al final de la electrólisis algunas gotas de disolución concentrada de ácido oxálico. El final se reconoce con S H_2. El autor aconseja transformar el metal en óxido para pesar.

Rüdorf (38) opera de manera análoga a Brand.

Nosotros no hemos aplicado este procedimiento por la imposibilidad de transformar el metal en óxido, dado que utilizamos cátodo de cobre.

Smith y Fränkel (39) precipitan 0,18 grs. de Bi en seis horas a 2 voltios y 0,03 amp. de una disolución cítrica alcalina mantenida a 60°.

Wimmenauer *(loc. cit.)* encuentra este procedimiento inaplicable a la práctica por lo inseguro de los resultados y la duración de los análisis.

G. Vortmann (40) ha dado un método que en otros tiempos fué muy utilizado, y que consiste en disolver el óxido de bismuto en Cl H, adicionando después un peso tal de cloruro mercúrico, que el mercurio represente cuatro veces el peso del metal que se va a depositar; se trata por IK hasta redisolución del precipitado de ioduro, se diluye y electroliza empezando a 0,6-0,8 amp. Cuando el depósito aparece, se reduce la intensidad a 0,2-0,3 amperios, y al final se lleva otra vez al valor primitivo. En el ánodo y en la superficie del líquido se forma una masa esponjosa de iodo, que, una vez terminada la operación, se disuelve, sin interrumpir la corriente, con sosa, agitando con el ánodo, a fin de que no arrastre mercurio. El final se reconoce con sulfhidrato amónico, dejando otra hora en marcha la operación. El depósito brillante, bien lavado, se introduce en un desecador, a fin de eliminar el agua que resta adherida.

Otra manera de efectuar el análisis consiste en añadir a la mezcla de la sal bismútica y mercúrica, ácido tartárico y un exceso de amoníaco. El ácido tartárico impide la formación de ácido bismútico en el ánodo, siendo este método aplicable también a las disoluciones nítricas.

Este método no lo hemos aplicado porque lleva consigo los errores inherentes a las determinaciones por diferencia, y nos remitimos al juicio hecho al tratar del trabajo de Peset.

R. C. Benner (41) utiliza cátodo de mercurio para sus análisis de bismuto, agitando el electrólitro por medio de los gases desprendidos durante la electrólisis.

Creemos más prácticos y económicos los métodos que proponemos, utilizando cátodo de cobre y no emplear cátodo de mercurio, puesto que, por una parte, dada la cantidad de este metal que se precisa poner (alrededor de 30 grs.), la exactitud de las pesadas se verifica con mucha dificultad, y, además, las prolijas manipulaciones a que se precisa someter este cátodo hace que únicamente pueda aplicarse cuando otros procedimientos no den resultado alguno.

Réstanos solamente expresar nuestro profundo agradecimiento al señor Guzmán, bajo cuya inspiración y consejo constante ha sido realizado este trabajo.

CONCLUSIONES

Hemos efectuado la determinación cuantitativa del bismuto prescindiendo de los electrodos de platino en las disoluciones siguientes:

Nítrica.

Tartárica.

Sulfúrica.

Acética.

Clorhídrica.

En todas ellas hemos empleado ánodo de grafito y cátodo de cobre bismutado. También realizamos dicha valoración en disolución amoniacal, usando en este caso el mismo cátodo de cobre bismutado y ánodo de hierro pasivado.

Las diferencias encontradas oscilan entre 1 y 5 por 1.000.

Debido a los inconvenientes que en la práctica presenta la disolución oxálica, nos fué imposible su aplicación a la valoración citada.

Para llevar a cabo estas investigaciones, hemos observado separadamente la influencia de la sustitución del platino por el grafito o el hierro en el ánodo y por el cobre bismutado en el cátodo.

Comprobamos que en disoluciones alcalinas el bismuto presenta un fuerte efecto de válvula, análogo al del aluminio, que hace imposible el uso del ánodo de platino, mientras que dicho efecto no se presenta con ánodo de hierro.

Hemos deducido, como consecuencia de nuestras investigaciones, que puede prescindirse en la práctica de la observación del potencial catódico, sin menoscabo alguno en los resultados de los análisis.

(Laboratorio de Investigaciones Físicas.)

Madrid, mayo de 1918.

BIBLIOGRAFÍA

1. A Fischer.—*Elektroanalytische Schnellmethoaen.*

2. W. D. Treadwell.—*Elektroanalytische Methoden.*

3. Cl. Winkler.—*Ber. d. Deutsche Chem. Ges.*, **32**, 2.192.

4. J. Guzmán y J. Alemany.—«Electroanálisis de la plata sin electrodos de platino.» *An. Soc. Esp. de F. y Q.*, XII, 298 (1914).

5. Kauffman.—*Met. Chem. Eng.*, **13**, 524 (1915).

6. A. Classen.—*Quant. Analyse durch Elektrolyse*, p. 73, 1908.

7. C. Luckow.—*Zeit. anal. Chem.*, **19**, 16 (1880).

8. M. A. v. Reiss.—*Ber. deutsch. Chem. Gess.*, **14**, 1.626, 1881.

9. Wieland.—*Ber. deutsch. Chem. Gess.*, **17**, 1.612.

10. H. Reinhardt y R. Ihle.—*Journ. prakt. Chem.*, **24**, 193, 1881.

11. A. Classen.—*Ber. deutsch Chem. Gess.*, **23**, 942.

12. Edgar F. Smith y J. Coleman Saltar.—«Elektrolytische Trennungen.» *Zeit. f. anorg. chem.*, **3**, 415 (1893).

13. Edgar F. Smith y J. Bird.—«Elektrolytische Trennungen.» *Zeit. f. anorg. Chem.*, **4**, 265.

14. Dmitry Balachowsky.—*Comptes Rendus*, **131**, 1900, y *Zeit. Elek.* (1901).

15. A. Classen. — *Quantitative Analyse durch Elektrolyse y Ber. d. Deutsch. Chem. Gess.*, **35**, 1871 (1902).

16. Karl Wimmenauer.—«Zur quantitativen Bestimmung des Wismuts durch Elektrolyse.» *Zeitschr. für anorg. Chem.*, **27**, 1 (1901).

17. A. Fischer y R. J. Boddaert.—«Die Elektrolytische Fällung der Metalle unter Lebhafter Bewegung des Elektrolyten.» *Zeitschr. f. Elek.*, **10**, 945 (1904).

18. B. L. Murray.—*J. Ind. Eng. Chem.*, **8**, 257 (1916).

19. H. J. Sand.—*Journ. Chem. Soc.*, London, **91** (1907).

20. Burt P. Richardson.—«Elektrolytische Studien.» *Zeitschr. f. anorg. Chem.*, **84**, 277.

21. Th. Moore.—*Chem. News.*, **53**, 209 (1886).

22. H. J. Sand.—*Proc. Chem.*, **23**, 26 (1906), y *Journ. Chem. Soc.*, **91** y 373 (1907).

23. A. Fischer. — «Elektroanalytische Schnellbestim. unter Beobachtung der Elektrodenpotentiale.» *Zeit. f. Elek.*, **13**, 469 (1907), y «Elektroanalytische Schnellmethoden», Stuttgart (1908).

24. N. Whiley Thomas y Edgar F. Smith.—*Am. Chem. Journ.,* **5**, 114 (1883).

25. Smith y E. B. Knerr.—*Am. Chem. Journ.*, **8**, 206.

26. A. Lewis Kammerer.—«The electrolytic estimation of bismuths and its separation from other metals.» *Journ. Amer. Chem. Soc.*, **25,** 83 (1903).

27. A. Hollard y L. Bertiaux.—*C. R.*, **139**, 336 y *Chem.*, *Central*, 732 (1904).

28. J. Peset.—«Asociación española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Valencia.» T. IV, 83.

29. J. de la Escosura.—«Ensayos electrolíticos prácticos», p. 89.

30. F. J. Metzger y H. T. Beans.—*Journ. Amer. Soc.*, **30**, 589 (1908).

31. Eugene P. Schoch y Denton J. Brown.—«An Electroanalytical method for the determination and separation of the metals of Copper.—Tin group.» *Journ. Am. Chem. Soc.*, XXXVIII, 1.660 (1916).

32. J. Tafel.—*Zeitschr. f. anorg. Chem.*, **31**, 289 (1902).

33. Samuel C. Schmucker.—«Elektrolytische Trennung der Metalle der zweiten Gruppe.» *Zeitschr. f. anorg. Chem.*, **5**, 199.

34. Günther Schulze.—«Ueber die Elektrolytische Ventilwirkung der Metalle Magnesium, Antimon und Wismut.» *Ann. der Phys.*, **24**, 43 (1907).

35. Classen.—*Ber. deutsch. Chem. Ges.*, **19**, 1.326 (1886).

36. F. Foerster y E. Schwabe.—«Elektrolytische Raffination des Wismuts.» *Zeitschr. f. Elek.*, 279 (1910).

37. A. Brand.—*Zeitschr. analyt. Chem.*, **28**, 58 (1889).

38. Rüdor.—*Zeitschr. angew. Chem.*, **5**, 199 (1892).

39. E. F. Smith y L. K. Fränkel.—*Amer. Chem. Journ.*, **12**, 104, 128, 1.329 (1890).

40. G. Vortmann.—*Ber. deutsch. chem. Ges.*, **24**, 2.761 (1891).

41. R. C. Benner.—*Journ. Amer. Chem. Soc.*, **32**, 123.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

Constitución de la Academia en 1.º de julio de 1917: Páginas.

Académicos de número.. 5
Académico electo.. 6
Académicos Corresponsales nacionales........................... 7
Académicos Corresponsales extranjeros........................... 7
Reflexiones acerca de la resolución de las ecuaciones algébricas numéricas por el método de Gräffe, por *Vicente Ventosa*.............. 9
Estudios de arte prehistórico, por *E. Hernández-Pacheco*............ 62
Acerca de las propiedades de ciertas radiaciones emitidas por la chispa de la descarga oscilante, por *B. Szilard*.......................... 85
Filogenia química de la molécula albuminoidea, por *José R. Carracido*. 113
Microscopios mineralógicos y petrográficos, por *Domingo de Orueta*.. 133 y 183
Revisión de los Signiforinos de España, por *Ricardo García Mercet*... 160
Los tuberculillos de la «Riccia Birchoffii» Hübn, por *Antonio Casares Gil* 171
Notas acerca de las esencias españolas, por *B. Dorronsoro*........... 177
Contribución al estudio de los cuerpos convexos de curvatura continua, por *Olegario Fernández Baños*.............................. 196
Notas sobre el género «Cebus» por *Angel Cabrera*.................... 221
Don Eduardo Mier y Miura, por *José Rodríguez Mourelo*............. 245
Cuestiones relativas a la Geometría métrica proyectiva, por *Miguel Vegas*.. 256, 350 y 461
Contribución al conocimiento de la fauna índica: Orthoptera (Locustidæ vel Acridiidæ), por *Ignacio Bolívar*.................... 278 y 374
Expresión estérica del eritreno, por *Adolfo Melón*.................... 290
Suplemento a la bibliografía crítica malacológica publicada en el tomo XV de las Memorias de la Real Academia de Ciencias, por *J. G. Hidalgo* 309
Métodos gráficos que puede seguir el aeronauta, aviador o navegante para la determinación de coordenadas geográficas, por *Honorato Castro Bonel*...................................... 413

Páginas.

Contribución al estudio del efecto polar en el arco eléctrico, por *Luis Vegas* 429
Algunos insectos de la República Argentina, por el *R. P. Longinos Navás, S. J.* 491
Los caballos del cuaternario superior, según el arte paleolítico, por *Eduardo Hernández-Pacheco* 505
Descripción de tres esponjas nuevas del litoral español, por *Francisco Ferrer Hernández* 533
Magnetoquímica de los cloruros de comihidrinas, por *José Baltá Elías* 540
Electroanálisis del bismuto sin electrodos de platino, por *Pelayo Poch Aguilá* 589

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

Páginas.

I. Cuestiones relativas a la Geometría métrica proyectiva, por *Miguel Vegas* 461

II. Algunos insectos de la República Argentina, por el *R. Padre Longinos Navás, S. J.* 491

III. Los caballos del cuaternario superior, según el arte paleolítico, por *Eduardo Hernández-Pacheco* 505

IV. Descripción de tres esponjas nuevas del litoral español, por *Francisco Ferrer Hernández* 533

V. Magnetoquímica de los cloruros de comihidrinas, por *José Baltá Elías* 540

VI. Electroanálisis del bismuto sin electrodos de platino, por *Pelayo Poch Aguilá* 589

La suscripción a esta Revista se hace por tomos completos, de 500 a 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, Madrid.

Precio de este cuaderno: **1,50 pesetas.**

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01224 1659