REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FISICAS Y NATURALES.

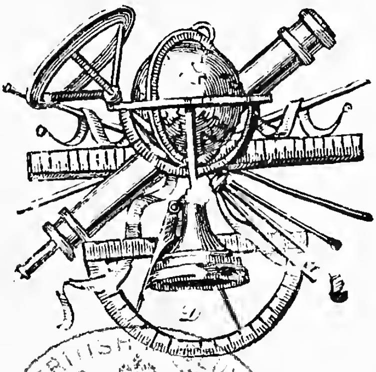
REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO XX.



MADRID:

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO.

Calle de Pontejos, núm. 8.

1879.

ÍNDICE

de las materias contenidas en este tomo.

CIENCIAS EXACTAS.

CIENCIAS FISICAS.

CIENCIAS NATURALES.

VARIEDADES.

CIENCIAS EXACTAS.

FÍSICA MATEMÁTICA.

Teoría matemática de la Luz; por D. José Echegaray, *individuo de la Real Academia de Ciencias.*

(*Continuacion.*)

O bien efectuando la operacion $D^{m+n+p}_{x,y,z}$

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} A v^m u^n w^p e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} .$$

Haciendo esta misma sustitucion del valor de ξ en todos los demás términos de $L\,\xi$, reuniendo todas las integrales en una, y sacando por factor comun

$$e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\ \xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot$$

$$\frac{d\gamma\, dw}{2\pi},$$

tendremos para la transformacion de $L\,\xi$

$$L\,\xi = \overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} \Big[A + A'u' + A'_1 v + A'_2 w +$$

$$A'' u^2 + A_1'' v^2 + A''_2 w^2 + A_3'' u v + A_4'' u w + A_5'' v w + \ldots\ldots \Big]$$

$$e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\ \xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot$$

$$\frac{d\gamma\, dw}{2\pi}.$$

Pero el primer paréntesis de la integral no es otra cosa que el resultado de sustituir en el símbolo L á D_x, D_y, D_z..... las cantidades u, v, w..... de suerte que representando por L' este resultado tendremos: transformacion de

$$L\,\xi = \overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)\right.}$$

$$^{\left.+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\ L'\,\xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi}.$$

Núm. **62.** En resúmen, sustituyendo en la primera de las ecuaciones (3) por ξ, η y ζ sus valores, obtendremos

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} D^2_t \xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} -$$

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} L' \xi_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} -$$

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} R' \eta_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} -$$

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} Q' \zeta_1 \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} = o,$$

Reuniendo todos los términos en una integral, y dentro de ella sacando la esponencial y las diferenciales como factores comunes, obtendremos la primera de las tres ecuaciones siguientes, siendo las dos últimas las transformadas de las correspondientes del sistema (3)

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \left[(D_1^2-L')\xi_1-R'\eta_1-Q_1\zeta_1\right] \frac{d\alpha.du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta.dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi}=o;$$

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \left[(D_1^2-M')\eta_1-P'\zeta_1-R'\xi_1\right] \frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma\, dw}{2\pi}=o; \tag{8}$$

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)\right.}$$

$$\left.\begin{array}{l} + w(z-\gamma)\Big]\sqrt{-1} \\ \qquad\qquad \Big[(D_t^2 - N')\zeta_1 - Q'\xi_1 - P'\eta_1\Big] \\ \\ \frac{d\alpha.du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma.dw}{2\pi} = o. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Núm. 63. Fijemos las ideas antes de pasar adelante.

1.° Los valores de ξ, η, ζ del número 61 no son en rigor mas que sumas de esponenciales; pero estas entran en número infinito.

2.° Las variables α, β, γ, u, v, w desaparecen en las integraciones, y por lo tanto los segundos miembros no son en rigor mas que funciones de x, y, z, t.

3.° La forma de estas funciones depende de las que toman ξ_1, η_1, ζ_1, y por consiguiente la sustitucion de los valores de ξ, η, ζ en las ecuaciones diferenciales equivale á un cambio de variables: á las ξ, η, ζ sustituimos ξ_1, η_1, ζ_1.

4.° Las ecuaciones (8) espresan estas sustituciones, y de aquí se deduce que para que los valores (7) sean las integrales generales de las ecuaciones diferenciales propuestas, es necesario que se verifiquen dichas ecuaciones (8).

Núm. 64. Para que las ecuaciones (8) se verifiquen es *suficiente* (no decimos *necesario* porque basta con lo primero), que todos los elementos de las integrales sean nulos, es decir, que se tenga

$$\left.\begin{array}{l} (D_t^2 - L')\xi_1 - R'\eta_1 - Q'\zeta_1 = o; \\ \\ (D_t^2 - M')\eta_1 - P'\zeta_1 - R'\xi_1 = o; \\ \\ (D_t^2 - N')\zeta_1 - Q'\xi_1 - P'\eta_1 = o. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Estas ecuaciones diferenciales solo contienen la variable independiente t; P', Q', R', L', M', N' son constanles; ξ_1, η_1, ζ_1 son funciones de t; luego basta integrar dichas ecuaciones, y los valores que obtengamos para ξ_1, η_1, ζ_1 sustituidos en (7) nos darán valores para ξ, ζ, η, capaces de satisfacer á las ecuaciones diferenciales.

Pero esto no basta: es preciso no solo que los valores de ξ, η, ζ satisfagan á tres ecuaciones (3) sino tambien á las condiciones iniciales; es decir, que para $t=o$ se tenga

$$\left.\begin{array}{l}\xi=\varphi(x,y,z);\quad \eta=\chi(x,y,z);\quad \zeta=\psi(x,y,z)\\ \xi'=\varphi_1(x,y,z);\quad \eta'=\chi_1(x,y,z);\quad \zeta'=\psi_1(x,y,z).\end{array}\right\}\quad (10)$$

Basta para esto que los valores ξ_1, η_1, ζ_1 deducidos de la ecuacion (9) para $t=o$ tomen la forma,

$$\begin{array}{l}\xi_1=\varphi(\alpha,\beta,\gamma);\quad \eta_1=\chi(\alpha,\beta,\gamma);\quad \zeta_1=\varphi(\alpha,\beta,\gamma);\\ \xi_1'=\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma);\quad \eta_1'=\chi_1(\alpha,\beta,\gamma);\quad \zeta_1'=\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma).\end{array}\quad (10')$$

En efecto, en este caso los valores de ξ, η, ζ (7) se reducen segun la fórmula de Fourier á los del grupo (10). Por ejemplo, se tiene para $t=o$

$$\xi=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma . dw}{2\pi}=\varphi(x,y,z),$$

y

$$\xi'=\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}}\,\xi'_1\frac{d\alpha\, du}{2\pi}\cdot\frac{d\beta\, dv}{2\pi}\cdot\frac{d\gamma . dw}{2\pi}=$$

$$\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}} \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) \frac{d\alpha\, du}{2\pi} \cdot \frac{d\beta\, dv}{2\pi} \cdot \frac{d\gamma\, dw}{2\pi} = \varphi_1(x, y, z).$$

En resúmen, tenemos que integrar las ecuaciones (9) determinando ξ_1, ζ_1, η_1 para $t=o$ por las condiciones (10). Este es precisamente el caso del ejemplo III, con la diferencia de que lo que allí eran α, β, γ, α', β', γ' son aquí

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma);\ \chi(\alpha, \beta, \gamma);\ \psi(\alpha, \beta, \gamma);\ \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma);$$
$$\chi_1(\alpha, \beta, \gamma);\ \psi_1(\alpha, \beta, \gamma).$$

Tendremos pues

$$\xi_1 = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{P_1(S)} \quad ; \quad \eta_1 = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{Q_1(S)} \quad ; \quad \zeta_1 = \mathcal{E} \frac{\Theta\, e^{st}}{R_1(S)}$$

siendo

$$S=(s^2-L')(s^2-M')(s^2-N')-P'^2(s^2-L')-Q'^2(s^2-M')-$$
$$R'^2(s^2-N')-2P'Q'R';$$
$$P_1=P'(s^2-L')+Q'R';\quad Q_1=Q'(s^2-M')+P'R';$$
$$R_1=R'(s^2-N')+P'Q';$$

y

$$\Theta=Q_1 R_1\left[\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma)+s\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma)\right]+R_1 P_1\left[\chi_1(\alpha, \beta, \gamma)+\right.$$
$$\left.s\,\chi(\alpha, \beta, \gamma)\right]+P_1 Q_1\left[\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)+s\,\psi(\alpha, \beta, \gamma)\right]$$

Sustituyendo estos valores en las espresiones (7) tendremos por último

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2^3\pi^3}\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty}
\mathcal{E}\frac{\Theta\, e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}+st}}{Q_1(S)}\, d\alpha\,.\,d\beta\,.\,d\gamma\,.\,du\,.\,dv\,.\,dw;\\
\eta &= \frac{1}{2^3\pi^3}\overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty}
\mathcal{E}\frac{\Theta\, e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}+st}}{Q_1(S)}\, d\alpha\,.\,d\beta\,.\,d\gamma\,.\,du\,.\,dv\,.\,dw;\\
\zeta &= \overline{\underline{\int\int\int\int\int\int}}_{-\infty}^{+\infty}
\mathcal{E}\frac{\Theta\, e^{\left[u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)\right]\sqrt{-1}+st}}{R_1(S)}\, d\alpha\,.\,d\beta\,.\,d\gamma\,.\,du\,.\,dv\,.\,dw.
\end{aligned}
\right\}\quad (11)
$$

El órden de las operaciones para determinar ξ, η, ζ en cada caso es el siguiente:

1.° Hallar las seis raices s de S.

2.° Tomar el resíduo total de

$$\frac{\Theta\, e^{st}}{P_1(S)}\ \cdots\cdots$$

por relacion á estas raices.

3.° Tomar las integrales séxtuplas.

La indeterminacion de s habrá desaparecido al tomar el resíduo, entrando en lugar de esta variable las raices de (S) de cierto modo; y asimismo al tomar la integral sextupla, desaparecen las seis variables u, v, w, α, β, γ, quedando tan solo en el segundo miembro una funcion de x, y, z, t.

Las variables s, α, β, γ, u, v, w entran pues para indicar el modo de formacion de los valores de ξ, η, ζ, y al llegar al último resultado han desaparecido por completo.

Tal es el método de Mr. Cauchy, tan elegante y sobre todo tan sencillo, tan sencillo como lo presenta la dificultad de problema.

Núm. 65. No olvidemos que las funciones

$$\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1$$

pueden ser contínuas ó discontínuas: pueden, por ejemplo, tener valores finitos dentro de una cierta envolvente, y ser nulas fuera de ella, pero siempre finitas.

Esta observacion es muy importante para las aplicaciones.

CAPITULO III.

Cambio de variables.—Superficies polares recíprocas.—Elipse indicatriz.—Raices de ecuaciones fraccionarias.

Cambio de variables bajo el signo integral en las integrales múltiples. (Cálculo de Mr. Moigno, t. II, pág. 214.)

Núm. 66. El problema del cambio de variables bajo el signo integral en las integrales múltiples ha sido resuelto por Jacobi, Catalan y Cauchy; mas para nuestro objeto nos basta estudiar el caso particular de dos y de tres variables, cuestion tratada por Euler en 1769 y por Lagrange en 1773.

Integrales dobles. Sea la integral doble

$$U = \int_a^{a_1} \int_{f(x)}^{f_1(x)} F(x, y)\, dx\, dy,$$

en la que x, y son dos variables independientes, y en la que suponemos que se ha de integrar: 1.° con relacion á y, razon por la cual los primeros límites son funciones de x; 2.° respecto á x, de suerte que los límites de esta segunda integracion son constantes. Sin embargo, para las aplicaciones que hemos de hacer podemos suponer el caso particular de cuatro límites constantes.

Supongamos que á las variables x, y queremos sustituir bajo el signo integral otras dos variables u, t, ligadas á las primeras por las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x, y, u, t) = o \\ \psi(x, y, u, t) = o \end{array}\right\}$$

ó mas sencillamente:

$$x = \varphi(u, t); \quad y = \psi(u, t) \qquad (1)$$

El problema se descompone en tres partes: *primero*, expresar en funcion de u, t el coeficiente $(F\, x, y)$; *segundo*, expresar en funcion de u, t y $du \times dt$ el producto dx, dy; *tercero*, determinar los nuevos límites.

Núm. 67. I. Para expresar $F(x, y)$ en funcion de u, t, bastará evidentemente sustituir en F por x é y sus valores (1), y tendremos:

$$F(x, y) = F\Big(\varphi(u, t), \psi(u, t)\Big) = F_1(u, t).$$

Núm. 68. II. En cuanto á la determinacion de $dx\, dy$, el problema no es tan sencillo.

Parece á primera vista que bastará diferenciar las ecuaciones (1), con lo que se obtendrá

$$dx = \varphi'_u(u, t)\, du + \varphi'_t(u, t)\, dt$$
$$dy = \psi'_u(u, t)\, du + \psi'_t(u, t)\, dt$$

y multiplicar despues los valores de dx, dy; pero este método sería radicalmente falso, no porque no pudiese en rigor hacerse esta sustitucion en cada *elemento* de la integral, sino porque la integral misma perdería su significacion, convirtiéndose en otra suma de otra clase especial, pues entrarian du^2 y dt^2.

Es necesario para vencer la dificultad proceder por partes.

Supongamos que en primer lugar se trata de eliminar y de la expresion propuesta en funcion de t.

y es funcion de u, t, segun las ecuaciones (**1**), pero u es funcion de t, de modo que podemos considerar á y como funcion de t únicamente.

Tendremos segun esto

$$dy = \varphi'_t(u, t)\, dt + \varphi'_u(u, t)\, \frac{du}{dt}\, dt =$$

$$\left(\varphi'_t(u, t) + \varphi'_u(u, t)\, \frac{du}{dt}\right) dt$$

y para determinar

$$\frac{du}{dt}$$

diferenciaremos la segunda ecuacion (**1**), recordando siempre que solo atendemos á la integracion en y, que solo eliminamos y, y que por lo tanto x es una constante, resultará pues

$$\psi'_t(u, t) + \psi'_u(u, t)\, \frac{du}{dt} = o$$

de donde

$$\frac{du}{dt} = -\, \frac{\psi'_t(u, t)}{\psi'_u(u, t)}\ .$$

Sustituyendo este valor en el valor de dy hallaremos

$$dy = \left[\varphi'_t(u, t) + \varphi'_u(u, t) \times -\, \frac{\psi'_t(u, t)}{\psi'_u(u, t)}\right] dt =$$

$$\frac{\varphi'_t(u,t)\,.\,\psi'_u(u,t)-\varphi'_u(u,t)\,.\,\psi'_t(u,t)}{\psi'_u(u,t)}\,dt$$

y la integral U se convertirá en

$$U=\int dx\int F(x,y)\left[\frac{\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t}{\psi'_u}\right]dt$$

de la cual deberíamos eliminar u é y en funcion de x y t, determinando además los límites convenientemente.

Para completar la transformacion eliminemos dx, suponiendo que á la variable x queremos sustituir la u conservando la t.

Observemos que x es funcion de u porque se tiene

$$x=\varphi(u,t),$$

pero que en esta ecuacion entra la t, que es funcion de u, segun indica la ecuacion

$$y=\psi(u,t).$$

Tendremos

$$dx=\left(\varphi'_u+\varphi'_t\frac{dt}{du}\right)du$$

pero la integracion relativa á x supone t constante, luego

$$\frac{dt}{du}=o,$$

luego

$$dx=\varphi_u'\,du$$

valor que sustituido en U da

$$U=\int\int F(x,y)\,\frac{\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t}{\varphi'_u}\,dt\,.\,\varphi'_u\,du=$$

$$\int_a^{a_1}\int_b^{b_1}F(x,y)\left[\varphi'_t\psi'_u-\varphi'_u\psi'_t\right]du\,dt.$$

claro es que en esta ecuacion deberemos eliminar x é y del coeficiente F.

Núm. 69. III. Para determinar los nuevos límites deduciremos:

1.° Los límites inferiores de u, t, de las ecuaciones

$$a=\varphi(u, t); \quad b=\psi(u, t).$$

2.° Los límites superiores de estas otras

$$a_1=\varphi(u, t); \quad b_1=\psi(u, t).$$

Representando por c y d los valores de $u\,t$ deducidos del primer sistema y por c_1, d_1 los correspondientes al segundo, tendremos definitivamente

$$U=\int_a^d \int_{a_1}^{d_1} F\left[\varphi(u, t), \psi(u, t)\right]$$

$$\left[\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t\right] du \,.\, dt. \qquad (2)$$

Integrales triples. *Núm.* 70. Sea la integral

$$U=\int_a^b \int_{a'}^{b'} \int_{a''}^{b''} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

en la que para mayor sencillez supondremos constantes los límites.

Nos proponemos sustituir á las variables x, y, z las t, u, v.

El problema, como en el caso anterior, se descompondrá en tres partes.

(*Se continuará.*)

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS.

Preliminares.

Los problemas que pueden proponerse sobre la *cantidad*, especialmente *discontínua*, presentan dos dificultades de muy distinta índole: de exacta comprension y sentido, una; y de resolucion, propiamente dicha, otra. La perspicacia y experiencia del matemático calculador vencen la primera: para eludir ó dominar la segunda, pídense al Álgebra reglas precisas y terminantes, ó procedimientos seguros, directos y de fácil ejecucion, aplicables en todos los casos.—¿Los posee en realidad?

Planteado ya ó escrito un problema en lenguaje matemático, podemos suponerle transformado en ecuacion, y la anterior pregunta vale tanto como esta otra: ¿hay alguna regla ó procedimiento, directo y eficaz, para resolver las ecuaciones?—Distingamos.

Si las ecuaciones son *propiamente algebráicas*, ó representa cada una la forma general de cuantas de su mismo *grado* pueden proponerse, los procedimientos de análisis general y completos se limitan á las de los cuatro primeros grados: á las de *primero* y *segundo*, resolubles desde muy remotos tiempos; y de *tercero* y *cuarto*, en cuyo estudio y descomposicion ejercitaron con gran fortuna su peregrino ingenio los italianos Ferreo, Tartalea y Cardan, y el discípulo de éste, Luis Ferrari, en la primera mitad del siglo XVI; y otros matemáticos de mayor importancia y fama todavía, en épocas posteriores.

Pero si las ecuaciones son *numéricas*, ó corresponden, no al problema general de cierto grado, sino á cualquiera de los infinitos problemas particulares, en cada uno de los generales comprendido, el asunto varía de aspecto, y la posibilidad de la solucion no se halla limitada ó circunscrita á los cuatro primeros y más sencillos casos.

De esta distincion un poco sutil, y como dolorosa confesion de impotencia científica, resulta que el Álgebra no posee en realidad método alguno, directo y general, para resolver las ecuaciones, cuyo análisis y estudio, en todos conceptos y bajo de todos los aspectos imaginables, constituyen la esencia de aquella importantísima rama de las Matemáticas. Tan no le posee, que ni las reglas de Cardan y de Ferrari son aplicables, sin grave dificultad, á la resolucion de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado: en pasando de las de segundo, que ya el griego Diofanto resolvia, el problema, atacado por cien distintos puntos á la vez, y minado y socavado durante siglos, aguanta todavía el empuje tremendo de la perspicacia y curiosidad, sobreexcitadas por tan tenaz resistencia, de multitud de sabios, empeñados sin tregua ni descanso en derrumbarle. En algunos momentos parece, sí, que vacila y se desmorona; y por algunos sitios diríase tambien que amenaza inminente y completa ruina: pero, en conjunto, la inmensa mole continúa gravitando sin conmoverse sobre el pobre entendimiento humano, y aplastándole con la irresistible pesadumbre de los misterios y dificultades que encierra.

No hay medio de descifrar el enigma en plena generalidad considerado: no le hay de resolver las ecuaciones algebráicas, ó de formular las relaciones de dependencia necesaria, existentes entre el valor ó la expresion de una cualquiera de sus raices y los coeficientes literales de los diversos términos de aquellas ecuaciones.—¿Y cuándo estas son *numéricas*, ó sus coeficientes son números, con antelacion determinados, ó de valor conocido y concreto?

Entónces ya hemos dicho que la posibilidad de resolverlas no se limita á los *dos* ni á los *cuatro* primeros grados; mas la *posibilidad* no incluye la *facilidad*, constante seguridad y prontitud de la solucion. Posible es, en efecto, resolver las *ecuaciones numéricas* de todos los grados, y suplir en la práctica el defecto ó ineficacia de la teoría; pero con trabajo sumo y enorme gasto, y aun desperdicio, de tiempo y de paciencia muchas veces.

El matemático francés Vieta y el inglés Harriot, creadores del Álgebra moderna, comenzaron á considerar la cuestion bajo este aspecto, y sentaron las bases para irla dilucidando poco á poco, en la segunda mitad del siglo XVI y principios del XVII.—Descartes fijó en ella la atencion; y, como en todo cuanto puso la mano y clavó la mirada, dejó impresa tambien aquí la huella indeleble de su ingenio.—Newton se paró tambien ante la dificultad que á sus predecesores habia detenido; y á Newton no era fácil que se le opusiese obstáculo alguno intelectual, que sin extraordinario esfuerzo no conmoviese y atropellase.—Pues por donde Newton y Descartes habian ya pasado, pasó mas tarde Lagrange, como si todavía hubiera por allí nuevo campo que explorar: alguna region, perdida en las tinieblas de la ignorancia ó del error, que alumbrar con los esplendorosos rayos de su soberana inteligencia.—Y Fourier y Sturm, aleccionados por la experiencia, ricos con el saber heredado, y posesores de gran talento, volvieron, en nuestros dias casi, á emprender la misma tarea de investigacion y análisis en que Lagrange habia ejercitado las, al parecer, irresistibles facultades de su espíritu.

¿Cuáles han sido los resultados de tantos afanes y fatigas; de tan reiterados y colosales esfuerzos como los que debieron hacer, para resolver el mismo problema siempre, aquellos celebérrimos matemáticos, y otros muchísimos, poco menos notables, secuaces ó adversarios suyos, y cuya simple enumeracion llenaria algunas páginas? ¿Ni Descartes, ni Newton, ni Leibnitz, ni la muchedumbre de sus discípulos; ni Lagrange, ni D'Alembert, ni Budan, ni Fourier, ni Cauchy, ni Sturm; ni tantos y tantos otros analistas de primera fuerza, auxiliados por verdaderas legiones de trabajadores inteligentes é infatigables de segundo órden, habrán logrado resolver el problema planteado por Harriot y Vieta? ¿Habrán sido de todo punto estériles los alardes de ingenio verificados á porfía con tal objeto, durante el siglo XVII, y el XVIII, y lo que va del XIX: los tres siglos batalladores por excelencia, como de ebullicion tumultuosa del cerebro humano, y de frenesí por saberlo, descifrarlo y explicarlo todo?

Estériles por completo de ningun modo; por cuanto, merced á los ensayos y esfuerzos intelectuales aludidos, la ciencia se ha enriquecido con gran número de verdades: sorprendentes por su originalidad, unas; fecundas en aplicaciones útiles, otras; y dignas de profunda meditacion por la trascendencia que encierran, todas. Nada más admirable que el cuerpo de doctrina, así poco á poco constituido y denominado *Teoría general de las Ecuaciones:* ningun estudio más entretenido y provechoso para el entendimiento que su estudio: hasta la vanidad del hombre encuentra en él sobrados motivos para prendarse de sí misma, si á la vanidad acompaña el pensamiento ó el recuerdo de que hombres han sido tambien los que inventaron y crearon tan peregrina *teoría.* Concerniente á las ecuaciones, casi se sabe cuanto puede saberse: todo, ménos resolverlas!

Demostremos la exactitud de esto último con las palabras de algunos sábios de autoridad irrecusable.

De una plumada derriba Lagrange, en el prólogo de su célebre *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones numéricas,* el edificio levantado por los analistas que le habian precedido, negando que el problema final haya sido rigorosamente resuelto por nadie, ántes de su época. «El método que ahora (1767) propongo, nos dice, es el único directo y seguro para descubrir ó *separar* las raices, tanto reales como imaginarias, de una ecuacion numérica cualquiera, y para determinar *rápidamente* y con aproximacion indefinida los valores de aquellas raices.»

Pues en la segunda parte de su libro titulado: *De los métodos en las Ciencias de raciocinio puro (Des méthodes dans les Sciences de raisonnement,* 1866), el sensato y respetable Duhamel aprecia el método de Lagrange en estos ú otros equivalentes términos:

«El procedimiento propuesto por Lagrange para separar unas de otras ó *aislar* las *raices reales* de una ecuacion numérica, *es irreprochable en teoría,* é inapreciable por su rigor y elegancia en el concepto científico. Pero, *en la práctica,* la formacion preliminar de la ecuacion cuyas raices representan las diferencias de las raices de la ecuacion primitiva, ó los cuadrados de estas diferencias, *es por extremo laboriosa,* tanto que por diversos artificios se procura esquivarla con frecuencia. Mas lo que en el campo de las aplicaciones suele ganarse entónces, piérdese en el concepto teórico apelando á tales subterfugios, ó abandonando el camino directo trazado por Lagrange.»

Y el juicio de Duhamel es el de todos los matemáticos que han escrito sin pasion, ni compromiso de ningun género, sobre este mismo asunto. Por el procedimiento de Lagrange no admite duda que pueden resolverse las ecuaciones numéricas: lo dudoso es que alguien las resuelva: lo cierto que todo el mundo rehuye, con sobrado motivo y como por instinto, el penoso trabajo de su resolucion.

Si Fourier no adelanta más en teoría que Lagrange, cuídase más que este último de las dificultades de ejecucion ó prácticas. Duhamel, sin embargo, le trata hasta con dureza, segun á renglon seguido puede verse.

«Fourier, continua diciendo el crítico citado, ideó procedimientos generales muy sencillos para descubrir si dos números dados comprenden ó no alguna raiz de la ecuacion propuesta, ó, con mayor propiedad, las raices que *pueden á lo sumo* comprender, *no las que comprenden* con toda seguridad.....

»Para verificar la separacion de las raices que pueden hallarse comprendidas entre aquellos números, el mismo célebre analista propuso un procedimiento de *fácil desempeño*, pero *poco satisfactorio en teoría*. Y, ya separadas, el método que recomienda para determinar sus valores aproximados, *tampoco está exento de tanteos ó ensayos é incertidumbres* de varios géneros.....

»El importante teorema de Fourier (ó de Budan) concerniente al número de raices reales que *pueden* hallarse comprendidas entre dos números determinados, *es de aplicacion muy sencilla*, y comprende, como caso particular, la célebre *regla de los signos*, descubierta por Descartes. Pero, ni más ni ménos que esta regla, presenta aquel teorema el inconveniente de hacernos creer en la existencia de raices reales, de que, sin embargo, la ecuacion carece, obligándonos ó induciéndonos á verificar numerosos cálculos hasta persuadirnos de que, efectivamente, no existen semejantes raices.,....»

Completa Sturm la obra de Fourier, y adquiere así grande y merecida fama de habilísimo matemático. Pues Duhamel, repitiendo como el eco la opinion de otros sabios, continúa diciendo:

«Sturm, que no solo conocia las *Memorias* publicadas por Fourier, sino todos sus trabajos originales y ensayos manuscritos, se propuso averiguar la causa que, hasta cierto punto, habia esterilizado los esfuerzos de su ilustre maestro para resolver el importante problema de la separacion y determinacion de las raices de las ecuaciones numéricas. Y, despues de averiguada, reemplazando las *funciones derivadas* de Fourier por otros polinomios muy diferentes, aunque tambien relacionados con la ecuacion propuesta, é imitando, como él mismo ingénuamente confiesa, el órden de investigacion y demostracion de su predecesor, logró descubrir el célebre teorema de su nombre, por medio del cual, *sin ambigüedad ó indeterminacion de ninguna especie*, se puede averiguar el número de raices reales que la ecuacion posee, comprendidas entre dos números ó límites determinados; y, por lo tanto, deducir paso á paso los valores de estas raices, con aproximacion á la verdad indefinida.

»Por desgracia, *la aplicacion de este teorema no es tan sencilla y breve como la del de Fourier, y demanda un trabajo de cálculo muy penoso*, y expuesto á frecuentes errores ó equivocaciones materiales. Por consideraciones particulares puede muchas veces aminorarse ó eludirse este trabajo; pero tales consideraciones y artificios no á todos los calculadores ocurren; y, *para que un procedimiento de investigacion sea verdaderamente recomendable y plausible, menester es que todo el mundo pueda emplearle con la misma esperanza y hasta con la misma certidumbre de buen éxito*.....

»La aplicacion del teorema de Sturm *puede exigir muchos ensayos* infructuosos, si la ecuacion contiene raices cuyas diferencias recíprocas sean muy pequeñas; pero tambien los exigiria entónces el procedimiento de Lagrange, que, si prescindimos del auxilio del de Sturm, nos inducirá á verificar tanteos innumerables, allí donde ni esperanza deberíamos abrigar de que pudieran existir raices reales.»

En ménos palabras que Duhamel, y con mayor elocuencia todavía, resume el poco satisfactorio estado de la cuestion que examinamos el filósofo Bordas-Démoulin. En su célebre libro, titulado *El Cartesianismo*, reimpreso en 1874, páginas 375 y 376, se expresa como sigue:

«La *regla de los signos* de Descartes, con sus ventajas é inconvenientes, ha sido durante dos siglos lo mejor que en su especie se ha conocido. Los más notables analistas, desde Newton á Lagrange, no consiguieron dar un paso decisivo en el camino ya explorado y recorrido por Descartes, por más esfuerzos que para conseguirlo hicieron. La ecuacion de los *cuadrados de las diferencias*, propuesta por el segundo de aquellos matemáticos, sencilla en teoría, demanda en las aplicaciones multitud de cálculos fatigosos, y algunas veces interminables casi. Fourier publicó en 1820 una regla descubierta por él años ántes, y con auxilio de la cual casi tocó en la codiciada meta. Y Sturm, estimulado por las mismas enérgicas, aunque infructuosas, tentativas de Fourier, descubrió un nuevo teorema que publicó en 1829, y que realiza el ideal de su maestro. La aplicacion de este teorema solo demanda la formacion sencillísima de una *derivada*, y una operacion análoga á la de investigar el máximo comun divisor de esta derivada y de la funcion ó ecuacion primitiva de donde procede. Y, sin embargo, *el alma abriga cierto misterioso presentimiento de que, para llegar al deseado término, existe algun otro camino más breve y expedito que el desbrozado y franqueado por Fourier y por Sturm.*»

Con lo que precede nada nuevo hemos dicho, de seguro, á cuantos conozcan alguno de los modernos *Tratados de Álgebra*, publicados en Francia para uso de los españoles: á la mayoría, si no totalidad, de nuestros muy contados lectores. Repasando las páginas de los libros de Bourdon, Lefebure de Fourcy, Cirodde, Bertrand, Serret, y de tantos y tantos otros, verdaderamente distintos por las portadas y los nombres de sus autores respectivos, en todos encontramos narrada la misma lamentable historia: la *regla de los signos* de Descartes, y los teoremas de Budan ó de Fourier para determinar el número máximo de las raices reales de una ecuacion, y su distribucion probable en positivas y negativas; la regla de Newton para deducir los valores de estas raices, ó las correcciones que deben aplicarse á los valores aproximados de las mismas, por meros tanteos y repetidos ensayos ó probaturas, préviamente obtenidos; el método *impracticable* de Lagrange para resolver el mismo problema; y el ingenioso teorema de Sturm, poco ménos impracticable muchas veces, como complemento y coronacion de los demás teoremas y métodos de investigacion análogos ó enderezados al propio objeto.

Se nos olvidaba: á los enumerados hay que agregar, para separar y determinar las raices de las ecuaciones, otro método, basado en la teoría y cálculo de las *diferencias finitas* y fórmulas consiguientes de *interpolacion*, muy difundido en la actualidad y encomiado por diversos autores ó traductores de Álgebra; pero del cual, en el tomo I de su excelente *Manual de los candidatos á la Escuela Politécnica*, dice E. Catalan, despues de exponerle, cediendo en esto á la costumbre adquirida ó á la necesidad para vender el libro, lo que sigue:

«Raro será que por el procedimiento explicado, y del cual hemos hecho dos distintas aplicaciones, podamos verificar, en general, la separacion de las raices reales inconmensurables de una ecuacion cualquiera, *ni áun determinar el número de raices de esta especie que la ecuacion contiene.* Porque, en la mayoría de los casos, el número de *variaciones* que advirtamos en las séries de valores particulares de $f(x)$ será inferior al límite del número de raices que la regla de los signos indique; y si bien es cierto que atribuyendo á x valores en progresion, cuya diferencia constante sea por de pronto 0.1, y sucesivamente despues 0.01, 0.001, etc., etc., la *probabilidad* de que las raices resulten separadas aumenta con cada *serie de sustituciones*, tambien lo es que los cálculos necesarios para esto lo serán de *prolijidad excesiva;* y que si la ecuacion posee raices imaginarias, no reveladas por el teorema de Descartes, aquellos cálculos y tentativas de exploracion deberán prolongarse *indefinidamente*, sin más resultado final que el de perder lastimosamente el tiempo.

»Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0,$$

que solo *puede tener* raices reales entre los límites 0 y $^1/_3$.

»Como *en realidad* no contiene ninguna, si por algun otro procedimiento no lo hubiésemos averiguado con antelacion, y nos empeñásemos en separar las raices por el método indicado, atribuyendo á x los valores sucesivos $0{,}0^5.1$, $0^5.2$, $0^5.3$..... hasta 0,333333, hallaríase que las 333333 sustituciones producian otros tantos resultados, todos positivos.—Basta con esto para comprender cuál es el valor ó la importancia científica del procedimiento calificado por los autores del *Programa oficial* con el nombre de *Método de las Diferencias.*»

En suma: nada ó poco más de nada. Tal es la consecuencia que se deduce de los párrafos entresacados de las obras de Bordas-Démoulin, Duhamel y Catalan, á los cuales podríamos agregar otros muchos redactados en igual sentido, y procedentes de distintos autores: tal la conviccion que, sin auxílio extraño ni influencia moral externa, adquirimos estudiando el Álgebra por los libros más en boga, y puestos como inmejorables en manos de la juventud estudiosa, concurrente á nuestras áulas de Matemáticas. Con mucho talento, mucha experiencia y destreza en el cálculo, y extensos conocimientos de Álgebra y áun de Geometría, no es imposible, ni desmesuradamente fatigoso, resolver algunas ecuaciones de tercero y cuarto grado, y áun de los grados superiores. Pero el procedimiento que Duhamel reclamaba, «verdaderamente recomendable y plausible, y por todo el mundo practicable con la misma esperanza y hasta seguridad de buen éxito,» no hemos tenido la suerte de encontrarle en ninguno de los libros franceses, en demanda suya por nosotros durante mucho tiempo revisados.

Donde por vez primera hallamos, si no *todo* lo que buscábamos, *algo* parecido, algo de lo que Duhamel, en 1866 todavía, como ilusion irrealizable acariciaba, fué donde ménos podíamos esperarlo: en el apéndice al *Anuario* (*Jahrbuch*) *del Observatorio de Berlin,* correspondiente al año de 1841. Allí es, en efecto, donde el célebre astrónomo J. F. Encke, director del mismo Establecimiento científico citado, publicó una *Memoria* sobre este asunto, en la cual analiza, discute y resuelve por un procedimiento sencillo, directo y eficaz, superior á cuantos le habian precedido, y que compite ventajosamente con algun otro, muy notable, años despues publicado en Inglaterra, el problema en los siguientes absolutos y perentorios términos enunciado por Lagrange:

«Dada una ecuacion numérica, de cuyas raices no se tiene por de pronto conocimiento alguno, ni relativo á su especie ó naturaleza, ni ménos todavía á su magnitud, encontrar los valores numéricos de estas raices, exactos si es posible, ó tan aproximados á la verdad cuanto se desee y necesite en cualquier caso.»

Por el mismo método de cálculo y á la vez cási; sin preparacion alguna prévia, ni transformacion preliminar; prescindiendo por completo de la regla de Descartes, y del teorema de Fourier, y de los métodos de Lagrange y de Sturm; y sin perder un minuto en tanteos infructuosos y molestos, ni escribir un solo guarismo innecesario, hállanse *simultáneamente* todas las raices reales y los módulos de todas las imaginarias que la ecuacion propuesta pueda contener, ateniéndose á los preceptos en aquella *Memoria* contenidos. De dos á tres horas de trabajo asíduo demanda á lo sumo, nos asegura Encke, la resolucion completa de una ecuacion de séptimo grado, con seis raices imaginarias, cuando la aproximacion se limita á la compatible con el uso de las Tablas de Logaritmos de siete cifras decimales; suficiente en la práctica casi siempre. Y, aún cuando esta apreciacion nos parezca un poco exagerada, en sentido favorable al nuevo método, cosa es de preguntar: ¿á cuántas horas y dias, y áun meses, ascendería el tiempo necesario para resolverla, con el mismo grado de aproximacion, por el procedimiento propuesto por Lagrange, y, con leves variantes, recomendado como el mejor y *más breve* en los tratados vulgares de Álgebra?—No es fácil averiguarlo. Ni áun por el procedimiento de Rutherford, derivado del de Lagrange, aunque mucho más expedito, sería empresa de poco momento el resolverla.

Y, sin embargo, el método que así responde «al misterioso presentimiento del alma,» de que nos habla Bordas-Démoulin, yace abandonado y cubierto por las sombras del olvido.—¿Por qué? ¿por error de apreciacion y falso juicio de Encke? ¿ó por no ser verdad en la práctica lo que en teoría como cierto y ventajoso se nos representa?

Adviértase que Encke, perfeccionador y propagador del método, ni es su verdadero ó primitivo autor, ni el único que sobre su mérito ha emitido dictámen favorable. El autor original lo fué el profesor de Zurich, Gräffe, *premiado* en concurso público sobre este asunto por la *Real Academia de Ciencias* de Berlin, en 1839. Encke, prendado del trabajo de Gräffe y de la simplicidad y fecundidad del teorema fundamental en que descansa, se propuso perfeccionarle y completarle, y apurar hasta sus últimas consecuencias el procedimiento por el matemático suizo descubierto. Su juicio debe considerarse, por lo tanto, como imparcial y desinteresado, é hijo de la conviccion de que no sería desmentido nunca; y sus elogios y apreciaciones, en todos sentidos favorables, dimanan de natural y legítimo entusiasmo. Habiéndose limitado Gräffe á determinar las *raices* y los *módulos* de las imaginarias, cuando estas raices y estos módulos difieren unos de otros sensiblemente, Encke avanzó un poco más, y nos enseñó á determinar las mismas raices *imaginarias*, y á discutir y analizar los casos más difíciles, omitidos por su predecesor, en que módulos y raices, reales ó imaginarias, discrepan apénas, ó son, por excepcion rarísima, absolutamente iguales. Los antecedentes del asunto son estos.—¿Cómo, pues, sospechar que la Academia de Berlin premiase lo indigno de premio y erróneo ó despreciable en teoría? ¿Ni cómo suponer que malgastase el tiempo Encke en perfeccionar y divulgar un descubrimiento científico, desprovisto por completo de importancia?—Pues si en teoría el método de Gräffe seduce y atrae por su sencillez, más todavía encanta por la misma sobresaliente cualidad en el terreno de las aplicaciones: precisamente aquí es donde campea sin rival, y desafía la competencia de cualquiera otro.

La razon, pues, de ser este método tan poco conocido en la actualidad, á pesar de haberle compendiado algunos periódicos científicos, como los *Anales de Matemáticas*,—catorce años despues de su publicacion por Encke!—no se nos alcanza. El amor pátrio, muy mal entendido, de los tratadistas franceses; la pereza del espíritu, que rechaza como por instinto cualquier innovacion en cualquier órden de conocimientos; y la rutina de las escuelas, apasionada de lo antiguo y de todo lo que es aparatoso y deslumbrador, podrán disculpar tan extraña anomalía y olvido tan lamentable: explicarlos, no se explican de ningun modo.

De la *Memoria* de Encke aspira á ser traduccion, fiel en cierto sentido, ó en el fondo, pero no literal, la que en castellano insertamos á continuacion de esta advertencia.

No es, ni puede, ni debe ser traduccion literal, por varios motivos: por dos principalmente. Porque los genios, tan distintos, é incompatibles muchas veces, de ambos idiomas, aleman y castellano, se oponen á que lo sea. Y porque lo bueno en aleman y para lectores alemanes, acaso fuera mediano, ó difícil y hasta incomprensible, para la mayoría de los lectores españoles, ó por falta en éstos de preparacion científica, ó por sobra de imaginacion para meditar con calma todos aquellos puntos que, por demasiada sobriedad de exposicion, no pueden comprenderse al vuelo.—Quien al traducir no reflexione en la diferencia de aptitudes y disposiciones intelectuales del pueblo para quien el autor escribió, y de la muchedumbre para quien el traductor se propone escribir, riesgo muy grave corre de perder el tiempo. Los manjares que sientan bien á estómagos robustos, necesitan muy distinto y delicado condimento si han de ser digeridos con facilidad por otros más débiles y como enfermos de atonía.

La *Memoria* de Encke no comprende más de 60 páginas en 4.°; y en tan breve espacio, sin division de materias en capítulos ni párrafos, ni un epígrafe de vez en cuando que recuerde al lector lo que ya lleva aprendido y le falta todavía por estudiar y aprender, y en estilo conciso y severo, hállase expuesto el asunto en su totalidad y como por un solo esfuerzo de la mente.

En la traduccion nos ha parecido que tan escueta y severa forma no debia respetarse; y que, para facilitar la inteligencia de la *Memoria* original, convenia distribuir su contenido en varios capítulos, y éstos en párrafos, numerados y titulados todos. Al estilo apretado del autor, hemos tambien preferido otro mas diluido, y conforme con la índole franca y expansiva de nuestro idioma; al razonamiento compendioso y como sibilítico, la demostracion ámplia y detallada; y al simple enunciado de algunas proposiciones, su más lata exposicion. Y cuando, por efecto muy comun é inevitable de largas y complicadas transformaciones algebráicas, hemos sospechado que el lector puede acaso perder el hilo del discurso ú olvidar el punto de partida y desconocer el de arribada, no hemos titubeado tampoco en intercalar algun breve resúmen de todo lo expuesto, para atar cabos sueltos y precisar bien las ideas.

Los ejemplos propuestos por Encke para ilustrar la teoría, son los comprendidos en el Capítulo VII, pocos en número y perfectamente escogidos, pero difíciles de resolver todos. Por lo cual, en los capítulos anteriores hemos creido muy conveniente intercalar otros ejemplos más sencillos, como aclaracion de las teorías parciales en ellos explicadas, y para estimular de contínuo la curiosidad del lector y recompensar de algun modo su constante y penosa asiduidad. No todos estos ejemplos son arbitrarios: algunos hay de intento entresacados de libros y autores célebres, con objeto de que pueda compararse para resolverlos el método de Gräffe con los de Newton, Lagrange, Sturm y cualquier otro.

Al final de la *Memoria* hemos agregado tres notas ó adiciones que consideramos importantes: la primera sobre un punto de análisis trigonométrica, relacionado con la teoría de Encke para determinar las raices imaginarias de las ecuaciones, y que en los tratados más conocidos de *Trigonometría* no se halla expuesto con demasiada claridad, si no está omitido por completo; la segunda sobre el método de aproximacion de Newton, que el uso del de Gräffe no excluye en absoluto, sino que, por el contrario, aprovecha y utiliza en tiempo oportuno y con superior ventaja; y la tercera sobre la determinacion de las raices imaginarias. Las dos primeras las hemos tomado del precioso arsenal de conocimientos de esta especie, titulado: *Nuevos Anales de Matemáticas (Nouvelles Annales de Mathématiques)*, sin más trabajo que el de traducirlas con el mayor esmero posible; y la tercera, redactada con alguna mayor libertad, la consideramos tambien muy interesante, por hallarse estrechamente relacionada con el asunto principal, en el cuerpo de la *Memoria* explicado y discutido.

Con esto ya sabe el lector lo que le ofrecemos: una disertacion matemática de 120 ó más páginas, traducida de otra de escasas 60.—¿Pecaremos de inmodestos ó de exagerados calificando de *libre* la traduccion?—Falta que alguien, con fundado motivo, no pueda calificarla de *licenciosa:* si bien lo que más nos doleria es que fuese estéril, y que en nada contribuyese á reanimar en nuestro pais la aficion al estudio de las Matemáticas.

Miguel Merino.

OBSERVACIONES

de Urano, de Neptuno y de los planetas asteróides, hechas en el
D. C. Aguilar (A.), *D. V. Ven-*

Notas.—Las *declinaciones* están corregidas de paralaje, en el supuesto de
Los valores de $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ se han obtenido por comparacion de las posi-
dose de los planetas Urano, Neptuno y los cinco primeros asteróides; en el
en el *Jahrbuch* del Observatorio de Berlin, con respecto á todos los demás.

FECHAS. — 1873.		Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
			Urano.		
			h m s	h m s	
Febrero..	27	V.	9 48 15,5	8 19 27,37	7
Marzo....	10	T.	3 42,3	18 9,00	7
(1) »	11	»	8 59 40,4	2,95	7
(2) »	19	V.	27 32,1	17 21,78	7
(3) »	22	»	15 32,1	9,52	7
Abril....	3	T.	7 27 51,7	16 39,92	7
»	4	»	23 54,9	39,00	7
»	5	»	19 58,2	38,17	7
»	7	»	12 5,1	36,92	7
			Neptuno.		
Enero....	7	T.	6 20 5,2	1 29 38,58	7
(1) »	11	»	4 24,5	41,52	7
(2) »	16	V.	5 44 51,6	48,19	7
»	17	»	40 57,4	49,94	7
»	18	»	37 3,4	51,77	7

---

(1) Celajería. (2) Tranquilo. (3) Nubes.

Observatorio astronómico de Madrid durante el año 1873, *por tosa* (V.) *y D. E. Torroja* (T.).

hallarse representada la del Sol por la constante 8″,86.
ciones *observadas* con las *calculadas*, é insertas en el *Nautical Almanac*, tratán-
núm. 1949 del *Astronomische Nachrichten*, por lo referente al (92) ó Undina; y

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. Observacion — Cálculo. Δ α.	Δ δ.
Urano.			
+ 20° 14′ 31″,4	0″,2	— 12ˢ,35	+ 30″,5
18 31,3	0,2	— 12,56	+ 25,7
51,0	0,2	— 12,56	+ 26,8
20 55,9	0,2	— 12,26	+ 27,4
21 30,8	0,2	— 12,27	+ 26,9
22 47,4	0,2	— 12,10	+ 25,6
50,8	0,2	— 11,97	+ 27,2
51,9	0,2	— 11,97	+ 27,2
52,6	0,2	— 12,23	+ 28,0
Neptuno.			
+ 7 32 3,9	0,2	— 0,07	— 1,1
35,8	0,2	— 0,09	— 1,5
33 35,1	0,2	— 0,05	+ 0,4
47,3	0,2	— 0,01	— 1,1
34 2,5	0,2	— 0,02	— 0,5

Neptuno.

FECHAS. — 1873.		Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
			h m s	h m s	
(1) Octubre..	28	V.	11 13 1,8	1 42 30,63	7
(2) »	30	»	4 57,7	18,26	7
(2) »	31	»	0 55,6	12,14	7
(3) Noviembr.	6	A.	10 36 43,4	41 35,28	7
»	20	V.	9 40 22,7	40 17,05	7
»	21	»	36 21,6	11,89	7
»	22	»	32 20,6	6,79	7
»	29	A.	4 16,3	39 33,76	7
Diciembr.	2	T.	8 52 15,8	20,99	7
»	3	»	48 16,0	17,04	7
»	4	»	44 15,9	12,91	7
»	5	»	40 16,2	9,12	7
»	6	»	36 16,6	5,41	7
(2) »	9	V.	24 18,3	38 54,81	7
»	12	»	12 20,8	44,95	7
(4) »	13	»	8 21,8	41,94	7
»	15	A.	0 24,2	36,07	7
»	17	»	7 52 27,2	30,94	7
»	18	»	48 28,8	28.46	7
»	19	»	44 30,7	26,27	7
»	20	»	40 32,6	24,06	7
»	22	V.	32 36,7	19,98	7
»	23	»	28 39,1	18,23	7
»	26	»	16 46,5	13,44	7

[1] Ceres.

Setiembre.	24	V.	12 12 10,3	0 27 45,95	7
»	25	»	7 24,1	26 55,57	7
»	26	»	2 37,9	5,15	7
»	27	»	11 57 51,5	25 14,44	7

(1) Deshecho: viento y cielo turbio. (2) Algo deshecho.

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O—C. Δ α.	Δ δ.

Neptuno.

+ 8° 42′ 28″,5	0″,2	+ 0^s,02	+ 0″,2
41 16,8	0,2	+ 0,13	— 1,4
40 43,8	0,2	+ 0,21	+ 0,2
37 20,6	0,2	— 0,13	0,0
30 12,0	0,2	+ 0,10	— 1,4
29 45,0	0,2	+ 0,06	— 1,1
18,9	0,2	+ 0,01	— 0,4
26 25,1	0,2	— 0,04	— 1,5
25 20,7	0,2	— 0,03	— 0,2
0,1	0,2	+ 0,09	— 0,2
24 41,4	0,2	— 0,06	+ 1,2
23,1	0,2	+ 0,02	+ 2,4
2,0	0,2	+ 0,08	+ 0,1
23 8,4	0,2	+ 0,18	— 0,8
22 22,4	0,2	+ 0,03	— 0,2
8,1	0,2	+ 0,04	— 0,2
21 39,7	0,2	— 0,14	— 2,3
15,6	0,2	— 0,03	— 2,9
5,9	0,2	— 0,08	— 1,9
20 56,8	0,2	+ 0,05	— 1,0
46,5	0,2	+ 0,04	— 2,0
33,6	0,2	— 0,01	+ 1,5
24,4	0,2	+ 0,07	— 0,7
7,3	0,2	+ 0,02	— 1,2

[1] Ceres.

— 14 11 15,4	3,7	+ 5,05	+ 39,4
15 48,4	3,7	+ 5,04	+ 39,7
20 13,5	3,7	+ 5,13	+ 39,3
24 29,4	3,7	+ 5,02	+ 39,0

(3) Nubes. (4) Tranquilo.

FECHAS. — 1873.		Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
			[2] Palas.		
			h m s	h m s	
Agosto...	11	V.	12 9 16,1	21 31 22,94	7
»	12	»	4 34,5	30 37,11	7
»	13	»	11 59 52,6	29 51,02	7
(1) »	16	»	45 47,0	27 32,71	7
Setiembre.	1	»	10 31 17,5	15 55,83	6
»	3	»	22 8,6	14 38,59	7
(2) »	6	»	8 31,3	12 48,69	7
			[3] Juno.		
Julio.....	1	»	11 30 34,9	18 10 56,51	5
»	2	»	25 46,9	4,28	7
»	3	»	20 59,1	9 12,23	7
»	4	»	16 11,8	8 20,73	7
»	21	»	9 56 16,4	17 55 13,68	7
»	22	»	51 42,0	54 35,05	7
»	23	»	47 8,5	53 57,42	7
»	24	»	42 36,1	20,78	7
»	26	»	33 35,0	52 11,29	7
			[4] Vesta.		
Julio.....	21	»	11 59 12,7	19 58 30,19	7
»	22	»	54 18,0	57 31,21	7
»	23	»	49 23,4	56 32,40	7
»	24	»	44 29,1	55 33,86	7
»	26	»	34 41,8	53 37,99	7

(1) Cielo fosco. (2) Algo deshecho.

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O—C. Δα.	Δδ.

[2] Palas.

+ 11° 2′ 33″,7	1,8	— 0ˢ,60	+ 0″,2
10 53 38,7	1,8	— 0,46	+ 1,1
44 26,8	1,8	— 0,49	— 2,8
15 55,1	1,8	— 0,50	— 0,2
7 19 26,3	2,0	— 0,45	+ 0,9
6 55 21,4	2,0	— 0,45	+ 1,6
18 42,8	2,0	— 0,43	— 0,1

[3] Juno.

— 4 50 23,3	2,9	+ 2,19	— 0,8
52 6,7	2,9	+ 2,23	— 1,0
53 58,3	2,9	+ 2,18	— 1,4
55 56,2	2,9	+ 2,34	— 0,1
— 5 48 16,3	2,9	+ 2,10	+ 0,3
52 21,2	2,9	+ 2,13	— 1,4
56 28,1	2,9	+ 2,08	+ 0,5
— 6 0 45,9	2,9	+ 1,92	— 3,1
9 29,0	2,9	+ 1,97	— 2,2

[4] Vesta.

— 24 2 37,2	6,7	+ 1,39	+ 2,0
9 19,5	6,7	+ 1,45	+ 1,6
15 54,7	6,7	+ 1,48	+ 2,8
22 26,7	6,6	+ 1,48	+ 1,4
35 9,5	6,6	+ 1,42	+ 0,6

FECHAS. — 1873.		Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
			[4] Vesta.		
			h m s	h m s	
Agosto. . .	11	V.	10 18 39,3	19 40 27,93	7
»	12	»	14 5,7	39 50,13	3
»	13	»	9 33,8	14,12	7
(1) »	16	»	9 56 9,1	37 36,80	7
Setiembre.	3	»	8 41 48,7	34 2,20	7
»	24	»	7 28 18,0	43 7,09	7
»	25	»	25 7,0	52,11	7
»	27	»	18 49,4	45 26,52	7
			[5] Astrea.		
Setiembre.	1	»	11 27 18,9	22 12 6,53	7
»	2	»	22 34,1	11 17,48	7
»	3	»	17 49,5	10 28,59	7
			[6] Hebe.		
(2) Mayo. . . .	3	»	11 58 14,8	14 46 4,05	4
»	20	»	10 36 52,6	31 30,00	7
(3) »	21	»	32 10,7	30 43,82	3
»	23	»	22 49,7	29 14,42	7
»	24	»	18 10,5	28 30,99	7
			[7] Iris.		
(4) Setiembre.	6	»	11 5 44,2	22 10 11,00	7
»	22	»	9 51 7,0	»	»
»	24	»	42 15,1	21 57 26,12	7

(1) Cielo fosco. (2) Nubes: puntería en δ, insegura. (3) Confun-

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O−C. Δα.	Δδ.
		[4] Vesta.	
— 25° 57′ 56″,2	6″,4	+ 1s,45	+ 0″,3
— 26 1 53,2	6,3	+ 1,32	— 0,2
5 41,1	6,3	+ 1,29	— 0,7
16 9,5	6,2	+ 1,31	— 0,5
52 9,7	5,6	+ 1,11	+ 1,4
44 33,0	4,8	+ 0,85	+ 0,2
43 1,6	4,8	+ 0,91	+ 0,6
39 43,2	4,7	+ 0,76	— 0,5
		[5] Astrea.	
— 12 53 52,9	3,5	— 6,93	— 25,0
59 45,2	3,5	— 6,63	— 23,1
— 13 5 39,7	3,5	— 6,60	— 27,4
		[6] Hebe.	
+ 7 19 29,8	2,5	+ 3,73	— 14,0
8 4 2,5	2,4	»	»
32,6	2,4	»	»
52,8	2,4	»	»
43,7	2,4	»	»
		[7] Iris.	
— 0 5 36,7	5,5	+ 2,44	+ 17,0
— 1 30 44,1	5,5	»	»
41 11,7	5,5	»	»

dióse al principio con una estrella que iba delante. (4) Algo deshecho.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.

[7] Iris.

		h m s	h m s	
Setiembre. 25	V.	9 37 52,2	21 56 59,04	7
» 26	»	33 31,2	33,93	7
» 27	»	29 12,3	10,83	7

[8] Flora.

(1) Octubre.. 27	»	12 8 26,9	2 34 8,23	7
(2) » 28	»	3 33,6	33 10,68	7
(3) » 30	»	11 53 45,8	31 14,43	7
(3) » 31	»	48 51,9	30 16,27	7
Noviembre. 21	»	10 8 39,8	12 35,35	7
» 22	»	4 8,7	0,11	7

[10] Higia.

Setiembre. 1	»	11 57 28,0	22 42 20,56	7
» 2	»	52 47,4	41 35,71	7
» 3	»	48 6,9	40 51,01	7

[11] Parténope.

(4) Mayo.... 3	»	12 11 38,1	14 59 29,58	7
» 20	»	10 49 19,1	43 58,53	7
» 21	»	44 33,3	8,51	7
» 23	»	35 4,6	41 31,37	7

(1) Viento. (2) Difícilmente visible. (3) Algo deshecho.

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O—C. Δ α.	Δ δ.

[7] Iris.

— 1° 46′ 21″,3	5″,5	s »	′ ″ »
51 25,5	5,5	»	»
56 24,5	5,5	»	»

[8] Flora.

+ 2 21 18,5	6,2	+ 8,26	+ 47,4
17 59,1	6,2	+ 8,43	+ 46,1
11 57,2	6,2	+ 8,36	+ 45,2
9 14,9	6,2	+ 8,43	+ 45,0
8 43,0	5,8	»	»
11 34,3	5,8	»	»

[10] Higia.

— 3 17 38,7	2,8	— 3,49	— 22,3
21 37,7	2,8	— 3,49	— 22,5
25 39,2	2,8	— 3,44	— 23,7

[11] Parténope.

— 8 56 22,9	4,7	+ 2,90	— 14,0
— 7 59 48,8	4,6	+ 2,97	— 13,8
57 32,9	4,5	+ 2,91	— 14,8
53 24,9	4,5	»	»

---

(4) Nubes.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.

[13] Egeria.

		h m s	h m s	
Abril.... 28	V.	11 22 51,1	13 50 51,78	7
» 29	»	17 52,6	49 48,98	7
» 30	»	12 54,8	48 46,91	7
(1) Mayo.... 3	»	10 58 5,9	45 45,23	4

[15] Eunomia.

(2) Setiembre. 6	»	11 35 5,1	22 39 36,75	7
» 22	»	10 18 14,9	25 38,78	7
» 24	»	8 57,4	24 12,82	7
» 25	»	4 20,9	23 32,12	7
» 26	»	9 59 45,9	22 52,92	7
» 27	»	55 12,4	15,23	7

[17] Tetis.

Noviembre. 20	»	10 59 30,1	2 59 37,47	7
» 21	»	54 40,1	58 43,24	7

[18] Melpómene.

Julio.... 21	»	11 31 55,0	19 31 8,00	7
» 22	»	27 0,3	30 9,07	7
» 23	»	22 6,0	29 10,46	7
» 24	»	17 12,0	28 12,30	7
» 26	»	7 26,0	26 17,75	6

(1) Nubes. (2) Algo deshecho.

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O—C. Δ α.	Δ δ.
[13] Egeria.			
— 5° 38′ 21″,9	4″,1	+ 0s,96	— 13″,9
40 3,1	4,0	+ 0,83	— 15,5
41 49,1	4,0	+ 0,79	— 17,0
»	»	+ 0,65	»
[15] Eunomia.			
+ 9 21 31,7	3,6	+ 8,53	+ 79,0
8 44 24,6	3,6	+ 8,31	+ 77,7
37 28,9	3,6	+ 8,15	+ 79,3
33 52,3	3,6	+ 8,16	+ 78,3
30 11,6	3,6	+ 8,11	+ 77,2
26 29,3	3,6	+ 8,00	+ 77,8
[17] Tetis.			
+ 8 16 28,1	2,6	+ 0,71	— 2,5
14 8,2	2,6	+ 0,57	— 1,6
[18] Melpómene.			
— 10 37 14,8	6,2	— 0,10	— 5,3
45 13,2	6,2	— 0,10	— 5,7
53 19,2	6,3	— 0,12	— 5,4
— 11 1 34,6	6,3	— 0,12	— 6,7
18 24,4	6,3	— 0,01	— 6,8

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.

[32] Pomona.

Abril....	7	V.	11ʰ 49ᵐ 22ˢ,1	12ʰ 54ᵐ 39ˢ,48	7

[33] Polimnia.

Julio.....	21	»	11 45 24,6	19 44 39,82	7
»	22	»	40 36,5	43 47,53	7
»	23	»	35 48,6	42 55,39	7
»	24	»	31 1,1	3,61	6
»	26	»	21 27,3	40 21,34	7

[40] Harmonía.

Abril....	7	»	11 19 27,9	12 24 40,34	7

[46] Hestia.

Julio.....	21	»	11 52 46,6	19 52 2,99	7
»	22	»	47 54,8	51 6,99	7
»	23	»	43 3,0	50 10,99	7
»	24	»	38 11,4	49 15,14	7
»	26	»	28 29,2	47 24,46	7

[49] Pales.

Agosto...	11	»	11 39 29,7	21 1 31,63	7
»	12	»	34 43,6	0 41,30	7
»	13	»	29 57,8	20 59 51,30	7
(1) »	16	»	15 42,1	57 22,91	7

(1) Débil; cielo fosco.

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O—C. Δ α	Δ δ.

[32] Pomona.

— 9° 57′ 40″,5	4″,9	— 0ˢ,60	+ 4″,1

[33] Polimnia.

— 25 0 3,0	7,8	— 8,97	— 21,7
1 46,6	7,8	— 8,91	— 24,5
3 21,2	7,8	— 8,92	— 23,3
4 54,0	7,8	— 8,89	— 25,5
7 37,2	7,8	— 8,85	— 24,1

[40] Harmonía.

+ 5 12 9,4	3,7	+ 2,42	— 17,0

[46] Hestia.

— 17 9 11,4	6,0	+ 0,76	— 0,2
12 18,6	6,0	+ 0,93	+ 1,9
15 29,8	6,1	+ 0,96	+ 1,6
18 41,0	6,1	+ 0,93	+ 2,6
25 3,3	6,1	+ 0,92	+ 3,3

[49] Pales.

— 14 45 22,5	4,2	+ 7,11	+ 61,2
47 59,6	4,2	+ 7,04	+ 57,8
50 30,7	4,2	+ 7,09	+ 59,8
58 7,5	4,2	+ 6,97	+ 61,5

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.

[53] Calipso.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
		h m s	h m s	
(1) Octubre.. 27	V.	10 38 6,0	1 3 32,55	7
(2) » 30	»	24 8,8	1 22,66	6

[59] Elpis.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
Agosto... 11	»	11 16 24,0	20 38 22,14	7
» 12	»	11 41,6	37 35,55	7
» 13	»	6 59,9	36 49,65	7
(3) » 16	»	10 52 58,7	34 35,72	7

[63] Ausonia.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
Agosto... 11	»	11 30 2,7	20 52 3,12	7
» 12	»	25 7,8	51 3,90	7
» 13	»	20 13,6	50 5,51	5
(3) » 16	»	5 37,2	47 16,34	7

[67] Asia.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
(1) Octubre.. 27	»	10 27 7,4	0 52 32,14	7
(4) » 30	»	13 34,0	50 46,16	7

[69] Hesperia.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
(5) Julio.... 21	»	11 22 38,4	19 21 49,83	5
» 22	»	17 57,2	4,43	7
(5) » 23	»	13 16,1	20 19,16	6
» 24	»	8 35,7	19 34,58	7
» 26	»	10 59 16,0	18 6,40	7

(1) Viento. (2) Muy débil. (3) Cielo fosco. (4) Algo

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O—C. Δ α.	Δ δ.
	[53] Calipso.		
— 1° 11′ 13″,0	4″,2	— 0ˢ,80	— 4″,2
24 51,3	4,2	»	»
	[59] Elpis.		
— 9 36 33,0	4,4	+ 0,28	+ 0,5
43 16,9	4,4	+ 0,20	+ 1,5
50 6,7	4,4	+ 0,24	— 1,0
— 10 10 37,5	4,4	+ 0,10	0,0
	[63] Ausonia.		
— 22 12 5,6	6,8	+ 0,62	— 19,9
11 54,0	6,7	+ 0,64	— 20,9
34,0	6,7	+ 0,64	— 20,3
9 55,3	6,7	+ 0,69	— 21,5
	[67] Asia.		
+ 5 32 40,4	3,9	— 2,49	— 10,5
11 12,4	3,9	»	»
	[69] Hesperia.		
— 10 35 3,2	2,8	— 0,30	+ 2,5
37 49,2	2,8	— 0,19	— 0,3
40 34,9	2,8	— 0,36	+ 0,4
43 21.4	2,8	— 0,24	+ 3,3
49 9,6	2,7	— 0,45	+ 3,0

deshecho. (5) Débil.

FECHAS. — 1873.	Observador.	Tiempo medio de Madrid.	Ascension recta aparente.	Hilos.
		[92] Undina.		
		h m s	h m s	
Setiembre. 22	V.	10 58 59,7	23 6 30,24	7
» 24	»	49 51,5	5 13,69	7
» 25	»	45 18,5	4 36,49	7
» 26	»	40 46,3	0,13	7
» 27	»	36 15,0	3 24,62	6
		[94] Aurora.		
Noviembre. 20	»	10 37 9,2	2 37 12,86	7
» 21	»	32 25,1	36 24,60	7
		[103] Hera.		
(1) Diciembre. 9	»	10 45 22,8	4 0 22,47	7
» 10	»	40 37,3	3 59 32,74	7
» 11	»	35 52,7	58 43,89	7
(2) » 12	»	31 9,4	57 56,43	5
(3) » 13	»	26 26,6	9,38	7

(1) Algo deshecho. (2) Muy débil. (3) Tranquilo.

Declinacion aparente.	Paralaje.	Correccion de la efeméride. O—C. Δ α.	Δ δ.
[92] Undina.			
— 20° 18′ 12″,9	4″,0	+ 1s,10	+ 1″,6
24 23,5	4,0	+ 1,12	+ 0,5
27 11,0	4,0	+ 1,07	— 0,1
29 44,6	4,0	+ 1,04	+ 1,2
32 6,6	4,0	+ 0,98	+ 2,0
[94] Aurora.			
+ 24 23 39,0	1,3	+ 5,96	+ 36,5
20 58,8	1,3	+ 5,88	+ 37,2
[103] Hera.			
+ 12 42 18,8	2,3	— 0,28	— 3,1
41 38,8	2,3	— 0,34	— 6,7
8,1	2,3	— 0,45	— 7,0
40 44,7	2,3	— 0,16	— 5,9
28,8	2,3	— 0,47	— 5,3

VARIEDADES.

Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales.
Programa para la adjudicacion de premios en el año de 1877.

Artículo 1.° La Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporacion, los temas siguientes:

I.

«Plan *razonado y minucioso de un* Tratado completo de Matemáticas »puras, *en el cual se presente esta ciencia constituida, no como ahora lo »está, por lo regular, en el órden histórico ó de invencion, sino como aspi»ra á estarlo y debe constituirse, al fin, de conformidad con los principios »de la lógica.*»

Considerando que en Matemáticas es indudablemente mucho lo que se ha trabajado y conseguido, y mucho tambien lo que falta todavía por adelantar; que hay abundante copia de materiales reunidos y perfectamente elaborados, pero que existe gran divergencia de pareceres y procedimientos, cuando de concertarlos y distribuirlos se trata, para componer con ellos una entidad armónica; lo que desea y pide la Academia es, que respetando cuanto merezca respetarse y conservarse, y sin prescindir por afan irreflexivo de innovar y reformar de lo ya con mesura y buen acierto edificado, se exponga con claridad y precision el método preferible en lo sucesivo para constituir, enseñar y aprender tan vasta é importantísima ciencia. Pero los concurrentes al certámen no se limitarán á esto solamente; á poner de relieve la conexion de las varias partes de las matemáticas, la filiacion más natural y sencilla de sus proposiciones fundamentales, y de las subalternas de mayor trascendencia, y la armonía del conjunto; sino que cuidarán de indicar la mejor manera de convertir el Plan en verdadero Tratado de la ciencia, utilizable en la enseñanza, ora con citas de autores conocidos, de cuyas obras puedan copiarse ó extractarse las teorías parciales que, intercaladas en el órden y lugar oportunos, han de componer el nuevo libro, ora con sucintas disertaciones sobre aquellos puntos de doctrina que consideren de importancia suma, y no juzguen bien expuestos, razonados y discutidos en ninguna publicacion anterior.

II.

«*Obtencion del niquel con minerales del pais, acompañando á la memoria descriptiva del procedimiento empleado,* doscientos gramos *del niquel, y muestras en igual peso ó por lo menos de* cien gramos, *de todos los productos que justifiquen que dicha obtencion ha tenido lugar en España.*»

III.

«*Estudio sobre las circunscripciones agrícolas y botánicas de la Península relacionadas con las diversas causas que las determinan, y muy principalmente con la constitucion geológica.*»

2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mencion honorífica.*

3.° El *premio* consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicacion; una medalla de oro, de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesion pública entregará el Sr. Presidente de la Corporacion á quien le hubiese merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribucion pecuniaria al mismo autor ó concurrente premiado de 1.500 pesetas; impresion por cuenta de la Academia, en la Coleccion de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada; y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

4.° El *premio* se adjudicará á las Memorias que no solo se distingan por su relevante mérito científico, sino tambien por el órden y método de exposicion de materias y redaccion bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicacion.

5.° El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del *premio* y adjudicados del mismo modo; y en la impresion de la Memoria coleccionada con las de la Academia y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

6.° El *accesit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas, y que versen sobre los mismos temas: ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporacion, á las impuestas para la adjudicacion ú obtencion del premio.

7.° La *mencion honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accesit,* que se entregará tambien en sesion pública al autor ó concurrente agraciado, ó á persona que le represente.

8.° La mencion honorífica se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algun concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicacion por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accesit.*

9.° El concurso quedará abierto desde el dia de la publicacion de este Programa en la Gaceta de Madrid, y cerrado en 31 de diciembre de 1877, hasta cuyo dia se recibirán en la Secretaría de la Academia cuantas Memorias se presenten.

10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó estranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporacion.

11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latin.

12. Las Memorias que se presenten optando á premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicacion del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta, que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, tambien cerrado, dentro del cual constarán el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

13. De las Memorias ó pliegos cerrados el Secretario de la Academia dará á la persona que los presente y entregue un recibo, en que consten el lema que los distingue y el número de órden de su presentacion.

14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accesit*, se abrirán en la sesion en que se hubiese acordado otorgar á sus autores una ú otra distincion y recompensa; y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mencion honorífica*, no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decision de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la Gaceta de Madrid los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas; y, en el improrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certámen, y otorgarán por escrito la vénia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Trascurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden, sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distincion que legitimamente les corresponde.

16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accesit*, ni con *mencion honorífica*, se quemarán en la misma sesion en que la absoluta falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiese decidido. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mencion honorífica*, cuando en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubiesen concedido permiso para abrirlos.

17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporacion, podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado: como modelos de construccion, atlas ó dibujos complicados de reproduccion difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certámen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las *Memorias* que respectivamente les correspondan.

Madrid 5 de enero de 1876.=El Secretario perpétuo, *Antonio Aguilar y Vela.*

CIENCIAS EXACTAS.

FÍSICA MATEMÁTICA.

Teoría matemática de la Luz; por D. José Echegaray, *individuo de la Real Academia de Ciencias.*

(*Continuacion.*)

1.ª Debemos eliminar x, y, z de F por medio de las tres relaciones

$$x = \varphi(t, u, v); \quad y = \chi(t, u, v); \quad z = \psi(t, u, v) \qquad (1)$$

de suerte que tendremos

$$F(x, y, z) = F\Big[\varphi(t, u, v), \chi(t, u, v) \psi(t, u, v)\Big]$$

2.ª Supongamos que la primera integracion se refiere á x: tendremos

$$U = \int_{a''}^{b''} \int_{a'}^{b'} dy \,.\, dz \int_{a}^{b} F\, dx.$$

Sustituyamos á la variable x la variable t por medio de la ecuacion

$$x = \varphi(t, u, v)$$

en la que u, v son funciones de t determinadas por las dos últimas relaciones (1).

Diferenciando tendremos

$$dx = \left[\varphi'_t + \varphi'_u \frac{du}{dt} + \varphi'_v \frac{dv}{dt}\right] dt,$$

y para eliminar

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt},$$

tendremos asimismo

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \chi'_t + \chi'_u \frac{du}{dt} + \chi'_v \frac{dv}{dt} \\ 0 &= \psi'_t + \psi'_u \frac{du}{dt} + \psi'_v \frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

que se obtienen diferenciando

$$y = \chi, \quad z = \psi,$$

y observando que en la primera integracion y, z son constantes.

Las ecuaciones (2) dan

$$\frac{du}{dt} = \frac{\psi'_t \chi'_v - \chi'_t \psi'_v}{\chi'_u \psi'_v - \psi'_u \chi'_v} \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\psi'_u \chi'_t - \psi'_t \chi'_u}{\chi'_u \psi'_v - \psi'_u \chi'_v} \; ;$$

y sustituyendo en el valor de dx

$$dx = \Big[\varphi'_t(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v) + \varphi'_u(\psi'_t\chi'_v - \chi'_t\psi'_v) +$$

$$+ \varphi'_v(\psi'_u\chi'_t - \psi'_t\chi'_u)\Big] \frac{dt}{\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v}.$$

La integral U tomará, pues, el valor

$$U = \int_{a''}^{b''}\int_{a'}^{b'}\int_{c}^{d} F\Big[\varphi'_t(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v) +$$

$$+ \varphi'_u(\psi'_t\chi'_v - \chi'_t\psi'_v) + \varphi'_v(\psi'_u\chi'_t - \psi'_t\chi'_u)\Big]$$

$$\frac{dt}{\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v}\, dy\,.\,dz.$$

Queda el problema reducido á eliminar las dos únicas variables y, z en funcion de u, v por medio de las relaciones

$$y = \chi(t, u, v)\ ;\quad z = \psi(t, u, v),$$

para lo cual basta sustituir segun la fórmula (2) del núm. (69) á dy, dz, el producto $(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v)\,du\,.\,dv$.

Tendremos, pues, finalmente

$$U = \int_{c''}^{d''}\int_{c'}^{d'}\int_{c}^{d} F(\varphi, \chi, \psi)\Big[\varphi'_t(\chi'_u\psi'_v - \psi'_u\chi'_v) +$$

$$+ \varphi'_u(\psi'_t\chi'_v - \chi'_t\psi'_v) + \varphi'_v(\psi'_u\chi'_t - \psi'_t\chi'_u)\Big] dt\,.\,du\,.\,dv. \quad (3)$$

3.ª En cuanto á los límites, basta despejar x, y, z de los dos sistemas:

1.er sistema. $a = \varphi(t, u, v)$; $a' = \chi(t, u, v)$; $a'' = \psi(t, u, v)$

2.º sistema. $b = \varphi(t, u, v)$; $b' = \chi(t, u, v)$; $b'' = \psi(t, u, v)$.

Los valores $t = c$; $u = c'$; $v = c''$ deducidos del 1.er sistema, forman los límites inferiores.

Los $t = d$; $u = d'$; $v = d''$ deducidos del 2.º, los límites superiores.

Núm. 71. *Aplicaciones.* 1.ª Supongamos la integral doble

$$U = \int_a^{a'} \int_b^{b'} F(x, y)\, dx, dy,$$

en la que x, y representen dos coordenadas rectangulares de un punto del plano de las $[x, y]$, y supongamos que á estas coordenadas se trata de sustituir otras dos t, u rectangulares tambien; tendremos

$$x = t \cos.\alpha - u \operatorname{sen}.\alpha$$

$$y = t \operatorname{sen}.\alpha + u \cos.\alpha;$$

y por lo tanto (*núm.* 68)

$$\varphi'_t = \cos.\alpha \ ; \ \varphi'_u = -\operatorname{sen}.\alpha \ ; \ \psi'_t = \operatorname{sen}.\alpha \ ; \ \psi'_u = \cos.\alpha,$$

de donde

$$\varphi'_t \psi'_u - \varphi'_u \psi'_t = \cos.^2 \alpha + \operatorname{sen}.^1 \alpha = 1.$$

Así, pues,

$$U = \int_c^d \int_{c'}^{d'} F(t \cos.\alpha - u \operatorname{sen}.\alpha, t \operatorname{sen}.\alpha + u \cos.\alpha)\, du.\, dt.$$

De esta fórmula resulta que en el caso particular de que tratamos basta eliminar del coeficiente diferencial F, x é y en funcion de u, t, y sustituir á dx, dy el producto du, dt.

Núm. 72. Fácilmente podia preveerse este resultado; en efecto, $F[x, y]$ representa una cierta magnitud, densidad, masa, temperatura, etc., correspondiente ó afecta al punto x, y; luego multiplicando por el elemento de *área* que se refiere á este punto sea cual fuere este elemento y su forma, la masa será la misma en todos los casos. Es tan sencilla esta idea, que creemos inútil explanarla.

Núm. 73. 2.ª Supongamos la integral triple

$$U = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_c^{c'} F(x, y, z)\, dx, dy, dz,$$

en la que x, y, z representan las tres coordenadas rectangulares de un punto del espacio, y supongamos que á estas tres coordenadas se desea sustituir otras tres coordenadas t, u, v, tambien rectangulares, enlazadas con las primeras por las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,t + b\,u + c\,v \\ y &= a'\,t + b'\,u + c'\,v \\ z &= a''\,t + b''\,u + c''\,v \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Aplicando la fórmula (3) del *núm.* 70 tendremos:

$$\varphi(t, u, v) = a\,t + b\,u + c\,v$$

$$\chi(t, u, v) = a'\,t + b'\,u + c'\,v$$

$$\psi(t, u, v) = a''t + b''u + c''v$$

de donde se deduce

$$\varphi'_t = a \ ; \ \varphi'_u = b \ ; \ \varphi'_v = c$$

$$\chi'_t = a' \ ; \ \chi'_u = b' \ ; \ \chi'_v = c'$$

$$\psi'_t = a''; \ \psi'_u = b''; \ \psi'_v = c''$$

y por lo tanto

$$\varphi'_t (\chi'_u \psi'_v - \chi'_v \psi'_u) + \varphi'_u (\psi'_t \chi'_v - \psi'_v \chi'_t) + \varphi'_v (\chi'_t \psi'_u -$$

$$\chi'_u \psi'_t) = a (b' c'' - c' b'') + b (a'' c' - a' c'') + c (a' b'' - a'' b')$$

$$= ab' c'' - ac' b'' + ca' b'' - ba' c'' + bc' a'' - cb' a''$$

pero este es el denominador de los valores que se obtienen para t, u, v, en las ecuaciones (1), y como estos valores son:

$$\left.\begin{aligned} t &= ax + a'y + a''z \\ u &= bx + b'y + b''z \\ v &= cx + c'y + c''z \end{aligned}\right\}$$

resulta que dicho denominador es igual á la *unidad;* lo cual, por otra parte, se demuestra directamente recordando las relaciones que existen entre los nueve constantes.

Resultará en vista de lo dicho:

$$U = \int_d^{d'} \int_e^{e'} \int_f^{f'} F(at + bu + cv, \ a't + b'u + c'v,$$

$$a''t + b'u + c''u) \, dt \, . \, du \, . \, dv;$$

luego en el caso particular de que se trata, basta eliminar

x, y, z, del coeficiente F, y sustituir á dx, dy, dz, el producto dt, du, dv.

Núm. 73. A esta misma consecuencia podría llegarse directamente por consideraciones análogas á las del *núm.* 72.

Superficies polares recíprocas por relacion á una esfera (*).

Núm. 74. ***Relacion armónica.*** Cuando cuatro puntos a, b, c, d (*fig.* 21), están distribuidos sobre una recta xx de modo que entre los segmentos

$$ca,\ cb,\ da,\ db,$$

contados con el signo que les corresponda segun la direccion que se considere como positiva en dicha recta xx, se verifica la relacion

$$\frac{ca}{cb} = -\frac{da}{db}, \qquad (1)$$

se dice que estos puntos están en relacion *armónica*, y á cada par de puntos a, b; c, d, se les dá el nombre de conjugados.

Representando por a, c, b, las tres distancias da, dc, db, tendremos

$$ca = a - c\ ;\ \ cb = b - c\ ;\ \ da = a\ ;\ \ db = b;$$

y por lo tanto, la relacion armónica se convertirá en

$$\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a}{b}$$

(*) Véase para mayor claridad mi *Tratado de Geometría superior*.

de donde

$$ab - cb = - ab + ac,$$

ó bien

$$2\,ab = cb + ca,$$

ó finalmente

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

que tambien puede presentarse bajo esta forma:

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}. \qquad (2)$$

La ecuacion (2) define como la (1) la relacion armónica, y puede enunciarse diciendo que *la relacion inversa de la distancia de un punto al conjugado es igual á la semi-suma de las relaciones inversas del mismo punto á los otros dos.*

Núm. 75. Si cuatro puntos a, b, c, d (*fig.* 22), en relacion armónica, se proyectan sobre otra recta $x'\,x'$, ó sobre un plano $p\,p$, las proyecciones a', b', c', d', que evidentemente estarán en línea recta, forman, como los puntos dados, una relacion armónica.

En efecto, se sabe que

$$\frac{d'\,a'}{d\ a} = \frac{d'\ c'}{d\ c} = \frac{d'\ b'}{d\ b} = \text{constante} = m,$$

ó bien abreviadamente,

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \text{constante} = m,$$

de donde

$$a' = am;\ c' = cm;\ b' = bm. \qquad (3)$$

Puesto que los puntos a, b, c, d, están en relacion armónica, tendremos

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2},$$

y dividiendo los dos miembros por m,

$$\frac{1}{cm} = \frac{\frac{1}{am} + \frac{1}{bm}}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{c'} = \frac{\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}}{2},$$

luego los puntos a', b', c', d' tambien están en relacion armónica.

Núm. 76. *Generalizacion.* Supongamos que sobre la recta xx (*fig.* 21) hay dos puntos c, d, y las abscisas $db = b$, $da = a$ de otros dos, contadas desde d como origen, son espresiones imaginarias conjugadas

$$b = m - n\sqrt{-1};\quad a = m + n\sqrt{-1};$$

en este caso no existirán los puntos a y b, pero por estension se dice que entre los dos puntos reales c, d, y los dos imaginarios, existe relacion armónica si se verifica

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{m + n\sqrt{-1}} + \frac{1}{m - n\sqrt{-1}}}{2}.$$

Que esta igualdad es posible siendo c cantidad real es evidente, porque tendremos

$$\frac{1}{c}=\frac{m}{m^2+n^2},$$

ecuacion entre cantidades reales.

Núm. 77. *Polos y planos polares. Problema.* Sea O (*figura* 23) una esfera de radio r, y D un punto cualquiera interior ó esterior. Tracemos una secante DA; supongamos que corta á la esfera en dos puntos A, B, y determinemos el punto C conjugado armónico con D. Es evidente que variando la secante variará el punto C, y se trata de determinar el lugar geométrico de dichos puntos.

Resolucion. Tomemos D como origen de coordenadas; DO por eje de las z, y Dx, Dy, perpendiculares á Dz y entre sí, por ejes de las x y de las y.

La ecuacion de la esfera, haciendo $DO=d$, será

$$x^2+y^2+(z-d)^2=r^2, \tag{1}$$

y las ecuaciones de la secante arbitraria DA

$$x=az;\quad y=bz, \tag{2}$$

en las que a y b son dos constantes arbitrarias que determinan la posicion de la secante segun el valor que reciben.

Supongamos, por último, que Da es la proyeccion sobre el plano zx de dicha secante: Db' y Da' serán los valores de z para los puntos de interseccion B, A.

Hagamos

$$Db'=z';\quad Da'=z'';\quad Dc'=z_1.$$

Para determinar los valores de z' y z'' debemos eliminar x é y, entre las ecuaciones (1) y (2), y tendremos

$$a^2z^2+b^2z^2+(z-d)^2=r^2,$$

ó bien

$$(a^2 + b^2 + 1)z^2 - 2\,dz + d^2 - r^2 = 0\,.$$

Las dos raices de esta ecuacion serán z' y z'', pero hagamos $z = \frac{1}{\zeta}$.

La ecuacion resultante

$$\zeta^2 - \frac{2\,d}{d^2 - r^2}\zeta + \frac{a^2 + d^2 + 1}{d^2 - r^2} = 0$$

tendrá por raices $\frac{1}{z'}$ y $\frac{1}{z''}$, y por lo tanto

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''} = \frac{2\,d}{d^2 - r^2}\,.$$

Pero si los puntos D, B, C, A, están en relacion armónica tambien lo estarán (*núm.* 75) los D, b', c', a'; luego

$$\frac{1}{z_1} = \frac{\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}}{2}\,,$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{z_1} = \frac{d}{d^2 - r^2} \quad \text{ó bien} \quad z_1 = d - \frac{r^2}{d}\,. \qquad (3)$$

De aquí se deduce esta consecuencia importante: que la z_1 es constante para todos los puntos del lugar geométrico, y que, por lo tanto, *dicho lugar geométrico es un plano perpen-*

dicular á la recta OD trazado á la distancia $d - \frac{r^2}{d}$ *del punto*

D ó á la distancia $\frac{r^2}{d}$ *del centro de la esfera.*

Al punto D se le da el nombre de *polo*, al plano que hemos hallado el de *plano polar*, y vemos que el plano polar es perpendicular á la recta que une el polo al centro de la esfera, y su distancia d' al centro está determinada por la relacion

$$d' = \frac{r^2}{d}.$$

Núm. 78. Puede tambien decirse que el *polo*, la *esfera* y el *plano polar* dividen armónicamente todos los secantes que pasan por el polo; y nótese que la definicion es general aunque la secante no corte á la esfera, porque si bien en estas hipótesis las dos raices de la ecuacion en ζ serán imaginarias, siempre subsistirá la relacion

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''} = \frac{2\,d}{d^2 - r^2},$$

y podremos aplicar lo expuesto en el *núm.* 76.

Núm. 79. Nada mas fácil que determinar el plano polar dado el polo, ó recíprocamente.

1.° Supongamos que el polo D (*fig.* 24) es *esterior* á la esfera; trazando desde dicho punto una tangente DT, y bajando desde el punto de contacto T un plano PP perpendicular á OD, este será el plano polar. En efecto, si trazamos TC perpendicular á OD, tendremos $OT^2 = OD \times OC$, ó bien $OC = \frac{R^2}{OD}$; luego PP es el plano polar buscado (*núm.* 77).

2.° Si el polo D es interior (*fig.* 25) basta hacer pasar por OD un plano, levantar en D una recta DT perpendicular á

OC, y por el punto en que T corta á la esfera trazar, siempre en dicho plano, TC tangente á la circunferencia interseccion del plano secante y de la esfera.

Trazando por C un plano PP perpendicular á OC, obtendremos el plano polar.

Por construcciones análogas hallaríamos el polo dado al plano polar.

Núm. 80. *Problema.* Sea (*fig.* 26)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

la ecuacion de una esfera, y

$$x \cos.\alpha + y \cos.\beta + z \cos.\gamma - p = 0$$

la ecuacion de un plano PP que dista p del origen, y cuya normal forma con los ejes ángulos α, β, γ.

Se trata de determinar las tres coordenadas x_1, y_1, z_1, del polo.

Resolucion. Bajemos OA perpendicular sobre PP, y determinemos en esta recta el punto B de modo que se tenga

$$OB = \frac{r^2}{OA} = \frac{r^2}{p}.$$

El punto B será el polo buscado, y sus coordenadas serán

$$x_1 = OB \cos.\alpha \; ; \; y_1 = OB \cos.\beta \; ; \; z_1 = OB \cos.\gamma,$$

ó bien

$$x_1 = \frac{r^2}{p} \cos.\alpha \; ; \; y_1 = \frac{r^2}{p} \cos.\beta \; ; \; z_1 = \frac{r^2}{p} \cos.\gamma. \quad (4)$$

Estas ecuaciones pueden aún escribirse bajo la forma

$$\frac{x_1}{\cos.\alpha}=\frac{y_1}{\cos.\beta}=\frac{z_1}{\cos.\gamma}=\frac{r^2}{p}. \qquad (4')$$

Núm. 81. *Observaciones.* 1.ª Si el rádio de la esfera es igual á 1, podrán escribirse las ecuaciones anteriores bajo esta forma:

$$\frac{x_1}{\cos.\alpha}=\frac{y_1}{\cos.\beta}=\frac{z_1}{\cos.\gamma}=\frac{1}{p}.$$

2.ª Si la ecuacion del plano tiene la forma general

$$ax+by+cz-d=0,$$

á las ecuaciones (4′) deberán sustituirse estas otras:

$$\frac{x_1}{a}=\frac{y_1}{b}=\frac{z_1}{c}=\frac{r^2}{d}.$$

En efecto, se sabe que

$$\cos.\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \cos.\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

$$\cos.\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

y que la distancia p del origen al plano está dada por la fórmula

$$\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

y sustituyendo estos valores en (4'), resultará:

$$\frac{\dfrac{x_1}{a}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\dfrac{y_1}{b}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\dfrac{z_1}{c}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{r^2}{d}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

ó bien suprimiendo el radical

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b} = \frac{z_1}{c} = \frac{r^2}{d}.$$

Núm. 82. Supongamos que por un punto A pasan tres planos AP, AP', AP'', y determinemos, respecto á una esféra O, los tres polos correspondientes p, p', p''.

Si por el punto A y por cada uno de los tres polos hacemos pasar tres secantes Ap, Ap', Ap'', es evidente que la secante Ap quedará dividida por el plano AP, la esfera y el punto p en relacion armónica, y otro tanto podremos decir de las secantes Ap', Ap''. Resultan, pues, tres secantes que parten de un punto A, y que en los puntos p, p', p'', quedan divididas armónicamente. De aquí se deduce que el plano QQ'' que pasa por dichos tres puntos, es el plano polar del punto A por relacion á la esfera. Queda, pues, demostrado el siguiente

Teorema. Cuando tres planos pasan por un punto A, el plano que determina los tres polos es plano polar de dicho punto.

Núm. 83. *Superficies polares recíprocas.* Imaginemos que las cuatro constantes a, b, c, d, de un plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

dependen de dos parámetros variables α, β, de suerte que la ecuacion anterior es de la forma

$$f(\alpha, \beta)\, x + f_1(\alpha, \beta)\, y + f_2(\alpha, \beta)\, z + f_3(\alpha, \beta) = 0.$$

A cada sistema de valores α, β, corresponde un plano, y la *envolvente* de todos ellos es, segun se sabe, una superficie S, cuya ecuacion se obtiene eliminando α, β, entre las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c}
ax + by + cz + d = 0 \\[1em]
\dfrac{da}{d\alpha}\, x + \dfrac{db}{d\alpha}\, y + \dfrac{dc}{d\alpha}\, z + \dfrac{dd}{d\alpha} = 0 \\[1em]
\dfrac{da}{d\beta}\, x + \dfrac{db}{d\beta} + \dfrac{dc}{d\beta} + \dfrac{dd}{d\beta} = 0
\end{array}\right\}$$

(*Se continuará.*)

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMERICAS.

(Continuacion.)

CAPITULO I.

Resolucion de la ecuacion numérica del grado n, cuyas n raices son reales y desiguales.

§. 1.º

Enunciado de la cuestion.

Si representamos por

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \; \ldots\ldots \; \alpha_n,$$

n números, enteros ó fraccionarios ó irracionales, positivos ó negativos, la ecuacion general numérica del mismo grado n podrá escribirse de este modo:

$$(1) \quad x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0.$$

Y si por

$$-a, \; -b, \; -c, \; \ldots\ldots \; -k, \; -l,$$

designamos los n valores de x que, sustituidos en esta ecuacion en lugar de la incógnita, pueden satisfacerla, ó las n, comunmente denominadas, *raices* de la ecuacion propuesta, en vez de la expresion (1) podremos escribir esta otra:

$$(2) \quad (x+a)\;(x+b)\;(x+c)\;\ldots\ldots\;(x+k)\;(x+l) = 0$$

No precisamente los valores de x, sino estos valores tomados con signo contrario, ó los segundos términos de los binomios componentes del anterior producto, recibirán en lo sucesivo el nombre de *raices* de la ecuacion que se trata de resolver. Más natural sería lo primero; pero lo segundo, sobre no producir complicacion alguna, merece, como inmediatamente se advertirá, preferencia en la práctica.

Las n raices

$$+a, \ +b, \ +c, \ \ldots\ldots \ +l,$$

dependientes de los coeficientes conocidos

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3 \ \ldots\ldots \ \alpha_n,$$

y que nos proponemos determinar con el mayor grado de aproximacion posible, serán segun los casos:

Reales todas; ó todas *imaginarias conjugadas*, de la forma

$$m \pm n\sqrt{-1};$$

ó *reales* unas é *imaginarias* las demás.

Y, de cualquier especie ó forma que sean, podremos suponerlas:

Desiguales todas; ó, en totalidad ó en parte, muy poco discrepantes unas de otras, *iguales* casi, y hasta de idéntica expresion.

En este capítulo examinaremos el caso más sencillo, ó aquel en que las n raices de la ecuacion propuesta sean *reales* y propia ó sensiblemente *desiguales*.

§. 2.º

Principio fundamental del método.

Designando abreviadamente por

$$[a],\ [ab],\ [abc],\ \ldots\ldots\ [abc\ldots\ldots l],$$

las *sumas* de las n raices $a, b, c\ldots\ldots$, y de todos sus productos *binarios*, *ternarios*, *cuaternarios*, etc., etc., unos de otros distintos por alguno de los factores componentes, la ecuacion (2), equivalente á la (1), podrá representarse de este otro modo:

$$(3)\qquad x^n+[a]x^{n-1}+[ab]x^{n-2}+[abc]x^{n-3}+\ldots\ldots+$$
$$+[abc\ldots\ldots k]\,[abc\,,\ldots\ldots kl]=0'.$$

Y si de esta ecuacion, por cualquier procedimiento, dedujésemos otra, cuyas raices fuesen las potencias m de las a, b, $c\ldots\ldots l$, su composicion podria análogamente expresarse como sigue:

$$(4)\quad x^n+[a^m]\,x^{n-1}+[a^m b^m]+x^{n-2}+[a^m b^m c^m]\,x^{n-3}+\ldots\ldots+$$
$$+[a^m b^m c^m\ \ldots\ldots\ k^m]\,x+[a^m\,b^m\,c^m\ \ldots\ldots\ k^m\,l^m]=0.$$

Mas en el doble supuesto de ser m número entero muy elevado y como indefinidamente grande, y de hallarse las n raices de la (3) relacionadas conforme la siguiente serie de desigualdades indica,

$$a > b > c > \ldots\ldots > k > l,$$

la última ecuacion propende á confundirse con esta otra, mucho más sencilla:

$$(5)\quad x^n + a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} + a^m b^m c^m x^{n-3} + \ldots\ldots$$

$$+ a^m b^m c^m \ldots\ldots l^m = 0.$$

En efecto, si

$$a > b > c \ldots\ldots > l,$$

infiérese que

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1+h}; \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{1+h'}; \quad \frac{d}{a} = \frac{1}{1+h''} \ldots\ldots; \quad \text{y}$$

$$h < h' < h'' < \ldots\ldots$$

De donde se deduce que

$$\frac{b^m}{a^m} < \frac{1}{1+mh}; \quad \frac{c^m}{a^m} < \frac{1}{1+mh}; \quad \frac{d^m}{a^m} < \frac{1}{1+mh} \ldots\ldots;$$

y, por lo tanto, que

$$\frac{b^m + c^m + d^m \ldots\ldots}{a^m} < \frac{n-1}{1+mh}.$$

El numerador del segundo miembro de esta desigualdad es un número finito, y generalmente pequeño, que solo depende del grado de la ecuacion que se trata de resolver; y, por el contrario, el denominador puede aumentar indefinidamente con m, ó con el exponente arbitrario de la potencia á que en la ecuacion (4) se encuentran ó suponen elevadas las raices de la (3). Luego la suma

$$b^m + c^m + d^m \ldots\ldots$$

representa, conforme m crece, una cantidad cada vez menor, y, por último, insignificante ó despreciable con respecto al solo término a^m. A este primer término queda, pues, reducida la suma total, representada por el símbolo $[a^m]$. Y del propio modo se demostraria que las sumas análogas

$$[a^m b^m], \ [a^m b^m c^m], \ldots\ldots$$

propenden á confundirse con sus primeros términos

$$a^m b^m, \ a^m b^m c^m, \ldots\ldots$$

Aunque no con demasiada propiedad, ampliando un poco el significado de la palabra *límite*, diremos en adelante que el de la ecuacion (4) se halla representado por la (5).—El uso de la palabra *límite*, prévias las precedentes explicaciones, no parece que deba sernos prohibido en éste y otros casos análogos, como medio de simplificar el lenguaje y abreviar los razonamientos.

Adviértase ahora que si de la ecuacion (1), y sin el conocimiento prévio de las raices $a, b, c\ldots\ldots$, lográsemos deducir otra, equivalente á la (4), y averiguar luégo cuál es la ecuacion (5) hácia la cual la última converge, la (1) podria darse por resuelta. Dividiendo, en efecto, unos por otros,—el tercero por el segundo, el cuarto por el tercero, etc., etc.,—los coeficientes de la ecuacion (5), obtendríanse las potencias m de las n raices buscadas; y una simple operacion aritmética, que podria verificarse con auxilio de las tablas de logaritmos, completaría la investigacion de las mismas raices. Lo único que, si el exponente m fuese número *par*, quedaria indeterminado todavía, sería el *signo* de estas raices; pues, positivas ó negativas, todas producirian el mismo resultado elevándolas á la potencia m. Pero, despues de hallados sus valores absolutos, por division de los coeficientes de la ecuacion (5) en el orden referido, y extraccion de las raices m de los cocientes resultantes, los signos que deben precederlos se determinarán con auxilio de las diversas condiciones á que deben satisfacer, y que la ecuacion (1) comprende y claramente expresa. Lo importante y hasta de necesidad absoluta es averiguar cómo de esta ecuacion se pasa á la (4), y luégo á la (5), que en sí contiene y compendia la solucion completa del problema.

§. 3.º

Cómo de la ecuacion propuesta puede concluirse otra cuyas raices sean los cuadrados de las que se buscan.

Si la transformacion de la ecuacion (1) en la (4) hubiera de hacerse forzosamente de una sola vez, ó como por un solo impulso de la mente del calculador, la cosa sería por extremo difícil y complicada. Pero la índole del problema de ningun modo exige que así se proceda; pues de lo que únicamente se trata es de obtener por de pronto una ecuacion cuyas raices sean las potencias m, por lo regular muy elevadas, de las raices de la propuesta; y este número m, prescindiendo de su magnitud considerable, completamente arbitrario, de tal manera puede elegirse, que al deseado término de la operacion sea factible llegar, ó indefinidamente aproximarse, procediendo por grados, poco á poco, y con grandísima sencillez y probabilidad suma de acierto. Primero, en efecto, se deducirá, si así nos conviene, de la ecuacion propuesta otra cuyas raices sean los *cuadrados* de las que pretendemos determinar; otra luégo, cuyas raices sean los *cuadrados* de las de la segunda, ó las potencias 2^2 de las mismas raices incógnitas; y otra y otras sucesivamente, hasta donde fuere menester, cuyas raices sean los *cuadrados* de las raices de la ecuacion anterior, ó las potencias 2^3, 2^4, 2^5..... de las raices de la propuesta. La regla que nos sirva para verificar una transformacion, nos servirá para todas las demás consecutivas; y el trabajo de cálculo lo será exclusivamente de tiempo y de paciencia.

Y la regla para deducir de una ecuacion otra, cuyas raices sean los *cuadrados* de las de la primera, no puede ser más sencilla y hasta fácil de conservarse en la memoria. En efecto, si en la ecuacion (1)

$$x^{n} + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots\ldots + \alpha_n = 0,$$

sustituimos, en vez de la incógnita x, la expresion $x^{1/2}$, obtendremos esta otra:

$$x^{\frac{n}{2}} + \alpha_1 x^{\frac{n-1}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{n-2}{2}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{2}} + \ldots\ldots = 0.$$

La cual puede escribirse como sigue:

$$x^{\frac{n}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{n-2}{2}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{2}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{2}} + \ldots\ldots =$$

$$-\alpha_1 x^{\frac{n-1}{2}} - \alpha_3 x^{\frac{n-3}{2}} - \alpha_5 x^{\frac{n-5}{2}} - \alpha_7 x^{\frac{n-7}{2}} - \ldots\ldots$$

Y elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuacion, pasando luego al primero los términos del segundo, ordenando y *cambiando los signos de los términos de órden par*, segundo, cuarto, sexto....., conclúyese por último que:

$$(6)\quad \left.\begin{array}{c|c|c|c|c} x^{n}+\alpha_1^2 & x^{n-1}+\alpha_2^2 & x^{n-2}+\alpha_3^2 & x^{n-3}+\alpha_4^2 & x^{n-4}+\ldots\ldots \\ -2\alpha_2 & -2\alpha_1\alpha_3 & -2\alpha_2\alpha_4 & -2\alpha_3\alpha_5 & -\ldots\ldots \\ & +2\alpha_4 & +2\alpha_1\alpha_5 & +2\alpha_2\alpha_6 & +\ldots\ldots \\ & & -2\alpha_6 & -2\alpha_1\alpha_7 & -\ldots\ldots \\ & & & +2\alpha_8 & +\ldots\ldots \\ & & & & -\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

El cambio de signos indicado tiene por objeto asimilar en un todo esta ecuacion á la propuesta, equivalente á la (2):

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ \ldots\ldots\ (x+l)=0.$$

Pues sin el cambio, la (6) equivaldria á

$$(x-a^2)\ (x-b^2)\ (x-c^2)\ \ldots\ldots\ (x-l^2)=0,$$

y, verificada aquella mutacion de signos, equivale á

$$(x+a^2)\ (x+b^2)\ (x+c^2)\ \ldots\ldots\ (x+l^2)=0:$$

con lo cual se gana más que se pierde en la práctica ó aplicacion del método que vamos exponiendo.

Comparando con la ecuacion (1) la (6), dedúcese que «un coeficiente cualquiera de esta última es igual al cuadrado del coeficiente del mismo órden ó lugar de la primera; *ménos* el doble producto de los dos coeficientes equidistantes, ó anterior y posterior, más próximos; *más* el doble producto de los otros dos coeficientes equidistantes inmediatos; *ménos*..... hasta obtener un doble producto *nulo*, por corresponder alguno de los factores á lugares extraños á la ecuacion propuesta, anterior al primero ó posterior al último.»—En la aplicacion de esta regla la ecuacion que se trata de transformar, siempre del grado n, debe considerarse como *completa:* para lo cual bastará suponer que los términos deficientes entre el primero y el último, que en los diversos casos particulares pudieren existir, figuran en realidad como otros tantos términos precedidos del coeficiente comun *cero* (*).

(*) De la ecuacion propuesta no solo puede deducirse con facilidad otra ecuacion cuyas raices sean los *cuadrados* de las raices de la primera, sino los *cubos* de aquellas mismas raices. Poniendo, en efecto, por x

§. 4.°

Resultado final de la transformacion explicada en el párrafo anterior, multitud de veces repetida.

El arte ó manera de pasar de la ecuacion (1) á la (4), queda con esto explicado; pero, y es lo importante, ¿cómo pasaremos de la (4) á la (5), ó en qué conoceremos que en al-

---

la expresion $x^{1/3}$, la ecuacion designada por (1) podrá considerarse como compuesta de estos tres distintos grupos de términos:

$$A = x^{\frac{n}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{3}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{3}} + \ldots\ldots ;$$

$$B = \alpha_1 x^{\frac{n-1}{3}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{3}} + \alpha_7 x^{\frac{n-7}{3}} + \ldots\ldots ; \quad \text{y}$$

$$C = \alpha_2 x^{\frac{n-2}{3}} + \alpha_5 x^{\frac{n-5}{3}} + \alpha_8 x^{\frac{n-8}{3}} + \ldots\ldots$$

Pero el *cubo* de la suma $A + B + C$, por ser esta suma igual á *cero*, se reduce á la siguiente expresion:

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3, ABC = 0.$$

Y como los *cubos* de A, B y C, y el producto de estos tres polinomios, son evidentemente polinomios racionales con respecto á x, la proposicion queda demostrada.

La *transformada* final de la ecuacion propuesta se encontraria algo más pronto por elevaciones sucesivas de sus raices al cubo que al cuadrado, con la circunstancia favorable de que los *signos* de las raices reales permanecerian invariables en el primer caso, mientras que en el segundo varían desde luégo y se convierten en *positivos:* lo cual dificulta la distincion de las raices, de la última transformada deducidas. Pero la ley de formacion de las diversas ecuaciones, encontradas por elevaciones al cubo, es tan complicada, que en la práctica debe preferirse el procedimiento de transformacion del texto al indicado en esta nota.

guna de las ecuaciones transformadas sucesivas las raices de la propuesta, elevadas á la potencia m, se hallan ya *separadas*, ó dispuestas en el órden en que la (5) las contiene en sus varios coeficientes?

Para contestar á esta pregunta comencemos por advertir que si $m' > m$, y la transformada, cuyas raices son las potencias m de las raices de la propuesta, posee ya esta composicion:

$$x^n + a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} + \ldots\ldots + a^m b^m \ldots\ldots l^m = 0,$$

aquella cuyas raices sean las potencias m' con mayor motivo tendrá composicion análoga, y podrá tambien representarse de este modo:

$$x^m + a^{m'} x^{n-1} + a^{m'} b^{m'} x^{n-2} + \ldots\ldots + a^{m'} b^{m'} \ldots\ldots l^{m'} = 0.$$

Y, por lo tanto, si por A designamos el coeficiente de un término cualquiera, considerado en la primera de estas transformadas, y por A^1 el mismo término en la segunda, concluiremos que

$$A^{m'} = A'^m;\ \text{ó}\ m' \log. A = m \log. A';\ \text{ó}\ \frac{m}{m'} = \frac{\log. A}{\log. A'}.$$

Cuando, pues, los logaritmos de los coeficientes análogos de ambas ecuaciones posean la relacion constante de los números m y m', entónces sabremos á ciencia cierta que ya hemos obtenido una ecuacion equivalente ó asimilable á la (5), y que, en consecuencia, la (1) puede ya darse en realidad por resuelta.

Si m es una potencia del número 2, como en la práctica del método sucede, y m' tambien, el coeficiente $\frac{m'}{m}$ será número entero; y, por lo tanto, A' será una potencia entera, $\frac{m'}{m}$, de A.—Luego, cuando en la práctica se advierta que de una ecuacion transformada á otra pasamos elevando al cuadrado los coeficientes de la primera, inútil será prolongar la operacion, pues habremos ya obtenido la (5), ó llegado al término final asequible de la serie de transformaciones que nos habíamos propuesto realizar.

Pero, rigurosamente hablando, esto último no debe verificarse nunca, porque la ecuacion (5) es como un *límite* hácia el cual convergen las transformadas sucesivas de la (1); y, por lo mismo, habremos de contentarnos en la práctica con una mera aproximacion á este límite y resultado apetecido. Cuando, pues, en las aplicaciones de la regla formulada al final del §. 3.º, observemos que los *doble-productos* que, con los *cuadrados* de los coeficientes de una transformada, deben combinarse para deducir los coeficientes de la transformada sucesiva, son, si no nulos, muy pequeños, insignificantes ya, ó despreciables, con respecto á dichos *cuadrados*, entónces será cuando podamos suponer deducida la ecuacion (5), ó confundida casi con ella la que inmediatamente le precede.

§. 5.º

Más detalles y aclaraciones sobre el asunto del párrafo que antecede.

Mas al llegar á este punto surge de nuevo una dificultad, ya, en principio, poco antes considerada y desvanecida. ¿Disminuirán, en efecto, hasta ser despreciables, por último, los doble-productos mencionados, conforme, por la regla del §. 3.º, se vayan deduciendo las diversas ecuaciones, transformadas de la primitiva?—Indudablemente, ó no sería verdad lo concluido y demostrado en el párrafo anterior.

Despues de obtenidas, una tras de otra, varias ecuaciones de composicion análoga á la designada con el número (6), llegaremos á una que, si no es la (5), diferirá ya muy poco de ésta: á la siguiente, por ejemplo:

$$(7) \quad x^n + (a^m + \delta_1)\, x^{n-1} + (a^m b^m + \delta_2)\, x^{n-2} +$$
$$+ (a^m b^m c^m + \delta_3)\, x^{n-3} + (a^m b^m c^m d^m + \delta_4)\, x^{n-4} + \ldots\ldots = 0,$$

en la cual δ_1, δ_2, δ_3..... representan cantidades muy pequeñas con respecto á los términos que en los diversos coeficientes de la ecuacion les preceden, é indefinidamente decre cientes, con relacion siempre á los expresados primeros términos, conforme aumenta el exponente arbitrario m.

Pues bien: un coeficiente cualquiera de la transformada sucesiva inmediata, el de x^{n-3}, por ejemplo, podrá, en virtud de la regla de composicion mencionada y resumida en la ecuacion (6), expresarse entónces de este modo:

$$(a^m b^m c^m + \delta_3)^2 - 2(a^m b^m + \delta_2)(a^m b^m c^m d^m + \delta_4) +$$

$$+ 2(a^m + \delta_1)(a^m b^m c^m d^m e^m + \delta_5) - 2(a^m b^m c^m d^m e^m f^m + \delta_6).$$

O, efectuando los productos indicados y representando por Δ el conjunto de términos resultantes, dependientes de δ_1, δ_2, δ_3..... y que, con relacion á los demás, tienen por límite *cero*, de este otro modo, algo más breve y explícito:

$$a^{2m} b^{2m} c^{2m} - 2a^{2m} b^{2m} c^m d^m + 2a^{2m} b^m c^m d^m e^m -$$

$$- 2a^m b^m c^m d^m e^m f^m + \Delta.$$

Y si ahora comparamos, prescindiendo de los signos, con el primero de estos términos, $a^{2m} b^{2m} c^{2m}$, el segundo, con el segundo el tercero, y con el tercero el cuarto, hallaremos los tres cocientes que siguen:

$$2\left(\frac{d}{c}\right)^m;\ \left(\frac{e}{b}\right)^m;\ \text{y}\left(\frac{f}{a}\right)^m:$$

evanescentes todos, conforme aumenta m, en la hipótesis de hallarse las raices ordenadas por su magnitud, segun la ya expuesta condicion preliminar indica:

$$a > b > c > d.....$$

Luego, si suponemos despreciable la cantidad Δ, los doble productos que deben combinarse con el cuadrado de $a^m b^m c^m$, para obtener el coeficiente de x^{n-3} en la nueva transformada que se busca, despreciables serán tambien, ó de valor relativo cada vez menor, comparados con aquel cuadrado, $a^{2m} b^{2m} c^{2m}$.

Y, además, conviene advertir que, si en vez de comparar un término cualquiera, de los que en la última transformada componen el coeficiente de x^{n-3}, con el que inmediatamente le precede, los comparásemos todos, segundo, tercero y cuarto, con el primero, obtendríamos estos resultados:

$$2\left(\frac{d}{c}\right)^m;\ 2\left(\frac{d}{c}\right)^m\left(\frac{e}{d}\right)^m;\ \text{y}\ 2\left(\frac{d}{c}\right)^m\left(\frac{e}{b}\right)^m\left(\frac{f}{a}\right)^m.$$

Lo cual prueba, ó con suficiente claridad indica, que, en el paso de una transformada á otra, la *correccion* que al cuadrado de un coeficiente de la primera debe aplicarse para componer el coeficiente del mismo término en la segunda, depende principal, si no exclusivamente, del doble producto de los dos coeficientes más inmediatos, anterior y posterior, al coeficiente cuyo *cuadrado* pretendemos corregir.

Apuremos todavía un poco más el asunto: y para ello continuemos suponiendo que, deducidas ya unas cuantas ecuaciones *transformadas* de la primitiva, sean, en efecto, despreciables las correcciones procedentes de los otros doble productos que la (6), símbolo de todas ellas, contiene; y que tambien entónces el conjunto de términos, poco antes designado por Δ, pueda considerarse como insignificante con respecto al primero de los explícitos, $a^{2m}\ b^{2m}\ c^{2m}$.....

En este doble supuesto, muy aproximado, pero nada más que aproximado, á la verdad ó realidad de las cosas, para pasar de la ecuacion (7) á la transformada análoga inmediata, bastaria elevar al cuadrado sus coeficientes y aplicarles las siguientes correcciones sustractivas y *relativas:*

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^m,\ \text{al } 2.^\circ;\ 2\left(\frac{c}{b}\right)^m,\ \text{al } 3.^\circ;\ 2\left(\frac{d}{e}\right)^m,\ \text{al } 4.^\circ;\ \text{etc., etc.}$$

Y estas correcciones serán inferiores á cualquier cantidad pequeñísima, préviamente asignada, siempre que, si $2\left(\frac{d}{e}\right)^m$ representa la mayor de todas, el valor de m le determinemos por esta condicion:

$$2\left(\frac{d}{c}\right)^m < \alpha;$$

en la cual la letra α designa el límite ó valor extremo del *error relativo* que en la composicion de los varios coeficientes podemos todavia cometer.

Si, por ejemplo, y como aplicacion curiosa é importante de la última fórmula, suponemos que la relacion de las dos raices, ménos discrepantes una de otra, c y d, $(c > d)$, es igual á 1.1, ó 1.01, ó 1.001..... concluiremos que la máxima correccion, representada por $2\left(\frac{d}{c}\right)^m$, será menor que 0.00001, en los tres casos propuestos, cuando m sea respectivamente igual á 2^7, ó 2^{11}, ó 2^{14}. Lo cual equivale á decir que, áun cuando la diferencia de las dos raices más próximas ascienda por junto á una sola *décima*, *centésima* ó *milésima* parte de la menor, todas las raices se hallarán ya separadas en la 7.ª, 11.ª ó 14.ª transformada que de la ecuacion primitiva se dedujere: ó comprendidas todas en una ecuacion cuyos coeficientes sólo diferiran de los de la (5) en una *cienmilésima* parte de su valor: ó en una *millonésima*, á poco más que apuremos el asunto por el mismo procedimiento.—Hasta en la última desfavorable hipótesis, la ecuacion (1) puede, por lo tanto, con solo lo dicho, considerarse como muy aproximadamente resuelta. Mas, como para la separacion y determinacion de las raices *casi iguales* expondremos en otro capítulo un procedimiento más racional y breve que el referido, nunca habrá que avanzar hasta punto tan lejano, y bastará casi siempre, para obtener la solucion completa del problema, detenerse en la 7.ª, 8.ª ó 10.ª transformada de la ecuacion primitiva.

§. 6.°

Práctica del método.—Advertencias que se deben tener presentes en el cálculo de las raices de una ecuacion.

Las operaciones numéricas que la aplicacion del método general demanda pueden verificarse, sin abreviacion alguna, por las primeras y más sencillas reglas de la Aritmética; ó, más rápidamente y casi con la misma sencillez teórica, con auxilio de las tablas de logaritmos. Lo exacto es lo primero, pero no lo verdaderamente practicable y preferible; porque los coeficientes de las ecuaciones transformadas sucesivas, en términos tales y con tanta rapidez aumentan de tamaño ó valor, que no hay medio de combinarlos unos con otros, por via de multiplicacion y de suma ó resta, conforme la regla del §. 3.° pide, sin gran trabajo, considerable pérdida de tiempo y riesgo sumo de equivocarse, á cada paso ó momento. Mucho más breve y factible es lo segundo, aunque no tan recomendable como lo primero en teoría: porque en las diversas ecuaciones citadas, que unas de otras se van sucesivamente desprendiendo, los verdaderos coeficientes se hallan reemplazados por otros que solo lo son aproximados; y, en el curso de las operaciones, los pequeños errores de las últimas cifras pudieran, tal vez, acumularse hasta producir en la postrera transformada otros errores de mayor cuantía, y acaso inadmisibles.

Para disipar todo motivo bien fundado de temor sobre este punto, advirtamos, sin embargo, dos cosas: 1.ª que, siendo los coeficientes de una transformada cualquiera aproximados á la verdad, por *exceso* unos y otros por *defecto*, en vez de acumularse propenderan casi siempre los errores á compensarse unos con otros en la transformada siguiente; y 2.ª que, conteniendo las diversas ecuaciones, transformadas de la primitiva, las raices incógnitas elevadas á una potencia, m, cada vez mayor, los logaritmos de estas raices se deduciran de los que á los coeficientes de la última transformada correspondan, *dividiéndolos* por este número m: lo cual reduce otro tanto los errores de que los logaritmos de aquellos coeficientes pudieran adolecer.

En principio, corroborado por la experiencia, admítese como cierto que, si se opera el cálculo de las diversas transformadas sucesivas con logaritmos de 5, 7 ó 10 cifras decimales, con otras tantas cifras, dignas de confianza, se logrará determinar los logaritmos de las raices de la ecuacion propuesta: ó estas raices con grado de aproximacion relativa expresado por $\frac{1}{10^5}$, ó $\frac{1}{10^7}$, ó $\frac{1}{10^{10}}$, de su propio valor.

Preferible será, sin embargo, cuando esto pueda hacerse sin grave inconveniente y notable incremento de trabajo, combinar uno con otro ambos procedimientos de cálculo referidos, directo y aproximado ó logarítmico: calcular, por ejemplo, las dos primeras transformadas, sin abreviacion ni error ó incertidumbre de ningun género; con auxilio de los logaritmos de 6 ó 7 cifras decimales, las dos que siguen; y de solas 5 cifras las demás, hasta llegar á la última.—La multiplicidad de casos que pueden presentarse en la práctica impide prefijar, en términos bien precisos y concretos, lo que en cada uno de ellos deba ó convenga hacerse.

§. 7.º

Regla de Newton para corregir los valores aproximados de las raices, ya deducidos por el método de Gräffe.

Suponiendo ya separadas las raices reales de la ecuacion propuesta y determinados sus valores con el grado de aproximacion que el uso de las tablas logarítmicas de cinco cifras decimales permite obtener, por la sencillísima regla de Newton, infalible cuando se trata de raices propiamente desiguales, ó cuando un número es valor aproximado de una sola y no de dos ó más raices, podrá ampliarse aquella primera aproximacion hasta la 9.ª ó 10.ª cifra decimal, por ejemplo. Esta regla, en todos los tratados de Algebra contenida, se demuestra y formula del siguiente modo, adecuado al cálculo logarítmico.

Representemos abreviadamente por $f(x)$ el primer miembro de la ecuacion propuesta; y desde luégo podremos escribir lo que sigue:

$$(8) \qquad f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_n = 0.$$

Designando por x_0 el valor aproximado de x, ya conocido, y por Δx_0 la correccion que tratamos de calcular, en vez de la ecuacion (8) podremos escribir ésta otra:

$$(9) \qquad f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + \Delta x_0 \times f'(x_0) + \ldots\ldots = 0.$$

La cual, aproximadamente, ó despreciando todos los términos que en el primer miembro se hallan multiplicados por potencias de Δx_0, iguales ó superiores á la 2.ª, se reduce á ésta:

$$(10) \qquad f(x_0) + \Delta x_0 \times f'(x_0) = 0.$$

Pero lo que necesitamos hallar no tanto es la correccion del valor x_0 como la de su logaritmo, $\Delta \log. x_0$; puesto que, procediendo como en el párrafo anterior hemos indicado, lo que inmediatamente se obtiene es el valor de $\log. x_0$.

Pues bien: despreciando asimismo los términos multiplicados por las potencias, superiores á la primera, de Δx_0, y representando por M el *módulo* de los logaritmos vulgares, ó el número 0.4342945, cuyo logaritmo es igual á $\overline{1}.6377843$, sábese parecidamente que

$$(11) \qquad \Delta \log. x_0 = \log. (x_0 + \Delta x_0) - \log. x_0 =$$

$$= \log. \left(1 + \frac{\Delta x_0}{x_0}\right) = M \,.\, \frac{\Delta x_0}{x_0}.$$

Y, combinando una con otra las dos ecuaciones (10) y (11), conclúyese, en fin, que

$$\Delta \log. x_0 = -\frac{f(x_0)}{x_0 f'(x_0)} \times M;$$

ó

$$(12) \qquad \Delta \log. x_0 = -\frac{[x_0{}^{\mathrm{n}}]}{[n\, x_0{}^{\mathrm{n}}]} \times M,$$

si con los símbolos $[x_0{}^{\mathrm{n}}]$ y $[n\, x_0{}^{\mathrm{n}}]$ representamos estos dos polinomios:

$$[x_0{}^{\mathrm{n}}] = x_0{}^{\mathrm{n}} + \alpha_1 x_0{}^{\mathrm{n}-1} + \ldots . . \alpha_{\mathrm{n}-1} x_0 + \alpha_{\mathrm{n}},$$

y

$$[n\, x_0{}^{\mathrm{n}}] = n\, x_0{}^{\mathrm{n}} + (n-1)\, \alpha_1 x_0{}^{\mathrm{n}-1} + \ldots . . + \alpha_{\mathrm{n}-1}:$$

el primero de los cuales necesitamos formar ó calcular siempre para cerciorarnos del grado de aproximacion de x_0; pudiendo luégo deducir el segundo del anterior por la simple multiplicacion de todos sus términos respectivamente por la serie de números n, $n-1$, $n-2$ ..... 1 y 0.

Obtenido, en suma, el log. x_0 con 5 cifras decimales, de la fórmula (12) deduciremos la correccion que debemos aplicarle para obtenerle con 7; y muy rara vez en la práctica será menester prolongar todavía más la operacion. Pero, en caso de necesidad, repitiendo con el valor ya corregido las operaciones que la misma fórmula (12) indica, se hallaria un nuevo valor de log. x_0, aproximado hasta la 10.ª cifra decimal.

§. 8.º

Aplicacion de todo lo expuesto á la resolucion de varios ejemplos.

Con objeto de aclarar un poco todo lo que precede, propongámonos, antes de seguir más adelante, resolver, por el método general expuesto, algunas ecuaciones muy sencillas.

(*a*)—Y, en primer lugar, consideremos la ecuacion propuesta por Lagrange en el Capítulo IV de su célebre *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones Numéricas,* para exponer y aplicar su método, y posteriormente reproducida en casi todos los tratados de Álgebra franceses, en el capítulo consagrado al mismo asunto:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Para resolverla por el procedimiento en las páginas anteriores referido, necesítase, por de pronto, *completarla,* ó escribirla de este modo:

$$(2^0) \quad x^3 + 0 \,.\, x^2 - 7x + 7 = 0.$$

Como los coeficientes son muy pequeños, y fáciles de combinar unos con otros por la regla del §. 3.º, las dos primeras transformadas, cuyas raices son respectivamente iguales á los *cuadrados* y *cuartas potencias* de las raices de la ecuacion primitiva, se deducirán inmediatamente, ó prescindiendo de las tablas de logaritmos. Estas dos nuevas ecuaciones son las siguientes.

$$(2^1) \qquad x^3 + 14x^2 + 49x + 49 = 0,$$

y

$$(2^2) \qquad x^3 + 98x^2 + 1029x + 2401 = 0.$$

En vez de la última ecuacion, puesto que ya sus coeficientes son un poco grandes ó considerables, y las operaciones sucesivas de transformacion de la ecuacion propuesta se complican por este motivo, escribiremos esta otra, meramente simbólica, ó en la cual los coeficientes de la anterior se hallan reemplazados por sus logaritmos, aproximados hasta la 6.ª cifra decimal.

$$(2^2)\quad x^3 + 1.991226\,x^2 + 3.012415\,x + 3.380392 = 0.$$

Para formar el coeficiente del segundo término de la siguiente transformada será menester ahora:

Multiplicar por 2 el logaritmo 1.991226;

Sumar con 3.012415 el logaritmo de 2, igual á 0.301030;

Buscar en las tablas logarítmicas los números 9604 y 2058, correspondientes al producto 3.982452 y á la suma 3.313445;

Restar del primero de estos números el segundo;

Y buscar el logaritmo, 3.877717, de la diferencia, que será (§. 3.º) el coeficiente que nos habíamos propuesto determinar.

Para deducir el coeficiente del tercer término, será preciso análogamente:

Multiplicar por 2 el coeficiente 3.012415;

Sumar el logaritmo de 2 con la suma de los coeficientes 1.991226 y 3.380392;

Buscar en las tablas los números exactos ó *aproximados*, correspondientes á este producto y esta suma, 1058840 y 470596;

Restar del primero el segundo;

Y buscar el logaritmo, 5.769557, correspondiente á su diferencia.

Y, en fin, para deducir el último coeficiente de la tercera transformada, ó el término independiente de la incógnita x, bastará *duplicar* el último de la anterior.

Luego, en suma, la ecuacion cuyas raices son las *octavas* *potencias* de las de la propuesta podrá simbólicamente representarse de este modo:

$$(2^3)\qquad x^3+3.877717\,x^2+5.769557\,x+6.760784=0.$$

Y, análogamente, se deducirá luégo que

$$(2^4)\qquad x^3+\ 7.746367\,x^2+11.413345\,x+13.521568=0;$$

$$(2^5)\qquad x^3+15.492662\,x^2+22.802010\,x+27.043136=0;\ \text{y}$$

$$(2^6)\qquad x^3+30.985324\,x^2+45.603276\,x+54.086272=0.$$

Si de esta última transformada intentásemos pasar á la siguiente, designada por el símbolo (2^7), que recuerda la potencia á que las raices de la ecuacion primitiva se encontrarian en ella elevadas, tendríamos por de pronto que:

Multiplicar por 2 el logaritmo 30.985324, y buscar el número correspondiente al producto, el cual constaría de 62 cifras enteras: seis ó siete *significativas*, que tomaríamos de las tablas, y 55 ó 56 *ceros* que deberíamos suplir mentalmente para completar el total de guarismos;

Sumar con el logaritmo 45.603276 el de 2: lo cual nos daria un logaritmo, cuya característica sería 45, correspondiente á un número de 46 cifras;

Y restar del primero de los números encontrados el segundo.

Pero, restando de un número de 62 cifras otro de 46, ni áun de bastantes más, las siete primeras de la diferencia serán las mismas siete del minuendo. Luego, limitando la aproximacion á la que pueden suministrar los logaritmos de seis cifras decimales, el coeficiente del segundo término de la transformada (2^7) se obtendria duplicando el segundo de la (2^6).—Y lo mismo se demostrará que, en el caso propuesto, pueden obtenerse los coeficientes de los otros términos: por simples *duplicaciones* de los correspondientes en la transformada anterior.

Conclúyese, pues, que obtenida la ecuacion (2^6), es inútil seguir más adelante; porque, si no exactamente, lo cual es de todo punto imposible, con suficiente grado de aproximacion, hemos ya formado la ecuacion en el §. 2.° designada por el número (5), la cual contiene la solucion completa de la propuesta.

En efecto, designando por a, b, c, las tres raices buscadas, y limitando la aproximacion á la 6.ª cifra decimal en los logaritmos, sabemos ya que

$$\log. a^{2^6}=30.985324; \quad \log. (ab)^{2^6}=45.603276;$$

$$\text{y} \quad \log. (abc)^{2^6}=54.086272.$$

De donde se concluye sencillamente que

$$\log. a=0.484146; \quad \log. b=0.228405; \quad \text{y} \quad \log. c=0.132547.$$

Y, por lo tanto, que

$$a=3.04892; \quad b=1.69202; \quad \text{y} \quad c=1.35690.$$

Falta todavía determinar los signos de estas raices. Mas, si en la ecuacion á que corresponden en vez de x se sustituyen sucesivamente los valores aproximados 3.05, 1.69 y 1.36, inmediatamente se concluirá que la primera debe ser *negativa*, y *positivas* las otras dos. La doble condicion expresa en la ecuacion (2°), de que sea *nula* la suma de las tres raices y *negativo* el producto, basta en rigor para determinar sus *signos*.

Y si á los valores de a, b y c, directamente encontrados, les aplicamos las correcciones que la regla de Newton nos proporcionaría, sin dificultad teórica alguna, hallaremos en conclusion que

$$a=-3.048917340;$$

$$b=+1.692021472; \text{ y}$$

$$c=+1.356895868.$$

(*b*)—De solucion más rapida todavía que la ecuacion precedente es la que sigue, propuesta por Mr. J. Bourget en el número de los *Nuevos Anales de Matemáticas*, correspondiente al mes de Enero de 1869, como ejemplo muy apropiado para poder en él apreciar el mérito de una muy pequeña, pero ingeniosa, innovacion introducida en el método de Newton, por Mr. Darboux.

$$(2^0) \qquad x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0.$$

Las dos primeras transformadas de esta ecuacion son las siguientes:

$$(2^1) \qquad x^3 + 23x^2 + 73x + 16 = 0; \quad \text{y}$$

$$(2^2) \qquad x^3 + 383x^2 + 4593x + 256 = 0.$$

Reemplazando los coeficientes por sus logaritmos, la última puede escribirse de este otro modo:

$$(2^2) \qquad x^3 + 2.583199\,x^2 + 3.662096\,x + 2.408240 = 0.$$

Y de ésta se deducen las dos siguientes; con lo cual concluye la operacion:

$$(2^3) \qquad x^3 + 5.138315\,x^2 + 7.320136\,x + 4.816480 = 0;$$

y

$$(2^4) \qquad x^3 + 10.275669\,x^2 + 14.640254\,x + 9.632960 = 0.$$

Fácil, en efecto, sería ver que la transformada (2^5) se desprende de la (2^4) por la simple *duplicacion* de sus coeficientes logarítmicos. Luego en la (2^4) las raices de la propuesta se encuentran combinadas unas con otras, como en la (5) del §. 2.°, las de la ecuacion general (1). Por lo tanto:

$$\log.\ a^{16} = 10.275669; \qquad \log.\ a^{16}\,b^{16} = 14.640254; \quad \text{y}$$

$$\log.\ a^{16}\,b^{16}\,c^{16} = 9.632960.$$

De donde se deduce que

$$\log.\ a=0.642229;\quad \log.\ b=0.272789;\quad \text{y}\quad \log.\ c=\bar{1}.687044.$$

$$\text{Y}\quad a=4.38762;\qquad b=1.87407;\quad \text{y}\qquad c=0.486457.$$

La sustitucion de estos valores, ó de otros más breves que les sean aproximados en la ecuacion propuesta, basta para determinar los signos que deben precederlos: *positivos* los de la primera y tercera raiz, y *negativo* el de la segunda.

Y si la aproximacion directamente obtenida no se considerase suficiente, por el método ó regla de Newton, expuesta en la primera parte del §. 7.º, sin modificacion ó perfeccionamiento alguno, se concluirá que

$$a = +\ 4.387619058;$$

$$b = -\ 1.874075531;\quad \text{y}$$

$$c = +\ 0.486456473.$$

(c)—Resolvamos todavía, y será por ahora el último, otro ejemplo algo más complicado, y tambien más interesante, que los dos anteriores: el que sigue:

$$(2^{0})\qquad x^4 - 80\,x^3 + 1998\,x^2 - 14937\,x + 5000 = 0.$$

Las tres primeras transformadas de esta ecuacion, deducidas por la regla del §. 3.º y simbólicamente escritas, son:

$$(2^{1})\ x^4+3.3809345\,x^3+6.2073877\,x^2 +8.3077826\,x+7.3979400=0;$$

$$(2^{2})\ x^4+6.4073993\,x^3+12.2101035\,x^2 +16.6147161\,x+14.7958800=0;\ \text{y}$$

$$(2^{3})\ x^4+12.5163878\,x^3+24.3840080\,x^2 +33.2294317\,x+29.5917600=0.$$

Y, llegados á este punto, se advierte inmediatamente que los coeficientes de x^1 y de x^0 en la ecuacion (2^4) se obtendrian por la simple duplicacion de los mismos en la (2^3). Luego

$$2^3 \times \log. abc = 33.2294317; \quad y$$

$$2^3 \times \log. abcd = 29.5917600.$$

De donde se deduce que

$$\log. d = \bar{1}.5452911; \quad y \quad d = 0.3509871.$$

La *menor* de las cuatro raices de la ecuacion (2^0) queda con esto determinada; pero no las otras tres, que en la (2^3) existen ligadas todavía y como revueltas unas con otras.

Para separar y determinar la raiz c basta deducir una transformada más de la ecuacion primitiva: la (2^4) adjunta.

$$(2^4) \quad x^4 + 24.7739141\, x^3 + 48.7671899\, x^2$$
$$+ 66.4588634\, x + 59.1835200 = 0.$$

De la cual se pasará á la (2^5) componiendo el coeficiente de x^3 por la regla del §. 3.°, y *duplicando* los demás. Luégo, á las relaciones que nos sirvieron para hallar el valor aproximado de la raiz d, podremos agregar esta otra:

$$2^4 \times \log. ab = 48.7671899.$$

Y de esta relacion, combinada con la primera de las dos anteriores, se concluye sin dificultad el siguiente resultado:

$$\log. c = 1.1057295; \quad ó \quad c = 12.75644.$$

Pero el coeficiente de x^3 no se obtendrá por simple duplicacion del mismo en la transformada precedente, hasta llegar á la transformada (2^8); y hasta entónces no lograremos separar una de otra y determinar las dos raices *mayores*, b y a. El trabajo de cálculo no es, sin embargo, demasiado penoso, conforme puede verse á continuacion:

$$(2^5)\quad x^4 + 49.3729752\,x^3 + 97.5343797\,x^2 + \ldots\ldots = 0$$

$$(2^6)\quad x^4 + 98.6890126\,x^3 + 195.0687594\,x^2 + \ldots\ldots = 0$$

$$(2^7)\quad x^4 + 197.3737428\,x^3 + 390.1375188\,x^2 + \ldots\ldots = 0$$

$$(2^8)\quad x^4 + 394.7474642\,x^2 + 780.2750376\,x^2 + \ldots\ldots = 0.$$

Y, con esto, de las expresiones

$$2^4 \times \log.\, ab = 48.7671899, \quad \text{y} \quad 2^8 \times \log.\, a = 394.7474642,$$

se concluye finalmente que

$$b = 32.06026, \quad \text{y} \quad a = 34.83231.$$

En las últimas cifras de los valores de a, b, c y d no debe abrigarse ilimitada confianza, ya porque en el curso de las operaciones aritméticas puede haberse cometido algun pequeño error, ya porque el uso muy reiterado de las tablas de logaritmos no siempre permite que se abrigue con fundamento. Sustituyendo, pues, aquellos cuatro valores de a, b, c y d en la ecuacion (2^0), con objeto de cerciorarse de su grado de exactitud, y corrigiéndolos luego por la regla de Newton, se hallará que los cuatro son *positivos*, é iguales en conclusion á estos:

$$\left.\begin{array}{l} a = 34.832280288, \\ b = 32.060290872, \end{array}\right\}; \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} c = 12.756441794, \\ d = \;\;0.350987046. \end{array}\right\}.$$

§. 9.º

Carácter y trascendencia del método explicado.

Advirtamos, para concluir, que á la resolucion de las tres ecuaciones propuestas hemos procedido inmediatamente, sin detenernos á investigar los *límites extremos* entre los cuales las raices podian estar comprendidas; ni, ménos, á *separar* unas raices de otras: y hasta sin saber, ni preocuparnos previamente de averiguarlo, si las raices serían *reales* todas ó si las habria tambien *imaginarias*.

Por el método en las páginas anteriores expuesto, la *separacion* de las raices, la *determinacion* de sus valores aproximados, y la *distincion* de sus diversos caractéres ó especies, se efectúan por la misma regla y casi sin esfuerzo de la mente, mediante una larga, pero muy sencilla, serie de operaciones, que cualquier mediano calculador puede verificar.

Cuando todas las raices son *reales*, ya hemos visto cómo se aislan y determinan; y pronto nos convenceremos de que el procedimiento apénas experimenta modificacion alguna cuando existen raices mezcladas de ambas especies. Mas ¿por dónde inferiremos que la ecuacion propuesta sólo contiene raices reales, y que, por lo tanto, nos hallamos en el caso más sencillo de cuantos en la práctica pueden presentarse? Por el siguiente simplicísimo carácter: porque *todos* los coeficientes de *todas* las ecuaciones transformadas de la propuesta, que sucesivamente se fueren obteniendo, hasta deducir aquella que prácticamente se confunda con la (5) del §. 2.º, serán entonces *positivos*.

La ecuacion propuesta equivale al producto, igualado á *cero*, de los n factores $x+a$, $x+b$, $x+c$..... y puede contener términos *positivos* y *negativos*, segun sean los signos de a, b, c..... Pero su primera transformada equivale al producto de los n factores $x+a^2$, $x+b^2$, $x+c^2$....., y, cualesquiera que sean los signos mencionados, si aquellas cantidades son reales, todos los términos serán necesariamente *positivos*. Y lo mismo sucederá y se advertirá en las transformadas sucesivas, cuyos coeficientes, además, propenderán hácia otros tantos *límites* determinados, si las raices de la propuesta, prescindiendo de sus signos, pueden considerarse como propiamente *desiguales* ó diferentes.

Por los caractéres opuestos, como en el capítulo próximo procuraremos demostrar, se infiere precisamente la existencia de las *raices imaginarias*.

(*Se continuará.*)

VARIEDADES.

Exposicion de aparatos científicos en el Museo South-Kensigton de Lóndres. Esta exposicion debe principiar el 1.° de abril de 1876 y terminar á fines de setiembre, devolviéndose despues los objetos expuestos á sus dueños ó propietarios. Está exclusivamente dedicada á exponer no solo los instrumentos ó aparatos empleados en las investigaciones científicas, sino tambien los que son propios para la enseñanza. Se admitirán aquellos que tengan un interés especial, ya por los sábios que los emplearon, ya tambien por los descubrimientos que con ellos se han llevado á cabo. Tambien se admiten los modelos, grabados y fotografías de los instrumentos.

Los aparatos se colocarán en la misma disposicion que se emplean en investigaciones determinadas. Se adoptarán disposiciones especiales, siempre que sean practicables, para explicar el uso de los instrumentos.

Pueden obtenerse modelos para hacer la descripcion de los objetos que se quieran enviar á la Exposicion, pidiéndolos al Director del Museo South-Kensigton. (Londres S. W.) Una vez llenos estos modelos serán devueltos al instante á dicho Señor, el cual manifestará si los objetos son admisibles.

El Museo no puede ser responsable de la pérdida y averías que ocurran.

Todos los gastos de conduccion corren á cargo del Museo.

El Director del mismo espera confiadamente que, tanto los establecimientos como los particulares que posean instrumentos de grande interés científico, tengan la bondad de enviarlos á esta Exposicion.

He aquí ahora un extracto de la lista de los objetos que pueden ser presentados.

Aritmética. Aparatos destinados á la enseñanza de la aritmética.—Máquinas de calcular.—Instrumentos para resolver las ecuaciones.—Reglas de cálculo.

Geometría. Instrumentos usados para el grabado geométrico.—Pantógrafos.—Máquinas para la descripcion de curvas, y modelos de las descritas por ellas.—Modelos para facilitar el estudio de la geometría descriptiva.—Id. para la enseñanza de la geometría de los sólidos, de la perspectiva, de la cristalografía.—Modelos estereoscópicos de la geometría de los sólidos.

Medidas. De *longitud*.—Tipos, yardas, metros, etc.—Comparadores para las medidas de longitud.—Cintas metálicas.—Micrómetros.—Nonius.—Catetómetros.

De *superficie.*—Planímetros, etc.

De *volúmen.*—Tipos de litros, etc.—Bombillas y probetas.—Contadores de gas, de agua, etc.

De *ángulo.*—Círculos graduados, teodolitos, goniómetros, etc.

De *peso.*—Tipos de peso, kilógramos, etc.

De *densidad.*—Frascos para el peso específico, areómetros, etc.

De *tiempo.*—Relojes y péndulos, cronómetros, ampolletas, cronógrafos.

De *velocidad.*—Máquinas de Morin.—Aparatos balísticos, etc.

De *fuerza.*—Balanzas de resorte.—Id. de torsion.

De *trabajo.*—Indicadores, dinamómetros, etc.

Cinemática, Estática y Dinámica. Máquinas elementales.—Posicion y movimiento de un punto rígido ó de un sistema material.—Movimiento de un sistema de cuerpos.—Mecanismos elementales.—Trasmision de trabajo.—Fuerzas mecánicas.—Instrumentos para la explicacion de las leyes del movimiento, como por ejemplo, péndulos, giróscopos, etc.

Leyes de la presion de los fluidos; estabilidad de los cuerpos flotantes.

Salida de los fluidos por orificios, y sus movimientos por tubos ó canales.

Trasmision hidráulica ó neumática de la fuerza.

Física molecular. *Presion de la materia.*—Tension, compresion (piezómetro), torsion, flexion, relacion entre el volúmen y la presion.—Elasticidad de los líquidos y gases.—Dureza.—Tenacidad.—Fragilidad.—Maleabilidad.

Comunicacion de la presion á través de los fluidos.—Presion del aire; sus consecuencias y aplicaciones.—Barómetros.—Bombas.—Sifones.—Bombas de succion.—Aspiradores.—Niveles.—Presiones laterales, etc.

Densidad.—Métodos para medir las densidades de los gases, vapores.

Adhesion y cohesion.—Condensacion de los gases en sólidos.—Resolucion de los gases en líquidos, mezcla de gases con gases (difusion), traspiracion, absorcion de los líquidos por los sólidos (capilaridad).—Absorcion de los líquidos por los gases (evaporacion).—Mezcla de líquidos con líquidos.—Endósmosis, difusion, dialisis.—Evaporacion de los sólidos.—Mezcla de sólidos con sólidos (cementacion).

Acústica. *Métodos* geométricos, mecánicos y ópticos de demostrar las leyes del movimiento de las ondas sonoras.—Interferencias.

Generacion del sonido.

Propagacion del sonido á través de los sólidos, líquidos y gases.

Velocidad del sonido.

Revelacion del sonido.

Reflexion y refraccion.—Trompetas y lentes acústicas.

Luz. *Produccion.*—Combustion, descargas eléctricas, etc.

Medida de la intensidad, velocidad, etc.

Accion de los cuerpos sobre la luz.—Reflexion, refraccion, dispersion, acromatismo, prismas de vision directa, polarizacion, absorcion.

Accion de la luz sobre la luz.—Interferencias, difraccion.

Accion de la luz sobre los cuerpos.—Fotografía, irradiacion, fosforescencia.

Calor. *Orígenes de calor.*—Químicos, eléctricos, dinámicos, solar, etc.

Efectos del calor sobre los cuerpos.—Cambio de temperatura, espansion y cambio de elasticidad.—Liquefaccion y vaporizacion.

Medidas de temperatura.—Termómetros, pirómetros, etc.

Propagacion del calor.—Calor radiante.—Reflexion, refraccion, radiacion, absorcion, polarizacion, conduccion.—Ventilacion.

Efecto del cambio de estado molecular de los cuerpos en la temperatura.—Mezclas frigoríficas.—Máquinas para hacer hielo.

Efecto del cambio de presion y volumen.—Cantidad de calor, unidad de calor, calorímetros, calor específico, etc.—Calor latente.

Equivalente mecánico del calor.—Métodos para determinarlo.—Investigaciones de termodinámica.

Equivalente eléctrico del calor.—Método para determinarlo.

Análisis de la radiacion solar.

MAGNETISMO. *Imanes naturales.*

Imanes artificiales permanentes.

Electro-imanes.

Métodos de imanacion.—Efectos de la imanacion.

Induccion magnética de todas las sustancias.—Diamagnetismo.

Medida de la intensidad de la imanacion.—Instrumentos para la observacion, y modo de registrar automáticamente los elementos magnéticos.

ELECTRICIDAD. *Produccion y conservacion de la diferencia del potencial.*—Máquinas eléctricas que actuan por friccion, induccion, etc.—Baterías galvánicas.—Pilas termo-eléctricas.—Máquinas electro-magnéticas.—Otros orígenes de electricidad, tales como la presion, capilaridad, endósmosis, etc.

Manifestacion y medida de la diferencia del potencial.—Electroscópios, electrómetros, tipos de fuerza electro-motriz.—Métodos de comparacion.

Acumulacion de la electricidad.—Aisladores, condensadores, acumuladores.—Distribucion en los conductores.

Medida de la cantidad de electricidad.—Balanzas de torsion.—Métodos para comparar los coeficientes de las capacidades eléctricas.

Descubrimiento y medida de las corrientes eléctricas.—Galvanoscópios.—Galvanómetros, voltámetros, electrodinamómetros, etc.

Resistencias.—Tipos de resistencia.—Métodos de comparar.

Efecto de las corrientes eléctricas.—Produccion de luz, calor.—Accion de los imanes sobre el hierro dulce.—Accion de las corrientes entre sí.

Aplicaciones técnicas de la electricidad.—Telégrafos eléctricos, etc.

ASTRONOMÍA. Mapas de estrellas, catálogos, globos, sistemas planetarios, etc.

Instrumentos meridianos.

Medios de comunicar el tiempo.

Teodolitos, sectores zenitales, sextantes, etc.

Anteojos ecuatoriales de reflexion.

Anteojos ecuatoriales de refraccion.

MECÁNICA APLICADA. Propiedades de la materia.

Motores primarios.

Receptáculos de energía.

Reguladores.

Aplicacion de los principios de la mecánica á la maquinaria.

Buques, arquitectura naval, obras de ingenieros navales.

QUIMICA.

Dibujos y modelos.

Productos químicos. (*a*, orgánicos; *b*, minerales.)

Aparatos para los laboratorios y enseñanzas.

Id., para operaciones volumétricas.

Aparatos de destilacion y filtracion.

Id. para las operaciones por la via seca, tales como hornos, sopletes, etc.

Id. refrigerantes.

Id. para el análisis espectral.

Operaciones de esta naturaleza que pueden ser ilustradas, á saber: por

Análisis orgánico.

Análisis mineral.

Electrolisis.

Análisis de agua.

Análisis de gas.

Análisis del espectro.

Métodos de investigacion relacionados con la vegetacion y respiracion.

METEOROLOGIA. Termómetros y barómetros de construccion especial, anemómetros, pluviómetros, hidrómetros, etc.

Aparatos meteorológicos que se registran por sí mismos.

Sistemas de señales para las tempestades.

Instrumentos para observar los fenómenos de electricidad atmosférica.

GEOGRAFÍA. Instrumentos usados en el levantamiento de planos.

Instrumentos geodésicos é hidrográficos, incluyendo los hipsométricos.

Medida de mareas.

Proyecciones, mapas, cartas, modelos y globos.

Aparatos de sondeo.

GEOLOGIA Y MINERÍA. Instrumentos de campo, y planos subterráneos.

Colecciones típicas de rocas.

Fósiles típicos, clasificados estratigráficamente.

Modelos geológicos.—Secciones horizontales y verticales.

Dibujos y cartones de fósiles.

Secciones microscópicas de rocas, minerales, y aparatos para ejecutar estas secciones.

Anemómetros, barómetros y termómetros para los mineros.

Planos de minas, secciones y modelos de obras.

MINERALOGIA, CRISTALOGRAFÍA. Goniómetros.

Aparatos para estudiar los caractéres ópticos de los cristales.

Secciones para el exámen óptico de los mismos.

Soplete y otros instrumentos portátiles para analizar los minerales.

Colecciones y modelos de cristales, y aparatos para grabar sobre ellos.

Coleccion de minerales destinados á la enseñanza.

BIOLOGIA. 1. Microscópios con los aparatos accesorios para las investigaciones biológicas.

2. Aparatos fisiológicos para las investigaciones:
   - *a.* Del crecimiento y movimientos mecánicos de los organismos vivientes y sus diferentes partes.
   - *b.* Fenómenos químicos de los organismos vivientes.
   - *c.* Fenómenos eléctricos de los mismos.
   - *d.* De las funciones de los nervios y otros sistemas.
3. Aparatos para las investigaciones anatómicas.
4. Aplicaciones para la enseñanza biológica.

CIENCIAS EXACTAS.

FÍSICA MATEMÁTICA.

Teoría matemática de la Luz; por D. José Echegaray, *individuo de la Real Academia de Ciencias.*

(Continuacion.)

Supongamos tres sistemas de valores para α, β:

$$\alpha_1 \ , \ \beta_1$$

$$\alpha_2 \ , \ \beta_2$$

$$\alpha_3 \ , \ \beta_3$$

infinitamente próximos, y obtendremos tres planos AP, AP', AP'' (*fig.* 27), infinitamente próximos tambien, á los que corresponderán, por relacion á una esfera O, tres polos p, p', p'', formando un triángulo infinitamente pequeño. Pero á medida que α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3..... tienden á ser iguales, el punto A se aproxima á su límite, es decir, se aproxima hácia la superficie S; los planos P, P', P'', tienden á confundirse en uno solo T tangente en A á dicha superficie S; los tres puntos p, p' p'', se reunen tambien en uno solo a (*fig.* 27 *bis*), que será el polo del plano T, punto que es el límite de los puntos p, p', p''; y por último, el plano QQ'' (*fig.* 27) toma una posicion límite t (*fig.* 27 *bis*).

Vemos, pues, que á cada punto A de la superficie S corresponde un punto a, que será el polo de su plano tangente T; y el lugar geométrico de los puntos a es otra segunda superficie s, que se llama *superficie polar* de la envolvente S.

La superficie polar de una superficie dada S *por relacion á una esfera, es por lo tanto el lugar geométrico de los polos de todos los planos tangentes á la primera* S.

Núm. 84. Notemos ahora que el plano t es el límite del QQ'', el cual contenia tres puntos infinitamente próximos p, p', p'', que tendian á confundirse en uno solo a, perteneciente á la superficie, de aquí resulta que este plano t es tangente á la superficie polar s; y como el polo de t es el punto A de la superficie S, resulta que los puntos de esta son los polos de los planos tangentes de s, es decir, que S es la superficie polar de s; ó de otro modo, que las superficies S y s son polares recíprocas.

Fácil sería demostrar estas proposiciones de una manera rigorosa y analítica, pero creemos inútil para nuestro objeto entrar en mas desarrollos.

Núm. 85. Sea A un punto de la superficie S y T el plano tangente en dicho punto: sea asimismo a el punto de s correspondiente al A y t el plano tangente en a de s.

Segun lo demostrado a será el polo de T, y A el polo de t: así (*núm.* 77) la recta Oa será perpendicular á T, y OA perpendicular á t; además tendremos

$$Oa \times OP = r^2 \; ; \; OA \times op = r^2.$$

Estas relaciones geométricas y analíticas son muy notables, y de ellas haremos uso en la teoría de la luz.

Area de la elipse indicatriz.

Núm. 86. Sea M (*fig.* 28) un punto de una superficie convexa S; OM la normal de dicho punto; Ms una cantidad muy pequeña δ; y AB el plano de la elipse indicatriz.

Se sabe que el área del casquete AMA' tiende á ser igual á la de la elipse, es decir,

$$\text{límite} \frac{\text{área casquete } A M A'}{\text{área elipse } A B A'} = 1 ;$$

pero si sA y sB son los semi-ejes de la elipse, se tiene

$$\text{área elipse } A B A' = \pi \,.\, sA \,.\, sB;$$

luego, salvas cantidades infinitamente pequeñas de órden superior,

$$\text{área casquete } A M A' = \pi \,.\, sA \,.\, sB.$$

Ahora bien:

$$\text{lím.} \frac{sA}{AM} = 1 \quad \text{y} \quad \text{lím.} \frac{sB}{MB} = 1 ;$$

por lo tanto:

$$\text{área casquete } A M A' = \pi \,.\, MA \,.\, MB.$$

Por último, representando por R y R' los dos rádios principales de curavtura, se tiene aproximadamente

$$MA^2 = 2R \times \delta; \quad MB^2 = 2R' \times \delta;$$

luego, finalmente,

$$\text{área casquete } A M A' = 2\pi \delta \sqrt{R R'} .$$

Raices de ecuaciones fraccionarias.

(Cauchy, *Teoría de la luz*. Memoria litografiada; agosto, 1836.)

Núm. 87. Sea la ecuacion

$$\frac{a^2}{x-L}+\frac{b^2}{x-M}+\frac{c^2}{x-N}-P=0; \qquad (1)$$

en la que x es la incógnita; a^2, b^2, c^2 tres cantidades esencialmente positivas; y L, M, N, P cuatro cantidades cualesquiera.

Nos proponemos demostrar que la ecuacion (1) tiene sus tres raices reales, y aun determinar los límites en que se hallan encerradas.

Examinaremos á este fin dos casos.

1.^er^ *Caso.* $P>0$. Supongamos, para fijar las ideas, que el órden de magnitud de las tres cantidades L, M, N es el siguiente:

$$L<M<N,$$

y sustituyamos en vez de x las cantidades

$$L+i;\ M-i;\ M+i;\ N-i;\ N+i;\ +\infty;$$

en las que i es una variable infinitamente pequeña.

La sustitucion $x=+\infty$ anula los tres primeros términos, y reduce la ecuacion á $-P$; luego tendremos:

Sustitucion de $x=+\infty$ ..... resultado *negativo.*

Poniendo en segundo lugar $x = L + i$, es decir, en vez de x, un valor infinitamente próximo á L, pero superior, resultará

$$\frac{a^2}{i} + \frac{b^2}{L - M + i} + \frac{c^2}{L - N + i} - P.$$

Los tres últimos términos son cantidades finitas, y el primero es tan grande como se quiera, puesto que i entra en el denominador; luego el signo del resultado dependerá del de este primer término, y como es positivo, tendremos:

Sustitucion de $x = L + i$..... resultado *positivo*.

Pongamos $x = M - i$ y veremos como precedente que la expresion

$$\frac{a^2}{M - L - i} + \frac{b^2}{-i} + \frac{c^2}{M - N - i} - P,$$

es necesariamente negativa; así:

Sustitucion de $x = M - i$..... resultado *negativo*.

Análogamente veremos que

Sustitucion $x = M + i$..... resultado *positivo*.

Sustitucion $x = N - i$..... resultado *negativo*.

Sustitucion $x = N + i$..... resultado *positivo*.

Podremos, en resúmen, formar el siguiente cuadro:

Cantidades que se sustituyen en vez de x....	$L+i$	$M-i$	$M+i$	$N-i$	$N+i$	$+\infty$
Signos del resultado...	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

De aquí se deduce inmediatamente que la ecuacion tiene sus tres raices reales:

una entre....... $L+i$ y $M-i$ ó bien entre L y M,

otra entre....... $M+i$ y $N-i$ ó bien entre M y N,

otra tercera entre N é ∞.

2.º *Caso.* $P<0$. Por un procedimiento análogo al anterior tendremos:

Cantidades que se sustituyen á x..........	$-\infty$	$L-i$	$L+i$	$M-i$	$M+i$	$N-i$
Signos del resultado...	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

de donde se deduce que la ecuacion tiene *tres raices* reales:

una entre....... $-\infty$ y L,

otra entre....... L y M,

otra tercera entre M y N.

Observacion importante. Parece á primera vista que las raices reales son en mayor número, estando otras dos comprendidas entre $M-i$ y $M+i$, y $N-i$, $N+i$, ó $L-i$, $L+i$, cantidades que dan resultados de signos contrarios; pero nótese que si la ecuacion cambia de signo al pasar x de $M-i$ á $M+i$, por ejemplo, esto procede no del paso por *cero*, sino del paso por infinito para el valor $x=M$, lo cual no sucede en los tres intérvalos de las tres raices finitas.

TEORÍA MATEMÁTICA DE LA LUZ.

SEGUNDA PARTE.

§. I.

Hipótesis general.

Núm. 1. En toda teoría que se forma para explicar una serie de fenómenos naturales, es forzoso partir de ciertas hipótesis; si estas son numerosas, arbitrarias y complicadas, la teoría tiene pocas probabilidades filosóficas de ser verdadera; si, por el contrario, las hipótesis son naturales y sencillas y están reducidas al menor número posible, es de creer que se hallen en armonía con las leyes de la naturaleza, que siempre son sencillas y armónicas. Precisamente esto sucede en la Teoría de la luz: la hipótesis es *una*, la existencia del *éter;* y dada esta hipótesis, todos los fenómenos de la Optica quedan reducidos á cuestiones puras de Mecánica.

La existencia del éter es mas que una hipótesis, es casi un hecho, y multitud de pruebas pudiéramos aducir en apoyo de esta afirmacion; pero debemos evitar digresiones y concretarnos al gran problema de Física matemática que nos ocupa.

El *éter*, sustancia eminentemente sutil y en estremo elástica, llena el espacio, se estiende entre los astros, penetra en los cuerpos y es el vehículo de infinitos movimientos que explican por leyes regulares y matemáticas buena parte de los fenómenos ópticos, caloríficos, eléctricos y magnéticos.

Nada fijaremos respecto á su naturaleza, porque cuanto hubiéramos de decir sería puramente hipotético, y solo supondremos, toda vez que la experiencia lo comprueba, que es eminentemente elástico.

Expliquemos ante todo esta palabra *elasticidad*.

El éter, sea cual fuere su esencia y su constitucion, es sustancia material y se compone, por consiguiente, de moléculas. Entre estas moléculas existen atracciones ó repulsiones, en una palabra, acciones recíprocas que tampoco sabemos en qué consisten; sean el resultado de fuerzas abstractas, como las llama el P. Secchi, sean el resultado de movimientos internos y especiales, nosotros hacemos constar el hecho y decimos: entre cada dos moléculas a y b, suficientemente próximas, de la masa etérea, existe una fuerza f dependiente de la distancia ab, ó las cosas pasan como si existiera, es decir, como si la molécula a atrajese ó repeliese á la b, y esta á su vez obrára sobre a de la misma manera y en sentido opuesto, dependiendo ambas fuerzas de la distancia que media entre ambas moléculas.

Ahora bien, si suponemos al éter en equilibrio, es evidente que las acciones que todas las moléculas que rodean á una molécula determinada m, sea esta la que fuere, ejercen sobre ella, se destruirán; pero si suponemos que por efecto de una causa, que por ahora no decimos cuál sea, sale esta molécula m de la posicion que ocupaba, el equilibrio quedará perturbado en el acto: en efecto, habiendo variado las distancias de m á las demás moléculas, habrán variado las acciones que estas ejerzan sobre m; dichas acciones no se equilibrarán, y la molécula m, lejos de quedar en su nueva posicion, se pondrá en movimiento; pero como si todas las moléculas que la rodeaban estaban en equilibrio era por la reaccion que m ejercia sobre ellas, habiendo variado por el cambio de m estas reacciones, dichas moléculas se moverán tambien. Respecto á cada una de ellas podríamos decir lo que hemos dicho respecto á m, y de aquí se deduce que nuevas moléculas, cada vez mas distantes de m, entrarán en movimiento.

En resúmen, en un medio como el éter formado por moléculas sujetas á atracciones y repulsiones recíprocas, *el movimiento de una molécula se estiende á toda la masa.*

Pero como suponemos que las moléculas cambian infinitamente poco de posicion, y que el equilibrio del interior del sistema es de todo punto estable, todas ellas tenderán á sus posiciones primitivas describiendo alrededor de dichas posiciones trayectorias infinitesimales. Es decir, que el movimiento será vibratorio como el del aire en el sònido, como el del agua en el mar, como el de una cuerda ó una membrana en los instrumentos musicales.

En resúmen, al propagarse el movimiento inicial de una ó de varias moléculas á la masa, camina por esta el *movimiento vibratorio*, la *deformacion*, la *palpitacion por decirlo así*, no las mismas moléculas del éter.

Marcha, pues, la forma, no marcha la sustancia.

Pues bien, la *luz* no es otra cosa que este movimiento vibratorio del éter, que desde el centro perturbado se extiende todo alrededor.

El problema general de la Optica queda reducido al siguiente problema de Mecánica:

Movimientos infinitamente pequeños de un sistema de moléculas unidas por atracciones ó repulsiones recíprocas, dependientes de las masas y de las distancias.

La hipótesis no puede ser mas sencilla, mas natural, y por decirlo así, menos hipotética.

La accion de la materia sobre la materia, ya á distancias suficientemente grandes, ya á pequeñas distancias, es un hecho universal: la influencia de las masas y de las distancias en estas acciones es un postulado de toda la Astronomía, de toda la Física y aun de toda la Química; y por otra parte, ni Fresnel ni Cauchy fijan cuál sea esta funcion de la distancia, no lo necesitan para establecer las bases generales de la teoría óptica, y en todo caso, sometiendo las fórmulas á la experimentacion, resultará cual deba ser.

Hemos dicho que el éter es un fluido elástico, y que la luz no es otra cosa que el movimiento vibratorio de este fluido; entremos, pues, en el estudio de este problema de Mecánica.

§. II.

Ecuaciones diferenciales de los movimientos vibratorios.

Núm. 2. Expresemos, ante todo, el equilibrio en un medio etéreo.

Sea μ una molécula cualquiera (*fig.* 1.ª);
m, m' las moléculas que la rodean;
r, r' las distancias de estas últimas á μ;
y F la funcion de la distancia entre dos moléculas que expresa su accion recíproca.

Si la molécula μ, por ejemplo, está en equilibrio, es porque las acciones de todas las moléculas que la rodean m, m', m'', y que se hallan comprendidas en la esfera de actividad $a\,a'\,a''$ de dicha molécula, se destruyen.

Por lo tanto, para expresar el equilibrio de la molécula μ basta expresar la accion de otra molécula cualquiera m sobre ella, y descomponer esta fuerza en las direcciones de tres ejes; repitiendo esto mismo para todas las moléculas m', m''..... comprendidas en $a\,a'\,a''$, é igualando á cero separadamente las componentes totales paralelas á x, y, z, tendremos escrita la condicion de equilibrio de μ.

La atraccion ó repulsion de m sobre μ es proporcional á las masas y á la funcion F de la distancia r entre ambas; luego

atraccion ó repulsion de m sobre $\mu = \varphi = m\,\mu\,F(r)$.

Si presentamos por x, y, z las coordenadas de μ y por $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ las de m, es evidente que los cosenos de los ángulos que la fuerza $\mu\,m\,F(r)$, cuya direccion es la de $m\,\mu$, forma con los ejes, serán:

$$\frac{\Delta x}{r},\ \frac{\Delta y}{r},\ \frac{\Delta z}{r};\quad \text{ó bien}\quad \frac{\mathrm{x}}{r},\ \frac{\mathrm{y}}{r},\ \frac{\mathrm{z}}{r};$$

haciendo para abreviar

$$\Delta x = \mathrm{x}\,, \quad \Delta y = \mathrm{y}\,, \quad \Delta z = \mathrm{z}\,.$$

Así pues,

componente de φ paralela á $x = \varphi_{\mathrm{x}} = \mu\, m \dfrac{F(r)}{r}\, \mathrm{x}$;

componente de φ paralela á $y = \varphi_{\mathrm{y}} = \mu\, m \dfrac{F(r)}{r}\, \mathrm{y}$;

componente de φ paralela á $z = \varphi_{\mathrm{z}} = \mu\, m \dfrac{F(r)}{r}\, \mathrm{z}$.

Y como $\dfrac{F(r)}{r}$ es una funcion de r, representándola, para abreviar, por f, tendremos:

$$\varphi_{\mathrm{x}} = \mu\, m\, f(r)\, \mathrm{x}\ ; \quad \varphi_{\mathrm{y}} = \mu\, m\, f(r)\, \mathrm{y}\ ; \quad \varphi_{\mathrm{z}} = \mu\, m\, f(r)\, \mathrm{z}.$$

Análogamente tendremos para las moléculas m', m'', ...

$$\varphi'_{\mathrm{x}} = \mu m'\, f(r')\, \mathrm{x}'\ ; \quad \varphi'_{\mathrm{y}} = \mu m'\, f(r')\, \mathrm{y}'\ ; \quad \varphi'_{\mathrm{z}} = \mu m'\, f(r')\, \mathrm{z}'\ ;$$

$$\varphi''_{\mathrm{x}} = \mu m''\, f(r'')\, \mathrm{x}''\ ; \quad \varphi''_{\mathrm{y}} = \mu m''\, f(r'')\, \mathrm{y}''\ ; \quad \varphi''_{\mathrm{z}} = \mu m''\, f(r'')\, \mathrm{z}''\ ;$$

....

Por último, las componentes totales de todas las moléculas que rodean á μ sobre esta serán:

$$\Phi_{\mathrm{x}} = \mu\, [m f(r)\, \mathrm{x} + m'\, f(r')\, \mathrm{x}' + m''\, f(r'')\, \mathrm{x}'' + \ldots\ldots]$$

$$\Phi_{\mathrm{y}} = \mu\, [m f(r)\, \mathrm{y} + m'\, f(r')\, \mathrm{y}' + m''\, f(r'')\, \mathrm{y}'' + \ldots\ldots]$$

$$\Phi_{\mathrm{z}} = \mu\, [m f(r)\, \mathrm{z} + m'\, f(r')\, \mathrm{z}' + m''\, f(r'')\, \mathrm{z}'' + \ldots\ldots]$$

y puesto que la molécula μ ha de estar en equilibrio

$$\Phi_{\mathrm{x}} = 0\ ; \quad N_{\mathrm{y}} = 0\ ; \quad \Phi_{\mathrm{z}} = 0\ ;$$

ó bien

$$\left.\begin{aligned} m\,f(r)\,\mathrm{x} + m'\,f(r')\,\mathrm{x}' + m''\,f(r'')\,\mathrm{x}'' + \ldots\ldots &= 0 \\ m\,f(r)\,\mathrm{y} + m'\,f(r')\,\mathrm{y}' + m''\,f(r'')\,\mathrm{y}'' + \ldots\ldots &= 0 \\ m\,f(r)\,\mathrm{z} + m'\,f(r')\,\mathrm{z}' + m''\,f(r'')\,\mathrm{z}'' + \ldots\ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Por cada molécula m, m', m''' ..... del éter comprendida en la esfera de accion $a\ a'\ a''$, hay un término en cada ecuacion de las tres del grupo (1); y si representamos por Σ la suma de todos ellos, suma que podrá considerarse como una integral atendiendo al número infinitamente grande de moléculas comprendidas en $a\ a'\ a''$ y á la pequeñez de las masas, tendremos para las condiciones de equilibrio de la molécula μ:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, m f(r)\,\mathrm{x} &= 0\ ; \\ \Sigma\, m f(r)\,\mathrm{y} &= 0\ ; \\ \Sigma\, m f(r)\,\mathrm{z} &= 0\ ; \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Núm. 3. La sigma se estiende, pues, á toda la esfera $a\ a'\ a''$, y de un término á otro varian en dicha suma m, r, y las tres longitudes x, y, z.

Si las ecuaciones (1') se verifican para todos los puntos de la masa etérea, el éter estará en equilibrio; y recíprocamente para que el éter esté en equilibrio es preciso que dichas condiciones se verifiquen para todos los puntos del interior de la masa.

Respecto á los límites sería preciso obtener condiciones especiales. Nosotros suponemos por ahora que el éter se estiende hasta el infinito.

Si conociésemos para cada punto de la masa la ley de variacion de m, r, x, y, z y los límites de la Σ, sería fácil, al ménos en teoría, establecer las condiciones de equilibrio.

Núm. 4. Pero no es el problema del equilibrio el que nos interesa: este problema pertenece á la teoría de la elasticidad. Debemos aquí ocuparnos esclusivamente de las vibraciones del éter, y si hemos establecido las ecuaciones (1') es porque el problema del movimiento se reduce siempre, en virtud del teorema de D' Alembert, á una cuestion de estática, y porque además han de servirnos para simplificar las ecuaciones generales del movimiento.

Supongamos que una cierta estension de éter se halla en movimiento.

Sea μ la posicion inicial de una molécula, es decir su posicion para $t=o$; y μ' su posicion en otro instante cualquiera t.

Sean asimismo x, y, z las cordenadas de μ y $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ las del punto μ': así, pues, ξ, η, ζ son las variaciones de dichas coordenadas x, y, z en este intérvalo t.

Resulta de aquí que ξ, η, ζ son funciones de x, y, z y de t; y si para toda la estension etérea lográsemos determinar

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \text{funcion de } (x, y, z, t) \\ \eta &= \text{funcion de } (x, y, z, t) \\ \zeta &= \text{funcion de } (x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

el problema del movimiento quedaria completamente resuelto para toda la estension del eter, porque todos los elementos del movimiento serian de este modo perfectamente conocidos. Por ejemplo, para fijar en cualquier instante la posicion de cualquier punto bastaria poner en (2) por x, y, z las coordenadas iniciales de dicho punto, y por t el valor que corresponde al instante que consideramos.

La trayectoria de la molécula etérea se obtendria eliminando t.

Las componentes de la velocidad diferenciando por relacion á t, las ecuaciones (2) una vez, y así sucesivamente.

En resúmen, el problema principal del movimiento de una série de puntos formando una masa etérea, está reducido á determinar los valores de ξ, η, ζ en funcion de las coordenadas iniciales x, y, z y del tiempo t.

Núm. 5. Claro es que tanto da espresar ξ, η, ζ en funcion de x, y, z, t, como las coordenadas totales del punto μ. Obtenidas ξ, η, ζ, con agregar á estas x, y, z se tienen dichas coordenadas referidas á O. Tomar á ξ, η, ζ por variables equivale á elegir por origen el mismo punto μ que consideramos, lo cual es mucho mas sencillo, porque la trayectoria infinitamente pequeña de μ se separa muy poco de la posicion inicial, toda vez que se trata en esta teoría de movimientos suficientemente pequeños.

Núm. 6. El movimiento de μ depende de las fuerzas que sobre esta molécula actuan, y por lo tanto, de las posiciones de las moléculas m, m', ... que rodeaban á esta. Calculemos la accion que cada molécula m ejerce en un instante cualquiera sobre μ; determinemos sus componentes, y las sumas de todas las comprendidas en la esfera de actividad de μ darán la fuerza aceleratriz.

Componentes de las atracciones y repulsiones de las moléculas m, m', ... sobre μ.—Sea m una molécula de las que rodean á μ y sea m tambien su posicion inicial: m estaba en m cuando μ estaba en μ (*fig.* 2.ª).

μ vibra y pasa á μ', pero al mismo tiempo m tambien se mueve y pasa á m'; ejerce, pues, una atraccion ó repulsion sobre μ, distinta en magnitud é intensidad de la que ejercia cuando estaba en m y μ en μ.

Ahora su intensidad es

$$m \mu F(\text{distancia } \mu' m').$$

y si representamos por r la primitiva distancia entre μ y m, y por $r + \rho$ la nueva, resultará:

$$\text{accion de } m \text{ sobre } \mu', \quad \varphi = \mu m F(r + \rho).$$

Su direccion habrá variado tambien y será $\mu' m'$; calculemos los cosenos de los ángulos que forma con los ejes.

Las coordenadas de μ' son $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$;

las de m' serán.... $x+\xi+\Delta x+\Delta\xi$, $y+\eta+\Delta y+\Delta\eta$, $z+\zeta+\Delta z+\Delta\zeta$;

Representando por $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ los incrementos x, y, z al pasar de μ á m;

y por $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ los de ξ, η, ζ al pasar del mismo punto μ al m.

Es decir, y esto es regla general, que la característica Δ indica el paso en un mismo instante de un punto á otro de la masa etérea, ó mejor de una á otra *molécula*, y las demás letras griegas ξ, η, ζ indican para una misma molécula variaciones relativas al tiempo.

Así $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ dependen solo de las coordenadas de los dos puntos m, μ en un momento dado;

ξ, η, ζ, dependen del punto μ que se considere y del tiempo t;

y $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$, claro es que dependen de los puntos μ y m, y que además son funciones de t, pero las variaciones Δ solo están tomadas con relacion á x, y, z.

De lo dicho se deduce que las diferencias de coordenadas de los puntos m, μ, ó sean las proyecciones de $r+\rho$ sobre los ejes, son:

$$\Delta x+\Delta\xi, \quad \Delta y+\Delta\eta, \quad \Delta z+\Delta\zeta;$$

ó representando para abreviar, segun la notacion de Cauchy seguida por Mr. Briot, por x, y, z las diferencias $\Delta x, \Delta y, \Delta z$,

$$\mathrm{x}+\Delta\xi, \quad \mathrm{y}+\Delta y; \quad \mathrm{z}+\Delta\zeta.$$

Los cosenos de los ángulos buscados serán:

$$\frac{\mathrm{x}+\Delta\xi}{r+\rho}; \quad \frac{\mathrm{y}+\Delta\eta}{r+\rho}; \quad \frac{\mathrm{z}+\Delta\zeta}{r+\rho};$$

y tendremos:

$$\text{Componente de } \varphi \text{ paralela al eje } x = \mu\, m\, F(r+\rho)\,\frac{\mathrm{x}+\Delta\xi}{r+\rho}\,;$$

$$\text{Componente de } \varphi \text{ paralela al eje } y = \mu\, m\, F(r+\rho)\,\frac{\mathrm{y}+\Delta\eta}{r+\rho}\,;$$

$$\text{Componente de } \varphi \text{ paralela al eje } z = \mu\, m\, F(r+\rho)\,\frac{\mathrm{z}+\Delta\zeta}{r+\rho}\,.$$

Representando para simplificar la funcion $\dfrac{F(r+\rho)}{r+\rho}$ por $f(r+\rho)$ tendremos finalmente

$$\varphi_{\mathrm{x}} = \mu\, m\, f(r+\rho)\,(\mathrm{x}+\Delta\xi)\;;$$

$$\varphi_{\mathrm{y}} = \mu\, m\, f(r+\rho)\,(\mathrm{y}+\Delta\eta)\;;$$

$$\varphi_{\mathrm{z}} = \mu\, m\, f(r+\rho)\,(\mathrm{z}+\Delta\zeta)\;.$$

Lo que hemos dicho de la accion de la molécula m sobre μ pudiéramos decir de la m', m'' ..... ; y llamando φ', φ''..... á las acciones parciales de estas moléculas, resultará

$$\text{Accion de } m' \text{ sobre } \mu. \left\{\begin{array}{l} \varphi'_{\mathrm{x}} = \mu\, m'\, f(r'+\rho')\,(\mathrm{x}'+\Delta\xi')\;; \\ \varphi'_{\mathrm{y}} = \mu\, m'\, f(r'+\rho')\,(\mathrm{y}'+\Delta\eta')\;; \\ \varphi'_{\mathrm{z}} = \mu\, m'\, f(r'+\rho')\,(\mathrm{z}'+\Delta\zeta')\;; \end{array}\right.$$

$$\text{Accion de } m'' \text{ sobre } \mu. \left\{\begin{array}{l} \varphi''_{\mathrm{x}} = \mu\, m''\, f(r''+\rho'')\,(\mathrm{x}''+\Delta\xi'')\;; \\ \varphi''_{\mathrm{y}} = \mu\, m''\, f(r''+\rho'')\,(\mathrm{y}''+\Delta\eta'')\;; \\ \varphi''_{\mathrm{z}} = \mu\, m''\, f(r''+\rho'')\,(\mathrm{z}''+\Delta\zeta'')\;; \end{array}\right.$$

. . . .

ecuaciones en las que los acentos indican á qué molécula se refieren los elementos que entran en las fórmulas.

Resulta de lo dicho que las componentes totales de todas las acciones de las moléculas que rodean á μ serán

$$\Phi_x = \varphi_x + \varphi'_x + \varphi''_x + \ldots\ldots = \mu\,[m\,f(r+\rho)(x+\Delta\xi) +$$

$$+ m'\,f(r'+\rho')(x'+\Delta\xi') + m''\,f(r''+\rho'')(x''+\Delta\xi'') + \ldots\ldots]$$

$$\Phi_y = \varphi_y + \varphi'_y + \varphi''_y + \ldots\ldots = \mu\,[m\,f(r+\rho)(y+\Delta\eta) +$$

$$+ m'\,f(r'+\rho')(y'+\Delta\eta') + m''\,f(r''+\rho'')(y''+\Delta\eta'') + \ldots\ldots]$$

$$\Phi_z = \varphi_z + \varphi'_z + \varphi'_z + \ldots\ldots = \mu\,[m\,f(r+\rho)(z+\Delta\zeta) +$$

$$+ m'\,f(r'+\rho')(z'+\Delta\zeta') + m''\,f(r''+\rho'')(z''+\Delta\zeta'') + \ldots\ldots]$$

En los segundos miembros entran tantos términos como moléculas rodean á μ dentro de la esfera de atraccion, y representando esta suma por Σ, que en general se la podrá considerar como una integral, tendremos

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= \mu\,\Sigma\,m\,f(r+\rho)(x+\Delta\xi)\,; \\ \Phi_y &= \mu\,\Sigma\,m\,f(r+\rho)(y+\Delta\eta)\,; \\ \Phi_z &= \mu\,\Sigma\,m\,f(r+\rho)(z+\Delta\zeta)\,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Núm. 7. En estas ecuaciones r, ρ, x, y, z, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, son variables y varian de un punto á otro del medio etéreo, es decir, que son funciones de x, y, z, y algunas de ellas, ρ, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, son además funciones de t, no por la operacion que indica Δ, que solo se refiere á x, y, z, sino porque ρ, ξ, η, ζ son funciones del tiempo.

Núm. 7. *Ecuaciones diferenciales del movimiento del éter.* Puesto que Φ_x, Φ_y, Φ_z son las componentes de la accion que el medio ambiente ejerce sobre la molécula μ en movimiento, es claro, segun los principios fundamentales de la Mecánica, que

$$\mu \frac{d^2(x+\xi)}{dt^2} = \Phi_x; \ \mu \frac{d^2(y+\eta)}{dt^2} = \Phi_y; \ \mu \frac{d^2(z+\zeta)}{dt^2} = \Phi_z$$

son las ecuaciones de dicho movimiento; pero x, y, z son independientes del tiempo, luego se reducen á estas otras:

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Phi_x ; \quad \mu \frac{d^2\eta}{dt^2} = \Phi_y ; \quad \mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Phi_z ;$$

ó sustituyendo por los componentes de Φ sus valores (3) y dividiendo por μ

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma m f(r+\rho)(\mathrm{x}+\Delta\xi) ;$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma m f(r+\rho)(\mathrm{y}+\Delta\eta) ;$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma m f(r+\rho)(\mathrm{z}+\Delta\zeta) .$$

Estas son las ecuaciones principales del movimiento del éter, y por lo tanto las *ecuaciones de la luz.*

Núm. 9. Antes de pasar adelante simplifiquémoslas.

Simplificacion.—Segun la fórmula de Taylor

$$f(r+\rho) = f(r) + f'(r)\rho + f''(r)\frac{\rho^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

y sustituyendo, por ejemplo, en $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, resultará

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma m \left[f(r) + f'(r)\rho + f''(r)\frac{\rho^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots\right](\mathrm{x}+\Delta\xi).$$

Desarrollando el segundo miembro

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma m \left[f(r)\,x + f'(r)\,\rho\,x + f''(r)\,\frac{\rho^2}{1\,.\,2}\,x + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. f(r)\,\Delta\xi + f'(r)\,\rho\,\Delta\xi + f''(r)\,\frac{\rho^2}{1\,.\,2}\,\Delta\xi + \ldots\ldots \right]$$

Pero los movimientos son infinitamente pequeños en amplitud, luego ρ, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ son tambien infinitamente pequeños; y despreciando los términos que contienen ρ^2, $\rho\Delta\,\xi$, ρ^3..... que son de órden superior, quedará

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma\, m \left[f(r)\,x + f'(r)\,\rho\,x + f(r)\,\Delta\xi \right] =$$

$$= \Sigma\, mf(r)\,x + \Sigma\, m \left[f'(r)\,\rho\,x + f(r)\,\Delta\xi \right].$$

La primera parte del segundo miembro, $\Sigma\, mf(r)\,x$, es nula en virtud de las condiciones (1), y toda vez que r y x se refieren al estado de equilibrio.

Tendremos, segun esto,

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma\, m\, f(r)\,\Delta\,\xi + \Sigma\, m\, f'(r)\,\rho\,x \quad ;$$

y por consideraciones análogas......... $\left\{ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Sigma\, m\, f(r)\,\Delta\eta + \Sigma\, m\, f'(r)\,\rho\,y \quad ; \right.$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Sigma\, m\, f(r)\,\Delta\zeta + \Sigma\, m\, f'(r)\,\rho\,z \quad .$$

Finalmente, se sabe que

$$(r + \rho)^2 = (x + \Delta\xi)^2 + (y + \Delta\eta)^2 + (z + \Delta\zeta)^2,$$

puesto que las coordenadas de μ' son

$$x + \xi\,;\ y + \eta\,;\ z + \zeta\,:$$

y las de m'

$$x + \mathrm{x} + \xi + \Delta\xi\,;\ y + \mathrm{y} + \eta + \Delta\eta\,;\ z + \mathrm{z} + \zeta + \Delta\zeta\,.$$

De la última ecuacion se deduce

$$r^2 + 2\,r\,\rho + \rho^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 + 2\,(\mathrm{x}\,\Delta\xi + \mathrm{y}\,\Delta\eta + \mathrm{z}\,\Delta\zeta) +$$
$$+ (\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2 + \Delta\zeta^2)\,:$$

suprimiendo de ambos miembros las cantidades iguales r^2 y $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2$ y despreciando las de segundo órden ρ^2, $\Delta\xi^2$, $\Delta\eta^2$, $\Delta\zeta^2$, obtendremos:

$$r\,\rho = \mathrm{x}\,\Delta\xi + \mathrm{y}\,\Delta\eta + \mathrm{z}\,\Delta\zeta\,;$$

y tambien

$$\rho = \frac{\mathrm{x}\,\Delta\xi + \mathrm{y}\,\Delta\eta + \mathrm{z}\,\Delta\zeta}{r}\,.$$

Poniendo este valor de ρ en las ecuaciones diferenciales de movimiento, hallamos las fórmulas definitivas.

(*Se continuará.*)

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMERICAS.

(Continuacion.)

CAPITULO II.

Determinacion de los módulos de las raices imaginarias, cuando la ecuacion sólo contiene raices de esta especie.

§. 10.

Definicion del nuevo problema.

Una ecuacion de grado *par*, $2n$ por ejemplo, que sólo contenga raices imaginarias, se puede considerar, en principio, como compuesta de n factores, trinomios de 2.° grado, de la forma x^2+fx+g^2; en los cuales debe necesariamente verificarse que $f<2g$. Para la definicion completa de estos trinomios, necesítase, pues, conocer, en magnitud y signo, lo que vale f, y sólo en el primer concepto lo que g representa.—Los valores absolutos de g, correspondientes á los n trinomios, ó n pares de raices imaginarias *conjugadas*, que la ecuacion, por hipótesis, contiene, son los *módulos* de estas raices, y las incógnitas del problema que á renglon seguido nos proponemos principalmente determinar. Del cálculo de los valores de f trataremos con especialidad en el capítulo inmediato.

El trinomio x^2+fx+g^2 equivale á este producto de factores de primer grado, con relacion á la letra x:

$$\left(x+{}^1/_2f+{}^1/_2\sqrt{4g^2-f^2}\cdot\sqrt{-1}\right)\times\left(x+{}^1/_2f-{}^1/_2\sqrt{4g^2-f^2}\cdot\sqrt{-1}\right).$$

Ó á este otro, si préviamente suponemos que

$$f = 2\alpha, \quad \text{y} \quad g = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}:$$

$$(x + \alpha + \beta\sqrt{-1}) \times (x + \alpha - \beta\sqrt{-1}).$$

Ó al siguiente, si continuamos suponiendo que

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}:$$

$$\{x + g(\cos\varphi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)\} \times \{x + g(\cos\varphi - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)\}.$$

Ó, en último extremo, al nuevo trinomio:

$$x^2 + 2g\cos\varphi \,.\, x + g^2.$$

Y, del propio modo que la ecuacion propuesta, aquella otra cuyas raices sean las potencias m de las raices de la primitiva podrá considerarse como equivalente á un producto de $2n$ factores de primer grado, *conjugados*, de la forma

$$x + g^m(\cos m\varphi \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} m\varphi);$$

ó de n trinomios de segundo, de esta otra:

$$x^2 + 2g^m\cos m\varphi \,.\, x + g^{2m};$$

ó de la siguiente, algo más breve y sencilla, si por f_m representamos el coeficiente del segundo término:

$$x^2 + f_m x + g^{2m}.$$

De la igualdad

$$f_m = 2g^m\cos m\varphi,$$

se desprenden inmediatamente tres importantes consecuencias:

1.ª Que el valor de f_m será, por regla general, inferior siempre al de $2g^m$.

2.ª Que, conforme m aumente, f_m podrá aumentar ó disminuir, sin propension ó tendencia hácia *límite* alguno determinado.

Y 3.ª Que, no sólo el valor absoluto, sino el *signo* de f_m, depende del valor de m, y puede variar, conforme varía y aumenta m, al parecer sin órden ni concierto.

Unicamente cuando $m\varphi$, por excepcion rarísima, fuere igual á π, ó á un múltiplo de π, ó de la semicircunferencia, el valor absoluto de f_m lo sería á $2g^m$: con la particularidad notable de que lo propio sucederá luégo cuando, en las transformadas sucesivas de la ecuacion propuesta, del exponente m pasemos al $2m$, ó al $4m$, etc., etc.: como si la primera transformada en que esto se verifica, en vez de dos raices imaginarias, correspondientes á las de la propuesta, contuviese dos raices reales, é iguales ambas á g^m. Pero, áun cuando f_m propenda entónces hácia el mismo límite que $2g^m$, su signo permanecerá indeterminado; y, por las incesantes variaciones del signo, inferiremos lo que en este caso excepcional sucede, y pudiera por de pronto confundirnos.

§. 11.

Composicion y análisis de la ecuacion del grado $2n$, cuyas raices son todas imaginarias.

Cuando suponíamos la ecuacion compuesta de n binomios de primer grado, de la forma

$$x + a, \quad x + b, \quad x + c, \; \ldots\ldots$$

la representábamos abreviada y simbólicamente de este modo:

$$x^n + [a]\, x^{n-1} + [ab]\, x^{n-2} + \ldots\ldots + [ab \ldots k]\, x + ab \ldots kl = 0.$$

Pues, suponiéndola ahora compuesta de n trinomios de 2.º grado, de la forma

$$x^2+fx+g^2,\ x^2+f'x+g'^2,\ x^2+f''x+g''^2, \ldots\ldots$$

tratemos de encontrar su expresion final, análoga á la precedente.—Para mayor claridad en este asunto, procederemos por partes, y procuraremos llegar al caso general y más complicado por induccion, ó exámen comparativo de lo que sucede en otros casos particulares y más sencillos.

Considerando primero el caso de constar la ecuacion propuesta de un sólo trinomio, y despues de dos, cuatro, seis, etc., etc., trinomios, de análoga forma todos, si se efectúa el producto de cuantos en cada caso se admitan, obtendremos las ecuaciones de 2.º, 4.º, 6.º, ... grados á que corresponden, y cuyos coeficientes escribimos á continuacion.

Ecuacion de 2.º grado... $C_0=1$

$C_1=f$

$C_2=g^2$

Id. de 4.º grado....... $C_0=1$

$C_1=[f]$

$C_2=[g^2]+ff'$

$C_3=[g^2f']$

$C_4=g^2g'^2$

Id. de 6.º grado....... $C_0=1$

$C_1=[f]$

$C_2=[g^2]+[ff']$

$C_3=[g^2f']+ff'f''$

$C_4=[g^2g'^2]+[g^2f'f'']$

$C_5=[g^2g'^2f'']$

$C_6=g^2g'^2g''^2$

Id. de 8.º grado....... $C_0=1$

$$C_1=[f]$$
$$C_2=[g^2]+[ff']$$
$$C_3=[g^2 f']+[ff' f'']$$
$$C_4=[g^2 g'^2]+[g^2 f' f'']+ff' f'' f'''$$
$$C_5=[g^2 g'^2 f'']+[g^2 f' f'' f''']$$
$$C_6=[g^2 g'^2 g''^2]+[g^2 g'^2 f'' f''']$$
$$C_7=[g^2 g'^2 g''^2 f''']$$
$$C_8=g^2 g'^2 g''^2 g'''^2.$$

Fácil sería, aunque bien escusado, traducir al castellano la regla de composicion de las diversas ecuaciones consideradas, en los precedentes símbolos contenida; y no ménos fácil penetrarse de su generalidad, ó posibilidad de su aplicacion á otros ejemplos más complicados.

¿Cuáles serán, en efecto, los coeficientes de la ecuacion del grado *décimo?*

Los de la de *octavo*, sucesivamente multiplicados por **1**, por f^{IV}, y por $g^{\text{IV}\,2}$,—coeficientes del nuevo trinomio componente $x^2+f^{\text{IV}}x+g^{\text{IV}\,2}$,—y sumados unos con otros, ó dispuestos los productos parciales así obtenidos del siguiente modo:

Ecuacion del grado **10.º**

$C_0=1$		
$C_1=[f]$	$+f^{\text{IV}}$	
$C_2=[g^2]+[ff']$	$+[f]\cdot f^{\text{IV}}$	$+g^{\text{IV}\,2}$
$C_3=[g^2 f']+[ff' f'']$	$+[g^2]\cdot f^{\text{IV}}+[ff']f^{\text{IV}}$	$+[f]\cdot g^{\text{IV}\,2}$
....	....	....
....	....	....

Y, hasta sin efectuar la suma de los tres grupos de términos así dispuestos, se concluye de la primera ojeada que la ecuacion del grado 10.° obedece á la misma ley de composicion que las de los grados inferiores: ley generalizada y resumida de un modo bastante explícito en la expresion general siguiente de la ecuacion del grado $2n$:

$$
\begin{aligned}
(13)\quad & x^{2n}+[f]\,x^{2n-1}+\left([g^2]+[f\,f']\right)x^{2n-2}+\\
& \qquad +\left([g^2 f']+[f\,f'\,f'']\right)x^{2n-3}+\\
& +\left([g^2 g'^2]+[g^2 f'\,f'']+f\,f'\,f''\,f''']\right)x^{2n-4}+\\
& +\left([g^2 g'^2 f''']+[g^2 f' f'' f''']+[f\,f'\,f''\,f'''\,f^{\text{IV}}]\right)x^{2n-5}+\ldots\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& +\left([g^2 g'^2\ldots\ldots g^{(n-2)2}]+[g^2 g'^2\ldots\ldots g^{(n-3)2} f^{n-2} f^{n-1}]\right)x^2+\\
& +[g^2 g'^2\ldots\ldots g^{(n-2)2} f^{n-1}]\,x+g^2 g'^2\ldots\ldots g^{(n-1)2}=0.
\end{aligned}
$$

En esta ecuacion general, como en las varias particulares, propuestas para su mejor y más pronta inteligencia, se advierte desde luego:

1.° Que todos los coeficientes son *homogéneos*, y todos los términos de su mismo grado, $2n$.

2.° Que los coeficientes equidistantes de los dos términos extremos son del mismo grado, variable con la posicion ó distancia, con respecto á las letras f.

Y 3.° Que en los coeficientes de órden ó lugar *impar* uno de los términos es *esencialmente positivo* é independiente de las f, ó de los segundos coeficientes de los trinomios de donde la ecuacion procede.

§. 12.

Transformacion de la ecuacion propuesta en otra cuyas raices sean las potencias m de las raices incógnitas.—Cálculo de los módulos.

Entre la ecuacion general, cuya composicion acabamos de inquirir y determinar, y aquella cuyas raices sean las potencias m de las raices de la primera, no hay más diferencia sino que la una procede de la multiplicacion de los trinomios

$$x^2 + fx + g^2,\ x^2 + f'x + g'^2,\ x^2 + f''x + g''^2, \ldots\ldots;$$

y la otra de la multiplicacion de los siguientes:

$$x^2 + f_m x + g^{2m},\ x^2 + f'_m x + g'^{2m},\ x^2 + f''_m x + g''^{2m}, \ldots\ldots$$

Luego la transformada final de la ecuacion propuesta podrá inmediatamente escribirse de este modo:

$$(14)\quad x^{2n} + [f_m]\,x^{2n-1} + \left([g^{2m}] + f_m f'_m]\right) x^{2n-2} +$$
$$+ \left([g^{2m} f'_m] + [f_m f'_m f''_m]\right) x^{2n-3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + [g^{2m} g'^{2m} \ldots\ldots g^{(n-2)2m} f_m^{n-1}]\,x +$$
$$+ g^{2m} g'^{2m} g''^{2m} \ldots\ldots g^{(n-1)2m} = 0.$$

Veamos ahora en qué se convierte esta ecuacion cuando el exponente ó número m aumenta indefinidamente.

En los coeficientes de lugar *par*,—segundo, cuarto, etc.—ni un sólo término es independiente de las f_m; y como f_m igual á $2g^m \cos m\varphi$, es cantidad variable, por regla general, en magnitud y en signo, resulta que variables serán tambien en ambos conceptos los coeficientes mencionados. Por lo tanto, no hay que esperar simplificacion alguna de la última ecuacion, en cuanto á estos coeficientes *pares* se refiere, por mucho que m aumente; y el primer indicio, en la práctica, de que una ecuacion comprende sólo raices imaginarias consistirá en la variabilidad irregular de los coeficientes ahora considerados, conforme de la ecuacion propuesta, por la regla del §. 3.°, aplicable á todos los casos, se fueren deduciendo otra y otras, cuyas raices sean los *cuadrados*, *cuartas potencias*, *octavas*, etc., etc., de las raices que se buscan.

Mas, por el contrario, suponiendo que los *módulos* sean propiamente desiguales y que

$$g > g' > g'' > \dots ,$$

los términos de lugar *impar*,—tercero, quinto, etc.—admiten muy notables simplificaciones. Para precisar las ideas fijémonos, por de pronto, en el primero de los citados, ó coeficiente, en la ecuacion (14), de la potencia $2n-2$ de x.

Este coeficiente,

$$[g^{2m}] + [f_m f'_m] ,$$

consta de dos partes.

La primera, $[g^{2m}]$, puede escribirse como sigue:

$$[g^{2m}] = g^{2m} + g'^{2m} + g''^{2m} + \dots =$$

$$= g^{2m} \times \left\{ 1 + \left(\frac{g'}{g}\right)^{2m} + \left(\frac{g''}{g}\right)^{2m} + \dots \right\};$$

y, así presentada, no admite duda que el *límite* hácia el cual propende, conforme aumenta m, se confunde con su primer término, g^{2m}.

La segunda parte del mismo coeficiente, $[f_m f'_m]$, es inferior á la expresion análoga que se obtendria si, en vez de las f_m, pusiésemos en ella los valores extremos y como límites de estas cantidades, $2g^m$, y si considerásemos todos los términos componentes como positivos. En resolucion, y sin ningun género de duda:

$$[f_m f'_m] < 4\,[g^m g'^m].$$

Pero el límite de la suma $4\,[g^m g'^m]$, como el de la anterior $[g^{2m}]$, y por el mismo motivo, es igual á su primer término $4\,g^m g'^m$. Luego la suma $[f_m f'_m]$ podrá suponerse finalmente inferior á $4g^m g'^m$. Y, como la relacion de los dos términos, $4g^m g'^m$ y g^{2m}, se halla expresada por

$$4\left(\frac{g'}{g}\right)^m,$$

y esta relacion propende hácia *cero*, conforme el exponente m aumenta más y más, resulta que en el coeficiente total,

$$[g^{2m}] + [f_m f'_m],$$

el simple término g^{2m} será entonces el predominante, ó aquel en cuya comparacion todos los demás pueden considerarse como evanescentes y despreciables.

Análoga conclusion se deduce del análisis del coeficiente de la potencia $2n-4$ de x:

$$[g^{2m} g'^{2m}] + [g^{2m} f'_m f''_m] + [f_m f'_m f''_m f'''_m].$$

Este coeficiente es, en efecto, inferior al que se obtendria si en los términos segundo y tercero las f_m se reemplazasen por sus límites superiores $2g^m$, y todas las partes componentes de aquellos términos, de signo en general dudoso y variable, se considerasen como positivas: inferior, en suma, á esta otra expresion analítica:

$$[g^{2m} g'^{2m}] + 4\,[g^{2m} g'^m g''^m] + 16\,[g^m g'^m g''^m g'''^m].$$

Pero el *límite* de esta última expresion, por ser $g > g' > g'' > g''' > \ldots\ldots$ se confunde con esta otra, mucho más sencilla:

$$g^{2m} g'^{2m} + 4 g^{2m} g'^{m} g''^{m} + 16 g^{m} g'^{m} g''^{m} g'''^{m};$$

equivalente á la que sigue:

$$g^{2m} g'^{2m} \times \left\{ 1 + 4 \left(\frac{g''}{g'} \right)^m + 16 \left(\frac{g'' g'''}{g g'} \right)^m \right\}.$$

Y, así presentado, conclúyese inmediatamente que este tal *límite* discrepará cada vez ménos, conforme aumente m, del sólo término $g^{2m} g'^{2m}$.

Sin grave complicacion ni variante alguna esencial, puede aplicarse el mismo razonamiento á todos los coeficientes análogos, ó de lugar *impar*, de la ecuacion (14); hasta deducir finalmente que dicha ecuacion, *límite* de todas las transformadas de la primitiva, se reduce á la que sigue: en la cual la letra f_0 representa un coeficiente cualquiera de lugar *par*, indeterminado en magnitud y en signo:

$$(15) \quad x^{2n} + f_0 x^{2n-1} + g^{2m} x^{2n-2} + f_0' x^{2n-3} + g^{2m} g'^{2m} . x^{2n-4} + \\ + f_0'' x^{2n-5} + g^{2m} . g'^{2m} . g''^{2m} x^{2n-6} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + f_0^{(n-1)} x + g^{2m} . g'^{2m} g''^{2m} \ldots\ldots g^{(n-1)2m} = 0.$$

Y obtenida esta ecuacion, que reemplaza á la (5) del capítulo I, no hay que decir cómo se calcularán los n módulos buscados: por la misma regla que las raices reales, cuando la ecuacion propuesta sólo las contiene de esta especie: ó prescindiendo en la última transformada de los coeficientes de lugar *par;* dividiendo unos por otros,—el tercero por el segundo, el cuarto por el tercero, etc., etc.,—los de lugar *impar;* y extrayendo, por los procedimientos ordinarios de la Aritmétrica, de los cocientes resultantes las raices de índice $2m$, ó sólo del índice m si, como casi siempre sucede, basta conocer los *cuadrados* de aquellos módulos. Las varias advertencias consignadas en las páginas anteriores para facilitar en la práctica la investigacion de las raices reales, serán, pues, aplicables sin restriccion ó cortapisa á la determinacion de los módulos de las raices imaginarias.

§. 13.

Dificultad de resolver por completo, y en general, la ecuacion del grado $2n$.—Advertencias útiles para la resolucion de las ecuaciones de cuarto y sexto grados.

Pero la descomposicion de la ecuacion propuesta en trinomios de *segundo* grado, ó la resolucion completa del problema que nos ocupa, exige algo mas que el conocimiento de los terceros términos, $g^2, g'^2, g''^2, \ldots\ldots,$ de aquellos trinomios: el de los coeficientes $f, f', f'', \ldots\ldots,$ de los segundos términos. Veamos si esta última parte del problema es tan fácil de resolver como la anterior.

Si la ecuacion propuesta fuese de *cuarto* grado, segun lo en otro párrafo ya expuesto, podríamos representarla de este modo:

$$x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 =$$
$$x^4 + [f]\, x^3 + ([g^2] + ff')\, x^2 + [g^2 f']\, x + g^2 g'^2 = 0.$$

Y de aquí inmediatamente se deduce que

$$C_1 = f + f',$$
$$C_3 = g^2 f' + g'^2 f; \quad \text{y}$$

$$C_2 = g^2 + g'^2 + ff'.$$

De estas tres ecuaciones, suponiendo ya conocidos los cuadrados de los módulos g^2 y g'^2, las dos primeras servirán para hallar sencillísimamente los valores de f y f', y la tercera como medio de comprobacion de las operaciones numéricas efectuadas para despejar aquellas dos incógnitas. Determinados, pues, los módulos, la descomposicion de la ecuacion completa de *cuarto* grado en dos trinomios de *segundo* se reduce á la resolucion de dos muy sencillas ecuaciones de *primero*.

Si fuese la ecuacion propuesta de *sexto* grado, podríamos escribir por de pronto:

$$x^6 + C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6 =$$

$$x^6 + [f] x^5 + ([g^2] + f f') x^4 + ([g^2 f'] + f f' f'') x^3 +$$

$$([g^2 g'^2] + [g^2 f' f'']) x^2 + [g^2 g'^2 f''] x + g^2 g'^2 g''^2 = 0.$$

E igualando unos con otros los coeficientes de las mismas potencias de x, en ambos miembros contenidos, nos resultaría entónces que

$$C_1 = [f]$$
$$C_5 = [g^2 g'^2 f'']$$

$$C_2 = [g^2] + [f f']$$
$$C_4 = [g^2 g'^2] + [g^2 f' f'']$$

$$C_3 = [g^2 f'] + f f' f''.$$

Las incógnitas en este caso son *tres:* f, f' y f''; y para determinarlas disponemos de *cinco* ecuaciones: dos de *primer* grado, dos de *segundo* y una de *tercero*.

Si de las dos primeras se deducen los valores de f y f', en funcion lineal de f'', y estos valores se sustituyen en la tercera, ésta se convertirá en una ecuacion de *segundo* grado, con la sola incógnita f'', de la cual dependerá la descomposicion en trinomios de la de *sexto* grado propuesta. Y las dos ecuaciones restantes, de *segundo* y *tercer* grado, servirán para cerciorarse de la exactitud de los valores encontrados de f, f' y f'', que simultáneamente deben satisfacer á las cinco.

Mas conviene advertir que, siendo la ecuacion final, resultante de la eliminacion de f y f' en las tres primeras ecuaciones, de *segundo* grado con respecto á f'', dos serán los valores que á esta incógnita correspondan, y otros dos á las f y f' que de ella linealmente dependen. Y como la descomposicion de la ecuacion de *sexto* grado, en tres trinomios de *segundo*, correspondientes á los tres pares de raices conjugadas, debe ser única, el doble sistema de valores de f, f' y f'' introduce en el problema cierta indeterminacion ó vaguedad, molesta en la práctica.

Pues si de la ecuacion de *sexto* grado pasamos á la de *octavo*, mayores serán la dificultad é incertidumbre de esta especie que al resolverla encontremos.

Para hallar los valores de f, f', f'' y f''' dispondríamos entónces de siete ecuaciones: dos de *primer* grado, correspondientes á los coeficientes C_1 y C_7; dos de *segundo*, á los C_2 y C_6; dos de *tercero*, á los C_3 y C_5; y una de *cuarto*, al coeficiente central C_4. Prescindiendo de las tres últimas, ó considerándolas como simples ecuaciones de condicion, ó de comprobacion de los resultados que las cuatro primeras arrojaren, nos quedan cuatro ecuaciones todavia: dos de *primero* y dos de *segundo* grado, con cuatro incógnitas: las cuales, por la eliminacion de tres, se funden en una sola ecuacion de *cuarto* grado, con la incógnita restante f''', de cuyo valor dependen las de f, f' y f''.—La descomposicion en cuatro trinomios de la ecuacion de *octavo* grado depende, pues, en último extremo, de la resolucion de una ecuacion de *cuarto*, y de la eleccion entre los cuatro sistemas de valores de f, f', f'' y f''', que por su medio se obtuvieren, de aquel que propiamente satisface ó corresponde al ejemplo propuesto.

Como ventajosa podria tal vez considerarse aún la resolucion de la ecuacion de *octavo* grado por el método referido. Pero el vicio principal de semejante procedimiento y la necesidad de abandonarle por otro más sencillo y preciso se descubren desde el momento en que tratamos de aplicarle á la descomposicion de la ecuacion del grado *décimo* en cinco trinomios reales de *segundo*.

De nueve ecuaciones, análogas á las en los casos anteriores analizadas, dispondríamos entónces: dos de *primer* grado; dos de *segundo;* dos de *tercero;* dos de *cuarto;* y una de *quinto*. Prescindiendo de las cuatro últimas y más complicadas, quedaríannos cinco, de *primero, segundo* y *tercer* grado. De las dos primeras deduciríamos los valores de f y f' en funcion lineal de f'', f''' y f^{IV}; y, sustituidos estos valores en las demás, tendríamos dos ecuaciones de *segundo* y una de *tercer* grado, con estas tres incógnitas restantes. La eliminacion de f'', por la combinacion recíproca de las dos primeras ecuaciones, y de una de las primeras con la tercera, transformaria el sistema de tres ecuaciones en otro de solas dos; una de *cuarto* grado, y otra de *sexto*, con las incógnitas f''' y f^{IV}. Y la eliminacion entre ambas ecuaciones de la f''', reduciria la dificultad á la resolucion de una ecuacion final del grado 24.—Lo que se presenta como muy sencillo y recomendable en la práctica, cuando la ecuacion propuesta es de *cuarto* grado; y se complica y embrolla un poco, cuando de *sexto;* y con dificultad puede aplicarse, cuando de *octavo;* desde el grado *décimo* en adelante es, si no absolutamente irrealizable y absurdo, complicadísimo é inconveniente á todas luces.

§. 14.

Regla de Newton para corregir los valores aproximados de los módulos, y áun de las mismas raices imaginarias, ya por cualquier procedimiento deducidos.

Dejando para el capítulo inmediato la exposicion del método general que debe preferirse para determinar los valores de f, que á los n trinomios corresponden, supongamos ahora que ya estos valores y los de g son conocidos con cierto grado de aproximacion: con el que puede obtenerse, por ejemplo, empleando para calcularlos las tablas logarítmicas de solas cinco cifras decimales; y veamos cómo, obtenido este primer resultado, pueden luégo deducirse otro ú otros, cada vez ménos erróneos, ó ménos discrepantes de la verdad. El procedimiento para esto apénas difiere del que se explicó y empleó cuando, en el anterior capítulo, se trataba de corregir los valores aproximados de las raices reales; y, en sustancia, es siempre el primitivo y muy sencillo método de Newton. Exponiéndole, con las variantes de forma que necesariamente pide el cálculo de las raices imaginarias, completaremos el cuadro comparativo de las reglas que en la investigacion de ambas especies de raices deben observarse; y hasta demostraremos la casi identidad de tales reglas en ambos casos extremos.

Si, cuando x_0 representa un valor real muy aproximado de x, podemos, sin error de trascendencia, escribir la expresion siguiente:

$$(16) \qquad f(x) = f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + \Delta x_0 \,.\, f'(x_0) = 0,$$

de la cual inmediatamente se deduce el valor de la correccion buscada, Δx_0, lo mismo debe sernos permitido cuando x_0 posea la forma imaginaria, $\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}$. Porque la correccion en este segundo supuesto tendria tambien la forma análoga, $\Delta \alpha_0 + \Delta \beta_0 \sqrt{-1}$; y, en el desarrollo del polinomio $f(x_0 + \Delta x_0)$, con relacion á la parte real del segundo término, $\Delta x_0 \,.\, f'(x_0)$, serian despreciables las partes, ó cantidades del mismo nombre de los términos sucesivos, por depender éstas de los cuadrados y potencias superiores de las cantidades, *reales* tambien y muy pequeñas, $\Delta \alpha_0$ y $\Delta \beta_0$; y los coeficientes del radical $\sqrt{-1}$, desde el tercero inclusive en adelante, igualmente lo serian, por idéntico motivo, con relacion al coeficiente del mismo radical en el segundo término del mencionado desarrollo. Luego, sea de la forma que quiera, si x_0 verdaderamente representa un valor aproximado de x, que deba satisfacer á la ecuacion $f(x) = 0$, siempre podremos comenzar por escribir esta primera expresion, fundamental de cuanto sigue:

$$(17)\quad f(x_0+\Delta x_0)=f(x_0)+\Delta x_0 \,.\, f'(x_0)+\ldots=$$

$$[x_0^n]+[nx_0^n]\times\frac{\Delta x_0}{x_0}=[x_0^n]+[nx_0^n]\times\Delta \log x_0=0.$$

Por otra parte: si el trinomio $x^2+f_0 x+g_0^2$ comprende estas dos raices conjugadas

$$x_0=-g_0(\cos\varphi_0+\sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ \varphi_0) \qquad \text{y}$$

$$x_0'=-g_0(\cos\varphi_0-\sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ \varphi_0),$$

y sucesivamente las sustituimos, en vez de x, en la ecuacion $f(x)=0$, que ahora supondremos, para simplicar un poco la escritura, del grado n, nos resultará que

$$[x_0^{\,n}]=f(x_0)=[(-g_0)^n\cos n\varphi_0]+[(-g_0)^n\ \mathrm{sen}\ n\varphi_0]\times\sqrt{-1} \qquad \text{y}$$

$$[x_0'^{\,n}]=f(x_0')=[(-g_0)^n\cos n\varphi_0]-[(-g_0)^n\ \mathrm{sen}\ n\varphi_0]\times\sqrt{-1}.$$

Y de análogo modo deduciremos, generalizando lo que en el §. 8.º se explicó, que

$$[nx_0^{\,n}]=[n(-g_0)^n\cos n\varphi_0]+[n(-g_0)^n\ \mathrm{sen}\ n\varphi_0]\times\sqrt{-1}; \quad \text{y}$$

$$[nx_0'^{\,n}]=[n(-g_0)^n\cos n\varphi_0]-[n(-g_0)^n\ \mathrm{sen}\ n\varphi_0]\times\sqrt{-1}.$$

Suponiendo ahora, por brevedad, que

$$[(-g_0)^n\cos n\varphi_0]=P\cos Q, \ \text{y} \quad [(-g_0)^n\ \mathrm{sen}\ n\varphi_0]=P\ \mathrm{sen}\ Q; \ \text{y}$$

$$[n(-g_0)^n\cos n\varphi_0]=\rho\cos\psi, \ \text{y} \ [n(-g_0)^n\ \mathrm{sen}\ n\varphi_0]=\rho\ \mathrm{sen}\ \psi,$$

de la ecuacion (17) se concluye que

$$P \cos Q + P \operatorname{sen} Q \,.\, \sqrt{-1} + \rho \left(\cos \psi + \operatorname{sen} \psi \,.\, \sqrt{-1}\right) \times \Delta \log x_0 = 0; \quad \text{y}$$

$$P \cos Q - P \operatorname{sen} Q \,.\, \sqrt{-1} + \rho \left(\cos \psi - \operatorname{sen} \psi \,.\, \sqrt{-1}\right) \times \Delta \log x_0' = 0.$$

Y de estas dos últimas ecuaciones, combinándolas una con otra por adicion y sustraccion, se desprenden las dos siguientes:

$$(18) \left\{ \begin{aligned} & 2P \cos Q + \rho \cos \psi (\Delta \log x_0 + \Delta \log x_0') + \\ & \qquad \rho \operatorname{sen} \psi (\Delta \log x_0 - \log \Delta x_0') \sqrt{-1} = 0; \quad \text{y} \\ & 2P \operatorname{sen} Q \,.\, \sqrt{-1} + \rho \cos \psi (\Delta \log x_0 - \Delta \log x_0') + \\ & \qquad \rho \operatorname{sen} \psi (\Delta \log x_0 + \Delta \log x_0') \sqrt{-1} = 0. \end{aligned} \right.$$

En las últimas nuevas ecuaciones figuran en realidad como incógnitas la *suma* y la *diferencia* de las dos correcciones, $\Delta \log. x_0$ y $\Delta \log. x_0'$, correspondientes á los logaritmos de las raices conjugadas x_0 y x_0'; pero no son éstas las correcciones que ahora propiamente se buscan, sino las de los valores de g_0 y f_0, ó de g_0 y φ_0. Procuremos, pues, averiguar la dependencia que entre unas y otras existe, y si, por la sustitucion de aquellas por éstas, el sistema (18) admite alguna simplificacion notable.

Por de pronto sabemos que

$$\log x_0 = \log(-g_0) + \log(\cos \varphi_0 + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi_0); \quad \text{y}$$

$$\log x_0' = \log(-g_0) + \log(\cos \varphi_0 - \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi_0).$$

Pero, representando por *e* la *base* del sistema de logaritmos *neperianos* ó naturales, que son los en este párrafo considerados hasta ahora, tambien puede admitirse como ya demostrado y sabido que

$$e^{\varphi_0\sqrt{-1}} = \cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0; \quad \text{y}$$

$$e^{-\varphi_0\sqrt{-1}} = \cos\varphi_0 - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0.$$

Luego:

$$\log x_0 = \log(-y_0) + \varphi_0\sqrt{-1}; \ \text{y} \ \log x_0' = \log(-y_0) - \varphi_0\sqrt{-1}.$$

De donde, por transformaciones muy sencillas, se concluye finalmente que

$$(19)\ \begin{cases} \Delta\log x_0 + \Delta\log x_0' = 2\,.\,\Delta\log y_0 \\ \Delta\log x_0 - \Delta\log x_0' = 2\sqrt{-1}\,.\,\Delta\varphi_0\,. \end{cases}$$

Mediante el sistema de ecuaciones (19), el (18) se convertirá en el que sigue:

$$(20)\ \begin{cases} P\cos Q + \rho\cos\psi\,.\,\Delta\log y_0 - \rho\,\text{sen}\,\psi\,.\,\Delta\varphi_0 = 0\,, \quad \text{y} \\ P\,\text{sen}\,Q + \rho\,\text{sen}\,\psi\,.\,\Delta\log y_0 + \rho\cos\psi\,.\,\Delta\varphi_0 = 0\,. \end{cases}$$

Y de éste,—multiplicando la primera ecuacion por *cos* ψ y la segunda por *sen* ψ, y sumando uno con otro ambos productos; y volviéndolas luégo á multiplicar, por *sen* ψ la primera, y la segunda por *cos* ψ, y restando del último producto el anterior,—se obtienen los siguientes resultados:

$$(21)\begin{cases} \Delta\log y_0 = \log\left(1 + \dfrac{\Delta y_0}{y_0}\right) = \dfrac{\Delta y_0}{y_0} - \ldots\ldots = -\dfrac{P\cos(Q-\psi)}{\rho}\,; \\ \text{y} \\ \Delta\varphi_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\dfrac{P\,\text{sen}\,(Q-\psi)}{\rho}\,. \end{cases}$$

Para deducir todavía de las correcciones Δg_0 y $\Delta \varphi_0$ la de f_0, Δf_0, basta recordar que

$$f_0 = 2 g_0 \cos \varphi_0 .$$

Pues de esta última ecuacion, combinada con las dos (21), despreciando los cuadrados y el producto de $\Delta g_0 \times \Delta \varphi_0$, se desprende esta otra:

$$(22) \qquad \Delta f_0 = 2 (g_0 + \Delta g_0) . \cos (\varphi_0 + \Delta \varphi_0) - 2 g_0 \cos \varphi_0 = - \frac{2 P g_0 \cos (Q - \psi + \varphi_0)}{\rho} .$$

Y si á la correccion de f_0 se prefiere la de su logaritmo, $\Delta \log f_0$, fácilmente se hallará, despreciando las mismas potencias, segunda y superiores, de las correcciones análogas, Δg_0 y $\Delta \varphi_0$, ó sus productos, mediante la serie de transformaciones que á renglon seguido indicamos:

$$\log f_0 = \log 2 + \log g_0 + \log \cos \varphi_0 ; \qquad \text{y}$$

$$(23) \quad \Delta . \log f_0 = \frac{\Delta g_0}{g_0} - \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\cos \varphi_0} . \Delta \varphi_0 = - \frac{P \cos (Q - \psi + \varphi_0)}{\rho \cos \varphi_0} .$$

Y, por el contrario, si á la correccion de g_0 ó de su logaritmo, que la primera de las ecuaciones (21) suministra, prefiriésemos la del cuadrado del módulo, g_0^2, inmediatamente la deduciríamos de este modo:

$$(24) \qquad \Delta g_0^2 = 2 g_0 . \Delta g_0 + \ldots\ldots = - 2 g_0^2 . \frac{P \cos (Q - \psi)}{\rho} .$$

En resolucion: conocidos los valores aproximados g_0, φ_0 y f_0, para calcular las correcciones que les corresponden, se sustituirá en la ecuacion propuesta, del grado n, en vez de x, el valor *real* $-g_0$; y, multiplicando el primer término del polinomio resultante por $\cos n\varphi_0$, el segundo por $\cos(n-1)\varphi_0$, etc., etc.; y, despues, el primero por $\operatorname{sen} n\varphi_0$, el segundo por $\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0$, etc., etc., se obtendrán las *sumas*, simbólicamente representadas por $[(-g_0)^n \cos n\varphi_0]$ y $[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0]$, respectivamente iguales á $P\cos Q$ y $P\operatorname{sen} Q$; de donde se deducirán los valores de estas cantidades auxiliares, P y Q. Y, con leve aumento de trabajo, y casi al propio tiempo, multiplicando cada término de los polinomios ó sumas anteriores por el exponente que en él posea la incógnita x, ó el módulo g_0 en su lugar sustituido, se calcularán las expresiones análogas $[n(-g_0)^n \cos n\varphi_0]$ y $[n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0]$, iguales á $\rho\cos\psi$, la primera, y á $\rho\operatorname{sen}\psi$, la segunda: suficientes para deducir luégo los valores de las nuevas auxiliares ρ y ψ. Con estos antecedentes, el cálculo final de las correcciones buscadas, por medio de las fórmulas (21) á (24), sólo demanda un poco de atencion y conocimientos elementales y muy comunes de Trigonometría.—Cuando este cálculo hubiere de verificarse con auxilio de la primera de las fórmulas (21), ó de la (23), se cuidará de multiplicar préviamente sus segundos miembros por $M(=0.4342945)$, con objeto de convertir los logaritmos *neperianos* en *vulgares*.

§. 15.

Aplicacion á un ejemplo de la doctrina expuesta en los párrafos anteriores.

Apliquemos sin dilacion la doctrina en este capítulo expuesta á la resolucion de un ejemplo muy sencillo: no tanto, sin embargo, que, tratándole por cualquier otro procedimiento, no hubiese de parecernos complicado en demasía.

Sea la ecuacion de 4.° grado

$$(2^\circ) \quad x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 5x + 100 = 0.$$

Las dos primeras transformadas, deducidas inmediata ó directamente por la regla general del §. 3.º, son éstas:

$$(2^1)\quad x^4+38x^3+289x^2-2575x+10^4=0;\quad \text{y}$$

$$(2^2)\quad x^4+866x^3+299221x^2+850625x+10^8=0.$$

Y, reemplazando los coeficientes de la última ecuacion por sus logaritmos, por la regla citada se obtendrán las que siguen, hasta la (2^5) inclusive:

$$(2^2)\quad x^4+2.9375179x^3+5.4759920x^2+$$
$$+5.9297382x+8.0000000=0$$

$$(2^3)\quad x^4+5.1804533x^3+10.9457635x^2-$$
$$-13.7717388x+16.0000000=0$$

$$(2^4)\quad x^4-11.1862877x^3+21.8925258x^2+$$
$$+27.2380574x+32.0000000=0$$

$$(2^5)\quad x^4+21.9012523x^3+43.7850555x^2+$$
$$+54.1557932x+64.0000000=0.$$

En la primera transformada, (2^1), el coeficiente de x,—segundo de los *pares*,—nos ha resultado *negativo:* lo cual prueba que no todas las raices de la propuesta son reales (§. 9.º). En la (2^2) el mismo coeficiente es *positivo; negativo*, por el contrario, en la (2^3); y *positivo* otra vez en la (2^4): su indeterminacion *en signo* no puede ser más manifiesta. Pues *en valor* le sucede lo propio: como lo acredita la misma incertidumbre ó variabilidad del *signo*, procedente de la gran influencia que, en el paso de una transformada á otra, ejerce sobre el *cuadrado* de este coeficiente el *doble producto* (§. 3.º) de los dos que inmediatamente le preceden y siguen.

Con el coeficiente de x^3,—primero de los *pares*,—acontece una cosa parecida. *Positivo* en la ecuacion propuesta y en sus dos primeras transformadas, en la cuarta (2^4) resulta *negativo*, *positivo* en la (2^5), y *negativo* en la (2^6), que por innecesaria se ha omitido.

Pero, en cambio, los coeficientes de x^0 y x^2 se conservan siempre *positivos*, y convergen con gran rapidez hácia *límites* determinados, ó hácia valores independientes de los demás coeficientes de la ecuacion. Ni áun cuando los cálculos se hubiesen efectuado con logaritmos de *diez* cifras decimales, discreparia el coeficiente de x^2 en la (2^6) del simple *duplo* del mismo coeficiente en la transformada anterior, (2^5).—La operacion, verdaderamente difícil ó penosa, concluye, pues, en esta última transformada. De la cual inmediatamente se desprende que:

$$\log\ (g^2)^{2^5} = 43.7850555;\quad \text{y}$$

$$\log (g^2 g'^2)^{2^5} = 64.0000000.$$

Ó: $$\log g^2 = 1.3682830,\quad \text{y}\quad \log g'^2 = 0.6317170;\quad \text{y}$$

$$g^2 = 23.34979 \qquad\qquad g'^2 = 4.28269.$$

Conocidos los valores de g^2 y g'^2,—cuadrados de los módulos,—facilísimo es en este caso hallar los de f y f'.

En efecto: de la expresion

$$(x^2 + fx + g^2)\ (x^2 + f'x + g'^2) = x^4 + 8\,x^3 + 13\,x^2 + 5\,x + 100,$$

se concluye que;

$$f + f' = 8,\quad \text{y}\quad g^2 f' + g'^2 f = 5,\quad \text{ó}$$

$$f = 9.53466,\quad \text{y}\quad f' = -1.53466.$$

Con los valores encontrados, de g^2, g'^2, f y f', el producto de los dos trinomios de 2.° grado, en vez de coincidir exactamente con el primer miembro de la ecuacion propuesta, corresponde á esta otra ecuacion, muy poco discrepante:

$$x^4 + 8.00000\,x^3 + 13.00003\,x^2 + 5.00000\,x + 99.99991 = 0.$$

Mayor grado de aproximacion que el obtenido desde luégo, ú operando directamente con logaritmos de *siete* cifras decimales, seria muy difícil conseguir, ni con auxilio de las fórmulas (21) á (24), ni por ningun otro medio. Para presentar, sin embargo, un ejemplo de la aplicacion de que las citadas fórmulas son susceptibles, supondremos que g^2 y f se han calculado por de pronto con logaritmos de solas cinco cifras decimales,—lo cual abrevia en gran manera las transformaciones de la ecuacion propuesta, explicadas en los §§. 3.° y siguientes;—y que, mediante las fórmulas (22) y (24) se desea luego prolongar la aproximacion hasta donde el uso de las tablas logarítmicas de siete cifras lo permita.

Sean, pues,

$$g^2 = 23.350; \quad \text{y} \quad f = 9.535.$$

Y de la fórmula $f = 2g\cos\varphi$ deduciremos que $\varphi = 9^\circ\, 23'\, 7''\, 4$.

Con estos datos y antecedentes pasemos ahora á calcular los diversos términos de las expresiones simbólicas $[(-g)^4 \cos 4\varphi]$ y $[(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi]$, correspondientes á la ecuacion propuesta y que tratamos de resolver. Los resultados, supliendo mentalmente el término conocido, 100, de la misma ecuacion, que pertenece al primer grupo, son éstos:

$$\begin{aligned}
-5g \cos \varphi &= -\ \ 23.83750\\
+13g^2 \cos 2\varphi &= +287.40523\\
-8g^3 \cos 3\varphi &= -795.83636\\
+g^4 \cos 4\varphi &= +432.31320\\
\hline
[(-g)^4 \cos 4\varphi] = P \cos Q &= +\ \ \ 0.04457
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-5g \operatorname{sen} \varphi &= -\ \ \ 3.94003\\
+13g^2 \operatorname{sen} 2\varphi &= +\ \ 97.67720\\
-8g^3 \operatorname{sen} 3\varphi &= -425.94030\\
+g^4 \operatorname{sen} 4\varphi &= +332.22408\\
\hline
[(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi] = P \operatorname{sen} Q &= +\ \ \ 0.02095
\end{aligned}$$

Si el primer término del grupo $[(-g)^4 \cos 4\varphi]$ y el del $[(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi]$, se multiplican por **1**, el segundo por **2**, por 3 el tercero, y el último por 4, y se suman los dos grupos de productos así obtenidos, sin prescindir de los signos, encontraremos estos otros resultados:

$$[4\,(-g)^4 \cos 4\varphi] = \rho \cos \psi = -107.28332; \quad \text{y}$$

$$[4\,(-g)^4 \operatorname{sen} 4\varphi] = \rho \operatorname{sen} \psi = +242.48979.$$

Para encontrar ahora los valores de P y Q, y de ρ y ψ, el procedimiento es sencillísimo, como demuestra el adjunto cuadro de operaciones efectuadas:

$$\log . P \operatorname{sen} Q = 8.3211840$$

$$\log . P \cos Q = 8.6490426$$

$$\log . \operatorname{tang} Q = 9.6721414$$

$$Q = 25^\circ\, 10'\, 32''.7$$

$$\log . \cos Q = 9.9566520$$

$$\log P = 8.6923906$$

$$\log . \rho \operatorname{sen} \psi = 2.3846934$$

$$\log . \rho \cos \psi = 2.0305322\, n$$

$$\log . \operatorname{tang} \psi = 0.3541612\, n$$

$$\psi = 113^\circ\, 51'\, 56''.7$$

$$\log . \cos \psi = 9.6070205\, n$$

$$\log \rho = 2.4235117$$

Y obtenidos estos valores, los de Δg^2 y Δf, calculables por las fórmulas (22) y (24), se deducirán con no menor sencillez del modo que á continuacion se indica:

$$
\begin{array}{rrrrl}
Q = & 25^\circ & 10' & 32''. & 7 \\
\psi = & 113 & 51 & 56 & .7 \\
\hline
Q-\psi = & -88 & 41 & 24 & .0 \\
\varphi = & 9 & 23 & 7 & .4 \\
\hline
Q-\psi+\varphi = & -79 & 18 & 16 & .6
\end{array}
$$

$$
(24)\left\{
\begin{aligned}
\log \frac{2P}{\rho} &= 6.56991 \\
\log\cos(Q-\psi) &= 8.35911 \\
\log g^2 &= 1.36829
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\log \Delta g^2 &= 6.29731\, n \\
\Delta g^2 &= -\ 0.000198 \\
g^2 &= +\,23.350 \\
g_1\ (g^2 \text{ corregido}) &= +\,23.349802
\end{aligned}
$$

$$
(22)\left\{
\begin{aligned}
\log \frac{2P}{\rho} &= 6.56991 \\
\log\cos(Q-\psi+\varphi) &= 9.26855 \\
\log g &= 0.68414
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\log \Delta f &= 6.52260\, n \\
\Delta f &= -\,0.000333 \\
f &= +\,9.535 \\
f_1\ (f \text{ corregido}) &= +\,9.534667
\end{aligned}
$$

Los valores corregidos de g^2 y de f concuerdan con los obtenidos por la aplicacion directa del método, operando desde un principio con logaritmos de siete cifras decimales. Y del propio modo podrian corregirse los de g'^2 y f', si por de pronto los supusiésemos respectivamente iguales á 4,283 y —1,535. Pero ¡de cuántas piedrezuelas está sembrado este último tortuoso camino, y cuán fácil es tropezar y caer en él á lo mejor! Pruébese á recorrerle y se verá que no exageramos.

Resulta, pues, en conclusion, que las fórmulas (21) á (24), tan ingeniosamente construidas y tan dignas de estudio en teoría, por excepcion únicamente será menester emplearlas en la práctica. Tanta es, en efecto, la eficacia del procedimiento general de resolucion de las ecuaciones numéricas en estos dos capítulos explicado, que apénas se necesita para nada lo que, con respecto á distintos y más famosos y celebrados métodos, debe considerarse como complemento indispensable.

(Se continuará.)

VARIEDADES.

De la accion del frio sobre la leche y los productos que de ella se sacan, por Mr. Eugenio Tisserand. Se han hecho muchísimas investigaciones para determinar la composicion química de leche de las diversas especies animales, y fijar su constitucion física.

El objeto de esta nota no es reseñar la historia de la cuestion, sino presentar algunos hechos que puedan ser interesantes para la industria rural, y particularmente para los que se ocupan en la industria de produccion de la leche y conversion de esta en manteca y queso.

Tomando leche de vaca, recien ordeñada ó poco tiempo despues de esta operacion, á temperaturas diversas comprendidas entre 0 y 36°, y manteniéndola por espacio de 24 ó 36 horas á la misma temperatura inicial, se demuestran en ella los hechos siguientes:

1.° La subida de la nata es tanto más rápida cuanto más se aproxime á 0 la temperatura á que se expone la leche.

2.° El volúmen de nata obtenido es mucho mayor cuando la leche se somete á un enfriamiento mayor.

3.° La cantidad de manteca es tambien más considerable cuando la leche se pone á una temperatura más baja.

4.° En este último caso, la leche, la nata, la manteca y el queso son de mejor calidad.

Respecto á la calidad que adquieren la leche, la manteca y la caseina por el tratamiento de la leche á baja temperatura, nuestros experimentos no pueden evidentemente dar la explicacion. Los excelentes descubrimientos de Mr. Pasteur sobre los fermentos, sobre su origen, sobre las circunstancias que favorecen ó suspenden su desarrollo, sobre las alteraciones que producen en los medios en que se encuentran, nos parece que tienen aquí su aplicacion. Es bastante probable, como nos hace aquí notar Mr. Boussingault, que el enfriamiento enérgico suspenda la evolucion de los organismos vivos que constituyen los fermentos, é impida que se produzcan alteraciones debidas á su accion; los efectos de este tratamiento en la leche serán análogos á los que se manifiestan en la fabricacion y conservacion, por medio del hielo, de la cerveza de Viena, tan notable por su calidad; hay, además, en esto un vasto campo de investigaciones que explorar, y no hemos querido más que indicarle por el momento.

Sea lo que quiera, los hechos que preceden bastan para demostrar cuán erróneas son las ideas que han corrido en Francia acerca de la separacion de la crema en la leche y la fabricacion de la manteca, á saber, que debe tenerse la leche que se ha de descremar á la temperatura de 12 á 13°, y no esceder de esta temperatura, porque si no la nata sube mal; las aplicaciones que de aquí pueden sacarse son numerosas, y se deducen fácilmente sin necesidad de que tengamos que insistir en ellas.

La leche de nuestras vacas es por lo general muy superior; pero á escepcion de lo que sucede en algunos departamentos, no se sacan de ella, casi en todas partes, más que productos (sobre todo en manteca) más ó ménos defectuosos. Para obtener productos superiores se necesitan llenar dos condiciones, una limpieza extremada y el tratamiento de la leche en frio.

Facilmente se concibe que cualquier mejora, por pequeña que sea, en una industria cuya produccion anual es de 1 $^1/_2$ millares de francos, y la exportacion de manteca por valor de 100.000.000 de francos, debe ofrecer ventajas para nuestra agricultura: tenemos á nuestras puertas un estenso mercado que no pide más que recibir y consumir el doble ó triple de lo que le remitimos y pagar su calidad.

Ya se ha reconocido en el Norte de Europa (*) que era menester abandonar las antiguas prácticas, y se ha empezado á introducir la de enfriar la leche á 8 y 6° en grandes barreños llenos de agua de fuente, ó tambien por medio del hielo. Todavía no es este suficiente enfriamiento, como lo demuestran nuestros experimentos; pero ya es un progreso que ha tenido las más felices consecuencias, estendiendo hasta el extremo Oriente la zona de exportacion de las mantecas preparadas en Dinamarca de esta manera, aumentando el precio de este producto y el del queso seco, y haciendo que cada vez sea mas buscado en los mercados extrangeros. Esta reforma ha permitido, por otra parte, disminuir los gastos de produccion, reduciendo los de elaboracion (que se hace con ménos obreros y empleando grandes vasijas de 50 litros se hace el lavado con más facilidad), suprimiendo tambien la instalacion de costosos caloríferos, el gasto de combustible en invierno, y el coste bastante elevado de compra y reparacion de las pequeñas vasijas para la crema.

El tratamiento de la leche á baja temperatura es entre nosotros tan fácil como en cualquiera otra parte, y además tan económico y ventajoso; no hay más que utilizar para este fin las aguas de los manantiales y de los pozos frios, y emplear el hielo cuando haya necesidad de enfriarlas al grado conveniente. Sin duda que ocasiona un gasto el almacenar el hielo, pero es muy pequeño; el hielo puede recojerse en el momento en que los trabajos del campo son escasos, y por consiguiente, las horas de ócio son muchas. Además, pueden tambien emplearse silos poco costosos, como ya se hace en las explotaciones del Norte de Europa.

(*) Comptes rendus des séances de la Soc. ant. de agriculture de France.

CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMERICAS.

(Continuacion.)

CAPITULO III.

Descomposicion en trinomios reales de segundo grado de la ecuacion cuyas raices son todas imaginarias.

§. 16.

Condiciones que debe reunir el verdadero método de resolver el problema.

Sabiendo ya, por lo expuesto en el capítulo precedente, cómo pueden determinarse los n módulos de las $2n$ raices imaginarias conjugadas de una ecuacion, que sólo contiene raices de esta especie, fáltanos todavía, para dar por resuelta la ecuacion, ó para descomponerla por completo en trinomios reales de segundo grado, averiguar cuáles son los n valores de f, — coeficientes de los segundos términos de aquellos trinomios, — que á los citados n módulos corresponden. En los casos más sencillos tambien queda dicho (§. 13) cómo puede esto verificarse; pero las dificultades, de índole teórica y práctica, con que entónces tropezamos, nos obligan á considerar de nuevo el mismo asunto desde otro punto de vista, mucho más amplio y general.

Procedimiento irreprochable en teoría para conseguir el fin que ahora nos proponemos, sería aquél en que cada valor de f dependiese sin ambigüedad del correspondiente de g ó de g^2, y en que semejante valor, definido ya el de g^2, se desprendiese de la resolucion de una ecuacion auxiliar, del grado n á lo sumo, suponiendo que la propuesta lo fuese del $2n$. Esta ecuacion auxiliar, cuyos coeficientes dependerán del valor que á un módulo cualquiera se atribuya, y cuya verdadera incógnita será la f, correspondiente al módulo considerado, no puede, por regla general, ser de grado inferior al n; porque, si todos los *módulos* resultasen *iguales*, conservándose *desiguales* las f, al mismo valor de g^2 corresponderían n valores distintos de f; y estos n valores deberían proceder entónces de la sola ecuacion auxiliar, forzosamente de este grado.

Mas, si en vez de *una*, tuviésemos *dos* ecuaciones auxiliares, cuyos coeficientes dependiesen del valor, g^2, de un módulo; ambas con la incógnita comun, f, que del mismo módulo depende; y cuyos grados fuesen n y otro cualquiera inferior á n, — determinando, por el procedimiento del máximo comun divisor de dos polinomios, cuáles son el factor ó los factores comunes que necesariamente deben poseer, conseguiríamos resolver por completo el problema propuesto, ó reducir su dificultad á otra menor y más fácil de eludir.

Estas dos ecuaciones, cuya existencia se columbra en lontananza, y de las cuales depende la resolucion perfecta de la ecuacion general del grado $2n$, con otras tantas raices imaginarias, pueden obtenerse como sigue.

§. 17.

Realízanse las condiciones expuestas en el párrafo precedente.

Sea la ecuacion propuesta:

$$(25) \qquad x^{2n}+\alpha_1 x^{2n-1}+\alpha_2 x^{2n-2}+\ldots\ldots+\alpha_{2n}=o;$$

y representemos un *par* cualquiera de sus raices imaginarias conjugadas por la expresion

$$x_0=g_0(\cos\varphi_0\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0)$$

Por la sustitucion sucesiva de estos dos valores de x en la ecuacion (25) se obtienen dos ecuaciones distintas: las cuales, sumadas una con otra, y restada de la primera la segunda, se convierten en las que siguen:

$$g_0^{2n}\cos 2n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\cos(2n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\cos(2n-2)\varphi_0+\\ \ldots+\ldots\ldots+\alpha_{2n-1}g_0\cos\varphi_0+\alpha_{2n}=o;$$

$$g_0^{2n}\,\text{sen}\,2n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\,\text{sen}(2n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\,\text{sen}(2n-2)\varphi_0+\\ \ldots+\ldots\ldots+\alpha_{2n-1}g_0\,\text{sen}\,\varphi_0=o$$

Si la primera de estas ecuaciones se multiplica por $\cos n\varphi_0$ y la segunda por $\text{sen}\,n\varphi_0$, y se suman luégo uno con otro los productos asi obtenidos; y si despues se multiplica la primera por $\text{sen}\,n\varphi_0$ y por $\cos n\varphi_0$ la segunda, y del último producto se resta el anterior, las habremos transformado en estas otras:

$$g_0^{2n}\cos n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\cos(n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\cos(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots$$
$$+\alpha_{2n-2}g_0^2\cos(n-2)\varphi_0+\alpha_{2n-1}g_0\cos(n-1)\varphi_0+\alpha_{2n}\cos n\varphi_0=o;$$

$$g_0^{2n}\operatorname{sen} n\varphi_0+\alpha_1 g_0^{2n-1}\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0+\alpha_2 g_0^{2n-2}\operatorname{sen}(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots$$
$$-\alpha_{2n-2}g_0^2\operatorname{sen}(n-2)\varphi_0-\alpha_{2n-1}g_0\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0-\alpha_{2n}\operatorname{sen} n\varphi_0=o:$$

en las cuales los términos equidistantes de los extremos contienen los mismos *senos* y *cosenos* de φ_0 y de los múltiplos de este arco. Ordenándolas, pues, con relacion á las mencionadas líneas trigonométricas, podrán escribirse de este nuevo modo:

$$(g_0^{2n}+\alpha_{2n})\cos n\varphi_0+(\alpha_1 g_0^{2n-1}+\alpha_{2n-1}g_0)\cos(n-1)\varphi_0+$$
$$+(\alpha_2 g_0^{2n-2}+\alpha_{2n-2}g_0^2)\cos(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots=o;$$

$$(g_0^{2n}-\alpha_{2n})\operatorname{sen} n\varphi_0+(\alpha_1 g_0^{2n-1}-\alpha_{2n-1}g_0)\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0+$$
$$+(\alpha_2 g_0^{2n-2}-\alpha_{2n-2}g_0^2)\operatorname{sen}(n-2)\varphi_0+\ldots\ldots=o$$

Y si ahora suponemos que

$$(26)\quad \left.\begin{aligned}
1+\alpha_{2n}g_0^{-2n} &= \beta\\
\alpha_1+\alpha_{2n-1}g_0^{-2n+2} &= \beta_1\\
\alpha_2+\alpha_{2n-2}g_0^{-2n+4} &= \beta_2\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}g_0^{-2} &= \beta_{n-1}\\
\alpha_n+\alpha_n &= \beta_n
\end{aligned}\right\}\ \text{y}\qquad
(27)\quad \left.\begin{aligned}
1-\alpha_{2n}g_0^{-2n} &= \gamma\\
\alpha_1-\alpha_{2n-1}g_0^{-2n+2} &= \gamma_1\\
\alpha_2-\alpha_{2n-2}g_0^{-2n+4} &= \gamma_2\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-1}-\alpha_{n+1}g_0^{-2} &= \gamma_{n-1}
\end{aligned}\right\},$$

siendo $\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \ldots\ldots$ *funciones* bien definidas de los coeficientes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots$ de la ecuacion propuesta y de un *módulo* cualquiera, g_0, correspondiente á un *par* de raices imaginarias, y que debe considerarse como ya conocido, —las dos ecuaciones en que la primitiva (25) se ha descompuesto podrán escribirse abreviadamente como sigue:

$$(28)\quad \beta \cos n\varphi_0 + \frac{\beta_1}{g_0}\cos(n-1)\varphi_0 + \frac{\beta_2}{g_0^2}\cos 1(n-2)\varphi_0 + \ldots\ldots$$

$$+\frac{\beta_{n-1}}{g_0^{n-1}}\cos\varphi_0 + \frac{\beta_n}{g_0^n} = 0;\quad \text{y}$$

$$(29)\quad \gamma \operatorname{sen} n\varphi_0 + \frac{\gamma_1}{g_0}\operatorname{sen}(n-1)\varphi_0 + \frac{\gamma_2}{g_0^2}\operatorname{sen}(n-2)\varphi_0 + \ldots\ldots$$

$$+\frac{\gamma_{n-2}}{g_0^{n-2}}\operatorname{sen} 2\varphi_0 + \frac{\gamma_{n-1}}{g_0^{n-1}}\operatorname{sen}\varphi_0 = 0$$

Los *senos* y *cosenos* de los arcos múltiplos de φ_0 pueden eliminarse de estas ecuaciones, ó ser reemplazados en ambas por el solo *coseno* de φ_0, elevado, cuando más, á la potencia n, con auxilio de las siguientes fórmulas (*):

$$\cos n\varphi_0 = 2^{n-1}\cos^n\varphi_0 - M_1 2^{n-3}\cos^{n-2}\varphi_0 + M_2 2^{n-5}\cos^{n-4}\varphi_0 - \ldots;$$

$$\frac{\operatorname{sen} n\varphi_0}{\operatorname{sen}\varphi_0} = 2^{n-1}\cos^{n-1}\varphi_0 - N_1 2^{n-3}\cos^{n-3}\varphi_0 + N_2 2^{n-5}\cos^{n-5}\varphi_0 - \ldots$$

En las cuales los coeficientes M_1, M_2, $M_3 \ldots$, N_1, N_2, $N_3 \ldots$, representan lo que sigue:

(*) Consúltese sobre este punto una de las adiciones insertas al final de la *Memoria*.

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{n}{1} \\ M_2 &= \frac{n(n-3)}{1.2} \\ M_3 &= \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \text{ y } \left\{\begin{aligned} N_1 &= \frac{n-2}{1} \\ N_2 &= \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} \\ N_3 &= \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Ó, en general:

$$M_p = \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\dots(n-2p+1)}{1.2.3\dots p}; \text{ y}$$

$$N_p = \frac{(n-p-1)(n-p-2)\dots(n-2p)}{1.2.3\dots p}.$$

El primer término de la ecuacion (28), despues de verificada la eliminacion ó sustitucion de líneas trigonométricas que se acaba de indicar, se convertirá en un polinomio, ordenado con relacion á las potencias decrecientes de $\cos\varphi_0$, á contar desde la n; el segundo en otro del grado $n-1$; y así los demás consecutivos. Por resultado final obtendremos, pues, una nueva ecuacion ó polinomio del grado n, con la sola incógnita $\cos\varphi_0$. Y en otra ecuacion del grado $n-1$, con la misma incógnita, se nos convertirá la (29), por resultado de una serie análoga de sustituciones y transformaciones.

Mas recordemos que no es el valor de $\cos\varphi_0$ lo que propiamente necesitamos y buscamos, despues de conocido el módulo g_0 ó su cuadrado, para deducir las dos raices conjugadas, á este módulo correspondientes; sino el de f_0, segundo coeficiente del trinomio $x^2+f_0x+g_0^2$. Pues bien: como, segun ya mas atrás se explicó, $f_0=-2g_0\cos\varphi_0$, para deducir de las ecuaciones transformadas (28) y (29) otras dos, en las cuales sea f_0 la incógnita y no $\cos\varphi_0$, basta multiplicar sus segundos coeficientes por $(-2g_0)$, los terceros por $(-2g_0)^2$, los cuartos por $(-2g_0)^3$, y así los demás hasta llegar al último, que deberá multiplicarse por $(-2g_0)^n$, en la (28), y por $(-2g_0)^{n-1}$, en la (29).

Efectuadas estas varias operaciones,—largas, sí, pero de ninguna manera difíciles ni de penosa comprension,— obtiénense las dos siguientes ecuaciones finales, de construccion mucho más sencilla y regular de lo que *à priori* podíamos figurarnos:

(30)

$$\left.\begin{array}{l}
\beta f_0^{n} - \beta_1 f_0^{n-1} + \beta_2 f_0^{n-2} - \beta_3 f_0^{n-3} + \ldots \pm \beta_n \\
- g_0^2 \{ M_1 \beta f_0^{n-2} - M_1' \beta_1 f_0^{n-3} + M_1'' \beta_2 f_0^{n-4} - \ldots \} \\
+ g_0^4 \{ M_2 \beta f_0^{n-4} - M_2' \beta_1 f_0^{n-5} + M_2'' \beta_2 f_0^{n-6} - \ldots \} \\
- g_0^6 \{ M_3 \beta f_0^{n-6} - M_3' \beta_1 f_0^{n-7} + M_3'' \beta_2 f_0^{n-8} - \ldots \} \\
+ g_0^8 \{ M_4 \beta f_0^{n-8} - M_4' \beta_1 f_0^{n-9} + M_4'' \beta_2 f_0^{n-10} - \ldots \} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} = 0; \text{ y}$$

(31)

$$\left.\begin{array}{l}
\gamma f_0^{n-1} - \gamma_1 f_0^{n-2} + \gamma_2 f_0^{n-3} - \gamma_3 f_0^{n-4} + \ldots \pm \gamma_{n-1} \\
- g_0^2 \{ N_1 \gamma f_0^{n-3} - N_1' \gamma_1 f_0^{n-4} + N_1'' \gamma_2 f_0^{n-5} - \ldots \} \\
+ g_0^4 \{ N_2 \gamma f_0^{n-5} - N_2' \gamma_1 f_0^{n-6} + N_2'' \gamma_2 f_0^{n-7} - \ldots \} \\
- g_0^6 \{ N_3 \gamma f_0^{n-7} - N_3' \gamma_1 f_0^{n-8} + N_3'' \gamma_2 f_0^{n-9} - \ldots \} \\
+ g_0^8 \{ N_4 \gamma f_0^{n-9} - N_4' \gamma_1 f_0^{n-10} + \ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} = 0.$$

Consta la ecuacion (30) de $^1/_2(n+2)$, ó de $^1/_2(n+1)$, polinomios, segun que n sea número *par* ó *impar*, respectivamente de los grados $n, n-2, n-4.....$ y $n-n$, ó $n-n+1$, ordenados todos con relacion á la incógnita f_0.

En los primeros términos de estos diversos polinomios figura como factor la β; en el segundo la β_1; en el tercero la β_2; etc., etc.: de manera que todos ellos pueden considerarse tambien como ordenados con respecto á la β y á sus *índices* consecutivos.

Los *signos* varían regularmente del $+$ al $-$, y vice-versa, tanto en el paso de un polinomio á otro, como en el de los términos de un mismo polinomio.

Como se hallan ordenados estos términos con relacion á los *exponentes* de f_0 ó á los *índices* de β, así lo están los polinomios sucesivos con relacion á las potencias *pares* de g_0.

Los coeficientes M_1, M_2, M_3 ... son los mismos, poco ántes ya consignados, y que de la expresion general M_p sencillamente se desprenden, poniendo por p el valor ó *subíndice* que les corresponda.

Y de los M_1, M_2, M_3 ... se deducen los M_1', M_2', M_3' ...; de éstos los M_1'', M_2'', M_3'' ... ; y, en general, los señalados con varios acentos de los que inmediatamente les preceden, ó llevan un acento ménos y subíndices iguales, poniendo en éstos por n la expresion $n-1$. Si, por ejemplo, M_2 es igual á $\dfrac{n(n-3)}{1.2}$, M_2' lo será á $\dfrac{(n-1)(n-4)}{1.2}$; M_2'' á $\dfrac{(n-2)(n-5)}{1.2}$; M_2''' á $\dfrac{(n-3)(n-6)}{1.2}$; y así todos los demás consecutivos y análogos. Resultados que tambien pueden obtenerse poniendo sucesivamente, en la expresion de M_p, por n, las cantidades inferiores $n-1$, $n-2$, $n-3$ ... .

Con estas advertencias facilísimo será completar la ecuacion (30), ó escribir desde luégo en cualquier caso particular la ecuacion auxiliar del grado n, con respecto á f_0, de la cual depende la solucion completa de la propuesta, del grado duplo.

Pues la construccion de la otra ecuacion auxiliar (31) se halla sometida á reglas análogas á las que se acaban de exponer muy al por menor.

El número de sus polinomios componentes, ordenados con relacion á la letra f, es igual á $^1/_2\, n$, ó $^1/_2(n+1)$, segun que n es número *par* ó *impar*.

Los *signos* varían del propio modo que en el caso anterior.

Y los *coeficientes*, que dependen de la letra n, se desprenden unos de otros tambien por la misma regla.

Lo mismo que la ecuacion (30), la (31) podrá, pues, escribirse inmediatamente en cuantos casos particulares se presentaren en la práctica, prescindiendo por completo en ambas de los largos razonamientos y multiplicadas transformaciones que para deducirlas de la ecuacion (25), y demostrar su exactitud, ha sido menester verificar.

§. 18.

Aplícanse las fórmulas generales del párrafo anterior á los casos primeros y más sencillos.

Como aplicacion y aclaracion de cuanto precede, atribuyamos ahora á la letra n los valores sucesivos 2, 3, 4 y 5, y veamos en qué se convierten entónces las ecuaciones finales (30) y (31): los resultados que se obtuvieren corresponderán á las ecuaciones de cuarto, sexto, octavo y décimo grados, cuyas raíces sean todas imaginarias, y podrán aplicarse desde luégo á la resolucion completa de tales ecuaciones. Estos cuatro casos particulares del problema general que nos hemos propuesto resolver son de grande importancia y merecen especial estudio.

Ecuacion de cuarto grado.

Coeficientes propios de la misma: α_1, α_2, α_3 y α_4.

Los coeficientes auxiliares, β, β_1 y β_2 y los γ y γ_1, que figuran en las ecuaciones (30) y (31), se determinarán por las siguientes fórmulas, que de los grupos (26) y (27) se desprenden:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \alpha_4 g_0^{-4} = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_3 g_0^{-2} = \beta_1 \\ \alpha_2 + \alpha_2 \quad\;\; = \beta_2 \end{array}\right\} \text{ y } \quad \left.\begin{array}{l} 1 - \alpha_4 g_0^{-4} = \gamma \\ \alpha_1 - \alpha_2 g_0^{-2} = \gamma_1 \end{array}\right\}$$

Y las dos ecuaciones finales en que las (30) y (31) se convierten en este caso particular son las siguientes:

$$(a) \qquad 0 = \beta f_0^2 - \beta_1 f_0 + (\beta_2 - 2\beta g_0^2); \text{ y}$$

$$(b) \qquad 0 = \gamma f_0 \;\; - \gamma_1$$

De la segunda de estas dos ecuaciones se deducirá el valor de f_0, correspondiente al módulo g_0; y la primera servirá como ecuacion de condicion, para cerciorarse de la exactitud del resultado final, y, por lo tanto, de las varias operaciones numéricas efectuadas para obtenerle. Si los dos módulos de la ecuacion de cuarto grado fuesen iguales, siendo iguales ó desiguales las cuatro raices imaginarias, al mismo número g_0 corresponderían dos valores, iguales ó distintos, de f_0, que se deducirían de la ecuacion (*a*). Y la (*b*) sería entónces la ecuacion condicional á que los diversos resultados obtenidos deberían satisfacer.

Ecuacion de sexto grado.

Coeficientes propios: α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 y α_6.
Coeficientes auxiliares:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \alpha_6 g_0^{-6} = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_5 g_0^{-4} = \beta_1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 g_0^{-2} = \beta_2 \\ \alpha_3 + \alpha_3 \quad\;\; = \beta_3 \end{array}\right\}, \text{ y } \quad \left.\begin{array}{l} 1 - \alpha_6 g_0^{-6} = \gamma \\ \alpha_1 - \alpha_5 g_0^{-4} = \gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_4 g_0^{-2} = \gamma_2 \end{array}\right\}$$

Ecuaciones finales, deducidas de las (30) y (31);

$$(a') \quad 0 = \beta f_0^3 - \beta_1 f_0^2 + (\beta_2 - 3\beta g_0^2) f_0 - (\beta_3 - 2\beta_1 g_0^2); \text{ y}$$

$$(b') \quad 0 = \gamma f_0^2 - \gamma_1 f_0 + (\gamma_2 - \gamma g_0^2)$$

Las dos últimas ecuaciones deben poseer, cuando ménos, una raiz comun, y, por lo tanto, un comun divisor: de primer grado, si los tres módulos son distintos; y de segundo, —el mismo polinomio (b'),— si existen dos módulos iguales. Cuando lo sean los tres, habrá, pues, que resolver la ecuacion (a') para hallar los valores correspondientes de f_0; cuando solos dos, la (b'); y cuando los tres módulos sean distintos, como por regla general debe suceder, se dividirá el polinomio (a') por el (b'), hasta obtener un resíduo de primer grado: y de este resíduo, igualado á *cero*, y considerado como factor comun de ambos polinomios, se deducirá el valor de f_0, correspondiente al de g_0, que en los antecedentes y curso del cálculo se hubiere empleado.—Para comprobar la exactitud de los resultados que se obtengan pueden servir las mismas dos ecuaciones (a') y (b').

Ecuacion de octavo grado.

Coeficientes propios: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_8$.
Coeficientes auxiliares:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \alpha_8 g_0^{-8} &= \beta \\ \alpha_1 + \alpha_7 g_0^{-6} &= \beta_1 \\ \alpha_2 + \alpha_6 g_0^{-4} &= \beta_2 \\ \alpha_3 + \alpha_5 g_0^{-2} &= \beta_3 \\ \alpha_4 + \alpha_4 \quad &= \beta_4 \end{aligned}\right\}, \text{ y} \qquad \left.\begin{aligned} 1 - \alpha_8 g_0^{-8} &= \gamma \\ \alpha_1 - \alpha_7 g_0^{-6} &= \gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_6 g_0^{-4} &= \gamma_2 \\ \alpha_3 - \alpha_5 g_0^{-2} &= \gamma_3 \end{aligned}\right\}.$$

Ecuaciones finales:

$$(a'')\ 0 = \beta f_0^4 - \beta_1 f_0^3 + (\beta_2 - 4\beta g_0^2) f_0^2 - (\beta_3 - 3\beta_1 g_0^2) f_0 + (\beta_4 - 2\beta_2 g_0^2 + 2\beta g_0^4)$$

$$(b'')\ 0 = \gamma f_0^3 - \gamma_1 f_0^2 + (\gamma_2 - 2\gamma g_0^2) f_0 - (\gamma_3 - \gamma_1 g_0^2).$$

Si los cuatro módulos de la ecuacion propuesta fuesen desiguales, á cada valor de g corresponderia uno solo de f; y este valor, que simultáneamente deberia anular los dos polinomios (a'') y (b''), se hallará efectuando con estos polinomios las operaciones necesarias para determinar su máximo comun divisor, hasta llegar á un resíduo de primer grado; é igualando á *cero* este resíduo.

Si dos módulos fuesen iguales, el resíduo que deberia igualarse á cero, para formar la ecuacion cuyas raices son los dos valores correspondientes de f, sería el de segundo grado: primero que se obtiene por la division del polinomio (a'') por el (b'').

Si lo fuesen tres, el divisor comun de las dos ecuaciones ó polinomios últimamente citados, ascenderia al tercer grado, y no podria discrepar sustancialmente del (b''). La ecuacion de este nombre habria entónces que resolver para encontrar los tres valores de f, correspondientes al triple de g, designado por g_0.

Y si fuesen iguales los cuatro módulos, los cuatro valores iguales ó desiguales de f_0 se desprenderian de la ecuacion (a'') cuyas raices serian entónces necesariamente reales.

Hasta ahora sólo sabemos hallar los módulos de las raices imaginarias de una ecuacion cuando estos módulos son desiguales: pero nuestra ignorancia en este punto, ó la limitacion de nuestro conocimiento en la materia, en nada invalida cuanto concerniente á la investigacion de los valores de f, despues de averiguados los de g, hemos expuesto en la hipótesis de que dos ó mas módulos sean iguales.

Respecto á la ecuacion del grado décimo nos limitaremos á consignar las fórmulas necesarias para su resolucion completa, sin agregar ninguna explicacion ó comentario, por creerlo excusado, despues de todo lo dicho, á propósito de los grados inferiores.

Ecuacion de décimo grado.

Coeficientes propios: α_1, α_2, α_3 ..... , α_{10}.
Coeficientes auxiliares:

$$\left.\begin{array}{lll} 1+\alpha_{10}g_0^{-10} & = & \beta \\ \alpha_1+\alpha_9 g_0^{-8} & = & \beta_1 \\ \alpha_2+\alpha_8 g_0^{-6} & = & \beta_2 \\ \alpha_3+\alpha_7 g_0^{-4} & = & \beta_3 \\ \alpha_4+\alpha_6 g_0^{-2} & = & \beta_4 \\ \alpha_5+\alpha_5 & = & \beta_5 \end{array}\right\}, \text{ y } \left.\begin{array}{lll} 1-\alpha_{10}g_0^{-10} & = & \gamma \\ \alpha_1-\alpha_9 g_0^{-8} & = & \gamma_1 \\ \alpha_2-\alpha_8 g_0^{-6} & = & \gamma_2 \\ \alpha_3-\alpha_7 g_0^{-4} & = & \gamma_3 \\ \alpha_4-\alpha_6 g_0^{-2} & = & \gamma_4 \end{array}\right\}.$$

Ecuaciones finales:

$$(a''') \quad 0=\beta f_0^5-\beta_1 f_0^4+(\beta_2-5\beta g_0^2)f_0^3-(\beta_3-4\beta_0 g_0^2)f_0^2$$
$$+(\beta_4-3\beta_2 g_0^2+5\beta g_0^4)f_0-(\beta_5+2\beta_3 g_0^2+2\beta_1 g_0^4)$$

$$(b''') \quad 0=\gamma f_0^4-\gamma_1 f_0^3+(\gamma_2-3\gamma g_0^2)f_0^2-(\gamma_3-2\gamma_1 g_0^2)f_0$$
$$+(\gamma_4-\gamma_2 g_0^2+\gamma g_0^4).$$

§. 19.

Manera de proceder en la práctica.

El resíduo de *primer grado,* con relacion á f_0, resultante de las operaciones necesarias para hallar el comun divisor de dos polinomios, análogos á los (a''') y (b''') del párrafo anterior, podría determinarse *à priori*, en funcion del módulo g_0 y de los coeficientes auxiliares $\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$; pero su expresion analítica es ya tan complicada en el caso más sencillo de la ecuacion de sexto grado, ó cuando los polinomios, que uno por otro deben sucesivamente dividirse, son los (a') y (b'), y de tal manera se embrolla en adelante, que lo factible y más directo en teoría, sería por extremo inconveniente y muy complicado en la práctica. Preferible á cualquier otro procedimiento de operar es reducir las dos ecuaciones (30) y (31), que por regla general deben poseer una sola raíz comun, y, por lo tanto, un simple divisor de primer grado como máximo, á las formas

$$(A) \quad Af_0^n + A_1 f_0^{n-1} + A_2 f_0^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \text{ y}$$

$$(B) \quad Bf_0^{n-1} + B_1 f_0^{n-2} + B_2 f_0^{n-3} + \ldots + B_{n-1} = 0:$$

en las cuales los coeficientes $A, A_1, A_2, \ldots B, B_1, B_2 \ldots$ no comprenden ya símbolo alguno indeterminado, y pueden considerarse en cada caso particular como números perfectamente conocidos; y efectuar la division de una por otra, de la segunda luégo por el resíduo del grado $n-2$, de este resíduo por el del grado $n-3$, y así sucesivamente hasta llegar á un resíduo de *primer grado*, —que se igualará á *cero*, para formar una ecuacion del mismo nombre y deducir el valor de f_0, —en observancia estricta de los más sencillos preceptos del Algebra.

Sin modificar sustancialmente este procedimiento de cálculo, simplificaríase mucho, sin embargo, si las varias operaciones numéricas que comprende se verificasen con auxilio de las tablas de logaritmos, limitándose á los de cinco cifras decimales; y, sobre todo, de las *Tablas* de Gauss, llamadas de *adicion* y *sustraccion*, por medio de las cuales, dados los logaritmos de dos números a y b, el de la suma ó el de la diferencia de ambos se obtiene aplicando al logaritmo del mayor una correccion aditiva ó sustractiva, contenida en las mismas tablas. —Suponiendo, por ejemplo, que $a > b$, la regla de cálculo se halla formulada en estos sencillos términos:

$\log(a \pm b) = \log a \pm \delta$. Y la correccion δ se buscará y encontrará en las tablas citadas con el *argumento* ($\log a - \log b$), que inmediatamente se deduce de la comparacion de ambos logaritmos de a y de b, ya conocidos.

Disponiendo de este nuevo elemento auxiliar, las varias divisiones de polinomios que deberán efectuarse para obtener el máximo comun divisor de los (A) y (B), generalmente de primer grado, se verificarán de conformidad con los preceptos siguientes.

En los polinomios (A) y (B) se reemplazarán los coeficientes de la incógnita f_0 por sus logaritmos, sin alterar los signos de aquellos coeficientes. Y restando luégo de los logaritmos de A_1, A_2, A_3 ... el de A, y de los de B_1, B_2, B_3 ... el de B, aquellos polinomios se transformarán en estos otros:

$$(A_1) \quad f_1^{n} + a_1 f_0^{n-1} + a_2 f_0^{n-2} + a_3 f_0^{n-3} + \ldots, \text{ y}$$

$$(B_1) \quad f_0^{n-1} + b_1 f_0^{n-2} + b_2 f_0^{n-3} + b_3 f_0^{n-4} + \ldots :$$

en los cuales los coeficientes $a_1, a_2, a_3 \ldots$, y $b_1, b_2, b_3 \ldots$, son logaritmos.

Por resultado de la division de los polinomios (A) y (B), simbólicamente representados, en cierto modo, por los (A_1) y (B_1), obtendríase un primer resíduo del grado $n - 1$, que, despues de reemplazar los coeficientes por sus logaritmos, podremos escribir como sigue:

$$(C) \quad c f_0^{n-1} + c_1 f_0^{n-2} + c_2 f_0^{n-3} + \ldots$$

De los coeficientes $a_1, a_2, a_3 \ldots$ y $b_1, b_2, b_3 \ldots$ se deducen los $c, c_1, c_2 \ldots$, de este modo: *restando* de los primeros los segundos, ó de los segundos los primeros: —de los mayores de una serie los correspondientes menores en la otra, prescindiendo por de pronto de los *signos* en ambas;— acudiendo á las tablas de Gauss con las diferencias resultantes como *argumentos;* y *agregando* las *correcciones* que allí se encontraren á los mayores logaritmos a ó b, ó *restándolas* de los mayores, segun que los coeficientes comparados, a_n y b_n, tengan signos contrarios ó idénticos. Los *signos* de los nuevos coeficientes, c, c_1, c_2 ... , serán: en el primer caso los de a, a_1, a_2 ... ; y en el segundo los de los coeficientes mayores, a_n y b_n, de donde proceden.

Restando de los coeficientes c_1, c_2, c_3 ... el c, —lo cual equivale á dividir el polinomio (C) por el coeficiente de su primer término, —el resíduo de la division del (A) por el (B) adquirirá la misma forma de los (A_1) y (B_1); y la operacion iniciada podrá continuarse y prolongarse luégo sin modificacion, hasta apurarla y llegar al deseado término. Los trámites necesarios para ello son los resumidos en la adjunta pauta:

Dividendo 1.° (A_1).	f_0^n	$+ a_1 f_0^{n-1}$	$+ a_2 f_0^{n-2}$	$+ a_3 f_0^{n-3}$	$+ \ldots$
Divisor 1.° (B_1)...	f_0^{n-1}	$+ b_1 f_0^{n-2}$	$+ b_2 f_0^{n-3}$	$+ b_3 f_0^{n-4}$	$+ \ldots$
Argumentos $(a - b)$.		d_1	d_2	d_3	...
Correcciones tabuladas.		e_1	e_2	e_3	...
Primer residuo $(d \pm e)$ ó (C)		$c f_0^{n-1}$	$+ c_1 f_0^{n-2}$	$+ c_2 f_0^{n-3}$	$+ \ldots$
Dividendo 2.° $(C : c)$......		f_0^{n-1}	$+ \alpha_1 f_0^{n-2}$	$+ \alpha_2 f_0^{n-3}$	$+ \ldots$
Divisor 1.° y 2.° (B_1).....		f_0^{n-1}	$+ b_1 f_0^{n-2}$	$+ b_2 f_0^{n-3}$	$+ \ldots$
Argumentos $(\alpha - b)$.......			δ_1	δ_2	...
Correcciones tabuladas....			ε_1	ε_2	...
Segundo resíduo $(\delta \pm \varepsilon)$, ó (D)....			γf_0^{n-2}	$+ \gamma_1 f_0^{n-3}$	$+ \ldots$
Divisor 3.° $(D : \gamma)$...............			f_0^{n-2}	$+ \beta_1 f_0^{n-3}$	$+ \ldots$

....

....

§. 20.

Aplícase la teoría al análisis de un ejemplo.

A semejanza de lo hecho al final de los dos capítulos precedentes, aplicaremos ahora lo que en términos generales acaba de exponerse á la resolucion de un ejemplo interesante: prescindiendo, por de pronto y para mayor claridad, de las tablas de Gauss, muy poco difundidas, y empleando las vulgares de logaritmos con siete cifras decimales. Con ménos cifras, el trabajo de cálculo sería mucho más rápido y sencillo; pero el grado de aproximacion en los resultados dejaría sin duda en este caso algo que desear. Del uso que puede hacerse de las tablas de Gauss se hallará otro ejemplo en el capitulo final de esta *Memoria*.

Sea la ecuacion de sexto grado:

$$3447\,x^6 + 14560\,x^5 + 22430\,x^4 + 25857\,x^3 +$$
$$29193\,x^2 + 11596\,x + 5602 = 0 \quad (^*).$$

Dividiendo todos sus términos por el coeficiente del primero, —operacion que deberemos efectuar con auxilio de las

(*) Esta ecuacion es una de las varias que Le Verrier discute en su célebre *Memoria sobre los Movimientos del planeta Urano* (*Recherches sur les Mouvements de la planète Herschel*, 1846), pág. 174, donde pronostica, por fin, la existencia y situacion del planeta, hasta entónces desconocido, *Neptuno*. Pero el sabio astrónomo citado ni la resuelve, ni tiene para qué resolverla; sino que se limita á demostrar, por el teorema y método de Sturm, que sus raices son todas imaginarias.—Con mayor facilidad y ménos riesgo de equivocarse, se demuestra lo mismo, y se determinan los valores de los tres *módulos*, por el método que se ha explicado y emplea en el texto.

tablas de logaritmos,— la reduciremos por de pronto á esta otra:

$$x^6+4.2239631\,x^5+6.5071075\,x^4+7.5013052\,x^3+$$
$$8.4691019\,x^2+3.3640845\,x+1.6251813=0.$$

Y reemplazando los coeficientes por sus logaritmos, y aplicando las reglas de transformacion de la propuesta, en el Capítulo primero consignadas, á la deduccion de otras varias ecuaciones cuyas raíces sean las potencias 2^1, 2^2, 2^3 ... de las que aquella primera ecuacion contiene, sucesivamente hallaremos las que siguen:

$$(2^0)\quad x^6+0.6257201\,x^5+0.8133880\,x^4+0.8751368\,x^3+$$
$$0.9278374\,x^2+0.5268669\,x+0.2109018=0$$

$$(2^1)\quad x^6+0.6837356\,x^5-0.6117036\,x^4-1.4590905\,x^3+$$
$$1.6274283\,x^2-1.2097987\,x+0.4218036=0$$

$$(2^2)\quad x^6+1.4981150\,x^5+2.5791179\,x^4+3.0057607\,x^3+$$
$$2.9261326\,x^2+1.5885620\,x+0.8436072=0$$

$$(2^3)\quad x^6+2.3664619\,x^5+4.9129268\,x^4+5.5901321\,x^3+$$
$$5.8050618\,x^2-4.0114118\,x+1.6872144=0$$

$$(2^4)\quad x^6-5.0398083\,x^5+9.8140402\,x^4+10.6717924\,x^3+$$
$$11.6185655\,x^2+7.6361385\,x+3.3744288=0$$

$$(2^5)\quad x^6-10.0093400\,x^5+19.6281857\,x^4-21.5064467\,x^3+$$
$$23.2371208\,x^2-13.9828161\,x+6.7488576=0$$

Del exámen de este grupo de ecuaciones se desprenden dos consecuencias importantes.

Primera: que la ecuacion propuesta sólo contiene raices imaginarias; pues así únicamente se explica la variabilidad desordenada, en magnitud y en signo, de los coeficientes sucesivos de las potencias *impares* de la incógnita x^5, x^3 y x.

Y, segunda: que para deducir los valores de los tres módulos, correspondientes á las seis raices imaginarias conjugadas, no hay que pasar de la transformada de la ecuacion propuesta, designada por el símbolo (2^5); porque, limitando la aproximacion en los resultados á la que puede obtenerse con las tablas logarítmicas de siete cifras, los coeficientes de las potencias pares de la incógnita, —x^4, x^2 y x^0,—de los cuales dependen los valores de los tres módulos, se deducen desde la ecuacion (2^5) en adelante por simples elevaciones al cuadrado de los coeficientes ya obtenidos, ó duplicaciones de sus logaritmos.

Luego inmediatamente podremos escribir estas tres igualdades:

$$2^5 \log g_0^2 = 19.6281857;$$

$$2^5 \log g_0^2 g_1^2 = 23.2371208; \text{ y}$$

$$2^5 \log g_0^2 g_1^2 g_2^2 = 6.7488576$$

De las cuales se infieren los siguientes valores aproximados de los cuadrados de los módulos:

$$g_0^2 = 4.1056396; \; g_1^2 = 1.2965200; \text{ y } g_2^2 = 0.3053106$$

Para completar la resolucion de la ecuacion propuesta, fáltanos todavía hallar los tres valores de f, —f_0, f_1 y f_2,— que á los precedentes de g^2 corresponden. Y para esto necesitamos aplicar al caso particular de que ahora se trata las fórmulas generales, concernientes á la ecuacion de sexto grado, en el §. 18 insertas. Las que entónces designamos por (a') y (b') se convierten en los tres sistemas ó grupos adjuntos, si sucesivamente calculamos sus coeficientes, y las cantidades auxiliares que en su composicion figuran, —las β, β_1 y β_2, y las γ, γ_1 y γ_2,— con los valores de g_0^2, g_1^2 y g_2^2. La β_3 es independiente de los módulos, é igual al duplo del coeficiente central, α_3, de la ecuacion propuesta, transformada de modo que su primer coeficiente, α_0, sea igual á la unidad.

$$\begin{array}{ll} (a'_0) & 1.0234833\,f_0^3 - 4.4235377\,f_0^2 - 4.0362543\,f_0 + 21.320289 = 0 \\ (b'_0) & 0.9765167\,f_0^2 - 4.0243885\,f_0 + 0.4350842 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (a'_1) & 1.7457002\,f_1^3 - 6.2252461\,f_1^2 + 6.2492833\,f_1 + 1.139702 = 0 \\ (b'_1) & 0.2542998\,f_1^2 - 2.2226801\,f_1 - 0.3547779 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (a'_2) & 58.1053026\,f_2^3 - 40.3136656\,f_2^2 - 18.974081\,f_2 + 9.613765 = 0 \\ (b'_2) & 56.1053026\,f_2^2 - 31.8657394\,f_2 + 4.102659 = 0. \end{array}$$

Cada uno de estos tres sistemas de ecuaciones particulares es análogo en su composicion al que, en términos generales, designamos por (A) y (B) en el § 19. Y como por lo dicho en éste y en los otros tres párrafos anteriores, las dos ecuaciones (a_0') y (b_0') deben tener una sola raiz comun, —segundo coeficiente del trinomio $x^2 + f_0 x + g_0^2$, que á la ecuacion propuesta corresponde; otra raiz comun las (a_1') y (b_1'), —segundo tambien del $x^2 + f_1 x + g_1^2$; y otra las (a'_2) y (b_2'),— segundo asimismo del $x^2 + f_2 x + g_2^2$: resulta que la descomposicion en trinómios, ó la resolucion completa, de la ecuacion primitiva depende, en suma, de la investigacion de estas raices, f_0, f_1 y f_2, comunes respectivamente á cada par ó sistema de ecuaciones auxiliares, de los tres que preceden: investigacion sencillísima, en principio cuando ménos, por el método del *m. c. d.* de dos polinomios, ya ordenados con respecto á la misma letra.

Para simplificarla todavía más, comenzaremos por dividir, como de costumbre, con auxilio de las tablas de logaritmos, las seis ecuaciones precedentes por el coeficiente de sus primeros términos respectivos. Y los tres grupos ó pares de ecuaciones se transformarán entónces en los que siguen:

$$\begin{matrix}(\alpha'_0)\\(\beta'_0)\end{matrix}\left\{\begin{aligned}&f_0^3 - 4.3220420\,f_0^2 - 3.9436445\,f_0 + 20.831110 = 0\\&f_0^2 - 4.1211667\,f_0 + 0.4455471 = 0\end{aligned}\right.$$

$$\begin{matrix}(\alpha'_1)\\(\beta'_1)\end{matrix}\left\{\begin{aligned}&f_1^3 - 3.5660459\,f_1^2 + 3.5798149\,f_1 + 0.6528624 = 0\\&f_1^2 - 8.6403900\,f_1 - 1.3951164 = 0\end{aligned}\right.$$

$$\begin{matrix}(\alpha'_2)\\(\beta'_2)\end{matrix}\left\{\begin{aligned}&f_2^3 - 0.6938035\,f_2^2 - 0.3265465\,f_2 + 0.1654541 = 0\\&f_2^2 - 0.5679630\,f_2 + 0.0731243 = 0.\end{aligned}\right.$$

Fijémonos, por ejemplo, en el primero de estos tres sistemas y veamos cómo y en qué órden deben verificarse las operaciones necesarias para hallar el valor de f_0, comun á las dos ecuaciones componentes (a'_0) y (b'_0). Conforme indica la adjunta pauta:

Dividendo....	$f_0^3 - 4.3220420\,f_0^2 - 3.9436445\,f_0 + 20.831110$
Divisor......	$f_0^2 - 4.1211667\,f_0 + 0.4455471$
Resíduo........	$-\,0.2008753\,f_0^2 - 4.3891916\,f_0 + 20.831110$
Id. simbólico...	$-\,\bar{1}.3029265\,f_0^2 - 0.6423846\,f_0 + 1.3187124$
Id. id. simplificado..........	$f_0^2 + 1.3394581\,f_0 - 2.0157859$
Resíduo 1.º ó dividendo 2.º....	$f_0^2 + 21.850337\,f_0 - 103.701701$
Divisor 1.º y 2.º.............	$f_0^2 - 4.121167\,f_0 + 0.445547$
Resíduo 2.º y final...........	$25.971504\,f_0 - 104.147248$

Igualando á cero el último resíduo se expresa la condicion de que las dos ecuaciones (α_0') y (β_0') tienen una raíz comun, y se deduce luégo que el valor aproximado de esta raiz es el siguiente:

$$f_0 = 4.0100583$$

Como las operaciones aritméticas verificadas para deducir este resultado son por necesidad muy numerosas, y como en todas ellas, empleando las tablas de logaritmos, se comete ó puede cometerse un error inevitable en la valuacion de las últimas cifras, la aproximacion del valor de f_0 hasta la séptima cifra decimal será las más veces ilusoria. Ni áun en la sexta debe tenerse nunca plena confianza; y, cuando fuere menester cerciorarse de la verdad á toda costa, habrá que calcular la correccion del valor de f_0, por este procedimiento obtenido, con auxilio de las fórmulas adecuadas al objeto y al final del capítulo anterior insertas.

Pero, dejando á un lado este punto, ya latamente discutido, es de advertir que tanto el valor de f_0, como los de f_1 y f_2, pueden en este caso particular determinarse, más sencillamente que por el método del *m. c. d.*, resolviendo las tres ecuaciones de segundo grado (β_0'), (β_1') y (β_2'), y prescindiendo de las tres raices extrañas á la cuestion, ó que no satisfacen á la ecuaciones (α_0'), (α_1') y (α_2').

Las dos raices de la ecuacione (β_0') son, por ejemplo, éstas: $+ 4.0100595$ y $+ 0.1111072$: de las cuales es cosa bien fácil cerciorarse, de una rápida ojeada, que sólo la primera puede ser tambien raiz de la (α_0').

Las dos de la ecuacion (β_1') éstas: $+ 8.8971940$ y $- 0.1568040$: perteneciente tambien la segunda á la ecuacion (α_1').

Y las dos de la (β_2') estas otras: $+0.3707063$ y $+ 0.1972567$: propia asimismo de la (α_2') la primera.

En conclusion: los tres trinomios de segundo grado, en que la ecuacion propuesta, de sexto, puede descomponerse, serán muy aproximadamente los que siguen:

$$x^2 + 4.0100595\, x + 4.1056396;$$

$$x^2 - 0.1568040\, x + 1.2965200; \text{ y}$$

$$x^2 + 0.3707063\, x + 0\ 3053106$$

Efectuando su producto, por vía de comprobacion, obtiénese un polinomio de sexto grado, cuyos coeficientes sólo discrepan de los de la ecuacion propuesta desde la sexta cifra decimal, inclusive, en adelante. Y la razon ó causa de la diferencia ya en este mismo párrafo queda indicada: en parte debe atribuirse á la incertidumbre en la determinacion de los valores de g; y en parte, mucho mayor, á los errores inevitables que al deducir los valores de f, dependientes de los anteriores, deben necesariamente cometerse.

(Se continuará.)

ASTRONOMIA.

Observaciones acerca de los satélites de Saturno, hechas en el Observatorio de Tolosa en 1876, *con el gran telescopio Foucault. Noticia de M. F. Tisserand.*

(Comptes rendus, núm. 13, tom. 84)

Tenemos el honor de comunicar á la Academia las observaciones que hemos hecho en el trascurso del año pasado, acerca de los satélites de Saturno con nuestro gran telescopio de $0^m,80$. Se refieren estas observaciones á los cinco primeros satélites, pero no hemos tratado de Hiperyon, del cual no teníamos ninguna efeméride, ni tampoco de Titan que tan perfectamente nos han dado á conocer los trabajos de Bessel; tambien hemos prescindido de Japhet que es muy bien conocido, y que por otra parte no se prestaria bien á nuestro sistema de observacion. En cuanto á los cinco primeros satélites, nos han servido de gran auxilio las efemérides de M. Marth, aunque han llegado á nuestro poder cuando ya se habian empezado las observaciones.

El satélite Mimas más próximo al planeta, apenas puede percibirse sino en sus máximas elongaciones, por lo tanto nos hemos limitado respecto de él á observar estos fenómenos.

Respecto de los cuatro siguientes, Encelado, Thetys, Dionea y Rhea, hemos recurrido á un sistema de observacion practicado ya por Domingo Casini, despues por Herschel y repetido con éxito en Malta en 1863, 1864, 1865 por M. M. Lassell y Marth. Consiste en lo siguiente: por los estremos del anillo se suponen tiradas perpendiculares á la línea de las asas, los satélites pasan periódicamente por estas perpendiculares que se representan con facilidad, aunque no estén trazadas en el cielo, al menos á corta distancia del anillo (y los satélites de que tratamos atraviesan estas rectas á muy pequeña distancia del mismo). La experiencia demuestra que el momento del paso de un satélite por una de estas perpendiculares, puede determinarse con una gran precision, segun resultará de los números que despues expondremos.

Los pasos de un satélite por la perpendicular tirada al Este del planeta deben indicarse por las letras N E y S E, segun que se verifiquen al Norte ó Sur de la línea de las asas, para los pasos que se verifiquen del otro lado emplearemos las letras N O y S O.

Las observaciones las hemos hecho en union de M. Perrotin con un aumento de 335 veces: los observadores están designados por P y T, el tiempo de ellas se refiere al meridiano de Tolosa y como todas ellas se han hecho en 1876 hemos suprimido poner el año.

Mimas.				Ob.	Elongacion.
Octubre.....	24..	11^h.	21^m	T.	E.
	26..	8..	1	T.	E.
Noviembre..	2..	8..	48	P.	O.
	4..	5..	59	P.	O.
	10..	8..	33	P.	E.

Encelado.					Paso.
Agosto......	11..	13..	8,3	P.	N. O.
Setiembre...	18..	11..	53,8	P.	S. O.
	20..	13..	16,9	P.	N. E.
	26..	10..	37,7	P.	S. E.
Octubre.....	7..	9..	45,5	P.	S. E.
	29..	7..	52,2	P.	S. E.
Noviembre..	9..	6..	57,0	P.	S. E.

Thetys.				Ob.	Paso.
Julio	25..	11..	7,2	T.	S. E.
	29..	12..	45,9	P.	S. O.
Agosto	11..	10..	41,7	P.	S. E.
	12..	9..	15,2	T.	N. O.
	16..	11..	3,1	P.	N. E.
	28..	10..	19,6	P.	S. E.
	29..	9..	1,4	P.	N. O.
	31..	13..	26,5	P.	N. E.
Setiembre	1..	11..	58,9	P.	S. O.
	4..	7..	59,8	P.	N. E.
	18..	11..	39,8	T.	S. O.
	19..	10.	21,3	P.	N. E.
	20..	8..	55,4	P.	S. O.
	21..	7..	36,4	T.	N. E.
Octubre	1..	9..	37,9	T.	S. E.
	7..	8..	36,5	P.	S. O.
	24..	8..	22,7	T.	S. O.
Noviembre	3..	10..	23,1	P.	N. O.
	4..	9..	9,3	T.	S. E.
	6..	6..	22,1	P.	S. E.

Dionea.					
Julio	18..	11..	12,2	P.	N. O.
	21..	13..	14,9	P.	N. E
	29..	9..	50,4	P.	N. O
Agosto	5..	13..	54,5	P.	S. O
	12..	10..	19,1	P.	N. E.
	16..	12..	30,9	P.	S. O.
	28..	12..	11,3	P.	N. O.
	31..	13..	39,9	P.	N. E.
Setiembre	4..	8..	11,7	P.	S. E.
	7..	9..	45,1	P.	S. O.
	18..	8..	24,8	P.	S. O.

Dionea.

				Ob	Paso.
Setiembre..	19...	9..	18,3	P.	N. O.
Octubre.....	26..	8..	2,6	T.	S. E.
	29..	9..	21,7	T.	S. O.
	30..	10..	25,7	T.	N. O.
Noviembre..	6..	6..	37,6	P.	S. E.
	9..	8..	8,5	T.	S. O.

Rhea.

Julio.......	17..	12..	48,0	P.	N. E.
	21..	16..	2,4	P.	N. O.
	26..	13..	28,8	P.	N. E.
	28..	10..	36,3	P.	S. E.
Agosto......	4..	14..	12,2	P.	N. E.
	29..	10..	2,3	P.	S. O.
Setiembre...	2..	13..	3,7	P.	S. E.
	7..	10..	47,9	P.	S. O.
	18..	8..	19,3	P.	N. O.
	25..	12..	12,0	T.	S. O.
Octubre....	24..	11..	10,7	P.	N. O.
	29..	8..	57,7	T.	N. E.
Noviembre..	9..	6..	32,0	P.	S. E.
	27..	8..	25,3	T.	S. E.
Diciembre...	11..	7..	6,6	P.	S. O.

Indicaremos brevemente, como pueden deducirse de las observaciones precedentes las longitudes saturnicéntricas de los satélites que se suponen moverse en el plano del anillo, y la posicion de este se halla calculada por las fórmulas de Bessel. Sean l' y λ' la longitud y la latitud de la tierra vista desde Saturno (longitud contada en el plano del anillo, latitud relativa á este plano) ρ' la distancia de la tierra á Saturno, $2p$ el diámetro aparente del anillo visto desde la tierra, r la distancia del satélite al centro de Saturno; tendremos para determinar la longitud l del satélite en el plano del anillo, una de las cuatro fórmulas siguientes:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{S. O.} & l = l' + \gamma \qquad\qquad\quad - p\cos\lambda' \\ \text{N. O.} & l = l' + 180^\circ - \gamma - p\cos\lambda' \\ \text{N. E.} & l = l' + 180^\circ + \gamma + p\cos\lambda' \\ \text{S. E.} & l = l' - \gamma \qquad\qquad\quad + p\cos\lambda' \end{cases}$$

en las que $$\operatorname{sen}\gamma = \frac{p\rho'}{r}.$$

Designando por a, e, π, el semi-eje, la excentricidad la longitud del perisaturno de la órbita del satélite, tendremos

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(l - \pi)}$$

siendo muy pequeñas las excentricidades de los satélites considerados, despreciaremos e^2 y tendremos tambien:

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{p\rho'}{a}\left[1 + e\cos(l - \pi)\right]$$

de donde

$$(2)\qquad \gamma = \gamma_0 + e\cos(l - \pi)\operatorname{tang.}\gamma_0$$

poniendo

$$\operatorname{sen}\gamma_0 = \frac{p\rho'}{a}.$$

Admitamos para el valor $2p_0$ de $2p$ que corresponde á la distancia media de Saturno á la tierra $2p_0 = 39'',31$ valor dado por Bessel, así hemos podido calcular los valores de γ_0 para los diversos satélites.

Supongamos que quiera deducirse de las observaciones el valor de la longitud media l_0 del satélite para una época comprendida entre las observaciones estremas. Partiendo de la primera y de la tercera de las ecuaciones (1) adoptando un valor bastante exacto del movimiento medio, y añadiendo las dos ecuaciones en cuestion, se ve que la ecuacion del centro desaparece, como el término en e procedente en la ecuacion (2), y tendremos por lo tanto un valor de l_0 independiente de e y π: lo mismo se verifica si se combina la segunda y la cuarta de las ecuaciones (1); pero los dos valores obtenidos por l_0 suponiendo que p_0 y por consiguiente γ_0 es exacto; podrán pues escribirse:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{SO}+\mathrm{NE}) \quad l_0 = A + d\gamma_0 = A + Bdp_0$$

$$\frac{1}{2}(\mathrm{NO}+\mathrm{SE}) \quad l_0 = A' - d\gamma_0 = A' + Bdp_0$$

de la cual resulta

$$dp_0 = \frac{A' - A}{2B}.$$

Podemos por consiguiente para nuestras observaciones, obtener el diámetro aparente del anillo de Saturno: veamos los resultados á que hemos sido conducidos por la discusion de las observaciones de Thetys, Dionea y Rhea.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Thetys} \ldots\ldots\ldots\ldots & 2p_0 = 40'',45 \\ \text{Dionea} \ldots\ldots\ldots\ldots & 2p_0 = 40\ \ ,61 \\ \text{Rhea} \ldots\ldots\ldots\ldots & 2p_0 = 40\ \ ,47 \end{array}\right\}\text{Término medio } 40'',51$$

es digna de notarse la conformidad de las tres determinaciones que demuestra la exactitud de las observaciones.

En otra comunicacion presentaremos el valor de las longitudes de los satélites deducidas de nuestras observaciones por las fórmulas (1) y los resultados de la comparacion de estas observaciones con las de M. Lassel que hemos reducido enteramente.

GEODESIA.

De la determinacion de la profundidad del mar por medio del bathómetro y sin necesidad de usar de la sonda: Memoria de M. C. William Siemens, *presentada por* M. Tresca.

(Comptes rendus, 23 *octubre* 1873.)

El bathómetro de M. C. William Siemens está fundado en los dos hechos siguientes: que la atraccion total de la Tierra medida en su superficie es la suma de las atracciones individuales, ejercidas por todas sus partes, y que la atraccion de cada una de sus partes varía en proporcion directa de su densidad é inversa del cuadrado de la distancia en el sitio que se considere.

Siendo la densidad del agua del mar 1,026, y la densidad media de las rocas que constituyen la corteza terrestre próximamente 2,763, la profundidad del mar bajo un punto considerado en su superficie, debe ejercer una influencia sensible sobre la atraccion total.

Si, despreciando la fuerza centrífuga, se supone la Tierra perfectamente esférica y de densidad uniforme, la atraccion total A_1 de una capa delgada perpendicular al radio que termina en el punto que se considera y situada á una distancia h de este punto, podrá representarse por la expresion

$$d.\, dA_1 = 2\pi dh \operatorname{sen} \alpha \, d\,\alpha.$$

Integrando esta expresion entre los límites h y 0, α y 0, tendremos

$$(1) \qquad A_1 = 2\pi h\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{h}{2R}}\right)$$

y para los valores pequeños de h, despreciando el factor $\sqrt{\frac{h}{2R}}$, tendremos:

$$A_1 = 2\pi h$$

para la expresion de la fuerza total de atraccion ejercida por la porcion superior del globo hasta la profundidad h.

Haciendo $h = 2R$ en la fórmula (1), tendremos $A = \frac{4}{3}\pi R$ para la expresion de la atraccion total de la Tierra, y por consiguiente,

$$\frac{A_1}{A} = \frac{2\pi h}{\frac{4}{3}\pi R} = \frac{h}{\frac{2}{3}R}$$

Pero tomando en consideracion la densidad del agua del mar, se ve que la atraccion en la superficie para una profundidad de agua indicada por h', disminuye en la proporcion de

$$\frac{2\pi h'(2{,}763 - 1{,}026)}{\frac{4}{3}\pi R \times 2{,}763} = \frac{h'}{\frac{614}{579}R} = \frac{h'}{1{,}06R}$$

ó poco mas ó menos en la relacion de la profundidad con el radio terrestre. Esta relacion no es enteramente exacta, porque la densidad de la corteza terrestre no es la misma que la densidad media de la Tierra; así es mas exacto graduar empíricamente el bathómetro, comparando sus indicaciones con las de una sonda.

El aparato construido por M. William Siemens para apreciar estas variaciones en la atraccion, y que se ha perfeccionado varias veces, consiste en la actualidád esencialmente en un tubo de acero ensanchado en forma de copa por sus dos extremos, y colgado en una posicion enteramente vertical, el cual está lleno de mercurio. La copa inferior se halla cerrada por un diafragma de una hoja delgada de acero, semejante á la que se emplea en la construccion de los barómetros aneróides, y el peso de la columna de mercurio se halla exactamente compensado en el centro del diafragma por la fuerza elástica de cuatro resortes de acero en espiral, bien templado, de la misma longitud que la columna de mercurio. La copa superior tiene una tapa en que hay un agujero que comunica lo interior del tubo de acero con otro de vidrio, de cerca de 2 milímetros de diametro interior, arrollado formando una espiral horizontal un poco encima de la tapa, y en que hay una escala cuyas divisiones indican brazas ó metros. En el extremo superior del tubo de acero hay un tapon con un agujero de solos $0^{m},2$ de diámetro, por el cual lo interior del tubo comunica con la copa superior, de modo que limita en lo posible las oscilaciones de la columna de mercurio debidas á los movimientos del buque. Sobre la superficie del mercurio hay cierta cantidad de agua, que penetra en el tubo espiral de vidrio y que, cuando el instrumento está en tierra, á nivel del mar, llega á un punto marcado 0.

Cuando el aparato está á cierta profundidad en el agua, como disminuye la presion del mercurio sobre el diafragma, los resortes de acero obligan al agua que sobrenada en el mercurio á penetrar mas en el tubo de vidrio, y la relacion de la superficie de las capas terminales con este es tal que, á una elevacion de medio milímetro de la superficie superior del mercurio, corresponde una subida del agua en el tubo de 1.000 milímetros.

Una de las particularidades del instrumento consiste en ser *paratermal*, esto es, que la proporcion de las secciones del tubo de acero y de sus capas terminales es tal que la disminucion de la fuerza elástica de los resortes, por consecuencia de una elevacion de temperatura, se halla compensada por una disminucion correspondiente de la energía de la columna de mercurio.

Las variaciones de la presion atmosférica no producen efecto en el instrumento, y las de densidad de la atmósfera solo le producirian en cuanto afectasen al peso relativo de la columna de mercurio, lo cual exigiría una ligera correccion. Para evitarlo, M. Siemens hace que el instrumento no esté sujeto á las influencias atmosféricas, colocándole en una caja herméticamente cerrada con un vidrio por la parte superior, y que se hace prácticamente insensible á las variaciones de temperatura por una doble cubierta aisladora.

La única correccion que es necesaria se refiere á la latitud; pero la influencia de esta causa parece ser mucho menos sensible en el mar que en tierra. Se ha hecho el ensayo de un instrumento construido segun estos principios á bordo del *Faraday* en los viajes trasatlánticos que tuvo que hacer para la inmersion de un cable telegráfico submarino: sus indicaciones han coincidido de una manera admirable con las de una línea de sonda en acero, de Sir William Thomson, teniendo cuidado de que la sonda dé la profundidad inmediatamente inferior al buque, mientras que el bathómetro da la profundidad media de cierta superficie, cuya extension es funcion de la misma profundidad. El instrumento ha sido muy útil para volver á hallar el extremo del cable que habia habido precision de cortar cuando tuvo que huir de una tormenta.

Este instrumento puede tambien servir para medir las altitudes superiores al nivel del mar, y tiene en este caso la ventaja sobre el barómetro de que en sus indicaciones no influyen las variaciones de la presion atmosférica. Un sencillo cálculo demuestra que la atraccion total de la Tierra á una altura h varía en la proporcion $h : {}^1/_2 R$; de modo que si las divisiones de la escala del bathómetro representan metros cuando se trata de apreciar las profundidades del agua, no representarian mas que medios metros si se empleasen para apreciar las altitudes. Sería menester, en este caso, además de la correccion para la latitud, hacer otra para la atraccion local de las masas que dominan el punto considerado, la cual variaría segun la estension de estas masas, de modo que deberia fiarse en las indicaciones del instrumento ménos en este caso que cuando se tratase de apreciar la profundidad del mar.

CIENCIAS FÍSICAS.

DISTRIBUCION DE LA LLUVIA EN LA PENINSULA IBERICA.

Memoria dirigida á la Real Academia de Ciencias de Madrid por el Dr. Gustavo Hellmann, *residente en Granada.*

La sucinta Memoria, que tengo el honor de presentar á la Real Academia de Ciencias, se funda exclusivamente en los valores numéricos de las observaciones meteorológicas, verificadas tanto en España como en Portugal desde hace ya más de 10 ó 20 años. Han servido, pues, para este propósito, los *Anuarios estadísticos* y las *Reseñas geográficas, geológicas* y *agrícolas;* y, sobre todo, para los años de 1865 á 1873, los *Resúmenes de las Observaciones meteorológicas de provincias*, publicados con tanto esmero por el Real Observatorio de Madrid, y los *Annaes do Observatorio do Infante D. Luiz* de Lisboa.

Aunque la lluvia es el elemento más variable de todos los que cooperan á formar el clima de un pais, por cuya razon se necesitan muchos años de observaciones para que los promedios tengan alguna seguridad y los resultados obtenidos algun uso práctico, sin embargo, un espacio de 10 á 20 años es ya suficiente en los climas comprendidos en la zona subtropical —donde la variabilidad de los fenómenos atmosféricos es mucho más pequeña que en otras latitudes más altas— para formarse una idea exacta acerca de la distribucion de la lluvia.

Inútil es insistir sobre el grado de importancia, que este estudio tiene para la ciencia pura, así como para la vida económica de la Península, y por eso entraré desde luego *medias in res.*

El problema de la distribucion de la lluvia exige como muchos otros de la Meteorologia que se tengan en cuenta los dos elementos de espacio y de tiempo. Empecemos por el primero para dar un cuadro comprensivo de la abundancia ó escasez de lluvia en las diferentes partes de la Península.

Pocos paises del mundo, y desde luego ninguno de Europa, ofrecen tantos contrastes en la distribucion del agua meteórica como España y Portugal. En la parte más austral del reino de Leon (comarca de Salamanca), la capa de agua pluviátil no es más alta que en la parte septentrional de Egipto; y al lado de esta escasez de lluvia hay regiones, como Galicia, Asturias y Provincias Vascongadas, donde llueve casi tanto como en las localidades más húmedas de Escocia, de la costa de Noruega y de los Alpes.

El siguiente Cuadro I indica la cantidad de lluvia anual en los 33 pueblos que en él se expresan. Las cifras de la 1.ª columna indican el número de años de observacion; las de la 2.ª la altura de cada estacion sobre el nivel del mar; y las de la 3.ª el resultado, expresado en milímetros, de las observaciones del pluviómetro.

CUADRO I.

Estacion.	Años de observacion	Altitud en metros.	Lluvia anual en milímetros.
Tarifa	7	15	621
Gibraltar	16	15	757
S. Fernando	24	28	764
Sevilla	15	90	438
Lagos	71	58	25

Estacion.	Años de observacion	Altitud en metros.	Lluvia anual en milímetros.
Lisboa	18	102	753
Campo-Mayor	9	288	554
Coimbra	10	141	881
Guarda	9	1039	1000
Porto	10	85	1430
Santiago	17	273	1759
Oviedo	20	225	938
Bilbao	14	16	1199
Vergara	6	168	1329
Leon	9	850	495
Búrgos	12	860	542
Soria	12	1068	595
Valladolid	14	760	336
Salamanca	15	814	268
Madrid	22	655	380
Villaviciosa	10	666	392
Ciudad-Real	20	685	378
Jaen	6	587	605
Granada	16	680	513
Múrcia	11	43	367
Alicante	10	28	430
Albacete	10	686	356
Valencia	17	24	476
Palma	17	?	450
Barcelona	16	15	440
Huesca	12	450	596
Zaragoza	15	184	358

Este cuadro manifiesta que las cantidades anuales de lluvia en las estaciones de Castilla la Nueva, del reino de Múrcia, de una parte del de Leon, en la costa del Este y en la parte más austral de la Península, presentan relativamente pocas diferencias; pero que en las costas del Oeste, del Norte y en el interior más montañoso de Andalucía y Portugal, varían mucho con el lugar y la situacion física de cada estacion.

En el caso primero la uniformidad observada permite formar promedios generales para las regiones en que la capa de agua meteórica difiere poco. Así tenemos por ejemplo:

Reino de Leon...	Valladolid...........	336	milímetros.
Castilla la Nueva.	Madrid.............	380	»
	Villaviciosa.........	392	»
	Ciudad-Real........	378	»
Reino de Múrcia.	Albacete............	356	»
	Múrcia..............	367	»
Reino de Aragon.	Zaragoza............	358	»

Estos promedios varian tan poco, que podemos reunirlos todos en un promedio general y decir: la capa de agua meteórica durante el período anual, en Castilla la Nueva, reino de Múrcia y parte de los de Leon y Aragon, es de 370 milímetros.

De esta misma manera he formado los promedios generales siguientes:

Castilla la Vieja, Reino de Leon, Navarra y Aragon, Búrgos, Soria, Leon, Huesca.	540	milímetros.
Castilla la Nueva, Reino de Leon, Múrcia y Aragon (Madrid, Villaviciosa, Valladolid, Ciudad-Real, Albacete, Múrcia, Zaragoza).........................	370	
Costa del Este, desde el Cabo de Palos é Islas Baleares (Alicante, Valencia, Barcelona, Palma)...........	450	
Parte austral de la Península (Gibraltar, Tarifa, San Fernando)...............	710	

En las otras partes de la Península, las cantidades de lluvia son tan diferentes, como ya he dicho antes, que no es posible reunirlas en un promedio general, porque el terreno y la situacion física de las estaciones, etc., influyen mucho en la abundancia ó escasez de lluvia. Así, pues, como conclusion general solo podemos decir, que en la costa Occidental de la Península la cantidad de lluvia anual varía aproximadamente de 580 á 1760 milímetros, aumentando progresivamente del Sur al Norte, hasta llegar en Santiago de Galicia á la region más húmeda de España. Para apreciar bien la gran cantidad de lluvia que recibe esta comarca, doy á continuacion las cantidades de lluvia de algunos de los puntos más húmedos de Europa.

Santiago (España)........	1760	milímetros.
Bergen (Noruega)........	1840	»
Alt-Aussee (Alpes).......	1940	»
Portree (Isla Scye)	2500	»
Seathwaite (Inglaterra)....	3800	»

Pero justamente al lado de esa region más húmeda de España, que le ha valido un gráfico y popular sobrenombre, se hallan las comarcas más secas y áridas del reino, en las cuales la cantidad anual de lluvia es casi igual á la que cae en Alejandría (Egipto), donde la lluvia desciende á 240 milímetros.

Tampoco pueden englobarse en un promedio general los de las estaciones de la costa del Norte, teniendo que limitarnos á concluir, en términos generales, que la lluvia anual varía aproximadamente entre 900 y 1400 milímetros, segun que el sitio está próximo al mar (por ejemplo Bilbao) ó separado de él por una sierra (p. e., Oviedo), ó por último en alturas ó valles más ó ménos accesibles á los vientos del mar.

Las mismas consideraciones son aplicables al interior de Andalucía y de Portugal, donde el gran número de cordilleras y su variable direccion producen diferencias marcadas entre las cantidades de lluvia anual. En la cuenca del Guadalquivir (comarcas de Sevilla, Carmona y Ecija) se halla el mínimo de lluvia en Andalucía, á partir de las cuales aumenta en todos los rumbos la cantidad de agua pluviátil, porque en la direccion del Sur nos acercamos al mar, y en las demás direcciones encontramos sierras que son otras tantas barreras para las nubes: una de las cuales (Sierra-Morena) forma parte de la curva, que encierra la extensa region cuyo promedio anual es de 370 milímetros.

Entremos ahora en la discusion de la distribucion de la lluvia en el período anual. Tambien existen en la Península respecto de esta distribucion grandes diferencias, que ejercen mucha influencia en la vida agrícola y en el caudal de agua de los rios. Para dar á conocer esta distribucion temporal del agua meteórica, doy primero por estaciones el resultado de las observaciones de más de 10 años en 18 Observatorios meteorológicos, advirtiendo que las cifras indican el tanto por ciento del total anual.

CUADRO II.

	Invierno.	Primavera	Verano.	Otoño.
Gibraltar.......	41,1 %	26,4 %	3,4 %	29,1 %
S. Fernando.....	40,1	26,2	2,9	30,8
Sevilla.........	40,0	24,1	6,4	29,4
Lisboa.........	39,0	26,7	2,2	32,1
Guarda.........	31,8	29,6	7,7	30,9
Campo-Mayor...	32,5	27,7	8,1	31,7
Porto..........	40,5	19,4	5,0	35,1
Santiago........	32,9	25,9	10,4	30,8
Oviedo.........	29,6	28,3	14,0	28,1
Bilbao.........	31,0	23,0	16,2	29,8
Valladolid......	25,3	30,3	13,5	30,9
Madrid.........	27,0	29,2	12,3	31,4
Granada........	30,2	29,5	5,5	34,8
Múrcia..........	21,8	32,0	5,5	40,7
Alicante........	20,7	30,2	10,7	38,4

Valencia........	22,8	23,7	9,0	44,5
Barcelona.......	18,3	24,8	18,3	38,6
Zaragoza.......	20,4	27,4	22,3	30,9

Este cuadro demuestra que en ciertos grupos de estaciones meteorológicas la distribucion de la lluvia sigue casi la misma marcha, siendo factible por lo tanto, reunir las indicaciones que á ellas se refieren en un promedio general de una region más extensa.

Así he formado los promedios siguientes:

CUADRO III.

	Invierno.	Primavera.	Verano.	Otoño.	Relacion del mínimo al máximo.
Gibraltar, S. Fernando, Sevilla, Lisboa, Porto.	40%	25%	4%	31%	$\frac{1}{10,0}$
Santiago, Guarda, Campo-Mayor.	32	28	9	31	$\frac{1}{3,5}$
Oviedo, Bilbao..	30	25	15	30	$\frac{1}{2,0}$
Madrid, Valladolid..........	26	30	13	31	$\frac{1}{2,3}$
Múrcia, Alicante, Valencia......	22	29	8	41	$\frac{1}{5,1}$
Barcelona, Zaragoza.........	19	26	20	35	$\frac{1}{1,8}$

Resultan, pues, *seis tipos de distribucion temporal de la lluvia en la Península Ibérica.* El primero caracterizado por el hecho de recibir aquellas comarcas la cantidad mayor de agua pluviátil en invierno, siendo el otoño la estacion inmediata más húmeda, en tanto que los estíos presentan una sequedad extraordinaria. En invierno cae una cantidad de agua diez veces mayor que en verano. Recordando que los alíseos del N. E. vienen á quedar en el estío por bajo de 40° de latitud N. en la Península, se concibe perfectamente que sean la causa de la sequedad notada en las comarcas sometidas á su influencia. Esa region puede por esto llamarse *Region de lluvia de invierno, ó de lluvia subtropical*, y comprende en el litoral las costas de Portugal y de Andalucía, casi hasta el cabo de Gata; y en el interior las provincias de Huelva, Sevilla y la parte llana de la de Cádiz.

El tipo 2.°, al cual corresponden las comarcas de Santiago, Guarda y Campo-Mayor (y hasta cierto punto Granada), está caracterizado por no ofrecer ya tantas diferencias entre las cantidades de lluvia en invierno, otoño y primavera, y porque la relacion del mínimo al máximo es tan solo de $\frac{1}{3,5}$. Constituye, pues, este 2.° tipo la *Region de lluvia de invierno, otoño y primavera*, que se extiende por el interior de Portugal, parte de Extremadura y la pendiente Sur de la Sierra-Morena, hasta la cuenca superior del Genil, donde se encuentra Granada, que en parte pertenece al tipo quinto, porque aquí el mínimo de lluvia corresponde al otoño.

La costa del Norte comprende el tercer tipo ó region de la distribucion de la lluvia, caracterizada por la circunstancia de que las cantidades de agua pluviátil de invierno y otoño son iguales entre sí, y equivalen al duplo de la que cae en verano: por lo cual podemos designarla con el nombre de *Region de lluvia de otoño é invierno*, limitada al Sur por las sierras Astúrica y Cantábrica.

Comprende el cuarto tipo las dos Castillas y el reino de Leon, es decir, la meseta ó planicie central de la Península, y está caracterizado por la circunstancia de que en dichas regiones la mayor cantidad de agua corresponde al otoño, siguiendo despues la primavera y siendo relativamente el estío casi tan húmedo como en la region anterior. A esta region la llamo *Region de lluvia de otoño y primavera.*

Al S. E. de estas regiones hasta la costa de las provincias de Valencia, Alicante y Múrcia, hay otra diferente distribucion de la lluvia. Presenta este quinto tipo el fenómeno de que el máximo de lluvia corresponde al otoño, y está muy bien marcado el por qué la cantidad que cae en verano es la quinta parte del dicho máximo: es pues este tipo casi el opuesto al primero, y se halla muy bien definido en comparacion con el siguiente por la gran sequedad de su estío.

Falta, pues, examinar el tipo sexto y último, ó sea el que abarca la cuenca inferior del Ebro y las provincias de Barcelona y Gerona, distinto tan solo del anterior, por la circunstancia de que el verano no es tan seco, sino casi tan húmedo, como el invierno; reduciéndose la relacion de la lluvia en las estaciones más húmedas y las más secas del año al mínimo de $\frac{1}{1,8}$. A esta region la denomino *Region de lluvia de otoño y de igual humedad en invierno que en verano.*

Para mejor especificar la distribucion de la cantidad de lluvia en el período anual, tambien se han resumido los resultados *mensuales* de diez estaciones distribuidas en la Península, escogiéndolas entre las más antiguas y mejor adecuadas al objeto. Las cifras al lado de las estaciones indican el número de años de observacion.

CUADRO IV.

	Diciembre.	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.	Julio.	Agosto.	Setiembre.	Octubre.	Noviembre.
Gibraltar (16).....	107mm	122mm	82mm	80mm	62mm	48mm	18mm	—	8mm	33mm	78mm	119mm
S. Fernando (24)..	117	97	98	92	50	48	15	1	6	33	93	120
Lisboa (18).......	96	104	94	94	47	60	3	3	10	36	89	117
Porto (10)........	202	245	132	104	130	43	30	20	21	118	170	215
Santiago (15).....	225	228	126	149	158	149	63	39	81	154	189	198
Oviedo (20)......	109	89	80	113	71	82	59	36	37	81	72	109
Madrid (20)......	31	40	32	33	32	45	30	5	12	36	49	36
Alicante (20).....	29	22	38	55	40	35	15	14	17	48	68	49
Valencia (17).....	56	29	24	34	27	52	18	14	10	77	84	51
Zaragoza (15).....	30	20	23	23	21	54	29	23	27	25	39	44

Séame permitido indicar aquí cuán distinguida tarea sería para los establecimientos oficiales de Instruccion pública, Corporaciones científicas y *Sociedades económicas de Amigos del Pais*, bastante abundantes en España, el registrar ó contribuir á que se registren, las indicaciones del pluviómetro en sus respectivas comarcas: ejemplo que vienen dando las Sociedades análogas de otros países, sobre todo de Inglaterra, donde ya hay mas de 500 de aquellas estaciones pluviométricas. Aun cuando tal se hiciera, por el concurso aunado de todas las voluntades, todavía no habria en España tantas como existen en la Pequeña Barbada, que en el año 1874 poseia, distribuidas en una superficie de 471 kilómetros cuadrados, el enorme número de 232 estaciones pluviométricas, ó una Estacion casi por cada 2 kilómetros cuadrados. Quien dude de la utilidad de estas observaciones, lea la memoria (*) que el Gobernador de aquella isla ha publicado sobre este asunto, demostrando la gran influencia de la lluvia en la cosecha de la caña de azúcar, y de qué manera puede preveerse si la cosecha será buena ó mala.

(*) *Report upon the rainfall of Barbadoes and upon its influence on the sugar crops* 1847-1871, *by Governor Rawson. Barbadoes*, 1874.

CIENCIAS NATURALES.

De la proporcion de la ley electro-dinámica fundamental con el principio de la conservacion de la energía y de una nueva simplificacion de esta ley, por R. Clausius. (*Leido en la Sociedad del Rhin Inferior de las Ciencias Naturales y de Medicina, el 7 de febrero de* 1876.)

(Archives des sc. nat., 15 mayo 76.)

La nueva ley electro-dinámica fundamental que hemos comunicado recientemente, da lugar, en lo que concierne á su validez y su posibilidad de una simplificacion, á una consideracion muy esencial que me permitiré exponer aquí.

Dos partículas eléctricas e y e' tienen respectivamente en la época t las coordenadas rectangulares x, y y z y x', y' y z', y tendremos para abreviar:

$$\xi = x - x', \ \eta\ u = y - y', \ \zeta = z - z'.$$

Además se representará la distancia de estas dos partículas por r, los dos elementos, simultáneamente recorridos por sus trayectorias ds y ds', el ángulo de estos dos elementos por ε, las velocidades por v y v'. Si los componentes, segun los ejes coordinados, de la accion que la partícula e experimenta de parte de la partícula e' se designan por Xee', Yee' y Zee', tendremos para determinar las ecuaciones, á las cuales he dado en mi anterior comunicacion la forma general siguiente:

$$X = \frac{\xi}{r^3} - k\left(\frac{\xi}{r^3}\cos\varepsilon + n\frac{d^2\frac{\xi}{r}}{ds\,ds'}\right)vv' + k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right)$$

$$Y = \frac{\eta}{r^3} - k\left(\frac{\eta}{r^3}\cos\varepsilon + n\frac{d^2\frac{\eta}{r}}{ds\,ds'}\right)vv' + k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dt}\right)$$

$$Z = \frac{\zeta}{r^3} - k\left(\frac{\zeta}{r^3}\cos\varepsilon + n\frac{d^2\frac{\zeta}{r}}{ds\,ds'}\right)vv' + k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dt}\right),$$

en que k es una constante que depende de la relacion entre la fuerza electrostática y la fuerza electro-dinámica y n otra constante provisionalmente indeterminada.

Pero la cuestion es saber, si la ley dinámica expresada por estas ecuaciones es conciliable con el principio de la conservacion de la energía.

Si la accion electro-dinámica mútua de ambas partículas se ejerce por la de un medio interpuesto, no es enteramente necesario que las fuerzas á las cuales se someten ambas partículas, satisfagan por su cuenta propia á este principio, atendiendo á que el medio interpuesto toma tambien parte en la accion. Pero para las acciones mútuas de las corrientes galvánicas cerradas ocurrirá, conforme á las leyes conocidas que á estas se refieren, que el principio se observa, aun sin que se tenga en cuenta el medio interpuesto entre estas corrientes.

Multipliquemos las expresiones anteriores de X, Y y Z, respectivamente por $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$, y tambien las expresiones correspondientes formadas de la misma manera para las componentes X', Y' y Z', de la fuerza ejercida sobre la partícula e', respectivamente por $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$ y $\frac{dz'}{dt}$; sumémoslas y multipliquemos la suma por el producto ee' y el elemento de tiempo dt, y obtendremos la expresion del trabajo de ambas fuerzas durante este elemento de tiempo. Despreciando provisionalmente los términos que llevan el factor n, podrá ponerse esta expresion en la forma siguiente:

$$-d\frac{ee'}{r}\left[1-K(v^2+v'^2-vv'\cos\varepsilon)\right]-\frac{k}{2}\frac{ee'}{r}d(v^2+v'^2).$$

Aquí el primer término es una diferencial exacta, como debe suceder en razon del principio de la conservacion de la energía; por el contrario, el segundo término no cumple todavía esta condicion.

Pero consideremos dos elementos de corrientes galvánicas que pueden moverse de una manera cualquiera y tener una intensidad variable; deberemos admitir que en cada uno de estos elementos debe haber igual cantidad de electricidad positiva y de electricidad negativa. Designemos estas cantidades por $+e$ y $-e$, $+e'$ y $-e'$, y combinemos: $+e$ con $+e'$, $+e$ con $-e'$, $-e'$ con $+e'$ y $-e$ con $-e'$; tendremos que escribir para cada una de estas cuatro combinaciones una expresion de la forma anterior, y hacer la suma de estas cuatro expresiones. Por consiguiente, el segundo término que, por la resolucion del paréntesis, se descompone en dos, nos dará entre todos, ocho términos, que serán dos á dos iguales y de signo contrario, y que por lo tanto se destruirán en su conjunto. Entónces la suma no consistirá mas que en los cuatro términos que corresponden al primero de la expresion anterior que, como ya se ha dicho, satisface al principio de la conservacion de la energía.

Respecto á los términos afectados del factor n y que se han despreciado antes, se destruyen igualmente entre sí, por una parte, en la expresion del trabajo relativo á dos elementos de corrientes, y por otra se reducen á cero, cuando se estiende la integracion á una corriente cerrada.

Así es que las ecuaciones anteriores se hallan en armonía con el principio de la conservacion de la energía, del modo que exigen los hechos consagrados por la experiencia.

Hemos dicho además en nuestra comunicacion anterior, que bajo el punto de vista teórico la hipótesis mas verosimil acerca de la constante n era el atribuirla por valor *cero*. De aquí que los términos afectados del factor n, de que acaba de tratarse, se anulan por sí mismos, y entonces el principio de la conservacion de la energía se halla satisfecho, no solo por corrientes cerradas, sino tambien por elementos de las corrientes.

Además de esta simplificacion, se puede tambien introducir otra, la cual produce en muchas fórmulas una magnitud que no tiene influencia sobre las acciones de una corriente galvánica cerrada.

En las deducciones que ya nos han conducido á las ecuaciones anteriores, nos hemos separado, bajo un punto de vista esencial, de las concepciones anteriormente admitidas. En efecto, he tomado en consideracion, no solo el movimiento relativo de las dos partículas eléctricas, sino tambien sus movimientos absolutos; y ademas hemos prescindido de la restriccion, en virtud de la cual la direccion de las fuerzas ejercidas por las partículas una sobre otra, debería coincidir con la linea que las une. Por el contrario, hemos sostenido la hipótesis de que las dos fuerzas son iguales y opuestas. Pero aun esta hipótesis no es necesaria para fuerzas de la naturaleza de las electro-dinámicas. Si se abandonan tambien, puede darse á las ecuaciones fundamentales la forma siguiente:

$$X = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}(1 - k\,vv'\cos\varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt.}\right)$$

$$Y = -\frac{d\frac{1}{r}}{dy}(1 - k\,vv'\cos\varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dy'}{dt.}\right)$$

$$Z = -\frac{d\frac{1}{r}}{dz}(1 - k\,vv'\cos\varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dz'}{dt.}\right)$$

La fuerza que obra sobre la partícula e, segun estas ecuaciones la determinan y la fuerza correspondiente que obra sobre la partícula e', satisfacen por su cuenta al principio de la conservacion de la energía. En efecto, el trabajo de estas fuerzas durante un elemento de tiempo se halla representado por la diferencial exacta:

$$-d\frac{ee'}{r}(1+k\,vv'\cos\varepsilon).$$

Tambien se puede, por la aplicacion de un método introducido en otra ocasion por Lagrange, espresar las componentes de la fuerza, de una manera mas sencilla. Pues si se tiene:

$$U=\frac{ee'}{r}$$

$$V=k\frac{ee'}{r}vv'\cos\varepsilon.$$

$$=k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right)$$

y si se considera U como una funcion de las seis coordenanadas x, y, z, x', y', z', y V como una funcion de estas seis coordenadas y de sus derivadas relativamente á t, puede escribirse:

$$Xee'=\frac{d(V-U)}{dx}-\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}\right).$$

Del mismo modo se deducirán las otras cinco componentes de las dos funciones U y V por via de diferenciacion.

En cuanto á las componentes de la fuerza que un elemento de la corriente ds esperimenta de parte de otro elemento ds', se deducirán de la formula simplificada de las ecuaciones fundamentales las expresiones siguientes:

$$cii'\ ds\ ds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\ \frac{dx'}{ds'}\right)$$

$$cii'\ ds\ ds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\ \frac{dy'}{ds'}\right)$$

$$cii'\ ds\ ds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\ \frac{dz'}{ds'}\right)$$

VARIEDADES.

Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Programa para la adjudicacion de premios en el año de 1878.

Artículo 1.° La Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporacion, los temas siguientes:

I.

Exposicion elemental y completa, histórica y didáctica de la teoría y principales aplicaciones de las cantidades imaginarias. Influencia del imaginarismo sobre las demás nociones fundamentales de las Matemáticas, y lugar que le corresponde en la combinacion bien ordenada de las diversas teorías que componen la totalidad de la ciencia.

II.

Determinacion de los caractéres físico-meteorológicos de los diferentes climas de la Península ibérica, comparándolos con los de aquellas regiones en Europa y Africa con quienes nuestro pais está en relaciones de continuidad y con los de Asia y América que presenten analogías á pesar de la distancia. Aplicaciones mas notables del estudio referido.

III.

Catálogo descriptivo de un grupo natural de la Fauna española, indicando las especies de que el hombre saque ó pueda sacar alguna utilidad, y aquellas otras que les sean perjudiciales.

2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mencion honorífica.*

3.° El *premio* consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicacion; una medalla de oro, de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesion pública entregará el Sr. Presidente de la Corporacion á quien le hubiese merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribucion pecuniaria al mismo autor ó concurrente premiado de 1.500 pesetas; impresion por cuenta de la Academia, en la Coleccion de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada; y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

4.° El *premio* se adjudicará á las Memorias que no solo se distingan por su relevante mérito científico, sino tambien por el órden y método de exposicion de materias y redaccion bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicacion.

5.° El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del *premio* y adjudicados del mismo modo; y en la impresion de la Memoria coleccionada con las de la Academia y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

6.° El *accesit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas, y que versen sobre los mismos temas: ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporacion, á las impuestas para la adjudicacion ú obtencion del premio.

7.° La *mencion honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accesit*, que se entregará tambien en sesion pública al autor ó concurrente agraciado, ó á persona que le represente.

8.° La mencion honorífica se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algun concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicacion por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, nose consideren dignas de *premio* ni de *accesit*.

9.° El concurso quedará abierto desde el dia de la publicacion de este Programa en la Gaceta de Madrid, y cerrado en 31 de diciembre de 1878, hasta cuyo dia se recibirán en la Secretaría de la Academia cuantas Memorias se presenten.

10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó estranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporacion.

11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latin.

12. Las Memorias que se presenten optando á premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicacion del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta, que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, tambien cerrado, dentro del cual constarán el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

13. De las Memorias ó pliegos cerrados el Secretario de la Academia dará á la persona que los presente y entregue un recibo, en que consten el lema que los distingue y el número de órden de su presentacion.

14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accesit*, se abrirán en la sesion en que se hubiese acordado otorgar á sus autores una ú otra distincion y recompensa; y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas

de *mencion honorífica*, no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decision de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la Gaceta de Madrid los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas; y, en el improrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certámen, y otorgarán por escrito la vénia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Trascurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden, sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distincion que legitimamente les corresponde.

16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accesit*, ni con *mencion honorífica*, se quemarán en la misma sesion en que la absoluta falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiese decidido. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mencion honorífica*, cuando en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubiesen concedido permiso para abrirlos.

17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporacion, podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado: como modelos de construccion, atlas ó dibujos complicados de reproduccion difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certámen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las *Memorias* que respectivamente les correspondan.

Madrid 1.° de diciembre de 1876.=El Secretario perpétuo, *Antonio Aguilar y Vela.*

AGRICULTURA.

El guante de mallas de acero para descortezar las cepas de vid, por M. SABATÉ.

Desde que el sabio y modesto profesor Balbiani descubrió la existencia del huevo de invierno del phylloxera y sus especiales estudios prepararon las observaciones perseverantes de M. Boiteau, nos son desconocidos los hábitos y costumbres de tan terrible y pequeño insecto. Efectivamente, estando claramente demostrado que el phylloxera tenia dos existencias, la existencia aerea y la subterránea, no hemos tenido que preocuparnos sino de hallar dos medios de accion para atacarle en ambas condiciones. MM. Balbiani y Boiteau, á los cuales deberá eterno reconocimiento la industria vinícola francesa, han indicado, valiéndose de muchas y concienzudas investigaciones, el sitio en que el phylloxera de sexo deposita su huevo regenerador, el huevo de invierno y le coloca bajo las cortezas de la cepa. Allí está á la mano, y por consiguiente el medio de destruirle sin perjudicar á la vegetacion de la vid, es muy fácil de encontrar, ocurriéndose desde luego á los cultivadores la idea de descortezar las cepas, como en efecto lo han recomendado de los primeros MM. Balbiani y Boiteau, y ha parecido la solucion mas racional y mas práctica para llegar á una destruccion completa y rápida del huevo propagador. Prescindiendo de los procedimientos usados hasta el dia, por ejemplo, cuchillos y raspadores que pueden perjudicar á la vid descortezando su epidermis, hemos ideado un guante metálico con el cual se hace rápidamente y sin peligro la operacion de descortezar. Provistos de un instrumento cómodo hemos hecho que descortezaran una gran parte de nuestros viñedos, con la doble seguridad de destruir el huevo de invierno y favorecer el desarrollo de la vegetacion, y en efecto, no se han hecho esperar los buenos resultados, de los cuales hemos dado cuenta á la Academia de Ciencias en las sesiones de 14 de agosto y 4 de diciembre últimos. La mano en que va el guante debe llevar otro de tela ó piel para disminuir la presion de las mallas de acero. El cultivador coje la cepa con la mano cubierta con el guante y la mueve de un lado á otro para desprender la corteza, despues recorre el vastago de alto á abajo y vice-versa y le despoja de sus cortezas sin tener necesidad de ejercer una fuerte presion.

Con un poco mas de precaucion que para el tallo, puede encerrar los vástagos para fruto y descortezarlos hasta los primeros botones. En las intersecciones de dos vástagos unidos donde no puede penetrar la mano, puede emplearse un cuchillo ó un arco.

Es inútil reunir las cortezas desprendidas para quemarlas. La esperiencia ha demostrado que los huevos del phylloxera, los gérmenes de la pirala y los demás insectos alojados en las cortezas se destruyen con la lluvia ó el frio inmediatamente que se les desaloja ó descubre.

No hay que idear el primer tratamiento que hay que hacer, la dificultad del trabajo está resuelta y el gasto de esta primera operacion considerablemente disminuido.

El segundo tratamiento, el subterráneo, puede hacerse segun los procedimientos que se usan, procedimientos que degraciadamente dejan mucho que desear bajo muchos puntos de vista.

CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMERICAS.

(Continuacion.)

CAPITULO IV.

Ampliacion de la teoría expuesta en el capítulo precedente al caso en que la ecuacion, de grado *par*, que se trata de resolver, contenga raíces reales é imaginarias.

§. 21.

Enúnciase de nuevo y se resuelve en términos generales el problema de los párrafos 16 *y* 17.

Cuanto se acaba de exponer concerniente á la descomposicion en n trinomios de segundo grado, de una ecuacion del grado $2n$, en el supuesto de ser todas sus raíces imaginarias, puede literalmente casi reproducirse, sin restriccion alguna preliminar.

Representemos, en efecto, por el trinomío $x^2 + fx + v$ uno de los componentes de la ecuacion; supongamos que, por cualquier procedimiento, se haya logrado ya determinar el valor de v; y propongámonos deducir el de f correspondiente.

Cualquiera que sea el valor de v, y, por lo tanto, cualesquiera que sean las dos raíces de la ecuacion propuesta, en el trinomio considerado comprendidas: —ambas *imaginarias*, si $v > 1/4\, f^2$; *reales* las dos y del mismo signo, contrario al de f, si $v > 0$ y $< 1/4\, f^2$; ó *reales* y de signos opuestos, si $v < 0$;— aquel trinomio podrá suponerse siempre descompuesto en dos binomios, de este modo:

$$x^2 + fx + v = (x + z\sqrt{v}) \left(x + \frac{1}{z}\sqrt{v}\right).$$

De donde se deduce que

$$f = \sqrt{v}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Y, designando por a y b las dos raíces (§. 1) del trinomio, podremos escribir tambien estas otras igualdades:

$$z = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \frac{1}{z} = \sqrt{\frac{b}{a}}; \quad \text{y} \qquad v = ab.$$

Considerado en absoluto, ó prescindiendo de su signo, y con el solo objeto de simplificar un poco la notacion y escritura de las fórmulas que siguen, el producto ab le representaremos en adelante por g^2, ó por g el valor de $\sqrt{v}$.

Tras de estos preliminares, en la ecuacion general

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} + \ldots\ldots + \alpha_{2n-1}\, x + \alpha_{2n} = 0$$

pongamos sucesivamente por x sus dos valores, $-gz$ y $-gz^{-1}$, y obtendremos estos dos, en la apariencia, distintos resultados: (32)

$$g^{2n} z^{2n} - \alpha_1 g^{2n-1} z^{2n-1} + \alpha_2 g^{2n-2} z^{2n-2} - \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^2 z^2 - \alpha_{2n-1} gz + \alpha_{2n} = 0; \quad \text{y}$$

$$g^{2n} z^{-2n} - \alpha_1 g^{2n-1} z^{-2n+1} + \alpha_n g^{2n-2} z^{-2n+2} - \ldots\ldots + \ldots\ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^2 z^{-2} - \alpha_{2n-1} g z^{-1} + \alpha_{2n} = 0.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $g^{-2n} z^{-n}$, y la segunda por $g^{-2n} z^n$, y combinando los dos resultados uno con otro, por vía de adicion y de sustraccion, obtiénense los dos siguientes (33):

$$(z^n + z^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(z^{n-1} + z^{-n+1}) + \alpha_2 g^{-2}(z^{n-2} + z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^{-2n+2}(z^{n-2} + z^{-n+2}) - \alpha_{2n-1} g^{-2n+1}(z^{2n-1} + z^{-n+1}) +$$
$$\alpha_{2n} g^{-2n}(z^n + z^{-n}) = 0; \quad \text{y}$$

$$(z^n - z^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(z^{n-1} - z^{-n+1}) + \alpha_2 g^{-2}(z^{n-2} - z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$
$$- \alpha_{2-n2} g^{-2n+2}(z^{n-2} - z^{-n+2}) + \alpha_{2n-1} g^{-2n+1}(z^{2n-1} + z^{-n+1}) -$$
$$\alpha_{2n} g^{-2n}(z^n - z^{-n}) = 0.$$

Y suponiendo ahora que

$$(34)\quad \left.\begin{array}{ll}
1 + \alpha_{2n} g^{-2n} & = \beta \\
\alpha_1 + \alpha_{2n-1} g^{-2n+2} & = \beta_1 \\
\alpha_2 + \alpha_{2n-2} g^{-2n+4} & = \beta_2 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} g^{-2} & = \beta_{n-1} \\
\alpha_n + \alpha_n & = \beta_n
\end{array}\right\} \text{ y } \qquad
(35)\quad \left.\begin{array}{ll}
1 - \alpha_{2n} g^{-2n} & = \gamma \\
\alpha_1 - \alpha_{2n-1} g^{-2n+2} & = \gamma_1 \\
\alpha_2 - \alpha_{2n-2} g^{-2n+4} & = \gamma_2 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\alpha_{n-1} - \alpha_{n+1} g^{-2} & = \gamma_{n-1}
\end{array}\right\},$$

y aglomerando en uno solo cada dos términos equidistantes de los extremos, las ecuaciones (33) podrán escribirse de este modo: (36)

$$\beta(z^n + z^{-n}) - \frac{\beta_1}{g}(z^{n-1} + z^{-n+1}) + \frac{\beta_2}{g^2}(z^{n-2} + z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$

$$\pm \frac{\beta_{n-1}}{g^{n-1}}(z + z^{-1}) \mp \frac{\beta_n}{g^n} = 0; \quad \text{y}$$

$$\gamma(z^n - z^{-n}) - \frac{\gamma_1}{g}(z^{n-1} - z^{-n+1}) + \frac{\gamma_2}{g^2}(z^{n-2} - z^{-n+2}) - \ldots + \ldots$$

$$\mp \frac{\gamma_{n-2}}{g^{n-2}}(z^2 - z^{-2}) \pm \frac{\gamma_{n-1}}{g^{n-1}}(z - z^{-1}) = 0.$$

Los binomios de la forma $(z^n + z^{-n})$, ó $(z^n - z^{-n})$, componentes de las ecuaciones anteriores, dependen unos de otros conforme indican las dos adjuntas relaciones algebráicas: (37)

$$z^n + z^{-n} = (z + z^{-1})(z^{n-1} + z^{-n+1}) - (z^{n-2} + z^{-n+2}), \quad \text{y}$$

$$\frac{z^n + z^{-n}}{z - z^{-1}} = (z + z^{-1})\left(\frac{z^{n-1} - z^{-n+1}}{z - z^{-1}}\right) - \left(\frac{z^{n-2} - z^{-n+2}}{z - z^{-1}}\right):$$

de las cuales, atribuyendo á n los valores sucesivos 0, 1, 2, 3... y recordando que

$$z^0 + z^{-0} = 2, \quad \text{y} \quad z^1 + z^{-1} = \frac{f}{g},$$

se deducen las siguientes expresiones particulares:

(38)

$$\left.\begin{aligned}
z^0 + z^{-0} &= 2 \\
z^1 + z^{-1} &= \frac{f}{g} \\
z^2 + z^{-2} &= \frac{f^2}{g^2} + 2 \\
z^3 + z^{-3} &= \frac{f^3}{g^3} - 3\,\frac{f}{g} \\
z^4 + z^{-4} &= \frac{f^4}{g^4} - 4\,\frac{f^2}{g^2} + 2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

(39)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{z^0 - z^{-0}}{z - z^{-1}} &= 0 \\
\frac{z - z^{-1}}{z - z^{-1}} &= 1 \\
\frac{z^2 - z^{-2}}{z - z^{-1}} &= \frac{f}{g} \\
\frac{z^3 - z^{-3}}{z - z^{-1}} &= \frac{f^2}{g^2} - 1 \\
\frac{z^4 - z^{-4}}{z - z^{-1}} &= \frac{f^3}{g^3} - 2\,\frac{f}{g} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

Las fórmulas generales, de donde proceden ó se derivan las expresiones precedentes, —de cuya exactitud, por otra parte, podemos cerciorarnos con auxilio de las ecuaciones condicionales (37),— son éstas: (40)

$$z^n + z^{-n} = \frac{f^n}{g^n} - M_1\,\frac{f^{n-2}}{g^{n-2}} + M_2\,\frac{f^{n-4}}{g^{n-4}} - M_3\,\frac{f^{n-6}}{g^{n-6}} + \ldots\ldots; \quad \text{y}$$

$$\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} = \frac{f^{n-1}}{g^{n-1}} - N_1\,\frac{f^{n-3}}{g^{n-3}} + N_2\,\frac{f^{n-5}}{g^{n-5}} - N_3\,\frac{f^{n-7}}{g^{n-7}} + \ldots\ldots;$$

en las cuales las letras M y N designan abreviadamente lo expuesto en el §. 17.

Con auxilio de estas dos últimas fórmulas, los binomios contenidos en las ecuaciones (36) pueden eliminarse, ó quedar reemplazados por polinomios de los grados n, $n-1$, $n-2$, ..., con respecto á la letra f. Y, verificada esta eliminacion, las dos ecuaciones últimamente citadas se transforman, sin variante alguna, en las que páginas más atrás designamos por (30) y (31), y detenidamente analizamos.

Ni puede ser de otro modo: por cuanto las (30) y (31) proceden de la ecuacion general, del grado $2n$, por la sustitucion sucesiva de $g(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ y de $g(\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, en vez de x; y las (36) por la de $-gz$ y $-gz^{-1}$. Y como, si suponemos que

$$z = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

lo será tambien

$$z^{-1} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi;$$

y como estos valores particulares de z y de z^{-1} satisfacen á las relaciones (37), las dos transformaciones de la ecuacion general coinciden en principio y no pueden discrepar esencialmente en los resultados ni en un ápice. A mayor abundamiento, y conforme en uno de los *Apéndices* á esta MEMORIA se demostrará, conviene advertir todavía que las fórmulas auxiliares (40) solo en la apariencia difieren de las que en el capítulo anterior nos sirvieron para expresar el $\cos n\varphi$ y la relacion $\dfrac{\mathrm{sen}\,n\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi}$, en funcion de las potencias enteras decrecientes de $\cos\varphi$.—Inútil es, en consecuencia, insistir un momento más sobre este punto.

§. 22.

Dificultades que pueden presentarse al descomponer una ecuacion en trinomios reales de segundo grado, cuando son asimismo reales sus binomios componentes de primero.

Cuando todas las raices de la ecuacion propuesta son *imaginarias*,

$$v = \sqrt{ab} = \sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1})} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = g;$$

y este valor de v sabemos ya cómo se encuentra ó determina. Y, cuando *reales*, la investigacion es análoga é igualmente sencilla. En ambos casos los diversos valores de v se deducen por la division, unos por otros, de los coeficientes de órden *impar* de la ecuacion final, transformada de la primitiva por la regla del §. 3.º, y extraccion de las raices aritméticas de los cocientes así obtenidos, cuyos *índices* coinciden con los exponentes de las potencias á que las raices de la ecuacion propuesta se hubieren en último término elevado. Esto supone que la propuesta es de grado *par*, $2n$ por ejemplo; pero, si no lo fuese, bastaría multiplicarla por el factor $(x+0)$, ó todos sus términos por x, para que, sin complicacion de ningun género, pasase del grado $2n-1$ al $2n$, al cual se aplican los razonamientos anteriores. Sean, pues, *reales* ó *imaginarias* todas las raices de una ecuacion, su distribucion en trinomios reales de segundo grado podrá siempre verificarse ateniéndose á las mismas reglas.

Obtenido un trinomio de la forma x^2+fx+v, la manera más sencilla de encontrar las dos raices, a y b, en él comprendidas, parece ser la siguiente.

1.º Si $v>0$ y $f<2\sqrt{v}$, suponiendo que $\dfrac{f}{2\sqrt{v}}=\cos\varphi$,

$$(41)\quad \begin{cases} a=\sqrt{v}\,(-\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi), \quad \text{y} \\ b=\sqrt{v}\,(-\cos\varphi-\sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi). \end{cases}$$

2.º Si $v>0$ y $f>2\sqrt{v}$, suponiendo que $\dfrac{2\sqrt{v}}{f}=\operatorname{sen}\varphi$,

$$(42)\quad a=-\sqrt{v}\,.\operatorname{tang}{}^1/_2\varphi;\ \text{y}\ b=-\sqrt{v}\,.\cot{}^1/_2\varphi.$$

Y 3.º Si $v<0$, prescindiendo por de pronto del signo de v, y suponiendo que $\dfrac{2\sqrt{v}}{f}=\operatorname{tang}\varphi$,

$$(43)\quad a=+\sqrt{v}\,.\operatorname{tang}{}^1/_2\varphi;\ \text{y}\ b=-\sqrt{v}\,.\cot{}^1/_2\varphi.$$

Pero ¿cuál es el *signo* de v?

Cuando las dos raices a y b son imaginarias *conjugadas*, v es esencialmente *positivo;* pero, cuando *reales*, lo mismo puede ser positivo que negativo. Y como v se deduce, no de la ecuacion propuesta, sino de la transformada cuyas raíces, a^{2m} y b^{2m}, son, en el segundo supuesto, por necesidad *positivas,* y positivo por lo tanto su producto, ó el valor de v^{2m}, despues de extraer de este producto la raiz $2m$, falta determinar el signo de v: signo del cual dependen el cálculo nada breve y el valor de f, y, por consecuencia, tambien los valores de a y b.—La descomposicion en trinomios de segundo grado de la ecuacion propuesta, y, por lo tanto, su resolucion en factores de primero, cuando directamente no pueda esto verificarse, presenta por tal motivo cierta dificultad ó incertidumbre, que de algun modo conviene desvanecer ó eludir.

El más sencillo consiste en operar, hasta resolverla por completo en trinomios de segundo grado, no sobre la ecuacion primitiva, sino sobre su primera transformada (2^1), ó sobre aquella ecuacion cuyas raices sean los *cuadrados* de las mismas raices que se buscan. Porque si los trinomios de la primera son de la forma

$$x^2 + fx + v = (x + a)(x + b),$$

los de la segunda lo serán de esta otra:

$$x^2 + f_2x + v_2 = (x + a^2)(x + b^2);$$

y si fuere, ó más fácil, ó más directo y preciso, hallar los valores de f_2 y v_2 que los de f y v, éstos se deducirían luégo de los anteriores por las siguientes sencillísimas fórmulas:

$$(44) \quad v = \pm\sqrt{v_2}; \text{ y } f = \pm\sqrt{f_2 \pm 2\sqrt{v_2}}.$$

En el cálculo de f, $\sqrt{v_2}$ debe poseer el mismo signo que en el de v; y por este concepto no cabe incertidumbre ó ambigüedad en los resultados. Pero, concerniente á los signos de v y de f, que deben adoptarse para componer el trinomio x^2+fx+v, la ambigüedad subsiste por completo; y sólo por tanteos, largos y fastidiosos, puede disiparse en la práctica. Preferible, pues, al uso de las fórmulas (44), es el de las (42) y (43), aplicables á la investigacion de las raices, a^2 y b^2, comprendidas en el trinomio $x^2+f_2x+v_2$: porque, calculados estos valores, inmediatamente se deducirán los de a y b; y por simple sustitucion suya en la ecuacion propuesta, se advertirá luégo sin dificultad qué signos deben precederles para que puedan considerarse como verdaderas raices, ó valores legítimos de la incógnita x.

Respecto al signo de v_2 no cabe duda de que en todos los casos debe ser *positivo*.

Porque, si las raíces de la ecuacion primitiva fuesen imaginarias y de la forma $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, el trinomio real $x^2+f_2x+v_2$ coincidirá con este otro:

$$x^2+2g^2\cos 2\varphi\,.\,x+g^4;$$

en el cual

$$g^4=v_2=(\alpha^2+\beta^2)^2;\ \text{y}\ \cos\varphi=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Si de la forma $\pm\beta\sqrt{-1}$, con el trinomio

$$x^2-2\beta^2x+\beta^4=(x-\beta^2)\,(x-\beta^2).$$

Y, si *reales*, el trinomio de la transformada equivaldrá al producto de estos dos factores:

$$(x+a^2)\times(x+b^2);$$

y v^2, igual entónces á $(ab)^2$, sería necesariamente *positivo*, cualquiera que fuere el signo de ab ó de v.

El segundo, muy excepcional, de los tres casos considerados, ó aquel en que la primera transformada de la ecuacion propuesta comprenda dos factores reales de la forma $(x-\beta^2)$, parece todavía de interpretacion un poco dudosa: porque, combinado uno de estos factores con cualquiera otro real de *primer* grado, el trinomio resultante de *segundo*, tendría su último término *negativo*. Pero si las v_2, obtenidas por el procedimiento latamente explicado, para hallar luégo los diversos valores de g^2 ó de v, se consideran como *positivas* todas, una habrá entre ellas que corresponderá al trinomio $x^2 - 2g^2x + g^4$; y la descomposicion de la primera transformada (2^1) en un cierto producto de trinomios de segundo grado, áun entónces será factible sin asomo de ambigüedad.

Por lo demas, conviene advertir que esta tan curiosa y nimia manera de analizar y descomponer en otras más sencillas, de segundo grado, la ecuacion propuesta, operando sobre su primera transformada, admite en la práctica muy raras aplicaciones. Porque si las raices de la primitiva son todas reales, —y áun cuando sólo en parte lo sean, como en otro capítulo veremos,— lo más directo y breve es determinar sus valores por el método general, ó emprender desde luégo la descomposicion de aquella ecuacion en factores de primer grado; y si en totalidad imaginarias, como han de ser *conjugadas*, en el signo de v no cabe incertidumbre, y la descomposicion inmediata en trinomios de segundo grado podrá tambien verificarse entónces sin dificultad teórica de ningun género. A esta descomposicion, aplicada, no á la ecuacion primitiva (2^0), sino á su transformada primera (2^1), sólo habrá que apelar cuando, por excepcion un poco extraña, las raices reales de aquella ecuacion, prescindiendo de sus signos, discrepen apénas unas de otras, y sea, por lo tanto, muy lento, ó tal vez ineficaz, el primer método de análisis (§. 3.º), y ambiguo el segundo, que se acaba de exponer, por desconocerse *à priori* el signo de v.

Y que nos hallamos en este caso excepcional lo advertiremos en los caractéres siguientes:

1.º En que los coeficientes de las transformadas sucesivas, cualquiera que sea la potencia á que las raices de la propuesta se eleven, son siempre *positivos:* prueba de que estas raices son todas *reales;* pues, si existiesen siquiera dos *imaginarias*, el coeficiente, $2 \cos m\,\varphi$, del trinomio

$$x^2 + 2 \cos m\varphi \,.\, x + g^{2m},$$

aumentando m indefinidamente, debería cambiar una ó varias veces de signo, é introducir una perturbacion en los signos del producto total de factores, de primero ó de segundo grado, componentes de las varias ecuaciones transformadas.

Y 2.º En que uno ó más coeficientes de estas transformadas sucesivas variarían con grandísima lentitud, sin aproximarse ó convergir hácia un *límite* determinado, ó sin que en su composicion, al pasar de la transformada de órden 2^m á la del 2^{2m}, dejasen de influir eficazmente los demás coeficientes de la última ecuacion, por la regla general (§. 3.º) obtenida ó derivada de la propuesta.

Concluyamos. Si en las transformadas sucesivas algun término cambia de signo, indicio evidente es de que la propuesta posee raices imaginarias; y si, tras de un coeficiente de magnitud y signo variables, figura otro, siempre *positivo* y de valor *limitado*, ó independiente de los coeficientes anteriores y posteriores en el paso de una transformada á otra, de órden superior, no es ménos cierto que de él podrán deducirse luégo uno ó más valores de v, esencialmente *positivos* tambien, por corresponder á doble número de raices de aquella especie, *conjugadas*. Duda sobre el signo de v no puede surgir, sino cuando esta cantidad se desprenda de algun coeficiente de la transformada final, constantemente precedido en las intermedias de otro positivo: duda que las anteriores reflexiones contribuirán á disipar ó esclarecer, cuando, por excepcion muy rara, y como por casualidad, se presentare.

§. 23.

Ampliase la regla de Newton, para la correccion de las raices aproximadas de una ecuacion numérica, á la correccion de los trinomios de segundo grado.

Si en vez de ser imaginarias las dos raices contenidas en el trinomio $x^2 + f_0 x + v_0$, fuesen reales, y si en vez de corregir por la regla ó fórmula de Newton los valores aproximados de estas raices, x_0 y x'_0, se considerase preferible corregir los de f_0 y v_0, procederíase del siguiente modo, análogo, y hasta idéntico casi, al explicado en el supuesto anterior, en el §. 14.—Cuanto en este capítulo vamos exponiendo no es, en efecto, más que un resúmen, y como reproduccion desde diverso punto de vista, de la materia comprendida en los dos anteriores.

En la ecuacion propuesta, $f(x)=0$, sustitúyanse sucesivamente por x sus dos valores aproximados

$$x=-g_0z_0, \text{ y } x'_0=-g_0z^{-1},$$

y se obtendrán estos dos distintos resultados numéricos:

$$[(-g_0z_0)^n]=A, \text{ y } [(-g_0z_0^{-1})^n]=B.$$

Y, multiplicando cada término de los polinomios A y B por el exponente de la x_0 ó x'_0, en él contenida, se deducirán tambien, y al propio tiempo casi, estos otros dos:

$$[n(-g_0z_0)^n]=p, \text{ y } [n(-g_0z_0^{-1})^n]=q.$$

La fórmula general de Newton

$$0=f(x_0+\Delta x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\times\Delta x_0=$$

$$f(x_0)+xf'(x_0)\times\frac{\Delta x_0}{x_0}=[x_0^n]+[nx_0^n]\times\Delta\log x_0,$$

se convierte, en los anteriores supuestos, en las dos que siguen:

$$0=A+p\times\Delta\log x_0, \text{ y } 0=B+q\times\Delta\log x'_0.$$

Mas, por ser

$$x_0=-g_0z_0;\ \log x_0=\log(-g_0)+\log z_0;\ \text{y}$$

$$\Delta\log x_0=\Delta\log g_0+\Delta\log z_0;$$

y

$$x'_0 = -g_0 z_0^{-1};\ \log x'_0 = \log(-g_0) - \log z_0;\ \text{y}$$

$$\Delta \log x'_0 = \Delta \log g_0 - \Delta \log z_0,$$

conclúyese que

$$A + p \times (\Delta \log g_0 + \Delta \log z_0) = 0;\ \text{y}$$

$$B + q \times (\Delta \log g_0 - \Delta \log z_0) = 0,$$

Y de estas últimas ecuaciones inmediatamente se desprende que

$$(45)\quad \begin{cases} \Delta \log g_0 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{q}\right), \text{ y} \\ \Delta \log z_0 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A}{p} - \dfrac{B}{q}\right). \end{cases}$$

Supongamos ahora que las dos raices x_0 y x'_0 sean reales y del mismo signo, lo cual exige que $v_0 = g_0^2 > 0$, y $< {}^1/_4\, f_0^2$.

Por de pronto podremos escribir entónces las siguientes igualdades:

$$f_0 = (x_0 + x_0^{-1}) = g_0(z_0 + z_0^{-1});\ \text{y}$$

$$(46)\quad \begin{aligned} \log f_0 &= \log g_0 + \log(z_0 + z_0^{-1}), \text{ ó} \\ \Delta \log f_0 &= \Delta \log g_0 + \Delta \log(z_0 + z_0^{-1}). \end{aligned}$$

Y si suponemos ademas, —en lo cual no hay dificultad ni inconveniente de ninguna especie,— que $\dfrac{2\sqrt{v_0}}{f_0} = \operatorname{sen} \varphi_0$, nos resultará, como al deducir las ecuaciones (42), que:

$$z_0 = \operatorname{tang} {}^1/_2\, \varphi_0,\ \text{y}\ z^{-1} = \cot {}^1/_2\, \varphi.$$

Y, por lo tanto:

$$\Delta \log(z_0 + z_0^{-1}) = \Delta \log \frac{2}{\operatorname{sen} \varphi_0} = -\Delta \log \operatorname{sen} \varphi_0 =$$

$$-\frac{\Delta \operatorname{sen} \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0} = -\frac{\cos \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0} \times \Delta \varphi_0; \text{ y}$$

$$\Delta \log z_0 = \Delta \log \operatorname{tang} {}^1/_2 \varphi_0 = \frac{\Delta \operatorname{tang} {}^1/_2 \varphi_0}{\operatorname{tang} {}^1/_2 \varphi_0} = \frac{\Delta \varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi_0}$$

De donde, por la simple eliminacion de $\Delta \varphi_0$, se desprende esta otra relacion:

$$\Delta \log(z_0 + z_0^{-1}) = -\cos \varphi_0 \times \Delta \log z_0.$$

Y con esto, la primera de las ecuaciones (45) y la segunda de las (46) se convierten en las que siguen:

$$(47) \qquad 2 \times \Delta \log g_0 = \Delta \log v_0 = -M\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right); \text{ y}$$

$$(48) \quad \Delta \log f_0 = -\frac{M}{2}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) + \frac{M}{2} \cos \varphi_0 \left(\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right) =$$

$$-M\left(\frac{A}{p} \operatorname{sen}^2 {}^1/_2 \varphi_0 + \frac{B}{q} \cos^2 {}^1/_2 \varphi_0\right).$$

La letra M representa en estas últimas fórmulas el *módulo* de las tablas comunes, ó el número por que deben multiplicarse los logaritmos *neperianos* para convertirlos en *vulgares:* número por brevedad omitido en las líneas anteriores.

Pero, en vez de suponerlas del mismo signo, podemos atribuir signos opuestos á las dos raices reales x_0 y x'_0.

En este caso, que se verificará cuando v_0 sea menor que cero ($v_0 < 0$), podremos escribir por de pronto que

$$f_0 = x_0 + x'_0 = g_0(z_0 - z_0^{-1}); \text{ ó}$$

(49)

$$\Delta \log f_0 = \Delta \log g_0 + \Delta \log (z_0 - z_0^{-1}).$$

Y si, prescindiendo del signo de v_0, suponemos que $\frac{2\sqrt{v_0}}{f_0} = \text{tang}\, \varphi_0$, nos resultará tambien que

$$z_0 = \cot {}^1/_2\, \varphi_0, \text{ y } z_0^{-1} = \text{tang}\, {}^1/_2\, \varphi_0$$

Y de aquí, procediendo del propio modo que en el caso anterior, llegaremos sucesivamente á los siguientes resultados:

$$\Delta \log (z_0 - z_0^{-1}) = \Delta \log . \cot \varphi_0 = \frac{-\Delta \varphi_0}{\text{sen}\, \varphi_0 \cos \varphi_0}; \text{ y}$$

$$\Delta \log z_0 \qquad = \Delta \log \cot {}^1/_2\, \varphi_0 = \frac{-\Delta \varphi_0}{\text{sen}\, \varphi_0}: \text{ ó}$$

$$\Delta \log (z_0 - z_0^{-1}) = \sec \varphi_0 \times \Delta \log z_0.$$

Y de esta última relacion, combinada con la segunda de las (49), y las dos (45), se desprende esta otra final, que es la buscada:

$$(50) \quad \Delta \log f_0 = -\frac{M}{2}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) - \frac{M}{2} \sec \varphi_0 \left(\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right) =$$

$$-\frac{M}{\cos \varphi_0}\left(\frac{A}{p} \cos^2 {}^1/_2\, \varphi_0 - \frac{B}{q} \text{sen}^2\, {}^1/_2\, \varphi_0\right).$$

La (47), referente á la correccion que debe aplicarse al logaritmo de v_0, vale lo mismo para el caso en que las dos raices reales del trinomio $x^2 + f_0x + v_0$ tengan signos iguales, como contrarios ú opuestos.

La posibilidad de corregir los valores aproximados de f_0 y v_0, despues de conocidos los aproximados tambien de x_0 y x'_0, que del último trinomio se desprenden, queda con esto demostrada, y explicado á la vez el método que para calcular tales correcciones debe seguirse.

§. 24.

Aplicacion de lo expuesto á la resolucion de un ejemplo.

Ilustremos con un ejemplo el punto teórico más importante en este capítulo considerado: el referente á la dificultad ó anomalía de que, poseyendo la ecuacion propuesta raices reales exclusivamente, *convenga*, sin embargo, analizarla como si todas fuesen imaginarias, y operar, hasta resolverla por completo, sobre su primera transformada.

Sea, pues, esta ecuacion muy sencilla la que nos proponemos resolver:

$$(2^0) \quad x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 150x - 89 = 0.$$

Su primera transformada, inmediata ó directamente deducida por la regla del (§. 3.°), es la que sigue:

$$(2^1) \quad x^4 + 126x^3 + 4143x^2 + 11642x + 7921 = 0.$$

Reemplazando ahora los coeficientes por sus logaritmos y aplicando luégo tres veces consecutivas, á la formacion de nuevas transformadas, la regla que se acaba de mencionar, obtendremos los resultados que á continuacion se expresan:

$$(2^1)\quad x^4 + 2.1003705\,x^3 + 3.6173149\,x^2 + 4.0660276\,x + 3.8987800 = 0$$

$$(2^2)\quad x^4 + 3.8802416\,x^3 + 7.1537083\,x^2 + 7.8444944\,x + 7.7975600 = 0$$

$$(2^3)\quad x^4 + 7.4641175\,x^3 + 14.3051403\,x^2 + 15.4911771\,x + 15.5951200 = 0$$

$$(2^4)\quad x^4 + 14.6472678\,x^3 + 28.6102787\,x^2 + 30.9037531\,x + 31.1902400 = 0$$

Del exámen de estas ecuaciones se desprenden dos consecuencias importantes.

1.ª Que las raices de la ecuacion (2^0) son todas reales; puesto que todos los coeficientes de sus diversas transformadas son *positivos*.

Y 2.ª Que desde la ecuacion (2^4) en adelante los coeficientes tercero y quinto, —de x^2 y x^0,— se deducen por simple *duplicacion* de los del mismo lugar ó nombre que les preceden, ó son independientes de los anteriores y posteriores de la última transformada obtenida; mas no los coeficientes segundo y cuarto, —de x^3 y x,— los cuales experimentan todavía grandes modificaciones, en el paso de una transformada á otra, por resultado de la influencia que en sus valores ejercen los de x^2, y de x^2 y x^0.

Si, pues, en el órden decreciente de magnitud *absoluta*, ó prescindiendo de los signos, representamos las cuatro raices de la ecuacion (2^0) por las letras a, b, c y d, resulta de lo acabado de advertir que en la ecuacion (2^4) los coeficientes de x^2 y x^0 representan los logaritmos de $a^{2^4}b^{2^4}$ y de $a^{2^4}b^{2^4}c^{2^4}d^{2^4}$; pero no los de a^{2^4}, ni de $a^{2^4}b^{2^4}c^{2^4}$, los de x^3 *y* x. La separacion de las raices es solo parcial y no total; y lo único que de la transformada (2^4) podemos desde luégo deducir son los valores de $a \times b$ y de $c \times d$: precisamente los que en los anteriores párrafos hemos designado por g_0^2 y g_1^2, ó, con mayor propiedad, por v_0 y v'_0.

En efecto:

$$2^4 \times \log ab \quad = 28.6102787; \quad \text{y}$$

$$2^4 \times \log abcd = 31.1902400.$$

De donde facilísimamente se concluye que

$$ab = v_0 = 61.396324; \quad \text{y} \quad cd = v'_0 = 1.449598.$$

Si nos empeñásemos en obtener las cuatro raices de la ecuacion (2^0) por el procedimiento general, explicado y practicado en el Capítulo I, deberíamos continuar la serie de transformaciones de aquella ecuacion hasta dar con una derivada suya, cuyos coeficientes fuesen todos, como los de x^2 y x^0 en las (2^5), independientes por completo de los anteriores y posteriores en la transformada precedente.—¿Y cuál sería en este caso la transformada final?—La novena (2^9). Pero otros casos ó ejemplos análogos podrían presentarse en que la separacion completa de las raices exigiese todavía número mucho mayor de transformaciones sucesivas; por más que, agrupadas por *pares*, en el órden de magnitud decreciente, los productos binarios de aquellas raices pudieran determinarse con suma facilidad y prontitud. Importa, pues, áun cuando no sea nunca de necesidad absoluta, determinar los valores de las raices por un procedimiento algo más expedito que el general, en el presente y otros casos parecidos: y para esto sirve la descomposicion de la ecuacion propuesta en trinomios reales de segundo grado.

Pero, conocidos ya los valores de v_0 y v'_0, ¿será siempre factible determinar los de f_0 y f'_0 por las fórmulas adecuadas al objeto, insertas en el (§. 17)? ¿por las (a) y (b) del (§. 18) en este caso?—De ningun modo. Los valores de v_0 y v'_0, que acabamos de encontrar, como si se tratase del cálculo de los módulos de las raices imaginarias, pueden ser *positivos* ó *negativos;* y respecto á los verdaderos signos que debemos anteponerles estamos en la más completa ignorancia. Lo único que el signo del último término de la ecuacion (2^0) nos revela es que *una* ó *tres* de sus raices son *negativas:* que si v_0 es positivo, v'_0 será negativo, y viceversa; y con esto sólo no sabemos lo bastante para proceder, con plena seguridad de acierto, á la investigacion de los valores de f_0 y f'_0.

Prescindamos, pues, de la ecuacion (2^0), ya que en su resolucion tropezamos por todas partes con dificultades imprevistas y de índole extraña y como rebelde al análisis, y fijemos por un momento la atencion en la (2^1): resuelta la segunda, como resuelta puede considerarse tambien aquella de donde procede.

De la transformada (2^1) deduciremos los valores de v_2 y v'_2, *positivos ambos* con toda seguridad, como dedujimos los de v_0 y v'_0, de signo incierto y desconocido; por las fórmulas citadas del (§. 18), ó por el procedimiento explicado en el (§. 13), que es en este caso todavía más sencillo, calcularemos los de f_2 y f'_2: con lo cual la descomposicion en trinomios de segundo grado de la ecuacion (2^1) queda verificada; de estos trinomios, $x^2+f_2x+v_2$ y $x^2+f'_2x+v'_2$, por las fórmulas (42), se deducirán los valores de a^2, b^2, c^2 y d^2; y los de a, b, c y d se concluirán inmediatamente de estos últimos. La condicion de que la suma de estas cuatro *raices*, consideradas en el sentido vulgar algebráico, ha de ser igual en valor, pero de signo contrario, al coeficiente del segundo término de la ecuacion (2^0), bastará muchas veces para determinar los signos de las cuatro; y, si esta condicion no fuese suficiente, la sustitucion en la ecuacion (2^0) de los valores numéricos encontrados, indicará el sentido en que deben tomarse, y disipará cualquier duda que sobre este punto reinare todavía.

Compendiemos en el más breve espacio posible las diversas operaciones que para resolver la ecuacion (2^0) deben por este procedimiento verificarse.

De la (2^1) se deduce que

$$2^3\times\log v_2 = 28.6102787;\ \text{y}\ 2^3\times\log v_2 v'_2 = 31.1902400.$$

Los valores de v_2 y v'_2, de estas ecuaciones resultantes, son los siguientes:

$$v_2 = 3769.5098; \text{ y } v'_2 = 2.1013345.$$

Y por las fórmulas (a) y (b) del (§. 18), ó por el método del (§. 13), se deduce luégo que

$$f_2 = 122.98009; \text{ y } f_2' = 3.019909.$$

Con esto, la ecuacion (2^1) se halla ya descompuesta en dos trinomios de segundo grado, cuya resolucion en factores de primero se verificará con auxilio de las fórmulas (42), segun á continuacion se indica:

Primer trinomio.

$$\frac{2\sqrt{v_2}}{f_2} = \text{sen}\,\varphi_2$$

$$\begin{aligned}
\log v_2 &= 3.5762848 \\
\log \sqrt{v_2} &= 1.7881424 \\
\log 2 &= 0.3010300 \\
\text{c.}^{\text{o}} \log f_2 &= \bar{3}.9101652 \\
\log \text{sen}\,\varphi_2 &= \bar{1}.9993376 \\
\varphi_2 &= 86^\circ 50' 11.''0 \\
{}^1/_2\,\varphi_2 &= 43^\circ 25'\ 5.''5 \\
\log.\text{tang}\,{}^1/_2\,\varphi_2 &= \bar{1}.9760081 \\
\log \sqrt{v_2} &= 1.7881424 \\
\log a^2 &= 1.8121343 \\
\log b^2 &= 1.7641505
\end{aligned}$$

Segundo trinomio.

$$\frac{2\sqrt{v'_2}}{f'_2} = \text{sen}\,\varphi_2'$$

$$\begin{aligned}
\log v'_2 &= 0.3224952 \\
\log \sqrt{v'_2} &= 0.1612476 \\
\log 2 &= 0.3010300 \\
\text{c.}^{\text{o}} \log f'_2 &= \bar{1}.5200061 \\
\log.\,\text{sen}\,\varphi'_2 &= \bar{1}.9822837 \\
\varphi'_2 &= 73^\circ 44' 43.''6 \\
{}^1/_2\,\varphi'_2 &= 36^\circ 52' 21.''8 \\
\log.\text{tang}\,{}^1/_2\,\varphi'_2 &= \bar{1}.8751059 \\
\log \sqrt{v'_2} &= 0.1612476 \\
\log c^2 &= 0.2861417 \\
\log d^2 &= 0.0363535
\end{aligned}$$

Y, encontrados ya los logaritmos de a^2, b^2, c^2 y d^2, ó resuelta la ecuacion (2^1), como resuelta puede, en efecto, considerarse la (2°). Avanzando un paso más, conclúyese finalmente que

$$\log a = 0.9060671 \qquad \log c = 0.1430708$$
$$\log b = 0.8820752 \qquad \log d = 0.0181767$$

$$a = 8.055030 \qquad c = 1.390179$$
$$b = 7.622110 \qquad d = 1.042742$$

¿Cuáles son los signos de estas cuatro raices?—Negativo el de la primera, ó mayor en absoluto; y positivo el de las otras tres: de otra manera no es posible que la suma de las cuatro sea igual al número $+2$, ó al coeficiente del segundo término de la ecuacion (2°), tomado con signo contrario, como debe serlo muy aproximadamente, si en el cálculo de estas raices no se ha cometido algun error de cuantía.

CAPITULO V.

Resolucion de la ecuacion numérica del grado $2n$, cuyas raices, reales é imaginarias, son desiguales, ó sensiblemente discrepantes unas de otras.

§. 25.

Enunciado del problema y condiciones previas á su resolucion.

Rigurosamente considerado el asunto, la solucion del problema que nos ocupa hállase implícitamente contenida en los capítulos anteriores; siendo menester únicamente para completarla é ilustrarla resumir y generalizar cuanto en las páginas precedentes, en diversos casos particulares y bajo de aspectos muy distintos, queda ya expuesto y muy al pormenor detallado.

Consideremos para ello el caso general de contener la ecuacion propuesta, que se trata de resolver, simultáneamente raices reales é imaginarias; pero con la doble restriccion, por de pronto, de que las raices de ambas especies sean *desiguales*, y de que, distribuidas las reales, por su órden de magnitud absoluta, en distintos *pares*, ningun módulo de las imaginarias se halle comprendido entre las dos raices componentes de cada *par*.—Luégo se examinarán y discutirán los casos excepcionales en que estas condiciones previas fallen ó no se verifiquen.

Multiplicando, si fuere menester, por x la ecuacion propuesta, su *grado* podrá representarse por $2n$, y será susceptible de resolverse ó descomponerse en n trinomios reales de segundo grado, de la forma $x^2 + fx + v$; y tambien en dos solos factores ó polinomios de la misma especie: uno, del grado $2p$, que contendrá todas las raices reales; y otro, del grado $2q$, todas las imaginarias.—Los valores de v son las verdaderas incógnitas del problema; pues, si por cualquier medio conseguimos determinarlos, los de f se deducirán luégo, sin dificultad teórica, por el procedimiento en los dos últimos capítulos latamente referido.

Téngase ahora muy presente que estos valores de v deben y pueden considerarse como *productos binarios* de dos raices reales, a y b; ó como cuadrados del módulo comun de dos imaginarias, *conjugadas*. Y si las raices de la primera especie, escritas por órden de magnitud decreciente, y distribuidas por *pares*, son éstas:

$$a_1 \text{ y } b_1, \quad a_2 \text{ y } b_2, \quad a_3 \text{ y } b_3, \ \ldots\ldots;$$

y las de la segunda, por el órden de magnitud de sus módulos y pares de conjugadas, estas otras:

$$g_1(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_1), \quad g_2(\cos\varphi_2 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_2), \ \ldots\ldots;$$

los diversos valores de v, correspondientes á los n trinomios de segundo grado, en que pretendemos descomponer la ecuacion primitiva, podrán representarse del siguiente modo:

$$v_1 = a_1 b_1; \quad v_2 = a_2 b_2; \ \ldots\ldots; \quad V_1 = g_1^2; \quad V_2 = g_2^2; \ \ldots\ldots$$

Y, si entre las magnitudes de estos valores de v establecemos, por ejemplo, la relacion ó dependencia

$$v_1 > V_1 > V_2 > v_2 > V_3 > \ldots\ldots,$$

conviene advertir que no sólo, por hipótesis, g_2^2 será mayor que el producto $a_2 b_2 (= v_2)$; sino g_2 mayor tambien que a_2 y que b_2; y no sólo g_3^2 menor que el mismo producto $a_2 b_2 (v_2 > V_3)$, sino menor que a_2 y que b_2. De esta manera ninguno de los módulos consecutivos, g_2 y g_3, se hallará comprendido entre dos raices reales, consecutivas tambien, a_2 y b_2: conforme piden las condiciones preliminares del problema, poco ántes enunciadas.

§. 26.

Resolucion del problema en dos distintos supuestos, ambos muy amplios ó generales.

(a)—Figurémonos ahora que la ecuacion propuesta procede del producto de otras dos ecuaciones, una que contenga todas sus raices reales, y la otra todas las imaginarias. La transformada, cuyas raices sean las potencias del grado m de las raices de la primitiva, podrá tambien considerarse como procedente de la multiplicacion de otras dos ecuaciones análogas: una, cuyas raices serán las potencias m de las raices reales que nos proponemos determinar; y, otra, las potencias del mismo grado de las imaginarias. Estas dos últimas ecuaciones, componentes de la final, y respectivamente de los grados $2p$ y $2q$, á condicion de ser $2p + 2q = 2n$, pueden representarse como sigue, en virtud de todo lo expuesto en los lugares oportunos de los dos primeros capítulos: (51)

$$x^{2p} + P_1 x^{2p-1} + P_2 x^{2p-2} + P_3 x^{2p-3} + P_4 x^{2p-4} + \ldots\ldots = 0, \text{ y}$$

$$x^{2q} + Q_1 x^{2q-1} + Q_2 x^{2q-2} + Q_3 x^{2q-3} + Q_4 x^{2q-4} + \ldots\ldots = 0:$$

en las cuales debe entenderse que

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= [a_1{}^{\mathrm{m}}] = a_1{}^{\mathrm{m}} + b_1{}^{\mathrm{m}} + a_2{}^{\mathrm{m}} + b_2{}^{\mathrm{m}} + \ldots\ldots \\
P_2 &= [a_1{}^{\mathrm{m}}\, b_1{}^{\mathrm{m}}] = a_1{}^{\mathrm{m}}\, b_1{}^{\mathrm{m}} + a_1{}^{\mathrm{m}}\, a_2{}^{\mathrm{m}} + \ldots\ldots \\
P_3 &= [a_1{}^{\mathrm{m}}\, b_1{}^{\mathrm{m}}\, a_2{}^{\mathrm{m}}] = a_1{}^{\mathrm{m}}\, b_1{}^{\mathrm{m}}\, a_2{}^{\mathrm{m}} + a^{\mathrm{m}}\, b_1{}^{\mathrm{m}}\, b_2{}^{\mathrm{m}} + \ldots\ldots \\
P_4 &= [a_1{}^{\mathrm{m}}\, b_1{}^{\mathrm{m}}\, a_2{}^{\mathrm{m}}\, b_2{}^{\mathrm{m}}] = a_1{}^{\mathrm{m}}\, b_1{}^{\mathrm{m}}\, a_2{}^{\mathrm{m}}\, b_2{}^{\mathrm{m}} + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}, \text{ y}$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= [f'_{\mathrm{m}}] \\
Q_2 &= [g_1{}^{2\mathrm{m}}] + [f'_{\mathrm{m}}\, f''_{\mathrm{m}}] \\
Q_3 &= [g_1{}^{2\mathrm{m}}\, f'_{\mathrm{m}}] + [f'_{\mathrm{m}}\, f''_{\mathrm{m}}\, f'''_{\mathrm{m}}] \\
Q_4 &= [g_1{}^{2\mathrm{m}}\, g_2{}^{2\mathrm{m}}] + [g_1{}^{2\mathrm{m}}\, f''_{\mathrm{m}}\, f'''_{\mathrm{m}}] + [f'_{\mathrm{m}}\, f''_{\mathrm{m}}\, f'''_{\mathrm{m}}\, f^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{m}}] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

Y multiplicándolas una por otra, é igualando á *cero* su producto, obtendremos la transformada de la ecuacion primera, ó la ecuacion cuyas raices son las potencias m de las mismas raices de aquella que tratamos de resolver. Esta ecuacion, derivada de la primitiva por la regla general del §. 3, y en cuyo exámen debemos ocuparnos, es la siguiente (52):

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
x^{2\mathrm{n}} + P_1 & x^{2\mathrm{n}-1} + \ P_2 & x^{2\mathrm{n}-2} + \ P_3 & x^{2\mathrm{n}-3} + \ P_4 & x^{2\mathrm{n}-4} + \ldots = 0. \\
+ Q_1 & + P_1\, Q_1 & + P_2\, Q_1 & + P_3\, Q_1 & \\
 & + \ Q_2 & + P_1\, Q_2 & + P_2\, Q_2 & \\
 & & + \ Q_3 & + P_1\, Q_3 & \\
 & & & + \ Q_4 &
\end{array}$$

Pero, ántes de pasar más adelante, advirtamos ó recordemos tres cosas.

Primera: que el signo [.....] lo es de *suma* de las cantidades que compendia ó simboliza, combinadas entre sí y repetidas de cuantas maneras distintas sea factible verificarlo.

Segunda: que el producto de estas cantidades simbólicas se efectúa como el de las ordinarias comprendidas dentro del corchete ó paréntesis, en términos, por ejemplo, de que

$$P_3 Q_1 = [a_1^m b_1^m a_2^m f'_m];$$

$$P_2 Q_2 = [a_1^m b_1^m g_1^{2m}] + [a_1^m b_1^m f'_m f''_m]; \ldots\ldots$$

Y, tercera: que entre los símbolos f y g existe la relacion $f_m^{(k)} = 2 g_k^{\,m} \times \cos m \varphi_k$: en la cual la letra k indica, en ambos miembros, un número de órden, ó el *par* de raices imaginarias á que las f y g se refieren.

Prévias estas advertencias, veamos si la ecuacion (52), muy complicada en la forma, admite algunas notables simplificaciones.

En el coeficiente de su tercer término $(P_2 + P_1 Q_1 + Q_2)$ figura la suma $[f'_m f''_m]$, incomparablemente menor que la $[g_1^{2m}]$, conforme aumenta el valor de m, por razones muy al por menor consignadas en el Capítulo II de esta *Memoria*, y que seria ocioso repetir.

En el del cuarto término de la misma ecuacion se advertiría ó concluiría tambien sin dificultad que, con relacion á la suma $[a_1^m g_1^{2m}]$, la $[a_1^m f'_m f''_m]$ es de todo punto insignificante, lo mismo que la $[f'_m f''_m f'''_m]$ con respecto á la $[g_1^{2m} f''_m]$.

Y en el coeficiente del quinto término podrán igualmente tildarse por insignificantes ó despreciables, cuando m represente un número entero muy elevado, las sumas $[a_1^m b_1^m f'_m f''_m]$, $[a_1^m f'_m f''_m f'''_m]$, $[g_1^{2m} f''_m f'''_m]$ y $[f'_m f''_m f'''_m f^{\text{IV}}_m]$, en cotejo de las $[a_1^m b_1^m g_1^{2m}]$, $[a_1^m g_1^{2m} f'_m]$ y $[g_1^{2m} g_2^{2m}]$.

En vez de la (52) podremos, en consecuencia, escribir esta otra ecuacion, algo más sencilla ó reducida: (53)

$$x^{2n} + C_1 x^{2n-1} + C_2 x^{2n-2} + C_3 x^{2n-3} + C_4 x^{2n-4} + \ldots\ldots = 0:$$

en la cual, (54)

$$C_1 = [a_1^m] + [f'_m];$$

$$C_2 = [a_1^m b_1^m] + [a_1^m f'_m] + [g_1^{2m}];$$

$$C_3 = [a_1^m b_1^m a_2^m] + [a_1^m b_1^m f'_m] + [g_1^{2m} f''_m];$$

$$C_4 = [a_1^m b_1^m a_2^m b_2^m] + [a_1^m b_1^m a_2^m f'_m] + [a_1^m b_1^m g_1^{2m}] + [g_1^{2m} g_2^{2m}];$$

....

....

En los coeficientes, C, de esta nueva ecuacion es evidente que las sumas [.....], compuestas de solas raices reales, como $[a_1^m\, b_1^m\, a_2^m]$; de solos módulos de imaginarias, como $[g_1^{2m}\, g_2^{2m}]$; ó de raices reales combinadas con módulos de imaginarias, como $[a_1^m\, b_1^m\, g_1^{2m}]$, propenden, conforme m aumenta indefinidamente, á confundirse con sus primeros términos: por hipótesis, los mayores. Pero las sumas en cuya composicion figura alguna f, por la variabilidad en magnitud y signo de estas cantidades, no es fácil, en principio, saber hacia dónde convergen, ó de qué modo influyen sobre las demas y sobre el valor final del coeficiente á que corresponden.—La duda, sin embargo, se desvanece si exclusivamente nos fijamos en los coeficientes de órden ó lugar *impar*, tercero, quinto, etc., etc., de la expresada ecuacion (53).

Por ejemplo, el coeficiente, C_2, del tercer término propende á confundirse con esta otra expresion más sencilla:

$$a_1^m\, b_1^m + [a_1^m\, f'_m] + g_1^{2m}$$

Pero la suma $[a_1^m\, f'_m]$ es inferior á $2\, a_1^m\, g_1^m\, [\cos m\, \varphi_1]$; y esta última expresion, si $g_1^2 > a_1\, b_1$, y $g_1 > a_1$, será despreciable con respecto á g_1^{2m}: ó con respecto á $a_1^m\, b_1^m$, si las relaciones contrarias de magnitud, entre g_1, y a_1 y b_1, se verifican. Luego aquel coeficiente puede, en el *límite*, ó cuando m sea muy grande, considerarse reducido á $a_1^m\, b_1^m$ ó á g_1^{2m}: á v_1^m ó á V_1^m.

Pues el coeficiente del quinto término se presta á una reduccion ó simplificacion parecida.

Por de pronto aquel coeficiente puede ser escrito como sigue:

$$a_1^m\, b_1^m \times a_2^m\, b_2^m + a_1^m\, b_1^m \times g_1^{2m} + g_1^{2m} \times g_2^{2m}$$
$$+ [a_1^m\, b_1^m\, a_2^m\, f'_m] + [a_1^m\, g_1^{2m}\, f'_m].$$

Y como entre los dos pares de raices reales (a_1 y b_1) y (a_2 y b_2), y los dos módulos, g_1 y g_2, no pueden establecerse más condiciones, compatibles con las preliminares del problema (§. 25), que éstas: (55)

$$a_1^m\, b_1^m > a_2^m\, b_2^m > g_1^{2m} > g_2^{2m}, \text{ y } a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > g_1 > g_2;$$

$$a_1^m\, b_1^m > g_1^{2m} > g_2^{2m} > a_2^m\, b_2^m, \text{ y } a_1 > b_1 > g_1 > g_2 > a_2 > b_2;$$

$$a_1^m\, b_1^m > g_1^{2m} > a_2^m\, b_2^m > g_2^{2m}, \text{ y } a_1 > b_1 > g_1 > a_2 > b_2 > g_2; \text{ y}$$

$$g_1^{2m} > g_2^{2m} > a_1^m\, b_1^m > a_2^m\, b_2^m, \text{ y } g_1 > g_2 > a_1 > b_1 > a_2 > b_2,$$

resulta que, segun los casos, aquel coeficiente, dividido por $a_1^m\, b_1^m \times a_2^m\, b_2^m$, ó por $a_1^m\, b_1^m \times g_1^{2m}$, ó por $g_1^{2m} \times g_2^{2m}$, propenderá en el *límite* hacia la unidad. Luego el coeficiente, sin modificacion alguna previa, propende, ó hacia el límite $v_1^m\, v_2^m$, ó el $v_1^m\, V_1^m$, ó el $V_1^m\, V_2^m$: en suma, hacia el producto de los dos valores de v, de magnitud absoluta mayor, elevado á la potencia m.

El espíritu de la demostracion es de tal índole, que si la ecuacion (53) la suponemos procedente de la propuesta, resuelta en trinomios de segundo grado, de la forma x^2+fx+v; y si el término v le suponemos procedente tambien de la combinacion, por *pares*, ordenados por su magnitud, de raices reales, ó de dos imaginarias conjugadas, concluiremos de todo lo dicho que, cuando m sea muy grande,—aproximadamente cuándo menos:

$$(56)\left\{\begin{array}{l} C_2 \quad = v_1{}^m \\ C_4 \quad = v_1{}^m\, v_2{}^m \\ C_6 \quad = v_1{}^m\, v_2{}^m\, v_3{}^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{2r} \quad = v_1{}^m\, v_2{}^m \ldots\ldots v_r{}^m \\ C_{2r+2} = v_1{}^m\, v_2{}^m \ldots\ldots v_r{}^m\, v_{r+1}{}^m \\ C_{2r+4} = v_1{}^m\, v_2{}^m \ldots\ldots v_r{}^m\, v_{r+1}{}^m\, v_{r+2}{}^m. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En el caso, pues, que examinamos, general hasta *cierto punto*, ó en que la ecuacion propuesta contenga raices reales é imaginarias, *desiguales* todas, y relacionadas las reales con los módulos de las imaginarias en los términos bien explícitamente referidos (§. 25), los distintos valores de v, de los cuales dependen (Capítulo III) los de f, se deducirán utilizando los coeficientes de lugar *impar*, ó de las potencias *pares* de x, correspondientes á la última ecuacion transformada de la primitiva, por las mismas reglas, compendiadas en el grupo de relaciones (56), que las raices reales, ó los módulos de las imaginarias, se determinaban en los dos casos extremos y más sencillos, ó cuando la ecuacion propuesta sólo contenía raices de una ú otra especie.

(b)—Advirtamos ademas que si las $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_r, \ldots\ldots$, corresponden á distintos pares de raices imaginarias conjugadas, y la v_{r+1} á dos raices reales distintas, a y b, siendo $a > b$, no sólo los coeficientes C_2, C_4, $C_6 \ldots\ldots C_{2r}$ propenderán hacia determinados *límites*, conforme la potencia m á que sucesivamente se van elevando las raices de la ecuacion propuesta aumente, sino que de análoga propiedad disfrutará el coeficiente C_{2r+1}.

Este coeficiente puede, en efecto, considerarse como deducido del anterior, combinando con él, por vía de multiplicacion y suma sucesivas, las dos raices reales a y b; y todas las demas de su especie, inferiores á ellas en magnitud, que la ecuacion propuesta contuviere; y cuantas imaginarias, de módulo asimismo inferior á las a y b, contenga todavía: elevadas todas á la potencia m. Y como en la suma de cuantos productos distintos, de $2r+1$ factores cada uno, pueden formarse con las $2n$ raices de la ecuacion propuesta, ó de su derivada final, será el predominante con exceso el primero de los ahora considerados, resulta que el coeficiente C_{2r+1} propenderá, conforme m varíe y aumente, á confundirse con el $C_{2r} \times a^m$.—Por lo tanto, las potencias m de las dos raices reales a y b, y no sólo la de su producto v_{r+1}, se hallarán en este caso, como en el más sencillo que pudiera proponerse, ya considerado en el Capítulo I, dividiendo sucesivamente los coeficientes C_{2r+1} por C_{2r}, y C_{2r+2} por C_{2r+1}.

Pero, si en vez de representar v_{r+1} un producto de dos raices reales consecutivas, a y b, representase el cuadrado del módulo comun de dos imaginarias conjugadas, en la composicion del coeficiente C_{2r+1} figuraría un término igual á $C_{2r} \times 2\, g_{r+1}{}^m \cos m\, \varphi_{r+1}$: término, por regla general, de magnitud y signo variable; que predominará sobre todos los demas, cuando m sea muy grande y $\cos m\, \varphi$ muy poco discrepante de la unidad; y de cuyo signo, indeterminable *à priori*, dependerá entónces el de C_{2r+1}.

Y este mismo valor extremo, $2\, C_{2r} \times (v_{r+1})^{\frac{m}{2}}$, pero de signo invariable, sería tambien en el límite el del coeficiente C_{2r+1}, si las dos raices reales, a y b, fuesen iguales, en vez de diferenciarse sensiblemente, una de otra, como poco ántes supusimos.

Cuando la ecuacion del grado $2n$, que se trata de resolver, contenga raices reales é imaginarias, resulta, pues, de cuanto se acaba de exponer y discutir:

1.° Que los coeficientes de lugar *impar* de las transformadas sucesivas serán todos positivos, y propenderán á convertirse en potencias exactas de los diversos productos que con las distintas v pueden formarse.

2.° Que el coeficiente de lugar *par*, anterior al primer coeficiente de lugar impar en cuya composicion entre un producto de dos raices reales,—como el C_{2r+1}, anterior al C_{2r+2},—propenderá tambien á confundirse con una potencia exacta del producto de las v anteriores, multiplicado por la mayor de las dos raices a.

Y 3.° Que el mismo coeficiente de lugar *par*, seguido de otro impar, en cuya composicion figure un nuevo módulo de dos raices imaginarias, variará contínuamente en magnitud y en signo, sin tendencia ó propension á confundirse con ninguna potencia exacta de cantidades reales.—El cambio de signo en las transformadas sucesivas es indicio seguro, como ya tantas otras veces hemos repetido, de que la ecuacion propuesta contiene raices imaginarias.

§. 27.

Estudio de los casos excepcionales, no comprendidos en el párrafo anterior.

Examinemos ahora algunos de los varios casos excepcionales de que en totalidad prescindimos al principio del presente capítulo (§. 25), para simplificar la exposicion de este complicado asunto. Aunque el análisis y discusion de tales casos parezcan, por de pronto, incompletas y poco generales, advertiráse luégo sin esfuerzo que las mismas consideraciones y razonamientos pueden fácilmente ampliarse á cuantos otros casos y dificultades de índole análoga surgieren en la práctica. Más que á prever y discutir cuantas anomalías en la materia de que tratamos son imaginables, propenderán las siguientes advertencias y reflexiones, á familiarizar al lector con los principios del método que debe observar para interpretarlas recta y prontamente, donde y cuando quiera que se presenten.

(a)—Supongamos, en primer lugar, que la ecuacion propuesta tenga tres raices iguales á a, y otra simple, b; y que

$a > b$. En la composicion de aquella ecuacion primitiva figurará entónces necesariamente el producto

$$(x + a)^3 \times (x + b) =$$

$$x^4 + (3\,a + b)\,x^3 + (3\,a^2 + 3\,a\,b)\,x^2 + (3\,a^2\,b + a^3)\,x + a^2\,b;$$

y en la de la ecuacion, transformada, cuyas raices sean las potencias m de la primera, este otro:

$(x + a^{m})^3 \times (x + b^{m})$: cuyo *límite*, admitida la

desigualdad de valores de a y de b, es el siguiente:

$$(57) \qquad x^4 + 3\,a^{m}\,x^3 + 3\,a^{2m}\,x^2 + a^{3m}\,x + a^{3m}\,b^{m}.$$

Si las primeras v, desde la v_1 hasta la v_r, son independientes de estas dos raices a y b, el coeficiente C_{2r} podrá escribirse del siguiente modo, conforme lo en el caso general y párrafo precedente expuesto:

$$C_{2r} = v_1^{m}\,v_2^{m}\,v_3^{m}\,\ldots\ldots\,v_r^{m}.$$

Y, para pasar de este coeficiente á los sucesivos, ya dependientes de a y de b, bastará combinarle de todas las maneras posibles con la raiz triple a^{m}, y la simple b^{m}, primero; con los productos *binarios, ternarios* y *cuaternarios* de estas mismas raices, luégo; y conservar, por último, en las sumas de productos así resultantes, únicamente los términos como de *órden superior*, y que en cierto modo representan los *límites* hácia los cuales las mencionadas sumas propenden. Procediendo así, obtiénense sin dificultad los siguientes resultados: los mismos que se hubieran obtenido multiplicando el coeficiente C_{2r} por los coeficientes del anterior polinomio, á contar del segundo:

$$(58)\quad \begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times 3\,a^{m}; \\ C_{2r+2} = C_{2r} \times 3\,a^{2m}; \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times a^{3m}; \quad \text{y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{3m}\,b^{m}. \end{cases}$$

De donde se deduce que, (59)

$$\frac{C_{2r+1}}{C_{2r}} = 3a^{m};\ \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}} = a^{m};\ \frac{C_{2r+3}}{C_{2r+2}} = \frac{1}{3}a^{m};\ \text{y}\ \frac{C_{2r+4}}{C_{2r+3}} = b^{m}.$$

Resultados que comprenden, sin ambigüedad de ningun género, los caractéres de *multiplicidad* de la raiz a, y las reglas á que debemos atenernos para determinar los valores de a y de b: reglas que en nada discrepan de las generales, anteriormente deducidas.

Ni se complica la cuestion, poco ni mucho, por suponer que a sea *menor* que b, en vez de suponerla mayor, como en un principio admitimos. Porque en esta segunda hipótesis reemplazarían, al polinomio (57) este otro:

$$(60)\qquad x^{4} + b^{m}\,x^{3} + 3\,a^{m}\,b^{m}\,x^{2} + 3\,a^{2m}\,b^{m}\,x + a^{3}\,b^{m};$$

á los coeficientes del cuadro (58) los que siguen, obtenidos por la combinacion de C_{2r} con los coeficientes del (60):

$$(61)\quad \begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times b^{m}; \\ C_{2r+2} = C_{2r} \times 3\,a^{m}\,b^{m}; \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times 3\,a^{2m}\,b^{m}; \quad \text{y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{3m}\,b^{m}; \end{cases}$$

y á los cocientes (59) los (62), igualmente notables por el órden en que se suceden y las relaciones de magnitud de las cantidades que representan:

$$(62)\ \frac{C_{2r+1}}{C_{2r}}=b^{m};\ \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}}=3a^{m};\ \frac{C_{2r+3}}{C_{2r+2}}=a^{m};\ \text{y}\ \frac{C_{2r+4}}{C_{2r+3}}=\frac{1}{3}a^{m}.$$

La existencia, pues, de raices *iguales* en la ecuacion propuesta, ni complica apénas la solucion general de la misma ecuacion, ni puede ser causa de notable ambigüedad ó duda al interpretar los distintos resultados que se obtuvieren, procediendo, por de pronto, como á ciegas en la investigacion de todas las raices.

(b)—Y, en segundo lugar, continuemos suponiendo que la ecuacion propuesta contenga una raiz real, g, igual al módulo de dos imaginarias conjugadas, *asociada* con otra, a, real tambien y menor que g: ó, en más sucintos términos, supongamos que en la composicion de la ecuacion primitiva figura este producto:

$$(x^2+fx+g^2)(x+g)(x+a),$$

ó el polinomio equivalente

$$x^4+(a+f+g)x^3+(ag+af+fg+g^2)x^2+(afg+ag^2+g^3)x+ag^3.$$

En la ecuacion final, transformada de la primera, entrará tambien como factor este otro polinomio: (63)

$$x^4+(a^m+f_m+g^m)x^3+(a^m g^m+a^m f_m+g^m f_m+g^{2m})x^2+$$
$$(a^m g^m f_m+a^m g^{2m}+g^{3m})x+a^m g^{3m}.$$

Y precisamente los coeficientes de este polinomio, á contar del segundo, son los que deben combinarse por vía de multiplicacion con el C_{2r} para hallar los coeficientes *límites* sucesivos de la ecuacion transformada que se busca. En efecto: si los valores de v, desde v_1 hasta v_r, son independientes de las cuatro raices,—dos imaginarias y dos reales,—á que ahora atendemos, del valor de C_{2r} se deducirán los de C_{2r+1}, C_{2r+2}, ..., multiplicando el primero, sucesivamente, por aquellas cuatro raices, que son las mayores de su especie, no consideradas todavía, y reuniendo en una suma los cuatro productos así obtenidos; y verificando despues operaciones análogas con los productos *binarios*, *ternarios* y *cuaternario* de las mismas raices. Los resultados finales, suponiendo ya muy elevado el valor de m, puede, sin error sensible, admitirse que se reducen á estos:

$$(64)\quad \begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times (a^m + f_m + g^m); \\ C_{2r+2} = C_{2r} \times (a^m g^m + a^m f_m + g^m f_m + g^{2m}); \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times (a^m g^m f_m + a^m g^{2m} + g^{3m}); \text{ y} \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^m g_3^{\,m}. \end{cases}$$

Pero, llegados á este punto, conviene advertir que el coeficiente $a^m + f_m + g^m$ es indeterminado en magnitud y en signo.—En efecto: por ser $g > a$, conforme m aumente, la potencia a^m adquirirá un valor relativo cada vez menor, y despreciable al fin, comparada con la g^m; y el trinomio considerado redúcese entónces al binomio $f_m + g^m$. Pero el término f_m puede variar entre $-2g^m$ y $+2g^m$: luego la indeterminacion del trinomio, y, por lo tanto, del coeficiente á que corresponde, C_{2r+1}, es inevitable en el curso de las transformaciones sucesivas de la ecuacion propuesta.

Lo propio sucede con el coeficiente C_{2r+2}.—Porque, en el *límite*, el polinomio $a^m g^m + a^m f_m + g^m f_m + g^{2m}$ se reduce al binomio $g^m f_m + g^{2m}$; y, como el primer término de este binomio puede variar entre $-2g^{2m}$ y $+2g^{2m}$ no hay medio en realidad de asignar límite alguno hácia el cual propenda el mencionado coeficiente.

Mas el C_{2r+3} tiene un valor final determinado: porque en el polinomio $a^m g^m f_m + a^m g^{2m} + g^{3m}$, el último término predomina al fin sobre todos los demás, hasta anularlos por completo casi. Y de la misma propiedad goza el C_{2r+4}, y por razon mucho más fácilmente perceptible todavía.

En resúmen: los cuatro coeficientes que en el caso ahora examinado siguen al C_{2r}, en la transformada (2^m). podrán escribirse de este modo:

$$(65)\quad \begin{cases} C_{2r+1} = (?); \\ C_{2r+2} = (?); \\ C_{2r+3} = C_{2r} \times g^{3m}; \quad y \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times g^{3m}\, a^{m}. \end{cases}$$

El carácter, pues, de este caso excepcional es el de presentarse en las transformadas sucesivas dos coeficientes *consecutivos*, indeterminados en magnitud y en signo. Mas, prescindiendo de estos dos coeficientes, rebeldes al análisis, los valores de g y de a se deducen inmediatamente, de los dos siguientes y del anterior á ellos, por el procedimiento sencillísimo y general ántes expuesto.

Si en vez de suponer que $g > a$, admitiésemos que $a > g$, al cuadro de relaciones algebráicas (65) reemplazaría este otro:

$$(66)\quad \begin{cases} C_{2r+1} = C_{2r} \times a^{m}; \\ C_{2r+2} = (?) \\ C_{2r+3} = (?) \\ C_{2r+4} = C_{2r} \times a^{m}\, g^{3m}: \end{cases}$$

y las consecuencias de su análisis serían las mismas que en la hipótesis anterior.

(*c*)—No *dos* coeficientes consecutivos, sino *tres*, *cinco*, ..., coeficientes, variables con incesante irregularidad, nos resultarían en las transformadas sucesivas, si, en tercer lugar, considerásemos el caso de que la ecuacion propuesta contuviese *dos*, *tres*, ... *pares* de raices imaginarias, no precisamente iguales, sino dotadas del mismo módulo: como, despues de todo lo expuesto y referido, sería fácil tarea, aunque un poco larga y fastidiosa, demostrar.

(*d*)—Y, por último, y para no insistir más en asunto tan sencillo en la práctica como difícil y complicado en teoría, por su mucha generalidad y variabilidad interminable, supongamos que entre dos raices reales, a y b, de la ecuacion propuesta, se halle comprendido el módulo, g, de dos imaginarias conjugadas.—En aquella ecuacion figuraría entónces el producto

$$(x^2 + f x + g^2)(x + a)(x + b),$$

equivalente á este polinomio:

$$x^4 + (a + b + f) x^3 + (a b + a f + b f + g^2) x^2 + (a b f + a g^2 + b g^2) x + a b g^2.$$

Y este polinomio, suponiendo que

$$(67) \qquad a > g > b,$$

se convierte en la última ecuacion, transformada de la primitiva, en el que sigue:

$$(68) \quad x^4 + (a^m + f_m) x^3 + (a^m b^m + a^m f_m + g^{2m}) x^2 + (a^m b^m f_m + a^m g^{2m}) x + a^m b^m g^{2m}.$$

Verificándose la doble condicion (67), puede, sin embargo, suceder que g^2 sea mayor que $a b$, ó menor, ó igual á este producto; pero en los tres casos el coeficiente de x^3, en el polinomio (68), propenderá hacia el *límite* a^m; el de x^2 resultará indeterminado, en magnitud y signo; y los de x^1 y x^0 propenderán evidentemente hacia los límites $a^m g^{2m}$ y $a^m b^m g^{2m}$.—Por lo tanto, suponiendo que los valores de v, desde v_1 hasta v_r inclusive, sean independientes de las cuatro raices que ahora consideramos, nos resultará que

$$(69) \left\{ \begin{array}{ll} C_{2r} & = v_1{}^m v_2{}^m v_3{}^m \ldots\ldots v_r{}^m; \\ C_{2r+1} & = C_{2r} \times a^m; \\ C_{2r+2} & = (?) \\ C_{2r+3} & = C_{2r} \times a^m g^{2m}; \qquad \text{y} \\ C_{2r+4} & = C_{2r} \times a^m b^m g^{2m} \end{array} \right.$$

Ó, en términos vulgares, nós resultará *indeterminado* un solo coeficiente de lugar *impar:* anomalía distinta de todas las advertidas en los demas casos excepcionales anteriormente examinados; pero de ninguna trascendencia en el asunto. Pues, prescindiendo de aquel coeficiente, nada más fácil y expedito que hallar los valores de a, g^2 y b, con auxilio de los otros dos inmediatos, anteriores y posteriores, entre los cuales se encuentra comprendido.

(*e*)—En conclusion: siempre que las raices, reales ó imaginarias, discrepen unas de otras sensiblemente, la aplicacion, hasta irreflexiva, más ó ménos veces reiterada de la regla del (§. 3), nos proporcionará una ecuacion, derivada de la propuesta, de cuyos coeficientes, *limitados* todos, ó alternativa, regular ó irregularmente, limitados ó indeterminados, podremos deducir los valores de aquellas raices, ó de sus módulos, ó de sus productos binarios, distribuidos por órden de magnitud. Y la solucion completa del problema no pide tampoco más que esto último, segun lo expuesto y demostrado en los dos capítulos anteriores.

Ni áun la condicion previa, en el presente admitida como necesaria para simplificar la exposicion del asunto,—la de que sea de grado *par* la ecuacion que se trata de resolver,—tiene importancia alguna, ni siquiera objeto, en la práctica: porque, aplicando cuantas veces fuere menester la regla del (§. 3), obtendremos siempre una nueva ecuacion, de cuyos coeficientes, *limitados*, en el sentido convencional atribuido á esta palabra, en totalidad ó sólo en parte, segun la naturaleza de las raices y las relaciones de magnitud que entre las reales y los módulos de las imaginarias existan, imposibles de prever por de pronto, se desprenderán luégo los valores de aquellas raices y de los módulos con ellas combinados y como inseparables en la ecuacion primitiva.

Bastará resolver un par de ejemplos muy sencillos para adquirir la certidumbre, en algun modo experimental, de lo que acabamos de decir, y penetrarse de la generalidad y fecundidad del método de investigacion y análisis expuesto. La prueba material no es necesaria, ni prueba nada apénas, tras el razonamiento teórico; pero tampoco suele pecar de ociosa nunca.

§. 28.

Ejemplos y síntesis del método.

(*a*)—Como primer ejemplo, propongámonos hallar las raices ó factores de la ecuacion

$$5\,x^3 + 7\,x^2 + 22 = 0,$$

equivalente á esta otra:

$$(2^0)\; x^3 + 1.4\,x^2 + 4.4 = 0.$$

Las dos primeras transformadas, directamente construidas por la regla del (§. 3), son las siguientes:

$$(2^1)\; x^3 + 1.96\,x^2 - 12.32\,x + 19.36 = 0; \quad \text{y}$$

$$(2^2)\; x^3 + 28.4816\,x^2 + 75.8912\,x + 374.8096 = 0.$$

El cambio de signo del coeficiente de x nos indica que no todas las raices de la ecuacion (2^0) son reales: y como una, por lo ménos, debe serlo, conclúyese que las otras dos serán imaginarias.

Reemplazando los coeficientes de la (2^2) por sus *logaritmos*, y aplicando luégo tres veces consecutivas la misma regla de derivacion de nuevas ecuaciones, obtiénense sin dificultad estos resultados:

$$(2^2)\; x^3 + 1.45456\,x^2 + 1.88019\,x + 2.57381 = 0$$

$$(2^3)\; x^3 + 2.81916\,x^2 - 4.19286\,x + 5.14762 = 0$$

$$(2^4)\; x^3 + 5.66839\,x^2 + 7.76185\,x + 10.29524 = 0$$

$$(2^5)\; x^3 + 11.33654\,x^2 - 16.17769\,x + 20.59048 = 0.$$

En la transformada (2^6) el coeficiente de x^2 sería igual al duplo del mismo coeficiente en la (2^5); el de x volvería á cambiar de signo: y el de x^0 se obtendría, como siempre, y lo mismo que el de x^2 ahora, por simple *duplicacion* del que le corresponde en la precedente. Las operaciones de transformacion ó derivacion terminan, pues, en la (2^5).

Y de esta ecuacion se concluye, sin dificultad, que

$$2^5 \times \log a = 11.33654\,; \quad \text{y} \quad 2^5 \times \log a\,b\,c = 20.59048$$

$$\text{ó}\ \left.\begin{aligned} \log a &= 0.354267 \\ \log b\,c &= 0.289186 \end{aligned}\right\}; \ \text{y} \ \left.\begin{aligned} a &= 2.26083 \\ (b\,c) = g^2 &= 1.94619 \end{aligned}\right\}.$$

Conocemos, pues, ya con esto la raiz real, a,—negativa en el sentido vulgar algebráico; y el cuadrado, g^2, del módulo de las dos imaginarias conjugadas. El valor de f, que al trinomio $x^2 + fx + g^2$ corresponde, se deduce en el ejemplo propuesto de esta sencillísima condicion:

$$+\,2.26083 + f = +\,1.4$$

Y, con el grado de aproximacion que el uso de las tablas logarítmicas de *cinco* cifras decimales permite obtener, conclúyese finalmente que

$$5\,(x^2 - 0.86083\,x + 1.94619)\,(x + 2.26083) = 5x^3 + 7x^2 + 22.$$

(b)—Algo más complicado que el anterior es el siguiente segundo ejemplo, que pasamos á resolver.

$$(2^0) \quad x^5 - 7\,x^4 + 103\,x^3 - x^2 - 1834\,x - 11824 = 0.$$

Reemplazando los coeficientes de esta ecuacion por sus logaritmos, y calculando luégo los de su primera transformada con *siete* cifras decimales, para evitar muy desde el principio la acumulacion de errores, obtiénense por de pronto, estos resultados:

$$(2^0)\quad x^5 - 0.8450980\,x^4 + 2.0128372\,x^3 - 0.0000000\,x^2 - 3.2633993\,x - 4.0727644 = 0$$

$$(2^1)\quad x^5 - 2.1958997\,x^4 + 3.8405452\,x^3 + 5.7350715\,x^2 + 6.5237345\,x + 8.1455288 = 0.$$

Limitemos ahora la aproximacion á la compatible con el uso de logaritmos de *cinco* cifras; y como de la ecuacion (2^0) se ha deducido la (2^1), así de ésta se desprenderán sucesivamente, y cada vez con mayor facilidad, las cuatro que siguen:

$$(2^2)\quad x^5 + 4.03322\,x^4 + 8.35271\,x^3 + 11.31186\,x^2 - 14.14851\,x + 16.29106 = 0$$

$$(2^3)\quad x^5 - 8.52377\,x^4 + 16.66313\,x^3 + 23.02486\,x^2 + 28.07188\,x + 32.58212 = 0$$

$$(2^4)\quad x^5 + 16.28980\,x^4 + 33.34053\,x^3 + 46.00544\,x^2 + 55.76589\,x + 65.16424 = 0$$

$$(2^5)\quad x^5 - 33.60217\,x^4 + 66.68102\,x^3 + 92.00979\,x^2 + 110.64963\,x + 130.32848 = 0.$$

Si de la última ecuacion nos propusiésemos todavía deducir la (2^6), advertiríamos: que el coeficiente de x^4 cambiaba otra vez de signo y conservaba su carácter ya manifiesto de indeterminacion ó variabilidad irregular; que los de x^3 y x^2 se obtenian, por el contrario, *duplicando* los de estas mismas potencias de x en la (2^5); y que el de x^1, como el de la x^4, continuaba indeterminado. Del último coeficiente no hay que preocuparse; pues en éste, como en cualquiera otro caso, obtiénese siempre dicho coeficiente por duplicacion del que le corresponde en la precedente transformada, con independencia completa de todos los demas.

De la ecuacion (2^5) sólo podremos, en consecuencia de lo advertido, utilizar *tres* coeficientes para resolver la (2°); y como ésta contiene *cinco* raices, la solucion resultará incompleta, por de pronto, y se limitará á determinar los valores aproximados de la única raiz *real*, que aquella ecuacion comprende, y de los dos módulos de sus cuatro raices imaginarias. A renglon seguido se expresan las ecuaciones de condicion que han de servir para esto, y los resultados finales que de ellas se desprenden:

$$\left.\begin{aligned} 2^5 \times \log ab &= 66.68102 \\ 2^5 \times \log abc &= 92.00979 \\ 2^5 \times \log abcde &= 130.32848 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} \log ab &= 2.083782 \\ \log c &= 0.791524 \\ \log de &= 1.197458 \end{aligned}\right\}; \text{ y}$$

$$ab = g^2 = 121.278; \quad c = 6.18764; \quad \text{y} \quad de = g_1^2 = 15.7564.$$

Para determinar ahora los valores de f y f_1, que á los de g^2 y g_1^2 corresponden, habría que considerar la ecuacion propuesta como de *sexto grado*, multiplicando para ello todos sus términos por x; y aplicar á esta investigacion las fórmulas (a'') y (b'') del (§. 18). Pero esto, que ya en otro ejemplo análogo se practicó, y que es lo más directo é irreprochable en teoría, puede, en casos como el presente, simplificarse y abreviarse en gran manera, por el método del (§. 13).

Si, en efecto, la ecuacion (2°) la consideramos como equivalente á esta otra:

$$(x^2 + fx + g^2)(x^2 + f_1 x + g_1^2)(x + c) = 0,$$

conclúyese por necesidad ineludible que

$$f + f_1 + c = -\quad 7, \quad \text{y}$$

$$g^2 g_1^2 + c g^2 f_1 + c g_1^2 f = -1834.$$

Luego los valores de f y f_1, despues de conocidos los de g^2, g_1^2 y c, dependen de la resolucion de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Sustituyendo por g^2 y

g_1^2 sus actuales valores, *positivos*, y por e el que le corresponde tambien, con signo contrario al de la *raiz algebráica* que representa, ó con el signo *ménos*, dedúcese de aquellas ecuaciones que

$$f = -6.66922, \quad \text{y} \quad f_1 = +5.85686.$$

La solucion de la ecuacion propuesta, (2°), queda así completada, con el grado de aproximacion, un poco exagerado ó ficticio tal vez, que las tablas auxiliares de logaritmos de *cinco* cifras consienten. Y si fuere menester ó conviniere cerciorarse de la exactitud de los cinco valores de g^2 y f_1, g_1^2 y f_1, y c, y rectificarlos, en caso de necesidad, habría que emplear el procedimiento y fórmulas, adecuadas al objeto, y en los párrafos (8) y (14) consignadas.—Sobre este punto no hay ya nada nuevo que advertir.

(c)—De mayor reparo es digna la aparente ligereza con que, del exámen de las transformadas sucesivas de la ecuacion (29), y, muy en particular, de la (2^5), hemos concluido que aquella primera ecuacion contenía *una* sola raiz real y *cuatro* imaginarias. ¿Por qué no serían reales *tres* é imaginarias *dos* únicamente? ¿Y por qué entónces el producto ab ó el de, en vez de representar el *cuadrado*, forzosamente *positivo*, de un módulo, no representaría el simple producto *binario* de dos raices reales, acaso *negativo*, contra lo supuesto en el cálculo posterior de f y f_1?

Repasemos muy por encima las diversas consideraciones teóricas en esta *Memoria* expuestas, con aplicacion al ejemplo de que ahora se trata; y no sólo resultará justificado lo que se acaba de practicar, sino que, tal vez, se disipe la ténue oscuridad que, al discurrir en el asunto, pudiera ofuscarnos todavía.

Si las cinco raices, —a, b, c, d y e,— de la ecuacion propuesta fuesen *reales*, los coeficientes de todas las transformadas serían *positivos*. No lo son todos: luego el primer supuesto resulta inadmisible.

Mas pudieran ser reales *tres*, y existir entre ellas y el módulo, g, de las otras *dos*, estas relaciones de magnitud absoluta:

$$a > b > c > g.$$

Pues en la transformada cuyas raices fuesen las de la propuesta, elevadas á la potencia m, conforme este número aumentase, se verificaría entónces: que el coeficiente del segundo término contendría la potencia m de a, superior con grandísimo exceso á las demas potencias ó cantidades con ella combinadas, por vía de adicion ó suma; que el del tercer término contendría la misma potencia, dotada de igual ó análoga propiedad, del producto binario ab; y que el del cuarto contendría la del producto ternario abc, incomparablemente mayor asimismo que las potencias m de los demas productos de este nombre que con las cinco raices pueden formarse. Y, por lo tanto, los tres coeficientes mencionados, variables de signo alguna vez, en las primeras transformadas, concluirían por ser *positivos*, y por convergir hácia *límites* determinados. Falla tambien la consecuencia en el ejemplo resuelto: luego la condicion previa, de donde lógicamente se desprende, debe calificarse de errónea é inadmisible.

É inadmisible sería análogamente cualquiera otra en que el módulo g no ocupase el primer lugar, por órden de magnitud, en las relaciones, parecidas á la anterior, que entre él y las raices reales se establecieren. Pues bastaría que a fuese mayor que g, áun cuando g superase á b y c, para que en el coeficiente del segundo término de las transformadas sucesivas predominase la potencia m de a sobre todas las demas; y para que, en consecuencia, adquiriese este coeficiente el signo *positivo* y un valor *determinado*, ó independiente de los que le preceden y siguen en la anteúltima de las ecuaciones, por la regla del (§. 3), derivadas de la primitiva.

Resta, pues, saber si es ó no admisible esta otra condicion preliminar:

$$g > a > b > c.$$

Cierto que en las transformadas sucesivas el término, de signo indeterminado, $2\,g^m \cos m\,\varphi$, puede entónces predominar sobre los a^m, b^m y c^m, y de este predominio resultar indeterminacion en el signo y en la magnitud de su segundo coeficiente, conforme se advierte en las transformadas de nuestro ejemplo; pero los demas coeficientes deberán, al fin, ser *positivos* y *limitados* todos: el tercero porque g^{2m} representa un número, en cotejo del cual se desvanecen las demas cantidades que á la composicion de aquel coeficiente concurren; y los cuarto y quinto porque $g^{2m}\,a^m$ y $g^{2m}\,a^m\,b^m$ son tambien incomparablemente superiores á los demas productos análogos, en estos últimos coeficientes comprendidos. Con relacion al ejemplo que se discute, la consecuencia final no es cierta en todas sus partes: luego la hipótesis de donde procede no puede considerarse como admisible tampoco.—Luego la ecuacion (2^0) no poseerá *dos* solas raices imaginarias; sino *cuatro: precisamente* TANTOS PARES *como coeficientes indeterminados comprende su última transformada.*

Tan importante consecuencia se infiere de un razonamiento y conjunto de reflexiones, aplicables, con variantes de mera forma, á cualquier otro caso ó ejemplo, y, por lo tanto, completamente generales en el fondo. El contenido de este capítulo, y áun de toda la *Memoria*, queda así compendiado en dos palabras.

(*d*)—Propongámonos todavía resolver un ejemplo más, un poco rebuscado, pero muy interesante, relacionado con la doctrina del §. 27, y que nos servirá como de punto de partida para llegar sin violencia al capítulo siguiente.

Sea, pues, la ecuacion de 5^0 grado

$$(2^0)\qquad x^5 - 32\,x^3 + 72\,x^2 - 185\,x + 360 = 0,$$

cuya primera transformada es la que sigue:

$$(2^1)\quad x^5 + 64\,x^4 + 654\,x^3 - 6656\,x^2 - 17615\,x + 129600 = 0.$$

Sustituyendo al cálculo directo el logarítmico, obtiénense sucesivamente estos resultados:

$$(2^1)\quad x^5+1.8061800\,x^4+2.8155777\,x^3-3.8232133\,x^2-4.2458826\,x+5.1126050=0$$

$$(2^2)\quad x^5+3.4452928\,x^4+6.0949788\,x^3+7.9239253\,x^2+9.3086761\,x+10.2252100=0$$

$$(2^3)\quad x^5+6.7229658\,x^4+12.0353233\,x^3+15.3163755\,x^2+18.1218550\,x+20.4504200=0$$

$$(2^4)\quad x^5+13.4108037\,x^4+24.0624897\,x^3+30.1534264\,x^2+35.7661749\,x+40.9008400=0$$

$$(2^5)\quad x^5+26.8200923\,x^4+48.1249556\,x^3+59.8318580\,x^2+71.0571465\,x+81.8016800=0$$

$$(2^6)\quad x^5+53.6401819\,x^4+96.2499112\,x^3+119.1954429\,x^2+141.6443493\,x+163.6033600=0$$

Los coeficientes de x^4 y de x^3 en la transformada (2^7) son, ó pueden ya suponerse, *cuadrados* perfectos de sus correspondientes en la (2^6); y de estos dos coeficientes fácil será, por lo tanto, deducir los valores de *dos raices* de la ecuacion primitiva, *reales* por necesidad. Y siendo aquella ecuacion de grado *impar*, alguna otra raiz deberá ser *real* tambien: luego las imaginarias, indicadas por los signos negativos de la (2^1), no pasarán de *dos*, en el ejemplo propuesto.

Pero los coeficientes de x^2 y de x, aunque positivos siempre, desde la transformada (2^2) en adelante, ni en la (2^5) son cuadrados perfectos de los correspondientes en la anterior, ni como tales podrán considerarse tampoco en las sucesivas, hasta llegar á una de órden muy elevado.

Luego la ecuacion (2^0) contiene *dos* raices reales, que fácilmente se aislan ó desprenden de las demas; y *tres* que, *numéricamente*, deben discrepar muy poco entre sí, cuando tanto trabajo cuesta separarlas, por más que en algun otro concepto sean muy diferentes. Por de pronto debemos, pues, limitarnos á escribir las tres siguientes consecuencias de la ecuacion (2^6):

$$\left.\begin{array}{l} 2^6\times\log a \quad = \quad 53.6401819; \\ 2^6\times\log ab \quad = \quad 96.2499112; \\ 2^6\times\log abcde = 163.6033600 \end{array}\right\} \text{ó } \left\{\begin{array}{l} \log a \;=0.83812784; \\ \log b \;=0.66577702; \text{ y} \\ \log cde = 1.05239764. \end{array}\right.$$

Si, en efecto, fuesen iguales las tres raices, designadas por c, d y e, el logaritmo de su *cubo* sería conocido, y el valor comun de las tres raices se deduciría inmediatamente. Pero ¿cómo cerciorarse de que son absolutamente iguales, ó de que difieren poquísimo unas de otras?—No es fácil la respuesta, en términos generales por lo ménos.

Advertiremos, sin embargo, que si fuesen iguales, por lo explicado en el §. 27, los coeficientes de x^2, x y x^0 propenderían respectivamente hácia los *límites*

$$3\,(a\,b\,c)^{2^m},\;\; 3\,(a\,b\,c^2)^{2^m} \quad \text{y} \quad (a\,b\,c^3)^{2^m}.$$

Luego, con alguna aproximacion á la verdad, podríamos escribir estas relaciones, que de la consideracion de la transformada (2^6) se deducen:

$$2^6\times\log ab \;=\; 96.2499112;$$

$$2^6\times\log abc = 119.1954429 - \log 3;$$

$$2^6\times\log abc^2 = 141.6443493 - \log 3; \text{ y}$$

$$2^6\times\log abc^3 = 163.6033600.$$

Y combinando la primera con la segunda, la segunda con la tercera, y la tercera con la cuarta, se concluirán estos tres valores de log c:

$$\log c = 0.3510689;\;\; 0.3507641;\;\; \text{ó}\;\; 0.3505646.$$

La pequeña discrepancia de estos logaritmos puede provenir, ó de discrepar en realidad las tres raices buscadas, ó de no representar todavía la ecuacion (2^6) el *límite* ó la transformada final de la (2^0) con suficiente grado de aproximacion. Lo único, pues, averiguado es que, ademas de las raices a y b, contiene la ecuacion propuesta otra ú otras raices, cuyo logaritmo aproximado es 0.3508 ..., ó el valor numérico comun 2,25 ... Y con este primer valor, y por la regla de Newton, será menester calcular otro y otros, hasta llegar al punto de aproximacion apetecido.

Y que la regla de Newton es aplicable en este caso se infiere del hecho incuestionable de no contener la ecuacion propuesta más de *una* raiz real, á la cual el número 2.25 se aproxime. Pues si, por el contrario, contuviese *tres*, las cinco raices serían reales, y la transformada (2^1) debería poseer todos sus términos positivos. No los posee: luego, en virtud de cuanto procede, dos de aquellas cinco raices son *imaginarias*, y el número 2.25 ... se aproximará á la única raiz real desconocida todavía, distinta de las a y b.

Mas, si las tres raices c, d y e son de especie diversa, *imaginarias* dos y *real* una, ¿cómo, ni por un momento, hemos podido suponer que fuesen exacta ó aproximadamente iguales?—Muy sencillo.

La transformada (2^6) así lo es de la (2^0) como de la (2^1): de la (2^0), que contiene *dos raices imaginarias*, como lo prueba la existencia del signo negativo en la (2^1); y de la (2^1), que no contiene ninguna de aquella especie ó nombre, conforme lo indican los signos positivos de todos los términos de todas las transformadas sucesivas, hasta la (2^6) inclusive, y las que á continuacion pudieran deducirse.

¿Y de qué *forma* deben ser las raices imaginarias de la (2^0) para convertirse en *reales* en la (2^1), por la simple elevacion al cuadrado?—De ésta: $\pm\beta\sqrt{-1}$; y no de la general, $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$.

La observacion es evidente, y tan importante que nos da la clave para acabar de resolver con grandísima sencillez y por completo la ecuacion primitiva (2^0).

En efecto: las dos raices a y b son ya conocidas; y la c, considerada como real tambien, debe ser tal que, sumada con ellas, reproduzca el coeficiente de x^4, igual á *cero* en este caso: con lo cual esta c puede asimismo darse por determinada. Y como el coeficiente, 360, del último término es igual al producto de las *tres* raices reales por el cuadrado del módulo de las *dos* imaginarias, conocidas ya aquellas tres raices, sencillísimo será tambien averiguar lo que el módulo, β ó g, aproximadamente vale. Los valores de las cinco raices, por tan breve procedimiento obtenidos, son, en fin de cuentas, los que siguen:

$$a = -\,6.888550;$$

$$b = +\,4.632091;$$

$$c = +\,2.256459;\ \text{y}$$

$$d = -e = +\,2.236068\sqrt{-1}.$$

(*Se continuará.*)

ASTRONOMIA.

Discurso pronunciado por Mr. Adams, *presidente de la Sociedad Real Astronómica de Lóndres, en la sesion general y anual de Febrero de* 1876, *al presentar á Mr. Le Verrier la medalla de oro de la Sociedad.*

(*Bulletin de la Asociation scientifique* de France; núms. 519 y siguientes.)

No han trascurrido todavía muchos años desde que se concedió nuestra medalla á Mr. Le Verrier por sus teorías y tablas de los cuatro planetas más próximos al Sol, á saber: Mercurio, Venus, la Tierra y Marte. Mucho tiempo ántes de esta época habia estudiado los grandes planetas; pero sin terminar su teoría, creyó necesario establecer sobre bases sólidas la del movimiento de la Tierra, de la cual dependen todas las demás, y esto, naturalmente, le condujo á estudiar con predileccion la teoría de los tres planetas que, con la Tierra, constituyen la parte inferior del sistema solar.

Por la comparacion de estas teorías con las observaciones, llegó Mr. Le Verrier á resultados interesantes. Halló que para que concordasen con la observacion las teorías de Marte y de Mercurio, era necesario y suficiente aumentar el movimiento secular del perihelio de Mercurio, como tambien el del perihelio de Marte, y de aquí dedujo la conclusion de que habia, por una parte, en la inmediacion de este, y por otra, en la de aquel, cantidades sensibles de materia que no se habian tenido en cuenta en los cálculos.

Tal conclusion aparece demostrada respecto del planeta Marte. La materia que no se habia tenido en cuenta pertenecia á la misma Tierra, cuya masa era demasiado pequeña, porque se habia deducido de una paralaje muy débil del Sol; por la teoría de Venus se ha deducido un aumento semejante de la masa de la Tierra; y del mismo modo se ha obtenido un incremento correspondiente á la paralaje del Sol, de la ecuacion lunar del movimiento de dicho astro.

No ha podido todavía hacerse una comprobacion semejante en cuanto á Mercurio; pero la teoría del planeta se ha redactado con tanto cuidado, y sus pasos sobre el Sol suministran observaciones tan precisas, que no puede quedar duda alguna acerca de la realidad del fenómeno en cuestion. La única manera de tomarla en cuenta es creer, con Mr. Le Verrier, en la existencia de varios planetas de pequeña dimension, ó de cierta cantidad de materia difusa, que circula alrededor del Sol en lo interior de la órbita de Mercurio.

Los resultados que Mr. Le Verrier ha obtenido así en sus investigaciones sobre el movimiento de los planetas inferiores, han añadido interés á sus trabajos cuando ha tratado de los cuatro grandes planetas que están más distantes del Sol. Estas investigaciones pueden suministrar datos sobre la materia, ahora desconocida, que existe á la inmediacion de estos planetas, y en todo caso, pueden proporcionar materiales para los descubrimientos futuros.

En Mayo de 1872 presentó Mr. Le Verrier á la Academia una Memoria muy estudiada, que contenia la primera parte de sus investigaciones sobre las teorías de los cuatro planetas superiores, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, cuya Memoria contiene un trabajo acerca de las perturbaciones que cada planeta experimenta por la accion de los otros tres. Durante todo el tiempo de esta investigacion, el desarrollo de la funcion perturbadora, como tambien las desigualdades de los elementos, está dado en forma algebráica, en la cual todas las cantidades que varían con el tiempo se hallan representadas por un símbolo general, de modo que la expresion presentada por Mr. Le Verrier conviene á una época cualquiera. Tambien las excentricidades de las órbitas, sus inclinaciones sobre el plano de nuestra eclíptica, la situacion del perihelio y la de la interseccion de la órbita de la Tierra con la de los planetas, quedan en estado de variables, dándose únicamente en número la longitud média de los grandes ejes.

Al fin del resúmen de su Memoria expone Mr. Le Verrier el programa, casi asombroso, de la obra que le falta que hacer.

Dice que será necesario:

1.º Calcular las fórmulas, y reducirlas á tablas provisionales.

2.º Reunir todas las observaciones exactas de los cuatro planetas, y discutirlas de nuevo, á fin de reducirlas á un sólo y único sistema de coordenadas.

3.º Por medio de las tablas provisionales, calcular las posiciones aparentes de los planetas en las épocas de observacion.

4.º Comparar las posiciones observadas con las calculadas, deducir la correccion de los elementos elípticos de los cuatro planetas, y examinar si es completa la conformidad.

5.º En el caso contrario, hallar la causa de la divergencia entre la teoría y la observacion.

Por inmenso que parezca este programa, ya se ha puesto en ejecucion por completo, en cuanto se refiere á los planetas Júpiter y Saturno: respecto á Urano y Neptuno, no ha terminado todavía el trabajo.

Habiendo recibido de la Academia de Ciencias los estímulos más eficaces para proseguir sus investigaciones, Mr. Le Verrier no ha perdido el tiempo y las ha llevado gradualmente á término, á fin de que se puedan poner en práctica.

En consecuencia, el 26 de Agosto de 1872 presentó á la Academia una Memoria, que contenia una determinacion completa de las perturbaciones mútuas de Júpiter y Saturno, que servia de base para las teorías de ambos planetas, que están íntimamente ligadas una con otra.

Nuevamente, el 11 de Noviembre del mismo año, presentó su determinacion de las variaciones seculares de los elementos de las órbitas de los cuatro planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, cuyas variaciones dependen una de otra, y deben, por consiguiente, tratarse simultáneamente. De aquí resulta que su determinacion supone la resolucion de 16 ecuaciones diferenciales, cuya forma es muy complicada, y que no pueden integrarse más que por repetidas aproximaciones.

Esta parte de la obra forma un preliminar necesario del tratamiento de la teoría de cada uno de los cuatro planetas en particular.

El 17 de Marzo de 1873 presentó Mr. Le Verrier á la Academia la teoría completa de Júpiter, y el 14 de Julio del mismo año hizo que á este trabajo siguiese la teoría completa de Saturno. En Enero de 1874 presentó sus Tablas de Júpiter, fundadas en la teoría de que acabamos de hablar, la cual se habia comparado con las observaciones hechas en Greenwich, de 1750 á 1830 y de 1836 á 1869, al mismo tiempo que con las observaciones hechas en París desde 1837 á 1867.

El 9 de Noviembre de 1874 tambien presentó á la Academia una teoría completa de Urano. Ya en 1846, en las investigaciones que le condujeron al descubrimiento de Neptuno, habia dado un estudio completo de las perturbaciones ejercidas sobre Urano por la accion de Júpiter y Saturno. En la Memoria de 1874 volvió á insistir en sus primeros trabajos, y daba una teoría más perfecta, pues que contenia un tratado completo de las perturbaciones ejercidas sobre Urano por la accion de Neptuno.

El 14 de Diciembre de 1874 presentó una nueva teoría del planeta Neptuno, completando de esta manera la parte teórica del inmenso trabajo que habia realizado sobre el sistema planetario.

Finalmente, el 23 de Agosto de 1875, expuso en la Academia la comparacion de las observaciones con la teoría de Saturno.

Hé aquí una sencilla enumeracion de los diferentes trabajos que la ciencia debe á nuestro ilustre asociado.

Parece increible, si no lo hubiéramos visto actualmente, que un sólo hombre haya tenido la energía y perseverancia necesarias para atravesar con paso firme todo el estudio del sistema solar, y determinar con el cuidado más escrupuloso las perturbaciones mútuas de todos los principales planetas que parecen actuar unos sobre otros.

Despues de haber desarrollado estas consideraciones preliminares, el sábio astrónomo inglés se propone analizar completamente las Memorias insertas en los *Anales del Observatorio* de París.

El capítulo XVIII de las *Investigaciones* de Mr. Le Verrier, que comprende casi enteramente el tomo X de las Memorias, se halla consagrado á la determinacion de la accion mútua de Júpiter y Saturno, la cual sirve de base para la teoría de estos dos planetas.

Estas teorías son sumamente complicadas, y trataremos de indicar ó de explicar, tan completamente como nos sea posible, sin la introduccion de símbolos algebráicos, la naturaleza de las dificultades particulares de que ha tenido que triunfar Mr. Le Verrier para conseguirlo, y que ha sabido vencer con tal éxito. Estas dificultades no existen, ó son mucho menores cuando se trata de planetas de menor volúmen, ó sea de los que son inferiores á Júpiter.

En primer lugar las masas de Júpiter y Saturno son mucho más considerables que las de los planetas inferiores, pues la masa de Júpiter es 300 veces y la de Saturno 100 veces mayor que la de la Tierra.

De aquí resulta que es necesario desarrollar mucho más las séries infinitas que sirven para expresar las perturbaciones, y que no pueden limitarse al desarrollo de los primeros términos, como puede hacerse cuando se trata de planetas inferiores. Además, Júpiter y Saturno se hallan tan distantes de los planetas que pertenecen á la familia de la Tierra, que son muy pequeñas las desigualdades producidas por ellos, á pesar de su enorme peso.

Pero no es la magnitud de la masa perturbadora la única causa que hace que sean tan complicadas las teorías de las perturbaciones mútuas de Saturno y Júpiter: hay otra que agrava el efecto de las masas, y es que sus movimientos medios son casi comensurables. Dos veces el movimiento medio de Júpiter difiere muy poco de cinco veces el movimiento medio de Saturno. En otros términos, cinco años de Júpiter emplean casi el mismo tiempo que tres años de Saturno; de donde resulta que si ambos planetas se hallan en conjuncion en ciertos puntos de sus órbitas, la conjuncion inmediata no se verificará lejos de esta posicion.

El período que separa dos conjunciones sucesivas será tres veces su movimiento sinódico: estas conjunciones se repetirán casi en tres períodos sinódicos, y así indefinidamente. Resulta de aquí que las perturbaciones irán acumulándose en la misma direccion durante un gran número de revoluciones de ambos planetas, y llegarán á ser muy importantes.

Las desigualdades de largo período que provengan de estas causas, influyen en todos los elementos de las órbitas de ambos planetas; pero las más importantes son las que afectan la longitud media de los cuerpos, pues éstas son proporcionales al cuadrado del período secular, mientras que las otras no lo son más que al período.

Los principales términos de las desigualdades de la longitud media son de tercer órden, si consideramos las excentricidades de las órbitas y sus inclinaciones mútuas como cantidades de primero. Sin embargo, otros términos mucho más numerosos, y cuya expresion es todavía más complicada, se hallan entre los de 5.º y 7.º grado, y Mr. Le Verrier no ha retrocedido ante el trabajo que era necesario para incluir estos términos en sus aproximaciones.

Pero la circunstancia que produce el mayor grado de complicacion es la necesidad de hacer entrar en cuenta términos que dependen del cuadrado, y de las potencias más elevadas de la funcion perturbadora.

Vamos á tratar de determinar la naturaleza de estos términos y la manera de introducirlos.

Por la teoría de la variacion de los elementos del movimiento elíptico, puede expresarse, en una época cualquiera, la variacion de uno de estos elementos, tomando la longitud media como variable independiente; pero esta funcion se halla complicada por los elementos de las órbitas de los cuerpos perturbados, así como por las de los cuerpos perturbadores. Si, por el contrario, el de la variacion estuviese dado en funcion del tiempo y de cantidades conocidas, una simple integracion, áun por aproximacion, bastaria para determinar el valor de un elemento cualquiera; pero, desgraciadamente, no puede ser así.

El método de la variacion de los elementos no nos da una solucion, sino únicamente una trasformacion de nuestras ecuaciones primitivas de movimiento. El valor de la variacion se halla dado en funcion de los mismos elementos desconocidos. Para sacar de ecuaciones parecidas los mismos elementos, no puede hacerse más que por una série de operaciones indirectas. Permítasenos examinar este punto con alguna minuciosidad.

Los términos que expresan la variacion de un elemento cualquiera, pueden dividirse en dos grupos.

En primer lugar, los que comprenden la longitud media de uno ó dos de los planetas considerados, así como tambien los elementos de sus órbitas; en segundo, los que no comprenden más que los elementos de las mismas.

Los primeros se llaman *periódicos*, porque cesan de ser positivos para convertirse en negativos, ó *vice-versa*, segun la naturaleza de la funcion de la longitud que contienen. Sus períodos son, pues, esencialmente comparables á los de los mismos planetas, aunque su valor puede ser muy diferente. Se llaman los segundos términos *seculares*, y varían muy lentamente, puesto que los elementos de las órbitas, que allí son considerados como coeficientes, varían con mucha lentitud.

Pero cada elemento, expresando la variacion de un elemento cualquiera, debe comprender necesariamente, como factor, la masa de un cuerpo perturbador, puesto que está admitido en principio, que no hay más fuerza activa en la naturaleza que las atracciones de las masas planetarias.

Resulta de aquí, que si todas las masas son muy pequeñas, todas las cantidades que determinan las variaciones de los elementos son tambien pequeñísimas. Obtendremos, por consiguiente, para estos términos desconocidos un valor casi verdadero, si sustituimos á la funcion completa la que obtendríamos haciendo abstraccion de los términos periódicos: cuando esto suceda, podremos buscar las desigualdades periódicas por una integracion directa; pero tendremos cuidado de suponer en esta operacion que los elementos son constantes, y que sólo las longitudes varían.

Sin embargo, si las masas perturbadoras no son muy pequeñas, este procedimiento no será enteramente exacto; las desigualdades periódicas obtenidas de este modo, no pueden considerarse más que como una primera aproximacion. Para hallar valores más exactos, reemplazaremos los elementos por su valor, aumentado con la desigualdad periódica aproximada descubierta.

Comprendido bien esto, vamos á explicar de qué manera continuamos aplicando el método para hallar una aproximacion mayor. Supongamos que hemos añadido á un término periódico cualquiera, una desigualdad periódica que contenga los múltiplos de la longitud media; tendremos nuevos términos periódicos, en los cuales entra el cuadrado de la masa de uno de estos cuerpos ó el producto de ambas masas.

Si se aumenta el término periódico de una desigualdad, en la cual entre sólo este término desconocido, el resultado será introducir en las ecuaciones términos independientes de la longitud media, y que, por consiguiente, merecen el nombre de *seculares*, cuyos nuevos términos serán particularmente importantes, si la desigualdad en cuestion es de largo período.

En los mismos términos seculares, el resultado del aumento de un elemento cualquiera, al que se añade una cantidad periódica, viene á dar orígen á nuevos términos periódicos.

Por último, debemos observar que, determinando las desigualdades periódicas de un elemento cualquiera por medio de la integracion de las ecuaciones diferenciales correspondientes, debemos tener en cuenta las variaciones seculares despreciadas en las primeras aproximaciones. Los nuevos términos, lo mismo que los demás que acabamos de describir, serán evidentemente de segundo órden con relacion á las masas.

Si los planetas perturbadores son grandes, como sucede en el caso de Júpiter y Saturno, puede necesitarse proceder á una nueva aproximacion, y obtener por este medio nuevos términos, unos periódicos y otros seculares, en los cuales entran los cubos y los productos de las tres dimensiones de las masas.

El número de las combinaciones de los términos que dan orígen á los de segundo y tercer órden, es prácticamente ilimitado. *El arte del calculador consiste en no elegir en estas combinaciones más que las que conduzcan á resultados sensibles.*

Tal es la principal causa de la gran complicacion de la teoría de los grandes planetas, y especialmente de Júpiter y Saturno.

Mr. Le Verrier cree que hay aquí una condicion indispensable de todo progreso. Se necesitaria, segun él, que pudiéramos comparar todas las observaciones de un planeta con una sola y misma *teoría*, por grande que fuera el espacio de tiempo que pudiesen durar las observaciones que se trata de comparar.

Para satisfacer esta condicion, desarrolla algebráicamente todas las fórmulas, aunque dejando siempre en una forma general simbólica los elementos que varían con el tiempo, como, por ejemplo, las excentricidades, las inclinaciones, la longitud de los perihelios y la del nodo. De la misma manera trata las masas que no están suficientemente conocidas.

Toda la obra está expuesta con detalles, y dividida, en cuanto es posible, en partes independientes una de otra, de suerte que cada una puede comprobarse fácilmente. Todos los términos que toma en cuenta están perfectamente definidos, de tal suerte, que si es necesario llevar más adelante la aproximacion, hay seguridad de hacerlo sin comenzar de nuevo los cálculos. Además, la obra ofrece tanta claridad y método, que debe considerarse como un admirable modelo para investigaciones análogas.

Despues de haber seguido á su ilustre amigo en tales desarrollos, Mr. Adams analiza el capítulo XIX, que forma la primera parte del tomo X de los *Anales del Observatorio*, cuyo trabajo contiene la determinacion de los elementos seculares de las órbitas de los cuatro planetas, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

En la primera parte se hallan reunidas las fórmulas diferenciales establecidas en el capítulo anterior, y que dan la velocidad de los cambios seculares en cada época en funcion de los mismos elementos, cuidando antes de haber privado á éstos de todas sus desigualdades periódicas.

Los términos de los diferentes órdenes que entran en estas desigualdades, se hallan clasificados cuidadosamente aparte unos de otros.

Si limitamos nuestra atencion á los términos de primer grado, relativamente á las excentricidades y á las inclinaciones de las órbitas, se harán lineales las ecuaciones diferenciales que determinen las variaciones seculares. Al hacer esta hipótesis pueden hallarse las integrales generales, y dar los valores de los diferentes elementos para un período de tiempo indefinido.

Sin embargo, en el caso de Júpiter y Saturno son muy importantes, para despreciarse, los términos de grado superior; y cuando se conservan, las ecuaciones se harán tan complicadas, que hasta seria absurdo intentar determinar su integral general.

Felizmente no es menester, para las necesidades actuales de la Astronomía, tener estos valores absolutos, y en un período definido de tiempo, las integrales de estas ecuaciones complicadas pueden obtenerse por el método de las cuadraturas con toda la aproximacion que se desee.

De esta manera se ha conducido Mr. Le Verrier para determinar los valores de los elementos de Saturno y de Júpiter en un período de 2000 años, á contar desde 1850, y se ha tomado el trabajo de calcular los valores para cinco períodos de 500 años cada uno.

Los primeros pasos en esta integracion no han dejado de ofrecer dificultades, porque «la *determinacion del valor numérico de la velocidad con que se modifican los elementos del movimiento elíptico, depende de los elementos que se trata de determinar.*» Resulta de aquí que se han necesitado varias aproximaciones para llegar á toda la precision apetecible.

Sin embargo, segun los trabajos de Mr. Le Verrier, no ofrecian las mismas dificultades las investigaciones de otras épocas. De hecho, por consecuencia de estas investigaciones, podremos hallar, con mucha aproximacion, los valores de los elementos elípticos, 500 años antes ó despues de las épocas que se han considerado. Sus fórmulas generales darán entonces la modificacion de los diversos elementos en la época indicada. Teniendo los valores, podremos determinar por un cálculo directo las pequeñas correcciones que sería necesario aplicar á los valores aproximados de los elementos hallados.

Este procedimiento puede repetirse cuantas veces se quiera.

Es importante observar que en las fórmulas que dan la velocidad de cambio por cada uno de los elementos en las cinco épocas, 1850-2350, etc., las masas de los planetas están siempre dadas en forma indeterminada. De aquí resulta que se podrá ver á la vez cuál es, en la variacion demostrada entre los elementos calculados desde ahora y los elementos observados en estos cambios, la parte que corresponde á la accion de los planetas. Efectivamente, serán fáciles de conocer los cambios que podrán verificarse en el valor de un elemento, desde el momento en que se conozcan los que se produzcan en los valores adoptados para las masas de los planetas.

Por consiguiente, cuando los astrónomos del porvenir, por ejemplo, del año 3877, hayan sacado de sus observaciones el valor de los elementos de las órbitas de los planetas, les será fácil determinar con un gran rigor el valor de las masas *siempre que conozcan todos los cuerpos susceptibles de ejercer perturbaciones*.

Si hay una causa perturbadora desconocida, su existencia se indicará por la dificultad de llegar al mismo valor de las masas por medio de las diferentes ecuaciones de condicion.

Con auxilio del trabajo que acabamos de describir, la ciencia tiene, por consiguiente, todos los elementos necesarios para el establecimiento de la teoría de los diferentes planetas.

El resto del tomo XI de los *Anales* se ocupa, dice Mr. Adams, en la teoría completa de Júpiter y Saturno, la primera en el capítulo XXI y la segunda en el XXII de las *Investigaciones* de Mr. Le Verrier.

Los coeficientes de las desigualdades periódicas de las longitudes medias y los elementos de estas órbitas, no están únicamente dados en una forma general, sino que están calculados numéricamente en las cinco principales épocas consideradas en el capítulo XXV de estas *Investigaciones*, á saber, 1850, 2350, 2850, 3350 y 3850.

Las desigualdades de largo período del segundo órden, en cuanto á las masas, que equivalen á dos veces el movimiento medio de Júpiter, más tres veces el movimiento medio de Urano, ménos seis veces el movimiento medio de Saturno, se hallan determinadas en una forma análoga.

El capítulo XXII de las *Investigaciones* de Mr. Le Verrier, que forma el primero del tomo XII de los *Anales*, contiene la comparacion de la teoría de Júpiter con las observaciones, la deduccion de las correcciones definitivas de los elementos, y finalmente, las tablas usuales de los movimientos de Júpiter.

Las observaciones empleadas son las de Greenwich, de 1750 á 1830 y de 1830 á 1869, así como las de París de 1837 á 1867.

Mr. Le Verrier ha aplicado las correcciones que ha hallado necesarias para sus reducciones de las observaciones de estrellas por Bradley, y por las nuevas determinaciones de las ascensiones rectas de las estrellas fundamentales, publicadas en el tomo IX de los *Anales del Observatorio*, capítulo X. De ellas se ha servido para discutir los resultados dados por Mr. Airy en su *Reduccion de las observaciones de los planetas* de 1750 á 1830.

Las ecuaciones de condicion para hallar las correcciones de los elementos y de la masa calculada de Saturno, se hallan divididas en dos séries, que corresponden á las observaciones hechas desde 1750 á 1830, y otras dos á las de 1836 á 69.

Además, en cada una de estas séries las ecuaciones se hallan divididas en ocho grupos, que corresponden á períodos de 45° en 45° (0,45, 90, 135, etc.), á las distancias del planeta á su perihelio.

Estos ocho grupos de ecuaciones dan orígen á cuatro finales, cuya solucion dá la correccion de la época, del movimiento medio, de la excentricidad y de la longitud del perihelio. Las cantidades se dan en funcion de la masa de Saturno, á la cual dejan su forma indeterminada. La sustitucion de los valores de estas tres cantidades en los cuatro grupos de ocho ecuaciones, da 32 ecuaciones normales, que suministran las diferencias definitivas entre la teoría y la observacion en términos de la correccion de la masa de Saturno.

No puede sacarse ninguna conclusion de las antiguas observaciones; pero, combinando las modernas, Mr. Le Verrier halla que la masa adoptada para Saturno, que es la de Bouvard, debe disminuirse en $^1/_{200}$, correccion muy pequeña, pero que la considera muy bien fijada. Dicha correccion es más importante aplicando el valor determinado por Bessel, que excede en $^1/_{350}$ al determinado por Bouvard, y supera, por lo tanto, en $^1/_{27}$ al del astrónomo aleman.

Las ecuaciones de condicion, que sirven para determinar la latitud del planeta, se consideran de la misma manera. Monsieur Le Verrier las agrupa por las distancias de semi-cuadrante á semi-cuadrante del planeta á su nodo ascendente, cuyas ecuaciones sirven para determinar las correcciones de la inclinacion de la órbita y la longitud del nodo. Mr. Le Verrier ha tratado con separacion las observaciones antiguas y modernas, y ha hallado que las primeras se diferencian poco de las segundas: no obstante, se ha limitado á emplear éstas en la construccion de sus tablas.

Habiendo determinado de este modo sucesivamente por medio de tales correcciones todos los elementos que entran en la determinacion de las órbitas, puede considerarse que hay completa conformidad entre la teoría y las observaciones. De aquí resulta, que la accion de los pequeños planetas sobre Júpiter parece insensible, y que no hay indicacion alguna de que exista causa de perturbacion.

Hay algunas particularidades en el modo de formar las tablas de las perturbaciones producidas por la accion de Saturno. Las perturbaciones de la longitud, de la latitud, del rádio vector, no se hallan expresadas directamente como las demás; pero en su lugar Mr. Le Verrier da las variaciones seculares y periódicas de la longitud media, de la longitud del perihelio, de la excentricidad y de los dos ejes mayores de la órbita. De los elementos corregidos por estas perturbaciones, saca las de la longitud y del rádio vector por las fórmulas comunes del movimiento elíptico.

Cuando las perturbaciones son grandes, Mr. Le Verrier daba preferencia á este método sobre el método comun; pero si eran pequeñas, se contentaba con aplicar sus variaciones seculares á la inclinacion de la órbita y á la posicion del nodo que de aquí depende, por medio de la trigonometría esférica. Por el método comun determina las desigualdades periódicas de la latitud.

Todas estas perturbaciones, bien se trate de los elementos de Júpiter ó de su latitud, se hallan desarrolladas en séries de senos y cosenos de los múltiplos de la longitud media de Saturno, cuyas séries contienen un término constante. Los coeficientes de estos diferentes términos son funciones de las distancias medias de Saturno y Júpiter. Para una *elongacion* dada, estos términos se han desarrollado en potencias del tiempo, á contar desde el año 1860, elegido como punto de partida. Monsieur Le Verrier ha formado tablas de estos coeficientes, tomando la *elongacion* media como argumento; de donde resulta que las perturbaciones se hallan calculadas por medio de las tablas trigonométricas comunes.

Los intervalos de los argumentos son tan pequeños, que son muy sencillas las interpolaciones necesarias para llegar al verdadero valor de los elementos. Los coeficientes relativos á los cuatro elementos principales de Júpiter y á la accion de Saturno, dependen de este mismo argumento, y son dados por la misma tabla.

Mr. Le Verrier los ha calculado especialmente respecto de los 500 años que trascurrirán desde 1850 á 2350. No obstante, pueden aplicarse á dos épocas anteriores á 1850, sin más que cambiar el signo del tiempo trascurrido desde esta fecha. Para uno ó dos siglos anteriores á este punto de partida, las determinaciones de Mr. Le Verrier tienen todo el rigor de las observaciones modernas. Además, en una época más reciente, la exactitud de las tablas excede á la de las observaciones que tenemos que comparar.

Actualmente se emplean las tablas de Júpiter de Mr. Le Verrier en los cálculos del *Nautical Almanac*, á contar desde 1878.

El tomo XIII de los *Anales* se halla consagrado á las teorías de Urano y Neptuno, que no dejan, sin embargo, de ofrecer algunas dificultades.

En primer lugar, estos planetas se hallan perturbados por la accion de las dos grandes masas de Júpiter y Saturno que gravitan en lo interior de sus órbitas. De aquí resulta que estas acciones se hallan modificadas por las grandes desigualdades del movimiento de Júpiter y Saturno, de que hemos hablado, y que consisten en que cinco veces el movimiento medio de Saturno equivalen al doble del movimiento medio de Júpiter.

En segundo lugar, dos veces el movimiento medio de Neptuno se diferencian muy poco del movimiento medio de Urano. Resulta de esta coincidencia en los elementos de las órbitas de las desigualdades de largo período, bastante grandes para producir términos en funcion del tiempo, que son de segundo órden de magnitud, y que tienen un valor muy perceptible.

Por último, los elementos elípticos de los dos planetas no son suficientemente conocidos, pues apenas se tienen observaciones de un giro completo de Urano.

En un capítulo preliminar, el XXIV, Mr. Le Verrier examina las fórmulas que son particularmente aplicables al caso de un planeta perturbado por otro colocado más cerca del Sol.

Se ve fácilmente que en este caso pueden producirse perturbaciones considerables sobre los elementos de la órbita del planeta perturbado, como si la accion atractiva del Sol variase de intensidad; pero variando poco la direccion general de la atraccion total, se altera mucho ménos el movimiento del planeta sobre su órbita. Es, pues, ventajoso considerar este caso separadamente.

Hemos visto cómo están ligadas íntimamente una con otra las teorías de Júpiter y de Saturno. Las de Urano y Neptuno tienen relaciones no ménos íntimas, á causa de las grandes perturbaciones introducidas en los elementos de sus órbitas por la misma causa, la casi comensurabilidad de sus movimientos medios.

Por consiguiente, antes de examinar separadamente la teoría de estos dos astros, Mr. Le Verrier consagra el capítulo XXV de sus *Investigaciones* á la determinacion de las acciones mútuas de Urano y Neptuno. El capítulo sirve de base para la teoría sucesiva de cada uno de estos dos planetas.

El método es el mismo que el que se ha empleado en el caso de Júpiter y Saturno, y los resultados se dan en la misma forma general.

Importa observar que los elementos de Urano y Neptuno, segun se hallan determinados por las observaciones, se diferencian de sus valores elípticos medios. La diferencia proviene del valor de sus perturbaciones en largo período, correspondiente á la época media de sus observaciones. Los elementos aparentes de Urano y Neptuno, los que resultan de las observaciones para 1880 se han determinado con precision por el profesor Simon Newcomb, en su excelente obra sobre la teoría de estos planetas, que obtuvo el primer premio de la Sociedad Real Astronómica de Lóndres en 1850.

Aplicando las fórmulas generales, Mr. Le Verrier ha llegado á deducir los elementos medios elípticos que corresponden á la misma época.

No debe olvidarse, sin embargo, que los elementos medios determinados así, dependen de las masas de ambos planetas, y que, por lo tanto, será necesario introducir algunas correcciones, pequeñas indudablemente, cuando dichas masas se hayan determinado.

Cuando revisaba su capítulo XIX y determinaba las variaciones seculares de Urano y Neptuno, así como las de Júpiter y Saturno, los elementos aparentes estaban conocidos con mucha ménos exactitud que despues del trabajo de Mr. Newcomb. Se vió, pues, obligado á hablar de otros elementos, y á calcular nuevamente los valores de las excentricidades y de las longitudes de los perihelios, que habia determinado con tanto trabajo, para 1850, 2350, 2850, 3350, 3850, etc.

CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMERICAS.

(Continuacion.)

(*e*)—Como ejercicios sobre esta misma materia, concluiremos proponiendo al lector los tres siguientes ejemplos, que debe empeñarse en resolver.

$$1.^{\circ} \quad x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0.$$

Para hallar las tres raices de esta ecuacion, real una y dos imaginarias, hay que avanzar hasta la transformada (2^9). Pero las cuatro primeras transformadas pueden obtenerse muy sencillamente, sin apelar á las tablas de logaritmos. Y de la (2^9) basta conocer el coeficiente del segundo término.

Las tres raices buscadas son éstas:

$$x = -1.650629; \quad \text{y}$$

$$x = -0.174685 \pm 1.546869 \times \sqrt{-1}$$

$$2.^{\circ} \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0.$$

De la transformada (2^8) se deducen los siguientes valores de sus cuatro raices imaginarias:

$$x = -1.287816 \pm 0.857897 \times \sqrt{-1}; \text{ y}$$

$$x = +0.287816 \pm 2.832186 \times \sqrt{-1}$$

3.° $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$

Como en los casos precedentes, las cuatro primeras transformadas se deducirán sin el auxilio de los logaritmos con suma sencillez. Mas el trabajo de cálculo habrá de prolongarse luégo hasta el segundo término de la (2^{10}) para separar por completo unas de otras y determinar sus cinco raices. Estas son las que siguen:

$$x = -1.491798;$$

$$x = -0.805786 \pm 1.222905 \times \sqrt{-1}; \text{ y}$$

$$x = +0.551685 \pm 1.253349 \times \sqrt{-1}$$

CAPITULO VI.

Exámen del caso excepcional en que la ecuacion numérica propuesta contenga dos ó más raices de cualquier especie, muy poco discrepantes unas de otras.

---

§. 29.

Dificultad, no considerada hasta ahora, que puede presentarse en la resolucion de las ecuaciones numéricas.

El procedimiento de resolucion de las ecuaciones numéricas, en los precedentes capítulos expuesto, sólo puede suministrarnos por de pronto los valores de las raices buscadas con un cierto grado de aproximacion. Si estos valores aproximados discrepan notablemente unos de otros, por la regla de Newton, tambien en los anteriores capítulos inserta, se determinarán luégo y con bastante sencillez sus correcciones respectivas, y se deducirán nuevos valores de las incógnitas á que se refieren, más aproximados á la verdad ó más dignos de confianza que los en primer término obtenidos. Y, repitiendo las operaciones de rectificacion dos, tres ó más veces consecutivas, la discrepancia entre los resultados que por fin se obtuvieren y los que pretendemos desde un principio deducir, si no nula, será, por lo ménos, insignificante y despreciable.

Pero, cuando los valores que deben corregirse discrepen poquísimo unos de otros, ó sea su diferencia menor que el *duplo* de la correccion hipotética, obtenida por la regla de Newton, fallará ó podrá fallar esta regla de cálculo; y, aplicándola sin discernimiento y muy previsora reflexion á la deduccion de nuevos valores de las raices buscadas, nos desviará entónces del recto camino que para esto conviene seguir, y nos hará perder infructuosamente el tiempo. Hasta pudiera suceder que dos ó más de aquellos primeros valores aproximados, que se trata de corregir, fuesen absolutamente iguales, sin serlo en todo rigor las raices á que se refieren ó corresponden; y entónces ni esperanza cabría de obtener por la simple regla de Newton la separacion ó distincion de tales raices, unas de otras muy poco diferentes, ó *casi iguales*. Respetando, pues, como bueno el procedimiento de solucion preliminar y general en esta Memoria desenvuelto, habrá que modificar ó ampliar aquella regla complementaria de aproximacion indefinida, para que, con plena seguridad de acierto, pueda tambien aplicarse en los casos excepcionales que se acaban de indicar. La modificacion estriba en las relaciones existentes entre una funcion algebráica, racional y entera, y las *derivadas* suyas de diversos órdenes, que vamos á exponer ahora.

§. 30.

Digresion importante, necesaria para salvar la dificultad propuesta en el párrafo precedente.

Sea la funcion

$$(70) \qquad f(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \ldots\ldots$$

Diferenciándola una sola vez, ó pasando de la funcion propuesta á su *primera derivada*, obtendremos este resultado: (71)

$$\frac{df}{dx} = (x+b)(x+c)(x+d)\ldots + (x+a)(x+c)(x+d)\ldots +$$
$$(x+a)(x+b)(x+d)\ldots + (x+a)(x+b)(x+c)\ldots + \ldots =$$
$$\left\{\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} + \frac{1}{x+d} + \ldots\right\} \times f(x) = \varepsilon_1 \times f(x).$$

La segunda *diferenciacion* produciría este otro: (72)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2f}{dx^2} =$$

$$(x+c)(x+d)\ldots + (x+b)(x+d)\ldots + (x+a)(x+d)\ldots +$$

$$x+a)(x+c)\ldots + (x+a)(x+b)\ldots + (x+b)(x+c)\ldots + \ldots =$$

$$\left\{\frac{1}{(x+a)(x+b)} + \frac{1}{(x+a)(x+c)} + \ldots\right\} \times f(x) = \varepsilon_2 \times f(x).$$

Ó representando, en general, por ε_m la expresion

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)\ldots} + \frac{1}{(x+a)(x+c)\ldots} + \ldots + \frac{1}{(x+b)(x+c)\ldots} + \ldots,$$

compuesta de una suma de fracciones, cuyo numerador comun sea la unidad, y cuyos denominadores comprendan los diversos productos que pueden formarse combinando, sin repeticion, de m en m, los n binomios $x+a$, $x+b$, $x+c$, ..., los resultados de las diferenciaciones consecutivas de la ecuacion (70) serán los que á renglon seguido se insertan:

$$
(73)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{df}{dx} = \varepsilon_1 \times f(x) \\[2ex]
\dfrac{1}{1.2} \cdot \dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{d\left(\varepsilon_1 \times f(x)\right)}{2\,dx} = \varepsilon_2 \times f(x) \\[2ex]
\dfrac{1}{1.2.3} \cdot \dfrac{d^3 f}{dx^3} = \dfrac{d\left(\varepsilon_2 \times f(x)\right)}{3\,dx} = \varepsilon_3 \times f(x) \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

Para demostrar la certidumbre de la ley á que en su formacion obedecen claramente estas expresiones analíticas, supongamos que se verifique ó sea verdadera en los primeros casos particulares, hasta el m inclusive; y veamos si tambien se verificará forzosamente entónces en el caso ó supuesto inmediato posterior.

Por hipótesis, pues, consideraremos como ya demostrado que

$$
(74)\qquad \frac{1}{1.2.3.....m} \cdot \frac{d^m f}{dx^m} = \frac{d\left(\varepsilon_{m-1} \times f(x)\right)}{m.dx} = \varepsilon_m \times f(x).
$$

En el segundo miembro de esta igualdad figuran tantos términos distintos como combinaciones diversas, sin repeticion, pueden formarse de $n-m$ en $n-m$, ó de m en m, con los n elementos $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... : ó

$$
\frac{n(n-1)(n-2).....(n-m+1)}{1.2.3.....m}
$$

términos, con $n-m$ elementos ó factores binomios cada uno. Y como, al diferenciarla, cada uno de estos términos producirá tantos otros distintos como factores ahora le componen, ó $n - m$, en el segundo miembro de la siguiente igualdad, consecuencia inmediata de la (74),

$$(75) \qquad \frac{1}{1.2.3...m} \cdot \frac{d^{m+1} f}{dx^{m+1}} = \frac{d\left(\varepsilon_m \times f(x)\right)}{dx},$$

existirán por de pronto, ó prescindiendo de las reducciones que puedan luégo verificarse, $n - m$ veces más términos que en el segundo de donde procede, ó

$$\frac{n(n-1)(n-2).....(n-m+1)(n-m)}{1.2......m}$$

en totalidad, compuesto cada uno de $n - m - 1$ factores binomios.—Las *reducciones* de términos provendrán de existir entre los $n - m$, que cada uno de los comprendidos en la expresion $\varepsilon_m \times f(x)$ produce por derivacion, alguno ó varios iguales á los que, por derivacion ó diferenciacion asimismo, se desprenden de los demas en aquella expresion primitiva contenidos.

En esta otra expresion análoga: $\varepsilon_{m+1} \times f(x)$, los términos, compuestos tambien de $n - m - 1$ factores binomios, ascienden á $\dfrac{n(n-1)(n-2).....(n-m)}{1.2......m(m+1)}$: ó son, por definicion ó hipótesis, tantos como combinaciones distintas pueden formarse con los n factores de $f(x)$, tomados de $n-m-1$ en $n - m - 1$, ó de $m + 1$ en $m + 1$. Y como si consideramos aparte uno de estos términos, y le multiplicamos por cualquiera de los binomios en él deficientes, obtendremos por precision alguno de los comprendidos en la expresion simbólica $\varepsilon_m \times f(x)$, resulta, recíprocamente, que ni uno solo de los comprendidos en $\varepsilon_{m+1} \times f(x)$ dejará de figurar tambien entre los de $\dfrac{d\left(\varepsilon_m \times f(x)\right)}{dx}$. Pero esta última expresion, que no contiene término alguno distinto de los comprendidos en la anterior, contiene, sin embargo, en totalidad $m+1$ veces más términos: luego cada uno de estos términos se hallará repetido las mismas $m+1$ veces. De donde se deduce, conforme queríamos demostrar, que: (76)

$$(m+1)\times\varepsilon_{m+1}\times f(x)=\frac{d\left(\varepsilon_m\times f(x)\right)}{dx}=\frac{1}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{d^{m+1}f}{dx^{m+1}}$$

La ley de formacion á que las expresiones (73) obedecen, directamente comprobada en los primeros casos particulares, es, segun esto, general y aplicable sin vacilacion en todos.

§. 31.

Análisis del problema cuando son dos, tres ó más las raices iguales ó casi *iguales que la ecuacion propuesta contiene.*

(*a*)—Prévios estos preliminares indispensables, supongamos ahora *aproximadamente* conocido uno de los valores de x, ($x_0=-a_0$, por ejemplo), que satisfacen á la ecuacion

$$f(x)=(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots..=0.$$

Si, en lugar de x, ponemos en esta ecuacion $x_0+\Delta x_0$, nos resultará esta otra: (77)

$$f(x_0+\Delta x_0)=$$

$$f(x_0)+\frac{df}{dx_0}\cdot\Delta x_0+\frac{d^2f}{dx_0^{\,2}}\cdot\frac{\Delta x_0^{\,2}}{1\,.\,2}+\frac{d^3f}{dx_0^{\,3}}\cdot\frac{\Delta x_0^{\,3}}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots..=$$

$$f(x_0)\times\left\{1+\varepsilon_{01}\,\Delta x_0+\varepsilon_{02}\,\Delta x_0^{\,2}+\varepsilon_{03}\,\Delta x_0^{\,3}+\ldots..\right\}=0.$$

Los valores de ε_0 se deducen de los de ε, en el párrafo anterior definidos, por la simple sustitucion de la letra x por x_0, ó por $-a_0$. Conclúyese, pues, que (78)

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{a - a_0} + \frac{1}{b - a_0} + \frac{1}{c - a_0} + \ldots\ldots$$

$$\varepsilon_{02} = \frac{1}{(a - a_0)(b - a_0)} + \frac{1}{(a - a_0)(c - a_0)} +$$

$$\frac{1}{(a - a_0)(d - a_0)} + \ldots\ldots + \frac{1}{(b - a_0)(c - a_0)} + \ldots\ldots$$

....

....

Si a_0 es un número que difiere poquísimo de a é incomparablemente más de $b, c, d, \ldots\ldots$; ó, en otros términos: si $-a_0$ es valor aproximado de *una sola* de las raices de la ecuacion propuesta, las fracciones componentes de ε_0, en cuyos denominadores figure el factor $a - a_0$, serán incomparablemente mayores que todas las demas; y, por lo tanto, los valores de las diferentes ε_0 quedarán, *aproximadamente* tambien, reducidos á estos en el presente caso:

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{a - a_0}; \quad \varepsilon_{02} = \frac{M}{a - a_0}; \quad \varepsilon_{03} = \frac{N}{a - a_0}; \ldots\ldots$$

Expresiones abreviadas las últimas en las cuales las letras M, N, ... representan cantidades finitas, ó sumas de fracciones, de denominador finito, combinadas con la $\dfrac{1}{a - a_0}$ en el sistema (78).

Sustituyendo en el último miembro de la ecuacion (77) por las ε_0 estos valores aproximados á la verdad, y tanto más aproximados cuanto menor sea la diferencia $a - a_0$, dedúcese la siguiente:

$$(79) \qquad 1 + \varepsilon_{01} \,.\, \Delta x_0 + \varepsilon_{02} \,.\, \Delta x_0^2 + \varepsilon_{03} \,.\, \Delta x_0^3 + \ldots\ldots =$$

$$1 + \frac{\Delta x_0}{a - a_0} + \frac{M \,.\, \Delta x_0^2}{a - a_0} + \frac{N \,.\, \Delta x_0^3}{a - a_0} + \ldots\ldots = 0.$$

Pero siendo, por hipótesis, Δx_0 y $a-a_0$ cantidades ambas muy pequeñas, aunque del mismo órden de magnitud, la fraccion $\frac{\Delta x_0}{a-a_0}$ representará una cantidad finita; y, comparadas con ella, serán cantidades muy pequeñas á su vez, y de valor insignificante ó despreciable unas con respecto á otras, todas las demás fracciones que le siguen y acompañan. Luego, en el supuesto de que $-a_0$ sea valor aproximado de *una sola raiz* de la ecuacion primitiva, conclúyese de la (79) que:

$$1+\frac{\Delta x_0}{a-a_0}=1+\varepsilon_{01}\times\Delta x=1+\frac{\frac{df}{dx_0}}{f(x_0)}\times\Delta x_0=0$$

De donde se desprende que

$$(80)\qquad \Delta x_0=a_0-a=\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}:$$

conforme en un todo con la regla de aproximacion, incontrovertible sólo en este caso, prescrita como general por Newton.

(*b*)—Pues si, por el contrario, $-a_0$ es valor aproximado de *dos raices*, ó si a y b, en vez de discrepar sensiblemente, difieren poquísimo una de otra, vamos á ver que la precedente conclusion no puede admitirse como cierta. Entónces, en efecto, (81)

$$\varepsilon_{01}=\frac{1}{a-a_0}+\frac{1}{b-a_0}+\text{ términos despreciables;}$$

$$\varepsilon_{02}=\frac{1}{(a-a_0)(b-a_0)}+\text{ id. id.;}$$

$$\varepsilon_{03}=\frac{M}{(a-a_0)(b-a_0)};\quad \varepsilon_{04}=\frac{N}{(a-a_0)(b-a_0)};\ \ldots\ldots$$

Con lo cual la ecuacion (77) se transformará en la que sigue:

$$(82) \quad 1 + \varepsilon_{01} . \Delta x_0 + \varepsilon_{02} . \Delta x_0^2 + \varepsilon_{03} . \Delta x_0^3 + \ldots\ldots =$$

$$1 + \Delta x_0 \left\{ \frac{1}{a - a_0} + \frac{1}{b - a_0} \right\} + \frac{\Delta x_0^2}{(a - a_0)(b - a_0)} +$$

$$\frac{M . \Delta x_0^3}{(a - a_0)(b - a_0)} + \frac{N . \Delta x_0^4}{(a - a_0)(b - a_0)} + \ldots\ldots = 0.$$

Como cantidades finitas pueden considerarse en esta ecuacion las fracciones $\frac{\Delta x_0}{a - a_0}$, $\frac{\Delta x_0}{b - a_0}$ y $\frac{\Delta x_0^2}{(a - a_0)(b - a_0)}$; puesto que numerador y denominador son del mismo órden de magnitud absoluta. Pero las fracciones siguientes, cuyos numeradores, por la introduccion sucesiva del factor muy pequeño Δx_0, disminuyen cada vez más rápidamente, deberán ó podrán tildarse como insignificantes, en parangon con las primeras. Luego, en el nuevo supuesto que ahora examinamos, de ser a_0 valor comun aproximado de a y de b, nos resultará que

$$1 + \Delta x_0 \left(\frac{1}{a - a_0} + \frac{1}{b - a_0} \right) + \Delta x_0^2 . \frac{1}{(a - a_0)(b - b_0)} =$$

$$\left(1 + \frac{\Delta x_0}{a - a_0} \right) \left(1 + \frac{\Delta x_0}{b - a_0} \right) = 0; \quad \text{ó}$$

$$(83) \quad 1 + \varepsilon_{01} . \Delta x_0 + \varepsilon_{02} . \Delta x_0^2 = 1 + \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \Delta x_0 + \frac{f''(x_0)}{f(x_0)} . \frac{\Delta x_0^2}{2} = 0.$$

Resolviendo esta última ecuacion, se obtendrán para Δx_0 *dos* valores: *reales* y *desiguales*, si a y b son reales y su discrepancia de valor comienza en este punto; reales, pero *iguales*, si a y b son absolutamente iguales, ó si la primera aproximacion no basta para poner en claro todavía su pequeña divergencia; é *imaginarios* ambos, si a y b son raices de esta especie.

(c)—En el último de estos tres supuestos, ó cuando el valor *real*, a_0, sea valor aproximado de dos *imaginarias*, a

y b, estas raices, completadas por la resolucion de la ecuacion (83), serán de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, una, y de la conjugada, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, la otra. Con la particularidad notable de que β representará entónces una cantidad real muy pequeña, ó del mismo órden de magnitud que $\alpha-a_0$. En efecto: la ecuacion (83) exige que el denominador de ε_{01} sea del mismo órden que $a-a_0$, ó que Δx_0; y como

$$\varepsilon_{01}=\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}-a_0}+\frac{1}{\alpha-\beta\sqrt{-1}-a_0}=\frac{2}{(\alpha-a_0)+\dfrac{\beta^2}{\alpha-a_0}},$$

si β no es cantidad muy pequeña, ε_{01} lo será; y $\varepsilon_{01}\times\Delta x_0$, que hemos considerado como cantidad finita, podría muy bien ser insignificante ó despreciable.

(*d*)—El caso general, ó aquel en que la ecuacion propuesta tenga m raices *iguales* ó *casi iguales*, cuyo valor comun aproximado sea $-a_0$, no necesita, despues de cuanto llevamos expuesto y discutido, explanarse muy detenidamente. En vez de la ecuacion (83), que puede escribirse de este otro modo

$$f(x)+\Delta x_0\times f'(x_0)+\frac{\Delta x_0^{\,2}}{2}\times f''(0_0)=0,$$

y que es aplicable al caso de *dos* raices iguales ó muy poco diferentes, obtendríamos la que sigue, cuando las raices de esta especie fuesen *tres:*

$$f(x_0)+\Delta x_0\times f'(x_0)+\frac{\Delta x_0^{\,2}}{1.2}\times f''(x_0)+\frac{\Delta x_0^{\,3}}{1.2.3}\times f'''(x_0)=0.$$

Y, cuando fuesen m, esta otra: (84)

$$f(x_0)+\Delta x_0\times f'(x_0)+\ldots\ldots+\frac{\Delta x_0^{\,m}}{1.2.3.\ldots.m}\times f^m(x_0)=0.$$

Los m valores de Δx_0, que de esta ecuacion se dedujeren, serían las correcciones que al valor comun *aproximado*, $-a_0$, deberíamos aplicar para deducir las m raices, *casi iguales*, de la ecuacion propuesta. Y es claro que, segun la divergencia más ó ménos perceptible de estas m raices, así los m valores de Δx_0 serán más ó ménos divergentes unos de otros, y, en consecuencia, ménos ó más difíciles de encontrar. Pero imposibilidad teórica de hallarlos no existe; y las dificultades prácticas ni invalidan el procedimiento de investigacion, ni, ménos, le acreditan de erróneo. Son dificultades insuperables, como inherentes al problema, y comunes á todos los métodos propuestos ó que pudieran en adelante proponerse para su resolucion.

(e)—Para llegar á las conclusiones precedentes hemos, en general, supuesto que el valor $-a_0$ lo era aproximado de dos ó más raices *reales*, casi iguales: supongamos ahora que se trata de raices *imaginarias*, muy poco diferentes, y veremos que las consecuencias ni en la apariencia casi discrepan de las ya deducidas. Rigurosamente pensando, y en atencion á la índole del razonamiento que precede, no habría necesidad de modificar ó ampliar en este segundo concepto la investigacion, ya en el primero verificada. Mas nada se perderá, sin embargo, por insistir un poco más sobre esta tan interesante materia.

Representemos, pues, por $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$ un valor aproximado, comun á las dos expresiones $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ y $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$; ó supongamos que la ecuacion propuesta contiene dos pares de raices imaginarias, $-\alpha \mp \beta\sqrt{-1}$ y $-\alpha' \mp \beta'\sqrt{-1}$, muy poco divergentes uno de otro. Si β_0 es cantidad muy pequeña, el valor *real* de x_0, igual á $-\alpha_0$ sería el valor aproximado que debería servirnos para hallar los de Δx_0; y el caso coincidiría con el ya anteriormente (c) examinado. A las suposiciones preliminares debemos agregar la de que β_0, y, por lo tanto, β y β', sean cantidades finitas, y de ningun modo despreciables ó evanescentes.

Si en la expresion

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{a-a_0} + \frac{1}{b-a_0} + \frac{1}{c-a_0} + \frac{1}{d-a_0} + \ldots\ldots$$

en vez de $a, b, c, d, \ldots$ ponemos $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, $\alpha' - \beta'\sqrt{-1}, \ldots$; y por a_0 el valor imaginario aproximado $\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, nos resultará esta otra:

$$\varepsilon_{01} = \frac{1}{(\alpha-\alpha_0)+(\beta-\beta_0)\sqrt{-1}} + \frac{1}{(\alpha'-\alpha_0)+(\beta'-\beta_0)\sqrt{-1}} +$$

$$\frac{1}{(\alpha-\alpha_0)-(\beta+\beta_0)\sqrt{-1}} + \frac{1}{(\alpha'-\alpha_0)-(\beta'+\beta_0)\sqrt{-1}} + \ldots\ldots$$

Por hipótesis se sabe, ó debe admitirse como cierto, que $\alpha-\alpha_0$, $\alpha'-\alpha_0$, $\beta-\beta_0$ y $\beta'-\beta_0$ son cantidades muy pequeñas; pero no $\beta+\beta_0$, ni $\beta'+\beta_0$, ni las demas cantidades análogas que figurarían en la composicion de los denominadores, sucesivos á los expresos en la fórmula anterior.

El valor ó los valores buscados de Δx_0 han de ser tambien de la forma comun: $M + N\sqrt{-1}$; en la cual M y N representan, en términos generales, cantidades reales muy pequeñas. Por lo tanto, el primer término de la expresion simbólica $\varepsilon_{01} \times \Delta x_0$ será igual á

$$\frac{M+N\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)+(\beta-\beta_0)\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{\{M+N\sqrt{-1}\}\times\{(\alpha-\alpha_0)-(\beta-\beta_0)\sqrt{-1}\}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2} =$$

$$\frac{M_1+N_1\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2}:$$

designando por M_1 y N_1 sumas de productos de dos cantidades reales muy pequeñas: ó cantidades, en general tambien, del mismo órden de magnitud absoluta que $(\alpha-\alpha_0)^2$ y $(\beta-\beta_0)^2$. Luego aquel primer término de $\varepsilon_{01} \times \Delta x_0$ podrá representarse por $M_2 + N_2\sqrt{-1}$, si M_2 y N_2 designan los resultados de dividir unas por otras cantidades en magnitud comparables, ó cocientes finitos.

Y lo dicho á propósito del primer término puede repetirse sin variante cuando se trate del segundo.

Pasemos al tercero, que será de la forma

$$\frac{M+N\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)-(\beta+\beta_0)\sqrt{-1}}=$$

$$\frac{\{M+N\sqrt{-1}\}\times\{(\alpha-\alpha_0)+(\beta+\beta_0)\sqrt{-1}\}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta+\beta_0)^2}=$$

$$\frac{\{M(\alpha-\alpha_0)-N(\beta+\beta_0)\}+\{N(\alpha-\alpha_0)+M(\beta+\beta_0\}\sqrt{-1}}{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta+\beta_0)^2}.$$

En el numerador de la última fraccion adviértese que las cantidades $M(\alpha-\alpha_0)$ y $N(\alpha-\alpha_0)$,— productos de dos factores muy pequeños,— se hallan parangonadas, y combinadas por adicion, con las $N(\beta+\beta_0)$ y $M(\beta+\beta_0)$, procedentes de la multiplicacion de los factores, muy reducidos, N y M por $\beta+\beta_0$, que se supone finito, ó de un órden de magnitud muy superior. Y una cosa parecida se observa tambien en el denominador del mismo quebrado, compuesto de dos solos términos: evanescente, el primero; y el segundo finito y de valor relativo muy considerable. Luego, *aproximadamente,* y tanto más cuanto ménos discrepen α y α_0, los cuales, por la índole propia del problema, propenden á confundirse uno con otro, aquel tercer término de $\varepsilon_{01}\times\Delta x_0$, que ahora en particular consideramos, se reducirá á

$$\frac{-N+M\sqrt{-1}}{\beta+\beta_0};$$

que sobre el primero, ántes representado por $M_2+N_2\sqrt{-1}$ ejercerá influencia muy poco notable.

Y como lo propio que del tercero cabe decir del cuarto, y de todos los demas consecutivos, resulta, en conclusion, que en la expresion $\varepsilon_{01} \times \Delta x_0$ sólo serán términos eficaces, y que merezcan llevarse en cuenta, los dos primeros.

Pues por consideraciones análogas, é igualmente sencillas, infiérese asimismo que en la expresion $\varepsilon_{02} \times \Delta x_0^2$ sólo el primer término es comparable en magnitud con los dos primeros en la precedente conservados; y que, en cotejo con estos tres términos, ninguno de los comprendidos en las expresiones análogas, $\varepsilon_{03} \times \Delta x_0^3$, $\varepsilon_{04} \times \Delta x_0^4$, ..., merece respetarse.

Concuerdan, pues, estas premisas con las establecidas poco há (*b*), como si sólo de la existencia de dos raices *reales*, casi iguales, se tratara; y, por lo tanto, la consecuencia entónces deducida debe considerarse como general ó aplicable á todos los casos. Cuando se conozca, segun esto, un valor aproximado de x, de la forma $x_0 = -\alpha_0 - \beta_0 \sqrt{-1}$, que corresponda á dos raices imaginarias de la ecuacion propuesta, casi iguales, la separacion de estas raices, ó el cálculo de las correcciones de x_0, podrá verificarse construyendo y resolviendo la misma ecuacion auxiliar (83).

Pero es de advertir ó recordar que, si la ecuacion primitiva contiene dos raices imaginarias, casi iguales, de la forma $-\alpha - \beta\sqrt{-1}$, tambien contendrá otras dos de la $-\alpha + \beta\sqrt{-1}$; y, en consecuencia, sustituyendo en la (83), por x_0, el valor aproximado $-\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{-1}$, obtendríamos luégo estas raices. Y si ambas sustituciones se verificasen en la ecuacion auxiliar citada sucesivamente, y uno por otro multiplicásemos los resultados así obtenidos, formaríase una ecuacion final de cuarto grado, cuyas raices serían los cuatro valores buscados de Δx_0, iguales todavía ó ya diferentes, segun la coincidencia ó divergencia de las cuatro raices de la ecuacion propuesta, cuyo primer valor aproximado designa la expresion $-\alpha_0 \mp \beta_0 \sqrt{-1}$, que nos sirve de punto de partida.

El caso en que la ecuacion contuviese tres raices imaginarias casi iguales, ó tres pares de raices conjugadas, representadas aproximadamente por $-\alpha_0 \mp \beta_0 \sqrt{-1}$, se resolvería de un modo análogo; ó dependería de la resolucion de dos ecuaciones de tercer grado, ó de una sola de sexto, formadas por la misma ley y procedimiento que las de segundo y cuarto grados en el precedente. Y el caso general, despues de cuanto en este párrafo llevamos referido, tampoco presentaría dificultad alguna teórica nueva.

§. 32.

Extension del método de Newton al problema en este capítulo considerado.

(a)—La ecuacion auxiliar (84) puede escribirse en esta otra forma, ya considerada anteriormente y más útil en la práctica:

$$f(x_0) + x_0 f'(x_0) \times \left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right) + \tfrac{1}{2} x_0^2 f''(x_0) \times \left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 +$$

$$\frac{1}{1.2.3} x_0^3 f'''(x_0) \times \left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^3 + \ldots\ldots = 0.$$

O en la que sigue, análoga tambien á otras anteriores, (85)

$$[x_0^n] + [n x_0^n] \times (\Delta \log x_0) + \tfrac{1}{2} [n(n-1) x_0^n] \times (\Delta \log x_0)^2 +$$

$$\tfrac{1}{6} [n(n-1)(n-2) x_0^n] \times (\Delta \log x_0)^3 + \ldots\ldots = 0,$$

si representamos en otra forma simbólica las funciones ó expresiones algebráicas

$$f(x_0), \quad x_0 f'(x_0), \quad x_0^2 f''(x_0), \quad x_0^3 f'''(x_0), \ldots\ldots, \text{ por}$$

$$[x_0^n], \quad [n x_0^n], \quad [n(n-1) x_0^n], \quad [n(n-1)(n-2) x_0^n], \ldots .$$

que, á contar de la primera, de significacion bien clara, se desprenden unas de otras como sigue.

La $[n x_0^n]$, multiplicando sucesiva y respectivamente los términos de la $[x_0^n]$ por n, $n-1$, $n-2$, ... El último de aquellos términos, multiplicado por $n-n$, dará *cero* de producto, y desaparecerá de la nueva expresion que se trata de obtener.

La $[n(n-1)x_0^n]$ multiplicando de análogo modo los términos de la $[n x_0^n]$ por $n-1$, $n-2$, $n-3$, ..., hasta por $n-n$.

Y de esta la que sigue, y así todas las demás consecutivas, por multiplicaciones de los términos de la que últimamente se hubiere formado, sucesivamente por los números $n-2$, $n-3$, ... , ó $n-3$, $n-4$, ... , etc., etc., siempre hasta el $n-n$.

La incógnita de la ecuacion (85) es $\Delta \log x_0$, si se trata de logaritmos *neperianos;* ó $M \times \Delta \log x_0$, si los logaritmos son los vulgares ó de Briggs. El *módulo M*, en este caso, vale 0.4342945; cuyo logaritmo, vulgar tambien, es igual á $\bar{1},6377843$.

(*b*)—Ninguna otra advertencia importante hay que agregar á lo dicho cuando de la separacion de raices reales, casi iguales, exclusivamente se trata; mas, cuando versa el problema sobre la distincion de dos ó más raices imaginarias, el asunto puede presentarse bajo nueva faz, digna de consideracion y estudio.

El valor aproximado comun de estas raices, $-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$, puede, en efecto, designarse de este otro modo: $-g_0(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi_0)$; y si en la ecuacion auxiliar (85) ponemos por x_0 esta expresion, nos resultará la que sigue: (86)

$$\left\{P\cos Q + \rho\cos\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right) + {}^1/_2\,\rho'\cos\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + \right.$$

$$\left. {}^1/_6\,\rho''\cos\psi''.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^3 + \ldots\right\} +$$

$$\left\{P\operatorname{sen} Q + \rho\operatorname{sen}\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right) + {}^1/_2\,\rho'\operatorname{sen}\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + \right.$$

$$\left. {}^1/_6\,\rho''\operatorname{sen}\psi''.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^3 + \ldots\right\} \times \sqrt{-1} = 0;$$

en la cual, por g_0 y φ_0, por P y Q, ρ y ψ, ρ' y ψ', ..., deberán sustituirse los valores de estas cantidades que de las relaciones adjuntas se deduzcan: (87)

$$\left.\begin{array}{r}
\alpha_0 = g_0 \cos \varphi_0 \\
[(-g_0)^n \cos n\, \varphi_0] = P \cos Q \\
[n\,(-g_0)^n \cos n\, \varphi_0] = \rho \cos \psi \\
[n\,(n-1)\,(-g_0)^n \cos n\, \varphi_0] = \rho' \cos \psi' \\
[n\,(n-1)\,(n-2)\,(-g_0)^n \cos n\, \varphi_0] = \rho'' \cos \psi'' \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}, \text{ y}$$

$$\left.\begin{array}{r}
\beta_0 = g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \\
[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\, \varphi_0] = P \operatorname{sen} Q \\
[n\,(-g_0)^n \operatorname{sen} n\, \varphi_0] = \rho \operatorname{sen} \psi \\
[n\,(n-1)\,(-g_0)^n \operatorname{sen} n\, \varphi_0] = \rho' \operatorname{sen} \psi' \\
[n\,(n-1)\,(n-2)\,(-g_0)^n \operatorname{sen} n\, \varphi_0) = \rho'' \cos \psi'' \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}.$$

Y si, en vez de x_0, hubiésemos puesto el valor $-\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}$, igual á $-g_0(\cos\varphi_0 - \sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi_0)$, la ecuacion resultante sólo se hubiera diferenciado de la (86) por el signo de todos los términos multiplicados por el radical imaginario $\sqrt{-1}$. Ambas ecuaciones se funden en una sola, cuyas raices serán las correcciones que deben aplicarse á las dos conjugadas $-\alpha_0 \mp \beta_0\sqrt{-1}$, conforme á lo advertido al final del párrafo anterior, elevando al cuadrado la (86), despues de pasar á su segundo miembro los términos afectados del expresado radical imaginario. El resultado de esta sencilla operacion, ó la ecuacion final que buscamos, es la siguiente:

$$\left\{P\cos Q + \rho\cos\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right) + {}^1/_2\,\rho'\cos\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + \ldots\right\}^2 +$$

$$\left\{P\,\mathrm{sen}\,Q + \rho\,\mathrm{sen}\,\psi.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right) + {}^1/_2\,\rho'\mathrm{sen}\,\psi'.\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + \ldots\right\}^2 = 0.$$

(c)—Prescindamos con esto del caso más complicado y general que en el asunto puede presentarse, y limitémonos al exámen minucioso de los dos particulares más sencillos.

Si, por de pronto suponemos que el valor de x_0, igual á $-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$, lo es aproximado de una sola raiz de la ecuacion propuesta, $-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, la correccion, Δx_0, de este valor se desprenderá de la ecuacion auxiliar siguiente, á que se reduce entónces la (86):

$$P\,(\cos Q + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ Q) + \rho\,(\cos\psi + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ \psi)\,\frac{\Delta x_0}{x_0} = 0.$$

De la cual se deduce que

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -\frac{P}{\rho}\left\{\cos\,(Q-\psi) + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,(Q-\psi)\right\}.$$

Pero tambien, por definicion casi,

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{(\alpha-\alpha_0) + (\beta-\beta_0)\sqrt{-1}}{\alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{(g\cos\varphi - g_0\cos\varphi_0) + (g\,\mathrm{sen}\,\varphi - g_0\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)\sqrt{-1}}{g_0\,(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,\varphi_0)}.$$

O, multiplicando numerador y denominador del último quebrado por $\cos\varphi_0 - \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\,\varphi_0$, y verificando luégo algunas reducciones sencillísimas,

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = -1 + \frac{g}{g_0}\cos\,(\varphi-\varphi_0) + \sqrt{-1}\,.\,\frac{g}{g_0}\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\varphi_0).$$

Y de la comparacion de ambos valores de Δx_0 se desprenden estas nuevas relaciones:

$$(88)\begin{cases} \dfrac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0)=1-\dfrac{P}{\rho}\cos(Q-\psi), \text{ y} \\ \dfrac{g}{g_0}\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0)=-\dfrac{P}{\rho}\operatorname{sen}(Q-\psi). \end{cases}$$

Adviértase ahora que φ y g son los límites hacia los cuales indefinidamente se aproximan φ_0 y g_0; ó que $\varphi-\varphi_0$, igual á $\Delta\varphi_0$, debe ser cantidad muy pequeña; y discrepar tambien muy poco de la unidad la relacion $\frac{g}{g_0}$, equivalente á $1+\omega$, si ω designa otra cantidad del órden de magnitud que $\Delta\varphi_0$. Por lo tanto, el primer miembro de la primera ecuacion (88),

$$\frac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{g}{g_0}\left\{1-\tfrac{1}{2}(\Delta\varphi_0)^2+\ldots\right\},$$

podrá muy aproximadamente considerarse reducido á la simple relacion $\frac{g}{g_0}$. Y el primero de la segunda

$$\frac{g}{g_0}\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0)=(1+\omega)\left\{\Delta\varphi_0-\tfrac{1}{6}(\Delta\varphi_0)^3+\ldots\right\},$$

como igual á $(1+\omega)\,\Delta\varphi_0$, ó simplemente á $\Delta\varphi_0$.

Con lo cual á las mencionadas relaciones (88) reemplazarán las siguientes, ya consignadas en el §. 14, y deducidas entónces por procedimiento algo distinto y ménos general: (89)

$$\Delta\log g_0=-\frac{PM}{\rho}\cos(Q-\psi);\ \text{y}\ \Delta\varphi_0=-\frac{P}{\rho}\frac{\operatorname{sen}(Q-\psi)}{\operatorname{sen}1''}.$$

Pues supongamos ahora que $-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}$ sea valor aproximado de *dos* raices imaginarias, casi iguales, $-\alpha-\beta\sqrt{-1}$ y $-\alpha'-\beta'\sqrt{-1}$, de la ecuacion propuesta.

La correccion Δx_0, que deberá tener dos distintos valores, si las raices no son absolutamente iguales, se calculará resolviendo la ecuacion auxiliar siguiente, en que se convierte en este caso la general (86):

$$P(\cos Q+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,Q)+\rho\,(\cos\psi+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\psi)\frac{\Delta x_0}{x_0}+$$

$$\frac{1}{2}\rho'(\cos\psi'+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\psi')\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2=0.$$

De la cual, inmediatamente, se deduce esta otra:

$$\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2+2\frac{\rho}{\rho'}\left\{\cos(\psi-\psi')+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\psi-\psi')\right\}\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)+$$

$$\frac{2P}{\rho'}\left\{\cos(Q-\psi')+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,(Q-\psi')\right\}=0.$$

Y de ésta la que sigue: (90)

$$\frac{\Delta x_0}{x_0}=-\frac{\rho}{\rho'}\left\{\cos(\psi-\psi')+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,(\psi-\psi')\right\}\pm$$

$$\frac{\delta}{\rho'}(\cos\gamma+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\gamma),$$

si suponemos que δ y γ proceden de la resolucion de las dos siguientes ecuaciones:

$$(91)\quad\begin{cases}\delta^2\cos 2\gamma=\rho^2\cos 2(\psi-\psi')-2P\rho'\cos(Q-\psi'), & \text{y}\\ \delta^2\,\text{sen}\,2\gamma=\rho^2\,\text{sen}\,2(\psi-\psi')-2P\rho'\,\text{sen}\,(Q-\psi')\end{cases}$$

Pero, en términos generales, y como por definicion, conforme poco ántes se verificó, tambien puede escribirse, representando por l y L dos nuevas indeterminadas, que

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{(g\cos\varphi - g_0\cos\varphi_0) + \sqrt{-1}\,(g\,\mathrm{sen}\,\varphi - g_0\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)}{g_0\,(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)} =$$

$$\frac{l\,(\cos L + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,L)}{g_0\,(\cos\varphi_0 + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi_0)} = \frac{l}{g_0}\left\{\cos(L-\varphi_0) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(L-\varphi_0)\right\}$$

Y de la comparacion de estos dos valores ó expresiones de Δx_0 nos resulta luégo que

$$(92)\quad \begin{cases} \dfrac{l}{g_0}\cos(L-\varphi_0) = -\dfrac{\rho}{\rho'}\cos(\psi-\psi') \pm \dfrac{\delta}{\rho'}\cos\gamma, & \text{y} \\[2ex] \dfrac{l}{g_0}\,\mathrm{sen}(L-\varphi_0) = -\dfrac{\rho}{\rho'}\,\mathrm{sen}(\psi-\psi') \pm \dfrac{\delta}{\rho'}\,\mathrm{sen}\,\gamma \end{cases}$$

Entre las cantidades g, g_0 y l, y φ, φ_0 y L, existen estas relaciones necesarias y evidentes:

$$g\cos\varphi = g_0\cos\varphi_0 + l\cos L, \quad \text{y}$$

$$g\,\mathrm{sen}\,\varphi = g_0\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 + l\,\mathrm{sen}\,L.$$

De las cuales, con suma sencillez se desprenden estas otras:

$$(93)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0) = 1 + \dfrac{l}{g_0}\cos(L-\varphi_0), & \text{y} \\[2ex] \dfrac{g}{g_0}\,\mathrm{sen}(\varphi-\varphi_0) = \dfrac{l}{g_0}\,\mathrm{sen}(L-\varphi_0). \end{cases}$$

Y, finalmente, las que siguen por la combinacion de los sistemas (92) y (93) uno con otro:

$$(94)\quad \begin{cases} \dfrac{g}{g_0}\cos(\varphi-\varphi_0) = 1 - \dfrac{\rho}{\rho'}\cos(\psi-\psi') \pm \dfrac{\delta}{\rho'}\cos\gamma, & \text{y} \\[2ex] \dfrac{g}{g_0}\,\mathrm{sen}(\varphi-\varphi_0) = -\dfrac{\rho}{\rho'}\,\mathrm{sen}(\psi-\psi') \pm \dfrac{\delta}{\rho'}\,\mathrm{sen}\,\gamma. \end{cases}$$

Expresiones las últimas que pueden simplificarse, con solo advertir que en la primera por $\cos(\varphi-\varphi_0)$ es lícito poner ó sustituir la unidad; y la unidad tambien en la segunda por $\frac{g}{g_0}$. Restableciendo el módulo M, para pasar de los logaritmos neperianos á los vulgares, nos resulta, en efecto, entónces que

$$(95)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{M}\times\Delta\log g_0=-\frac{\rho}{\rho'}\cos(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\rho'}\cos\gamma, \quad \text{y} \\ \\ \operatorname{sen}1''\times\Delta\varphi_0=-\frac{\rho}{\rho'}\operatorname{sen}(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\rho'}\operatorname{sen}\gamma.\end{array}\right.$$

Con auxilio de estas últimas fórmulas, despues de conocer el valor de x, aproximado á la verdad, $x_0=-\alpha_0-\beta_0\sqrt{-1}=-g_0(\cos\varphi_0+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi_0)$, fácil será calcular las correcciones de g_0 y de φ_0, y deducir así otro más digno de confianza todavía, ó los dos valores de x, casi iguales, que ahora se buscan. En los segundos miembros de aquellas fórmulas las cantidades que figuran son funciones explícitas de los coeficientes de la ecuacion propuesta y del valor x_0, aproximado del de x; y, por lo tanto, pueden considerarse como determinadas ó conocidas todas. Nada, pues, se opone al cálculo de las correcciones mencionadas.

§. 33.

Aplicacion de la doctrina expuesta en los párrafos anteriores á la resolucion de un ejemplo.

Conforme hemos practicado en otros casos análogos, presentemos tambien ahora un ejemplo muy sencillo, al cual sea aplicable la doctrina en este capítulo comprendida. Otro, algo más complicado é interesante, se resolverá y discutirá al final del capítulo siguiente, y último de la MEMORIA. Y bastarán al lector este par de ejemplos para saber á qué atenerse en cuantos otros casos análogos pudieren ocurrirle ó presentársele en la práctica.

Sea la ecuacion

$$(2^0) \qquad x^4 + 312\,x^3 + 23337\,x^2 - 14874\,x + 2360 = 0.$$

Reemplazando los coeficientes por sus logaritmos, y procediendo en la aplicacion de la regla del §. 3, como tantas otras veces se ha explicado y procedido, hállanse los resultados adjuntos:

$$(2^0) \qquad x^4 + 2.4941546\,x^3 + 4.3680450\,x^2 - 4.1724278\,x + 3.3729120 = 0$$

$$(2^1) \qquad x^4 + 4.7047509\,x^3 + 8.7434327\,x^2 + 8.0456566\,x + 6.7458240 = 0$$

$$(2^2) \qquad x^4 + 9.1642474\,x^3 + 17.4868507\,x^2 + 15.7902797\,x + 13.4916480 = 0$$

$$(2^3) \qquad x^4 + 18.1809775\,x^3 + 34.9737014\,x^2 + 31.2795301\,x + 26.9832960 = 0$$

$$(2^4) \qquad x^4 + 36.3248902\,x^3 + 69.9474028\,x^2 + 62.2580331\,x + 53.9665920 = 0$$

$$(2^5) \qquad x^4 + 72.6480534\,x^3 + 139.8948056\,x^2 + 124.2150484\,x + 107.9331840 = 0$$

$$(2^6) \qquad x^4 + 145.2961033\,x^3 + 279.7896112\,x^2 + 248.1291140\,x + 215.8663680 = 0$$

Que las cuatro raices de la ecuacion (2^0) son *reales* se infiere de la constancia de los signos, positivos en todos los términos de todas las transformadas de aquella ecuacion. El producto, $a\,b$, de las dos raices mayores, se halla ya separado del $c\,d$, de las dos menores, ó, en absoluto, más pequeñas, en la transformada (2^2); pero la raiz a no se desprende de la b hasta la (2^6); y las c y d permanecen confundidas hasta una transformada de órden muy elevado, y que sería por extremo fastidioso, si no insensato de todo punto, empeñarse en deducir. Obtenida, pues, la (2^2), fácil sería descomponer la (2^0) ó la (2^1) en dos trinomios de segundo grado, por el procedimiento expuesto y practicado en el Capítulo IV, y hallar, en consecuencia, los valores aproximados de las cuatro raices; mas, como ahora se trata de llegar al mismo fin por muy distinto camino, prescindiremos por completo de aquel antiguo procedimiento, ya conocido del lector.

De la ecuacion (2^6) se deduce por de pronto que

$$\left.\begin{aligned} 2^6 . \log a &= 145.2961033 \\ \log a &= 2.2702516 \\ a &= 186.3166\ldots.. \end{aligned}\right\} \text{ y } \left.\begin{aligned} 2^6 . \log ab &= 279.7896112 \\ \log\ b &= 2.1014611 \\ b &= 126.3168\ldots.. \end{aligned}\right\}$$

Y si las raices c y d, que se resisten á la separacion, fuesen en realidad *iguales*, de la misma transformada (2^6), aproximadamente se concluiría tambien, por lo dicho en el §. 27, que

$$\log . 2\,(a\,b\,c)^{2^6} = 248.1291140, \text{ ó } \log a\,b\,c = 3.8723138; \quad \text{y}$$

$$\log . \ (abc^2)^{2^6} = 215.8663680, \text{ ó } \log abc^2 = 3.3729120.$$

Y restando del logaritmo de abc el de ab, y del de abc^2 el de abc, se hallarán estos dos valores, casi iguales, del de c, y luégo de c:

$$\left.\begin{aligned} \log c = \bar{1}.5006011 \\ \bar{1}.5005982 \end{aligned}\right\} \text{ y } \left.\begin{aligned} c = d = 0.316666 \\ 0.316664 \end{aligned}\right\}.$$

Las dos raices c y d parece, pues, que se confunden, ó que, limitadas á la sexta cifra decimal, tienen por valor aproximado comun éste:

$$x_0 = c = d = 0.316665.$$

Pero ¿son absolutamente iguales?

Para decidirlo hay que formar la ecuacion (83) del §. 31, y tratar de deducir los valores de Δx_0. En la ecuacion (2°), en su *derivada* primera, y en la segunda, dividida por 2, habrá, pues, que sustituir por x_0 el valor comun aproximado de c y d; y así se obtendrán los coeficientes de aquélla ecuacion (83), aplicable al caso de que ahora se trata, y cuya resolucion, despues de formada, no presentará la menor dificultad.

La ecuacion á que nos referimos es la siguiente:

$$23634.000100333350\,\Delta x_0^2 + 0.008238515573\,\Delta x_0 - 0.000000022204 = 0.$$

Y los valores de Δx_0, que de ella se desprenden, serán éstos:

$$\Delta x_0 = +0.000000178307; \quad \text{y} \quad -0.000000526895.$$

Por lo tanto, las raices c y d, *positivas* ambas, en vez de confundirse por completo, valdrán respectivamente lo que sigue; y su separacion, dificilísima, queda con esto verificada:

$$c = +0.316665178307; \quad \text{y}$$

$$d = +0.316664473105.$$

Los valores de las a y b, *negativas*, en la acepcion comun algebráica, pueden corregirse por la regla de Newton; y, limitados á la 10.ª cifra decimal, son éstos:

$$a = -186.3166651783; \quad \text{y}$$

$$b = -126.3166644731.$$

Las cuatro raices de la ecuacion propuesta son en realidad las siguientes:

$$-63 \pm \sqrt{4009}; \quad \text{y} \quad -93 \pm \sqrt{8708}.$$

Pero el procedimiento de resolucion, en éste y los precedentes capítulos explicado, sólo puede suministrarnos valores más ó menos aproximados, en forma de fraccion decimal indefinida, de aquellas cuatro raices.

(*Se continuará.*)

ÁCIDO PERSULFÚRICO.

Si concluyó bien el año último para las ciencias físico-químicas con el cambio de estado de los hasta entonces llamados gases permanentes, el actual parece que no le andará en zaga á juzgar por algunos con que se ha inaugurado. Es una buena prueba de esto el descubrimiento de un nuevo ácido del azufre, más oxidado que los oxácidos del mismo hasta ahora conocidos, denominado por lo mismo *ácido persulfúrico* por su descubridor Mr. Berthelot, antiguo preparador, y en la actualidad dignísimo profesor de química en el *Colegio de Francia,* ó sea en la escuela destinada á los estudios superiores en la capital de la vecina república. Hé aquí de qué manera describe su nuevo ácido (1).

«He obtenido, dice, un nuevo ácido oxidado del azufre, el ácido persulfúrico, correspondiente por su composicion á los ácidos permangánico y percrómico, cuya existencia está conforme con las analogías sacadas del estudio comparativo de los sulfatos, cromatos y manganatos.

»*Formacion.*—Se puede obtener puro y anhidro haciendo obrar el *efluvio* eléctrico á una grande tension sobre una mezcla de ácido sulfuroso y de oxígeno, perfectamente secos y en volúmenes iguales. El ácido sulfúrico concentrado no se une con el oxígeno, ni con el ozono, en iguales condiciones.

»Fórmase tambien el ácido persulfúrico, disuelto, durante la electrolisis de las disoluciones concentradas del ácido sulfúrico, habiéndose confundido en éste caso hasta el presente, unas veces con el agua oxigenada y otras con la sustancia imaginaria llamada *antozono.*

»Fórmase asímismo éste ácido, tambien disuelto, mez-

(1) *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 20.

clando cuidadosamente una disolucion de agua oxigenada con el ácido sulfúrico concentrado, ó diluido en una cantidad de agua que no llega á un equivalente; pero ésta combinacion no tiene lugar si el ácido sulfúrico tiene dos ó más equivalentes de agua. De todos modos, la formacion del ácido persulfúrico es parcial, pues siempre queda una parte de agua oxigenada por reaccionar.

»Es probable que se forme tambien el ácido persulfúrico en otras circunstancias en que el sulfúrico concentrado actue sobre los peróxidos alcalinos ó metálicos, y sobre otros agentes oxidantes á bajas temperaturas.

»*Preparacion.*—Se prepara el ácido persulfúrico en el aparato de tubos concéntricos descrito por Berthelot mismo el año pasado (*Annales de Chimie et de Physique*, 5^{me} *série*, t. XXII, p. 463) (1). Al cabo de ocho ó diez horas las superficies del espacio anular están cubiertas de gotitas de un líquido espeso y adhesivo. A veces este líquido se estiende en la superficie del vidrio, formando una telilla ó capa delgada é irisada. Expuesto el aparato á una temperatura inmediata al cero, no tarda en cristalizar el líquido, á veces en cristales granujientos, que no se distinguen bien, y otras en agujas trasparentes, delgadas y flexibles, de muchos centímetros de largo y bas-

(1) Consiste en un tubo de vidrio muy delgado, cerrado por un extremo, que por éste se introduce hasta la mitad en otro de mayor diámetro, igualmente delgado, más largo, tambien cerrado por su extremo inferior. La diferencia de los diámetros de estos tubos debe ser la menor posible, sin que por esto se toquen. El mayor está soldado con el menor por la boca por donde éste penetró. Además, el mayor tiene soldados en forma de cruz otros dos tubos de pequeño diámetro, inmediatos á la soldadura antes citada. Uno de éstos tubitos está cerrado á la lámpara, y el otro estrangulado, pero abierto. Por éste, y á beneficio de un tubo en forma de T, que tiene una llave de tres aguas ó pasos, se establece á voluntad la comunicacion entre el interior de los tubos grandes ó su espacio anular y un depósito gaseoso por el tubo horizontal, ó entre dicho espacio anular y un aparato aspirador por medio del tubo vertical, girando convenientemente la llave.—Establecidas las uniones entre estos diferentes órganos ó elementos de trabajo, se pone en comunicacion el espacio anular con el aparato aspirador y se hace funcionar éste, lográndose de este modo enrarecer lo más posible el aire contenido. Acto contínuo, girando la llave, se intercepta la comunicacion con el aspirador y facilita la que da paso al gas al espacio anular, con lo cual dicho está que éste, del que se habia separado ó

tante anchas, algunas de las cuales atraviesan el tubo, al paso que las otras permanecen fijas en sus paredes y reunidas en penachos brillantes. Tal es la muestra que tengo el honor de presentar á la Academia.

»El aspecto general de la sustancia recuerda el ácido sulfúrico anhidro. Este se distingue, no obstante, en que es opaco y forma agujas mucho más delgadas, más cortas y ménos laminares.

»No siempre se presentan las agujas hermosas que acabo de describir, y que repetidas veces he obtenido, por conservar con frecuencia el ácido persulfúrico el estado líquido y el de una cristalizacion confusa. No obstante, el análisis demuestra siempre, que su composicion es la misma, la cual no cambia sensiblemente por la presencia accidental de algunos vestigios de agua, de ácido nítrico ó nitrosulfúrico (procedente del nitrógeno) y de algunos compuestos salinos (procedentes de ser atacado el vidrio), si bien bastan para impedir ó dificultar la cristalizacion. Estas impurezas aumentarian, de otra parte, con la alterabilidad del vidrio y con la proporcion del nitrógeno; por cuyo motivo es preciso ponerse á cubierto de que se presenten en lo posible.»

Despues de lo que literalmente se acaba de exponer, pasa

---

aspirado la mayor parte del aire, se llenará de gas. Recobrando en seguida la llave su posicion primitiva, se aspira el gas que ha entrado, saliendo con él la mayor parte del aire que aún quedaba. Se llena otras tres ó cuatro veces con gas el espacio anular y se aspira en seguida, con lo cual se admite que todo el aire ha sido extraido del indicado espacio anular. Conseguido ésto, se vuelve á llenar el espacio anular con el gas ó la mezcla gaseosa sobre que se quiere trabajar (que es el mismo con que se extrajo el aire que aún quedaba despues de la primera aspiracion); se suelda á la lámpara el tubo por donde penetró en la seccion extrangulada; se lastra con unas tiras de plomo suspendidas de los tubos pequeños el conjunto de estos tubos; se introduce el mayor dentro de una probeta llena de ácido sulfúrico diluido, descansando en su boca por medio de los pequeños tubos que imitan los brazos de una cruz; se llena el concéntrico con el propio ácido sulfúrico diluido; se introduce en éste un alambre de platino en que termina el polo positivo del aparato productor de la corriente eléctrica, y en la probeta otro alambre de platino con el polo negativo, y poniendo en actividad el aparato productor de la electricidad, quedan los gases sometidos á la accion del *efluvio* eléctrico

Berthelot á fijar la composicion del ácido persulfúrico, que ha determinado desde luego por la síntesis y por el análisis.

Composicion por la síntesis.—Una vez terminada la reaccion, extrae con una bomba de mercurio el resíduo gaseoso, lo mide y analiza, y compara el volúmen que queda con el de la mezcla primitiva, encontrando que es $\frac{1}{8}$ de ésta (1).

$$\underbrace{S^2O^4}_{4\,vol.} + \underbrace{O^4}_{4\,vol.} = \underbrace{S^2O^7}_{1\,vol.} + \underbrace{O}_{1\,vol.}; \text{ es decir.... } 8 : 1$$

Repetidos dos veces estos trabajos, dieron los resultados siguientes:

Volúmen total.	*Resíduo.*	*Relacion.*
cc	cc	
38,5..............	4,7..........	8,2
82,0..............	10,5....	7,9

De donde resulta, que 4 volúmenes de ácido sulfuroso se combinan con 3 de oxígeno para formar el ácido persulfúrico.

$$S^2O^4 + O^3 = S^2O^7.$$

Composicion por el análisis.—El análisis del producto se puede hacer abriendo ó rompiendo una de las puntas de los tubos laterales debajo ó dentro de una disolucion valorada de cloruro estannoso. Esta disolucion es aspirada al momento por efecto de la falta de presion interior, motivada por la condensacion que tuvo lugar cuando se combinaron el ácido sulfuroso y el oxígeno para formar el ácido persulfúrico. Este ahora sobreoxida una parte de la disolucion estannosa. Buscando luego la cantidad de ésta que queda por peroxidar por medio de una disolucion valorada de permanganato de potasa puro, se sabe la cantidad de estaño que fijó oxígeno para pasar al estado de óxido estánnico, y por lo tanto, se tiene un dato fijo para calcular la cantidad de este oxígeno.—Hecho esto, se determina en el líquido resultante el ácido sulfúrico

---

(1) Las fórmulas que siguen, son las mismas que usa el autor.

que contiene, precipitándolo en estado de sulfato bárico, que se recoge en un filtro, lava, seca, calcina y pesa; restando luego del peso obtenido el del crisol y las cenizas del filtro, se tiene el peso verdadero del sulfato bárico, por el cual y su composicion se calcula el ácido sulfúrico.

Dos análisis ha efectuado Berthelot, segun el método que se acaba de indicar; uno de ellos con un ácido perfectamente cristalizado, y el segundo con otro, que tambien era cristalizado, si bien los cristales no eran tan hermosos. Los resultados que obtuvo fueron:

Oxígeno excedente.	*Acido sulfúrico.* (SO^3).	*Relacion.*
8,23......	83,4...........	10,1
10,00.....	94,1...........	9,4

La relacion teórica, $S^2O^6 = 80 : O = 8$, es igual á 10.

Hasta pesó Berthelot directamente la materia contenida en el tubo que sirvió para el segundo análisis; su peso total fué 104,0; la suma de los factores encontrados separadamente fué $10,0 + 94,1 = 104,1$; en lo cual se tiene una confirmacion elocuente de los trabajos ó resultados obtenidos por el análisis; demostrándose al propio tiempo que el ácido persulfúrico puro está sólo formado de azufre y oxígeno.

Siendo un trabajador tan hábil como incansable, Mr. Berthelot ha comprobado estos resultados por otros medios, que promete detallar en una memoria especial. Estos medios fueron:

1.° Emplear el ácido persulfúrico como agente oxidante de un volúmen conocido de una disolucion préviamente valorada de sulfato ferroso, y buscar luego con otra tambien valorada ó normal de permanganato de potasa, la sal ferrosa que quedaba. Para ello ha procedido de dos maneras distintas: en un caso hizo penetrar la disolucion de sulfato en los tubos del *efluvio*, y en el otro hizo que entrase en éstos el ácido sulfúrico concentrado, que disuelve el persulfúrico. Vertió en el segundo caso la disolucion resultante en una gran cantidad de agua, y en ésta buscó su poder oxidante por medio de una disolucion de sulfato ferroso. Los dos métodos le dieron resultados idénticos.

2.º Su poder oxidante sobre una disolucion neutra de yoduro potásico, valorando luego ó buscando la cantidad de yodo eliminado con una normal de hiposulfito de sosa. Este método le ha seguido por los dos caminos que se acaban de indicar.

3.º La oxidacion de una disolucion valorada de ácido sulfuroso, buscando ó determinando luego el ácido sulfuroso empleado en exceso con una disolucion tambien valorada ó normal de yodo. En este caso se probó que no se habia formado ácido hiposulfúrico, lo cual, por el contrario, parece que tiene lugar cuando se opera en presencia de un grande exceso de ácido sulfúrico.

Los datos por estos métodos obtenidos, concuerdan todos con la fórmula S^2O^7.

Por lo demás, el ácido persulfúrico no es muy estable. Si se le mantiene á una temperatura inmediata al cero, se conserva unos quince dias sin descomponerse de una manera ostensible; pero pasado este período, empieza á efectuarlo espontáneamente soltando oxígeno. Si se le disuelve en agua, se descompone aún más pronto del propio modo. Disuelto en el ácido sulfúrico concentrado, se conserva mejor; pero con el tiempo empieza á soltar oxígeno, y al cabo de un mes se ha descompuesto ya casi del todo.

Expuesto al contacto del aire, el ácido persulfúrico desprende un humo ó vapores densos, pasando á ácido sulfúrico hidratado y soltando oxígeno.

Si se le somete al calor de una lámpara ó de una llama, se descompone al momento en ácido sulfúrico anhidro y oxígeno.

El ácido persulfúrico se disuelve, como va dicho, en el sulfúrico concentrado sin desprender oxígeno, y ésta disolucion puede diluirse luego en agua, sin que el primero experimente una alteracion inmediata; así lo prueban sus determinaciones con la disolucion de sulfato ferroso y de yoduro potásico. Al cabo de veinticuatro horas no ha cambiado sensiblemente el valor de semejante disolucion diluida. Sin embargo, pasando mayor tiempo, todas estas disoluciones empiezan á desprender oxígeno de una manera más ó ménos rápida. Si á la disolucion sulfúrica de éste ácido se añade esponja de platino, aun estando diluida en agua, ó si se calienta, al momento se desprende el oxígeno en estado de gas.

El ácido persulfúrico solo trasforma el sulfuroso en sulfúrico:

$$S^2O^7 + SO^2 \text{ diluido} = 3SO^3 \text{ diluido.}$$

El ácido persulfúrico disuelto en una gran cantidad del sulfúrico concentrado, da con el sulfuroso mucho ácido hiposulfúrico:

$$S^2O^7 \text{ mezclado con } n\ SO^4H + 2SO_2 \text{ diluido} =$$

$$S^2O^5 \text{ diluido} + 2SO^3 \text{ diluido.}$$

El ácido persulfúrico puesto en contacto con el agua se disuelve en ella con desprendimiento de un humo denso y una grande efervescencia, debida al oxígeno que se desprende. Sin embargo, en los primeros momentos una parte de dicho oxígeno (de $\frac{1}{4}$ á $\frac{1}{5}$) permanece combinado, y se puede fijar ó determinar su cantidad por medio del yoduro de potasio. Mas, poco á poco se desprende este oxígeno en burbujas pequeñísimas por efecto de una descomposicion espontánea. La presencia de un grande exceso de ácido sulfúrico da mayor estabilidad al persulfúrico, aun diluido en agua, sin que pueda conservarle indefinidamente.

Si sobre este ácido se hace obrar la disolucion de barita en el agua, al momento se desprende oxígeno, precipitándose sulfato de barita; pero al propio tiempo se forma *persulfato de barita* que queda disuelto. Este persulfato se descompone pronto en oxígeno que se desprende, y sulfato que se precipita. Esto se observa fácilmente filtrando el líquido tan luego como acaba de reaccionar el agua de barita y añadiendo al líquido una disolucion de yoduro potásico, acidulada con ácido clorhídrico de manera que todo el líquido quede ácido.

El persulfato de barita, fundándose en sus analogías con los permanganatos, tiene, segun el autor, la fórmula S^2O^7, BaO;

pero confiesa que, por más que ha hecho, no ha podido conseguir aislarlo ú obtenerlo solo.

Los caractéres principales del ácido persulfúrico disuelto se deducen de su aptitud en desdoblarse en oxígeno y ácido sulfúrico, sea espontáneamente por la sola accion del tiempo, sea con el concurso del calor, sea, en fin, por el contacto con la esponja de platino. Queda dicho ya que oxida en frio el yoduro de potasio, el sulfato ferroso, el ácido sulfuroso, el cloruro estannoso. Este poder de oxidacion, sin embargo, no es tan enérgico y general como el del cloro, del ozono y el de otros varios agentes oxidantes. No oxida en frio, por ejemplo, las disoluciones de ácido arsenioso, ni las de ácido oxálico, con lo cual su accion oxidante se acerca á la que posee el agua oxigenada. Se aleja de ésta, sin embargo, porque no forma ácido percrómico, ni reduce el permanganato de potasa. Puede coexistir con el agua oxigenada en las disoluciones acuosas y sulfúricas, lo propio que con el ozono en estado anhidro ó disuelto.

La existencia del ácido persulfúrico se presta á varias observaciones importantes bajo el puntò de vista de las teorías químicas, entre las que se fija el autor por de pronto en las siguientes. El azufre y el oxígeno forman una série de compuestos definidos, que crecen con sus equivalentes.

S^2O (desconocido; análogo á $C_n{}^2\,O$);
O^2 (ácido hiposulfuroso);
O^3 (desconocido; análogo á $M_n{}^2O^3$);
O^4 (ácido sulfuroso);
O^5 (ácido hiposulfúrico);
O^6 (ácido sulfúrico);
O^7 (ácido persulfúrico);
O^8 (desconocido; análogo al ácido ósmico).

Esta série presenta todos los tipos posibles de las combinaciones sencillas que el oxígeno forma con los metaloides y con los metales. El azufre, el cloro, el nitrógeno ocupan en ella cinco términos. En la misma se halla el límite extremo, que representa en la mayoría de los casos conocidos los ácidos que contienen siete equivalentes de oxígeno, tales como el perclórico, peryódico, permangánico, percrómico, heptaruténico (de los Sres. Deville y Debray), y por fin, el persulfúrico. Estos ácidos sobreoxigenados, cuya composicion es igual, ofrecen una notable analogía en sus propiedades físicas y químicas, analogía que puede llegar hasta el isomorfismo. Constituyen un verdadero tipo molecular, para emplear la feliz expresion propuesta por Mr. Dumas hace ya cuarenta años. En este tipo, RO^7, siete equivalentes de oxigeno están asociados con los elementos más diversos. Es digno de notar que las propiedades del tipo derivan del oxígeno y no del cuerpo antagonista; residen en la asociacion misma de los dos, y no en cada uno de los elementos que la componen, aisladamente considerados; sucediendo precisamente lo contrario de lo que pretende la teoría de la atomicidad fija de los elementos.

Nada es, en efecto, más desemejante que el azufre, el cloro y el manganeso libres ó aislados. Sus primeros términos de oxidacion:

Acido hiposulfuroso y óxido manganoso, S^2O^2 y $M_n{}^2O^2$;

Acido cloroso y óxidos mangánico y crómico, $Cl\ O^3$, Cr^2O^3, $M_n{}^2O^3$;

Acidos sulfuroso é hipoclórico y bióxido de manganeso, S^2O^4, ClO^4, $M_n{}^2O^4$;

Acidos hiposulfúrico y clórico, S^2O^5 y ClO^5,

no ofrecen la menor analogía. Esta existe en un principio entre el cromo y el manganeso; dá otro paso cuando se extiende á otro término y se llega á los ácidos mangánico, crómico y sulfúrico, $M_n{}^2O^6$, Cr^2O^6, S^2O^6, pero se acaba de comprender en los compuestos de la fórmula RO^7. Las propiedades comunes de este tipo molecular no proceden, pues, en manera alguna de las de los elementos aislados, porqué, si así fuese, deberian existir en toda la série; solo se desarrollan en el acto de agruparse, y todo conforme con las teorías que Mr. Berthelot sostiene, y que le bastan para la interpretacion y prevision de todos los fenómenos, como han bastado para el descubrimiento de todas las leyes fundamentales de la química moderna.

EL JARDIN BOTANICO DE BOISSIER Y OTROS CONGENERES.

Son tan inherentes á las ciencias los medios auxiliares de estudiarlas, que las mejoras y adelantos de estos contribuyen eficazmente al progreso de aquellas.

Los observatorios de todas clases, los gabinetes y laboratorios, mejorados en nuestros dias con la perfeccion de nuevos instrumentos que se apropian á determinados servicios, han facilitado mucho los sorprendentes descubrimientos que la Astronomía, la Meteorología y las ciencias físico-químicas están haciendo, reportando iguales beneficios la Historia natural de los jardines de aclimatacion, de los modernos acuarios, de las estaciones zoológicas y botánicas é ingeniosos aparatos de que nos servimos en las observaciones sub-acuáticas para los estudios biológicos de animales y plantas.

Ya de antiguo los botánicos comprendieron la utilidad del cultivo de estas, bajo el punto de vista de la observacion y el estudio, formando lo que algunos llamaron *viridarium*, que pudiera traducirse libremente por vergel ó huerto, donde por curiosidad, estudio ó recreo se cultivan especies escogidas. Tal fué, sin duda, el orígen de los que hoy se llaman jardines botánicos, cuyo principal objeto es el adelantamiento y enseñanza de la ciencia que trata de los vegetales.

La disposicion que á tales jardines se fué dando ha variado mucho segun las épocas; y por punto general, en los de enseñanza, el órden de colocacion de las plantas se ha solido subordinar á los principios de la escuela botánica dominante, cuyo nombre se imponia hasta á los mismos cuadros del jardin, llamando al sitio que ocupaban, por ejemplo, *Escuela de Linneo, Escuela de Cavanilles*, como hace algunos años aún podia verse en el Real Jardin Botánico de Madrid, hasta que nuestros malogrados compañeros D. Pascual Asensio y D. Vicente Cutanda cambiaron dichas escuelas sistemáticas por la metódica, aceptada en todas partes, aunque no de un modo idéntico por la distinta interpretacion que de ella algunos hacen.

Mi ánimo en esta noticia no es entrar en el exámen de las ventajas ó defectos que se observan en muchos de los jardines botánicos que he visto, inclusos los nuestros, que, sea dicho de paso, distan bastante de tener la perfeccion y buen servicio que se encuentra en los que hoy sirven de modelo. Y viniendo ya á mi propósito, paso á dar noticia del jardin de nuestro consocio Mr. Boissier, que, como todos sabemos, es otro de los botánicos de nota en Europa, tanto por sus conocimientos, como por los grandes sacrificios que tiene hechos en favor de la parte fitográfica, gastando cuantiosas sumas para formar uno de los más ricos herbarios conocidos, sobre todo en plantas españolas, pues bien puede asegurarse no existe otro que tenga mejor representada nuestra flora (1).

El jardin de Boissier está en un gran parque que posée este señor en Valeyres, cerca d'Orbe, en la Cordillera del Jura. El terreno es accidentado, y ocupa diferentes planos, unos más altos que otros, á orillas de un riachuelo bastante caudaloso, muy poblado de árboles. Los muros que le cercan están expresamente fabricados de un modo tosco con rocas que sobresalen unas de otras, y más que tapia simulan un peñascal, dejando huecos para poner la tierra que requiere cada planta. Las eras están dispuestas en escalones, segun lo exige el cultivo de las especies vegetales que contienen; y en vez de cuadros hay varias séries de pequeñas colinas artificiales en forma de peñascos, pedrizas y laderas, imitando la naturaleza de las montañas alpinas, supliendo así del mejor modo posible en reducido espacio las condiciones exigidas por las di-

(1) El herbario de Boissier ocupa un gran edificio al lado del Hotel-vill de Ginebra, y para cuidarlo tiene un botánico que se dedica exclusivamente á la conservacion y servicio científico de los que van á consultarlo. Durante muchos años fué Mr. Reuter (más tarde director del jardin botánico de Ginebra) el encargado, y tambien compañero de Boissier en varios de sus viajes.

ferentes plantas para que vejeten, como lo hacen, *in loco natali*, segun expresion de los naturalistas.

Los riegos de pié, imitando arroyuelos, ó por medio de las infiltraciones del terreno, y los de lluvia más ó ménos ténue, las frecuentes chubascas de las regiones elevadas y hasta las neblinas que en ellas reinan, vienen á completar un cultivo cuyo principal objeto es mantener rodeadas las plantas alpinas del mayor número de condiciones requeridas por su naturaleza para que no degeneren y cambien su fisonomía, como vemos acontece en los jardines donde, efecto del cultivo, pronto los vejetales silvestres pierden su aspecto natural, en términos á veces de hacernos dudar de lo que son.

Tales principios, en tésis general, jamás debieran perderse de vista en los jardines botánicos, donde el cultivo, más que á desfigurar las plantas y formar variedades de capricho ó adorno, debe tender á mantenerlas con la fisonomía pura de los tipos específicos; pero bien lejos de eso, nuestra jardinería, sobre todo, suele medir por el mismo rasero todas las plantas, cuidándolas de un modo análogo, sin atender á la naturaleza del suelo que requiere cada una, á la exposicion que piden, á la clase de abonos naturales y riegos, y tantas otras condiciones como exige cada sér orgánico para no sufrir alteraciones morfológicas á consecuencia de una prolongada variacion de su régimen normal.

Con la observancia de los principios que sigue Mr. Boissier, ha conseguido tener en su jardin botánico un crecido número de plantas tales cuales crecen en su país natal, y que para poderlas ver sería preciso viajar por los altos Pirineos, atravesar España y visitar Sierra-Nevada, verificar muchas y penosas ascensiones por los Alpes y recorrer en Oriente sus montañas elevadas.

En medio del jardin de que hablo, el Dr. Planchon y yo, acompañados por el dueño, nos creíamos trasportados por encanto de una á otra de aquellas localidades al contemplar las joyas botánicas que nos rodeaban. La *Ramondia pyrenaica*, *Sarcocapnos enneaphylla* y *Erodium supracanum*, vegetando entre las rendijas de las peñas, húmedas para las dos especies primeras y áridas para la tercera, me trajeron á la memoria mis herborizaciones de hace 53 años por los picachos de Monserrat, San Llorens del Munt, montañas de Berti y Coll de Davi. El *Rhododendron ferrugineum*, *Pinguicula vulgaris* y *grandiflora*, numerosas *Saxifraga*, tales la *Aizoon*, *Cotiledon*, *longifolia*, *cuneata*, *catalaunica*, etc., los *Androsace imbricata*, *carnea*, *pyrenaica*, *villosa*, y tantas otras admiraciones de mi juventud botánica, me hicieron recordar con delicia nueva las ascensiones que en 1825, 26 y 27 verifiqué con los botánicos franceses Balard y Bresson á Tagamanen, San Marsal, San Sagimon, Matagall, las Agudas de Monseny, Nuestra Señora de Nuria, Set Cases y otras localidades de los Pirineos catalanes que más tarde, en 1830, volví á visitar con mi inolvidable maestro Dr. Foix.

Pero al fijarnos mi colega Planchon y yo en la preciosa flora de Granada, cuyos representantes en el jardin de Boissier son tan numerosos y selectos, no pudimos ménos de saludarla dando un cordial abrazo al autor de una obra que es sensible para España no haya salido de la pluma de alguno de sus botánicos. La *Vella spinosa*, de la cual cogí semillas, como de otras varias especies, la *Artemisia granatensis*, *Helianthemum pannosum*, *Eryngium glaciale*, *Draba hispanica*, *Trisectum glaciale et velutinus*, *Convolvulus nitidus*, *Pterocephalus spatulatus*, *Andryala Agardhii*, *Erynacea pungens*, *Teucrium saxatile*, y en una palabra, muchas de las especies nuevas que fueron publicadas en la expresada flora, las vimos juntas sin sufrir el cansancio de la penosa ascension al Mulhassen y Picacho de Veleta, que diéramos ambos por muy bien empleado con tal de gozar de las delicias científicas que en sus descubrimientos tuvo nuestro excelente amigo.

Este, con la liberalidad que dispensa á los botánicos, nos autorizó á coger ejemplares y semillas de cuanto quisiéramos, lo cual equivalió para nosotros á herborizar por Oriente, las sierras de Andalucía, los Pirineos y los Alpes, cuyas preciosas y enanas *Gentiana*, *Salix*, *Primula*, *Soldanella*, *Vaccinium*, *Campanula*, *Anemone*, *Jasione*, *Papaver*, *Dianthus*, etc., que allí admiramos, volvimos á contemplarlas juntos á los pocos dias en las herborizaciones del Congreso de Bex.

En el jardin botánico de Boissier no hay órden científico en la colocacion de las plantas, ni más distribucion metódica que la que tienen en la naturaleza, cuidándose sólo, como llevo dicho, de proporcionarlas las condiciones que les son más favorables para su normal desarrollo; resultando de esto las ventajas de poder siempre estudiar dicho fitógrafo sus especies, como cuando las observó por primera vez en los sitios donde nacen espontáneas.

Los árboles no están representados en el jardin descrito, viéndoselos dispersos por el parque formando bosquetes, y en uno de ellos notamos el más elevado Pinsapo que yo he visto, llenas de piñas ó conos las ramas más altas, que son las fructíferas en la familia á que pertenece esta preciosa conifera de nuestra flora.

Tambien tiene Boissier en su parque cobertizos y estufas para resguardar las plantas que no pueden resistir las bajas temperaturas de aquel clima, y entre sus curiosas especies nos enseñó varias de las llamadas carnívoras, que con el doctor Planchon nos complacimos en examinar largo rato y ver los progresos de la descomposicion de los cuerpos de multitud de insectillos, que sobre todo, en el líquido que contenian las singulares hojas de la *Sarracenia*, cuyos *ascidia* simulan un odre, estaban en verdadera digestion, tómese esta palabra en sentido químico ó fisiológico, como se quiera; pues no cabe duda que tales cadáveres se maceraban y diluian en aquel líquido como en los del estómago, y tampoco puede caberla en que la absorcion y exhalaciones de aquellas hojas funcionaban.

Existen en Europa otros jardines botánicos en el mismo género que el de Boissier, tales en York el de Backonn, el de Malg en Viena, que está admirablemente situado y cultivadas convenientemente todas las especies raras de los Alpes y Dalmacia; el del Jardin botánico de Inspruck en el Tirol, bajo la direccion del profesor Verner, que tambien le ha dado la forma de peñascos compuestos de rocas diferentes para representar los Alpes calcáreos, los que llaman *prienitidos*, los Carpathos, etc., cultivándose en cada sitio de éstos las especies propias de cada una de dichas localidades alpinas. En el jardin botánico de Ginebra existe tambien una muestra mezquina de tal sistema de cultivo que intentó plantear Mr. Reuter. En Nápoles mismo el Baron Vicenzo Casati, director de aquel jardin botánico, me enseñó el departamento donde cultivaba los principales representantes de la flora de los Apeninos, y aun muchas curiosidades de la de los Alpes; siendo notable la parte criptogámica de musgos y helechos, que merced á los cuidados de un sistema de cultivo apropiado, vegetaban bajo el cálido clima de aquella ciudad como lo hacen en los sitios de donde proceden. La disposicion de tal jardin es en su esencia semejante á la de los otros citados.

En tiempos de Tournefort debió ser cosa parecida el jardin que nuestro Jaime Salvador tuvo en San Juan de Espí, á dos leguas de Barcelona. Cuando con Mr. Webb le visitamos en 1827 sólo quedaba por memoria de aquel botánico español un colosal *Chamærops humilis*, que nada de humilde tenia, pues era de más de dos metros de alto; las demás plantas estaban hacia años reemplazadas por hortalizas.

Cerca de Viladran, en Monseny, D. Jaime Bofill, herbolario con honores de farmacéutico de Cámara de S. M., tenia un verdadero jardin botánico, principalmente de plantas medicinales. En el fondo era parecido á los descritos, con la sola diferencia de estar aún más conforme con las cosas naturales, pues no habia cultivo de ninguna clase, y las plantas abandonadas á sí mismas crecian y se multiplicaban como en el campo. Este jardin ocupaba una colina algo elevada con exposiciones diferentes, arroyuelos, charcas, praderas, peñascos y canchales. En ella el Sr. Bofill, que durante largos años habia recorrido de contínuo todos los Pirineos y montañas de Cataluña y Aragon en busca de yerbas medicinales, tuvo la curiosidad de plantar ejemplares de todas las especies que traia para su comercio de herbolario, y muchas otras sólo curiosas bajo el punto de vista botánico. En ninguna parte he visto juntas tantas plantas oficinales vivas y en sus verdaderas condiciones; y esta circunstancia hacia que mi sábio y querido maestro de materia-médica, Dr. Foix, en las vacaciones llevara á sus discípulos aplicados á visitar un jardin tan especial como interesante en su género. Amigo íntimo de Bofill, cuyos nietos eran mis condiscípulos de medicina, pasé largas temporadas de verano aprendiendo á conocer en aquel jardin botánico y en el gran laboratorio de herbolario que tenia dicho señor cerca de Viladran, las plantas medicinales, que sólo de un modo análogo pueden estudiarse con provecho.

Es probable que tal jardin haya desaparecido; pero no dudo que en la colina donde estaba vivirán aún muchas de las plantas de otras regiones que allí trasladó el Dr. Bofill, sirviendo esta noticia de aviso preventivo á los botánicos que se ocupen de la flora catalana para evitar errores que ya alguno ha cometido.

En el dia no tengo noticia que haya en España otro jardin de este género ni parecido á los demás que he citado, á pesar de que van cundiendo por otras partes y haciéndose de moda, por cuyo motivo algunos de mis amigos botánicos estranjeros varias veces ya me han pedido con insistencia plantas vivas y semillas de nuestras selectas especies, auxiliándome para complacerles los Sres. Laguna y Avila, ingenieros de montes, que recorren la Península herborizando llevados de su verdadero entusiasmo científico. Los indicados extranjeros se lamentan de no poder adquirir nuestras envidiadas especies como las de otras partes, porque en nuestros jardines botánicos ni de horticultura, á deducir de lo que se ve en sus catálogos, no se cultivan como fuera interesante hacerlo bajo conceptos muy útiles y convenientes.

Siendo, pues, el objeto de esta Revista dar cuenta de todos los adelantos que en los demás paises hacen las ciencias para que en el nuestro se promuevan, al terminar mi noticia sobre el jardin de Boissier y sus congéneres, no puedo ménos de excitar el celo acreditado de nuestros profesores de botánica, para que, adoptando los medios auxiliares que en otras partes se emplean, salgan del letargo en que aquí yacen las verdaderas investigaciones fitográficas, que en otros tiempos dieron renombre á los naturalistas españoles.

M. P. Graells.

REVISION DE PUBLICACIONES CIENTÍFICAS.

El *Mittheilungen der Schweizerischen entomologischen Gesellschaft* (Boletin de la Sociedad entomológica de Suiza), en su tomo V, n.º 5, 1878, publica algunas observaciones de nuestro consócio Mr. J. Lichteinstein, que por su interés científico merecen se dé cuenta de ellas, aunque no sea más que para excitar la curiosidad de nuestros jóvenes entomólogos, que observo se dedican poco ó nada á los estudios biológicos, engolfándose principalmente en los entomográficos, de menor importancia científica; aunque tambien útiles.

La primera observacion versa sobre las metamórfosis de la cantárida de las boticas (*Litta vesicatoria*), que hasta el presente no nos eran conocidas, bien que sospechadas por analogía de lo visto en otros coleópteros del grupo á que pertenece. De tales observaciones soy testigo de vista, pues el mismo Lichteinstein me enseñó el verano pasado la educacion que estaba haciendo de las larvas de cantárida, y aun me dió un ejemplar de ellas que conservo en mi coleccion.

Como en Montpellier, cerca de Madrid, en las fresnedas de Guadarrama, á primeros de Julio, se ven cubiertos los fresnos de cantáridas en copula; y sin ir tan lejos, saben bien nuestros entomólogos que se las encuentra abundantes en la Casa de Campo, Soto de Migas-Calientes y orillas del Manzanares hácia el Pardo. Pudieran, pues, fácilmente en el verano próximo recoger algunas hembras fecundadas y repetir con ellas los estudios de nuestro consócio, que voy á referir tales cuales han sido practicados.

Mr. Lichteinstein colocó media docena de pares de cantáridas en una vasija de cristal casi llena de arena y cubierta con un fanal. Pocos dias despues de esta reclusion las hembras escarvando la arena depositaron algunos paquetes de huevos blancos, formando cilindros de unos dos ó tres centímetros de largos. Dichos huevos colocados por el observador en tubos de cristal, vió nacer de aquellos al cabo de algunos dias un crecido número de larvas (de 7 á 800), que reconocidas resultaron ser lo que Leon Dufour y otros naturalistas han llamado *triongulinos*. Tienen la cabeza y abdomen negros, el torax blanco y dos filamentos en la extremidad del cuerpo. Corrian en todas direcciones con mucha agilidad, intentando introducirse en todas las hendiduras del terreno sobre el que se las puso; pero al revés de lo que sucede con las larvas de los *Meloe* y los *Sitaris*, no tenian tendencias á fijarse bien sobre los himenópteros que se pusieron á su alcance.

El observador les dió miel de la abeja comun, aislando todos los individuos que aceptaban este alimento.

A los cinco dias de empezar á comer los *triongulinos* cambiaron de piel, tomando la forma de una larva blanda, blanca, sin apéndices caudales y con ojos mucho más pequeños que los que tenian antes.

Con fundamento sospecha Lichteinstein que en este estado dichas larvas deberán alimentarse de la miel de las abejas que tienen sus nidos subterráneos, tales las *Halictus*, *Andrena*, *Eucera*, etc.; pero como dicho señor carecia de aquellos nidos dió á las larvas que observaba miel de la *Osmia tridentata* y de la *Ceratina chalcites*, recogida en los tallos de la romaza y del sauco. Todas comieron de dicha miel, pero no debe serles la más conveniente, porque sucesivamente fueron muriendo, y cuando yo las ví la última vez en Lausana no quedaba viva más que una, la misma que algunos dias despues mostró Lichteinstein á la sociedad entomológica suiza, y la que segun me escribió con fecha 2 de Octubre último nuestro consócio, llegó á transformarse en ninfa ó pseudo-ninfa; esperando ya que en esta próxima primavera nazca de ella una cantárida ó variedad de ésta, pues que la miel de la *Ceratina* con que la ha alimentado no es la habitual comida de tales larvas.

Con esta curiosa observacion y las de Newport, de Fabre y las más recientes de Valery Mayet, la historia de la Hipermetamórfosis de los vesicantes queda completa, siendo modelos de exactitud las hechas sobre el *Sitaris humeralis*, cuyas larvas son parásitas de las *Anthophora*, y las del *Sitaris colletis*, parásitas del *Colletes succintus*.

La segunda observacion de nuestro colega, consignada en el Boletin entomológico citado, versa sobre un hecho curiosísimo que tambien tuvimos el gusto de ver en Lausana con el profesor de Florencia Dr. Targioni Tocetti, demostrado por el mismo Lichteinstein.

En un tubo de cristal que contenia varias raicillas del *Brachypodium (Bromus) pinnatum* habia crecido número de un *Coccideo* del tamaño de un pequeño cañamon. Exteriormente tales cuerpecillos semejan un saco blanco piriforme, de textura afieltrada, y en su interior se encuentra un insecto bastante grande, negro-azulado, que si se le revienta da un humor rojo oscuro.

Mr. Lichteinstein crée que pueda ser esta especie de coccideo una cosa nueva y género intermedio entre los *Westwoodia* y *Rupertsia* de Signoret, á ménos que no resulte ser la *Antonina purpurea* de este último autor, el cual sólo ha descrito la hembra; pero por si se confirmasen las sospechas de novedad, provisionalmente propone el observador llamar al insecto de su estudio *Labulbenia Brachypodii.*

No fueron estas consideraciones las que movieron á nuestro consócio á hablar de tal insecto en la Sociedad entomológica suiza, sino la curiosísima evolucion de los indivíduos masculinos, realizada de un modo excepcional, segun tuvimos ocasion de ver algunos dias antes que la mencionada corporacion en Lausana, donde, á los Sres. Targioni, Meerlinguen, Oliveira y á mí, tuvo Lichteinstein la complacencia de enseñarnos el arsenal de tubos de observacion con que viaja para que no sufra el diario de sus estudios interrupciones perjudiciales. En efecto, en uno de los tubos en que tenia el coccideo de que se trata, vimos que de las cáscaras que protegen en las cochinillas las ovaciones habian salido infinitas larvas de machos y hembras, habiendo perecido las de éstas, al paso que las masculinas, refugiándose entre el algodon que servia de tapon al tubo, por exudacion formaron su capullo de color blanco, dentro del que se tranformaron en ninfa y despues en insecto alado.

¡Lo sorprendente de este hecho es quedar demostrado que hay insectos que, si al nacer el huevo no encuentran qué comer, pueden recorrer todas sus metamórfosis y llegar hasta su estado perfecto!

Nuestro ilustrado consócio no nos da en su relato explicaciones de cómo puede verificarse este fenómeno; pero yo las comprendo de un modo muy sencillo considerando que, como he visto sucede en otros séres, basta la materia excedente del cuerpo vitelino reabsorbida al interior para sostener por algun tiempo la nutricion y la vida, siempre corta, de varios insectos que, por innecesaria, no llegan á tener boca; tal sucede en las generaciones dióicas de algunos pulgones, como la *Phylloxera* y *Pemphigus* y en las *Ephemeras*, que en su estado perfecto la tienen muy rudimentaria y no hacen uso de ella.

La tercera observacion de Lichteinstein que consigna en su Boletin la Sociedad entomológica suiza, trata de particularidades metamorfósicas de varios pulgones que le han dado pié para crear un grupo de *aphidios* que llama *authogenesicos*, porque, como sucede en la *Phylloxera*, al transformarse las ninfas de los individuos apteros radicícolas en individuos alados, éstos no llevan en su seno huevos sino pupas, que despues de nacidas dan orígen á los sexuados que carecen de boca, como he dicho más arriba.

Mr. Lichteinstein, con una imaginacion algo poética, ya antes de ahora habia expuesto en otra publicacion (*Anales de la Sociedad entomológica belga*, t. XIX, 1877), ideas sobre tales pulgones, que concuerdan con las mias en lo referente á considerarlos pupíparos y no ovíparos como los crée el ilustrado Balbiani, con el cual cada uno á su manera está discorde. Por mi parte ya tengo demostradas las diferencias que caben entre estos dos estados de la evolucion de los gérmenes en los *Aphis*, de los que hay varios que, como mi pulgon de la zanahoria, en su período alado, no sólo no ponen huevos ni tampoco pupas, sino que paren nuevos individuos ápteros, ágamas que vuelven á reproducirse parthenogenésicamente, como las madres de que proceden, repitiéndose indefinidamente así su ciclo biológico, segun lo tengo consignado en la Sociedad entomológica de Francia ya hace tres años.

Por lo demás, vé Lichteinstein en los pulgones alados que llama *authogenesicos* unos séres que no considera machos ni hembras sino flores, que siguiendo su descripcion romántica, como la llama Balbiani, podríamos decir en lenguaje de Linneo que tales flores pertenecen al órden de la *Singenesia necessaria,* porque en un mismo receptáculo están separados los machos y las hembras. Semejante idea es peregrina y sorprendente para los que no descienden al estudio de detalles organográfico-fisiológicos; pero fijándose un poco se ve bien claro que los pulgones alados *authogenesicos* de Lichteinstein no pueden ser sino hembras parthenogenésicas como las madres ápteras de que proceden, segun ya tengo consignado en mis escritos sobre el pulgon de la zanahoria y la *Phylloxera vastátrix.* Balbiani y Leuckart, que como yo han examinado los ovarios de tales pulgones pupíparos, opinan como yo, que añado que las pupas que mi sábio amigo compara con flores monoécicas, positivamente son, segun mis investigaciones anatómicas, los fetos aún no maduros que han de convertirse en los indivíduos sexuados en que termina el ciclo biológico de este grupo, que segun las interesantes observaciones de nuestro consócio, además de la *Phylloxera* comprende la *Vacuna dryophilla*, *Schizoneura corni*, *Pemphigus spirotheca* y *Boyeri*, etc.

GRAELLS.

ESTUDIOS FILOXÉRICOS.

La importancia que para España tiene todo lo que contribuya á ilustrar á los viñadores en esta materia, me decide á proponer á la Academia se publiquen en su REVISTA cuantas noticias interesantes lleguen á su conocimiento y sean, sobre todo, de carácter científico, aunque de aplicaciones agrarias.

Casi todas las corporaciones europeas de ciencias y muchas sociedades norte-americanas de igual índole han procurado difundir por medio de sus publicaciones los estudios que los naturalistas, los químicos y agricultores han hecho para encontrar el medio de librarnos de la funesta plaga producida por el pulgon maligno, que amenaza de un modo inminente aniquilar todos los viñedos de Europa. Amen de las Memorias que en los anales, boletines, actas, crónicas y otras publicaciones análogas se han dado á luz en Francia, Alemania, Austria, Hungría, Suiza, Italia y hasta en Portugal, millares de folletos y artículos sobre la *Phylloxera* se han publicado en nuestro continente y Estados-Unidos de América, y el empeño de instruir por este medio hasta á los mismos labriegos que cultivan las viñas, en algunos paises ha sido tan grande, que en Alemania y Suiza he visto cartelones con dibujos del pulgon seca-hojas, representado en grande escala y en los diferentes períodos de su vida radicícola y *gallœcola*, áptero y alado, sexuado y ágamo, con los huevos y pupas productos parthenogenésicos, y los llamados de invierno ó de orígen de hembras fecundadas, que dan nacimiento á las nuevas generaciones subterráneas, fijados, no sólo en las esquinas de las poblaciones, sino hasta en las mismas viñas, donde al trabajar los jornaleros pueden á todas horas consultar las dudas que para reconocer al insecto se les ocurran, cuya solucion encuentran luego, no sólo en tales dibujos, sino tambien en las descripciones que los acompañan, y son breves, claras y comprensibles para todas las inteligencias, por reducidas que sean.

En España apenas se ha hecho nada aún para preparar nuestros viticultores á la terrible lucha que nos amaga, y por lo tanto, creo que la Academia prestará un servicio al país si, difundiendo las noticias científicas que sobre tan importante asunto se publican en otras partes, contribuye á que los viñadores españoles estén convenientemente apercibidos para rechazar la plaga filoxérica el dia que pase nuestras fronteras, produciendo la confusion y alarma que siempre ocurre en tales apuros é impide tomar desde luego disposiciones acertadas.

Los estudios biológicos de la *Phylloxera* son, sin disputa, los que más han contribuido á poner en claro su táctica diabólica para destruir los viñedos; y el adelanto de estos estudios ha sido obra exclusiva de los naturalistas entomológo-agrónomos. Los nombres de Targioni en Italia y Signoret en Francia están al frente de las publicaciones monográficas del género *Phylloxera*, que en mi humilde opinion, en otros escritos consignada, adolecen aún de la falta de datos para que las especies creadas por dichos entomólogos puedan ser confirmadas sin reserva. Por lo contrario, las investigaciones biológicas de Balbiani, Planchon y Lichteinstein, nuestros sábios consócios, y las de Riley y Boiteau, arrojan abundante luz para comprender los misteriosos pasos que el maligno pulgon sigue en su propagacion infinita y sus desastrosas consecuencias.

El último observador citado, descubridor del huevo de invierno de la *Phylloxera vastatrix* en los viñedos de Villegouge, y cuyo hecho curioso hizo pronosticar á Balbiani un triunfo seguro para los viticultores, que salió fallido como otros muchos precipitada y pomposamente anunciados, acaba de dirigir á la Academia de Ciencias, de París, nuevas observaciones que explican las razones del por qué han fracasado los pronósticos del ilustrado profesor del Colegio de Francia.

Creyóse equivocadamente entonces que todos los individuos de la *Phylloxera vastatrix* llegan fijamente al período de ninfa, y saliendo de la tierra para transformarse en alados, depositan sus huevos-pupas en las hojas ó sarmientos, naciendo de ellos los individuos sexuados que producen por fecundacion el huevo de invierno, del cual sale la nueva generacion ágama, que baja á instalarse en las raices de las cepas.

Esto sentado, el plan de ataque de los viticultores, le estableció Balbiani lógicamente del modo que sigue:

Dejar salir las ninfas á transformarse en alados para producir en la atmósfera su generacion sexuada. Una vez depositado el huevo de invierno entre las grietas de la epidermis del tronco de las cepas y sus sarmientos, descortezarlas y embadurnarlas con una preparacion química que matara el expresado gérmen, evitándose así que nacieran y bajaran á las raices las nuevas hembras ágamas procreadoras de las legiones radicícolas.

Si así pasase todo, este plan fuera magnífico, y sin género de duda al cabo de unos cuantos años la terrible *Phylloxera*, no sólo aminoraria, sino que al fin y al cabo podria, quizás, llegar á extinguirse. Pero tan lisonjeras esperanzas se han disipado con las nuevas observaciones de Mr. Boiteau, comunicadas recientemente á la Academia de París, que á decir verdad, ni para los Sres. Lichteinstein y Planchon, Mr. Schrader de Burdeos y para mí mismo no son cosa nueva, pues las teníamos sabidas hace algun tiempo.

Mr. Boiteau declara que la *Phylloxera* subterránea ó hipogea de las cepas descortezadas y embadurnadas, ha seguido poniendo y multiplicándose como las de las no tratadas, cosa que en mi juicio es muy natural que así suceda, y dice que á pesar de estar ya en su tercer año de vida ágama, ha visto que la disminucion no se efectuaba, continuando en estas plantas los estragos como en las otras, notándose en algunas mejorías parciales. De esto Mr. Boiteau deduce que el tratamiento de las partes aéreas de las cepas no excusa los de las subterráneas, que tan incompletos resultados hasta el dia han dado.

Mr. Schrader hace más de cuatro años que tiene viva en su observatorio la *Phylloxera* áptera-ágama, que vive multiplicándose activamente como lo verifican mis pulgones de la zanahoria, cuya produccion vivípara-parthenogenésica en todos los períodos de su ciclo se realiza de la misma manera, hecho que ha llamado tanto la atencion de algunos entomólogos de nota.

La noticia que Mr. Boiteau comunica á la Academia de Ciencias no puede ser más desconsoladora, porque disipa las lisonjeras esperanzas que se habian concebido con las teorías del distinguido profesor Balbiani.

Como Mr. Lichteinstein y yo sostuvimos en el Congreso internacional de Lausana, Mr. Boiteau tambien asegura que la *Phylloxera* alada tiene un vuelo activo y prolongado. De esto se puede convencer cualquiera colocándose en un dia caluroso del mes de Agosto en el centro de una viña muy filoxerada, y á eso de las cuatro de la tarde; poniéndose el observador de cara al sol y arreglándose de modo que, mirando hácia el astro, sus rayos luminosos no le deslumbren, verá revolotear por la atmósfera multitud de insectillos, cuyos movimientos principalmente tienen por objeto sostenerles en el aire. Entre esta nube de diminutas criaturas, y en mayoría, se ven cruzar con vuelo regular, ágil y sostenido las *phylloxeras*, que fácilmente pueden recogerse con una manga de gasa y hasta con la misma mano. Las fatales consecuencias de tal facultad son bien conocidas de todos los viñadores donde reina la plaga.

El descubridor del famoso huevo de invierno da reglas para encontrarlo fácilmente. Dice que debe buscarse en las cepas de 4 ó 5 años, podadas de manera que los insectos se vean obligados á desovar en un espacio reducido, para que así agrupados los huevos sea más fácil su hallazgo. En una viña plagada de *Phylloxera*, asegura el observador de Villegouge, puede así hacerse abundante cosecha en poco tiempo del referido huevo y de las hembras sexuadas, que al ponerle quedan muertas á su lado.

Otra interesante observacion de Mr. Boiteau es la de que la hembra sexuada no va á poner su único huevo bajo de tierra, como algunos habian creido. Para cerciorarse de ello ha arrancado varias cepas, que, á pesar de contener en su sistema aéreo multitud de huevos de invierno, á partir de flor de tierra, no le ha sido posible encontrar uno sólo en todas las raices gruesas ni capilares, á pesar del exámen más escrupuloso que ha verificado. De tan importante estudio resulta demostrado el punto donde termina el ciclo biológico de la *Phylloxera vastatrix*, y dónde toma orígen por la madre parthenogenésica que nace del huevo de invierno y baja á enterrarse para fundar nuevas colonias de individuos radicícolas.

GRAELLS.

LOS ESQUIMALES Y LOS NUBIOS.

No se necesita ser gran observador para distinguir á un andaluz de un gallego, ni á un catalan de un vascongado, y esto sin oirles hablar, porque en tal caso se les reconocerá con los ojos vendados. Las diferencias que nos ofrecen estos habitantes de una misma nacion, provienen de su diferente modo de vivir, impuesto á cada uno por las condiciones materiales del medio en que pasa la vida; de manera que mirando á su alrededor, cada cual podrá formarse una idea de las modificaciones profundas que las causas locales, infinitamente prolongadas, pueden determinar en la especie humana. La reciente obra de Mr. de Quatrefages, titulada *La especie humana*, contiene sobre este asunto detalles interesantísimos, que no es mi objeto exponer aquí.

Con motivo de la exposicion de los Nubios y Esquimales en el Jardin zoológico del Bois de Boulogne, en París, Monsieur Lamaire ha publicado en la *Crónica de la Sociedad de Aclimatacion* un curioso escrito sobre las principales condiciones en que estos dos pueblos se encuentran por su posicion geográfica sobre el globo, concibiéndose fácilmente que de ello debe resultar una existencia y una alimentacion capaz de producir á la larga el sello particular que los distingue.

La antigua fórmula de Brillat-Savarin, que dice *dime lo que comes y te diré lo que eres*, puede aplicarse tanto á lo físico como á lo moral, y segun los adelantos modernos aseguran, estos son los diferentes medios que han producido las distintas razas.

Veamos ahora algunos de los fenómenos naturales que Mr. Lamaire señala en el grado 69 de latitud para los Esquimales, en el 12° para los Nubios, y en el 49°, para los Parisienses.

	Esquimales.	Parisienses.	Nubios.
Distancia del Polo......	2,333 kil.	4,556 kil.	8,667 kil.
Idem del Ecuador......	7,667	5,445	1,223
Longitud de la paralela..	14,334	26,242	39,123

Y como cada punto de los paralelos da una circunvolucion cada 24 horas, resulta que los Nubios, que recorren 39,123 kilómetros en dicho tiempo, atraviesan el espacio más rapidamente que los Esquimales, que en igual número de horas solo giran 14,334 kilómetros.

Resultado de estas cifras por segundos.

	Esquimales.	Parisienses.	Nubios.
Traslacion de la paralela en 1 segundo.......	166 metr.	304 metr.	453 metr.

Con la velocidad con que recorren su círculo los Nubios, el trayecto de París á Orleans se andaria en cuatro minutos y medio, mientras que se necesitarian doce con la de los Esquiles, y seis y medio con la de los habitantes del 49 grado de latitud.

Pasemos á examinar la duracion de los dias, cuya influencia sobre la actividad de los seres vivos es tan marcada.

		Esquim. h. m.	Parisien. h. m.	Nubios. h. m.
Los 16 de enero y 26 de noviembre.	Duracion del dia. ..	1 51	8 38	11 28
	Duracion de la noche.	22 09	15 22	12 32
	Salida del sol, á las.	11 35	7 51	6 16
	Postura del sol al medio dia..........	25	4 09	5 44
Los 20 de mayo y 23 de julio.....	Duracion del dia....	22 22	15 26	12 40
	Duracion de la noche.	1 38	8 34	11 20
	Salida del sol á media noche y........	49	4 17	5 40
	Postura del sol.....	11 11	7 43	6 20

	Esquimales.	Parisienses.	Nubios.
Del 25 de mayo al 18 de julio.	El sol no se pone; no hay noche..	La duracion del dia varia de 15 horas 38′ á 16 h. 9′	La duracion del dia varia de 12 h. 42′ á 12 h. 47′
Del 2 de diciembre al 10 de enero........	No amanece; no hay dia.	La duracion del dia de 8 h. 8′ á 8 h. 27′	La duracion del dia varia de 11 h. 23′ á 11 h. 26′
Altura del sol en el solsticio de verano á medio dia..........	44° 27′	64° 27′	78°, 33′ y 90° dos veces al año, los 21 de abril y 21 de agosto.

La altura máxima del sol de 44° 27′ en el país de los Esquimales, es la misma que tiene lugar en París el 31 de marzo y 12 de setiembre á las once y media y doce y media del dia; y he aquí de que modo pueden, segun Mr. Lamaire reconocer aproximadamente los parisienses las citadas alturas del sol.

La altura de las torres de Nuestra Señora de París es de 66 metros: pues bien, colocándose á 66 metros de la base de aquellas, y mirando á lo alto de las mismas es precisamente la direccion en que se verá elevado el sol á los 44° 27′ sobre el horizonte.

Colocándose á 31 metros de dicha base y mirando la picota de las torres, se tendrá la direccion de los 64° 27′; y en fin colocándose á 13 metros solamente de la misma base, y mirando á la mayor altura de las torres, se tiene la direccion de los 78° 33′. En cuanto á los 90° grados, es sabido que se trata de un punto situado exactamente encima del observador.

Otro modo de reconocer el valor relativo de estos grados de altura en París, es colocarse á 13 metros de la base de las torres de Nuestra Señora, y levantar la vista hasta el quinto de su altura, y resultará el ángulo de 44° 27′; si la elevamos hasta los dos quintos, tendrémos el ángulo de 64° 27′; y en fin, mirando la cúspide de las torres, será la direccion de los 78° 33′.

Tales diferentes alturas del sol representan en luz para los Esquimales 10, cuando tienen 13 los Parisienses y 14 los Nubios.

Mr. Lemaire concluye con algunas temperaturas medias observadas en los tres paises:

	Esquimales.	Parisienses.	Nubios.
	—	—	—
Del año...	—16°,6	+10°,8	+28°,7
Verano...	+ 1°,7	+18°,2	+29°,9
Invierno...	—29°,7	+ 3°,5	+26°,4
Meses de más calor..	+ 3°,9 en Julio.	+18°,9 en Jul.	+31°,5 en May.
Meses de más frio...	—33°,5 en Dic.	+ 2°,4 en En.	+25°,5 en Dic.

Al terminar la anterior noticia sobre la curiosa comunicacion de Mr. Lamaire publicada en la *Crónica de la Sociedad de Aclimatacion*, no puedo menos de expresar la gran sorpresa que me causó el ver exhibidos en el célebre Jardin zoológico del Bois de Boulogne, á los citados tipos de la humanidad, como á otros muchos animales, encerrados en una espaciosa cerca, donde los contemplaba un crecidísimo número de curiosos, ávidos de admirar á sus extraordinarios prójimos que se ocupaban en diversos ejercicios ejecutados á su particular usanza, lo cual venia á demostrarnos que á las variaciones morfológicas contraidas del modo ya indicado, van inherentes maneras especiales de operar y proceder para cumplir las necesidades de la vida, cuyas exigencias varian segun el medio en que cada sér se encuentra colocado. Y con tal ejemplo, y con los principios ya establecidos por la ciencia sobre el influjo de las causas locales infinitamente prolongadas para determinar la variacion de la especie, ¿á quien no se le ocurrirá que tal doctrina, confirmada por la observacion de los hechos, viene en apoyo de las predicaciones darwinistas? Si la especie humana, que representa al sér más complejo de la animalidad, sometida á tan distintas condiciones locales, como son las de las diferentes partes del globo que habita, llega á hacerse tan extraordinariamente polimorfa, como demuestran á la evidencia sus múltiples razas y variedades ¿qué de sorprendente, extraño ni atrevido tendrán las racionales teorías de los eminentes naturalistas Lamarck y Darwin?

M. P. Graells.

VARIEDADES.

Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales.
Programa para la adjudicacion de premios en el año de 1879.

Artículo 1.° La Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporacion, los temas siguientes:

I.

El Algebra histórica y críticamente considerada. *Definicion de esta parte de la ciencia matemática, é indicacion de sus límites y caractéres propios y distintivos. Exposicion compendiosa, pero metódica y clara, de sus principios fundamentales y teorías más importantes, en cuanto principalmente se refiere á su origen y desenvolvimiento en el trascurso del tiempo, á sus relaciones mútuas de analogía y dependencia, ó á su falta de conexion é íntimo enlace. Qué se entiende por* teorías modernas *del Algebra; á qué necesidad ú objeto científico responden, y de qué modo ó hasta dónde le satisfacen.*

II.

Estado actual é historia de los progresos de las ciencias exactas, físicas y naturales en España desde los primeros años del reinado de Carlos III hasta el primero de Alfonso XII, señalando la influencia que hayan tenido en los referidos progresos las enseñanzas de las Universidades, Escuelas especiales aplicadas, Academias, el libro, las publicaciones periódicas de Ciencias, Gabinetes, Laboratorios, Museos, Observatorios, Decretos y Legislaciones orgánicas que sucesivamente se hayan publicado con relacion al estudio de las Ciencias mencionadas.

III.

Estudio y exposicion de las causas que determinan la heteromórfosis *de los individuos de una misma especie, los cuales llegan á producir las* *extraordinarias formas alternantes que han inducido muchas veces á error á los naturalistas descriptores, hasta el punto de formar con una misma especie, tipos de géneros, familias y aun de grupos más superiores diferentes.*

El autor de la Memoria deberá ilustrar sus explicaciones con dibujos demostrativos de las graduales y sucesivas transformaciones que experimentan los órganos, y dan por resultado el cambio de la fisonomía de una misma especie.

2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mencion honorífica.*

3.° El *premio* consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicacion; una medalla de oro, de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesion pública entregará el Sr. Presidente de la Corporacion á quien le hubiese merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribucion pecuniaria al mismo autor ó concurrente premiado de 1.500 pesetas; impresion por cuenta de la Academia, en la Coleccion de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada; y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

4.° El *premio* se adjudicará á las Memorias que no solo se distingan por su relevante mérito científico, sino tambien por el órden y método de exposicion de materias y redaccion bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicacion.

5.° El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del *premio* y adjudicados del mismo modo; y en la impresion de la Memoria coleccionada con las de la Academia y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

6.° El *accesit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas, y que versen sobre los mismos temas: ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporacion, á las impuestas para la adjudicacion ú obtencion del premio.

7.° La *mencion honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accesit*, que se entregará tambien en sesion pública al autor ó concurrente agraciado, ó á persona que le represente.

8.° La mencion honorífica se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algun concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicacion por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accesit*.

9.° El concurso quedará abierto desde la publicacion de este Programa en la Gaceta de Madrid, y cerrado en 31 de diciembre de 1879, hasta cuyo dia se recibirán en la Secretaría de la Academia cuantas Memorias se presenten.

10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó estranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporacion.

11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latin.

12. Las Memorias que se presenten optando á premio se entregarán en

la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicacion del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta, que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, tambien cerrado, dentro del cual constarán el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

13. De las Memorias ó pliegos cerrados el Secretario de la Academia dará á las personas que los presente y entregue un recibo, en que consten el lema que los distingue y el número de órden de su presentacion.

14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio ó accesit*, se abrirán en la sesion en que se hubiese acordado otorgar á sus autores una ú otra distincion y recompensa; y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mencion honorífica*, no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decision de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la Gaceta de Madrid los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas; y, en el improrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certámen, y otorgarán por escrito la vénia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Trascurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden, sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distincion que legitimamente les corresponde.

16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accesit*, ni con *mencion honorífica*, se quemarán en la misma sesion en que la absoluta falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiese decidido. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mencion honorífica*, cuando en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubiesen concedido permiso para abrirlos.

17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporacion, podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado: como modelos de construccion, atlas ó dibujos complicados de reproduccion difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certámen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las *Memorias* que respectivamente les correspondan.

El Secretario perpétuo, *Antonio Aguilar y Vela.*

Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales.

Premios de 1877.—En el concurso abierto por esta Real Academia para premiar las *Memorias* que lo mereciesen entre las presentadas sobre los temas que oportunamente se anunciaron, se ha declarado que la única *Memoria* sobre el 2.° tema publicado en 1876, ó sea el de *Determinar el valor intrín-*

seco de las materias curtientes y astringentes, referido al del tanino producido por los vegetales de cinco ó mas provincias de España, etc., y que se distinguia con el lema *Estudios sobre el tanino*, era merecedora de *accesit*.

Abierto acto continuo el pliego señalado con el mismo lema que debia contener el nombre del autor, resultó serlo el Sr. D. Cárlos Castel y Clemente, profesor de la Escuela de ingenieros de montes.

Lo que se pone en conocimiento del público, en cumplimiento de los acuerdos de la Academia.=El Secretario perpétuo, *Antonio Aguilar*.

Exposicion geológica internacional. *Circular dirigida á los geólogos.*—Los notables progresos hechos en los estudios geológicos desde hace medio siglo, han producido el resultado de dar á esta ciencia una gran importancia, y al mismo tiempo de reunir una masa enorme de observaciones que exigen esten perfectamente ordenadas. Los geólogos que siguen sus estudios distantes unos de otros, conocen la necesidad de definiciones mas exactas, que puedan dar mayor valor á sus observaciones y comparaciones. La exposicion internacional que se celebró en Filadelfia, ha ofrecido á los geólogos americanos y europeos que han tenido la dicha de encontrarse en ella, colecciones geológicas de varias partes del mundo, que comprendian ejemplares de rocas, de minerales, de fósiles y de cartas geognósticas. El estudio comparativo de estos materiales les ha inspirado la idea de que necesariamente debian dar resultados más importantes para la ciencia geológica, colecciones más generales y más numerosas, reunidas segun un sistema comun.

La exposicion internacional que se verificará en París este año, ofrece bajo este punto de vista una ocasion de las más á propósito, y nos ha sugerido el pensamiento de invitar á las diversas naciones, representadas por sus cuerpos de ingenieros de minas, sus profesores de geología y sus sociedades sabias, así como tambien á los particulares para que contribuyan como tengan por conveniente á fin que resulte lo más completo posible el departamento geológico de esta exposicion.

Al mismo tiempo, y para sacar el mayor provecho posible de esta ocasion, se propone convocar un CONGRESO GEOLÓGICO INTERNACIONAL, que se verificará en París durante la Exposicion, y permita á los Señores geólogos hacer en conjunto el estudio crítico de las colecciones que hayan reunido; como tambien tratar, por medio de discusiones amistosas, de resolver alguno de los numerosísimos problemas que ofrece todavía la clasificacion y la terminología geológica.

Se propone que los materiales geológicos que se envien á la exposicion comprendan:

1.° Colecciones de esquistos cristalinos y de rocas eruptivas, comprendiendo en ellas las formaciones llamadas de contacto y los resultados de las alteraciones de terrenos no cristalinos por las rocas de expansion. Los restos orgánicos hallados en los terrenos cristalinos, merecen una consideracion particular. Estas colecciones comprenderán tambien toda especie de rocas que tenga una importancia especial bajo los puntos de vista de la química, de la mineralogía ó de la litología, como tambien los depósitos geyserianos, los diversos minerales y los filones de toda especie con las rocas en que se hallen. En lo posible, las rocas deben ir dispuestas de modo que permitan su estudio al microscopio. Sería de desear que para arreglar estos materiales, se tuviesen en cuenta más bien asociaciones naturales que ideas teóricas ó clasificaciones artificiales, para que puedan estudiarse las colecciones, no sólo bajo el punto de vista de la petografía, sino tambien de la geognosia.

2.º Colecciones de restos orgánicos de terrenos sedimentarios, especialmente las faunas y las floras que pertenecen á los horizontes que tienen un interés especial para la geológia. A los individuos de la comision nombrada anteriormente, ha parecido que los restos orgánicos de los terrenos designados con los nombres de cambriano, tacónico y primordial merecen principalmente un estudio especial. Todas estas colecciones deberán explicarse por rótulos, catálogos, monografías y cartas.

3.º Colecciones de cartas geológicas, y especialmente cortes y modelos que sirvan para poner de relieve la estructura de las montañas. En la preparacion de las cartas, se invita especialmente á fijar la atencion en ciertas cuestiones que merecerán principalmente la consideracion del Congreso, tales como, por ejemplo, las escalas que conviene adoptar para diferentes cartas, los colores y símbolos que hay que emplear, y la mejor manera de representar en una sóla carta los depósitos superficiales, al mismo tiempo que los terrenos subyacentes. Por medio de una discusion de estas cuestiones, se fijarán las bases para la construccion de cartas geológicas perfeccionadas, de los continentes.

La Asociacion americana para el adelantamiento de las ciencias, en su última reunion anual, que se verificó en Búfalo bajo la presidencia del profesor Sr. William B. Rogers, aprobó por unanimidad el siguiente acuerdo el 25 de Agosto de 1876.

El Presidente de esta Sociedad nombrará una comision con el encargo especial de organizar un Congreso internacional de Geólogos, que se reuna en París durante la Exposicion internacional de 1878, con objeto de discutir y de fijar las cuestiones de clasificacion y de nomenclatura geológicas. Dicha comision estará tambien encargada de invitar á los Señores geólogos para que envien á esta Exposicion colecciones geológicas que permitan hacer estudios comparativos. Los nombres de nuestros distinguidos huéspedes MM. Huxley, de Inglaterra, Torell, de Suecia y de Baumhauer deben agregarse á los de esta comision, invitándoles á tomar medidas para asegurar la cooperacion de los geólogos europeos en el congreso propuesto. La comision se compondrá de los Señores William B. Rogers, James Hall, J. W. Dawson, J. S. Newberry, T. Sterry Hunt, C. H. Hitchcock y R. Pumpelly, agregándoseles MM. T. H. Huxley, Otto Torell y E. H. Von Baumhauer por el extrangero.

En una reunion de dicha comision, celebrada el 25 de Agosto, el Profesor James Hall fué elegido Presidente, y el Dr. T. Sterry Hunt, Secretario. Despues se resolvió redactar esta circular en inglés, francés y alemán, y remitirla á los geólogos de todos los paises, invitándolos para que coadyuven á la obra importante de una *Exposicion geológica internacional* y de un *Congreso geológico internacional*, en París en 1878, debiéndose fijar despues la fecha exacta. Todos los que se interesen en este proyecto pueden dirigirse á los Señores siguientes de la comision.

Profesor T. H. Huxley, *Londres*, Inglaterra.
Dr. Otto Torell, *Estocolmo*, Suecia.
Dr. E. H. Von Baumhauer, *Harlem*, Holanda.
Dr. T. Sterry Hunt, *Boston*, *Mass*, V. S. A.

Conferencias y congreso durante la Exposicion universal. El ministro de agricultura y comercio ha decidido que se verifiquen conferencias durante la Exposicion universal en el palacio del Trocadero. Hé aquí los términos del decreto formulado por Mr. Teisserenc de Bort:

Artículo 1.° Durante la Exposicion universal de 1878, se establecen ocho grupos de conferencias y congresos, en los cuales se tratarán las cuestiones que se refieran al orígen, produccion, ejecucion, progreso, gastos, legislacion y proteccion legal de las obras y de los productos de toda clase reunidos en el recinto de la Exposicion.

Art. 2.° Dichas conferencias y congresos se verificarán en las salas del Trocadero, bajo la elevada direccion y comprobacion de una comision especial.

Art. 3.° Para la preparacion y organizacion general de las conferencias y congreso, se crean siete comisiones correspondientes á los diversos grupos de los productos de la Exposicion, y otra octava comision, que reunirá en sus atribuciones todo lo que pueda hallar su representacion material en la Exposicion.

Cada una de estas comisiones se constituirá eligiendo de su seno un presidente y secretario.

Art. 4.° Una comision central, compuesta de los ocho presidentes nombrados en la forma que se ha dicho, centralizará y coordinará el trabajo de las comisiones. Tomará, con aprobacion del Gobierno, las disposiciones reglamentarias relativas á su marcha, fijará el órden y la naturaleza de las conferencias y de los congresos que tendrá que autorizar ó provocar, y designará los documentos que deberán publicarse en un resúmen.

La comision será presidida por el ministro de agricultura y comercio, ó por el subsecretario de Estado.

Art. 5.° Se establece cerca de la comision central una secretaría, encargada de preparar los trabajos de las comisiones, de recojer las decisiones de la comision y de asegurar su cumplimiento.

Art. 6.° Se concede un crédito de 100.000 francos al comisario general de la Exposicion para sufragar los gastos de instalacion, de publicidad y de publicacion que exigirán las conferencias y congreso, cuyo crédito se asignará al capítulo 4.° del presupuesto general de la Exposicion universal.

En la exposicion que precede al decreto, se lee lo siguiente:

«En las conferencias se expondrán las enseñanzas que ofrece para el estudio de los productos reunidos en las diversas clases, la historia de sus progresos y de las ciencias que utiliza, la naturaleza y la extension de las necesidades que satisface, el estado de las costumbres y el grado de civilizacion á que corresponden, el pensamiento de que proceden, el desarrollo é impulsion nueva que tal pensamiento puede recibir.

»En los congresos se debatirán contradictoriamente todas las cuestiones de legislacion y de doctrina que se refieren á la industria, á las ciencias, á las artes, ya considerándolas en sí mismas, ya bajo el aspecto de las relaciones internacionales de que son la causa, y estas discusiones no podrán menos de poner en claro puntos que están oscuros; servirán para resolver cuestiones todavía inciertas, para afirmar reglas y principios fecundos, y para unificar los esfuerzos que aisladamente serian infructuosos.

»La facilidad, la rapidez de las comunicaciones, el desarrollo de las relaciones comerciales, han creado entre los diversos pueblos una porcion de intereses comunes, en los cuales produce una gran perturbacion la diversidad de legislaciones. Algunas reuniones, en las cuales se discutirán las bases de una mútua inteligencia para todos, apresurarán mucho seguramente la adopcion de reglas internacionales uniformes.»

Descubrimientos arqueológicos. Se indican interesantes descubrimientos arqueológicos en Roma. En la rinconada de las calles de Montebello y Volturne, en el sitio que ocupaba el campo de los pretorianos, se ha descubierto una cueva en la que habia un millar de ánforas colocadas en diez filas sobrepuestas.

De estas 1.000 ánforas, hay cerca de 200 que llevan inscripciones de color (negro, blanco, rojo ó verde), cuyas inscripciones tienen una verdadera importancia bajo el punto de vista de la historia del comercio de los géneros alimenticios entre los antiguos.

En el ángulo que forman las calles de Mazarino y Nacional, se ha hallado una magnífica pintura mural en mosaico, de colores brillantes, que mide mas de 2 metros y 10 centímetros de alto, y 1 metro y 9 centímetros de ancho.

Este mosaico representa una gran galera, con velas desplegadas, con pabellon flotante, en el momento de entrar en un puerto monumental. El puerto está rodeado de muelles con escaleras de desembarque, de otro construido sobre pilares y arcos, y de un faro, cuya parte inferior es rectangular y la superior cilíndrica.

Este mosaico, descubierto en la propiedad de Pallavicini, ha sido ofrecido por dicho príncipe al museo Capitolino.

Animales feroces en las Indias. El que pasea tranquilamente por el jardin de plantas, satisfaciendo sin temor alguno su curiosidad, ve los leones y los tigres recorriendo sus jaulas con paso lento y regular, los osos bostezando de fastidio en el fondo de sus cuevas, las serpientes adormecidas bajo sus mantas, y no puede formarse idea de los desastres que causan semejantes animales feroces en los paises en que viven libres y en estado salvaje. El tributo que les pagan los hombres, nada más que en las Indias, es verdaderamente espantoso, como puede verse por algunas cifras que publica la *Union medicale*.

Se ha comprobado que en 1876, los elefantes han muerto 52 personas, los leopardos 156, los tigres 917, los osos 123, los lobos 887, las hienas 49, diversos animales fieros 143, y por último, las serpientes 15.946.

Constituye todo un total de 21.000 víctimas humanas.

En el mismo tiempo los animales fieros han devorado 54.830 cabezas de ganado. Y aunque durante el año 1876 se han destruido 22.357 animales monteses y 270.185 serpientes, y en 1877 se ha continuado la destruccion, pereciendo 212.371 serpientes y 23.459 animales fieros, el tributo pagado por el hombre á las fieras, ha sido todavía en 1877 de 19.273 personas y 48.000 cabezas de ganado.

El gran globo cautivo de la Exposicion universal. El globo cautivo de Mr. Giffard se está construyendo, y debemos esperar que, gracias á la inteligente organizacion del inmenso material, y á las disposiciones que pueden adoptarse para conducir á buen fin tan gigantesca empresa, el *gigante del aire* se hallará en disposicion de funcionar desde que se abra la Exposicion. El globo Giffard podrá, como es sabido, elevar 50 personas á mas de 500 metros de altura; su volúmen tendrá una capacidad de 25.000

metros cúbicos, y medirá 36 metros de diámetro. La cubierta, impermeable al hidrógeno, está compuesta de telas y placas de goma elástica, alternativamente sobrepuestas. Se llenará con gas hidrógeno puro, preparado con limaduras de hierro, tratadas con ácido sulfúrico.

Espejo eléctrico de los caminos de hierro. En la estacion de Marsella debe hacerse dentro de muy poco un experimento de un medio ingenioso propuesto para evitar siniestros en los caminos de hierro. Consiste en un espejo eléctrico que se coloca en todas las estaciones, y en el cual se reproducirá todo el movimiento de la línea. Por esta combinacion, los jefes de estacion podrán ver con medio kilómetro de aproximacion en qué punto de la línea se halla el tren que haya pasado por la suya. Dicho espejo es sumamente curioso, porque por él se puede ver circular, subir, bajar y cruzarse todos los trenes en un trayecto de 100 kilómetros. Por este medio pueden prevenirse en lo sucesivo los accidentes, que son resultado de adelantarse ó retrasarse los trenes.

Camino de hierro aéreo. Se va á prolongar en Nueva-York el camino de hierro aéreo, llamado de la sexta calle, que hasta ahora no atravesaba mas que la parte superior de la ciudad. Adelanta rápidamente la colocacion de los rails sobre pilares de hierro, cuyos pilares se elevan á la altura de un piso, y en diez dias llegará á tener la longitud de media milla. El trabajo está adelantado ya hasta la calle núm. 24, donde comienza el barrio comercial. Por consiguiente, dentro de poco, el camino de hierro aéreo ó suspenso, atravesará la ciudad en toda su longitud, es decir, en un espacio de 8 millas.

CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMERICAS.

(Continuacion.)

CAPITULO VII.

Aplicacion de las teorías expuestas en los capítulos precedentes á la resolucion de varios ejemplos.

§. 34.

Necesidad ó conveniencia de este capítulo, complementario de los precedentes.

Aunque en el curso de esta Memoria se hayan intercalado algunos ejemplos bastante sencillos, con el doble objeto de ilustrar la teoría y demostrar la conveniencia y eficacia del nuevo método de resolucion de las ecuaciones numéricas, por vía de recapitulacion, y para que pueda prácticamente parangonarse la importancia y generalidad de este procedimiento con las de cualquiera otro de los ya conocidos y vulgares, agregaremos á los resueltos y discutidos en las páginas anteriores otros varios, de mayor complicacion y trascendencia.

§. 35.

Resolucion de una ecuacion de SÉPTIMO *grado, con siete raices reales, comprendidas entre* cero *y la* unidad.

Como primero de todos, propongámonos resolver la siguiente ecuacion, en una de sus célebres obras analizada y resuelta tambien por el profundo matemático C. F. Gauss:

$$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 +$$
$$\frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0.$$

Reemplazando en ella los coeficientes por sus logaritmos, nos resultará esta otra:

$$x^7 - 0.5440680\,x^6 + 0.6853971\,x^5 -$$
$$0.5270347\,x^4 + 0.0877020\,x^3 - \overline{1}.3429745\,x^2 +$$
$$\overline{2}.2126407\,x - \overline{4}.4644527 = 0.$$

El uso de las *características* negativas, tan embarazoso y poco conveniente en el cálculo, se evitará transformando la ecuacion propuesta en otra, cuyas raices sean las de la primitiva, multiplicadas por un factor comun, k. Y cuando este factor pueda escogitarse de manera que el último término de la ecuacion transformada resulte igual á la unidad, tampoco deberá prescindirse de la simplificacion en tan sencilla propiedad basada. En el ejemplo de que ahora se trata, ambos resultados apetecidos se obtienen adoptando para multiplicador comun, k, el número determinado por la relacion siguiente: $k^7 = 3432$; ó $\log k = 0{,}5050782$.

Agregando este logaritmo al segundo coeficiente de la ecuacion anterior, y su duplo, triplo, etc., etc., respectivamente, á los demas sucesivos, la transformacion quedará verificada, y obtendremos este nuevo resultado, ó ecuacion, que deberemos considerar como verdadero punto de partida:

$$(2^0)\ x^7 - 1.0491462\,x^6 + 1.6955535\,x^5 - 2.0422693\,x^4 + 2.1080148\,x^3 - 1.8683655\,x^2 + 1.2431099\,x - 0.0000000 = 0.$$

En el cálculo de las primeras transformadas de esta ecuacion, por la regla del (§. 3), conviene emplear logaritmos de *siete* cifras decimales; porque, si solo de *cinco*, desde un principio, los empleásemos, en el del tercer coeficiente de la (2^1), nos resultaría que

$$\log \alpha_3^{\,2} = +\,3.39111;$$
$$-\log 2\,\alpha_1\,\alpha_5 = -\,3.39245;\ \ \text{y}$$
$$\log 2\,\alpha_4 = +\,2.40904.$$

Pues bien: cuando, con auxilio de las tablas de Gauss, conocida la diferencia de dos logaritmos, tratemos de calcular el logaritmo de la diferencia de los números á que corresponden, conforme en el (§. 19) se explicó, si la primera diferencia es, como en el caso actual acontece, de 0.00134, bastará una incertidumbre ó error de una simple unidad de quinto órden, para que el logaritmo buscado adolezca de otro error ó incertidumbre de todo punto inadmisible, hasta de 330 unidades de la misma especie. Y no solo por este motivo, sino, en general, para evitar desde un principio la acumulacion de errores, transcendentes á los resultados finales, conviene calcular las primeras transformadas de la ecuacion propuesta con *siete* cifras decimales; sin perjuicio, para simplificar y abreviar las operaciones numéricas, cuando ya un extremado rigor no se considere preciso, de trabajar luégo con logaritmos de solas *cinco*. Hasta la presuncion muy racional de que sean erróneas las dos últimas cifras decimales, tras de unas cuantas combinaciones aritméticas con números meramente aproximados á la verdad, autoriza y aconseja semejante manera de proceder. De la ecuacion (2°) se desprenderán, pues, por la regla del (§. 3), y en consecuencia de todo lo dicho, las transformadas que siguen:

$$(2^1)\quad x^7+1.4180048\,x^6+2.3959870\,x^5+3.0189949\,x^4+3.2738401\,x^3+3.0739348\,x^2+2.2004297\,x+0.0000000=0.$$

$$(2^2)\quad x^7+2.2735725\,x^6+4.0410890\,x^5+5.3386202\,x^4+6.0534451\,x^3+5.9093643\,x^2+4.3578860\,x+0.0000000=0.$$

$$(2^3)\quad x^7+4.12268\,x^6+7.61495]\,x^5+10.36176\,x^4+11.96640\,x^3+11.78333\,x^2+8.71441\,x+0.00000=0.$$

$$(2^4)\quad x^7+7.97094\,x^6+15.03773\,x^5+20.65592\,x^4+23.91840\,x^3+23.56553\,x^2+17.42882\,x+0.00000=0.$$

$$(2^5)\quad x^7+15.81746\,x^6+30.04231\,x^5+41.30800\,x^4+47.83679\,x^3+47.13106\,x^2+34.85764\,x+0.00000=0.$$

$$(2^6)\quad x^7+31.61214\,x^6+60.08366\,x^5+82.61598\,x^4+95.67358\,x^3+94.26212\,x^2+69.71528\,x+0.00000=0.$$

$$(2^7)\quad x^7+63.22365\,x^6+120.16732\,x^5+165.23196\,x^4+191.34716\,x^3+188.52424\,x^2+139.43056\,x+0.00000=0.$$

Como ya en otro lugar advertimos, el cálculo de estas diversas ecuaciones transformadas es tanto más breve y sencillo cuanto más nos alejamos de la primitiva, ó cuanto mayores van siendo los exponentes de las potencias á que las raices de esta misma ecuacion resultan elevadas: para penetrarse de lo cual basta reparar que los coeficientes de los cuatro últimos términos de la (2^5) se obtienen por simple *duplicacion* de los correspondientes en la anterior; los cinco últimos de la (2^6) por duplicacion de los mismos cinco de la (2^5); y los seis de la (2^7) duplicando tambien los seis últimos de la precedente. Sólo el coeficiente de x^6 se deduce en la (2^7) por un procedimiento algo, muy poco, más complicado, de los coeficientes de la transformada anterior. Y en la (2^8) ni siquiera esta simple excepcion se advertiría. El trabajo de transformacion preliminar, necesario para determinar las siete raices de la ecuacion (2^0), con el grado de aproximacion asequible por medio de las tablas logarítmicas de cinco cifras decimales, concluye, pues, en la (2^7). Y como ésta y las demas transformadas que la preceden no presentan un solo cambio de signo, ó tienen positivos todos sus términos, resulta que aquellas siete raices son *reales* todas. Para determinar sus logaritmos, basta restar de los coeficientes tercero, cuarto, ..., de la (2^7), los segundo, tercero, ...; y dividir el segundo, y las diferencias resultantes, por el exponente, 128, de la potencia máxima á que han sido elevadas aquellas raices. De los logaritmos de las correspondientes á la ecuacion simbólica, representada por (2^0), se deducirán luégo los de la realmente propuesta, restando de todos el del número k, igual á 0.5050782. En el adjunto cuadro se hallan consignados los resultados diversos, obtenidos procediendo de este modo:

$\log(ak)^{128} = 63.22365$	$\log ak = 0.493935$	$\log a = \overline{1}.98886$
$\log(bk)^{128} = 56.94367$	$\log bk = 0.444872$	$\log b = \overline{1}.93979$
$\log(ck)^{128} = 45.06464$	$\log ck = 0.352067$	$\log c = \overline{1}.84699$
$\log(dk)^{128} = 26.11520$	$\log dk = 0.204025$	$\log d = \overline{1}.69895$
$\log(ek)^{128} = \overline{3}.17708$	$\log ek = \overline{1}.977946$	$\log e = \overline{1}.47287$
$\log(fk)^{128} = \overline{50}.90632$	$\log fk = \overline{1}.616456$	$\log f = \overline{1}.11138$
$\log(gk)^{128} = \overline{140}.56944$	$\log gk = \overline{2}.910699$	$\log g = \overline{2}.40562$

Si para determinar los *signos* de estas raices (*negativas* en la acepcion de la palabra *raiz*, adoptada en esta MEMORIA, y *positivas* en el sentido vulgar del Algebra), ó con objeto de calcular sus correcciones por la regla de Newton, sustituyésemos sus valores en la ecuacion propuesta, sorprenderíanos el grado de aproximacion ya obtenido. Y eso que el ejemplo no tiene nada de sencillo; pues una ecuacion de séptimo grado, con siete raices reales, comprendidas todas entre 0 y 1, no es fácil de resolver por ningun procedimiento. Ni el artificio de multiplicar estas raices por el número k, abrevia tampoco en ninguno la multitud de operaciones, indispensables para determinarlas con la aproximacion desde luego obtenida por el nuevo método y reiterada, pero muy sencilla, aplicacion de la regla fundamental del (§. 3).

Efectuemos aquella sustitucion en un solo caso,—en el más desfavorable, por cierto,—y veamos lo que entónces resulta. Operando con logaritmos de *siete* cifras decimales, y suponiendo que $x_0 = b_0$ y $\log b_0 = \bar{1}.9397900$, obtendremos, por de pronto, los resultados adjuntos:

$$\begin{array}{llll}
x_0^7 & = + 0.3789047 & 7\,x_0^7 & = + 2.6523329 \\
\alpha_1 x_0^6 & = - 1.5233790 & 6\,\alpha_1 x_0^6 & = - 9.1402740 \\
\alpha_2 x_0^5 & = + 2.4229648 & 5\,\alpha_2 x_0^5 & = + 12.1148240 \\
\alpha_3 x_0^4 & = - 1.9328347 & 4\,\alpha_3 x_0^4 & = - 7.7313388 \\
\alpha_4 x_0^3 & = + 0.8073689 & 3\,\alpha_4 x_0^3 & = + 2.4221067 \\
\alpha_5 x_0^2 & = - 0.1669377 & 2\,\alpha_5 x_0^2 & = - 0.3338754 \\
\alpha_6 x_0 & = + 0.0142047 & 1\,\alpha_6 x_0 & = + 0.0142047 \\
\alpha_7 & = - 0.0002914 & 0\,\alpha_7 & = 0.0000000 \\
\hline
[x_0^n] & = + 0.0000003 & [n\,x_0^n] & = - 0.0020199
\end{array}$$

Y por la fórmula (12) del (§. 8) concluiremos en seguida que

$$\Delta \log x_0 = - \frac{[x_0^n]}{[n x_0^n]} \times M = \frac{3}{20199} \times 0.43429 \ldots\ldots = 0.000065$$

Pero como este resultado depende principalmente de la única cifra, 3, del numerador, y en esta cifra, procedente de multitud de operaciones con números meramente aproximados á la verdad, no puede abrigarse plena confianza, acaso la correccion de la raiz ensayada, b_0, tenga algo de ilusoria. Algo tiene, en efecto; áun cuando el valor corregido de $\log x_0$ ó $\log b_0$ se aproxime realmente á la verdad un poco más que aquél de donde partimos. Para obtener, sin embargo, la verdadera correccion que se busca, sería menester operar, ó con logaritmos de *diez* cifras, ó directamente, prescindiendo del auxilio de esta especie de tablas. Procediendo así, fácil, aunque nada breve, sería determinar, partiendo de los valores ya conocidos de a_0, b_0, c_0, ... los de a, b, c, ... con mucho mayor número de cifras decimales. Hasta la 16.ª cifra prolongó Gauss la aproximacion; y, comparando los resultados finales por él obtenidos, con los poco há determinados, conclúyese que los cuatro primeros logaritmos de a_0, b_0, c_0 y d_0, adolecen, por defecto, de los errores respectivos de 5, 11, 8 y 2 *unidades* del quinto órden decimal únicamente; y de errores inferiores á una simple unidad del mismo órden los de e_0, f_0 y g_0. Y si estas tan mínimas discrepancias de la verdad, obtenidas en el primer ensayo de la determinacion *simultánea* de las siete raices, son apreciables todavía, atribúyase á la contrariedad eventual, ya poco ántes tambien indicada: á la pequeña diferencia de los logaritmos de α_2^2 y $2\alpha_1\alpha_3$, correspondientes á la ecuacion (2°), que influye muy desfavorablemente en la determinacion del logaritmo de la diferencia de ambos números, ó del tercer coeficiente de la transformada (2¹).

§. 36.

Resolucion de otra ecuacion, tambien de SÉPTIMO *grado, con* tres *raices reales y* cuatro *imaginarias.*

Como segundo ejemplo tomemos la ecuacion de grado superior, propuesta por Fourier en la página 111 de su *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones Numéricas:*

$$(2^0) \qquad x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Sus dos primeras transformadas, directamente obtenidas por la regla del (§. 3) son éstas:

$$(2^1)\quad x^7+4\,x^6-2\,x^5-2\,x^4+29\,x^3-14\,x^2-23\,x+36=0;\quad \text{y}$$

$$(2^2)\quad x^7+20\,x^6+78\,x^5+54\,x^4+589\,x^3+1386\,x^2+1537\,x+1286=0.$$

Reemplazando los coeficientes de la última ecuacion por sus logaritmos, y continuando la misma serie de transformaciones, obtiénense sucesivamente estos otros resultados:

$$(2^2)\quad x^7+1.30103\,x^6+1.89209\,x^5+1.73239\,x^4+2.77012\,x^3+3.14176\,x^2+3.18667\,x+3.11261=0.$$

$$(2^3)\quad x^7+2.38739\,x^6+3.70774\,x^5-4.56350\,x^4+5.58565\,x^3+5.39859\,x^2-6.08996\,x+6.22522=0.$$

$$(2^4)\quad x^7+4.69313\,x^6+7.64995\,x^5-9.39198\,x^4+11.18557\,x^3+11.94810\,x^2+11.82750\,x+12.45044=0.$$

$$(2^5)\quad x^7+9.37002\,x^6+15.34998\,x^5-18.87658\,x^4+22.44623\,x^3+23.75387\,x^2-24.65849\,x+24.90088=0.$$

$$(2^6)\quad x^7+18.73971\,x^6+30.70300\,x^5-37.83535\,x^4+44.89718\,x^3+47.76037\,x^2+49.06889\,x+49.80176=0.$$

$$(2^7)\quad x^7+37.47942\,x^6+61.40601\,x^5-75.51594\,x^4+89.79441\,x^3+95.49582\,x^2+97.80854\,x+99.60352=0.$$

$$(2^8)\quad x^7+74.95884\,x^6+122.81202\,x^5-151.32153\,x^4+179.58882\,x^3+190.99129\,x^2+195.21132\,x+199.20704=0.$$

El cálculo de transformacion concluye en este punto; pues, para deducir de la ecuacion (2^8) la (2^9), bastaría *duplicar* los coeficientes de la primera, prescindiendo de los de x^4 y x, completamente indeterminados, ó variables en magnitud y signo: indeterminacion de coeficientes que nos revela la existencia en la ecuacion propuesta de *dos pares* de raices imaginarias conjugadas. Los logaritmos de las *tres* raices reales y de los *dos* módulos de las cuatro imaginarias se obtendrán restando unos de otros los coeficientes logarítmicos determinados de la transformada final (2^8), y dividiendo las diferencias por el exponente comun, 256, de las potencias á que las raices han sido elevadas, conforme á continuacion se indica:

Coeficientes comparados de

x^7 y x^6	$\log a^{256} = 74.95884$	$\log a = 0.292808$
x^6 y x^5	$\log b^{256} = 47.85318$	$\log b = 0.186927$
x^5 y x^4	Resultado indeterminado.	
x^5 y x^3	$\log g^{512} = 56.77680$	$\log g^2 = 0.221788$
x^2 y x^2	$\log c^{256} = 11.40247$	$\log c = 0.044541$
x^2 y x^1	Resultado indeterminado.	
x^2 y x^0	$\log g_1{}^{512} = 8.21575$	$\log g_1{}^2 = 0.032093$

Los tres valores de las raices reales, a, b y c, pueden corregirse por sustitucion de los números encontrados en la ecuacion propuesta y regla de aproximacion de Newton. Limitémonos á consignar los resultados que se obtendrían operando con el primero.

Suponiendo que $x_0 = a_0$, y $\log a_0 = 0.292808$, se deduce sin dificultad que

$$
\begin{array}{rlrl}
-x_0{}^7 = & -112.112997 & -7\,x_0{}^7 = & -784.790979 \\
-\alpha_2\,x_0{}^5 = & +\ \ 58.219704 & -5\,\alpha^2\,x_0{}^5 = & +\ 291.098520 \\
-\alpha_4\,x_0{}^3 = & +\ \ 22.674894 & -3\,\alpha_4\,x_0{}^5 = & +\ \ 68.024682 \\
+\alpha_5\,x_0{}^2 = & +\ \ 15.405508 & -2\,\alpha_5\,x_0{}^2 = & +\ \ 30.811016 \\
-\alpha_6\,x_0 = & +\ \ \ 9.812460 & -1\,\alpha_6\,x_0 = & +\ \ \ 9.812460 \\
+\alpha_7 = & +\ \ \ 6.000000 & -0.\alpha_7 = & +\ \ \ 0.000000 \\
\hline
[(-x_0)^n] = & -\ \ \ 0.000431 & [n\,(-x_0)^n] = & -\ 385.044301
\end{array}
$$

De donde, por la fórmula (12), se concluye que

$$\Delta \log x_0 = -0.0000005;$$

y, por lo tanto,

$$\log x = 0.2928075; \quad \text{y} \quad x = -a = -1.9624901$$

Y, de análogo modo, los valores de x, correspondientes á las raices b y c, resultarían respectivamente iguales á

$$1.5378905 \quad \text{y} \quad 1.1080166$$

Los *signos* de las tres raices reales se determinan sin dificultad por la sustitucion de los valores encontrados en la ecuacion propuesta. Si, por ejemplo, se trata del valor a_0, y éste se pone en aquella ecuacion en lugar de x, con el signo positivo, en vez de resultarnos para $[x_0{}^n]$ un valor muy pequeño, como debe siempre suceder cuando por x sustituyamos un valor suyo, muy aproximado á la verdad, nos resultará cualquier despropósito. Que $x_0 = -1.96249$ representa aproximadamente uno de los valores buscados nos lo acredita la expresion $[x_0{}^n] = -0.000431$; y que la suposicion contraria es absurda lo prueba el resultado, $[x_0{}^n] = 42.812 \ldots\ldots$, que, admitiéndola como cierta, se obtendria. Basta en todos los casos un poco de atencion, sin incremento apénas de trabajo, para saber sobre este punto á qué atenerse.

Aunque la ecuacion propuesta sea de séptimo grado, como tiene *tres* raices reales, los dos trinomios de segundo, que comprenden las *cuatro* imaginarias, pueden determinarse por el procedimiento del (§. 13), como si se tratara de una ecuacion de cuarto grado; ó resolviendo estas dos ecuaciones muy sencillas de primero:

$$a + b + c + f + f_1 = \alpha_1 = 0$$

$$g^2\, g_1{}^2\,(ab + ac + bc) + abcg^2 . f_1 + abcg_1{}^2 . f = \alpha_6 = -5:$$

en las cuales, por a, b y c, g^2 y $g_1{}^2$, deberán sustituirse los valores numéricos poco ántes encontrados. Las dos ecuaciones se convierten entónces en estas otras:

$$f + f_1 = +\,0.68341;\ \text{y}$$

$$3.60055\, f + 5.57264\, f_1 = +\,1.25927.$$

De las cuales resulta que

$$f = +\,1.29258, \quad \text{y} \quad f_1 = -\,0.60917.$$

Para corregir ahora los primeros valores de g y f, y de g_1 y f_1, deberemos emplear las fórmulas (21) del (§. 14), y el procedimiento de cálculo en el mismo párrafo explicado. Limitémonos á la deduccion de las correcciones de g_0 y f_0, valores aproximados de g y f.

Por de pronto se infiere de estos valores que

$$\log g_0 = 0.11089, \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 59^\circ\, 57'\, 20''.$$

Y con estos datos fácil es calcular los dos adjuntos cuadros de relaciones numéricas:

$$-g_0^{\,7} \cos 7\varphi_0 = -3.0148035 \qquad -7\, g_0^{\,7} \cos 7\varphi_0 = -21.1036245$$

$$-\alpha_2\, g_0^{\,5} \cos 5\varphi_0 = +3.5605688 \qquad -5\,\alpha_2\, g_0^{\,5} \cos 5\varphi_0 = +17.8028440$$

$$-\alpha_4\, g_0^{\,3} \cos 3\varphi_0 = -6.4534218 \qquad -3\,\alpha_4\, g_0^{\,3} \cos 3\varphi_0 = -19.3602654$$

$$+\alpha_5\, g_0^{\,2} \cos 2\varphi_0 = -3.3238460 \qquad +2\,\alpha_5\, g_0^{\,2} \cos 2\varphi_0 = -\ 6.6476920$$

$$-\alpha_6\, g_0 \cos \varphi_0 = -3.2315655 \qquad -1\,\alpha_6\, g_0 \cos \varphi_0 = +\ 3.2315655$$

$$+\alpha_7 = -6.0000000 \qquad +0.\alpha_7 = +\ 0.0000000$$

$$[(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = +0.0000630 \qquad [n(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = -26.0771724$$

$$-g_0^{\,7} \operatorname{sen} 7\varphi_0 = -5.1569226 \qquad -7\, g_0^{\,7} \operatorname{sen} 7\varphi_0 = -36.0984582$$

$$-\alpha_2\, g_0^{\,5} \operatorname{sen} 5\varphi_0 = -6.2226992 \qquad -5\,\alpha_2\, g_0^{\,5} \operatorname{sen} 5\varphi_0 = -31.1134960$$

$$-\alpha_4\, g_0^{\,3} \operatorname{sen} 3\varphi_0 = -0.0150177 \qquad -3\,\alpha_4\, g_0^{\,3} \operatorname{sen} 3\varphi_0 = +\ 0.0450531$$

$$+\alpha_5\, g_0^{\,2} \operatorname{sen} 2\varphi_0 = +5.7777520 \qquad +2\,\alpha_5\, g_0^{\,2} \operatorname{sen} 2\varphi_0 = +11.5555040$$

$$-\alpha_6\, g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 = +5.5872230 \qquad -\ \alpha_6\, g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 = +\ 5.5872230$$

$$[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = +0.0003709 \qquad [n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = -30.0241741$$

Recordando ahora que

$$[\,(-g_0)^n \cos n\,\varphi_0] = P \cos Q \quad \text{y} \quad [\,(-g_0)^n \operatorname{sen} n\,\varphi_0] = P \operatorname{sen} Q; \text{ y}$$

$$[n(-g_0)^n \cos n\,\varphi_0] = \rho \cos \psi \quad \text{y} \quad [n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\,\varphi_0] = \rho \operatorname{sen} \psi,$$

conclúyese, en consecuencia de cuanto precede, que

$$\log P = \bar{4}.575433 \quad \text{y} \quad \log \rho = 1.751380; \quad \text{y}$$

$$Q = 80^\circ\, 21'36''.7 \quad \text{y} \qquad \psi = 242^\circ\, 28'2''.5$$

Y de aquí, por las fórmulas (21), ya citadas, que:

$$\Delta \log g_0 = +0.0000027{,}56 \quad \text{y} \quad \Delta \varphi_0 = +0''.42; \qquad \text{ó}$$

$$\log g = \quad 0.1108927{,}56 \quad \text{y} \quad \varphi = 59^\circ\, 57'20''.42$$

En suma: despues de verificadas las correcciones de las siete cantidades a, b y c, g^2 y f, y g_1^2 y f_1, la ecuacion propuesta se resolverá en el siguiente producto de cinco factores, *dos* de segundo grado y *tres* de primero:

$$x^7 - 2\,x^5 - 3\,x^3 + \ldots\ldots = (x^2 - 0.6092132\,x + 1.0766801) \times$$

$$(x^2 + 1.2926302\,x + 1.6664238) \times$$

$$(x + 1.9624901) \times (x - 1.5378905) \times (x - 1.1080166) = 0.$$

Operando con logaritmos de *cinco* cifras decimales, con dificultad se obtendrá nunca mayor grado de aproximacion á la verdad que en el caso presente, por la simple aplicacion del método general á la determinacion de las raices.

§. 37.

Resolucion de otra ecuacion, del grado séptimo tambien, con una *sola raiz real y* seis *imaginarias.*

Como tercer ejemplo, propongámonos resolver la siguiente ecuacion, con *seis*, en vez de cuatro *raices* imaginarias:

$$(2^\circ) \quad x^7 + 3\,x^4 + 6 = 0.$$

Las primeras transformadas, directa y exactamente obtenidas, son éstas:

$$(2^1) \quad x^7 + 9\,x^4 + 36\,x^2 + 36 = 0$$

$$(2^2) \quad x^7 + 81\,x^4 - 648\,x^3 + 1944\,x^2 - 2592\,x + 1296 = 0$$

$$(2^3) \quad x^7 - 1296\,x^5 + 11745\,x^4 + 104976\,x^3 + 629856\,x^2 + 1679616\,x + 1679616 = 0.$$

Y las consecutivas, aproximadamente calculadas con auxilio de las tablas de logaritmos, estas otras, en las cuales, como de costumbre, los logaritmos reemplazan tambien á los coeficientes verdaderos:

$$(2^4) \quad x^7 + 3.41364\,x^6 + 6.27636\,x^5 + 8.60926\,x^4 - 9.91005\,x^3 + 10.92186\,x^2 + 11.84836\,x + 12.45042 = 0.$$

$$(2^5) \quad x^7 + 6.46828\,x^6 + 12.16012\,x^5 + 17.29346\,x^4 + 17.89851\,x^3 + 22.31679\,x^2 + 22.41671\,x + 24.90084 = 0.$$

$$(2^6) \quad x^7 + 12.75961\,x^6 + 23.97079\,x^5 + 34.58689\,x^4 - 39.91125\,x^3 + 44.63668\,x^2 - 47.51776\,x + 49.80168 = 0.$$

$$(2^7) \quad x^7 + 25.49393\,x^6 + 47.63345\,x^5 + 69.17378\,x^4 + 79.51832\,x^3 + 89.26074\,x^2 + 94.72953\,x + 99.60336 = 0.$$

$$(2^8) \quad x^7 + 50.98747\,x^6 + 94.96298\,x^5 + 138.34756\,x^4 + 158.73567\,x^3 + 178.52144\,x^2 + 189.15081\,x + 199.20672 = 0.$$

Dentro del límite de aproximacion, compatible con el uso de las tablas logarítmicas de *cinco* cifras decimales, la transformada (2^8) puede considerarse como definitiva. Los coeficientes de x^6, x^4, x^2 y x^0, correspondientes á la (2^9), se obtendrían, en efecto, por simple duplicacion de los mismos coeficientes de la anterior; y los de x^5, x^3 y x^1, de signo variable, desde las transformadas (2^2) y (2^0) sólo nos sirven para revelarnos la existencia en la ecuacion propuesta, (2^0), de tres pares distintos de raices imaginarias conjugadas. Designando por a la única raiz real de aquella ecuacion, y por $g_0{}^2$, $g_1{}^2$ y $g_2{}^2$ los cuadrados de los tres módulos, por el procedimiento, ya muchas veces aplicado, de sustraccion unos de otros de los coeficientes de la (2^8), conclúyese sin dificultad que

$$\log a^{256} = 50.98747 \qquad \log a = 0.199170$$

$$\log g_0{}^{512} = 87.36009 \qquad \log g^2 = 0.341250$$

$$\log g_1{}^{512} = 40.17388 \qquad \log g_1{}^2 = 0.156929$$

$$\log g_2{}^{512} = 20.68528 \qquad \log g_2{}^2 = 0.080802$$

Para determinar ahora por el procedimiento y fórmulas de los §§. (17) y (18) los tres valores de f, que á los tres de g corresponden, consideraremos la ecuacion propuesta como de octavo grado, y emplearemos las fórmulas (a'') y (b''), en el segundo de aquellos párrafos insertas. Las cantidades auxiliares, que en la composicion de estas fórmulas figuran, se reducen en el caso presente á las que siguen:

$$\alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = 0;\ \alpha_3 = 3;\ \alpha_4 = 0;\ \alpha_5 = 0;\ \alpha_6 = 0;\ \alpha_7 = 6;\ \text{y}\ \alpha_8 = 0.$$

$$\beta = 1;\ \beta_1 = 6\,g^{-6};\ \beta_2 = 0;\ \beta_3 = 3;\ \text{y}\ \beta_4 = 0.$$

$$\gamma = 1;\ \gamma_1 = -\,6\,g^{-6};\ \gamma_2 = 0;\ \text{y}\ \gamma_3 = 3.$$

Y las fórmulas (a'') y (b'') á estas otras, muy sencillas por la circunstancia de ser $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0$:

$$f^4 - 6\,g^{-6}\,f^3 - 4\,g^2\,f^2 + (18\,g^{-4} - 3)\,f + 2\,g^4 = 0; \qquad \text{y}$$

$$f^3 + 6\,g^{-6}\,f^2 - 2\,g^2\,f - (6\,g^{-4} + 3) = 0$$

Por g deberemos sustituir, *sucesivamente*, en estas dos ecuaciones sus valores particulares, ya encontrados, y designados por g_0, g_1 y g_2; y así podremos luégo concluir, sucesivamente tambien, los de f_0, f_1 y f_2 que les corresponden. Concretándonos, por de pronto, á la primera sustitucion, y reemplazando los coeficientes de f por sus logaritmos, con la precaucion indispensable de no alterar los signos de los coeficientes numéricos á que se refieren, de las dos últimas ecuaciones se desprenden estas otras:

$$f_0^4 - \bar{1}.75440\, f_0^3 - 0.94331\, f_0^2 + \bar{1}.86872\, f_0 + 0.98353 = 0; \text{ y}$$

$$f_0^3 + \bar{1}.75440\, f_0^2 - 0.64228\, f_0 - 0.62802 = 0.$$

Y de aquí, con auxilio de las *tablas de Gauss*,—ó con las vulgares de logaritmos,— por el procedimiento minuciosamente explicado en el (§. 19), se concluirá finalmente que

$$\log f_0 + 0.05419 = 0.$$

De la misma manera podrían calcularse los otros dos valores de f, — f_1 y f_2,— dependientes de los de g_1^2 y g_2^2; pero en el caso actual, y por la circunstancia particular, ya indicada, de ser muy sencillas las dos ecuaciones á que simultáneamente deben satisfacer aquellos valores, el cálculo admite muy notable simplificacion. A las dos ecuaciones mencionadas aplíquese desde luégo, ó sin prévia sustitucion de la g, por g_0, g_1 ó g_2, el procedimiento del $m.c.d.$, hasta llegar á un resíduo de primer grado con relacion á f; é, igualando á *cero* este resíduo, obtendremos la siguiente nueva ecuacion, condicional de que las dos precedentes poseen, en efecto, una raiz comun, correspondiente á cada valor de g, que en ellas se sustituya:

$$f + \frac{3\,g^{12}}{g^{14} + 18\,g^4 - 36} = 0.$$

Y de esta única y muy sencilla ecuacion es de donde se deducirá, por último, que á los valores de log g^2,

$$\log g_0^2 = 0.34125;\ \log g_1^2 = 0.15693;\ \text{y}\ \log g_2^2 = 0.08080,$$

corresponden estos de f:

$$\log f_0 = 0.05419_n;\ \log f_1 = 0.28435_n;\ \text{y}\ \log f_2 = 0.16895.$$

Ó, á los de g^2, que de aquellos logaritmos se deducen,

$$g_0^2 = 2.19405;\ g_1^2 = 1.43527;\ \text{y}\ g_2^2 = 1.20447,$$

estos de f:

$$f_0 = -1.13289;\ f_1 = -1.92464;\ \text{y}\ f_2 = +1.47553.$$

Y ampliando luégo la aproximacion hasta la séptima cifra decimal, por las fórmulas adecuadas al objeto, la ecuacion propuesta se resolverá en el siguiente producto de cuatro factores:

$$(x^2 - 1.1328854x + 2.1940798)(x^2 - 1.9246556x + 1.4352554)$$

$$\times (x^2 + 1.4756817\,x + 1.2044862)\,(x + 1.5818592) = 0.$$

§. 38.

Resolucion de una ecuacion de CUARTO *grado, con dos pares de raices imaginarias* CASI IGUALES.

Y, por último, como ejemplo de la separacion de varias raices imaginarias, *casi iguales*, por el procedimiento del (§. 32), nos servirá la ecuacion siguiente:

$$(2^\circ)\quad x^4 + 4.002\,x^3 + 14.01801\,x^2 + 20.03802\,x + 25.07005 = 0.$$

De la cual, por la regla del (§. 3), se deducen las transformadas adjuntas:

$$(2^0) \quad x^4 + 0.6022771\, x^3 + 1.1466864\, x^2 + 1.3018548\, x + 1.3991552 = 0.$$

. . . .

. . . .

$$(2^4) \quad x^4 + 5.82548\, x^3 + 11.62744\, x^2 + 17.01872\, x + 22.38648 = 0.$$

$$(2^5) \quad x^4 - 11.60258\, x^3 + 22.94856\, x^2 - 33.98905\, x + 44.77296 = 0.$$

$$(2^6) \quad x^4 - 22.23747\, x^3 + 45.10256\, x^2 - 67.01072\, x + 89.54592 = 0.$$

$$(2^7) \quad x^4 - 45.34913\, x^3 + 90.29059\, x^2 - 134.89497\, x + 179.09184 = 0.$$

$$(2^8) \quad x^4 + 90.03616\, x^3 + 179.74098\, x^2 + 269.12727\, x + 358.18368 = 0.$$

. . . .

. . . .

Los cambios de signo, é indeterminacion consiguiente, de los coeficientes de x^3 y de x, nos revelan, como siempre, la existencia de dos pares de raices imaginarias conjugadas en la ecuacion propuesta; pero, áun cuando el signo del coeficiente de x^2 permanezca constantemente *positivo*, en ninguna de las transformadas obtenidas puede considerarse este coeficiente como cuadrado perfecto, ó como procedente su logaritmo de la simple duplicacion del logaritmo que le corresponde en la transformada anterior. Ni en la (2^4), ni en la (2^8), ni áun en las (2^{12}) y (2^{16}), nos resultan, pues, rigurosamente separados los *dos módulos* de aquellas cuatro raices de la ecuacion (2^0).

¿Cómo puede ser esto?—Por la circunstancia excepcional de ser iguales, ó diferir apénas uno de otro, ambos módulos buscados.

Cuando, en efecto, una ecuacion de cuarto grado posea cuatro raices imaginarias, de las formas

$$g_0\,(\cos\varphi_0 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_0), \qquad \text{y} \qquad g_1\,(\cos\varphi_1 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\varphi_1),$$

su transformada (2^m) poseerá estas otras cuatro:

$$g_0^{m}\,(\cos m\varphi_0 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,m\varphi_0), \text{ y } g_1^{m}\,(\cos m\varphi_1 \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,m\varphi_1);$$

y el coeficiente de x^2 equivaldrá en esta ecuacion á la expresion siguiente:

$$g_0^{2m} \times \left\{ 1 + 2\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^{m} \cos m\,(\varphi_0 + \varphi_1) + \right.$$
$$\left. 2\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^{m} \cos m\,(\varphi - \varphi_1) + \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^{2m} \right\}.$$

De la cual se infiere que, si g_0 supera un poco á g_1, aquel coeficiente propenderá á confundirse al fin con g_0^{2m}.

Mas, si $g_0 = g_1$, en vez de la expresion anterior, deberíamos considerar esta otra, en la apariencia, más sencilla:

$$2\,g_0^{2m} \times \{ 1 + \cos m\,(\varphi_0 + \varphi_1) + \cos m\,(\varphi_0 - \varphi_1) \}.$$

Entonces, pues, y á consecuencia de la variabilidad en magnitud y signo de los dos *cosenos*, el coeficiente en cuestion podrá variar entre $-2\,g_0^{2m}$ y $+6\,g_0^{2m}$; ó fluctuar, más ó ménos, al rededor de $+2\,g_0^{2m}$.

Pero la constancia de signo que en el coeficiente de x^2 se advierte, en todas las transformadas obtenidas, nos induce á sospechar si, además de ser $g_0 = g_1$, se verificará tambien que $f = f_1$, ó $\varphi_0 = \varphi_1$. Porque entonces la forma del coeficiente considerado se reducirá á ésta:

$$4\,g_0^{2m} \times \{ 1 + \cos 2\,m\,\varphi_0 \},$$

positiva necesariamente, y variable entre *cero* y $+8\,g_0^{2m}$; ó fluctuante al rededor del *valor medio* $+4\,g_0^{2m}$.

Si así fuera, restando del coeficiente de x^2, en unas cuantas transformadas sucesivas, el logaritmo del número 4, deberíamos obtener otros logaritmos, aproximados al de g_0^{2m}, cuándo por exceso y cuándo por defecto. Y dividiendo luégo las diferencias encontradas por las potencias de 2^m, á que se refieren ó corresponden, hallaríamos los de g_0^2; y, por lo tanto, los valores numéricos entre los cuales fluctúa el verdadero de g_0^2. En el caso presente, los resultados que así se obtendrían, son los que siguen:

(2^4)	$\log g_0^{2m} =$ 11.02538	$\log g_0^2 =$ 0.68909	$g_0^2 =$ 4.888
(2^5)	22.34650	0.69833	4.992
(2^6)	44.50050	0.69532	4.958
(2^7)	89.68853	0.70069	5.020
(2^8)	179.13892	0.69976	5.009

Los valores de $\log g_1^2$, que á los de g_0^2 corresponden, se obtendrán con suma sencillez, restando del logaritmo, 1.39916, del último término de la ecuacion propuesta (productos de los cuadrados de ambos módulos) los aproximados de g_0^2, ya deducidos. Los nuevos resultados son éstos:

(2^4)	$\log g_1^2 =$ 0.71007	$g_1^2 =$ 5.129
(2^5)	0.70083	5.022
(2^6)	0.70384	5.056
(2^7)	0.69847	4.994
(2^8)	0.69940	5.005

Aunque muy poco discrepantes unos de otros, si suponemos que $g_0^2 = g_1^2$, para expresion numérica de estos cuadrados deberemos tomar los *promedios* de sus diversos valores, deducidos de las transformadas (2^4) á (2^8). Y como estos cinco promedios son casi absolutamente iguales, é iguales á 5.007, lo que en conclusion, y como por tanteo habremos deducido, puede formularse en los términos siguientes:

$$g_0^2 = g_1^2 = 5.007.$$

Y, áun cuando no convengamos del propio modo en que $f_0 = f_1$, para determinar los valores de estas nuevas cantidades, nos servirán las siguientes ecuaciones, ya en el (§. 13) consideradas:

$$f_0 + f_1 = 4.002; \quad \text{y} \quad 2g_0^2 + f_0 f_1 = 14.01801.$$

De las cuales, con grande aproximacion, se deduce, en efecto, que

$$f_0 = f_1 = 2.001.$$

Si, para comprobar estas diversas conclusiones, formamos el trinomio $x^2 + f_0 x + g_0^2$, y le elevamos al cuadrado, nos resultará el polinomio siguiente, que apenas difiere del primer miembro de la ecuacion propuesta:

$$(x^2 + 2.001\,x + 4.002)^2 =$$

$$x^6 + 4.002\,x^5 + 14.018001\,x^2 + 20.038014\,x + 25.070049.$$

Mas, á pesar de semejante coincidencia, ¿será posible todavía definir, con mayor grado de aproximacion á la verdad, los valores de g_0^2 y g_1^2, y de f_0 y f_1, suponiendo que los dos primeros y los dos últimos no sean absoluta ó completamente iguales?—Tratemos de averiguarlo.

De los valores, que suponemos ya conocidos, de g_0^2 y f_0, ó de g_1^2 y f_1, se deduce por de pronto que

$$\log g_0 = 0.3497888, \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 63^\circ\,26'\,26''\,4;$$

ó, más sencillamente, que

$$\log g_0 = 0.3498000, \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 63^\circ\,26'\,20''$$

Con estos valores de log g_0 y de φ_0, y con auxilio de las tablas de logaritmos de *diez* y de *siete* decimales, necesarias en este caso, de las fórmulas (88) se deducen luégo los resultados numéricos adjuntos:

$$
\begin{aligned}
+g_0^4 \cos 4\varphi_0 &= - 7.0137170573 \\
-\alpha_1 g_0^3 \cos 3\varphi_0 &= + 44.1162372122 \\
+\alpha_2 g_0^2 \cos 2\varphi_0 &= - 42.1228012449 \\
-\alpha_3 g_0 \cos \varphi_0 &= - 20.0498010266 \\
+\alpha_4 &= + 25.07005
\end{aligned}
$$

$$[(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = P\cos Q = - \quad 0.0000321166$$

$$
\begin{aligned}
+g_0^4 \operatorname{sen} 4\varphi_0 &= - 24.0716609670 \\
-\alpha_1 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0 &= + 8.0305364993 \\
+\alpha_2 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0 &= - 56.1476453709 \\
-\alpha_3 g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 &= - 40.1064968325
\end{aligned}
$$

$$[(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = P\operatorname{sen} Q = + \quad 0.0000240707$$

$$
\begin{aligned}
+4 g_0^4 \cos 4\varphi_0 &= - 28.0548682292 \\
-3\alpha_1 g_0^3 \cos 3\varphi_0 &= + 132.3487116366 \\
+2\alpha_2 g_0^2 \cos 2\varphi_0 &= - 84.2456024898 \\
-\alpha_3 g_0 \cos \varphi_0 &= - 20.0498010266
\end{aligned}
$$

$$[n(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = \rho\cos\psi = - \quad 0.0015601090$$

$$
\begin{aligned}
+4 g_0^4 \operatorname{sen} 4\varphi_0 &= - 96.2866438680 \\
-3\alpha_1 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0 &= + 24.0916094979 \\
+2\alpha_2 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0 &= + 112.2952907418 \\
-\alpha_3 g_0 \operatorname{sen} \varphi_0 &= - 40.1064968325
\end{aligned}
$$

$$[n(-g_0)^n \operatorname{sen} n\varphi_0] = \rho\operatorname{sen}\psi = - \quad 0.0062404608$$

$$
\begin{aligned}
+3.4.g_0^4 \cos 4\varphi_0 &= - 84.1646047 \\
-2.3\alpha_1 g_0^3 \cos 3\varphi_0 &= + 264.6974233 \\
+1.2\alpha_2 g_0^2 \cos 2\varphi_0 &= - 84.2872161
\end{aligned}
$$

$$[n(n-1)(-g_0^4)\cos n\varphi_0] = \rho'\cos\psi' = + \quad 96.2872161$$

$$
\begin{aligned}
+3.4.g_0^4 \operatorname{sen} 4\varphi_0 &= - 288.8599316 \\
-2.3\alpha_1 g_0^3 \operatorname{sen} 3\varphi_0 &= + 48.1832190 \\
+1.2.\alpha_2 g_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi_0 &= + 112.2952907
\end{aligned}
$$

$$[n(n-1)(-g_0^4)\operatorname{sen} n\varphi_0] = \rho'\operatorname{sen}\psi' = - 128.3814219$$

De donde se deduce que

$$\left.\begin{array}{l}\log P = \bar{5}.603531;\\ \log \rho = \bar{3}.808380;\\ \log \rho' = 2.205414\end{array}\right\} \text{ y } \left\{\begin{array}{l} Q = 143^{\circ}\ 8'\ 57''.0;\\ \psi = 255^{\circ}\ 57\ 49\ .7;\\ \psi' = 306\ 52\ 13\ .0\end{array}\right.$$

Los valores de las cantidades auxiliares, δ y γ, podrán ya calcularse con auxilio de las fórmulas (91), y serán éstos·

$$\log \delta = 9.054660; \quad \text{y} \quad \gamma = 8^{\circ}\,3'\,29''.35$$

Y, suponiendo que $\cos(\varphi - \varphi_0) = 1$ y $\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = \Delta\varphi_0 \times \operatorname{sen} 1''$, de la primera de las (94) y segunda de las (95), se concluirá luégo que

$$\frac{g_0}{g} = 1 - 0.000025276 \pm 0.000699739; \text{ y}$$

$$\Delta\varphi_0 = +6''.417 \pm 20''.435$$

En vez de la primera (94) hubiera podido tambien emplearse la (95); y entónces el resultado hubiera sido éste:

$$\Delta \log g_0 = -0.0000111 \pm 0.0003039.$$

Los valores corregidos de $\log g$ y de φ, adoptados para comenzar este cálculo de aproximacion, serán, pues, los que siguen:

$$\left.\begin{array}{l}\log g_0 = 0.3500928\\ \log g_1 = 0.3494850\end{array}\right\}, \text{ y } \left\{\begin{array}{l}\varphi_0 = 63^{\circ}\,26'\,46''.85\\ \varphi_0 = 63\ \ 26\ \ \ 5\ .98\end{array}\right\}.$$

Los verdaderos valores, conocidos *a priori* por representar el primer miembro de la ecuacion propuesta (2°) el producto de los cuatro factores

$$x + 1.001 \pm 2.003\sqrt{-1}), \quad \text{y} \quad (x + 1.000 \pm 2.000\sqrt{-1}),$$

son estos otros:

$$\left.\begin{array}{l}\log g_0 = 9.3500926\\ \log g_1 = 0.3494850\end{array}\right\}, \text{ y } \quad \left.\begin{array}{l}\varphi_0 = 63^\circ\, 26'\, 47''.\, 01\\ \varphi_1 = 63\;\; 26\;\;\; 5\;\; .\, 82\end{array}\right\},$$

que apénas discrepan de los precedentes.—La separacion ó distincion de los *módulos* y de los *arcos auxiliares* queda con esto verificada; y, con auxilio de los valores numéricos encontrados, y correspondientes á estas cantidades, la ecuacion propuesta se resuelve sin dificultad en el producto de los cuatro factores adjuntos:

$$(x + 1.0010021 \pm 2.0030005\sqrt{-1}), \text{ y}$$

$$(x + 0.9999979 \pm 2.0000009\sqrt{-1})$$

La discrepancia entre estos factores y los verdaderos procede de pequeños errores, inevitables en el cálculo logarítmico, y, en general, en todos los cálculos de aproximacion con números tambien meramente aproximados á la verdad.

(*Se continuará.*)

CIENCIAS FÍSICAS.

FISICA.

De la influencia de la densidad de un cuerpo sobre su poder absorvente, por P. Glan.

(*Ann. de Vied*, Enero 78.)

Aunque esta cuestion ha sido objeto de numerosos experimentos, todavía no ha podido deducirse ley alguna de los resultados obtenidos. En efecto, si bien algunas observaciones parecen demostrar que la densidad de un cuerpo influye en su poder absorvente, otras parece tambien que demuestran lo contrario.

Mr. Glan ha creido, por lo tanto, necesario hacer algunas observaciones sobre este asunto, y se ha valido para ello de su fotómetro, cuya descripcion hizo en un trabajo anterior (1).

Se compone esencialmente este instrumento de un colimador, de un prisma bi-refringente, de un nicol, de un prisma de vision directa, y de un anteojo.

Iluminando cada una de las mitades de la hendidura del colimador por una de las dos clases de luz, se obtienen, en

(1) *Ann. de Vied*, Julio 1877.

virtud de la disposicion del aparato, dos espectros sobrepuestos, cuya intensidad relativa depende del ángulo comprendido entre el plano de polarizacion del nicol y la seccion principal del prisma bi-refringente. Se puede, por consiguiente, determinar la intensidad relativa de cualquiera parte de ambos espectros.

A fin de dar á estas observaciones toda la exactitud necesaria, Mr. Glan no ha comparado entre sí más que los rayos homogéneos, para los cuales el coeficiente de absorcion variaba rápidamente, segun el grueso de la capa del líquido.

En efecto, si el poder absorvente de un cuerpo varía con su densidad, es probable que esta variacion se observe primero sobre aquellos rayos.

El aparato de Mr. Glan estaba dispuesto del modo siguiente:

Colocada una llama de petróleo en el foco de una lente, los rayos paralelos que de ella salian reflejaban sobre un primer espejo, que les daba una direccion vertical; inmediatamente, encima del espejo, se habia colocado una vasija de forma cúbica, de paredes planas, que servia para contener el líquido absorvente. Despues de haber atravesado este los rayos luminosos que llenaban la vasija, eran reflejados por un segundo espejo, é iluminaban la mitad inferior de la hendidura del fotómetro. La otra mitad quedaba iluminada por los rayos de la lámpara, que reflejaban en un prisma rectangular colocado á alguna distancia.

Antes de cada experimento habia que cerciorarse de la horizontalidad del fondo de la vasija; para ello se echaba en esta una solucion concentrada de la sustancia cuyo poder absorvente se queria medir, y despues, por medio de una bombilla, se extendia por encima de este líquido una capa del disolvente, operacion que exije algunas precauciones.

Antes de colocar la vasija entre los dos espejos, se determina la posicion α que es preciso dar al nicol para obtener una intensidad de color igual en ambos, cuyo coeficiente de absorcion quiere determinarse; en seguida se hace la misma operacion, despues de haber colocado la vasija que contenga ambos líquidos sobrepuestos, y el nicol tendrá entonces la posicion α'. Hecho esto, se quita de nuevo la vasija y se repite la primera observacion que daba α_1; por último, despues de haber obtenido la mezcla de ambos líquidos, se reemplaza la vasija y se determina todavía la posicion α'_1 del nicol, por el cual la intensidad del color en cuestion es igual en ambos espectros.

Las cantidades α α' α_1 α'_1 son ángulos contados, á partir de la posicion O del nicol, por el cual el espectro superior desaparece. Tendremos entonces por coeficientes de extincion de la luz, en su paso á través de los dos líquidos sobrepuestos,

$$K = \frac{tg^2\,\alpha'}{tg^2\,\alpha},$$

y á su paso á través de la mezcla,

$$K = \frac{tg^2\,\alpha'}{tg^2\,\alpha_1}.$$

Cada uno de los coeficientes de extincion es el producto de ambos factores. El primero depende de la absorcion del fondo de la vasija y de las reflexiones en las superficies del vidrio y del líquido.

Designando ambos factores en el primer caso por r y a, y en el segundo por r_1 y a_1, tendremos:

$$K = r\,a \qquad\qquad K_1 = r_1\,a_1$$

$$a = \frac{K}{r} \qquad\qquad a_1 = \frac{K_1}{r_1}.$$

Las cantidades r y r_1 varían segun el líquido absorvente, y son fáciles de determinar. En cuanto á los valores K y K_1 deducidos del experimento, debemos someterlos á una nueva correccion.

La cantidad de sustancia absorvente, atravesada por los rayos luminosos, debe ser la misma en ambos casos, si la superficie del líquido fuese en todos sus puntos paralela al fondo de la vasija. No sucede así, á causa de la capilaridad, en virtud de la cual una parte del líquido se adhiere á las paredes de la vasija.

Será menester, pues, en ambos casos repartir el líquido adherido sobre toda la superficie, y añadir á la absorcion observada la producida por esta nueva capa.

Las observaciones de Mr. Glan demuestran claramente que, *si la densidad de un cuerpo tiene una influencia sobre su poder absorvente, esta influencia es muy débil, y cambia de signo segun las sustancias.*

Así, respecto del sulfato de cobre, que absorbe con mas facilidad los rayos rojos que los azules, el poder absorvente de la mezcla es menor que el de ambos líquidos sobrepuestos, mientras que, respecto de las sustancias que absorben con ménos facilidad los rayos rojos que los azules, Mr. Glan ha observado el fenómeno contrario.

Las diferencias del poder absorvente en ambos casos son por lo demás de la misma magnitud que los errores de observacion.

Hé aquí el término medio de algunas observaciones.

En la tabla siguiente, λ indica en millonésimas de milímetro la longitud de las ondas luminosas, cuya absorcion se ha determinado, a es el coeficiente de absorcion de los líquidos sobrepuestos; a'' el de los líquidos mezclados; V indica la concentracion de la mezcla por una fraccion, cuyo numerador representa el volúmen de la solucion concentrada, y el denominador el del líquido disolvente que forma la capa superior.

Sulfato de cobre.

λ	a	a''	$a-a''$	V
674	0,077	0,073	+0,004	$^1/_7$
659	0,155	0,150	+0,005	»
626	0,336	0,330	+0,006	$^1/_5$
557	0,449	0,441	+0,008	$^1/_5$
»	0,510	0,507	+0,003	$^1/_7$
525	0,822	0,819	+0,003	$^1/_5$
»	0,848	0,854	−0,006	$^1/_7$

Bicromato de potasa.

λ	a	a''	$a-a''$	V
557	0,859	0,869	—0,010	$^1/_6$
»	0,844	0,845	—0,001	$^1/_{11}$
529	0,076	0,080	—0,004	$^1/_7$

Solucion de yodo en el alcohol.

657	0,627	0,638	—1,011	$^1/_7$
527	0,168	0,183	—0,015	»
»	0,158	0,168	—0,010	»
»	0,090	0,093	—0,003	»

Solucion de yodo en el sulfuro de carbono.

657	0,090	0,089	+0,001	$^1/_4$
607	0,0074	0,0077	—0,003	»

FISICA DEL GLOBO.

El interior de la tierra.—Extracto del discurso de Sir George B. Airy, á la Asociacion de Cumberland para el adelantamiento de las letras y ciencias.

(*Les Mondes*, 27 Junio 78.)

Sir George Airy dice que la naturaleza del asunto es muy distinta de la de los demás que hasta ahora ha tratado. Divide su discurso en tres partes. En la primera se ocupa de las medidas de la tierra, en la segunda de las observaciones de temeperatura, y en la tercera del modo con que puede suponers ofrmada la tierra; particularmente de la hipótesis nebular, y por último, hace algunas observaciones sobre las conclusiones que deduce.

Describe el trabajo llamado triangulacion, ejecutado en una gran parte de la superficie del globo, y que ha hecho posible la formacion de un mapa, en el cual puede hallarse la distancia entre un punto y otro de la tierra con aproximacion de algunas pulgadas; determina las dimensiones y la figura de esta por medio de un sector zenital, instrumento para medir las distancias aparentes de las estrellas al zenit. En un gran globo señala las líneas principales que se han medido con tal objeto hasta el dia. Segun estas medidas, es seguro que la tierra es próximamente una esfera de 8.000 millas de diámetro ó de 25.000 millas de circunferencia (40.000 kilómetros).

Al hablar de la superficie, debe entenderse que es la del nivel del mar; sobre él se elevan las montañas, y debajo están las profundidades del Océano. Pero aunque estas desigualdades de la superficie se tomen en consideracion por los que se dedican á cálculos muy exactos, son comparativamente muy pequeñas. Supongamos que se representase la tierra por un globo de 25 piés de diámetro: ¿á qué altura se cree que se elevarian las montañas sobre este nivel? Solo á un quinto de pulgada, cosa que puede muy bien despreciarse en todos los cálculos ordinarios. Puede, pues, decirse que la tierra es una esfera, salvo en un detalle que vamos á mencionar. Además hay otra cosa importante, y es la densidad de la materia de que está formada, cuestion que los mejores observadores han estudiado de dos ó tres maneras. El primero de estos experimentos es muy célebre; se conoce con el nombre de experimento Schialliano, porque se hizo en una montaña de los Highlands de Escocia (Perthsire), que convenia particularmente para estas medidas, y se hallaba más favorablemente orientada en la direccion de Sur á Norte. Se observó que en el monte Schialliano se desviaba la plomada de la direccion vertical de 11″ ó 12″. Luego si esta montaña, cuyas dimensiones pueden medirse, hace hasta tal punto desviar la plomada, ¿cuál es la relacion de su fuerza de atraccion con la de la tierra? Conociendo el volúmen de la montaña y el de la tierra, podemos comparar la densidad de una y otra, y empleando con gran cuidado este procedimiento, se ha visto que la densidad de la montaña, que puede obtenerse por la de las rocas que la constituyen comparada con la de la tierra, debe ser cerca de cuatro veces y media la del agua, ó de dos veces la densidad media de las rocas de la superficie. La tierra, aunque densa toda ella, lo es mucho más en el centro que en la superficie.

El experimento siguiente se conoce con el nombre de experimento de Cavendish: tomaba una palanca ó varilla muy delgada de pinabete, de seis piés de larga, suspendida de un alambre delgado de cobre ó de plata (que es el medio de suspension mas ligero que puede tenerse), de 40 pulgadas de larga, que se ponia dentro de una caja de madera para resguardarla por completo de las corrientes de aire. A cada extremo de la palanca habia una bola de dos pulgadas de diámetro, y por una disposicion sencilla, dos esferas de plomo que pesaban juntas quizá 300 libras, se colocaban simultáneamente á inmediacion de las bolas (pero fuera de la caja) en los lados opuestos, de modo que pudieran atraer las primeras. Se ha variado suficientemente el experimento para deducir con bastante aproximacion, por una série de cálculos, la densidad de la tierra. El resultado obtenido es mucho mayor que antes: el término medio de la densidad de la tierra se ha hallado que es cinco y media veces mayor que la del agua.

El tercer experimento lo ha practicado el mismo autor en la mina de carbon de piedra de Harton, cerca de South-Schields. Consistia en observar cómo cambiaba la pesantez cuando se descendia á mayor profundidad, demostrándose dicha fuerza y comparándose arriba y abajo por las oscilaciones del péndulo. El cálculo hecho sobre estas bases ha dado para la tierra un valor igual á 6 veces al del agua.

Cree, por lo tanto, que el mejor cálculo es el que tiene por base el experimento de Cavendish, y ha llegado á tomar cinco y media veces la densidad del agua por la densidad media de la tierra en el conjunto de su masa. De aquí resultan consecuencias verdaderamente muy notables. Como esta densidad es algo mas del doble de la de las rocas de su superficie, se demuestra que la tierra se halla mas condensada en el centro que en la superficie. Pero el resultado del cálculo le ha asustado algun tanto al tratar de hacer experimentos sobre este asunto. Puesto que las rocas ejercen una sobre otra una presion cada vez mayor, á medida que se va bajando, ¿cuál será la presion que se ejerza sobre una pulgada cuadrada, segun nos vayamos aproximando al centro de la tierra? Muchas personas habrán oido hablar de presiones de 50 á 100 libras sobre una pulgada cuadrada, y quizá la mayor presion que se conozca es la que rompe el granito de Aberden, ó sean 10.000 libras por pulgada cuadrada. En el centro de la tierra debe ser de 30.000 libras por pulgada cuadrada, y causa verdadero asombro el considerar las consecuencias que puede producir. No tenemos idea de un grado de presion semejante; por lo tanto, no podemos concebir sus efectos: quizá tal presion sería capaz de comprimir un gas hasta el punto de hacerle tan denso como el oro ó el platino, reducir una materia en polvo á sólido, ó pulverizar un sólido; son increibles los efectos que causaria. Tan enorme presion y nuestra completa ignorancia sobre este punto, es una de las dificultades y obstáculos de la cuestion tratada hasta aquí.

El autor cree que, por lo dicho, puede comprenderse bastante bien el estado general de la tierra, y pasa á hablar de la rotacion de esta. Gira sobre sí misma, como todos saben, en el espacio de un dia; y por mil ejemplos que pudiéramos citar, se observa que la rotacion debe hacerla hinchar hácia su parte media. Se han hecho cálculos respecto á este asunto, y resulta que el diámetro en el ecuador es cerca de $\frac{1}{800}$ mayor que en los polos. Cuando se observó que la medida de las dimensiones de la tierra coincidia bien con esta dilatacion, se dedujo que la tierra estaba ó habia estado fluida. En confirmacion de ello, el autor menciona una circunstancia singular que se observó en la triangulacion practicada en la India. Al adelantarse desde el cabo Comorin hácia el Norte, la curvatura de la tierra concuerda muy bien en la longitud de varios centenares de millas con la que se ha encontrado en otras partes (teniendo en cuenta, como es debido, la forma elíptica de la tierra). Al aproximarse á las montañas del Himalaya, la plomada era atraida sensiblemente por ellas. El difunto arcediano Pratt investigó, segun la forma de las montañas y la densidad de las rocas, cuál era la desviacion de la plomada, y halló que debia ser mucho mayor de lo que en realidad es. Mr. Airy explica esta diferencia, suponiendo que la tierra en aquel paraje flota sobre un fluido denso, que la masa espesa de la materia más ligera de la montaña se sumerje en él, y que el desalojamiento de este fluido más denso neutraliza casi enteramente la atraccion de las montañas elevadas. La forma de la tierra no es la que hubiera tomado una estructura sólida, sino una masa fluida con sólidos que flotasen sobre ella.

En la segunda parte de su discurso, Sir George Airy refiere lo que ya se sabe acerca de las temperaturas. Algo se conoce de la marcha de la temperatura á través de la tierra. Los experimentos acerca de este punto, como sucede con otros muchos, son debidos á los franceses, que han fijado termómetros con tubos muy largos á profundidades de 25 á 30 piés en la tierra. Estos experimentos se repitieron algo despues con otros semejantes en el Observatorio de Edimburgo, y casi en el mismo tiempo en el Observatorio de Greenvich, observando cada dia los termómetros más sumergidos. El primero y más notable de estos experimentos es el retraso de las estaciones. A la profundidad de 25 piés, el mayor calor del verano se observa en Diciembre, lo cual demuestra que tarda 5 meses en descender á esta profundidad. Llevando mas adelante los cálculos, se veria que tardaria 100 años en recorrer una milla; de modo que si la corteza terrestre tuviese un grueso de 100 millas, necesitaria 10.000 años el calor para atravesarla. Esto demuestra que realmente podemos tener un gran calor debajo de nosotros, y no llegar á sentirlo hasta mucho tiempo despues. Cuando llegue, por último, lo efectuará avanzando lentamente, y al mismo tiempo la radiacion de la superficie lo llevará con mucha rapidez. De modo que es enteramente posible que bajo una superficie fria pueda haber una gran cantidad de calor. En cada parte de la tierra hay huellas de un calor intenso en los tiempos primitivos. La extension de la accion volcánica se pierde en parte sobre la tierra por los efectos del aire y del agua; pero cuando se examinan las rocas antiguas, se reconoce que ha habido casi siempre esta accion volcánica. En nuestras rocas calizas, por ejemplo, hay venas basálticas que en algunas partes llegan á un estado llamado crepudino, y que seguramente es el resultado de un calor volcánico bastante grande para producir la fluidez. Casi en todas partes se ve que ha habido corrientes volcánicas que se han introducido entre todas las rocas; y áun cuando la superficie de la tierra haya estado privada de volcanes en un sitio determinado durante cierto tiempo, habrá, sin embargo, siempre una accion volcánica bastante fuerte para hacer que penetren las venas de lava de cuando en cuando. Parece, pues, que podemos decir que hemos estado siempre cerca de una gran cantidad de calor, probablemente mucho más que en los tiempos presentes; pero estamos todavía bastante próximos para sentirla áun en estas regiones. Repetidos experimentos se han hecho acerca del aumento de la temperatura á medida que se baja en las minas, y se ha llegado á la conclusion de que la temperatura sube 1 grado Farenheit al descender algunas veces 60 ó 100 piés. Hay una mina en Cornouailles, en la que el autor caminaba por medio de una corriente de agua que le abrasaba las piernas, y todos saben la cantidad de agua que sale de los manantiales termales. Existe, por consiguiente, un gran desarrollo de los volcanes, que reconoce por causa una gran cantidad de calor que en alguna parte existe; y en los parajes en que los volcanes se apagan, se puede descubrir una especie de continente basáltico, por decirlo así, sobre las bocas de los cráteres de donde ha salido la lava. De modo que seguramente hubo en toda la duracion de las épocas antiguas mucho más calor que al presente.

Otra cuestion hay sobre la cual desea hablar el autor, pero no con gran seguridad, y es la relativa al cambio del magnetismo. La cuestion del magnetismo terrestre es una de las más oscuras; no obstante, se ve que el magnetismo se dirige siempre hácia las partes más frias; y observando sus fenómenos generales, puede creerse que reconoce por causa la termo-electricidad, que quizá es producida por el aumento constante del calor, yendo hácia lo interior de la tierra, donde las lavas fluidas se solidifican. Hace pocos años que se hizo el viaje del *Challenger*, y no dudo en decir que es uno de los más importantes en la historia científica del mundo. Al atravesar los océanos se sondearon las grandes profundidades y se midió de una manera satisfactoria la temperatura del agua á la profundidad de 5 millas (8 kilómetros). Siempre hay frio en el fondo, y se suscitan graves controversias para saber si este frio puede proceder de las regiones heladas del Norte, por las corrientes profundas del mar. El autor cree que indudablemente estas corrientes tienen alguna influencia; pero tambien que el fondo del agua y del suelo á estas grandes profundidades es frio; no juzga que esta parte de la tierra tenga el mismo calor que las demás, pero enuncia esto únicamente como opinion suya, que naturalmente podrá estar en discordancia con la de otras muchas personas. Esto es lo que se sabe acerca de la temperatura de la tierra; por todas partes se ven pruebas de que ha habido un calor enorme casi sobre toda ella. Algunas partes de la corteza terrestre en los mares más profundos se hallan todavía sobre islas volcánicas, y en algunos parajes el calor llega casi hasta la superficie. Considera esto como un hecho importante, que le conduce á la teoría de cuál es realmente el estado de la tierra.

Penetrando en una cuestion que es ciertamente una de las especulaciones más atrevidas de la ciencia moderna, la formacion de la tierra (no la creacion, sino la manera de llegar á su forma actual) debe decir que la teoría de que habla, y que es conocida con el nombre de hipótesis nebular, es la concepcion de una inteligencia muy poderosa y atrevida. Laplace ha observado que todos los planetas y satélites giran en el mismo sentido alrededor del sol, y es difícil negar que haya para todo ello una causa general. Naturalmente ocurrió al pensamiento de Laplace que, si hubiera alguna cosa que se contrajera en sus dimensiones, que tuviera una pequeña rotacion al empezar, y que fuera haciéndose más rápida á proporcion de irse produciendo dicha contraccion, hasta que llegase á cierto grado que dependiese de la condensacion de sus diferentes partes y de su densidad primitiva, ¿no llegaria á concebirse algo parecido á la materia, que al condensarse de esta manera pudiese formar sistemas como el nuestro, con un sol, planetas y satélites? Hay una série de cuerpos en el cielo que no han llamado la atencion en los primeros tiempos, principalmente porque los telescopios no eran bastante poderosos, pero que ahora se hallan formando catálogos de millares de ellos. Son las nebulosas, nombre que indica que tienen el aspecto de nubes y forman pequeños cuerpos entre las estrellas, pareciendo algunas veces que hay estrellas en medio de ellas, ó están unidas á las mismas y otras no. Sus formas son las más extrañas y caprichosas que pueden imaginarse. Si la nebulosa se condensa en todas sus partes, de modo que forme un mundo, su rotacion en el curso de la condensacion llegará á ser tan rápida, que formará soles, planetas y tierras alrededor de ella, y en esta disposicion no habrá dificultad en formar un sistema solar completo, tomado en una masa como la nebulosa de Orion.

Las observaciones hechas últimamente con grandísimos telescopios, como son los de Lassell y el de lord Rosse, que son telescopios notables de muchísimo alcance, han dado á conocer un cierto número de nebulosas, que tienen aspecto de espirales, y en ellas parece notarse algo que hace suponer que se contraen y se ponen en rotacion. Pero estos cambios se observan con tanta lentitud, que no ha podido fijarse con exactitud que existan mas que algunos de ellos. Todo ello es pura teoría; pero Mr. Airy cree que esta teoría tiene una gran probabilidad. Admitiéndola se deduce que estas nebulosas deben girar, y al contraerse, adquirir una temperatura muy elevada. No puede dudarse que la condensacion produce un calor enorme, y esto parece que explica suficientemente el gran calor que hallamos debajo de la superficie de la tierra y en otras partes. Suponemos que las estrellas han sido generalmente formadas por la condensacion de las nebulosas, y hay aquí una circunstancia digna de mencionarse. Hay una série de observaciones, fundadas en experimentos de óptica, que se han hecho en estos últimos años, y que, mucho más que las anteriores, han servido para revelar los secretos de la naturaleza, y son las hechas con el espectróscopo. Por la accion voltaica pueden producirse chispas semejantes á las de una máquina eléctrica, cuya naturaleza depende de la de los metales entre los cuales se producen. La chispa que se produce de un metal á otro ofrece diferentes caractéres, segun la naturaleza de los metales. Tenemos una coleccion de los espectros producidos por el hierro, por el niquel, por el gas hidrógeno y otros, observados y registrados con gran cuidado. Cuando observamos en las estrellas la luz producida del mismo modo, vemos que no hay dos estrellas semejantes; algunas tienen el mismo espectro que el hierro, otras espectros de sustancias diversas, y nos vemos en camino de poder afirmar, por un razonamiento legítimo, de qué están formadas las estrellas, qué metales y otras sustancias entran en su composicion, y en general que no hay dos estrellas semejantes. De modo que en esta hipótesis nebular nos vemos obligados á reconocer que las nebulosas están compuestas de las mismas sustancias, y concebimos que, comparando los cuerpos que conocemos en el sistema solar con los de las estrellas, podemos formar alguna idea de la variedad de las sustancias de que están compuestos los planetas. No hallamos rayas diferentes comparando la luz de los planetas, porque la reciben toda del sol, y no presentan diferencias de aspecto en el espectro; pero sí podemos deducirlas de su densidad relativa. Como se ha visto, el término medio de la densidad de la tierra es probablemente cinco veces y media el del agua. Sabido es que el Sol no tiene más densidad que el agua. Sir Jhon Airy no puede decir qué es lo que constituye el Sol, pero ciertamente es una sustancia muy ligera. La densidad de Mercurio quizá es algo mayor que la de la tierra; las de Venus y de Marte son las mismas que esta. En seguida se halla una verdadera nube de planetas, de los que se han observado cerca de 200 hasta ahora, y no puede decirse de qué están formados. Vienen luego Júpiter y Saturno, que no son más pesados que el agua. Suponiendo que hayan sido formados por la condensacion de una nebulosa, segun la teoría que ha mencionado, parece, pues, cosa clara que las partes de la misma nebulosa que han compuesto el sistema solar eran muy diversas. Puede, pues, decirse que las partes elevadas y predominantes de la tierra están formadas de una sustancia muy ligera, y que las pesadas y densas son las que se hallan cubiertas de una cantidad de agua considerable y sumergidas en la lava central, sobre la que cree que todas descansan.

Al terminar la exposicion de su teoría, manifiesta que teme que se califique de absurda representacion de lo que ha pensado sobre el estado de la tierra, lo que va á exponer. Llama la atencion del auditorio sobre un diagrama de una *tierra ideal* que figura groseramente esta misma teoría. Algunas partes de la corteza terrestre son gruesas y de un color oscuro, para indicar su densidad; otras gruesas y no tan densas, que reciben de lo interior erupciones volcánicas representadas en forma de lavas. Hace notar que aquí todo es exagerado, que no ha tenido intencion de hacer una representacion exacta. Es casi una caricatura *(sic)* del género más extraño; pero si logra despertar las ideas que en su mente se han formado, habrá conseguido su objeto. Cree que una gran porcion del centro de la tierra se halla en estado fluido y caliente, y que encima hay sustancias sólidas de diferentes especies. En todas partes se hallan roturas, á través de las cuales se verifican las erupciones de los volcanes, donde la corteza terrestre no es muy gruesa. En algunos sitios hay dos ó tres volcanes juntos, como sucede en Europa, donde tenemos el Etna, las islas Stromboli y el Vesubio. Ha condensado, por lo tanto, en su diagrama lo que supone ser el estado real de la tierra; y si alguno lo encontrase defectuoso, no romperá lanzas con él. Lo dicho no es más que una especie de conclusion de los hechos consignados.

CIENCIAS NATURALES.

FUNCIONES DEL HIGADO.

Conclusiones de Mr. Le Conte (American Journal of sciences and arts).

1.ª La verdadera funcion del hígado no es glucogénica, elaborando azúcar, como se ha supuesto, sino glucogenésica, ó elaborando glucógena: aquella es una operacion química pura, esta es verdadera funcion vital; la primera, de metamórfosis descendente, tiene lugar, y con más rapidez, en el hígado muerto; la segunda se verifica en el viviente, y es de metamórfosis ascendente. Estas dos acciones contrarias del hígado, de cambios respectivamente ascendentes ó descendentes, han sido plenamente reconocidas por Mr. C. Bernard, aun cuando haya llamado á las dos glucogenias.

2.ª En la *diabetes*, enfermedad bien conocida y muy grave, el azúcar es excretada por los riñones en gran cantidad, no siendo estos órganos los causantes del mal, sino que, por el contrario, lo evitan cuanto es posible; y aun cuando algunos hayan atribuido tal accion á los pulmones, suponiendo que, por falta de oxígeno tomado por estos, no se quema el azúcar de la sangre, es indudable que el hígado es el órgano que directamente interviene en tal efecto, por haber perdido la facultad de elaborar glucógena. El azúcar recogido por los vasos capilares no es llevado al hígado, sino trasportado, sin cambio alguno, á la circulacion general, desde donde se elimina naturalmente por medio de los riñones; y la dificultad no consiste, pues, en elaborarse mucha azúcar, sino en faltar ó detenerse la elaboracion del mismo en estado glucogénico, como lo prueba la llamada diabetes traumática, producida, como es sabido, por la puncion de la última capa del cuarto ventrículo del cerebro. En este caso, aun cuando el azúcar se haya ingerido en gran cantidad, como no hay glucógena formada en el hígado, no se ha impedido (tal vez por parálisis de los nervios motores) que la glucosa pase sin cambio alguno á la circulacion general, y la gravedad suma de la diabetes patológica depende en parte de los perniciosos efectos del azúcar en la sangre (como lo prueba la catarata diabética); y más aún es debida á los desórdenes en una funcion tan importante del hígado, de la cual depende el calor y la fuerza animal necesaria para la preparacion del alimento y para la desasimilacion de los tejidos, con objeto de facilitar las combustiones orgánicas.

3.ª Existe una analogía muy notable entre la funcion glucogénica del hígado y la respectiva de las plantas *para elaborar almidon*. Estas funcionan de tal modo, con objeto de reservar el producto para *ulterior uso;* y cuando es necesario, le hacen soluble bajo la forma de azúcar ó dextrina, pasando de nuevo á unirse con los líquidos de la circulacion. Los animales, de igual manera, cambian tambien el azúcar soluble en glucógena insoluble ó *almidon animal*, reservándolo en el hígado para usos futuros, que, cuando se realicen, deberá antes hacerse soluble el citado producto.

Mr. Morren, en un trabajo que, con el título de *Digestion vegetal*, publicó en 1876, compara el cambio del almidon en azúcar en las plantas á la digestion en los animales, deduciendo que tal acto no puede considerarse exclusivo de estos, sino general á todos los séres organizados. Como ya se ha demostrado, la verdadera analogía respecto á la formacion de almidon y de su solubilidad en las plantas, se halla en la funcion glucogénica del hígado, siendo la digestion realmente una solubilidad de *alimento sólido*, preparatoria á su absorcion para el movimiento circulatorio. Y tal acto es innecesario en las plantas (exceptuadas las insectívoras), porque el alimento es líquido: los materiales absorbidos y depositados en los tejidos, á no ser por metáfora, pueden ser denominados productos nutritivos; ni los cambios en estos materiales deben llamarse alimentos, ni las trasformaciones que en ellos se verifican calificarse como un acto de digestion.

4.ª La analogía entre los animales y las plantas, en lo respectivo al acto de almacenar ó depositar productos amiloideos, es mas sorprendente en los animales inferiores y en el estado embrionario. Todas las partes de las plantas parece tienen el poder de fijar y depositar amilóides, aun cuando sea principalmente anejo tal acto al parénquima ó tejido celular indistinto, al paso que en los animales superiores, esta funcion está reservada al hígado: es un hecho interesante que confirma gran semejanza de las plantas con los animales inferiores y los embriones de los animales superiores, y que demuestra la ley de diferenciacion en el desarrollo del embrion y en la evolucion del reino orgánico, ley por la cual los embriones de los animales superiores, y los adultos en muchos animales inferiores, tienen el poder de fijar productos amiloideos y elaborar glucógena en todos sus tejidos, aun cuando esto sea especialmente verdadero para el epitelial no distinto. (Bernard.) Y es digno de notar que los animales de menor energía nerviosa, son los que acumulan más glucógena en los tejidos, pues Bixio ha encontrado 10,14 por 100 en los tejidos desecados de la ostra y del *cardium*, y Foster mucho más en los entozoarios, donde asciende á 2 por 100, siempre que se pesen húmedos; de manera que en la escala animal, no solo se halla tal funcion más y más localizada en un órgano, que es el hígado, sino que tambien el producto glucogénico es más y más rápidamente consumido, mediante la combustion, por la actividad animal.

5.ª Si semejanzas sorprendentes hay entre los dos reinos, tambien existen diferencias muy características en el uso de los productos amiloideos almacenados. Las plantas reservan el almidon para ulterior uso, *como materia de construccion*, pues luego que, y de un modo natural, ha sido trasformado en azúcar, vuelve á ser convertido en celulosa insoluble; los animales, por el contrario, reservan glucogenia para utilizarla mas adelante *como materia de combustion para producir fuerza:* aquellas no necesitan esta *porque la sacan del suelo:* á los animales es innecesaria materia de construccion, *porque sus tejidos son ricos en principios albuminoideos.*

6.ª Los principios albuminoideos, procedan del alimento ó de tejidos destruidos, se dividen, probablemente en el hígado, en glucógena y en cierto resíduo nitrogenado; la glucógena, cambiada en azúcar, y despues en CO^2 y H^2O, es eliminada por el pulmon; el resíduo nitrogenado, si desde luego no es urea, se trasforma fácilmente en tal producto para ser expelida por los riñones. Y descendiendo por la escala animal, hallamos ejemplos, v. gr., los insectos, en los que *el mismo órgano ejerce las dos funciones;* de manera que en el progreso de la evolucion, la urea es á la vez formada y excretada por idéntico órgano, y en série superior se realizan separadamente ambos actos por distintos aparatos.

7.ª Habiendo dicho que Foster habia hallado grandes proporciones de glucógena en los tejidos de los entozoarios, y ocurriendo la duda del uso de este producto, se ha deducido que en estos séres no puede servir como sustancia respiratoria, «porque teniendo una temperatura constante, y asegura»da por el animal en que habitan, no les es necesaria la ma»teria respiratoria productora del calor;» idea que está conforme con la opinion de Pavy, segun la cual, la glucógena no es del todo una materia respiratoria, sino un producto en estado de convertirse en fibrina. Para Mr. Le Conte, por el contrario, la existencia de sustancia amiloidea depositada en un animal donde es inútil tal fuente de calor, confirma de un modo evidente que el primer objeto de la respiracion no es *producir calor, sino crear fuerza;* y la opinion de Foster es una prueba no menos evidente de este principio fundamental de fisiología, que, todavía de un modo imperfecto, ha sido reconocido por algunas de las más elevadas inteligencias. El uso de la locucion de materia productriz de calor, como sinónima de materia respiratoria, es un error profundo; y tal concepto incierto, aplicado á los amiláceos y á las grasas, es tan general, y, por desgracia, se halla tan apoyado por la autoridad de grandes hombres, que es casi imposible desarraigar las ideas falsas que le son asociadas. No se puede menos de insistir en esta idea: el primer objeto de la combustion en la máquina animal, como en la de vapor, no es producir calor, sino *crear fuerza*. El calor no es mas que un *concomitante*, á menudo útil, pero á veces inútil y hasta dañoso; experiencias realizadas con cuidado lo confirman: la doctrina de la conservacion de la fuerza lo exige absolutamente; y, sin embargo, los fisiologistas hablan todavía de alimentos respiratorios como productores únicos de calor, cual si la fuerza vital fuera cualquier cosa sin relacion ninguna con las otras fuerzas de la naturaleza, y que, por consecuencia, no fuese precisa explicacion alguna. La fuerza vital creada por la combustion, puede ser consumida completamente en fuerza mecánica, como en los animales superiores, ó casi del todo en las funciones vegetativas de digestion, asimilacion, secrecion, etc., en los animales inferiores de menor actividad orgánica, cual muchos moluscos y entozoos.

Terminado este artículo en Abril último, Mr. Le Conte da cuenta de una Memoria notable del profesor Schiff, titulada: *Una nueva funcion del hígado*, en la que el autor, en vista de experiencias en perros y ranas en el laboratorio fisiológico de Ginebra, demuestra de la manera más convincente que *el hígado puede descomponer completamente las materias venenosas engendradas por la desorganizacion de los tejidos*. La ligadura de los vasos del hígado, y en particular de la vena porta, produce rápidamente un profundo letargo, y al fin la muerte, despues de una á tres horas; y si en las ranas, es cierto que la ligadura produce escaso efecto, depende esto de la lentitud de los cambios orgánicos en sus tejidos; porque si la sangre de los perros, muertos á consecuencia de la ligadura del hígado, se inyecta en el sistema circulatorio de las ranas, destruye pronto la vida si el órgano referido está ligado, y no produce efecto alguno cuando está sin ligar; habiéndose reconocido además que muchos venenos orgánicos son, del todo ó en parte, destruidos ó hechos inofensivos por el hígado. Esta es, sin duda alguna, la verdadera explicacion del poderoso efecto de los venenos orgánicos, cuando son administrados por inyecciones subcutáneas, porque entran en el torrente circulatorio general sin pasar por el hígado.

Las experiencias referidas confirman la teoría de Mr. Le Conte, relativa á que los tejidos desorganizados se descomponen en el hígado en glucógena y en un resíduo eliminado principalmente por los riñones; y los hechos á que se refieren las de Schiff, confirman y amplían la teoría de las funciones glucogénicas propias del órgano hepático.

FISIOLOGIA.

Absorcion por el organismo vivo del óxido de carbono desprendido con mínimas proporciones en la atmósfera. (Extracto de una nota de Mr. Gréhant.)

Continuando Mr. Gréhant sus observaciones acerca del mayor volúmen de óxido de carbono que puede ser absorbido por la sangre, y sobre la eliminacion del mismo gas por los pulmones, ha llegado á plantear el problema relativo á las proporciones en que dicho óxido de carbono debe existir en la atmósfera para ser absorbido por un animal vivo.

Anteriormente, Mr. F. Le Blanc demostró que un perro muere envenenado por el óxido de carbono en una mezcla producida por la combustion de carbon, que solo contiene 0,54 por 100 ó $\frac{1}{185}$ de óxido de carbono; de manera que una atmósfera con tan mínimas proporciones de este gas tóxico, produce el envenenamiento y la muerte.

Para lograr su intento Mr. Gréhant, y produciendo mezclas de aire y óxido de carbono con mínimas proporciones de este gas, ha realizado las dos experiencias siguientes, que mútuamente se intervienen.

1.ª Dosificar por un procedimiento muy exacto el volúmen de óxido de carbono que hay en la mezcla que á un animal se le ha hecho respirar durante un cierto tiempo; y restando este volúmen del medido é inspirado, obtener el del óxido de carbono absorbido por la sangre.

2.ª Determinado el mayor volúmen de oxígeno que se absorbe por la sangre, antes y despues de la intoxicacion parcial, la diferencia de los grandes volúmenes de oxígeno absorbidos por dos masas de sangre, representan el del óxido de carbono que en este humor se ha combinado con la hemoglobina, pues se sabe, conforme á las experiencias del inolvidable y eminente fisiólogo Claudio Bernard, que el óxido de carbono se une á los glóbulos rojos de tal manera, que un volúmen de óxido de este gas se sustituye á un volúmen igual de oxígeno.

Las experiencias realizadas por el referido Mr. Gréhant, las cuales se propone continuar, demuestran que el hombre y los animales obligados á respirar, durante media hora, en una atmósfera que contenga solo $\frac{1}{779}$ de óxido de carbono, absorben este gas en cantidad tan considerable, que la mitad cerca de los glóbulos rojos combinados con el citado óxido de carbono, resulta incapaz de absorber oxígeno, al paso que en una atmósfera conteniendo $\frac{1}{1449}$ del óxido de carbono, una cuarta parte de los glóbulos rojos se combinan con este gas.

Estos resultados son de grande interés bajo el punto de vista de la Fisiología é Higiene.

CRANEOLOGIA.

La raza tasmania. (Nota de MM. A. de Quatrefages y E. Hamy.)

Comparando los *tasmanios* con las otras poblaciones de tinte negro de la Oceanía, se deduce que forman por sí una raza especial. Su pelo, completamente lanudo, los aisla de los australes, que son sus más próximos vecinos geográficamente hablando; su tez, de un negro subido, ligeramente aceitunado, los distingue de los *papuas*, propiamente dichos, aproximándolos á los *negritos*, de quienes los separan algunos rasgos exagerados de su cara, como entre otros el achatamiento de la porcion media nasal, la anchura de las narices y la depresion de la barba. El estudio osteológico confirma que el cráneo tasmanio se reconoce por dos caractéres esenciales: la forma y desarrollo de las elevaciones parietales, y la línea que media entre estas dos eminencias. Las primeras, muy fuertes y cónicas, están colocadas á igual distancia de las suturas frontal y lambdoides; y de su desarrollo resulta que, por debajo de ellas, los parietales descienden sin abultarse, y señalan, mirando la cabeza por delante, dos líneas casi rectas y ligeramente convergentes, que continúan y marcan casi regularmente la proyeccion de las porciones escamosas de los temporales. Por encima se observa una cosa análoga: la proyeccion de las referidas elevaciones parietales señala dos líneas que se elevan hácia el medio de la cabeza, donde están separadas por la salida respectiva á la prolongacion de la bóveda frontal media, la que, alcanzando á la sutura sagital, se ahonda, por decirlo así, en una hendidura que contiene la sutura, quedando independiente de las elevaciones parietales. A este conjunto de prominencias y excavaciones dirigidas de adelante atrás, es á lo que se ha dado el nombre de *carena*, cuyo rasgo característico parece ser propio de los tasmanios adultos. La cara ósea no se distingue menos que el cráneo, y mas particularmente por su escasa altura relativa, sus formas toscas, y esencialmente por rasgos excepcionales bien marcados.

ANATOMIA COMPARADA.

Sobre el órgano llamado cuerda dorsal *en el* Amphioxus lanceolatus. *Nota de M. J. Renaut y G. Duchamp.* (Comptes rendus, *Abril* 1878.)

La estructura del órgano llamado *cuerda dorsal* en el *Amphioxus*, hace tiempo llama la atencion de los anatómicos, y es objeto de dudas y discusiones aun en la actualidad. Unos, con Ralhke, consideran la cuerda formada por una materia gelatinosa amorfa, contenida por una envoltura fibrosa; otros, entre ellos MM. Quatrefages, Wilhelm, Müller y Stieda, la miran constituida por células soldadas entre sí, presentando en la base un núcleo adyacente á la envoltura externa; y en un tercer grupo se colocan Goodsir, J. Müller, Max, Schultze y Marcusen, que rechazan la estructura celular del órgano en cuestion.

Por otra parte, la cuerda dorsal del *Amphioxus* ha sido considerada como análoga á la de los vertebrados, y su existencia es uno de los argumentos de los más importantes para incluir dicho sér en este grupo.

En los vertebrados, los tejidos del esqueleto pueden dividirse en tres categorías principales: 1.° el eje primitivo formado por la cuerda dorsal; 2.° el tejido cartilaginoso; 3.° el tejido óseo. Estos diferentes tejidos se suceden en los animales superiores, y el esqueleto definitivo es constituido por el tejido óseo del todo ó el cartilaginoso verdadero ó ternilloso, en cuyo caso no quedan sino escasos vestigios del eje primitivo ó cuerda dorsal; de suerte que, á excepcion del *Amphioxus*, no se conoce ningun vertebrado cuyo esqueleto definitivo sea únicamente representado por una cuerda dorsal persistente. Este órgano reune desde luego, en la série, caractéres típicos, como son los de estar formado de células globosas, soldadas entre sí á la manera de los epitelios, trasparentes como el vidrio, y con un núcleo de los más distintos, por lo comun retirado á la periferia. La cuerda dorsal de los peces no difiere, pues, fundamentalmente de la de los embriones respectivos á los mamíferos más elevados.

En el *Amphioxus*, al contrario, no presenta disposicion alguna que se refiera á la estructura citada: la cuerda está contenida por una vaina cilíndrica que la envuelve del todo; y en cortes hechos perpendicularmente al eje general del cuerpo, despues de su endurecimiento mediante la dextrina y en el alcohol, se manifiesta constituida como á continuacion se indica.

En el interior de la vaina, y tendidas horizontalmente, del borde izquierdo al borde derecho, se ven fibras de diámetro uniforme, cilíndricas, llenas y adherentes por sus dos extremidades á la envoltura general. A medida que se aproximan á la cara dorsal, dichas fibras se encorvan ligeramente por arriba, de manera que circunscriben en la línea media, entre la vaina y la cuerda, un espacio vacío en forma de huso, repitiéndose en sentido inverso, y del lado ventral, la misma disposicion, de tal modo, que solo las fibras del plano medio son horizontales y rectilíneas.

En un corte longitudinal que pase por el eje de la cuerda y los dos lados del cuerpo, la vaina se observa fraccionada segun su longitud, y el área, así interceptada, está llena por fibras de la cuerda, que, por consecuencia, presentan una disposicion escaleriforme relativa á los bordes de la vaina.

Sobre una preparacion convenientemente coloreada, á beneficio del picrocarminato de amoniaco ó de la eosina soluble en el agua, se observan los detalles siguientes.

La vaina de la cuerda dorsal se colora uniformemente en rojo por el carmin, sin mostrar ningun núcleo en su interior ni en su cara interna; la eosina la deja incolora absolutamente. Toda la superficie interna está erizada de muchas prominencias cónicas, que forman la base cuerpo con la sustancia hialina que constituye la envoltura; y estos pequeños conos quedan sin color por el carmin, y se tiñen de un rosa vivo por la eosina, no presentando apariencia de núcleos, y siendo homogéneos completamente. A la extremidad de cada uno viene á insertarse, cubriéndolo, una de las fibras de la cuerda dorsal, y cada fibra corresponde por sus dos extremidades á una de las prominencias antes descrita: es cilíndrica por lo regular, no contiene ningun núcleo, y, á la manera del tejido elástico, se colora de amarillo bajo la accion del picrocarminato, y en rosa por la eosina.

La accion de la potasa no produce la disgregacion de estas fibras en masas con núcleos: el carmin, la hematoxilina, y los otros reactivos de los núcleos, no descubren ninguno en el espesor de la vaina; y por lo tanto, puede considerárselas como cuerpos no celulares, que no tienen relacion alguna con el tejido característico de la cuerda dorsal, ni con el cartílago; presentando, por otra parte, una estructura y reacciones histoquímicas del todo análogas á las que proporcionan las fibras que constituyen el órgano axil del calamar, conocido con el nombre de *pluma.*

De lo que antecede, resulta que el *Amphioxus*, desprovisto de sangre roja que contenga hemoglobina recogida en elementos especiales, no posee una cuerda dorsal comparable por su estructura á la de todos los animales vertebrados; y es, por lo tanto, fundada la duda acerca del valor morfológico que tenga dicha cuerda dorsal en el sér expresado.

RESPIRACION AÉREA DE ALGUNOS PECES DEL BRASIL.

Mr. Jobert, naturalista encargado por el Emperador Don Pedro, de investigaciones zoológicas en el Alto Amazonas, ha remitido á la Academia de Ciencias de París una importante y curiosísima Memoria, relativa á la respiracion de muchos peces de agua dulce, que habitan en dicha region de la América meridional. El *Callichthys asper*, pez silurio de las inmediaciones de Rio-Janeiro, y que vive mucho tiempo fuera del agua, traga aire con objeto de que circule este gas por el tubo digestivo, eliminándolo por el ano, despues de haberse modificado, como en la respiracion aérea pulmonar; es decir, luego que se ha consumido cierta cantidad de oxígeno en cambio de otra proporcional de ácido carbónico. Para tal respiracion, complementaria de la branquial, existe en el pez citado una estructura anatómica adecuada en sus intestinos, pues, adjunto á su tejido epitelial, se observan una infinidad de apéndices filiformes, agrupados en penachos sobre la superficie libre de la mucosa, compuestos de vasos sanguíneos análogos á los que componen el parénquima de los pulmones, y comparables á los órganos respiratorios descubiertos por Reaumur en el intestino recto de ciertas larvas de insectos.

La respiracion aérea antes citada, es tambien propia de otros peces de la region referida, los cuales viven en aguas corrompidas con 40° ó más de temperatura; y no bastando para su existencia la respiracion branquial, tienen necesidad de subir á la superficie para inspirar directamente el aire libre de la atmósfera, ó de salir del medio en que residen, cuando la desecacion del rio ó laguna es completa, emprendiendo en tal caso viajes largos, y reptando sobre el suelo mediante las aletas pectorales, hasta encontrar aguas adecuadas á su respiracion por las branquias.

Otras especies de los géneros *Callichthys* y *Doras*, tienen como el *C. asper* la facultad de respirar de dos maneras: el aire disuelto en el agua por aparatos branquiales, y el aire libre mediante su deglucion y curso por el tubo intestinal, saliendo modificado químicamente por el ano; y de esto dependen los continuados borbotones que se observan en las aguas donde habitualmente residen los expresados peces; y un fenómeno análogo, pero no idéntico, se verifica en los *Hypostomos*, que igualmente corresponden á la familia de los Siluros. En ellos existe un tubo intestinal con plexos y redes de vasos sanguíneos: tambien tragan el aire; pero este gas, luego que por la hematosis se modifica, no es eliminado por el ano, sino expelido por la boca ó por las aberturas branquiales; de manera que, siendo su aparato complementario de la respiracion menos completo, perecen al cabo de 5 á 7 horas de estar fuera del agua, y no alcanzan el tiempo que los citados peces *Callichthys* pueden vivir al aire libre.

Tambien Mr. Jobert ha confirmado una respiracion aérea complementaria en el *Sudis gigas* ó *Sudis pirarucu* de Spix, y en ciertas especies del género *Erythrinus*, del grupo de los *Clupeidos*, propias de las aguas dulces del Alto Amazonas;

pero tal respiracion se completa, no por el tubo intestinal, sino por la vejiga natatoria. Esta, que por el exófago comunica con el medio externo, se halla revestida de numerosos capilares sanguíneos, además de las respectivas celdillas alveolares, con vasos adecuados para la respiracion aérea, como lo confirma la inmediata asfixia que en tales peces se produce cuando, por cualquier causa, se intercepta el conducto que comunica la vejiga natatoria con el aire atmosférico libre. Y si no todos los peces de este grupo tienen la facultad de vivir fuera del agua, como el *Erythrinus trachina*, el *E. Tœniatus* y *E. Brasiliensis*, tambien es cierto que en tales especies son lisas las paredes de la vejiga natatoria, careciendo de las redes y plexos vasculares que, con el aparato branquial ordinario, realizan la doble respiracion, aérea y acuática, antes mencionada.

Los interesantes hechos que brevemente hemos indicado, confirman más y más el íntimo enlace, las conexiones orgánicas y biológicas que existen entre los peces y los anfibios de branquias perennes.

ZOOGRAFIA.

Observaciones acerca de las afinidades zoológicas del género Mesites, *por Mr. Alf. Milne-Edwards.*

El eminente naturalista G. Saint-Hilaire, dió á conocer en 1838 un pájaro de Madagascar con el nombre de *Mesites variegatus*, afine, segun él, á los *Heliornis* por su cabeza, á los *Penelope* y *Ortalida*, ó *Catraca*, de Bufon, por el cuerpo y las alas, y á las *Palomas* por los piés.—Gray le incluyó en la familia de los *Megapódidos*, idea en que convinieron el príncipe C. Bonaparte, Reichenbach y Hartlaul, modificada despues por el último, que, en su reciente trabajo de los pájaros de Madagascar, coloca los *Mesites* á continuacion de los *Motacílidos*, y en la tribu de los dentirostros.

Habiendo recibido Mr. Grandidier, procedentes de Tamatava, ejemplares conservados en alcohol, las investigaciones anatómicas de A. Milne-Edwards han demostrado, además del escaso valor en ornitología, como en otros ramos de la zoología, de los caractéres exteriores, que los *Mesites* no son gallináceas ó palomas, como indicó G. Saint-Hilaire y Bonaparte, ni pájaros, cual han creido Gray, Sundevall y Hartlaub, sino que por sus afinidades orgánicas se deben considerar como zancudas, y cerca de los grupos de las *Rálidas* y *Ardeidas*. Confirma tal juicio la debilidad orgánica del aparato esterno clavicular, en oposicion al desarrollo de la region basilar de las extremidades abdominales, el tener dos carótidas cual las *Rálidas*, y no una como los pájaros, conviniendo con las *Ardeidas* en cinco pares de placas de plumon, que, aun cuando de diferente manera, están ocultas bajo las plumas respectivas al dorso, escápulas y region ilíaca, como al pecho, costados y vientre.

MINERALOGIA.

Mineral nuevo descubierto, mediante el análisis espectral, por Mr. Lettson.

Mr. Lecoq, por encargo de Mr. Lettson, sábio mineralogista inglés, ha presentado en la Academia de Ciencias de París un fragmento de un mineral que, sin razon, habia figurado en las colecciones de Oxford, hace más de cincuenta años, bajo el nombre de Blenda de Cornwall. Habiendo reunido, con objeto de buscar el gallio, una coleccion de blendas inglesas, Mr. Lettson tuvo la idea de examinar directamente algunos pedazos, de aspecto singular, mediante el *espectroscopio*, instrumento cuyo manejo le es familiar; de tal manera reconoció que uno de ellos producia las bandas de absorcion características del *didimio* y el *erbio*, confirmando despues el análisis químico, que la llamada blenda no contenia un átomo de azufre, ni de zinc, sino que era un *fosfato de didimio y erbio*. Mr. Lettson llama á esta especie *Rhabdófano*, á fin de recordar las bandas espectrales, que, por vez primera, han permitido descubrir un mineral mediante la inspeccion directa con el espectroscopio, especie hasta hoy dia muy rara, porque dicho mineralogista solo la ha reconocido en dos ejemplares de la coleccion referida; y no está demás recordar que, observándose en la *Monacita* (la cual se refiere á un fosfato de óxido de cerio combinado con otro fosfato de lantano, de los montes Urales, de Nueva-Granada y del gneis de Norwich) las rayas características del didimio, podria inducirse que el nuevo mineral antes indicado, sería simplemente una variedad fibrosa mamelonar de la *Monacita*.

ZOOLOGIA.

Nuevas consideraciones sobre la generacion de los Afidos (Pulgones).—Memoria presentada á la Real Academia de Ciencias de Madrid por JULIO LICHTENSTEIN, *socio corresponsal.*

En agradecimiento á la alta honra que me dispensó esa muy ilustre y docta Corporacion admitiéndome en su seno, hace tiempo tenia formado el propósito de presentarle algun trabajo de historia natural; pero aunque no me faltan cosas interesantes en las muchas observaciones biológicas de insectos que vengo haciendo de muchos años á esta parte, no me parecian bastante nuevas para ofrecerlas como tales al criterio de esa sabia Academia.

Hoy, despues de diez años de estudios seguidos sobre los Pulgones en general, y el de la vid (*Phylloxera vastatrix*) en particular, llego á considerar la evolucion biológica de los insectos áfidos de un modo muy diferente de lo que ha sido adoptado en general hasta la fecha.

En primer lugar, una cosa que me llamaba la atencion sobre todo, es que en muchos géneros de *áfidos*, como *Phylloxera*, *Tetrancura*, *Pemphigus*, etc., las hembras, fecundadas por el macho, ponen únicamente un solo huevo, mientras que en todos los otros insectos las hembras contienen en su ovario un crecido número de huevos, llegando hasta millares.

Sin embargo, del huevo *único* de la *Phylloxera* obtenia una larva que me daba, sin concurso del otro sexo, muchos individuos, de los cuales nacian, despues de tres trasformaciones, hembras y machos. Era evidente entonces que la naturaleza, inagotable en sus combinaciones, compensaba por la gemacion ó brotacion múltiple de la larva la falta de huevos en la hembra.

Lo que llamo gemacion, brotacion ó *yema*, es muy diferente del *huevo*.

El *huevo* no puede desarrollarse mas que por impulso de una fuerza externa, que es la fecundacion. El huevo tiene siempre la conocida forma de elipse ó esfera, mas ó menos alargada.

La *yema* se desarrolla por impulso interior, sin ninguna ayuda extraña. La yema puede tener las formas mas variadas: gusano, oruga, ninfa, crisálida, pupa, insecto alado, son otras tantas formas bajo las cuales puede presentarse la gemacion. Cada metamórfosis en un insecto es una gemacion.

Mas aun en algunos insectos, y en particular en la *Phylloxera*, la yema puede aparecer en forma de huevo; pero su carácter de brotar por sí solo y sin que el insecto que la produce haya sido fecundado, es una prueba de su naturaleza.

Ya se concibe por lo que acabo de exponer que, para mí, los milagros de *hermaphroditismo* y de *parthenogenesis* no existen, ni pueden existir. Lo que ha sido llamado *hembra alada parthenogenésica* y *vivípara*, es una forma larval emitiendo su gemacion, como una langosta que cuando muda de forma, tambien emite un insecto vivo.

Es verdad que en los pulgones la forma larval es muy parecida á un insecto perfecto. Diré mas: esta forma larval es mas completa que la verdadera hembra. Tiene alas muchas veces, y la hembra no las tiene nunca; tiene un pico ó rostro, y este órgano falta frecuentemente á la hembra. Pero en virtud de la semejanza de tales larvas con la *imago*, llamaré á aquella forma *falsas hembras* ó *pseudogynas*.

Es otro ejemplo de los contrastes que nos ofrece la naturaleza: en los *Lampyris*, *Psyche*, *Drilus* y en muchos *Ortópteros*, conocemos hembras perfectas que tienen la apariencia de una larva, pues en los *áfidos* vemos larvas que tienen la forma del insecto perfecto, y la semejanza va hasta ofrecernos en el modo de poner sus gemaciones absolutamente la apariencia de una hembra poniendo sus ó su huevo. Pero, lo repito, hay la falta de la forma masculina, hay la propiedad de brotar sin fecundacion, que distinguirán siempre la forma larval de la forma sexuada perfecta.

La evolucion biológica en los áfidos, consiste en cuatro fases ó períodos, divididos cada uno en cuatro mudas ó cambios de piel, despues de los cuales aparece una *Pseudogyna* ó falsa hembra, con aptitud para producir sus gemaciones, sea bajo la forma de un pulgoncito vivo (*Aphis*, *Siphonophora*, *Lachnus*, etc.), sea bajo la forma de un *pseudo-ovum* (*Phylloxera*).

He dado á las cuatro fases referidas los nombres siguientes:

1.ª fase. Los Fundadores... (*Pseudogyna fundatora*).
2.ª Los Emigrantes... (*Pseudogyna migrantia*).
3.ª Los Brotadores... (*Pseudogyna gemmantia*).
4.ª Los Pupíferos y los sexuados...... (*Pseudogyna pupifera et sexuata*).

En general hay dos fases ápteras, que son: la 1.ª *los Fundadores*, que presentan las *Pseudogynas* de mayor tamaño, y la 3.ª *los Brotadores*, los cuales gozan del singular privilegio de reproducirse casi sin límite, y en la misma forma, hasta que circunstancias que no he podido descubrir todavía, les hagan dar gemaciones sexuadas, ó sea la forma pupífera y sus productos macho y hembra.

La 2.ª fase, *los Emigrantes*, tienen generalmente alas, y dejan la planta donde han nacido para buscar nueva estancia, sea en plantas de la misma especie, sea otras veces en plantas diferentes, lo que hace muy difícil el estudio de su biología.

La 4.ª fase, *los Pupíferos*, tambien son alados por lo general; sin embargo, conozco excepciones de la regla, y en la

Phylloxera de la vid, los Emigrantes son ápteros, y en el *Acanthochermes Quercûs, los Pupíferos* tampoco tienen alas.

No he podido todavía seguir mas que uno ó dos áfidos en su ciclo completo, y estudiar las diez y ocho formas que lo componen; pero conozco, sea la primera, sea la segunda mitad de la biología, de unos 50 áfidos, quedando en duda siempre sobre la fase emigrante, que no he podido seguir, ó bien que viene de repente á un vegetal sin saber de dónde ha salido.

Sin embargo, espero que la Real Academia de Ciencias de Madrid acogerá con benevolencia un trabajo todavía incompleto, pero que con toda su imperfeccion podrá servir de guia á los que quieran dedicarse al estudio, tan interesante para la ciencia y para la agricultura, de nuestros mas temibles enemigos en el mundo de los insectos, *los Pulgones.*

Villa la Lizonde, cerca de Montpellier, 12 Mayo 1878.= *J. Lichtenstein,* Comendador de la R. O. de Isabel la Católica, Socio corresponsal de la Real Academia de Ciencias.

VARIEDADES.

El gran globo cautivo de vapor de Mr. Giffard, por M. Gaston Tissandier. Un folleto en 8.° de 96 páginas, con 40 grabados dibujados por Mr. Albert Tissandier. (París, Masson, 1878.) Dar cuenta del folleto consagrado á la descripcion de este aerostato por Mr. Gaston Tissandier, y escrito con la claridad, limpieza y rigurosa precision que el sábio escritor imprime á todas sus obras, es el mejor medio de completar la descripcion del globo cautivo que atrae en este momento la atencion de todo París, y del cual han tratado ya los *Mundos* (1). El autor empieza su Opúsculo por una corta biografía de Mr. Giffard, con razon porque reasume, por decirlo así, la historia de todos los progresos verificados por la aeronáutica desde hace un cuarto de siglo. Mr. Giffard nació en París el 8 de febrero de 1825; es el primer ingeniero que ha concebido el proyecto de aplicar el vapor á los globos aerostáticos, y el único hasta ahora que se ha atrevido á realizarlo. Para que un globo pudiese levantar un motor de vapor, se necesitaria ante todo aligerar este, y con tal objeto reemplazó la bomba alimenticia reaccionada por un cilindro llamado *pequeño caballo*, empleado hasta entonces para introducir el agua en las calderas, por el aparato extraordinario, el inyector Giffard, que gracias á su poco volúmen y á su gran sencillez se ha adoptado en todas partes para la alimentacion de los generadores. Esta invencion ha procurado á su autor una gran celebridad y no escasa fortuna, que ahora emplea con mucha liberalidad en la investigacion de las mejoras de que son suceptibles los globos.

En 1852 construyó un globo en forma de huso de 12 metros de diámetro y 44 de longitud, de capacidad cúbica de 2.500 metros y suspendió de el una máquina de vapor de 3 caballos que ponia en movimiento una hélice. Se atrevió á elevarse solo con este aparato, el 24 de setiembre de 1852 en el Hipódromo de París y descendió en Elancourt, cerca de Trappes. Aunque no pudo conseguir dirigirse contra un viento violento, logró, gracias á su timon, dar vueltas hácia todos lados. En 1855 renovó esta atrevida tentativa en la fábrica del gas de Courcelles, con otro globo, todavía más prolongado, cuya longitud llegaba á 70 metros y el volúmen era de 3.200 metros cúbicos. La nueva máquina de vapor no pudo todavía vencer el vien-

(1) Tomo 46, pág. 239-241.

to; pero logró resistirse por un momento contra él, é hizo desviar lateralmente al globo de la direccion de la corriente. Nadie despues ha renovado estos ensayos.

Doce años despues, se ocupó Mr. Giffard en la aplicacion del vapor á los globos, pero por esta vez solo á los globos cautivos, y no á los que pudieran dirigirse. En 1867 construyó un magnífico globo esférico de 21 metros de diámetro y 5.300 metros cúbicos de capacidad, sujeto por un cable de 330 metros, que se arrollaba sobre un enorme eje de fundicion por medio de máquinas de vapor de 50 caballos. Para hinchar el globo cautivo, que se halla colocado detras de la exposicion del Campo de Marte, se necesitaron 30.000 kilógramos de ácido sulfúrico y 15 kilógramos de limaduras de hierro, que reaccionaron en una poderosa batería de sesenta toneladas.

El primer ensayo se verificó el 17 de setiembre, y entonces el aparato subió solo; el 18 elevó siete personas á un centenar de metros, y por último el 21 de Setiembre se verificó la ascension de inauguracion. Tuve el placer de ser una de las trece personas que hicieron esta excursion vertical (1). Aprovechando el aire sereno y el cielo puro, subimos hasta 230 metros, cinco veces la altura de la columna Vendome y dos veces la del monte Valeriano. Inmediatamente despues empezaron las ascensiones públicas; doce personas á la vez subieron hasta 250 ó 300 metros. Al año siguiente, mientras que el globo cautivo de la exposicion se trasportaba al Hipódromo, donde se hicieron ascensiones en todo el verano, Mr. Giffard hizo construir una enorme esfera de 11.000 metros de capacidad que remitió á Londres para ejecutar ascensiones cautivas. No siendo suficientemente impermeable el globo para guardar el hidrógeno puro, el autor no vaciló en construir un segundo globo esférico de 12.000 metros cúbicos de capacidad, 27 de diámetro y 37 de altura total, sujeto á un cable de 660 metros, que pesa 3.000 kilogramos y que se arrolla por medio de máquinas de 150 caballos de fuerza, sobre la circunferencia de un torno de 7 metros de longitud y 2 de diámetro. La tela del globo tiene 2.500 metros de superficie, y pesa 2.800 kilógramos. Este poderoso aparato, que se situó cerca de Cremone-Gardens, se inauguró el 3 de mayo de 1869.

Despues de la guerra, volvió á emprender Mr. Giffard sus investigaciones; en primer lugar ideó procedimientos más cómodos y económicos para obtener el gas. Volviendo al antiguo procedimiento de los aerostáticos del tiempo de la República, y perfeccionándolo, obtuvo el hidrógeno puro por la descomposicion del vapor de agua por medio del mineral de hierro calentado hasta el rojo, y previamente desoxidado en su superficie por una corriente de gas óxido carbono. Los experimentos se hacian en el sitio en que se halla el globo cautivo de la Exposicion, detrás del Campo de Marte. Se hicieron cierto número de ascensiones libres con el nuevo gas, la primera el 29 de mayo de 1872 por MM. Gaston Tissandier y Julio Godard, y tambien por mi parte verifiqué otra el 11 de setiembre de 1872. Nuestro globo nos llevó en nueve horas á un cuarto de legua de París, esto es á Vaucoulers, haciendo un trayecto efectivo de 260 kilómetros y subiendo á 2.150 metros.

---

(1) Les *Mondes*, IXX, p. 178.

Estos viajes aéreos demostraron prácticamente la excelencia del procedimiento: sin embargo, hay un gran riesgo en encender hornillos cerca de un globlo; y cuando en 1876 Mr. Giffard se decidió á hacer otro para la Exposicion, combinó un aparato que permitia preparar de una manera contínua el hidrógeno por la accion del ácido sulfúrico sobre el hierro.

El nuevo sistema, experimentado con éxito el 27 de abril de 1877 para hinchar un primer globo, quedó desde entonces definitivamente adoptado para llenar el gran globo cautivo de las Tullerías. La inmensa esfera es la más colosal máquina aerostática que hasta ahora se ha construido, su diámetro es de 36 metros, su altura total desde la válvula al fondo de la barquichuela es de 55 metros (10 metros más que el arco de Triunfo de la Estrella), su superficie de 4.000 metros cuadrados, su volúmen de 25.000 metros cúbicos. Su peso total, sin comprender el cable, és de 14.000 kilógramos. La barquichuela forma un balcon circular de 6 metros de diámetro exterior, 4 interior y 1 de ancho. El cable de 660 metros de longitud, de 85 milímetros de diámetro interior y 65 milímetros en su extremo fijo, está sujeto á una cabria, se arrolla 108 veces sobre esta que tiene $1^{m},70$ de diámetro, 11 de longitud y pesa 42 toneladas. El cable está retorcido sobre sí mismo por el esfuerzo de máquinas de cuatro cilindros de fuerza de 300 caballos. En cada ascension se elevan 40 personas á la altura de 500 ó 600 metros, y por espacio de unos 12 minutos. La cubierta del globo se compone de dos muselinas, de dos telas de lino separadas por tres capas de goma elástica (de las que la más exterior está vulcanizada); el grueso total de las siete capas es de un milímetro y la tela está barnizada exteriormente con 300 kilógramos de aceite de lino cocido y pintada con 400 kilógramos de blanco de zinc. La tela del globo está formada por 1456 piezas separadas, metódicamente cortadas y cosidas mecánicamente; las costuras tienen la longitud total de 15 kilómetros, han absorvido 50 kilómetros de hilo y han trabajado para hacerlas 40 obreras. Las fajas que cubren las costuras tienen tambien además 15 kilómetros de longitud.

La longitud de las cuerdas del cable es de 20 kilómetros y comprende 52.000 mallas.

La tela del globo se llevó cortada desde las Tullerías á principios de abril y el globo quedó formado y cosido el 25 de mayo; empezó á llenarse en 11 de julio; se emplearon 190.000 kilógramos de ácido sulfúrico en bruto y 80.000 de limaduras de hierro. El 14 de julio terminó la operacion y la Primera ascension la hicieron el 19 seis personas, empezando por Mr. Tissandier. El 7 de agosto subimos, aunque éramos treinta, en cinco minutos, y llegamos á la altura de 500 metros, estando hermoso el tiempo.

No se experimenta vértigo alguno, ni sacudimiento de ninguna especie, y nada hay comparable al panorama maravilloso que desde allí se observa, superior al que puede descubrirse desde lo alto de los monumentos. Es un espectáculo único, y que merece que Mr. Giffard se haya dedicado así á procurarlo á los Parisienses.=*Carlos Boissay.*

Mapa de la luna en 25 secciones, por W. S. Lohrmann, con un texto descriptivo, por el Dr. J. F. Julio Schmidt. Lo que era hace mucho tiempo un *desideratum* para los astrónomos, se acaba de realizar por la publicacion que ha hecho Lohrmann del Mapa completo de la Luna. La primera parte de su *topografía*, etc., que contenia únicamente 4 secciones de las 25 que componen el mapa, se publicó en el año 1824; pero en 1838 se hizo un pequeño mapa que comprendia todas las secciones en una escala más reducida, litografiándole Werner en Dresde.

Empezó Lohrmann su trabajo en la piedra en este último punto, y lo terminó en 1836. Murió en 1840; y habiéndose ausentado al campo Madler al mismo tiempo, quedó algo olvidado el trabajo del primero; pero felizmente sus manuscritos se hallaban en manos de un amigo sincero de la ciencia, Mr. A. de Leipzig, que emprendió á sus expensas la publicacion, segun el plan original del autor. Le ayudó Mr. Oppelt, de Dresde, que revisó los cálculos y las tablas, y vigiló el grabado. Pero como quiera que el trabajo avanzase muy lentamente, en Febrero de 1851 recurrió Mr. Barth al auxilio del Dr. Schmidt, del Observatorio de Atenas. Aunque el doctor Schmidt estuviese enteramente ocupado con su propio mapa lunar, respondió de buen grado á este llamamiento, y el trabajo caminaba rápidamente, cuando en Diciembre del mismo año murió Mr. Barth.

Felizmente su hijo el Dr. A. A. Barth resolvió cumplir los deseos de su padre, y al cabo de dos años, el Dr. Schmidt continuó sus trabajos del mapa hasta 1858, en que fué nombrado director del Observatorio de Atenas, y el trabajo recayó principalmente en Mr. Oppelt, auxiliado por su hijo, subteniente primero del ejército de Sajonia, quien continuó el trabajo despues de la muerte de su padre, acaecida en 1863.

Otra muerte acaeció, que pudo ser fatal para el éxito de la empresa: la del Dr. A. A. Barth, si no hubiera tenido por sucesor á un hombre de un celo igual por la causa de la ciencia: á M. J. A. Barth, que se hallaba resuelto á cumplir la voluntad de sus predecesores, y así han podido ver la luz pública las 25 secciones de Lohrmann, con una descripcion impresa del Dr. Schmidt, que ha completado la revision y la correccion final de las tablas.

El mapa, de 3 piés franceses, representa tres medias millonésimas del diámetro de la luna. El nuevo texto por Schmidt se halla formado segun un plan sumamente abreviado, comparado con el de Mr. Lohrmann. Están omitidas las partes que se refieren á la astronomía general, como tambien las notas biográficas relativas á la nomenclatura lunar y al metodo para calcular las posiciones. Por otra parte, se han conservado las explicaciones de Lhormann acerca de la manera de hacer los dibujos, y se ha añadido una lista de las posiciones, por Oppelt. Los pequeños detalles dados por Lohrmann están tambien modificados, porque el Dr. Schmidt ha creido que los objetos pequeñísimos están suficientemente dibujados en el mapa, y no hay necesidad de hacer relacion especial de ellos en el texto. En el prefacio de la parte publicada de su obra, Lohrmann ha explicado que su deseo era representar las montañas y las manchas de la luna con toda la exactitud posible; y segun los métodos de medida y trazado que la ciencia exige, adopta la proyeccion orográfica de la superficie lunar en su libracion media. Como naturalmente puede esperarse en una obra de dibujos hechos á mano por intérvalos en un espacio de 50 años, hay un estilo muy desigual de ejecucion en las diferentes láminas. Además todas las sombras variadas que en los originales de Lohrmann no eran siempre satisfactorias, aparecen en proporciones muy diversas en las diferentes partes del mapa.

Para uniformarlas completamente, se necesitaban mucho trabajo y gastos; pero alguno de los trazos mas importantes los ha retocado el doctor

Schmidt, que de esta manera ha suprimido muchos nombres que alteraban la limpieza del dibujo.

La publicacion de las secciones completas de Lohrmann será vivamente apreciada por la clase considerablemente en aumento de los astrónomos de profesion, y de los aficionados que hacen estudio de la superficie lunar, y que hasta ahora tienen que referirse principalmente al mapa de Beer y de Mäedler. El admirable mapa de Schmidt, de seis piés de diámetro, verá muy pronto la luz pública, y entonces tendremos ocasion de hacer comparaciones sobre la luna, representada nada menos que en tres grandes obras. Las pruebas de una accion volcánica continuada sobre la luna, pueden hallarse con una facilidad sin cesar creciente, pues que al mismo tiempo los mapas casi contemporáneos de Lohrmann, de Beer y de Mäedler pueden servir para manifestar, que muchas diferencias aparentes son debidas al género ó accidentes de los dibujos, mas bien que á cambios reales. Nunca puede agradecerse bastante á Mr. J. A. Barth la liberalidad que ha manifestado publicando los excelentes dibujos de sus predecesores, y debe esperarse que, el valor incontestable de este trabajo, le proporcionará pedidos que le recompensen ampliamente de sus desembolsos. La clase de los astrónomos reconocerá ciertamente la buena fortuna que ha colocado el trabajo de editor en manos de un hombre como Mr. Schmidt, cuya conducta desinteresada, al suspender el trabajo de su propio mapa para publicar la obra de otro y darle la preferencia, se halla muy en armonía con el carácter tan digno de aprecio y el desinterés científico del Director del Observatorio de Atenas.=J. BIRMINGHAM.

Creacion de un Museo astronómico en el Observatorio de París. Mr. Mouchez da cuenta á la Academia de Ciencias de que el Ministro de Instruccion pública acaba de dar su aprobacion al proyecto que le habia presentado para crear una coleccion de objetos y de cuadros relativos á la Astronomía y á la historia del Observatorio de París, desde la época de su fundacion. Esta coleccion ofrece interés, no solamente para los astrónomos, sino tambien para el numeroso público que afluye al Observatorio los dias de entrada, y cuya legítima curiosidad no se ve nunca satisfecha en presencia de instrumentos, cuyo uso es difícil de hacerle comprender, á pesar de la paciencia y explicaciones que de buen grado le dan los astrónomos que están de servicio.

Los objetos podrán colocarse en dos grandes salas circulares del primer piso, hoy enteramente vacías, y cuyos muros, estérilmente descubiertos, causan mala impresion á los concurrentes.

La coleccion deberá comprender:

1.° Los retratos de los astrónomos y de los sábios que, con sus trabajos ó descubrimientos, han favorecido al Observatorio de París desde la época de su fundacion.

2.° Una coleccion de medallas relativas á la historia de la Astronomía y del Observatorio, cuyos troqueles existan en la casa de la Moneda, ó en poder de las familias que permitan sacar ejemplares de ellos.

3.° Una coleccion de dibujos, grabados, fotografías, que representen los cuerpos celestes ó los fenómenos astronómicos, segun se ven con los instrumentos de más potencia, y en diferentes épocas; muchos de estos documentos, como, por ejemplo, la magnífica coleccion de dibujos de la luna, debida á Juan Domingo Casini, se hallan casi olvidados en nuestros archivos, ó permanecen ignorados é inaccesibles para muchos astrónomos, sin embargo de que les serian del mayor valor.

La exposicion de las reproducciones fotográficas de estos dibujos, ofreceria ciertamente un interés real.

4.° Por último, una coleccion tan completa como metódica, en lo posible, de los antiguos instrumentos que hubiesen servido para las investigaciones ó descubrimientos astronómicos ó de física del globo, con indicacion sucinta de los sabios que han dispuesto su construccion, y de los trabajos en que los han empleado. Indudablemente será posible hacerla más interesante todavía por medio de pequeños modelos de los instrumentos antiguos ó extranjeros que no poseemos.

La última coleccion se ha empezado á colocar en la galería del segundo piso; pero esta gran sala, que rara vez se visita, se ha destinado algunas veces para experimentos ó trabajos que requieren la presencia de un personal aislado, y han ocurrido averías y pérdidas muy sensibles, que no se reproducirán cuando estos instrumentos, por lo comun muy preciosos por los descubrimientos que recuerdan, se hallen instalados convenientemente en los estantes de un Museo, incesantemente vigilado, asegurándose su perfecta conservacion.

La formacion de estas colecciones podrá ocasionar pocos gastos: únicamente la copia de los retratos de los astrónomos exigirá un desembolso que el presupuesto del Observatorio, apenas suficiente para sus gastos ordinarios, no podrá soportar; pero creemos que la administracion de Bellas Artes, que tiene siempre fondos disponibles para el adelantamiento de los artistas y la ejecucion de cuadros destinados á decorar los edificios públicos, no dejará trascurrir mucho tiempo sin que trate de que se reproduzca por nuestro gran Observatorio nacional el retrato de los sabios que le han ilustrado.

Por lo demás, la galería está ya empezada, merced á la inagotable generosidad de Mr. Bishoffsheim por todo lo que se refiere á las ciencias: en pocos dias tendremos el retrato de Mr. Le Verrier, que será el último de la série, y poseemos el primero, que es el de Luis XIV, fundador del Observatorio. Este último retrato, hecho hace diez años á peticion del mariscal Vaillant, para el Observatorio de París, habia quedado olvidado en los archivos de Bellas Artes, donde se ha mandado buscar.

Tenemos esperanzas de que el generoso donante del retrato de Le Verrier hallará imitadores, si no en cuanto á retratos, al menos en objetos interesantes para la historia de la Astronomía y de las ciencias que á ella se refieren, pues estos objetos pierden en las colecciones privadas una gran parte del valor que les prestaria su reunion en una coleccion especial, metódicamente clasificada, y emprendida con todos los recursos que posee el Observatorio de París.

Aplicacion industrial del calor solar. Mr. Mouchot ha expuesto á la Academia de Ciencias de París el resultado de sus ensayos de aplicaciones industriales del calor solar, durante la Exposicion universal de 1878. Estos ensayos han tenido por objeto, unos, la coccion de los alimentos y la destilacion de los alcoholes; otros, el uso del calor solar como fuerza motriz.

Los pequeños aparatos de coccion no han cesado de funcionar durante los dias de sol. Espejos de ménos de $1/5$ de metro cuadrado, construidos con toda la regularidad apetecible, han bastado para asar $^1/_2$ kilógramo de carne de vaca en 22 minutos, para confeccionar en hora y media guisos que necesitan cuatro horas con un fuego de leña comun; para hacer hervir en media hora $^3/_4$ de litro de agua fria, lo que corresponde al empleo de $9^{cal},5$ por minuto y por metro cuadrado, resultado muy notable á la latitud de París.

Los alambiques solares, generalmente han dado excelentes resultados. Provistos de anteojos de menos de $^1/_2$ metro cuadrado, hacen hervir 3 litros de vino en media hora, y dan un alcohol fino y privado de todo mal sabor. Este aguardiente, destilado por segunda vez en el mismo aparato, adquiria todas las cualidades de un buen licor de mesa.

Su objeto principal, dice el autor, era construir para la Exposicion universal de 1878 el mayor espejo del mundo, y estudiar sus efectos con el sol de París, esperando ocasion de experimentarle con un cielo más propicio. Secundado perfectamente en dicha tarea por un jóven y hábil ingeniero, Mr. Abel Piffré, ha podido, á pesar de los accidentes inseparables de una construccion nueva de esta importancia, instalar definitivamente el 1.º de Setiembre un receptor solar, cuyo espejo tiene una abertura de cerca de 20 metros cuadrados. En el foco pone una caldera de hierro que pesa con sus accesorios 200 kilógramos, de $2^m,50$ de altura, y cuya capacidad es de 100 litros, á saber: 30 para el depósito de vapor, y 70 para el líquido que ha de evaporarse. Un mecanismo especial permite orientar inmediatamente el aparato en cada latitud para que pueda volverse de Oriente á Occidente, á fin de dirigirle constantemente hácia el sol. Basta un niño para esta última tarea, pues el anteojo está equilibrado por un contrapeso.

El 2 de Setiembre ha funcionado el receptor solar del Trocadero por la primera vez. En una hora ha hecho hervir 70 litros de agua, acabando por acusar el manómetro 6 atmósferas, á pesar de algunas fugas de vapor. El 12 del mismo, aunque el sol estaba algo cubierto, la caldera aumentaba más rápidamente en presion, y el vapor permitia alimentarla por medio de un inyector, sin debilitar notablemente la presion.

Por último, el 22 de Setiembre, haciendo un sol permanente, aunque levemente cubierto, ha podido subir la presion en la caldera hasta $6^{atm},2$, y se hubiera llegado á una presion más considerable si el sol no se hubiese totalmente cubierto. En el mismo dia se pudo hacer funcionar, á la presion constante de 3 atmósferas, una bomba Tangye, que elevaba de 1500 á 1800 litros de agua por hora á la altura de 2 metros.

El 29 de Setiembre, habiéndose el sol despejado á las $11^h,30^m$, se tuvieron 75 litros de agua hirviendo á medio dia, y la tension del vapor fué elevándose gradualmente de 1 á 7 atmósferas, límite del manómetro, en el intérvalo de dos horas, á pesar de la interposicion de algunos vapores pasageros. Volviendo á emprender el experimento del 22 de Setiembre, pudo dirigirse el vapor en un aparato Carré, lo que permitió obtener una gran masa de hielo.

Extincion de los incendios. Hallamos en el Boletin de la *Sociedad de emulacion de la industria nacional*, un informe sobre un procedimiento inventado por Mr. Quequet, antiguo farmacéutico, para la extincion rápida de los incendios en las chimeneas, y que puede ser útil darlo á conocer, en razon de los servicios que debe prestar, no solo á los bomberos encargados en las ciudades y los campos de extinguir los incendios, sino tambien á los jefes de talleres ó fábricas distantes de toda habitacion y de todo socorro.

Este procedimiento consiste en quemar unos 100 gramos de sulfuro de carbono en el hogar de la chimenea, vertiendo préviamente este sulfuro en uno ó dos platos, á fin de que la combustion se produzca en una superficie relativamente extensa.

Los incendios de chimeneas, tan frecuentes en París, y por lo comun tan peligrosos, se apagaban generalmente por los bomberos quemando azufre tambien en el hogar de la chimenea; pero era casi siempre necesario subir al tejado para tapar la abertura del tubo de la misma. Además, si la temperatura del hogar era poco elevada, el azufre se quemaba con dificultad, se fundia, se formaba azufre negro, y su combinacion con el oxígeno se verificaba tan lentamente, que quedaba por lo comun bastante oxígeno en el aire que contenia el tubo para que el hollin continuase ardiendo.

Mr. Quequet ha tenido la idea de emplear para apagar los incendios de las chimeneas un cuerpo que, al quemarse, da como el azufre ácido sulfuroso, pero en condiciones mucho mas ventajosas que las del azufre en polvo.

Efectivamente, el sulfuro de carbono, combinacion líquida del azufre y el carbono, se evapora é inflama con mucha facilidad, arde muy pronto, y da, absorbiendo el oxígeno del aire, un gas compuesto de dos tercios de ácido sulfuroso y un tercio de ácido carbónico, impropios tambien ambos para la combustion. Y al quemarse una pequeñísima cantidad, 100 gramos, se tiene inmediatamente un abundante desprendimiento de vapores que impide que se queme el hollin, sin que sea necesario subir al tejado, y casi sin gastos, pues 100 gramos de sulfuro de carbono puro, cuestan en París 8 $^1/_2$ céntimos.

En cuanto al peligro que podria haber en manejar ó hacer manejar el sulfuro de carbono, es nulo si se toman algunas precauciones muy sencillas, como lo hacen los bomberos de París. Dividen el líquido en cantidades de 100 gramos, en frascos bastante grandes para que resulte espacio vacío, teniendo en cuenta la gran expansion del sulfuro de carbono, que hierve á la temperatura de 28°. Los frascos se tapan ligeramente con tapones impregnados de cera vírgen, y se colocan en un local donde no haya nunca fuego, y que no puedan recibir el calor producido por cualquier hogar próximo.

En cuanto á los vapores que podrian escaparse por los resquicios del tubo de la chimenea, y causar un perjuicio ó una simple incomodidad, solo hay que decir una cosa, y es que estos vapores son los mismos que los producidos por la combustion del azufre precedentemente empleado, y su efecto es menos perjudicial que el del humo.

Empleando este procedimiento, los bomberos de París han apagado, quemando en la chimenea sulfuro de carbono, los incendios siguientes:

En Enero de 1878....................	32	fuegos de	51
En Febrero..............	81	de	103
En Marzo..........................	138	de	165

Y estas 251 extinciones han sido casi instantáneas, sin que haya habido que subir á los tejados ni desarreglar nada en las habitaciones.

Aerostacion militar. En este momento se trata en Inglaterra de realizar un sistema de aerostacion, fácil de aplicar en tiempo de guerra. En su número del 2 de Octubre, el *Standard* da cuenta en los siguientes términos de los experimentos ejecutados en el arsenal real de Woolwich.

«El capitan Templer, el aeronauta, acaba de emprender en el arsenal de Woolwich, bajo la elevada direccion del coronel de ingenieros Noble, inspector de las fortificaciones, y en presencia de una comision compuesta de cierto número de oficiales, una nueva série de experimentos, con objeto de emplear los globos en tiempo de guerra. Al cabo de uno ó dos ensayos, se ha hallado un método rápido para fabricar el gas hidrógeno en campaña, por medio de un aparato portátil que permite obtener en pocas horas un volúmen suficiente para una ascension. Se necesitan 10.000 piés cúbicos de gas para hinchar completamente el pequeño globo, llamado *Pionner*, que el capitan Templer emplea en el arsenal de Woolwich, y puede fácilmente obtenerse esta cantidad de gas en menos de un dia, sin emplear más que el alambre de hierro y vapor de agua.

»No obstante, como es preferible no llenar el globo con el gas que salga directamente del aparato, y en muchos casos un retraso de horas puede tener graves consecuencias, se trata ahora de hallar un medio para trasportar el gas en estado comprimido, hasta el momento en que deba utilizarse. Resulta de los experimentos, que la fuerza ascensional del gas empleado es de 90 libras por cada 1.000 piés cúbicos, es decir, cerca del doble de la del gas del alumbrado.»

La poblacion del globo. La última entrega de las *Comunicaciones geográficas* de Petermann, contiene nuevos datos acerca de la poblacion del globo, por los mismos autores que habian ya publicado un trabajo curioso sobre este asunto, del cual habian hablado los periódicos.

Segun estas nuevas investigaciones, la poblacion del globo debe ser actualmente de 1.439.145.300 habitantes. Sin embargo, esta cifra no se funda todavía en cálculos concluyentes, sobre todo en lo que se refiere á la China, el Africa, la Australia y la Polinesia.

La Europa tiene 312.398,480 habitantes, el Asia 831 millones, el Africa 205.210.500, la Australia y la Polinesia 4.413.000, la América 86.116.000.

Es un término medio de 500 habitantes por milla cuadrada de la superficie del globo

CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS.

(Continuacion.)

CAPITULO VIII.

Complemento de los anteriores. — Notas y adiciones á la doctrina matemática en ellos expuesta.

A. — Expresion de $\operatorname{sen} n\varphi$ *y de* $\cos n\varphi$ *en funcion de* $\operatorname{sen}\varphi$ *ó de* $\cos\varphi$.

El problema sobre que versa esta *Nota*, y del cual se hizo en el §. 17 de la MEMORIA precedente una aplicacion muy importante, se halla resuelto en diversos tratados de Trigonometría; pero en ninguno, tal vez, por procedimiento tan directo y general, y tan sencillo y elegante, como en los *Nuevos Anales de Matemáticas*, tomo XII, correspondiente al año de 1873, páginas 408 á 417. La nueva solucion, ideada por Mr. Mourgue, es la transcrita á renglon seguido, literalmente casi.

1. — PROBLEMA PRELIMINAR Y FUNDAMENTAL.

«Suponiendo que tres términos consecutivos de la serie $A_0, A_1, A_2 \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$ se hallen entre sí y con la constante k relacionados como esta ecuacion indica,

$$(1) \qquad A_n = k\,A_{n-1} - A_{n-2},$$

determinar el valor del término general, A_n, en funcion de la misma constante k y de los dos primeros términos de la serie propuesta, A_0 y A_1.»

(*a*)—Para resolver el problema así enunciado, comiéncese por aplicar la definicion de la serie, resumida en la ecuacion (1), á la formacion de sus primeros términos; y desde luégo se deducirá que

$$(2)\quad \begin{cases} A_2 = k\,A_1 - A_0 \\ A_3 = (k^2 - 1)\,A_1 - k\,A_0 \\ A_4 = (k^3 - 2\,k)\,A_1 - (k^2 - 1)\,A_0 \\ A_5 = (k^4 - 3\,k^2 + 1)\,A_1 - (k^3 - 2\,k)\,A_0 \\ A_6 = (k^5 - 4\,k^3 + 3\,k)\,A_1 - (k^4 - 3\,k^2 + 1)\,A_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Y del exámen de estas varias relaciones particulares entre las cantidades comparadas se concluye:

1.° Que todos los términos A_2, A_3, A_4, ..., son funciones *lineales* de los dos primeros, A_0 y A_1.

2.° Que el coeficiente de A_0 en una igualdad, ó relacion particular cualquiera, coincide, prescindiendo del signo, con el de A_1 en la relacion precedente.

Y 3.° Que un coeficiente cualquiera de A_1 ó de A_0 se forma, con auxilio de los dos coeficientes anteriores inmediatos y de la constante k, por la misma regla, aplicable á la deduccion de los términos consecutivos de la serie, que la ecuacion fundamental (1) indica.

La primera de estas tres conclusiones es sin ninguna duda general, y no necesita demostrarse. Y la generalidad de las otras dos se demuestra por un procedimiento muy sencillo, y admitido como irreprochable en multitud de casos análogos.

(b)—Supongamos para ello que en la composicion de los términos A_{n-1} y A_n se verifiquen las propiedades advertidas en los diversos términos del cuadro ó sistema de relaciones (2). Pues si, por brevedad, representamos por P_{n-1} y P_{n-2} los coeficientes de A_1 y de A_0 en el término general A_n, inmediatamente se podrá escribir lo que sigue:

$$(3)\quad \begin{cases} A_{n-1} = P_{n-2}\,A_1 - P_{n-3}\,A_0, \quad \text{y} \\ A_n \quad = P_{n-1}\,A_1 - P_{n-2}\,A_0 \end{cases}$$

Y como, por definicion,

$$A_{n+1} = k\,A_n - A_{n-1},$$

conclúyese de ambos antecedentes que

$$A_{n+1} = k\,(P_{n-1}\,A_1 - P_{n-2}\,A_0) - (P_{n-2}\,A_1 - P_{n-3}\,A_0); \text{ ó}$$

$$(4)\quad A_{n+1} = (k\,P_{n-1} - P_{n-2})\,A_1 - (k\,P_{n-2} - P_{n-3})\,A_0$$

Y, poniendo por n el índice $n+1$, que

$$A_{n+2} = (k\,P_n - P_{n-1})\,A_1 - (k\,P_{n-1} - P_{n-2})\,A_0$$

Si, pues, los términos A_3 y A_2 de la serie propuesta se deducen de los A_1 y A_0, y de la constante k, del modo referido, y explícitamente consignado en el cuadro (2), evidente es, en virtud de las dos últimas ecuaciones, que el A_4 se formará del mismo modo; y del mismo tambien que el A_4, todos los demas consecutivos.

(c)—Con los coeficientes de A_0 ó A_1, que en el grupo de igualdades (2) figuran, puede formarse este otro, digno tambien de especial consideracion:

$$(5)\quad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = k \\ P_2 = k^2 - 1 \\ P_3 = k^3 - 2\,k \\ P_4 = k^4 - 3\,k^2 + 1 \\ P_5 = k^5 - 4\,k^3 + 3\,k \\ P_6 = k^6 - 5\,k^4 + 6\,k^2 - 1 \\ P_7 = k^7 - 6\,k^5 + 10\,k^3 - 4\,k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Y en el cual es muy fácil advertir:

1.° Que, con relacion á la letra k, todos los términos de los segundos miembros, alternadamente positivos y negativos, son de órden ó grado *par* ó *impar*.

2.° Que un coeficiente cualquiera de k es igual, prescindiendo de los signos, al inmediatamente superior ó colocado encima, más el superior inmediato de éste, situado á su izquierda en el grupo ó serie de relaciones expuestas.

Y 3.° Que, prescindiendo tambien de los de la primera columna vertical, iguales todos á la unidad, un coeficiente cualquiera, perteneciente á las demas columnas, es igual á la suma de los coeficientes de la columna anterior de la izquierda, desde el primero, ó más alto, hasta el que precede dos lugares, en el sentido vertical, al coeficiente de que en particular se trata.

(d)—Para cerciorarnos de si son, ó no, generales estas tres propiedades, advertidas en la formacion de los coeficientes P_0, P_1, P_2, P_3, ..., supongamos, de acuerdo con lo observado en los primeros casos particulares, que

$$(6)\begin{cases} P_{n-2} = k^{n-2} - a_{n-2}\, k^{n-4} + b_{n-2}\, k^{n-6} - c_{n-2}\, k^{n-8} + \dots\dots, \\ P_{n-1} = k^{n-1} - a_{n-1}\, k^{n-3} + b_{n-1}\, k^{n-5} - c_{n-1}\, k^{n-7} + \dots\dots \end{cases}$$

Y como, segun lo demostrado anteriormente, (4),

$$P_n = k\, P_{n-1} - P_{n-2},$$

concluiremos sin dificultad que

$$(7)\quad P_n = k^n - (a_{n-1} + 1)\, k^{n-2} + (b_{n-1} + a_{n-2})\, k^{n-4} - $$
$$(c_{n-1} + b_{n-2})\, k^{n-6} + (d_{n-1} + c_{n-2})\, k^{n-8} - \dots\dots$$

Igualdad ésta que, rectamente interpretada, corrobora la certidumbre ó generalidad de las dos primeras proposiciones ó leyes, poco ántes enunciadas, y que se trataba de demostrar.

Pues la exactitud de la tercera se desprende como corolario sencillísimo de lo acabado de exponer.

En efecto: si, de conformidad con la notacion empleada en las ecuaciones (6), escribimos la siguiente,

$$(8) \quad P_n = k^n - a_n k^{n-2} + b_n k^{n-4} - c_n k^{n-6} + \ldots\ldots,$$

y comparamos los coeficientes abreviados de esta ecuacion con los más explícitos de la (7), resultará que

$$(9) \quad a_n = a_{n-1} + 1; \quad b_n = b_{n-1} + a_{n-2}; \quad c_n = c_{n-1} + b_{n-2}; \ldots\ldots$$

Y de estas igualdades, por simples cambios de índice, se deducirán los siguientes sistemas análogos: (10)

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + 1 \\ a_{n-1} = a_{n-2} + 1 \\ a_{n-2} = a_{n-3} + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{l} b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \\ b_{n-1} = b_{n-2} + a_{n-3} \\ b_{n-2} = b_{n-3} + a_{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{l} c_n = c_{n-1} + b_{n-2} \\ c_{n-1} = c_{n-2} + b_{n-3} \\ c_{n-2} = c_{n-3} + b_{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}; \ldots\ldots$$

Y, sumando ordenadamente cada uno de estos grupos de ecuaciones, dedúcese, en conclusion, y conforme la tercera ley pide, que

$$(11) \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \\ b_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + \ldots\ldots \\ c_n = b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En el primero de los grupos (10) la última ecuacion sería

$$a_2 = a_1 + 1; \quad ó \quad a_2 = 1:$$

puesto que, consultando el cuadro de coeficientes (5), inmediatamente se advierte que a_1 es igual á *cero*. Resulta, pues, que a_n es igual á la suma de $n - 1$ unidades: *dos ménos* que términos comprende la primera columna vertical de la izquierda, desde el inferior, $a_0 = 0$, hasta el superior, ó el a_n inclusive. Lo cual constituye un caso particular de la regla de composicion á que evidentemente se hallan sometidos los valores de b_n, c_n, ..., conforme en los primeros casos examinados se advirtió, y era indispensable demostrar en general.

(e)—En la composicion del término A_n, (3), figuran como coeficientes de A_1 y A_0 los designados por P_{n-1} y P_{n-2}, relacionados con la constante k, y las letras a, b, c, ..., del modo que las ecuaciones (6) indican. Pues, apoyándonos en lo acabado de exponer y demostrar, procuremos ahora expresar los valores de aquellas P en funcion exclusiva de la constante k y del índice n: con lo cual el término general de la serie, A_n, lo estará en funcion de estas mismas dos cantidades, k y n, y de los primeros términos, A_0 y A_1.

Por de pronto sábese ya que

$$(12) \qquad a_{n-1} = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = \frac{n-2}{1} = N_1$$

De donde se deduce que

$$(13) \qquad b_{n-1} = a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \ldots\ldots =$$

$$(n-4) + (n-5) + (n-6) + \ldots\ldots = \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} = N_2$$

Y del propio modo, que

$$(14) \qquad c_{n-1} = b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5} + \ldots\ldots =$$

$$^1/_2 \left\{ (n-5)(n-6) + (n-6)(n-7) + \ldots\ldots \right\} =$$

$$\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = N_3;$$

$$(15) \qquad d_{n-1} = c_{n-3} + c_{n-4} + c_{n-5} + \ldots\ldots =$$

$$^1/_6 \left\{ (n-6)(n-7)(n-8) + (n-7)(n-8)(n-9) + \ldots\ldots \right\} =$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = N_4;$$

y así todos los demas valores de los coeficientes de P_{n-1}:

cuya ley ó regla de composicion es bien patente y sencilla (*).

Sustituyendo estos valores de a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, ..., y los de a_{n-2}, b_{n-2}, c_{n-2}, ..., que de ellos se deducirían por el simple cambio de n por $n-1$, en las ecuaciones (6); y los de P_{n-1} y P_{n-2}, por efecto de esta sustitucion obtenidos, en la segunda de las (3), nos resultará, por último, la siguiente expresion de A_n, que es la buscada, y en la cual las letras M y N representan por brevedad lo que en el §. 17 de la Memoria se convino que representasen: (16)

(*) Aunque en el texto original de donde procede esta primera parte del *Apéndice* no se indique el modo de reducir los valores de c_{n-1}, d_{n-1}, ... á las formas N_3, N_4, ..., bien fácil es adivinarle y penetrarse de su generalidad, segun puede verse en un ejemplo.

Prescindiendo de los valores de a_{n-1} y b_{n-1}, cuya reduccion á las sencillísimas formas N_1 y N_2 debe ya considerarse como demostrada ó evidente, fijémonos en el de $2c_{n-1}$, igual á

$$(n-5)(n-6)+(n-6)(n-7)+(n-7)(n-8)+\ldots\ldots,$$

y que tambien puede escribirse de este otro modo:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
n(n-5)+ & n(n-6)+ & n(n-7)+ & n(n-8)+ & \ldots\ldots \\
-6(n-5)- & 6(n-6)- & 6(n-7)- & 6(n-8)- & \ldots\ldots \\
- & (n-6)- & (n-7)- & (n-8)- & \ldots\ldots \\
 & - & (n-7)- & (n-8)- & \ldots\ldots \\
 & & - & (n-8)- & \ldots\ldots \\
 & & & & \ldots\ldots
\end{array}\right\}.$$

De donde, por transformaciones sencillísimas, basadas en el conocimiento de la forma precedente, de b_{n-1} en este caso, se deduce que

$$2c_{n-1}=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2}-c_{n-1};\ \text{ó}\ c_{n-1}=N_3$$

Y, por los mismos pasos, se concluiría que $d_{n-1}=N_4$; y así las demas expresiones análogas consecutivas.

(16) $A_n =$

$$\{k^{n-1} - N_1 k^{n-3} + N_2 k^{n-5} - N_3 k^{n-7} + N_4 k^{n-9} - \ldots\ldots\} A_1 -$$

$$\{k^{n-2} - \frac{2M_2}{M_1} k^{n-4} + \frac{3M_3}{M_1} k^{n-6} - \frac{4M_4}{M_1} k^{n-8} + \ldots\ldots\} A_0$$

II.—Aplicaciones.

1.ª De las ecuaciones fundamentales de la *Trigonometría*,

$$\operatorname{sen}(\varphi + \psi) = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\varphi \operatorname{sen}\psi, \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}(\varphi - \psi) = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi - \cos\varphi \operatorname{sen}\psi$$

se deduce, por sustraccion una de otra, la que sigue:

$$\operatorname{sen}(\varphi + \psi) = 2\cos\varphi \operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}(\varphi - \psi).$$

Y, suponiendo que ψ sea igual á $(n-1)\varphi$, esta otra:

$$(17) \qquad \operatorname{sen} n\varphi = 2\cos\varphi \,.\, \operatorname{sen}(n-1)\varphi - \operatorname{sen}(n-2)\varphi$$

Comparando esta relacion de cantidades con la (1), se advierte que los términos de la serie á que aquella ecuacion se refiere, A_n, A_{n-1} y A_{n-2}, se hallan reemplazados ahora por $\operatorname{sen} n\varphi$, $\operatorname{sen}(n-1)\varphi$ y $\operatorname{sen}(n-2)\varphi$; los A_1 y A_0 por $\operatorname{sen}\varphi$ y *cero;* y la constante k por $2\cos\varphi$. Luego la ecuacion general (16) se transformará en este caso en la que sigue, aplicable á cualquier valor entero y positivo de n, y cuyo segundo miembro debe terminar allí donde el exponente de $2\cos\varphi$ sea igual á *cero* ó á la *unidad:* (18)

$$\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = (2\cos\varphi)^{n-1} - N_1 (2\cos\varphi)^{n-3} + N_2 (2\cos\varphi)^{n-5} - \ldots\ldots$$

Si, en vez de φ, ponemos en esta última ecuacion $(^1/_2\,\pi - \varphi)$, los *cosenos* del segundo miembro se transformarán en *senos* del mismo arco φ, sin alteracion de los coeficientes N, ni de los signos que les preceden; y el primer miembro en esta otra expresion:

$$\frac{\operatorname{sen}.\,n\,(^1/_2\,\pi - \varphi)}{\cos\varphi},$$ igual ó equivalente

á $+\dfrac{\operatorname{sen}\,n\varphi}{\cos\varphi}$, si n es *par*, de la forma $4\,p + 2$;

á $-\dfrac{\operatorname{sen}\,n\varphi}{\cos\varphi}$, si *par* tambien, pero de la forma $4\,p$,

á $+\dfrac{\cos\,n\varphi}{\cos\varphi}$, si *impar*, de la forma $4\,p + 1$; y

á $-\dfrac{\cos\,n\varphi}{\cos\varphi}$, si tambien impar, de la forma $4\,p - 1$.

Ó, más compendiosamente: el primer miembro de la ecuacion (18), transformada por el cambio de φ en $(^1/_2\,\pi - \varphi)$, será igual

á $(\sqrt{-1})^{n+2}\dfrac{\operatorname{sen}\,n\varphi}{\cos\varphi}$, cuando n sea *par;* y

á $(\sqrt{-1})^{n-1}\dfrac{\cos\,n\varphi}{\cos\varphi}$, cuando número *impar*.

2.ª De las otras dos ecuaciones fundamentales de la Trigonometría

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi, \quad \text{y}$$

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi$$

se deduce, por adicion de una con otra, primero, y sustitucion, despues, de la letra ψ por $(n - 1)\,\varphi$, la siguiente:

$$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\,.\,\cos(n - 1)\,\varphi - \cos(n - 2)\,\varphi:$$

comprendida en la expresion general (1); y en la cual los términos de la serie que simboliza, A_n, A_{n-1} y A_{n-2}, se hallan reemplazados por $\cos n\varphi$, $\cos(n-1)\varphi$ y $\cos(n-2)\varphi$; los A_1 y A_0 por $\cos\varphi$ y 1; y la letra k, como en la (17), por $2\cos\varphi$. Inmediatamente se deduce, pues, aplicando la ecuacion (16) al caso particular de que ahora se trata, y duplicando los dos miembros de la expresion resultante, que

$$2\cos n\varphi - (2\cos\varphi)^n =$$

$$-N_1(2\cos\varphi)^{n-2} + N_2(2\cos\varphi)^{n-4} - N_3(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots\ldots$$

$$-2(2\cos\varphi)^{n-2} + 4\frac{M_2}{M_1}(2\cos\varphi)^{n-4} - 6\frac{M_3}{M_1}(2\cos\varphi)^{n-6} + \ldots\ldots$$

Para simplificar esta ecuacion, por la reduccion á uno solo de los dos términos del segundo miembro, en los cuales $\cos\varphi$ figura con el mismo exponente, basta advertir que con un coeficiente de la forma N_p, igual á

$$\frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots p}$$

perteneciente al primer grupo ó línea de términos, hay que sumar otro, correspondiente á la línea inferior, representado por

$$2p\frac{M_p}{M_1} = \frac{2(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(p-1)}$$

Y el resultado de esta suma, $N_p + 2p\dfrac{M_p}{M_1}$, ó el coeficiente general del desarrollo de $2\cos n\varphi$, será precisamente igual á M_p, ó á

$$\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(p-1)p};$$

en el cual p designa el número de términos que preceden al, en cada caso particular, considerado; y tambien el de factores que para la composicion del numerador y del denominador de su coeficiente deben tomarse. Por lo tanto: (20)

$$2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n - M_1(2\cos\varphi)^{n-2} + M_2(2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots\ldots$$

Esta ecuacion es aplicable á todos los valores enteros y positivos de n: debiendo prolongarse su segundo miembro hasta que el exponente de $2\cos\varphi$ sea igual á cero, cuando n sea número *par;* y hasta que el mismo exponente se reduzca á la unidad, cuando *impar*. En este último caso todos los términos del segundo miembro podrán dividirse por $2\cos\varphi$; pero en el anterior supuesto habrá que admitir en el postrer término del cociente el exponente -1, aplicado al factor $2\cos\varphi$, si se quiere conservar tambien la forma entera en el resultado. Con esta advertencia, en vez de la ecuacion (20), podremos escribir la siguiente, asimilable á la (18): (21)

$$\frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi} = (2\cos\varphi)^{n-1} - M_1(2\cos\varphi)^{n-3} + M_2(2\cos\varphi)^{n-5} - \ldots\ldots$$

Poniendo en la última ecuacion por φ su complemento $(^1/_2\pi - \varphi)$, los cosenos del segundo miembro se transformarán en senos de φ; y el primer miembro se convertirá en

$$\frac{\cos.n\,(^1/_2\pi - \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}: \text{ equivalente}$$

á $\quad (\sqrt{-1})^{n-1}\dfrac{\operatorname{sen} n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, cuando n sea número *impar;* y

á $\quad (\sqrt{-1})^{n}\dfrac{\cos n\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$, cuando *par* el mismo número.

Esta advertencia, como la hecha á continuacion de la ecuacion (18), se aclararán particularizando la cuestion en un par de ejemplos.

Supongamos que $n=8$; y de las ecuaciones (18) y (21) se deducirá que

$$\frac{\operatorname{sen} 8\,\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=128\cos^7\varphi-192\cos^5\varphi+80\cos^3\varphi-24\cos\varphi;\quad \text{y}$$

$$\cos 8\,\varphi=128\cos^8\varphi-256\cos^6\varphi+160\cos^4\varphi-32\cos^2\varphi+1$$

Y, si en estas dos ecuaciones ponemos por φ su complemento $({}^1/_2\,\pi-\varphi)$, obtendremos las que siguen:

$$\frac{-\operatorname{sen} 8\,\varphi}{\cos\varphi}=128\operatorname{sen}^7\varphi-192\operatorname{sen}^5\varphi+80\operatorname{sen}^3\varphi-24\operatorname{sen}\varphi;\quad \text{y}$$

$$\cos 8\,\varphi=128\operatorname{sen}^8\varphi-256\operatorname{sen}^6\varphi+160\operatorname{sen}^4\varphi-32\operatorname{sen}^2\varphi+1$$

Del propio modo, cuando $n=9$, inmediatamente se concluirá que

$$\frac{\operatorname{sen} 9\,\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}=256\cos^8\varphi-448\cos^6\varphi+240\cos^4\varphi-40\cos^2\varphi+1;\ \text{y}$$

$$\cos 9\,\varphi=256\cos^9\varphi-576\cos^7\varphi+432\cos^5\varphi-120\cos^3\varphi+9\cos\varphi$$

Y, por el cambio de φ en $({}^1/_2\,\pi-\varphi)$, lo siguiente:

$$\frac{\cos 9\,\varphi}{\cos\varphi}=256\operatorname{sen}^8\varphi-448\operatorname{sen}^6\varphi+240\operatorname{sen}^4\varphi-40\operatorname{sen}^2\varphi+1;\ \text{y}$$

$$\operatorname{sen} 9\,\varphi=256\operatorname{sen}^9\varphi-576\operatorname{sen}^7\varphi+432\operatorname{sen}^5\varphi-120\operatorname{sen}^3\varphi+9\operatorname{sen}\varphi$$

3.ª La ecuacion general (16) es aplicable tambien á la expresion ó desarrollo, en funcion de $(x+\frac{1}{x})$, tanto del binomio $(x^n-\frac{1}{x^n})$, como del $(x^n+\frac{1}{x^n})$.

En efecto:

$$x^n - \frac{1}{x^n} = (x + \frac{1}{x})(x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}) - (x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}); \text{ y}$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = (x + \frac{1}{x})(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}) - (x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}})$$

Y estas ecuaciones pueden identificarse con la (1), de donde la (16) procede, con sólo suponer en la primera, que

$$A_n = x^n - \frac{1}{x^n}; \quad A_1 = x - \frac{1}{x}; \quad A_0 = 0; \quad \text{y} \quad k = x + \frac{1}{x};$$

y, en la segunda, que

$$A_n = x^n + \frac{1}{x^n}; \quad A_1 = x + \frac{1}{x}; \quad A_0 = 2; \quad \text{y} \quad k = x + \frac{1}{x}$$

El desarrollo de $\dfrac{x^n - \dfrac{1}{x^n}}{x - \dfrac{1}{x}}$ sólo diferirá del de $\dfrac{\text{sen } n\varphi}{\text{sen } \varphi}$, poco ántes obtenido, por el cambio de $2 \cos \varphi$ en $x + \dfrac{1}{x}$; y el de $\dfrac{x^n + \dfrac{1}{x^n}}{x + \dfrac{1}{x}}$ del de $\dfrac{\cos n\varphi}{\cos \varphi}$ por la misma leve transmutacion de símbolos. Y es cosa muy natural que así suceda.

Porque si suponemos que á la letra x se atribuye el valor particular $(\cos \varphi + \sqrt{-1} \text{ sen } \varphi)$, por transformaciones sencillisimas y muy conocidas, inferiremos sucesivamente que,

$$x = \cos \varphi + \sqrt{-1} \text{ sen } \varphi;$$

$$\frac{1}{x} = \cos \varphi - \sqrt{-1} \text{ sen } \varphi;$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \varphi; \quad \text{y} \quad x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{-1} \text{ sen } \varphi$$

Y, del propio modo, que

$$x^{n} = \cos n\,\varphi + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} n\,\varphi;$$

$$\frac{1}{x^{n}} = \cos n\,\varphi - \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} n\,\varphi;$$

$$x^{n} + \frac{1}{x^{n}} = 2\cos n\,\varphi; \quad \text{y} \quad x^{n} - \frac{1}{x^{n}} = 2\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} n\,\varphi$$

Luego

$$\frac{x^{n} - \frac{1}{x^{n}}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\operatorname{sen} n\,\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}; \quad \text{y} \quad \frac{x^{n} + \frac{1}{x^{n}}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{\cos n\,\varphi}{\cos \varphi}$$

Con lo cual la conexion y como identidad de unas expresiones con otras, en la apariencia tan distintas, queda perfectamente demostrada.

B.—Sobre el método de aproximacion de Newton.

En diferentes lugares de la MEMORIA que precede hemos empleado el método propuesto por Newton para completar la solucion de las ecuaciones numéricas, iniciada y proseguida con suma sencillez y hasta muy avanzado punto por el procedimiento de Gräffe.

En qué el mencionado método de aproximacion consiste y los principios teóricos en que se funda, hállanse tambien muy detenidamente explicados en los §§. 8, 14 y 23. Y en estos mismos párrafos, pero más especialmente todavía en los 29 y 31, hánse apuntado los casos principales en que tan ingenioso método de cálculo puede en algun concepto fallar, y las precauciones que para evitar cualquier error, imperfeccion ó ambigüedad en los resultados por su medio obtenidos, deben adoptarse entónces. Precisamente en esto último consiste una de las más notables adiciones que al método del matemático suizo Gräffe agregó el astrónomo y gran analista prusiano Encke.

Los defectos ó inconvenientes de la regla propuesta por Newton para el cálculo de las raices numéricas de una ecuacion, en su famoso *Método de las Fluxiones*, y como consecuencia ó aplicacion utilísima de los primeros principios de *Cálculo Diferencial*, por entónces naciente, fueron bien pronto advertidos por los matemáticos de aquella época. Lagrange, en el prólogo de su célebre *Tratado de la Resolucion de las Ecuaciones Numéricas*, publicado por vez primera en 1767, y reimpreso con multitud de notas y adiciones en 1798 y 1808, los recapitula en estas muy significativas palabras:

«Tal es el método de Newton, comunmente empleado para resolver las ecuaciones numéricas; pero que, bien considerado, sirve tan solo para resolver las ecuaciones *ya casi resuel-*

tas. Y ni áun entonces es *seguro* ó de oportunidad incuestionable; porque, despreciando al practicarle, en cada operacion, ó cálculo de las aproximaciones sucesivas, algunos términos cuyo valor se desconoce, es imposible apreciar el grado de aproximacion de la correccion obtenida. Y áun puede acontecer, cuando las ecuaciones posean raices *casi iguales*, que la serie de términos despreciados no sea en realidad despreciable, ó por muy poco convergente, ó por divergente al fin, por más que en un principio fuere convergente.»

En la *Nota V* del mismo *Tratado*, Lagrange procura demostrar lo fundado de tan acerba crítica; y por consideraciones teóricas muy sencillas y rigurosas, deduce en conclusion:

Que si α, β, γ ....., representan las m raices de una ecuacion del grado m, de cualquier modo distribuidas, ó sin consideracion alguna á sus magnitudes y signos, ni áun naturaleza; a el valor aproximado de la raiz α; h la correccion de este valor obtenida por la regla de Newton; $h = -\dfrac{f(a)}{f'(a)}$; y R esta funcion de las otras raices y del valor a:

$$R = \frac{1}{\beta - a} + \frac{1}{\gamma - a} + \frac{1}{\delta - a} \ldots\ldots;$$

el valor corregido $a + h$ expresará, sin incertidumbre de ningun género, el de α, con mayor aproximacion á la verdad que a, sólo cuando esta condicion se verifique:

$$2(\alpha - a)R + 1 > 0.$$

Pues bien: si β, γ, δ, ..., difieren considerablemente de α, ó si a es solo valor aproximado de esta raiz, R estará representada por una suma de fracciones muy pequeñas; y el producto $2(\alpha - a)R$, positivo ó negativo, valdrá casi siempre ménos que la unidad, y tanto ménos cuanto más ya se aproxime el valor a á su límite α: de manera que entónces la aplicacion del método de Newton será muy racional y permitida. Pero en el supuesto contrario, ó cuando unas de otras discrepen muy poco dos ó más raices, α, β, γ, ..., y a pueda mirarse como valor comun muy aproximado de las mismas, la condicion establecida se verificará ó no, segun los casos, y dependerá, más que de la magnitud absoluta de las diferencias $\alpha—a$, $\beta—a$, $\gamma—a$, ..., de la combinacion como fortuita de sus signos: y ninguna consecuencia utilizable podrá inferirse *à priori* de este análisis. Cuando evidentemente la desigualdad condicional deducida por Lagrange se verificará, discrepen poco ó mucho unas de otras las raices reales de la ecuacion propuesta, ó de las reales los términos de este nombre componentes de las imaginarias, es cuando las expresadas diferencias, $\alpha—a$, $\beta—a$, ..., sean positivas todas, ó todas negativas: ó cuando a sea mayor ó menor que la raiz real más grande ó más pequeña de cuantas la ecuacion contiene, á condicion de hallarse comprendidas tambien entre las dos raices reales, máxima y mínima, las porciones ó términos reales de las raices imaginarias.—En este caso, de ninguna ó muy menguada utilidad práctica, el método de Newton es aplicable sin vacilacion ni ambigüedad de ningun género: en los demas redúcese aquel método á un simple procedimiento de tanteo, útil muchas veces, ineficaz y hasta perjudicial otras muchas, é incierto y sin atractivo ó encanto siempre.

No es otra la consecuencia final que del análisis de Lagrange se desprende: desconsoladora, sí; pero no de todo punto irrefutable ó irremediable. Porque los matemáticos modernos, aunque amamantados en las obras de Lagrange, y admiradores entusiastas de su preclaro ingenio, no se han conformado con la idea de abandonar el método de Newton por el simple motivo de su ambigüedad, ineficacia ó inexactitud, en algunos casos excepcionales: precisamente en aquellos en que todos los métodos ponen á prueba la paciencia y perspicacia del calculador. Ni era posible que se conformasen de buena voluntad, cuando no habia otro mejor con que sustituirle, ni razon para despreciarle en multitud de otros casos, ateniéndose á él, resolubles con suma facilidad y prontitud.

Fourier, particularmente, en su *Análisis de las Ecuaciones Numéricas,*—libro no ménos célebre que el de Lagrange, publicado, despues de fallecido el autor, por Navier, en 1831,—

se propuso perfeccionarle ó completarle, formulando en términos bien explícitos sus caracteres de validez, en general, ó de ineficacia, por excepcion; y la manera de emplearle con acierto y buen éxito en todos los casos. Y el ejemplo de Fourier puede decirse que ha sido imitado como á porfía por todos sus discípulos: los innumerables y sutilísimos matemáticos de la moderna escuela francesa.

Aunque baste lo dicho en el cuerpo de la MEMORIA para que sepa el lector sobre este punto á qué atenerse, y en el concepto práctico no consideremos factible agregar á lo discurrido y explicado por Encke una palabra más, de verdadera sustancia y sabroso jugo, no obstante, por la precision de las ideas y claridad de la frase, merece incuestionable aprecio el breve trabajo sobre el mismo asunto, pocos años há publicado por el Sr. Darboux, profesor de la *Facultad de Ciencias* de Burdeos. Su método de exposicion de la regla newtoniana, es, en el fondo, el mismo de Fourier; pero tan perfeccionado y reducido á tan sucintos términos que, una vez leido, es casi imposible olvidarle; y más imposible todavía que su primera lectura no sea del agrado de quien abrigue algun sentimiento estético de la belleza en Matemáticas. Desgarbadamente traducida de los *Anales de Matemáticas* (2.ª serie, tomo VIII), y comentada de paso, la produccion de Darboux dice como sigue.

«Designemos por a y b $(a < b)$ dos números que comprendan *una sola raiz simple* de la ecuacion propuesta

$$f(x) = 0;$$

y admitamos ademas que esta otra ecuacion

$$f''(x) = 0,$$

no posea raiz alguna entre los mismos números, a y b, contenida: ó que la derivada segunda de $f(x)$ no varíe de signo cuando x pase del valor a al b. Respecto á la primera derivada, $f'(x)$, nada supondremos en particular: limitándonos á recordar que, por no contener $f''(x)$ raiz alguna, entre a y b comprendida, $f'(x)$ solo puede contener *una* á lo sumo. (Teorema de Rolle).

Sustituyendo en la ecuacion propuesta, por x, los números $a+h$ y $b-k$, iguales ambos á la raiz que deseamos determinar, obtendremos estos resultados:

$$0=f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\theta h); \text{ y}$$

$$0=f(b-k)=f(b)-kf'(b)+\frac{k^2}{2}f''(b-\theta_1 k):$$

en los cuales, como es sabido, θ y θ_1 designan dos números inferiores á la unidad.

Y de estas dos últimas ecuaciones, suponiendo que

$$\alpha=-\frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ y } \alpha_1=-\frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)};$$

$$\beta=+\frac{f(b)}{f'(b)}, \text{ y } \beta_1=+\frac{k_2}{2}\cdot\frac{f''(b-\theta_1 k)}{f'(b)},$$

se deduce inmediatamente que:

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h^2}{2}\cdot\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}=\alpha+\alpha_1; \text{ y}$$

$$k=+\frac{f(b)}{f'(b)}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{f''(b-\theta_1 k)}{f'(b)}=\beta+\beta_1$$

Pero si a y b representan dos valores muy aproximados de la raiz única entre ambos comprendida, por defecto uno, y otro por exceso, las correcciones, h y k, de estos valores serán muy pequeñas, y más todavía, y como insignificantes ó despreciables, lo serán tambien, *en general*, los términos complementarios, representados por α_1 y β_1. Por lo tanto, la correccion, positiva ó negativa, de un valor cualquiera aproximado, a, de la raiz de una ecuacion, se podrá determinar con auxilio de la siguiente fórmula, propuesta por Newton:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Pero esto último, cierto y conveniente *en general*, puede no serlo alguna vez, por excepcion; y lo que ahora debemos proponernos averiguar es cuándo lo será y cuándo no: ó qué valor aproximado de x, si el a ó el b, debemos sustituir en la expresion $-\frac{f(x)}{f'(x)}$, para que el resultado, positivo ó negativo, represente siempre, y con *plena seguridad* de acierto, la correccion del valor sustituido ó ensayado.

De los valores de x: a, $a+\alpha$ y $a+\alpha+\alpha_1$, el primero representa el valor, aproximado por defecto, de la raiz buscada; y el último precisamente el exacto de esta misma raiz. Luego el segundo representará *con seguridad* un valor más aproximado á la verdad que a; y, por lo tanto, α deberá considerarse entónces como *verdadera correccion*, si $a+\alpha$ está realmente comprendido entre los dos valores extremos: ó si $a < a+\alpha < a+\alpha+\alpha_1$. De donde se deduce que α y α_1 deben poseer el mismo signo: lo cual implica la igualdad de signos de $f(a)$ y $f''(a+\theta h)$; ó, por no variar de signo $f''(x)$, entre los límites a y b, la igualdad de $f(a)$ y $f''(a)$.

Y del propio modo se concluiría, comparando los tres números b, $b-\beta$ y $b-\beta-\beta_1$, que, si el segundo ha de hallarse comprendido entre los dos extremos, y ser, por lo tanto, β la verdadera correccion del valor b, aproximado por exceso, de la raiz que se busca, los signos de β y β_1, ó de $f(b)$ y $f''(b)$, deben necesariamente coincidir.

Pero las fracciones $\frac{f(a)}{f''(a)}$ y $\frac{f(b)}{f''(b)}$ son de signos contrarios: luego una sola de las correcciones, resultantes de la sustitucion sucesiva de a y b en la expresion general $-\frac{f(x)}{f'(x)}$, será *con plena seguridad* admisible: la que se deduzca de la aplicacion del teorema siguiente:

Si entre los números a *y* b, *que comprenden una sola raiz simple de la ecuacion* f(x) = 0, *la derivada segunda de esta ecuacion no cambia de signo nunca, el número que habrá de emplearse en el cálculo de la correccion, por la regla de Newton, y al cual esta correccion debe aplicarse ó referirse, será el que, sustituido en las expresiones* f(x) *y* f''(x), *produzca resultados del mismo signo.*

Completemos todo lo dicho con algunas advertencias y aclaraciones muy importantes.

1.ª La coincidencia de signos de $f(a)$ y $f''(a)$ es condicion *suficiente* para que α merezca considerarse como verdadera correccion de a; pero no absolutamente *necesaria*. Porque, si $a+\alpha > a+\alpha+\alpha_1$, aquella condicion no se verificará; y, sin embargo, podría suceder que $a+\alpha$ difiriese, por *exceso*, de la raiz exacta, $a+\alpha+\alpha_1$, menos que a, por *defecto;* y áun menos que el otro número b, por exceso tambien. En este caso, α sería una verdadera correccion; pero ambígua ó incierta *à priori*, y, por este solo motivo, inaceptable.

2.ª Supongamos que a represente el número con respecto al cual la correccion es calculable, por la regla de Newton, con plena seguridad de acierto. Si a es menor que la raiz buscada, $a_1 = a+\alpha$ lo será tambien necesariamente; y si $f(a)$ y $f''(a)$ tienen el mismo signo, el mismo conservarán $f(a_1)$ y $f''(a_1)$. Luego, sin otro exámen ni más vacilacion que la preliminar, la correccion de a_1 será calculable con toda seguridad por el mismo procedimiento que la de a; la de a_2, como las de a_1 y a; y así todas las demas consecutivas que fuere menester ó conviniere deducir.—Lo propio que del límite inferior a puede decirse á propósito del superior b.

3.ª Cuando la correccion se calcule con el número determinado por el teorema precedente, es imposible que la regla de Newton nos dé un resultado absurdo. Porque el absurdo en este caso sólo puede proceder de ser nulo el denominador de la expresion $-\frac{f(x)}{f'(x)}$; y si $f'(a)$ fuese igual á *cero*, de la ecuacion, necesaria entónces,

$$f(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h) = 0,$$

concluiríamos que $f(a)$ y $f''(a)$ no poseen el mismo signo: ó que no es a el número al cual la correccion buscada debe referirse.

4.ª Los diversos valores numéricos

$$a, a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n, a_{n+1} \ldots\ldots,$$

inferiores todos á la raiz buscada, convergen sin embargo todos y se aproximan indefinidamente hacia esta misma raiz.

En efecto: por la regla citada,

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Y como la diferencia $a_{n+1} - a_n$ disminuye indefinidamente, porque los números $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots$ son cada vez mayores, sin exceder ninguno del valor de la raiz, resulta, por de pronto, que la fraccion $-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ converge tambien indefinidamente hacia *cero*. Pero siendo $f''(x)$ constantemente *positiva* ó *negativa* entre los límites a y b, $f'(x)$ será *constantemente* tambien *creciente* ó *decreciente* entre los mismos límites; y, por lo tanto, $f'(a_n)$ no podrá tocar en el límite del crecimiento, ó resultar *infinita* nunca, como de suyo es casi evidente. Luego, no sólo la fraccion, sino su numerador $f(a_n)$ propenderá indefinidamente hacia *cero*, como debe suceder si a_n converge hacia la raiz buscada.

Y 5.ª Cuando para valor de la correccion α se adopta el que del uso de esta expresion, nada más que aproximada á la verdad, resulta:

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

el límite, ε, del error que, procediendo así se comete, puede, muy aproximadamente tambien, representarse de este modo:

$$\varepsilon = -\frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{f''(a)}{f'(a)};$$

ú obtenerse poniendo por α_1 el nuevo símbolo, expresion del límite buscado, ε; α por h; y $f''(a)$ por $f''(a + \theta h)$. Ó, sustituyendo por α la expresion $-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$, y prescindiendo del signo final resultante, que dependerá del valor primitivo, a ó b, de donde las aproximaciones sucesivas proceden, del siguiente:

$$\varepsilon = \frac{\{f(a)\}^2 \times f''(a)}{2\{f'(a)\}^3}.$$

Al número ε, calculado por esta fórmula, se sustituirá en la práctica la potencia de $^1/_{10}$ que le sea inmediatamente superior; y así se averiguará cuál debe ser el órden de la última cifra decimal que en el cálculo de la aproximacion subsiguiente puede obtenerse por la division de $-f(a)$ por $f'(a)$. Para mayor seguridad en las operaciones sucesivas convendrá que esta última cifra decimal lo sea siempre aproximada por *defecto*, en absoluto, ó prescindiendo del signo de la correccion; pues entónces los nuevos valores de la raiz buscada, a_1 y b_1, resultarán aproximados, por defecto el primero y el segundo por exceso, lo mismo que los a y b primitivos.»

Nada más sencillo y elegante en teoría que el procedimiento de Newton, así modificado y completado por Darboux

En la práctica, sin embargo, sobre ser bastante más complicado y enojoso que el primitivo, no siempre podrá plantearse y desenvolverse sin grave dificultad. Para persuadirnos de ello fijémonos en uno solo de sus inconvenientes, que, por cierto, tanto participa del carácter teórico como del práctico.

Cuando, por ejemplo, se nos dé una ecuacion, de grado igual ó superior al 5.°, y hayamos logrado *separar* sus raices reales, y determinar dos números ó valores, uno de otro muy poco discrepantes, y entre los cuales una sola de aquellas raices se encuentre comprendida (operaciones preliminares ambas muy penosas, inevitables, y extrañas en cierto modo al problema que principalmente se trata de resolver), ¿cómo nos cercioraremos de que la *derivada segunda* de la ecuacion propuesta no posee ninguna?—Ni Darboux, ni los demás matemáticos que han procurado perfeccionar la regla de Newton, han formulado procedimiento alguno, sencillo y expedito, para eludir esta tan manifiesta dificultad, que desde luego cierra el paso al calculador; y, sin recurso eficaz para eludirla ó desvanecerla, la ingeniosa modificacion de la regla newtoniana casi no tiene objeto, ó es ilusoria en la práctica.

¿Apelaremos para salir de dudas al teorema de Sturm, aplicado á la separacion de las raices de $f''(x)$?—Excelente procedimiento; pero tan largo y penoso, para usado como por incidencia, que, miéntras en casos un poco complicados se practica, posible es que un calculador experto, prescindiendo del método perfeccionado, y ateniéndose al primitivo de Newton, logre resolver por completo el problema principal.

Pero en lo posible cabe tambien que al pensar y discurrir de este modo nos equivoquemos grandemente; y por lo mismo, y para que nada falte á la ingeniosa teoría de Darboux, transcribimos á continuacion el ejemplo con que procuró ilustrarla y completarla, muy oportunamente, otro de los redactores de los *Nuevos Anales de Matemáticas*, J. Bourget.—Como el mismo ejemplo, demasiado sencillo, se resolvió tambien por el procedimiento de Gräffe, al final del Capítulo I de esta Memoria, así podrá el lector desapasionado comparar método con método, y optar por el que más eficaz y preferible en todos conceptos le parezca.

«Consideremos, dice Bourget, la ecuacion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0,$$

de la cual se *derivan* estas otras:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 7; \quad \text{y}$$

$$\tfrac{1}{2} f''(x) = 3x - 3$$

Por la sustitucion en estas funciones de la serie de números 0, 1, 2, 3 ....., en lugar de x, se obtienen los resultados adjuntos:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$\tfrac{1}{2}f''(x)$
0	+ 4	− 7	− 3
1	− 5	−10	+ 0
2	−14	− 7	+ 3
3	−17	+ 2	+ 6
4	− 8	+17	+ 9
5	+19	+38	+12
0	+ 4	− 7	− 3
−1	+ 7	+ 2	− 6
−2	− 2	+17	− 9

De cuyo exámen se deduce que la ecuacion propuesta posee tres raices *reales* y comprendidas: entre 0 y 1, la x_1; entre 4 y 5, la x_2; y entre − 1 y − 2, la x_3.

Tratemos sucesivamente de la determinacion de estas tres raices.

1.ª—La x_1 se halla comprendida entre 0 y 1; pero, como la funcion $f''(x)$ es nula cuando por x se pone el segundo de estos números, en el signo de esta funcion queda alguna incertidumbre por de pronto. Para disiparla hay que sustituir de nuevo en la ecuacion primitiva, $f(x)=0$, por x otro valor numérico, 0.5 por ejemplo, comprendido entre 0 y 1; y averiguar á cuál de los dos nuevos intervalos resultantes corresponde la raiz buscada.

El cálculo de esta sustitucion, frecuentísima en la práctica del método de Newton, ó la intercalacion entre cada dos líneas del cuadro precedente de otra línea más, puede verificarse con bastante sencillez por el procedimiento que sigue.

Sábese, por la fórmula de Taylor, que

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots\ldots,$$

Pues, si con las iniciales f, f', f'', ..., representamos la funcion primitiva, $f(a)$, y sus derivadas sucesivas, las otras funciones, $f(a+h)$, $f'(a+h)$, $f''(a+h)$, ..., podrán componerse de la manera que á continuacion muy compendiosa y claramente se expresa:

f				
f'	$h\,f'$			
f''	$h\,f''$	$^1/_2\,h^2\,f''$		
f'''	$h\,f'''$	$^1/_2\,h^2\,f'''$	$^1/_6\,h^3\,f'''$	
f^{IV}	$h\,f^{\text{IV}}$	$^1/_2\,h^2\,f^{\text{IV}}$	$^1/_6\,h^3\,f^{\text{IV}}$	$^1/_{24}\,h^4\,f^{\text{IV}}$
....	......	....	....	....
....	......	....	....	....

f				
$h f'$	f'			
$\frac{1}{2} h^2 f''$	$h f''$	f''		
$\frac{1}{6} h^3 f'''$	$\frac{1}{2} h^2 f'''$	$h f'''$	f'''	
$\frac{1}{24} h^4 f^{IV}$	$\frac{1}{6} h^3 f^{IV}$	$\frac{1}{2} h^2 f^{IV}$	$h f^{IV}$	f^{IV}
....	....	....	....	....
....	....	....	....	....
$f(a+h)$	$f'(a+h)$	$f''(a+h)$	$f'''(a+h)$	$f^{IV}(a+h)$

Apliquemos este procedimiento al cálculo de $f(0.5)$, $f'(0.5)$, $f''(0.5)$ y $f'''(0.5)$, suponiendo que a es igual á *cero*, y h igual á la fraccion decimal 0.5.—A las expresiones simbólicas que preceden, reemplazarán en este caso particular las que siguen:

$+4$			
-7	-3.5		
-6	-3.0	-0.75	
$+6$	$+3.0$	$+0.75$	$+0.125$

$+4.000$			
-3.500	-7.00		
-0.750	-3.00	-6.0	
$+0.125$	$+0.75$	$+3.0$	$+6$
-0.125	-9.25	-3.0	$+6$
$f(0.5)$	$f'(0.5)$	$f''(0.5)$	$f'''(0.5)$

De lo hecho hasta aquí se infiere que la raiz x, se halla comprendida entre 0 y 0.5; y como poniendo por x el segundo de estos valores, b, las funciones f y f'' resultan del mismo signo, al segundo valor debe referirse el cálculo de la correccion, por la regla de Newton.

En el caso actual

$$\varepsilon = \frac{(0.125)^2 \times 3}{2 \times (9.25)^3},$$

es inferior á 0.0001; y, por lo tanto, la correccion α podrá ampliarse por *defecto*, en absoluto, hasta la cuarta cifra decimal, y obtenerse así el siguiente resultado:

$$\alpha = -\frac{0.125}{9.25} = -0.0135$$

Con lo cual el valor de b_1, aproximado tambien hasta la cuarta decimal, mas por *exceso*, queda determinado como sigue:

$$b_1 = 0.5 - 0.0135 = 0.4865$$

Como ántes calculamos las funciones $f(0.5)$, $f'(0.5)$ ....., calculemos ahora las $f(b_1)$, $f'(b_1)$, $f''(b_1)$ ..... ; y, para esto, en la primera parte del cuadro simbólico ó pauta general que precede, pongamos por a ó b el número 0.5; y por h la correccion obtenida -0.0135. Procediendo así, se deducen por de pronto estos resultados:

-0.125			
-9.250	$+0.124875$		
-3.000	$+0.040500$	$-0^3.273375$	
$+6.000$	-0.081000	$+0^3.546750$	$-0^3.2460375$

De los cuales se desprenden los valores de $f(b_1)$, $f'(b_1)$ y $f''(b_1)$, conforme se indica á continuacion:

-0.125		
$+0.124875$	-9.250	
-0.000273375	$+0.040500$	-3.000
-0.000002460375	$+0.00054675$	-0.081
-0.000400835375	-9.20895325	-3.081
$f(b_1)$	$f'(b_1)$	$f''(b_1)$

El segundo valor aproximado de ε se determinará con los nuevos datos por esta fórmula:

$$\varepsilon' = \frac{(0.000401)^2 \times 3.081}{2 \times (9.21)^3}$$

Y como ε' resultará inferior á $0^8.1$, el segundo valor de α podrá aproximarse, por *defecto*, hasta la novena cifra decimal inclusive, de este modo:

$$\alpha' = -\frac{0.000400835375}{9.20895325} = -0^4.43526$$

De donde se infiere que b_2, aproximado por *exceso* hasta la misma novena cifra decimal, ó el de x_1, si con lo que precede se da por terminada la operacion, valdrán lo que á continuacion se expresa:

$$b_2 = 0.4865 - 0.000043526; \quad \text{ó}$$

$$x_1 = 0.486456474$$

2.ª—La raiz x_2 de la ecuacion propuesta se halla comprendida entre los números 4 y 5; y como $f(5)$ y $f''(5)$ son *positivas* ambas, y entre 4 y 5 la *derivada* $f''(5)$ no cambia de signo, la regla de Newton es aplicable desde luégo, ó sin ambigüedad ni temor de ninguna especie.—Limitémonos, pues, á presentar el cuadro de las operaciones necesarias para determinar aquella raiz.

PRIMERA CORRECCION.

$$\varepsilon = \frac{(19)^2 \times 24}{2 \times (38)^3} = \frac{6}{4 \times 19} < 0.1;$$

$$\alpha = -\frac{19}{38} = -0.5; \quad \text{y}$$

$$b_1 = 5.0 - 0.5 = 4.5$$

SEGUNDA CORRECCION.

$+19$ $+38$ $+24$ $+6$	-19 -12 -3	$+3$ $+0.75$	-0.125

$+19$ -19 $+3$ -0.125	$+38$ -12 $+0.75$	$+24$ -3	$+6$
$+2.875$ $f(4.5)$	$+26.75$ $f'(4.5)$	$+21$ $f''(4.5)$	$+6$ $f'''(4.5)$

$$\varepsilon' = \frac{(2.875)^2 \times 21}{2 \times (26.75)^3} < 0.01;$$

$$\alpha' = -\frac{2.875}{26.75} = -0.10 \text{ (por } defecto);$$

$$b_2 = 4.50 - 0.10 = 4.40 \text{ (por } exceso).$$

TERCERA CORRECCION.

2.875 26.750 21.000 6.000	—2.675 —2.100 —0.600	+0.105 +0.030	—0.001

+2.875 —2.675 +0.105 —0.001	+26.75 — 2.10 + 0.03	+21.0 — 0.6	+6
+0.304	+24.68	+20.4	+6
$f(4.40)$	$f'(4.40)$	$f''(4.40)$	$f'''(4.40)$

$$\varepsilon'' = \frac{(0.304)^2 \times 20.4}{(24.68)^3} < 0.0001;$$

$$\alpha'' = -\frac{0.304}{24.68} = -0.0123 \text{ (por } defecto); \quad \text{y}$$

$$b_3 = 4.40 - 0.0123 = 4.3877 \text{ (por } exceso.)$$

Y con este valor de b_3 coincidirá el de x_2 si limitamos la aproximacion á la cuarta cifra decimal.

3.ª—La raiz x_3 se halla comprendida entre los números —2 y —1. Y, por no variar $f''(x)$ de signo entre estos límites, y tenerle igual $f(-2)$ y $f''(-2)$, la correccion de Newton, calculable desde luégo, deberá referirse al primero de aquellos números, y calcularse segun á continuacion se indica.

PRIMERA CORRECCION.

$$\varepsilon = \frac{2^2 \times 18}{2 \times (17)^3} < 0.01;$$

$$\alpha = \frac{2}{17} = 0.11 \text{ (por } \textit{defecto}\text{);} \quad \text{y}$$

$$a_1 = -2 + 0.11 = -1.89 \text{ (por } \textit{defecto} \text{ tambien).}$$

SEGUNDA CORRECCION.

— 2 +17 —18 + 6	+1.87 —1.98 +0.66	—0.1089 +0.0363	+0.001331

—2 +1.87 —0.1089 +0.001331	+17 — 1.98 + 0.0363	—18 + 0.66	+ 6
—0.237569	+15.0563	—17.34	+ 6
$f(-1.89)$	$f'(-1.89)$	$f''(-1.89)$	$f'''(-1.89)$

$$\varepsilon' = \frac{(0.237569)^2 \times 17.34}{2 \times (15.0563)^3} < 0.001;$$

$$\alpha' = \frac{0.237569}{15.0563} = 0.015 \text{ (por } \textit{defecto}\text{);} \quad \text{y}$$

$$a_2 = -1.89 + 0.015 = -1.875 \text{ (por } \textit{defecto} \text{ tambien).}$$

Y el valor de a_2 se adoptaría como expresion del de x_3 si la aproximacion de esta raiz se limitase á la tercera cifra decimal, ó de las milésimas.»

Hasta en un ejemplo tan sencillo como el propuesto por Bourget, ¡qué variedad de operaciones y cuán inminente y contínuo riesgo de equivocarse al verificarlas! ¡Pues qué sería si á los propuestos y resueltos en el Capítulo VII de esta Memoria se intentase aplicar el mismo procedimiento de análisis! Ni siquiera cabe imaginarlo.—En casos tales, á la regla de Newton debe siempre preceder la aplicacion del método de Gräffe y Encke; pero, como decia Lagrange, aquella famosa regla solo nos servirá entónces para resolver lo que ya está *casi resuelto:* para obtener un último grado de aproximacion, muy raras veces necesario en la práctica, y satisfacer las aspiraciones de la más exigente teoría. Limitada á este objeto, la expresada regla, en su forma primitiva, ó perfeccionada por Darboux, ó por cualquiera otro matemático, siempre será tenida en grande estima.

(Se continuará.)

CIENCIAS NATURALES.

Catálogo de los moluscos terrestres de las islas Baleares, por J. G. Hidalgo.

En 1814, en una obra muy mediana publicada por Ramis (*Specimen animalium in insula Minorica,* etc.), se encuentran indicadas por primera vez seis especies de conchas terrestres como procedentes de las islas Baleares. Este número se ha ido aumentando poco á poco hasta el de 70 especies, segun la lista dada en 1876 por el Sr. Barceló (Profesor del Instituto de Palma), bajo el epígrafe de *Moluscos terrestres, etc., de las Baleares*. Esta lista es un resumen bastante exacto de la fauna malacológica terrestre de dichas islas, pero he creido, sin embargo, que seria de alguna utilidad la publicacion del presente catálogo, porque rectifica, bajo ciertos puntos de vista, las listas antes dadas, y comprende al mismo tiempo mayor número de datos. No sólo, en efecto, están incluidos en él los documentos existentes sobre los moluscos terrestres de las Baleares en unas 320 obras, sino tambien el resultado de las exploraciones verificadas en dicho archipiélago por mí mismo ó por otros naturalistas españoles (1).

(1) Despues de mis propias exploraciones en Alcudia de Mallorca y en Mahon en el año 1860, me han sido comunicadas muchas especies de moluscos terrestres de las Baleares por mis amigos los Sres. D. Francisco Cardona y D. Juan Pons, de Mahon, D. Patricio María Paz, cuya pérdida es tan lamentable para la ciencia, D. Francisco Prieto Caules, Profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, D. Francisco Martorell, D. Enrique Grau y D. Hilario Pascual, de Barcelona,

He conseguido reunir de dicho modo, en este pequeño trabajo, todo lo que se conoce hasta el presente sobre los moluscos terrestres de las Baleares, proponiéndome hacer su exposicion en tres párrafos; el 1.° comprenderá los datos conocidos ántes de esta Memoria; el 2.° el catálogo de las especies y su estudio crítico; y el 3.° la comparacion de la fauna de dichas islas con la de los países más próximos.

I.—*Especies citadas por los autores como procedentes de las Baleares.*

Las obras á continuacion mencionadas son únicamente aquellas en que se han indicado de las Baleares, por vez primera, las especies cuyos nombres científicos se enumeran en cada una de ellas. Estos nombres son en su mayor parte hoy dia los mismos; otros han sido relegados á la sinonimia ó se han aplicado á especies que no se encuentran en dichas islas.

1814.—*Ramis*, Spec. anim. in insula Minorica, etc.
Helix cornea, lapicida, lucorum, nemoralis, pomatia y grisea.

1828.—*Gray*, Ind. testac. suppl.
Cyclostoma fulvum (Tudora ferruginea, segun Pfeiffer).

1830.—*Deshayes*, Encycl. method.
Helix candidissima, cariosa, Niciensis, Pisana, vermiculata.

1833.—*Michaud*, Cat. testac. Alger.
Helix cariosula.

D. Francisco Barceló, Profesor del Instituto de Palma, y D. Francisco Sampol, de Mallorca. Los Sres. Paz y Prieto han explorado todas las Baleares, el Sr. Cardona toda la isla de Menorca y muchos puntos de Mallorca, el Sr. Pons los alrededores de Mahon, y los demás señores diversos puntos de Mallorca. Reciban aquí mis plácemes bien sinceros por su amabilidad y amor á la ciencia, como tambien el Dr. W. Kobelt, que me ha enviado en comunicacion ó para mi coleccion, algunas de las especies de moluscos publicadas de las Baleares por los Sres. Dohrn y Heynemann.

1835.—*Boissy*, Mag. de Zool., vol. II.
Helix lanuginosa.

1838.—*Potiez et Michaud*, Galer. des moll., vol. I.
Clausilia papillaris (Clausilia bidens, var. segun Pfeiffer); Achatina follicula (Ferussacia folliculus, segun Pfeiffer), Helix Gemonensis, lactea y Rozeti (Helix amanda, segun Pfeiffer).

1839.—*Terver*, Cat. Moll. Nord Afrique.
Helix Boissyi (Helix amanda, segun Pfeiffer).

1842.—*Mittre*, Ann. des scienc. natur., 2.ª serie, vol. XVIII.
Helix Minoricensis, muralis y Nyelii.

1846.—*Graells*, Cat. Mol. España.
Helix Hispanica (Helix Balearica, segun Pfeiffer) y Grateloupi (Helix Graellsiana, segun Pfeiffer).

1848.—*Pfeiffer*, Monog. helic., vol. I.
Helix amanda.

1851.—*Deshayes*, Hist. natur. des Moll. de Ferussac, vol. I.
Helix tessellata (Helix Graellsiana, segun Pfeiffer).

1862.—*Dohrn et Heynemann*. Malak. Blatter, vol. IX.
Alexia Balearica, myosotis, Payraudeaui; Stenogyra decollata (Bulimus decollatus, segun Pfeiffer); Helix acuta (Bulimus acutus, segun Pfeiffer), apicina, caperata, Caroli, Companyoni, conspurcata, frater, Homeyeri, lenticula, Majoricensis, maritima, Newka, nitida (nitens, segun Martens), punctata, pyramidata, Setubalensis, solitaria (Bulimus solitarius, segun Pfeiffer), splendida, terrestris, trochoides, variabilis, ventrosa (Bulimus ventrosus, segun Pfeiffer y jóven del Bulimus acutus, segun Martens).

1864.—*Martens*, Malak. Blatter, vol. XI.
Helix nitida.

1867.—*Bourguignat*. Moll. nouv. 1.ª Centuria.
Helix apalolena.

1868.—*Schmidt*, Syst. europ. Clausil.
Clausilia pallida.

1867 y 1869.—*Hidalgo*, Journ. de Conchyl., vol. XV y XVII.
Helix Cardonæ y Ebusitana.

1869 y 1871.—*Luis Salvador, Archid. de Austria*, Die Balearen, vol. I y II.
Helix aspersa; Limax gagates, agrestis y variegatus. Cyclostoma elegans; Pupa umbilicata.
1869.—*Schaufuss*, Moll. syst. et catal.
Helix marmorata.
1870.—*Heynemann*, Nachr. Malak. Gesells. vol. II.
Limax Majoricensis.
1873 y 1876.—*Barceló*, Mol. terr. Baleares, 1.ª y 2.ª edic.
Achatina lubrica (Ferussacia lubrica, segun Pfeiffer); Helix aculeata, Alonensis, cellaria, cespitum, costata, crystallina, pulchella, pygmæa; Pupa muscorum (Pupa minutissima, segun Pfeiffer); Succinea Pfeifferi; Testacella haliotidea.—Helix exornata (Helix marmorata, segun Pfeiffer), Carthaginiensis; Achatina acicula; Truncatella truncatula.

II.—*Catálogo de las especies.*

Menciono sin número de órden todas las especies que deben relegarse á la sinonimia, y aquellas que no viven en las Baleares ó es dudosa su existencia en dichas islas; las especies que adopto llevan numeracion correlativa, y en ellas cito una buena figura, las localidades en que se han hallado y las observaciones que he creido más interesantes.

1.—Limax variegatus, Draparnaud.
Ferussac, Hist. des Moll., lám. V, fig. 2.
Hab.—*Mallorca*. Abundante en los sitios húmedos, entre las plantas. Nombre vulgar, *Llimach*.

2.—Limax agrestis, Linné.
Ferussac, Hist. des Moll., lám. V, fig. 7.
Hab.—*Mallorca*. Vive en las mismas condiciones, y se conoce con el mismo nombre vulgar que la especie anterior.

3.—Limax Majoricensis, Heynemann.
Westerlund, Fauna europ., pág. 11.
Hab.—*Mallorca*. No conozco esta especie.

4.—Amalia gagates, Draparnaud.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. III, fig. 1.

Hab.—*Mallorca.* En las mismas condiciones y con el mismo nombre vulgar que el *Limax variegatus.*

Existen muy probablemente otras especies de limácidos en las islas Baleares, pero se ha descuidado hasta ahora el recojerlas y conservarlas en las colecciones.

5.—Testacella haliotidea, Draparnaud.

Dupuy, Moll. France, lám. I, fig. 1, b. c.

Hab.—*Mallorca.*—*Menorca,* Mahon. San Cristóbal, Ferrerías. Poco abundante, debajo de la tierra, en los sitios húmedos. Los ejemplares recojidos son más pequeños que la figura citada.

6.—Succinea debilis, Morelet.

Journ. Conchyl. 1877, lám. IX, fig. 4 y 7.

Hab.—*Mallorca,* Alcudia, Palma.—*Menorca,* Mahon, San Cristóbal, Ferrerías, Alayor. Poco abundante. Sobre las plantas, en la márgen de los arroyos y por lo comun muy cerca del agua.

Succinea Pfeifferi, Rossmassler. El Sr. Barceló ha designado con este nombre la especie anterior, de la cual me ha enviado ejemplares, como tambien el Sr. Cardona, de Mahon.

7.—Leucochroa candidissima, Draparnaud.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 170, 172, 176 y 177.

Hab.—*Mallorca,* Palma (Semper).—*Menorca* (Deshayes).—*Ibiza.* Especie abundante sobre las piedras, en terrenos áridos, á 3 kilómetros de Ibiza. Algunos ejemplares son ligeramente perforados; otros se parecen un poco, por los caractéres de su espira, á la *Helix Bœtica* de Rossmassler. Esta especie ha sido citada de Menorca por Deshayes y no por Michaud, como dice en su lista el Sr. Barceló. ¿Se encuentra allí efectivamente?

8.—Leucochroa cariosula, Michaud.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 37-41.

Hab.—*Mallorca,* Palma, Belwer, Porto Pi, Santa Ponza, Calafiguera, Andraitx. Comun en los agujeros de las rocas calizas. Espira más ó ménos elevada segun los ejemplares;

ombligo abierto algunas veces; quilla bastante obtusa en algunos indivíduos.

Helix cariosa, Olivier. No existe esta especie en las Baleares. Con dicho nombre han indicado los Sres. Deshayes y Graells la especie anterior, y he podido asegurarme de ello examinando los ejemplares de la coleccion Graells.

9.—Helix aspersa, Muller.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 1-5.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Andraitx, Soller, Inca, Alcudia.—*Menorca*, Mahon.—*Ibiza* (Luis Salvador). Muy abundante entre las plantas en los parajes húmedos. Nombre vulgar, *Caragol bovér ó buvé.*

Helix grisea. Siendo referida la *Helix grisea* de Linné á la *Helix aspersa* de Muller por Hanley en su obra *Ipsa Lin. Conch.*, pág. 378, y empleando Ramis para ella el nombre vulgar de *Caragol bovér*, no puede quedar duda alguna acerca de la identidad de la *Helix grisea* de Ramis con la especie ántes enumerada.

10.—Helix lactea, Muller.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 92, 98, 99 y 309-317.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alcudia, Pollenza, Inca, Son Fuster, Soller, Benisalem.—*Menorca*, Mahon.—*Ibiza* (Barceló). Especie comun sobre los troncos de los olivos, debajo de las piedras, en las tapias, etc. Nombre vulgar en Mallorca, *Viudas*; en Menorca, *Monjas de boca negra*; en Ibiza, *Vacas*. Los ejemplares de Menorca son pequeños, y entre ellos se encuentra una variedad enteramente blanca, de la que algunos individuos presentan puntos y fajas traslucientes (figura 309-311).

Helix lucorum. Ramis dice que se halla esta especie en Menorca; pero segun el nombre vulgar con que la designa, los caractéres dados por Linné en su *Systema naturæ*, y las observaciones de Hanley en su obra *Ipsa Lin. Conch.*, página 378, no puede ser otra cosa más que la *Helix lactea* ó la *Helix punctata*. La *H. lucorum* de Muller no vive en las Baleares.

11.—Helix punctata, Muller.

Hidalgo, Catal. Iconog., fig. 100-104.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alcudia, Benisalem, Son Fuster, Inca, Soller.—*Menorca*, Mahon.—*Ibiza* (Semper). En las mismas condiciones y con los mismos nombres vulgares que la especie anterior. Comun.

Helix apalolena, Bourguignat. Esta especie es un doble empleo de la precedente, y se debe este nuevo nombre á la circunstancia de que M. Bourguignat ha descrito y figurado en sus obras, *Malac. de Alger.*, lám. XII. fig. 1-4, y *Moll. nouveaux*, lám. XXXV, fig. 6-8, otra forma por la especie de Muller.

Muller dice, en efecto, á propósito de su *Helix punctata*, que tiene la espira *ménos elevada* que la *Helix lactea*, la abertura no dentada en los indivíduos adultos, y el borde derecho blanco (*H. lacteam et vermiculatam refert, area vero centrali minus elevata, apertura edentula et labro albo ab illa..... differt*. Muller. *Verm. ter. et fluv.*, pág. 21), y sin embargo la concha dada por M. Bourguignat por la *Helix punctata* de Muller, tiene la espira *más elevada* que la de la *Helix lactea* y la columnilla bien dentada.

12.—Helix vermiculata, Muller.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 197-203.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Benisalem, Son Fuster, Andraitx, Alcudia, Inca, Soller.—*Menorca*, Mahon.—*Ibiza*. Comun sobre los troncos de los olivos, debajo de las piedras, etc. Nombre vulgar en Mallorca, *Viudas* y *Caragolas*; en Menorca, *Monjas de boca blanca*, y en Ibiza, *Vacas*.

Helix nemoralis. Menorca (Ramis). No se encuentra esta especie en dicha isla, y parece más bien por el nombre vulgar que la aplica Ramis y por las observaciones de Hanley sobre la especie de Linné (*Ipsa Lin. Conch*,, pág. 377), que la concha observada por el autor español ha sido la *Helix vermiculata*.

Helix Alonensis. Mallorca (Pagenstecher, segun Barceló).

Helix Carthaginiensis. Mallorca (Pagenstecher, segun Barceló).

Tengo muchas dudas sobre la existencia real de estas dos especies en las islas Baleares, puesto que no han sido halladas por ningun otro naturalista, ni se cita localidad determinada.

13.—Helix Graellsiana, Pfeiffer.

Hidalgo. Catal. iconog., fig. 34-36.

Hab.—*Mallorca*, Alcudia, Toxals-verts, Fornaluitx, Lluch, Soller, Selva. Poco abundante; se encuentra á 800 metros de altura sobre el nivel del mar.

Helix Grateloupi. Bajo este nombre ha publicado el Señor Graells la especie anterior; pero habiéndose ya empleado dicha denominacion para otra concha del mismo género, le ha sustituido Pfeiffer con el de *Graellsiana*, en recuerdo del naturalista español que la ha descrito y figurado por vez primera.

Helix tessellata. Este nombre ha sido dado por Ferussac á la *Helix Graellsiana*; pero como no ha sido caracterizada por M. Deshayes bajo esta denominacion, sino mucho despues de las diagnosis de los Sres. Graells y Pfeiffer, estas últimas son anteriores, y debe ser relegado á la sinonimia el nombre de Ferussac.

Helix Niciensis. No existe esta especie en las Baleares. M. Deshayes, á quien se debe esta cita, consideraba sin duda en otro tiempo la *Helix Graellsiana* como una var. de la *Helix Niciensis*, con la cual presenta muchos puntos de semejanza, aunque son específicamente bien distintas. (Véanse las láminas XVII A y XL de la *Hist. des moll.* de Ferussac.)

14.—Helix Balearica, Ziegler.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 22-24.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Soller, Toxals-verts, Andraitx, Selva, Pollenza, Benisalem, Alcudia, Puigpuñent, Raixa, Valldemosa, Sierra del Norte.

Var. minor. Son Cusent en Pollenza.

Muy comun sobre los troncos de los árboles, debajo de las piedras, etc. Especie muy constante en sus caractéres, puesto que sólo he visto algunos individuos con la espira ligeramente elevada y un poco oblícua la abertura; en otros se reunen la 2.ª y 3.ª fajas, formando una zona bastante ancha. La var. es del tamaño de la *Helix Companyoni*, pero presenta el peristoma coloreado. Nombre vulgar, *Caragol de serp*.

Helix Hispanica, Partsch. Bajo este nombre ha designado el Sr. Graells la *Helix Balearica*.

Helix marmorata, Ferussac. Baleares (Schaufuss). No he visto todavía concha alguna de las Baleares que sea idéntica á los individuos de la *Helix marmorata* que poseo, procedentes de Gibraltar, por lo cual es muy probable que se haya dado este nombre á la variedad pequeña de la *Helix Balearica*, que se parece mucho, en efecto, á la *Helix marmorata* del Sur de España.

Helix exornata, Parreyss. Mallorca (Pagenstecher, segun Barceló). Este nombre es sinónimo de la *Helix marmorata*, segun Pfeiffer.

15.—Helix Minoricensis, Mittre.

Tipo: «*spira prominula... columella subdentata...*» (Mittre).

Hidalgo, Catal. iconog.. fig. 29-31.

Hab.—*Mallorca*, Pollenza.—*Menorca*, Mahon, isla del Rey.—*Ibiza*.—*Cabrera*.

Var. *b*. *Testa columella non dentata*.

Hidalgo, fig. 32.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Pollenza.—*Menorca*, Mahon, San Felipe, isla den Culom, Monte Toro, Santa Agueda, Son Ermitá, Albranca-Vey.—*Ibiza*.—*Cabrera*.

Var. *c*. *Testa columella non dentata; non fasciata, fere unicolor*.

Hidalgo, fig. 33.

Hab.—*Menorca*, Mahon, Albranca-Vey.

Var. *d*. *Testa tenuior, fasciis fere continuis*.

Hab.—*Menorca*, San Cristóbal, Albranca-Vey.

Var. *e*. *Testa spira depressiore (H. Companyoni, var.)*.

Hidalgo, fig. 28.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Bellver, Pollenza.—*Menorca*, Ciudadela.

Var. *f*. *Testa major (H. Companyoni)*.

Hidalgo, fig. 25-27.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Selva, Inca, Benisalem, Son Fuster, Bellver.

Especie comun, que vive sobre las murallas, los techos de las casas, las rocas calizas, etc. Nombre vulgar en Menorca, *Monjetas*.

En la bella série de individuos de esta especie que poseo en mi coleccion, hay todas las formas intermedias entre los tipos de las *H. Minoricensis* y *Companyoni*, por lo cual no es posible considerar á estas como dos especies bien distintas. Al reunirlas adopto el nombre de *Minoricensis* (empleado por Mittre en 1842 al describir la especie), porque el de *Companyoni*, si bien citado en 1837, no ha ido acompañado de figura, ni de descripcion alguna hasta el año 1848, época en que fué dado á conocer por el abate Dupuy en su obra sobre los moluscos de Francia.

La forma tipo es rara, como tambien las variedades *c* y *d*; las otras son más abundantes; la var. *d* tiene un poco el aspecto de la *Helix splendida* tipo, por la continuidad de sus fajas (Draparnaud, lám. VI, fig. 10, 11). Las variaciones de los indivíduos de esta especie son relativas al tamaño, á la elevacion ó depresion de la espira, á la existencia ó falta del pequeño diente de la columnilla, y á la carencia, interrupcion ó continuidad de sus fajas transversales. En algunos ejemplares están interrumpidas, y al reunirse unas con otras las pequeñas manchas, forman lindas zonas longitudinales flexuosas. He distinguido siempre esta especie de la *Helix Balearica* por la forma y el color del peristoma.

16.—Helix splendida, Draparnaud.

Hidalgo, Cat. iconog., fig. 220 y 222-224.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Bellver, Pollenza, Cala de San Vicente, Andraitx, Inca, Benisalem, Puigpuñent.—*Ibiza*. Poco abundante; en los lentiscos.

17.—Helix Pisana, Muller.

Hidalgo, Cat. iconog., fig. 119, 121-123 y 125-127.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Soller, Alcudia, Inca.—*Menorca*, Mahon.—*Ibiza*. Muy comun, sobre las plantas, en las viñas, en las playas arenosas, etc. Nombre vulgar en Mallorca, *Caragolins*, y en Menorca, *Caragoli de viña ó de menjá*. Especie muy variable bajo el punto de vista del tamaño, del grosor y de la coloracion; peristoma blanco ó rosado.

Helix pomatia. Menorca (Ramis). No se encuentra esta especie en las Baleares. Segun el nombre vulgar dado por Ramis, acaso haya visto este autor la *H. Pisana*, pero me es imposible poderlo afirmar con seguridad.

18.—Helix lanuginosa, Boissy.

Bourguignat, Malac. de l'Alger., vol. I, lám. XVII, fig. 1-4.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Bellver, Alcudia, Andraitx, Benisalem.—*Menorca*, Mahon, Ciudadela, Mercadal, San Cristóbal, Ferrerías. Bastante abundante en los parajes húmedos, sobre las plantas, especialmente las ortigas, y en los fosos de las murallas.

19.—Helix muralis, Muller.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 42-44.

Hab.—*Menorca*, Mahon, isla del Rey, Alayor, Ciudadela. Comun entre las piedras, sobre las tapias, cerca del techo de las casas, etc. Algunos ejemplares son angulosos en la última vuelta. Nombre vulgar *Caragol de bruxe ó de figueira*.

20.—Helix Ebusitana, Hidalgo.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 255-257.

Hab.—*Ibiza*.—*Formentera*. Poco abundante; se encuentra á 3 kilómetros de Ibiza en los mismos sitios áridos que la *Leucochroa candidissima*, pero entre las plantas.

21.—Helix cespitum. Draparnaud.

Hidalgo, Catal, iconog., fig. 213-215.

Rossmassler, Iconog., fig. 514 y 597.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Muro, Pollenza, Alcudia, Inca, Sineu, Benisalem.—*Ibiza*. Especie abundante sobre las plantas, en los campos de trigo, etc.

22.—Helix variabilis, Draparnaud.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XIII, figura 4, 5, 10, 11.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Soller, Alcudia.—*Menorca*, Mahon, Mercadal.—*Ibiza* (Semper). Comun sobre las plantas. Mi amigo Cardona ha encontrado en Menorca una variedad muy bonita con la espira radiada de manchas blancas, como en la *H. Deveauxi* (fig. 1448 de la continuacion de la obra de Rossmassler por M. Kobelt). Es, sin embargo, más globulosa, tiene el ombligo más estrecho, y el peristoma del mismo color que en la *H. variabilis*, por lo cual la considero como una variedad de esta última especie. Estos caractéres son por otra parte los que indica Draparnaud en su var. *c* de la *H. variabilis* (*Hist. des moll.* pág. 84).

23.—Helix lineata. Olivi.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XXIV, figura 26-27.

Hab.—*Menorca*, Mahon. Comun en las playas arenosas. Es la *H. maritima* de Draparnaud, y con este nombre ha citado de Palma el Sr. Barceló la especie anterior.

24.—Helix submeridionalis, Bourguignat.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XXIII, fig. 26-29.

Hab.—*Formentera*. Cerca de las playas. Muy probablemente no es esta especie más que una variedad de la anterior, porque las diferencias señaladas son de poco valor, y el mismo M. Bourguignat indica ya una var. *striatula* de la *H. lineata*, que es uno de los caractéres en que motiva la separacion de la *H. submeridionalis*.

25.—Helix Newka, Dohrn.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 273-275.

Hab.—*Mallorca*. Palma, Cala Mayor, Porto Pi, Bendinat. Bastante comun en las colinas áridas, próximas al mar. Muy bonita especie, que debo á las exploraciones del Señor Barceló; algunos ejemplares son angostos y elevados, otros más anchos en la base y con la espira más baja. Coloracion gris ó de un rojizo sucio, unas veces uniforme, otras con 1 á 4 filas de pequeñas manchas córneas, de las cuales son siempre más perceptibles las de la sutura y del contorno de la última vuelta. Peristoma blanco con los bordes muy aproximados y unidos por una callosidad bien distinta en los individuos adultos.

En la 1.ª lista del Sr. Barceló, se ha indicado la *H. Newka* con el nombre de *H. trochoides*, y con este nombre me fué remitida por dicho señor.

26.—Helix Majoricensis, Dohrn et Heynemann.

Hidalgo, Catal. iconog., fig. 276-278.

Hab.—*Mallorca*, Palma (Homeyer). No poseo esta especie, y sólo he visto un individuo de ella que ha tenido la amabilidad de enviarme M. Kobelt para su estudio, y para ser figurado en mi *Catálogo iconográfico*. Es muy parecida á la anterior por sus caractéres, pero la espira es más deprimida y el ombligo es más ancho.

27.—Helix trochoides, Poiret.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XXXII, figura 23-28.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Andraitx.—*Menorca*, Mahon, San Felipe, Ciudadela, Villacarlos, Son Ermitá. Especie comun sobre las plantas. La coloracion es de un blanquecino uniforme, pero á veces presenta una zona negra espiral ó manchas de color parduzco en forma de radios sobre la parte superior de la concha. Conozco igualmente una var. de base más ancha, y cuya espira parece ménos elevada que en los demás individuos.

28.—Helix terrestris, Chemnitz.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XXXII, figura 4-14.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alcudia, Benisalem, Andraitx, Son Vila.—*Menorca*, Mahon, Ciudadela, Alayor, Son Ermitá, San Cristóbal.—*Ibiza*. Comun entre las piedras, sobre las plantas, en los fosos de las murallas, etc. Algunos individuos son deprimidos y tienen hasta 8 vueltas de espira; otros presentan una quilla algo saliente en la sutura, como la *Helix trochlea* de Pfeiffer. Las variaciones de la coloracion son enteramente semejantes á las de la especie anterior.

29.—Helix pyramidata, Draparnaud.

Bourguignat, Mal. Alger., vol. I. lám. XXX, fig. 26-33.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Cala Mayor, Porto Pi, Bellver, Andraitx, Inca.—*Menorca*, Mahon, San Cristóbal, Alayor, Ferrerías.—*Ibiza*. Nombre vulgar en Menorca, *Caragulí*. Entre las piedras y las rocas, sobre las plantas, en los fosos de las murallas, etc. Igual sistema de coloracion que en las dos especies precedentes.

30.—Helix lenticula, Ferussac.

Bourguignat. Mal. Alger., vol. I, lám. XVI, fig. 34-36.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Benisalem, Soller, Andraitx.—*Menorca*, Mahon.—*Ibiza*. Comun debajo de las piedras, en los fosos de las murallas, etc.

31.—Helix Cardonæ, Hidalgo.

Journ. Conchyl. 1867, lám. XII, fig. 2.

Hab.—*Menorca*, Mahon, San Cristóbal, Son Gall. Poco abundante, debajo de las piedras. Hay individuos de color enteramente pardo, otros blanquecinos en la parte inferior con dos fajas negruzcas, y poseo además otro del todo blanquecino. Esta especie fué descubierta por mi amigo el Señor Cardona, celoso colector de las producciones naturales de la isla de Menorca.

Helix Setubalensis, Pfeiffer. No conozco esta especie de las Baleares. Los autores han aplicado esta denominacion á cuatro especies distintas: una de Setubal, en Portugal (Morelet); otra de Alicante, en España (Rossmassler, Hidalgo); la tercera de la isla de Mallorca (Dohrn, Barceló) y la cuarta de la isla de Menorca (Barceló). La primera es la que debe llevar el nombre de *Setubalensis*, las dos siguientes son designadas aquí, por vez primera, con otros nombres, puesto que son bien distintas, y la última es la *Helix Nyeli* Mittre, mencionada equivocadamente por el Sr. Barceló bajo el nombre de *Setubalensis*.

Hé aquí sus caractéres diferenciales.

Helix Setubalensis Pfeiffer (*Helix serrula*. Morelet), Setubal.

Testa anguste umbilicata, lamelloso-costulata; anfr. planulati, subexserti; carina irregulariter crenulata.

La descripcion de Morelet (*Moll. Portugal*, pág. 62) es muy exacta, y en su figura se ve el ombligo poco ancho, como en los ejemplares que poseo de Setubal.

Helix Prietoi, Hidalgo (*Helix Setubalensis*, Dohrn). Mallorca.

Testa late umbilicata, costulis non lamellosis, irregularibus, confertioribus; anfr. convexiusculi, non exserti; carina irregulariter crenulata.

Helix Barceloi, Hidalgo (*Helix Setubalensis*, Rossmassler.—Iconog., fig. 829). Alicante.

Testa late umbilicata, costulis non lamellosis, regularibus, sæpe confertissimis; anfr. convexiusculi, non exserti; carina pulchre et minute crenulata.

Helix Nyeli, Mittre (*Helix Setubalensis*, Barceló, *partim*). Menorca.

Testa late umbilicata, subtiliter et confertissime costulata *anfr. convexiusculi, non exserti; carina minutissime crenulata.*

32.—Helix Prietoi, Hidalgo.

Journ. Conchyl. 1878, lam. IX, fig. 3.

Testa late umbilicata, depressa, carinato-serrulata, solidula, confertim costulata, costulis obtusiusculis, irregularibus, superne oblique arcuatis, inferne subflexuosis, hic illic brevioribus aut bifurcatis; opaca, fulvido-albida vel ferruginea, interdum maculis minutis corneo-fuscis uni-quadriseriatim cincta; spira parum elevata aut planulata, apice fusca; anfr. 5—5$^{1}/_{2}$ *convexiusculi, ad carinam planulati, ultimus antice descendens, basi valde convexus; umbilicus* $^{2}/_{7}$ *diametri æquans; apertura rotundato-lunaris, angulata; perist. rectum, intus albolabiatum, marginibus approximatis, callo tenuissimo junctis, columellari vix reflexo.—Diam. maj.* 10, *min.* 9, *alt.* 4 *millim.*

Hab.—*Mallorca*, Palma, Andraitx, Benisalem, Soller, Son Vila cerca de Pollenza, Son Fuster, Selva, Inca. Bastante abundante en las tapias, entre las piedras, en los pinares, etc.

Dedico con placer esta especie á mi amigo D. Francisco Prieto y Caules, Profesor de la Escuela de Ingenieros de caminos, al cual debo muchos datos sobre los moluscos de las Baleares, procedentes de las exploraciones que ha verificado en interés de mis publicaciones.

Se distingue facilmente esta concha de la *Helix Setubalensis* (*H. serrula* Morelet), por el mayor diámetro de su ombligo, sus vueltas de espira convexas, sus costillas menos prominentes, menos separadas, más irregulares, su última vuelta más inflada en la base y descendente en la parte anterior. Se ve en la sutura la quilla aserrada de las vueltas, pero no sobresale en ella como sucede en la *Helix Setubalensis*. La *Helix Prietoi* se parece mas bien á la *Helix Schembriana*, de Malta y Sicilia, pero en esta última especie son regulares las costillas y no desciende la ultima vuelta.

En los individuos que presentan las cuatro filas de pequeñas manchas, se hallan estas dispuestas del modo siguiente: la 1.ª muy próxima á la sutura, la 2.ª en la parte superior de la quilla, la 3.ª y la 4.ª en la parte mas convexa de la base de la última vuelta, formando algunas veces en dicho sitio zonas no interrumpidas. Otros ejemplares tienen solamente las dos filas superiores, ó nada mas que la de la sutura; en otros, es uniforme la coloracion. Los dientecillos de la quilla son irregulares y casi siempre blanquecinos. M. Kobelt me ha enviado un ejemplar de Palma, procedente de M. Dohrn, bajo el nombre de *Helix Setubalensis*.

33.—Helix Homeyeri Dohrn et Heynemann.

Hidalgo, Catal. iconog. fig., 300-302.

Hab. *Mallorca* (Homeyer). En los pinares (Kobelt, in litt.) No he visto de esta especie mas que un ejemplar enviado por M. Kobelt, para ser figurado en mi *Catálogo iconográfico*, favor que debo á su amabilidad. Es muy proxima á la *Helix Nyeli* de Menorca.

34.—Helix Nyeli Mittre.

Hidalgo, Catal. iconog. fig. 294-299.

Hab.—*Menorca*, Mahon, isla del Rey, Ferrerías, Mercadal, San Cristobal, Alayor, isla del Aire, Cabo Caballería, Algendaret, Barrancos de la Cova, de Son Tem, d'en Fideu. Comun en los pequeños agujeros de las rocas calizas, debajo de las piedras, etc. La espira es por lo comun deprimida, á veces un poco elevada. Hay individuos enteramente blancos, otros son blanquecinos, agrisados ó amarillentos, con una ó dos filas de pequeñas manchas parduzcas por encima (una cerca de la sutura y la otra sobre la quilla) y fajas parduzcas ó negruzcas por debajo. Las fajas son contínuas ó interrumpidas, anchas ó estrechas, están mas ó menos separadas entre sí, y son por lo comun en número de dos ó tres, pero algunas veces solo hay una ó se observan cuatro. Presenta en ocasiones seis vueltas de espira.

El Sr. Barceló cita la *Helix Nyeli* de Menorca, con referencia á Terver, pero este autor no ha mencionado mas que de Palma la *Helix Boissyi*.

Helix lapicida. Menorca (Ramis). Especie no encontrada aún en las Baleares. Segun la descripcion de Linné en el *Systema naturæ (Testa carinata, umbilicata, utrinque convexa, apertura marginata transversali ovata. Hab. in Europæ rupibus, ut Larvæ lignum, sic calcem rodens)* y las condiciones especiales en que vive la *Helix Nyeli*, creo que Ramis ha mencionado esta última especie con el nombre de *lapicida*, por no haberse fijado en la sinonimia de Linné.

35.—HELIX PONSI, Hidalgo.

Journ. Conchyl., 1878, lam. IX, fig. 5.

H. Nyeli similis, sed texta mediocriter umbilicata, costulis validioribus sculpta, carina compressa, acutiore, magis crenulata, ultimo anfractu subtus ad periphæriam minus convexo; sæpe fulvo-fusca, superne maculis, inferne fasciis, ut in H. Nyeli ornata. Diam. maj. 11, *min.* 9 $^1/_2$, *alt.* 4 *millim.*

Hab. *Menorca,* Son Gall, San Juan de Carbonell, Fornells, Ses Covas Veyas.—*Cabrera,* Punta de Anciola. Bastante comun, sobre las piedras; á 100 metros de altura sobre el nivel del mar en la isla de Cabrera. El ombligo es mas angosto que en la *H. Nyeli,* las costillas en menor número y más pronunciadas, la quilla mas comprimida, saliente y aserrada, la última vuelta aplanada oblícuamente por debajo, cerca de la quilla, y la coloracion mas oscura.

Dedico esta especie, descubierta por mi amigo Cardona, al Sr. D. Juan Pons, de Mahon, que me ha comunicado muchas especies interesantes de esta localidad.

36.—HELIX POLLENZENSIS, Hidalgo.

Journ. Conchyl., 1878, lam. IX, fig. 6.

Testa mediocriter umbilicata, depressa, carinato-serrulata, tenuiuscula, pellucida, confertim costulata, costulis superne arcuatis, inferne hic illic brevioribus aut bifurcatis; fulvescenticornea, infra fasciis obscurioribus parum conspicuis ornata, ad umbilicum opaca, albida; spira parum elevata, vertice sæpe fusco; anfr. 6, *vix convexiusculi, ultimus antice non descendens, inferne convexo-declivis, prope umbilicum obtuse angulatus; umbilicus* $^1/_8$ *diametri æquans, profundus, infundibuliformis; apertura lunaris, horizontalis, angulata; perist. rectum, margine basali intus vix labiato. columellari oblique subdilatato. Diam. maj.* 12, *min.* 10 $^1/_2$, *alt.* 5, *umbil.* 2 $^1/_2$ *millim.*

Hab. *Mallorca,* Pollenza. Poco comun; en los pinares, debajo de las hojas secas. Esta especie fué descubierta por nuestro amigo Prieto y es próxima por sus caracteres á la *Helix eremia* Westerlund (*Fauna Europæa,* pag. 103), pero no presenta estrías nodulosas, como esta última, ni tiene descendente la última vuelta y de color pálido la quilla. Las vueltas son 6 en lugar de 5, el ombligo es relativamente mas angosto, y la concha presenta mayores dimensiones (la *H. eremia* solo tiene 8 mill.), y algunas fajas poco marcadas por debajo. Por último, la localidad es completamente diferente (Pyreneæ altiores la *H. eremia*).

Los dientecillos de la quilla son irregulares y blanquecinos, y de este mismo color son igualmente las pequeñas costillas de la superficie. En algunos ejemplares se perciben en la parte superior de la concha, aunque muy poco marcadas, dos filas de manchas pequeñas, carácter casi comun á todas las especies de este grupo que viven en las Baleares. Las zonas de la parte inferior son en número de 1 á 4 y del mismo color que el fondo de la concha, aunque un poco mas oscuras.

37.—Helix Boissyi, Terver.

Terver, Catal. Moll. Afrique, lam. II, fig, 12-14.

Hídalgo, Catal. iconog., fig. 303-308.

Var. b. *Testa minor, mediocriter umbilicata, carina gradatim evanida.*

Var. c. *Testa anguste umbilicata, carina gradatim evanida, spira magis elevata.* (*Helix frater* Dohrn et Heynemann, Journ. Conchyl. 1878, lam. IX, fig. 7.)

Hab.—*Mallorca*, Palma, Benisalem, Andraitx, Alcudia, Soller, Son Vila, Pollenza, Inca, Cala de San Vicente, Toxalsverts, Lluch, Selva. Bastante comun debajo de las piedras. Especie variable; en la forma típica es ancho el ombligo, mas deprimida la espira por regla general, y bien visible la quilla en toda la circunferencia de la última vuelta. En otros ejemplares, mas pequeños, es mas angosto el ombligo, y obtusa la quilla hácia la terminacion de la última vuelta; en otros, por último, es mas elevada la espira, angosto el ombligo y obtusa la quilla hacia la terminacion de la última vuelta. Estos últimos individuos son en un todo semejantes al ejemplar del *Helix frater* que debo á la generosidad de M. Kobelt, y que procede de los autores de la especie.

Rara vez se encuentran individuos de coloracion blanquecina uniforme; el color mas general de la especie es blanquecino ó córneo, con 1 á 5 fajas oscuras, colocadas en la parte inferior, anchas ó estrechas, contínuas ó interrumpidas, y dos filas de pequeñas manchas córneas por la parte superior. La quilla es siempre menos aguda que en todas las especies anteriores.

M. Bourguignat cree que la *H. Boissyi*, Terver, de Palma, es la misma especie que la *H. Nyeli* Mittre, de Mahon (*Malac. Alger.*, vol. I, pag. 266), mas no puedo adherirme á su opinion, que creo equivocada. Las dos especies viven en localidades diversas; la espira, en la *H. Nyeli*, es mucho mas deprimida que en la *H. Boissyi* figurada por Terver, y si este autor hubiese visto la verdadera *H. Nyeli*, es seguro que no la hubiera confundido con la concha encontrada en Tremecen (*H. amanda* segun Bourguignat) como lo verifica en la descripcion de la *H. Boissyi*. Es mas marcada la semejanza entre la especie que doy aqui como *H. Boissyi* (encontrada en Mallorca, y que conviene con la descripcion y la figura de Terver) y la *H. amanda*, porque las dos especies son muy próximas por sus caracteres. Los individuos algo jóvenes de la *H. Boissyi* se parecen mas á la figura dada por Terver que los adultos. Nuestro amigo Barceló ha mencionado esta especie en su lista con el nombre de *H. Nyeli*, pero los ejemplares de Palma, Selva y Benisalem pertenecen á la *H. Boissyi*.

Helix Rozeti. Palma.

Helix amanda. Palma.

No se han encontrado aún estas dos especies en Palma. Son debidas dichas citas á la circunstancia de que algunos autores las han considerado como sinónimas de la *H. Boissyi*, pero aunque muy parecidas, se distinguen bien sin embargo.

Helix caperata. Palma (Homeyer), Andraitx (Barceló). No he recibido aún esta especie de las Baleares, sino solamente algunos ejemplares de la *H. Boissyi*, procedentes de Andraitx, sin manchas por encima, y muy parecidos por lo tanto á las figuras 831 y 832 de Rossmassler, pero bien distintos de ellas por el ángulo poco marcado de la última vuelta. ¿Se habrán dado con el nombre de *H. caperata* los individuos que presentan estos caracteres?

38.—Helix Caroli, Dohrn et Heynemann.
Hidalgo, Catal. iconog., fig. 161-165.

Hab.—*Mallorca* (?) (Kobelt).—*Ibiza.*—*Formentera.*—*Conejera.* Poco comun; en los pequeños agujeros de las rocas calizas. Creo inexacta la cita de Mallorca hecha por M. Kobelt, y no por Pfeiffer, como se dice en la lista de Barceló. Esta bonita concha es constante en su forma y escultura, pero variable en el número y disposicion de sus fajas.

39.—Helix apicina, Lamarck.
Hidalgo, Catal. iconog., fig. 155-157.

Hab.—*Mallorca,* Palma, Alcudia, Andraitx.—*Menorca,* Mahon, San Cristóbal. Abundante debajo de las piedras, en los fosos de las murallas, etc.

40.—Helix conspurcata, Draparnaud.
Draparnaud, Hist. des Moll., lám. VII, fig. 23-25.

Hab.—*Mallorca,* Palma, Alcudia.—*Menorca,* Mahon, Ciudadela. Bastante comun sobre las plantas, debajo de las piedras, etc.

41.—Helix costata, Muller.
Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XVIII, figura 38-41.

Hab.—*Mallorca,* Palma, Andraitx.—*Menorca,* Mahon, San Juan de Carbonell, Alayor. Poco abundante; en la base de las plantas y debajo de las piedras.

Helix pulchella. El Sr. Barceló ha dado con este nombre la especie precedente, considerándola como una variedad de esta.

42.—Helix aculeata, Muller.
Bourgnignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XIX, figura 21-24.

Hab.—*Menorca,* Mahon, Alayor, Mercadal. En los bosques de encinas, debajo del musgo. Poco abundante.

43.—Helix rupestris, Draparnaud.
Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XVI, figura 24-27.

Hab.—*Menorca,* Mahon, Alayor. Poco comun; sobre las rocas calizas.

44.—Helix pygmæa, Draparnaud.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. I, lám. XIX, fig. 9-12.

Hab.—*Menorca*, Mahon, Alayor, Mercadal. Rara; se encuentra en la base de las plantas, un poco oculta entre la tierra.

Helix cornea. Menorca (Ramis). No se ha encontrado en esta isla la especie así denominada por Draparnaud, y es una concha fluviátil la especie de Linné. ¿Designó acaso Ramis con dicho nombre una *Hyalina?*

Helix Gemonensis. Especie que no vive en las Baleares, á pesar de la cita hecha en la obra de Potiez y Michaud.

45.—Hyalina fulva, Draparnaud.

Rossmassler, Iconog., fig. 535.

Hab.—*Menorca*, Mahon. Rara; encontrada con la *Helix aculeata*.

46.—Hyalina crystallina, Muller.

Rossmassler, Iconog., fig. 531.

Hab.—*Menorca*, Mahon. Rara; vive en la base de las plantas, entre la tierra.

47.—Hyalina nitida, Muller.

Forbes et Hanley, Brit. Moll., lám. CXX, fig. 4 y 7.

Hab.—*Menorca*, Mahon, San Cristóbal, Ferrerías. Poco abundante; sobre las plantas, en los sitios húmedos.

48.—Hyalina lucida, Draparnaud.

Dupuy, Moll. France, lám. X, fig. 8.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Esporlas. Sobre las plantas, en los sitios húmedos.

Helix nitens. Segun Martens (*Malak. Blatt.* 1864, página 162) la especie así denominada por Dohrn es la *H. nitida*. (Draparnaud, *Hist. des Moll.*) No conozco aún, de las Baleares, la verdadera *Helix nitens* de Michaud.

Helix nitida. Palma, Esporlas (Barceló). Es la *Hyalina lucida* antes enumerada.

Helix cellaria. Palma, Benisalem, Menorca (Barceló). Los ejemplares de Palma son la *Hyalina lucida;* los de Benisalem y Menorca pertenecen á la especie siguiente, como he podido asegurarme de ello, examinando los individuos que me han enviado los Sres. Barceló y Cardona.

49.—Hyalina Balmei, Potiez et Michaud.

Martini et Chemnitz, 2.ª edic. Helix, lám. CXXX, figura 6-8.

Hab.—*Mallorca*, Andraitx, Alcudia, Benisalem.—*Menorca*, Mahon, San Juan de Carbonell, San Cristóbal. Poco abundante; sobre las plantas, en los parajes húmedos. Los ejemplares de Mallorca son de mayor tamaño (11 milim.), más deprimidos y más angulosos que los de Menorca. Los individuos pequeños tienen el aspecto de la *H. cellaria*, y los grandes el de la *H. lucida*, pero se distinguen bien de estas especies por el ángulo de la última vuelta, y por sus vueltas de espira que crecen con más lentitud.

50.—Bulimus decollatus, Linné.

Bourguignat, Mal. Alger., vol. II, lám. I, fig. 1-3, 10 y 19.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alcudia.—*Menorca*, Mahon, San Cristóbal.—*Ibiza*. Comun debajo de las piedras, sobre las plantas, etc. Nombre vulgar en Menorca, *Caragol de pade*. Los ejemplares de San Cristóbal son de un tamaño considerable (44 milím.), gruesos y pesados, y tienen estrías transversales muy pronunciadas.

Stenogyra decollata. Es la especie anterior.

51.—Bulimus quadridens, Muller.

Dupuy, Moll. France, lám. XVIII, fig. 8.

Hab.—*Menorca*, Mahon, Ciudadela, Mercadal, San Cristóbal, Ferrerías, Cabo Caballería, Raro; debajo de las piedras.

52.—Bulimus acutus, Muller.

Bourguignat, Mal. Alger. vol. I, lám. XXXII, fig. 42-46.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alcudia, Son Fuster, Hostal d'Aurayó.—*Menorca*, Mahon, Son Ermitá, San Cristóbal.—*Ibiza*. Comun; en los fosos de las murallas, sobre las plantas, los troncos de los árboles, etc.

Helix acuta. Es la especie anterior.

53.—Bulimus ventrosus, Ferussac.

Bourguignat, Mol. Alger., vol., I, lám. XXXII, fig. 39-41

Hab.—*Mallorca*, Palma.—*Menorca*, Mahon, San Juan de Carbonell, San Cristóbal, Ferrerías, Barranco de Algendar. Bastante comun; sobre las plantas.

Helix ventrosa. Es la especie anterior.

54.—BULIMUS SOLITARIUS, Poiret.

Bourguignat, Mal. Alger. vol. I, lám. XXXII, fig. 29-34.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alcudia, Benisalem.—*Menorca*, Mahon, Son Ermitá, San Cristóbal, San Felipe.—*Ibiza*.—*Formentera*. Comun; sobre las plantas.

Helix solitaria. Es la especie anterior.

55.—ACHATINA ACICULA, Muller.

Bourguignat, Amen. malac. vol. I, lám. XVIII, fig. 1-3.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alaró.—*Menorca*, Mahon, San Cristóbal, Ciudadela. Rara; entre la tierra, en la base de las plantas.

56.—FERUSSACIA LUBRICA, Muller.

Forbes et Hanley, Brit. Moll., lám. CXXV, fig. 8.

Hab.—*Mallorca*, Acequias del Prat.—*Menorca*, Mahon, Ciudadela, San Juan de Carbonell. Poco abundante; sobre la tierra, en la base de las plantas.

Achatina lubrica. Es la especie anterior.

57.—FERUSSACIA FOLLICULUS. Gronovius, var. *Vescoi*. Bourguignat.

Bourguignat, Malac. Chât. If, lám. II, fig. 10-13.

Hab.—*Mallorca*, Palma, Alcudia, Benisalem, Sansellas.—*Menorca*, Mahon.—*Ibiza*. Comun; debajo de las piedras, en los fosos de las murallas, etc.

Achatina follicula. Es la especie anterior.

58.—FERUSSACIA BOURGUIGNATIANA, Benoit.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. II, lám. IV, fig. 35-40.

Hab.—*Menorca*, San Juan de Carbonell. No he visto más que dos ejemplares de esta especie.

59.—PUPA POLYODON, Draparnaud.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. II, lám. V, fig. 14-18.

Hab.—*Menorca*, Mahon, Mercadal, Ferrerías, Sa Mesquida, Cabo Caballería. Rara; entre la tierra, en la base de las plantas.

60.—PUPA GRANUM, Draparnaud.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. II, lám. VI, fig. 1-3.

Hab.—*Mallorca*, Andraitx, Palma.—*Menorca*, Mahon, Mercadal, Ferrerías.—*Ibiza*. Rara; pegada á las rocas calizas.

61.—PUPA UMBILICATA, Draparnaud.

Dupuy, Moll. France, lám. XX, fig. 7.

Hab. —*Mallorca*, Alcudia, Pollenza, Andraitx, Alaró, Palma, Porto Pi. —*Menorca*, Mahon, San Cristobal. Abundante; sobre las plantas, cerca de las piedras y de los peñascos.

62.—Pupa minutissima. Hartmann.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. II, lám. VI, fig. 28-32.

Hab.—*Mallorca*, Benisalem, Alaró.—*Menorca*, Mahon, San Cristóbal, Alayor, Mercadal. Debajo del musgo, de las hojas secas, etc. Poco comun. Algunos ejemplares no tienen dientes en la abertura; en otros se ve tan solo un diente palatal profundo, ó este con un diente parietal, ó tres dientes, uno palatal, otro parietal y otro en la columnilla.

Pupa muscorum, Draparnaud. Es la especie anterior.

63.—Pupa codia, Bourguignat.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. II. lám. VI, fig. 39-41.

Hab. *Menorca*, Mahon, San Cristóbal. Muy rara; encontrada con la especie precedente.

64.—Clausilia bidens, Linné, var. *virgata*. Cristofori et Jan.

Rossmassler, Iconog., fig. 170.

Hab. *Mallorca*, Palma, Alcudia, Pollenza, Son Fuster, Hostal d'Aurayó, Andraitx, Cala de San Vicente. —*Menorca*, Mahon.—*Ibiza*. Comun; debajo de las piedras, sobre las murallas, los troncos de los árboles, etc. Se encuentran ejemplares muy blanquecinos, pero aún no se ha recogido en las Baleares un solo individuo que pertenezca á la forma tipo.

Clausilia papillaris. Es la especie anterior.

Clausilia virgata. Nombre dado á la variedad de la *Clausilia bidens*.

Clausilia pallida. Parreyss. Menorca (Schmidt). No conozco esta especie, y no he visto su descripcion ni figura. ¿Se habrán designado acaso con este nombre los ejemplares blanquecinos de la *Clausilia bidens*, var. *virgata*?

65.—Truncatella truncatula, Draparnaud.

Rossmassler, Iconog., fig. 407.

Hab.—*Mallorca*, Alcudia.—*Menorca*, Mahon, Cala de San Esteban, Alcanfár, Benisafué, Santa Galdana, Fornells, Ciudadela.—*Formentera*. Comun debajo de las piedras, en los parajes humedecidos por el agua salobre. Existen dos variedades, que se diferencian en el tamaño; la pequeña es la figurada por Rossmassler, pero en una y otra hay individuos lisos ó provistos de costillas longitudinales. Los ejemplares no estriados de la var. *minor*, se parecen mucho á la *Truncatella Montagui* del Océano, pero se distinguen bien de ella por la falta de hendidura umbilical.

66.—Cyclostomus elegans Muller.

Dupuy, Moll. France, lam. XXVI, fig. 8.

Hab.—*Mallorca*, El Real, cerca de Palma, Esporlas, Valldemosa, Randa, Sierra del Norte, Alcudia.—*Menorca*, Mahon, Mercadal, San Cristobal, Ciudadela, Poco abundante; entre la tierra, cerca de las plantas y de las piedras.

67.—Tudora ferruginea Lamarck.

Delessert, Recueil, lam. XXIX, fig. 4.

Hab.—*Mallorca*, Bellver, Palma, Alcudia, Puig de Randá, Puigpuñent, Benisalem, Andraitx, Cala de San Vicente, Pollenza, Son Fuster.—*Menorca*, Mahon, San Juan de Carbonell, San Cristobal. Comun sobre los troncos de los árboles, debajo de las piedras, etc. Existe una variedad de un solo color, casi naranjada.

Cyclostoma fulvum, Gray. Es la especie anterior.

68.—Alexia myosotis Draparnaud.

Draparnaud, Hist. des Moll., lam. III, fig. 16, 17.

Hab.—*Mallorca*, Alcudia.—*Menorca*, Mahon, Cala Porter, Santa Galdana, Fornells, Cala de San Esteban, Cabo Caballería.—*Ibiza*. Comun debajo de las algas medio secas, ó en los juncos. Especie variable en sus caracteres; el color es purpúreo-negruzco, castaño ó rojizo, la espira más ó ménos elevada segun los individuos, y la última vuelta presenta á veces una costilla longitudinal saliente. En la abertura, se notan las variaciones siguientes; ó bien hay tres dientes y el borde derecho es grueso por su parte interna (tipo de la especie), ó existe ademas otro diente muy pequeño; ó se observan tres dientes y el borde derecho no está engrosado, ó solo se perciben los dientes y no hay engrosamiento del borde. Se encuentran algunas de estas variaciones hasta en individuos de una misma localidad, lo cual hace sospechar si la *Alexia Payraudeaui* y la *Leuconia Micheli* se han establecido con variedades de la especie de Draparnaud. Llamo la atencion de los naturalistas sobre este punto.

69.—ALEXIA PAYRAUDEAUI Shuttleworth.

Pfeiffer, Monog. Auricul., pag. 147.

Hab.—*Menorca* (Homeyer). No he visto esta especie.

70.—ALEXIA BALEARICA, Dohrn.

Pfeiffer, Monog. Auricul., supp., pag. 366.

Hab.—*Mallorca* (Homeyer). No conozco esta especie.

71.—ALEXIA DENTICULATA Montagu.

Forbes et Hanley, Brit. Moll., lam. CXXV, fig. 3.

Hab.—*Menorca*, Cabo Caballería. Rara. Los dientes del interior del borde derecho son en mayor ó menor número (como maximum 6), aunque algunas veces faltan. A veces se distinguen en el interior de la abertura dos ó tres series de ellos, que se perciben por el exterior en los sitios correspondientes á los crecimientos de la concha.

72.—ALEXIA FIRMINI Payraudeau.

Bourguignat, Malac. Alger., vol. II, lam. VIII, fig. 40-44.

Hab.—*Menorca*, Cala de San Esteban, isla del Aire. Bastante abundante. Esta especie es considerada por algunos autores como perteneciente al género *Marinula*, si bien otros la incluyen en el género *Alexia*.

III.—*Resúmen.*

Muy probablemente se encontrarán mas especies de moluscos terrestres en las islas Baleares, pero por ahora, y segun el catálogo ántes expuesto (del cual me han proporcionado los principales datos naturalistas muy hábiles en la recoleccion de moluscos, como los Sres. Paz, Cardona, Prieto, etc.), se llega á los resultados siguientes.

1.° Se conocen hasta hoy 72 especies de las islas Baleares, 3 de las cuales son *Limax*, 1 *Amalia*, 1 *Testacella*, 1 *Succinea*, 2 *Leucochroa*, 36 *Helix*, 5 *Hyalina*, 5 *Bulimus*, 1 *Achatina*, 3 *Ferussacia*, 5 *Pupa*, 1 *Truncatella*, 1 *Cyclostomus*, 1 *Tudora* y 5 *Alexia*.

2.° El género *Helix* (separando de él las *Leucochroa* y las

Hyalina) forma por sí solo la mitad de la fauna malacológica terrestre de las Baleares, no estando representados en ella los demas géneros sino por un corto número de especies, y aún algunos por una sola.

3.° Pertenecen al género *Helix* casi todas las especies encontradas solo hasta ahora en las Baleares (13 de 15) y las de los demás géneros (á excepcion de 2), viven al mismo tiempo en Sicilia, en la Argelia, en España ó en Francia.

4.° Si se compara la fauna de las Baleares con las de los países inmediatos, se observa que viven al mismo tiempo en Sicilia, cerca de la mitad de las especies del grupo de islas de que me ocupo, en Francia y Argelia una mitad, y en España, por último, las tres cuartas partes.

5.° Las especies conocidas solamente, hasta ahora, de las Baleares, son las siguientes: *Limax Majoricensis; Helix Graellsiana, H. Balearica* (dudo mucho que viva esta especie en España, y se ha dado probablemente con este nombre la *H. marmorata*), *H. Ebusitana, H. Newka, H. Majoricensis, H. Caroli, H. Cardonæ, H. Prietoi, H. Pollenzensis, H. Homeyeri, H. Nyeli, H. Boissyi, Alexia Balearica.*

6.° Estas especies presentan, por regla general, mucha semejanza con otras especies españolas análogas (*Helix marmorata, H. trochoides, H. caperata, H. Setubalensis, H. Montserratensis, H. Barceloi* y *Alexia myosotis*, etc.)

Resumiendo todos los hechos expuestos anteriormente, ó sean los datos que hoy se poseen sobre los moluscos terrestres de las Baleares, se puede establecer:

I.—La fauna malacológica terrestre de las islas Baleares es *muy semejante* á la de España, y mas á esta que á las de Sicilia, Francia ó Argelia.

II.—Dicha fauna está caracterizada por la existencia de muchas *Helix* de la seccion *Jacosta*, en diversas localidades de las islas de Mallorca y Menorca, y que solo se han encontrado hasta ahora en las Baleares.

JARDIN DE LOS GLACIARES EN LUCERNA.

Habiendo tenido la fortuna de visitar durante el verano último la ciudad de Lucerna en compañía del Profesor Arneim, hermano del propietario del jardin que encabeza este artículo, y encargado por la Seccion de Ciencias Naturales de redactar durante este mes la parte correspondiente de la Revista de los progresos científicos que la Real Academia, en cumplimiento de lo preceptuado en sus estatutos, publica, he creido de mi deber dar una noticia circunstanciada de uno de los hechos más curiosos que aquella parte de Europa ofrece, allí donde en tan vasta escala se ostentan los más variados fenómenos de la historia de nuestro planeta, y donde el geólogo exento de las preocupaciones de sistemas preconcebidos, estudia con imparcialidad y buena fe los hechos, y busca con afan la causa de tan multiplicadas manifestaciones de todos los agentes que actuan sobre el globo, ora de un modo lento y paulatino, como en la erosion determinada por el agua líquida ó sólida, ora con más energía y prontitud, cuando se refieren á la aparicion de aquellas imponentes masas de granito y pórfido que tan profundas dislocaciones ocasionaron en la natural sobreposicion de los terrenos de sedimento, y en la extraña é incomprensible estratigrafía que algunos de ellos ostentan. Y ya que de este asunto se trata, aprovecho la ocasion para manifestar que fué un español insigne, pero como acontece de ordinario injustamente olvidado, el Sr. Gimbernal, quien por primera vez dió á conocer en cortes de terrenos admirablemente ejecutados, tan singulares fenómenos geológicos, debiéndose tambien al mismo la primera carta, si no geológica en el sentido que hoy se entiende, por lo ménos petrográfica de Suiza, publicada en 1804. En la Biblioteca del Gabinete de Historia Natural de Madrid, del que aquel fué en su tiempo Vice-Director, se conserva como joya de inestimable valía el original de esta obra, que haria bien la Academia en reimprimir, pues hoy es por todo extremo rara.

Pero dejando esto ya á un lado, veamos en qué consiste el llamado con sobrada propiedad Jardin de los Glaciares. Lindando con el famoso Leon de Lucerna, obra imperecedera del gran Thorwaldsen, erigida en honor de los suizos que perecieron en 1793 defendiendo al desgraciado Luis XVI, existe un terreno no muy extenso, en el que el comerciante en vinos Sr. Arneim, edificó hace pocos años una de esas casitas célebres por la belleza de su construccion y las comodidades de su interior, formando como complemento y adorno de aquella deliciosa vivienda, un jardin en el cual admira hoy el geólogo tantos y tan variados objetos de estudio, que bien puede asegurarse no haber otro que le iguale en toda la region alpina. Como en aquel país, por fortuna, los conocimientos de ciencias naturales están muy generalizados, resulta que no pasan desapercibidos ciertos hechos en apariencia insignificantes; debiéndose á esta circunstancia el descubrimiento á veces de los más curiosos é importantes. Con efecto, excitada la curiosidad del propietario por el aspecto de ciertos cantos que en el jardin existian, y llamándole la atencion otros signos tales como algunas estrías y cierto pulimento en las rocas, sospechó, con sobrado fundamento, que aquello bien pudiera ser resultado de la accion de un antiguo glaciar, practicando en seguida excavaciones que pusieran en evidencia, lo que no pasaba de ser una mera sospecha; y cuál no sería su sorpresa, al ver colmados sus deseos en una medida verdaderamente extraordinaria, convirtiéndose aquel pequeño recinto, ántes dedicado á flora y á la distraccion y esparcimiento de la familia, en un centro de enseñanza que, en órden á los efectos producidos por la accion de los glaciares, dudo que haya otro que le iguale, ni en la region alpina, donde tanto abundan estas manifestaciones de la actividad terrestre, ni en la Escandinava, donde tambien he tenido ocasion de estudiar estos fenómenos.

Pero para mejor quilatar la trascendencia del descubrimiento del Sr. Arneim, y el servicio que con ello ha prestado á la ciencia, conviene decir algo ó exponer en breves palabras, la síntesis, por decirlo así, de la dinámica de los glaciares.

Sabido es que aquellas inmensas masas de nieve perpétua, inmóviles para el vulgo, se hallan animadas de un movimiento más ó ménos acentuado, segun las condiciones climatológicas dominantes, que las hace avanzar, y á las veces tambien retroceder en el espacio de un año de 70, 80 y más metros, segun resulta de las pacientes investigaciones hechas por Agassiz, Desor, Charpentier y otros eminentes geólogos suizos. Resultado de la dilatacion que produce en su masa la congelacion del agua líquida que penetra por las infinitas grietas capilares que la surcan en todos sentidos, y en parte tambien, segun el célebre Tyndall, por efecto de la gran plasticidad de la nieve, y del fenómeno conocido con el nombre de recongelacion, este movimiento de avance y de retroceso determina efectos sumamente curiosos, obrando tan poderoso agente de la física actual del globo, como eficaz medio de trasporte y de erosion, hasta el punto de atribuirle algunos autores el primer lugar entre las causas que determinaron la formacion de los valles alpinos. Pero por efecto de todas las circunstancias que en él concurren, el modo de actuar este agente se separa bastante de lo que es propio del agua líquida, lo cual autoriza con sobrado motivo la distincion que hacen los geólogos, entre los depósitos llamados simplemente aluviones modernos y antiguos ó *diluvium*, y los canchales glaciales, como se distinguen tambien los cantos rodados, chinas ó guijarros, producto de corrientes líquidas, de los llamados errantes ó erráticos, trasportados á largas distancias por las nieves perpétuas, no sólo por el tamaño, sino tambien por la forma angulosa por regla general, y por otras circunstancias que en ellos se advierten. La erosion determinada por los glaciares tambien se diferencia de la ocasionada por las aguas líquidas, en que aquellos no excavan tan sólo el terreno y las rocas que lo constituyen, siguiendo la direccion de la corriente, sino que revistiendo la superficie toda que queda al descubierto, van igualando sus asperezas hasta hacerlas perfectamente lisas y redondeadas, constituyendo lo que los geólogos llaman rocas acarneradas ó aborregadas, por imitar el aspecto que ofrece la cabeza del carnero. A más de todo esto, la enorme presion que ejerce la masa de la nieve sobre los materiales del fondo del valle que le sirven de asiento, aumentada con la progresion del glaciar, produce el pulimento tanto más acentuado, cuanto más duras son las rocas que experimentan dicha accion, causando á veces no poca sorpresa, sobre todo á los que se hallan poco familiarizados con estos fenómenos alpinos, el encontrar en muchos puntos, libres hoy de nieves, superficies muy considerables brillantes, en especial si reciben los rayos directos del astro del dia, hasta el punto de hacerse molestos á la vista, segun tuve ocasion de observar en Agosto de 1850, en la montaña llamada Grimsel, en el Oberland de Berna, que separa la cuenca del Ródano de la del Aar. Estas superficies pulimentadas suelen presentar con frecuencia tambien otro hecho no ménos curioso, cual es la existencia de estrías, y á veces de surcos profundos, resultado igualmente de la presion de las nieves perpétuas cuando entre ellas y las rocas del fondo del valle que experimentan su presion, se interponen cristalitos ó fragmentos angulosos de cuarzo y de otros minerales igualmente duros, los cuales haciendo, digámoslo así, el oficio de buriles, abren estrías ó surcos segun sean agudas ú obtusas las superficies de contacto, y la mayor ó menor fuerza con que avanza el glaciar. Generalmente hablando, estos accidentes siguen direcciones paralelas, cambiando de rumbo á tenor de las variaciones que en su orientacion experimenta el valle; todo lo cual fácilmente da á entender la importancia que tienen en puridad estos pequeños detalles en la física del globo. Agréguese á todos estos efectos de la actividad glaciar, otro no ménos curioso é importante, cual es el conocido por molinos ó pozos de los glaciares, marmitas de los gigantes y *pot holl* como lo llaman los ingleses, que son unas cavidades abiertas en las piedras del fondo del valle ocupado por las nieves, y cuyo modo de formarse es por demás curioso. Examinada atentamente la superficie de un glaciar, aparece unas veces asurcada por multitud de corrientes de agua líquida, resultado del derretimiento de la nieve misma, representando, siquiera en miniatura, el aspecto de una cuenca hidrográfica, de extension con frecuencia considerable, como la que indica el malogrado Agassiz (1) en el borde septentrional del glaciar del Aar que en 1842 alcanzaba 1.100 metros en línea recta, ofreciendo iguales dimensiones otra que existía en el centro del Finesteraar, asegurando él mismo que esta cuenca frente á la cueva llamada Hôtel de los neuchatelenses, no media ménos de 250.000 metros cuadrados, representada por centenares de arroyuelos cuyas aguas, abriendo su propio lecho, comunican á la superficie del glaciar todas las desigualdades que ofrece en aquellos puntos en que la pendiente es escasa. Mas cuando por efecto de la diferente dilatacion de la nieve y lo desigual del fondo del valle, se ocasiona la abertura de grandes cavidades ó grietas transversales á la direccion del glaciar, se interrumpe la uniformidad de la superficie, y entonces las aguas líquidas, precipitándose en aquellas especies de sumideros, determinan en el fondo la formacion de cavidades notables, debidas á la incesante accion de las aguas líquidas y de los materiales que consigo arrastran. Resulta, pues, que cuando un arroyo de los que circulan por la superficie del glaciar encuentra á su paso una de estas grietas transversales, el agua se precipita, dando orígen á una cascada que corroe poco á poco la nieve que forma las paredes de la grieta, llegando á abrir una cavidad circular á veces, elíptica otras, de dimensiones proporcionadas al caudal que lleva el arroyo, y á la mayor ó menor resistencia que á la erosion opone la nieve.

La profundidad de estas cavidades es en general muy considerable, citando el mismo Agassiz sondeos practicados cerca del mencionado Hôtel en el glaciar del Aar, que llegaron hasta 260 metros. Y por cierto que desviando la corriente por algun punto más elevado queda el pozo en seco, y entonces, si su anchura lo permite, puede bajarse perfectamente hasta grandes profundidades, como hizo el indicado naturalista más de una vez, para explorar la estructura, coloracion y demás circunstancias que allí ofrece la nieve, verdadera roca de

---

(1) *Nouvelles études et expériences sur les Glaciers actuels.*—París, 1847.

agua sólida, que bien pudiera decirse ser de conglomeracion, formada de cristales obliterados de agua, cementados y endurecidos por la congelacion de la que, en estado líquido, penetra en su masa, ó por la recongelacion, como quiere Tyndall; de donde fácil es deducir cuán inexactas son las expresiones con que algunos las designan llamándolas heleros ó heleras, neveros y neveras. Resultado de tan singular disposicion, y de la incesante influencia que ejercen, así el agua líquida, como los materiales que arrastra ó los que encuentra á su paso, sobre las rocas del fondo, son los molinos, pozos ó marmitas de los gigantes, que de preferencia se observan en aquellos puntos que la retirada de las nieves deja al descubierto, y que no pudiendo atribuirse á otra causa, claramente indican que el punto ó la localidad donde hoy se observan tan extraordinarios fenómenos, fueron ocupados en tiempos más ó ménos remotos por tan poderoso agente. En 1869 tuve la satisfaccion de ver algunas de estas cavidades en los alrededores de la bonita ciudad de Gotemburgo, en Suecia; en todos los tratados de Geología se citan en muchos otros puntos; pero no tengo noticia de que, al menos en Europa, haya sitio alguno en que este singular hecho ostente la grandeza que en el que motiva estas mal pergeñadas líneas.

Y ahora, dada ya una idea de los resultados de la actividad de las nieves perpétuas en general, justo será que reseñemos en breves palabras todo lo que de maravilloso encierra el jardin de los glaciares de Lucerna. Tres años, desde 1872 hasta 1875, y grandes sacrificios pecuniarios ha costado el poner de manifiesto los interesantes objetos de estudio que el terreno del mencionado jardin conservaba, cual oculto tesoro de inestimable valor. Afortunadamente el celoso propietario no reparó en gastos, y teniendo fé en lo que habian de producir sus diligentes pesquisas, aun suponiendo que sus miras fueran hacer una especulacion, como con efecto ha logrado realizar, lo cierto es que llevó adelante sus exploraciones, las cuales dieron por resultado poner al descubierto uno de los centros más instructivos de Europa. Con efecto, pues, merced á la perseverancia del Sr. Arneim, no sólo el simple y curioso viajero, sino hasta el hombre de ciencia, puede satisfacer, en un pequeño rincon de la clásica Lucerna, su insaciable sed de saber. En una superficie de 5000 metros cuadrados, y á respetable distancia de las actuales nieves perpétuas, admíranse hoy dentro del recinto de aquella ciudad muchas superficies pulimentadas y estriadas, gran número de cantos erráticos sacados del fondo de 18 marmitas de los gigantes ó molinos de los glaciares, y otros muchos que permanecen en el interior de aquellas cavidades, como testimonio vivo de la funcion principalísima que les ha estado encomendada, por cuyo motivo reciben el nombre de piedras ó muelas de los indicados molinos. Y no llama tan sólo la atencion el número de todos estos objetos, sino sus descomunales proporciones, habiéndome confesado el mismo Sr. Arneim, que la extraccion de la muela del molino grande le costó más de un año de trabajo, y sobre 750 francos de gasto. Entre las marmitas, las hay de todas formas y dimensiones, debiendo hacer especial mencion de la mayor de todas, que se halla inmediata al bonito *chalet* donde residen el propietario y toda su familia, cuya cavidad mide 9 metros de diámetro en la boca situada al nivel del suelo, y sobre 8 metros de profundidad, observándose aun en su parte más baja un canto enorme, el cual, junto con el que tanto costó de extraer, movidos por el arroyo del antiguo glaciar, abrieron todas aquellas cavidades en cuyas paredes carcomidas se halla impresa, no sólo la accion del agente que las determinó, sino hasta el especial modo como actuaba, siendo, si no imposible, por lo ménos muy difícil de calcular, el inmenso espacio de tiempo que la realizacion de todas estas operaciones naturales supone. Los cantos que tales prodigios realizaron son, los unos de granito, los otros de gneis, de la arenisca dicha de Tavigliana, que se encuentra en el canton de Uri, y tambien de caliza numulítica, á juzgar por los restos fósiles que en abundancia contienen. Y como estos cantos fueron trasportados por la nieve misma, constituyendo lo que los geólogos llaman canchales superficiales, claro es que su presencia indica el punto ó puntos de donde procedia el glaciar que, al invadir y permanecer en el sitio donde hoy se advierten sus efectos, contando con el elemento tiempo, y con todas las circunstancias que allí concurrian, pudo con efecto realizarlas. Dicho glaciar procedia del Gotardo, y se extendió allá por los comienzos del período cuaternario, siguiendo el valle del rio Reuss, hasta la cordillera del Albis y del Jura, abriendo en el actual jardin de los glaciares las numerosas y vastas cavidades que van mencionadas, y dejando indelebles huellas de su existencia al tiempo de retirarse las nieves, como lo justifican los enormes canchales ó agrupamientos de cantos y cieno glacial de forma semicircular, ó en arco de círculo, que constituyen hoy colinas de notable altura, situadas en las riberas de los lagos de Sempach, Baldegg y de Wanwyl, que ha sido recientemente desecado.

Á veces se observa que la marcha rápida del glaciar llevaba uno de esos cantos que hacen el oficio de piedra de molino, cerca de la boca de una antigua marmita, y actuando sobre sus paredes, ya preparadas, dilataba considerablemente su cavidad. La disposicion en espiral simple ó múltiple que ofrecen de un modo muy pronunciado algunos molinos del indicado jardin, y especialmente las paredes de la gran marmita, prueba de un modo evidente que el agua del arroyo del glaciar no caia perpendicularmente, sino describiendo curvas muy caprichosas. Junto al emparrado que existe hácia el O. del jardin, se ve una marmita que ostenta dos huellas, de las cuales la mayor describe una revolucion y media de arriba abajo; el fondo está á 3^{m} de la superficie, y su diámetro no excede de $1,50^{m}$. Del lado S. E., y á muy corta distancia de la anterior, se advierte otra marmita no ménos curiosa; su profundidad es de $3,50^{m}$, y en la boca ofrece dos aberturas, por una de las cuales de tal modo se excavó su cavidad en forma de embudo, que la pared se aparta mucho de la vertical: las espirales descritas por la muela son muy profundas. Al S. de esta última y no lejos del Leon de Thorwaldsen, serpentea un surco trazado por el glaciar, que tiene $2,50^{m}$ de profundidad, en el cual se advierten varias marmitas muy pequeñas, ó en embrion, por decirlo así. Todo esto, y el suelo completamente pulimentado y lleno de estrías, afectando la forma acarnerada que dijimos caracterizar la especial erosion producida por los glaciares, excita sobre manera la atencion del que ve en ello otros tantos testimonios de la accion de las nieves perpétuas;

pero confieso que al acercarme á la gran marmita, mi asombro excedió á toda ponderacion, como ahora es sobrado torpe la pluma para expresarlo cual yo quisiera. Nada ménos que un año de asíduo y afanoso trabajo se necesitó para sacar los materiales que contenia y ponerla al descubierto, sacando de su fondo una de las dos muelas que labraron tan enorme cavidad, observándose en las paredes las profundas huellas de tan perseverante y secular accion. Tambien en esta marmita se observa que el lado S. es el más carcomido, rebasando en mucho sus paredes la línea vertical, lo cual prueba sin género ninguno de duda, que el glaciar estaba más alto de aquel lado, y por consiguiente que actuaban las aguas que por la superficie corrian, hasta encontrar la grieta por donde se precipitaron en direccion N,, cuyas paredes están á plomo.

Con objeto de limpiar dichas cavidades, se sacaron del fondo los cantos erráticos que, mezclados con grava, arena y cieno glacial, contribuyeron a cubrirlas, habiendo colocado los más notables en aquellos puntos del jardin, donde produjeran más efecto, completando de este modo el atractivo que aquel sitio ofrece. Y como si la naturaleza se hubiera complacido en acumular maravillas en un tan reducido espacio de terreno, hasta dió la feliz casualidad que rompiendo algunos de aquellos cantos, aparecieron en su interior objetos curiosísimos, y que llaman justamente la atencion del diligente observador. Una de aquellas masas se halla literalmente cuajada de esos singulares foraminíferos, que, por afectar la forma de pequeñas ó grandes monedas, se llaman Nunmulites; casi puede asegurarse que aquella roca procede del valle de Schœchen, en el canton de Uri, relacionado con la cuenca del Reuss. En el interior de otro canto apareció una magnífica palma fósil, perfectamente conservada, probablemente del terreno de la molasa, y en algunos se pusieron de manifiesto muchos peines y ostreas, aquellos pertenecientes al período nicoceno y estas al cretáceo, pues entre otras especies, es característica de uno de sus principales horizontes la *ostrea carinata*. A todos estos atractivos, el inteligente propietario ha querido añadir otros no ménos dignos de estudio, figurando entre ellos una bonita série de objetos prehistóricos interesantísimos, procedentes del palafito del lago de Baldegg, situado próximamente á 12 kilómetros al N. de Lucerna, donde los encontró en el año 1872 el Profesor K. Arneim, hermano del dueño del jardin. Al mismo Profesor se debe la publicacion de un opúsculo lleno de curiosos detalles acerca de los palafitos suizos, que el viajero puede adquirir en dicho punto.

Tambien se admira allí una bonita coleccion de fósiles y minerales de los Alpes, por más que en Suiza esto apenas llame la atencion á fuerza de ser tan comunes, pues por todas partes halla el viajero preciosos ejemplares con que enriquecer sus colecciones á poca costa. Quien haya hecho alguna excursion al Grinderwald, al Gotardo ó á cualquiera otro de los sitios clásicos de aquel pequeño rincon de Europa, habrá visto por sus propios ojos lo que acaba de indicarse.

Además de todo esto, en un pabellon situado hácia el N. E. del jardin, se ve el célebre relieve de la Suiza central, obra maestra del General Pfyffer, que empleó 36 años de su vida en llevarla á cabo. Al lado de este precioso monumento, que revela las grandes dotes y la paciencia á toda prueba de su autor, se observa otro mapa topográfico, tambien en relieve, del valle de Muota (canton de Schwyz), célebre en los fastos de la guerra por la retirada del ejército ruso al mando del General de Suwarrow, despues de la derrota que en 1800 sufrió en Zurich por las tropas francesas de Massena.

Por último, hasta en el pequeño café situado en el piso bajo de la casa del Sr. Arneim, y que este tiene arrendado á un industrial, se echa de ver el espíritu científico y la cultura general del país, pues en vez de embadurnar las paredes con pinturas más ó ménos adecuadas á la índole del establecimiento, el propietario ha tenido el buen acuerdo de representar en una de ellas el aspecto que ofrecia el jardin en 1872, ó sea cuando se empezaron las excavaciones y desmontes para sacar á luz todas las preciosidades que en su seno se encontraban, facilitando de este modo al viajero la apreciacion de los cambios que ha experimentado, trasformándose de lugar de recreo en centro de interesantísimos estudios. En otros lienzos de pared se hallan perfectamente representadas las principales escenas de la Suiza de otros tiempos, dando la forma y el atractivo de paisajes antediluviales, á los datos suministrados por el eminente botánico y paleontólogo de Zurich Sr. Heer, en su famosa obra intitulada *Aspecto primitivo de la Suiza*.

Imperfecta y todo como resulta esta mal perjeñada reseña, así por la falta de dotes de quien, cumpliendo un precepto reglamentario, la ha redactado, como por la índole misma del asunto, que más bien se presta al estudio directo que á la descripcion, por minuciosa y concienzuda que sea, siempre da una idea de lo que es hoy el jardin de los glaciares de Lucerna, y de la necesidad absoluta que tiene de visitarlo todo el que desee formar cabal concepto de la accion múltiple y maravillosa de las nieves perpétuas, y convencerse del desarrollo que este agente adquirió allá por los comienzos del período cuaternario, pues no creo exista, en Europa al menos, un recinto más clásico para el estudio de todos los efectos de su dinámica.

Si lograra al menos despertar con el escrito que antecede, en algunas de nuestras muchas eminencias científicas, el deseo de visitar el jardin de los glaciares de Lucerna, me daria por recompensado de todos mis afanes, pues de seguro que con dotes de saber y de elegancia de estilo, bien superiores á las mias, corregiria los muchos defectos de este escrito, y le deberíamos la verdadera y científica descripcion del jardin de los glaciares de Lucerna, y de cuantas preciosidades encierra.=*Juan Vilanova y Piera.*

VARIEDADES.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

En el concurso á premios abierto por esta Real Academia, cuyo plazo ha terminado en 31 de Diciembre de 1878, se han presentado las Memorias siguientes:

Para el primer premio, cuyo tema es: «Exposicion elemental y completa, histórica y didáctica de la teoría y principales aplicaciones de las cantidades imaginarias.—Influencia del imaginarismo sobre las demás nociones fundamentales de las Matemáticas, y lugar que le corresponde en la combinacion bien ordenada de las diversas teorías que componen la totalidad de la ciencia,» se han presentado dos Memorias.

Núm. 1.—Remitida por el correo en 10 de Diciembre de 1878, con el lema:

«Se me não ajudaes, hei grande medo
Que ó meu fraco batel se alague cedo.»

(Camoens.)

Núm. 2.—Entregada en Secretaría en 31 de Diciembre de 1878, con el lema: «La Matemática es la Metafísica más luminosa, más legítima y más autorizada por la verdadera crítica.»

Para el segundo premio.—No se han presentado Memorias.

Para el tercer premio, cuyo tema era: «Catálogo descriptivo de un grupo de la Farmacia española, indicando las especies de que el hombre saque ó pueda sacar alguna utilidad, y aquellas otras que le sean perjudiciales,» se ha presentado una Memoria.

Núm. 1.—Entregada en Secretaría en 31 de Diciembre de 1878, con el lema:

«Nihil admirari.»

(Horacio.)

Lo que por acuerdo de la Academia se hace saber al público en la forma acostumbrada.

Madrid 1.° de Enero de 1879.—El Secretario perpétuo, *Antonio Aguilar.*

CIENCIAS EXACTAS.

RESOLUCION GENERAL DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS.

(Conclusion.)

CAPITULO VIII.

Complemento de los anteriores.—Notas y adiciones á la doctrina matemática en ellos expuesta.

C.—*Sobre la determinacion de las raices imaginarias.*

1.—Si el procedimiento de Gräffe para determinar las raices *reales* de una ecuacion aventaja en brevedad y sencillez á todos los demas procedimientos conocidos, clásicos en cierto modo, y más comunmente empleados con igual objeto, el mismo método, ampliado y perfeccionado por Encke, es el único que, por regla general, y sin tropezar con enormes dificultades de ejecucion, puede practicarse cuando de la investigacion de las raices *imaginarias* se trata.

Para hallar estas raices, tan *reales* como las con este nombre designadas, y no menos importantes, propónese en casi todos los tratados de Algebra, como preferible á cualquiera otro, el siguiente artificio, basado en la ingeniosa teoría y complicadísima práctica de la *eliminacion:* en la doctrina que ménos atractivo suele presentar cuando por vez primera se estudia aquella parte principalísima de la ciencia matemática.

En la ecuacion $f(x) = 0$, se dice, póngase por x la doble expresion $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; y nos resultará esta otra:

$$f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = \varphi(\alpha, \beta) \pm \beta\sqrt{-1} \,.\, \psi(\alpha, \beta) = 0$$

De la cual se desprenden inevitablemente estas dos:

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha) - \frac{\beta^2}{2} f''(\alpha) + \frac{\beta^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(\alpha) - \ldots\ldots = 0; \quad \text{y}$$

$$\psi(\alpha, \beta) = f'(\alpha) - \frac{\beta^2}{2.3} f'''(\alpha) + \frac{\beta^4}{2.3.4.5} f^{\text{V}}(\alpha) - \ldots\ldots = 0.$$

Y los valores *reales* de α y de β, que simultáneamente satisfagan á estas dos ecuaciones, servirán para componer otros tantos pares de valores conjugados de x, *imaginarios,* y correspondientes á la ecuacion primitiva.

2.—En tan breves términos formulado, no parece que pueda haber otro método de investigacion más sencillo. Para penetrar la malicia que encierra, ó las dificultades de cálculo que le son inherentes, apliquémosle al ejemplo propuesto por Serret, en la pág. 367 del tomo I de su *Curso de Algebra superior:* ejemplo indudablemente rebuscado entre los más inocentes y sencillos: en su especie, casi pueril.

«Sea, pues, la ecuacion

$$x^4 - x + 1 = 0,$$

cuyas cuatro raices son imaginarias (*).

(*) Antes de afirmarlo, sería menester averiguarlo. Cuando la determinacion de las raices se verifica por el método de Encke, semejante investigacion preliminar es de todo punto innecesaria y excusada.

Si por x sustituimos en ella la expresion $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ nos resultarán estas otras dos:

$$(\beta^2 - \alpha^2)^2 - 4\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2) - (4\alpha^4 + \alpha - 1) = 0; \quad \text{y}$$

$$\beta(4\alpha(\beta^2 - \alpha^2) + 1) = 0.$$

Prescindiendo en la segunda del factor β, dedúcese que:

$$\beta^2 - \alpha^2 = -\frac{1}{4\alpha}.$$

Y, por sustitucion del valor de $\beta^2 - \alpha^2$ en la anterior, conviértese ésta en la que sigue:

$$64\alpha^6 - 16\alpha^2 - 1 = 0.$$

Ó, suponiendo que $\alpha = {}^1/_2\sqrt{\alpha_1}$, en esta otra:

$$\alpha_1^3 - 4\alpha_1 - 1 = 0.$$

Para resolver esta última ecuacion, atribuyamos á la incógnita α_1 diversos valores particulares, calculemos los correspondientes del primer miembro, y formemos el adjunto cuadro:

α_1	$\alpha_1^3 - 4\alpha_1 - 1$
2	-1
3	$+16$
2.1	-0.139
2.2	$+0.848$
2.11	-0.046069
2.12	$+0.048128$

Del cual se deduce que la *única* raiz positiva, α_1, se halla comprendida entre los dos últimos números ensayados, 2.11 y 2.12.

Corrigiendo estos valores por el método ó regla de aproximacion de Newton, hallaríamos que la misma raiz está tambien comprendida entre los números, mucho ménos discrepantes uno de otro, 2.1149 y 2.1150.

Y, aplicando de nuevo el mismo procedimiento de correccion á estos últimos números, nos resultaría, aproximada la raiz hasta la 8.ª cifra decimal, que $\alpha_1 = 2.11490754$.

De este valor de α_1, por la fórmula $\alpha = {}^1/_2 \sqrt{\alpha_1}$, se infiere luégo que $\alpha = \pm 0.72713603$.

Y, con el doble valor de α, sustituido en la ecuacion que precede á la final, conclúyese tambien que:

$$\beta = \pm 0.43001425; \quad \text{y} \quad \beta = \pm 0.93409929.$$

Los cuatro valores de x, de dos en dos *conjugados*, serán, pues, éstos en conclusion:

$$x = + 0.72713603 \pm 0.43001425 \sqrt{-1}; \quad \text{y}$$

$$x = - 0.72713603 \pm 0.93409929 \sqrt{-1}.»$$

3.—Así, con leves variantes de forma, se expresa Serret, en la obra y página, poco ántes, mencionadas.

Pues bien: sin admitir como demostrado por de pronto lo que no lo está todavía en realidad; sin apelar, para verificar la eliminacion, á recursos ó artificios muy ingeniosos, sí, pero que no á todo el mundo le ocurren siempre, ni es posible que muchas veces le ocurran á nadie; sin perder el tiempo en tanteos, infructuosos y arbitrarios con suma frecuencia; y hasta sin acordarse para nada del método de aproximacion de Newton,—por la simple y como rutinaria aplicacion del método *general* en la precedente MEMORIA explicado, en cosa de *veinte minutos*, se resolverá la ecuacion propuesta, conforme á continuacion se indica:

$(2^0)\quad x^4 - x + 1 = 0$

$(2^1)\quad x^4 + 2x^2 + x + 1 = 0$

$(2^2)\quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

$(2^3)\quad x^4 + 4x^3 + 14x^2 - 3x + 1 = 0$

$(2^4)\quad x^4 - 12x^3 + 222x^2 - 19x + 1 = 0$

$(2^5)\quad x^4 - 300x^3 + 48830x^2 - 83x + 1 = 0$

$(2^6)\quad x^4 - 7660x^3 + 2384319102x^2 - 90771x + 1 = 0.$

Y hecho esto, de la última ecuacion, transformada de la (2^0), inmediatamente se deduce que

$$2^6 \log.g_0^2 \quad = 9.3773644; \quad \text{y} \quad g_0^2 = 1.4012685$$

$$2^6 \log.g_0^2 g_1^2 = 0.0000000; \quad \text{y} \quad g_1^2 = 0.7136391$$

Y, de la primitiva, que

$$f_0 + f_1 = 0; \quad \text{y} \quad g_0^2 f_1 + g_1^2 f_0 = -1$$

$$f_0 = -f_1 = 1.4542719.$$

La ecuacion (2^0) se resuelve, en consecuencia, en las dos siguientes de *segundo grado:*

$$x^2 + 1.4542719\,x + 1.4012685 = 0; \quad \text{y}$$

$$x^2 - 1.4542719\,x + 0.7136391 = 0.$$

Cuyas raices son las mismas, poco ántes expresas, aunque aproximadas ahora, no hasta la 8.ª, sino solamente hasta la 7.ª cifra decimal. Pero hubiera bastado cambiar de tablas de logaritmos, y efectuar los anteriores cálculos con logaritmos de *ocho* ó *diez* cifras decimales, para obtener los valores de aquellas raices, con aproximacion á la verdad igual ó mayor que la obtenida por Serret. Lo cual ni vale casi la pena de mencionarse, ni en lo más mínimo invalida el mérito del segundo método de resolucion (*).

4.—Al procedimiento primero y más comun para determinar las raices imaginarias agregó Lagrange una modificacion, mucho más importante y curiosa en teoría que útil en la práctica.

Las dos ecuaciones $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y $\psi(\alpha, \beta) = 0$ subsistirán siempre con el carácter de fundamentales; pero si á ellas se agrega la transformada de la primitiva, cuyas raices sean los *cuadrados de las diferencias* de las mismas raices que aquella ecuacion, $f(x) = 0$, contiene, los valores *reales* de β se deducirán resolviendo esta tercera ecuacion, y los de α buscando, por el procedimiento del *m . c . d.*, las raices comunes á las dos anteriores, despues de poner en ambas por β los valores que de la tercera se hubieren desprendido.

De la ecuacion de los *cuadrados de las diferencias* se deducirán los valores de β investigando los de las raices reales *negativas* que esta ecuacion contenga: porque á cada par de raices imaginarias de la primitiva, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, corresponde una diferencia igual á $2\beta\sqrt{-1}$, cuyo *cuadrado* lo es á $-4\beta^2$, raiz de la transformada. Divididos, pues, por 4 los valores absolutos de las raices negativas de esta última ecua-

---

(*) Más rápida todavía que la resolucion de la ecuacion propuesta por Serret es la de aquella otra, citada en los preliminares de esta MEMORIA, y que Catalan propone como ejemplo de los ensayos infructuosos á que puede dar motivo la aplicacion irreflexiva del método para aislar las raices, denominado de las *diferencias:* método excelente, por sí solo, para perder ó malgastar el tiempo y la paciencia muchas veces.—La ecuacion á que aludimos es la siguiente:

$$(2^0) \quad x^4 + 3x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Cuya transformada final es ésta:

$$(2^4) \quad x^4 - 20610x^3 + 106233747x^2 - 4738x + 1 = 0.$$

De la cual, por los mismos pasos que en el texto, se concluye que la (2^0) equivale á estas otras dos ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 + 0.6994922x + 3.1742518 = 0; \quad \text{y}$$
$$x^2 - 0.6994922x + 0.3150349 = 0.$$

cion, bastará extraer la raiz cuadrada de los cocientes respectivos para hallar los de β, que, sucesivamente, deben sustituirse en las ecuaciones $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y $\psi(\alpha, \beta) = 0$, para concluir los de α que les corresponden.

5.—Si para hallar las raices reales de la ecuacion primitiva, $f(x)=0$, fuese menester, como Lagrange en principio suponia, formar la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de todas sus raices, indudablemente podría utilizarse la segunda ecuacion para determinar por el procedimiento referido las raices imaginarias, y completar así la solucion de la ecuacion propuesta. Pero como la formacion de la ecuacion auxiliar citada pide una *eliminacion* muy penosa de la incógnita x entre estas dos ecuaciones

$$f(x) = 0, \text{ y } f'(x) + \frac{y}{2} f''(x) + \frac{y^2}{2.3} f'''(x) + \ldots\ldots = 0,$$

en la segunda de las cuales representa la y la *diferencia* de dos valores cualesquiera de x, ó de dos raices de $f(x) = 0$, sólo en casos excepcionales muy sencillos se efectúa este trabajo preliminar, y sólo entonces podrá utilizarse la ingeniosa observacion hecha, y modificacion consiguiente en el método general, propuesta por Lagrange.

Y áun entónces habrá que proceder con cautela para determinar los verdaderos valores de β. Porque, si bien es cierto que á cada par de raices imaginarias conjugadas de la ecuacion $f(x) = 0$ corresponde en la de los cuadrados de las diferencias de sus raices una raiz real negativa, no siempre la proposicion recíproca es igualmente cierta, ó no siempre á cada raiz negativa de la segunda ecuacion corresponde un par de imaginarias en la primera. Por ejemplo: supongamos que la ecuacion $f(x) = 0$ posea, entre otras, tres raices: una real, α; y dos imaginarias, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. En la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de sus raices existirían entónces estas tres raices, reales y negativas: $-4\beta^2$, $-\beta^2$ y $-\beta^2$: de las cuales tan sólo la primera corresponde al par imaginario que se trata de determinar. Resulta, pues, que á las dificultades de formacion y resolucion de la ecuacion auxiliar, derivada de la primitiva, hay que agregar la de discernir cuáles son las raices negativas de la una en correspondencia clara y directa con las imaginarias de la otra. Y, por lo tanto, lo que alguna vez pudiera ser ó considerarse como simplificacion del método general de análisis de la ecuacion propuesta, tambien pudiera alguna otra vez convertirse en causa de complicacion, ó de fastidiosa incertidumbre y de ambigüedad en los resultados obtenidos.

6.—Ingeniosa y digna de conocerse es la modificacion introducida en el método de Lagrange, para determinar las raices imaginarias de una ecuacion, por el matemático inglés W. Rutherford. Expliquémosla, valiéndonos para ello de un ejemplo muy sencillo, ó razonando en el caso ménos complicado que puede presentarse.

Consideremos, pues, la ecuacion general de tercer grado,

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

cuyas raices representaremos por r, una, y por $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, las otras dos.

Si estas dos raices son imaginarias efectivamente, γ deberá considerarse como cantidad *positiva;* pero, si fuesen reales, bastaría suponer que el signo propio de γ era el *negativo.* De cualquier especie que sean, no prejuzgando nada sobre el signo de γ, siempre podrán representarse ambas raices en la forma referida.

De la ecuacion propuesta deduzcamos ahora otra, cuyas raices sean las de la primitiva, disminuidas de la cantidad α. Representando por y la nueva incógnita, la transformada de la primera ecuacion será la que sigue:

$$y^3 + (3\alpha + a) y^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha + b) y + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0.$$

Mas si las raices de la ecuacion propuesta supusimos ántes que eran r y $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, las de su transformada deberán ser estas otras: $(r - \alpha)$ y $\pm \sqrt{-\gamma}$. Luego la segunda ecuacion equivaldrá á esta otra:

$$y^3 + (\alpha - r) y^2 + \gamma y + \gamma(\alpha - r) = 0.$$

De donde se deduce que

$$3\alpha + a = \alpha - r;$$
$$3\alpha^2 + 2a\alpha + b = \gamma; \text{ y}$$
$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = \gamma(\alpha - r).$$

Ó, eliminando la γ entre las dos últimas ecuaciones de condicion, que

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + {}^1/_4(a^2 + b)\alpha + {}^1/_8(ab - c) = 0.$$

Y de esta ecuacion deduciremos el valor *real* de α; que nos servirá despues para hallar el de γ con auxilio de la segunda de las tres ecuaciones condicionales que preceden; y, finalmente, el de r, por medio de la primera. La resolucion completa de la ecuacion primitiva depende, pues, del conocimiento de una sola raiz real de la ecuacion auxiliar que se acaba de construir.

Si, por ejemplo, se nos diese la ecuacion

$$x^3 - 6x + 6 = 0,$$

concluiríamos de ella inmediatamente la que sigue:

$$\alpha^3 - 1.5\,\alpha - 0.75 = 0 \,\ldots..$$

La cual, resuelta por el método de Gräffe, ó por cualquiera otro, arrojaría este resultado:

$$\alpha = +1.423661.$$

De donde se deduce, por las fórmulas ó ecuaciones condicionales referidas, que

$$\sqrt{-\gamma} = \pm 0.283606\sqrt{-1}; \text{ y}$$
$$r = -2.847322.$$

La dificultad de hallar las raices *imaginarias* de la ecuacion propuesta queda así reducida á la de hallar los valores de las raices *reales* de otra ecuacion, en cierto modo, derivada ó transformada de la primitiva. Pero ¿de qué grado será esta segunda ecuacion auxiliar? ¿Y cómo sus coeficientes se componen con los coeficientes de la ecuacion primitiva?—Procuremos investigarlo, avanzando un paso más por el camino ya emprendido.

7.—De la ecuacion

$$x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0,$$

representando sus cuatro raices, reales ó imaginarias, por r_1, r_2 y $\alpha \pm \sqrt{-\gamma}$, se desprende la que sigue, cuyas raices son $(r_1 - \alpha)$, $(r_2 - \alpha)$ y $\pm\sqrt{-\gamma}$:

$$y^4 + (4\alpha + a)\,y^3 + (6\alpha^2 + 3a\alpha + b)\,y^2 +$$
$$(4\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)\,y + (\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = 0.$$

Pero las mismas raices que esta ecuacion posee tambien la siguiente:

$$y^4 + (2\alpha - r_1 - r_2)\,y^3 + \{(\alpha - r_1)(\alpha - r_2) + \gamma\}\,y^2 +$$
$$(2\alpha - r_1 - r_2)\,\gamma . y + \gamma\,(\alpha - r_1)\,(a - r_2) = 0.$$

Luego:

$$4\,\alpha + a = 2\,\alpha - r_1 - r_2\,;$$
$$6\,\alpha^2 + 3\,a\,\alpha + b = (\alpha - r_1)\,(\alpha - r_2) + \gamma;$$
$$4\,\alpha^3 + 3\,a\,\alpha^2 + 2\,b\,\alpha + c = (2\,\alpha - r_1 - r^2)\,\gamma; \quad \text{y}$$
$$\alpha^4 + a\,\alpha^3 + b\,\alpha^2 + c\,\alpha + d = (\alpha - r_1)\,(\alpha - r_2)\,\gamma.$$

Estas cuatro ecuaciones de condicion con cuatro incógnitas pueden reducirse á una sola ecuacion, con una sola incógnita, que, despues de resuelta y calculada, servirá para facilitar la solucion y cálculo de las demas. Eliminando, por ejemplo, las r_1, r_2 y γ, lo cual es muy sencillo, obtiénese para ecuacion final, ó *resolvente*, con la incógnita α, la que sigue:

$$\alpha^6 + \frac{3}{2}a.\alpha^5 + \frac{3a^2+2b}{4}.\alpha^4 +$$

$$\frac{a(a^2+4b)}{8}.\alpha^3 + \frac{a(2ab+c)+(b^2-4d)}{16}.\alpha^2 +$$

$$\frac{a(b^2+ac-4d)}{32}.\alpha + \frac{abc-a^2d-c^2}{64} = 0.$$

Para resolver una ecuacion de cuarto grado hay, pues, que hallar las raices *reales* de otra de sexto, cuyos coeficientes se derivan de los de la primitiva por procedimiento ó ley muy complicada. Cierto que esta ecuacion auxiliar, cuando la propuesta carece de segundo término, ó $a = 0$, se simplifica mucho y hasta se reduce al tercer grado; pero, si aquella primitiva ecuacion es completa, como lo será casi siempre, ó por regla general, para privarla de su segundo término habrá que transformarla previamente en otra, y efectuar con este objeto multitud de operaciones aritméticas. Lo que en un concepto se gane, se perderá, y habrá que rescatarlo á buen precio, en otro.

Y lo que, tratándose de las ecuaciones de 4.° grado, admite todavía algun remedio, ya no le admite, ni bueno ni malo, en las ecuaciones de los grados superiores. Por el procedimiento de Rutherford, lo mismo que por el de Lagrange, con el cual coincide en muchos puntos, la resolucion completa de la ecuacion de 5.° grado depende de la determinacion de las raices reales de otra de 10°; la de 6.° grado, de otra del 15°; la de 7.° de una del 21°; y así de las demas sucesivas. ¿Y es racional semejante manera de proceder? ¿ni comparable por asomo con el propuesto por Encke, y explicado en el Capítulo III de esta Memoria?—Decídalo ahora, con pleno conocimiento del asunto, el lector imparcial y reflexivo.

C'.—*Adicion á la nota precedente. Exposicion del método de* Horner *para hallar las raices reales de una ecuacion numérica.*

1.—Para hallar la raiz *real* de la ecuacion

$$\alpha^3 - 1.5\,\alpha - 0.75 = 0,$$

de cuyo prévio conocimiento depende el de las tres raices, real *una* é imaginarias las otras *dos*, de la ecuacion considerada en la pág. 473.

$$x^3 - 6\,x + 6 = 0,$$

Rutherford se vale del método de Horner, que bien pudiera ser completamente desconocido de nuestros muy contados lectores, á pesar de su mérito incuestionable y de sus 60 años de fecha, si sólo con los tratados elementales de Algebra, publicados en Francia, estuvieren familiarizados. Aunque el *nuevo* método, variante ingeniosa de los más antiguos de Lagrange y de Newton, sólo sea, como estos, aplicable á la determinacion de las raices reales de una ecuacion numérica, despues de aisladas ó de separadas unas de otras estas raices, ó de saber, por resultado de minucioso trabajo de análisis prévia, á cuántas ascienden en totalidad, cuántas son positivas y cuántas negativas, y entre qué límites, ó números consecutivos, ó muy poco diferentes uno de otro, se hallan distribuidas, oportuno nos parece definirle en este lugar y aplicarle á la resolucion de algun ejemplo, como complemento de lo expuesto en la anterior Memoria y adiciones que la acompañan. En Inglaterra el método de Horner es vulgarísimo; y, aunque por varios conceptos le consideremos inferior en mérito al de Gräffe, en algun caso pudiera mirarse como preferible al del matemático suizo, completado por Encke, por su sencillez teórica y eficacia notabilísima en la práctica.

En principio se reduce á lo siguiente.

2.—Dada una ecuacion numérica, $f(x) = 0$, y hallada la primera cifra, a, de cualquiera de sus raices reales y positivas, si por x sustituimos la expresion $a+y$, hallaremos otra ecuacion, $f(a+y)=f_1(y)=0$, del mismo grado que la primitiva, y cuyas raices serán las de ésta, disminuidas en la cantidad ó número a. Y, si entre a y $a+1$ no existía en la ecuacion $f(x)=0$ más que una sola raiz, en la $f(y)=0$ es evidente que sólo existirá otra, comprendida entre *cero* y la unidad del órden á que la a se refiera. Sustituyendo, pues, en la segunda ecuacion los números 0.0, 0.1, 0.2, ... 0.9 y 1.0, fácil será por tanteos averiguar entre cuáles dos consecutivos se halla comprendido el valor de y; y el menor de estos números, que en absoluto designaremos por b, representará la segunda cifra del valor de x, cuya primera designamos por a.

De la ecuacion $f_1(y)=0$, poniendo por y la expresion $b+z$, deduciremos luégo otra ecuacion, $f_1(b+z)=f_2(z)=0$, del mismo grado que las dos anteriores, y cuya incógnita z debe poseer un valor exclusivo, comprendido entre 0.0 y 1 del órden b, ó 0.00 y 0.1 del a.—Ensayando, pues, los diez números 0.00, 0.01, 0.02, ... , 0.09 y 0.1, hallaremos entre cuáles dos consecutivos se halla comprendido el valor de z: y el menor de estos números, en absoluto c, representará ó nos dará la tercera cifra de x.

Y continuando así indefinidamente esta misma serie de sustituciones, transformaciones, y ensayos ó tanteos, se hallarán cuantas otras cifras de la raiz buscada se consideren necesarias.

3.—Aclaremos esta regla, antes de indicar las varias simplificaciones que admite, y que propiamente constituyen el método de Horner, por medio de un ejemplo. Y el ejemplo será el poco ántes aducido.

Del exámen de la ecuacion

$$f(x)=x^3-1.5x-0.75=0$$

inmediatamente se infiere que el valor real de x se halla comprendido entre los números 1 y 2. Pongamos, pues, por x el binomio $y+1$, y resultará que

$$f_1(y)=y^3+3y^2+1.5y-1.25=0.$$

Esta segunda ecuacion debe tener una raiz comprendida entre 0.0 y 1; y nada más que una, si es verdad que la anterior sólo contiene otra, entre los números consecutivos mencionados, 1 y 2.—Ensayando, pues, los 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, ..., se concluye que el valor de y está realmente comprendido entre 0.4 y 0.5. Luego el de x lo estará entre 1.4 y 1.5; y la cifra 4 será, en consecuencia, la segunda de la raiz principal buscada.

En la ecuacion $f_1(y)=0$ pongamos ahora por y el binomio $z+0.4$; y hallaremos que

$$f_2(z)=z^3+4.2\,z^2+4.38\,z-0.106=0.$$

Y como z, complemento del valor aproximado de y, igual á 0.4, debe hallarse comprendida entre 0.00 y 0.1, ensayando en la última ecuacion los números consecutivos 0.00, 0.01, 0.02, ..., concluiremos por encerrar el valor de z entre los límites mucho más próximos 0.02 y 0.03.—La cifra 2 será, por lo tanto, la tercera de x.

Y del propio modo, ó por sustituciones y transformaciones análogas, deduciríamos luégo que

$$f_3(u)=u^3+4.26\,u^2+4.5492\,u-0.016712=0:$$

á cuya ecuacion corresponde un valor numérico de u, mayor que 0.003 y menor que 0.004.

Y, á continuacion tambien y como consecuencia de lo que precede, que

$$f_4(v)=v^3+4.269\,v^2+4.574787\,v-0.003026033=0:$$

de la cual se deduce para v otro valor, comprendido entre 0.0006 y 0.0007.

Limitando á esto la serie de operaciones, conclúyese, en fin, que $x=1.4236\ldots..$

Adviértase ahora que los tres valores aproximados de z, u y v (0.02, 0.003 y 0.0006), que, en absoluto considerados, representan las tres últimas cifras de la raiz x, comciden respectivamente con los cocientes, limitados á las centésimas, milésimas y diezmilésimas, de 0.106 por 4.38; 0.016712 por 4.5492; y 0.003026033 por 4.574787: últimos términos, con los signos cambiados, de las ecuaciones $f_2=0$, $f_3=0$, y $f_4=0$, por los coeficientes que inmediatamente les preceden.

4.—Y que esto, por regla general, debe muy *aproximadamente* verificarse siempre así, fácilmente se concibe.

Pues si de la ecuacion

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots\ldots + Px^2 + Qx + R = 0,$$

por el procedimiento expuesto deducimos estas otras:

$$A_1\,y^n + B_1\,y^{n-1} + \ldots\ldots + P_1\,y^2 + Q_1\,y + R_1 = 0,$$
$$A_2\,z^n + B_2\,z^{n-1} + \ldots\ldots + P_2\,z^2 + Q_2\,z + R_2 = 0,$$
$$A_3\,u^n + B_3\,u^{n-1} + \ldots\ldots + P_3\,u^2 + Q_3\,u + R_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

desde el momento en que admitamos que las incógnitas auxiliares y, z, u, ….., representan cantidades muy pequeñas, comprendidas entre 0.0 y 1; 0.00 y 0.1; 0.000 y 0.01; ….., los términos de las ecuaciones donde respectivamente figuran elevadas al cuadrado, y potencias superiores á la segunda, podrán considerarse como despreciables; y los valores *aproximados* de las mismas incógnitas, limitados á una sola cifra, del órden inmediato inferior al de la anterior, y ya conocida, de x, se hallarán por division, casi mental, de $-R_1$, ó $-R_2$, ó $-R_3$, ….. por Q_1, Q_2, Q_3 ….. Despues de todo, conforme pide la vulgarísima regla de aproximacion, propuesta por Newton.

5.—Por error material de cálculo, ó por fallar muy excepcionalmente la regla anterior, á las incógnitas z, u, v, ….., pudiéramos atribuir valores numéricos algo mayores ó menores de los que en realidad les corresponden. ¿De qué manera nos cercioraremos entónces de la equivocacion y lograremos sin demasiado esfuerzo remediarla?—Veámoslo en un ejemplo:

en el mismo de que nos hemos servido para la exposicion del método de que tratamos.

Si en la ecuacion

$$f_2(z) = z^3 + 4.2\,z^2 + 4.38\,z - 0.106 = 0,$$

suponemos que z es igual á $u + 0.03$, y no á $u + 0.02$, en vez de la poco ántes designada por $f_3(u) = 0$, hallaremos esta otra:

$$u^3 + 4.29\,u^2 + 4.6347\,u + 0.029207 = 0:$$

la cual no admite solucion *positiva*. Luego el valor hipotético de z, igual á 0.3, no admite verdadero incremento y debe considerarse como demasiado fuerte. Pero, formada ya la última ecuacion, si al cálculo de u aplicamos la regla acostumbrada $\left(u = -\dfrac{R_3}{Q_3}\right)$, y forzamos tambien en una unidad el cociente, hallaremos que $u = -0.007$; y x, por lo tanto, igual á $+1.423\,(= 1 + y + z + u)$: lo mismo que, procediendo con mayor cautela, habíamos poco ántes encontrado. Y, si en la ecuacion anterior, por u ponemos $-0.007+v$, recaeremos sin variante alguna en la ecuacion $f_4(v) = 0$: con lo cual el error, ó inadvertencia cometida en el cálculo de z, queda por completo remediada.

Pues suponiendo que por z se hubiese sustituido en la ecuacion $f_2(z) = 0$ la expresion $u + 0.01$, de la ecuacion entónces resultante

$$u^3 + 4.23\,u^2 + 4.4643\,u - 0.061779 = 0,$$

deduciríamos para u un valor igual ó superior á 0.01: prueba de que el de z, adoptado como bueno, es en realidad pequeño.—Con mediana práctica en el asunto, y un poco de atencion, el calculador decidirá inmediatamente lo que le conviene y debe hacer, para salvar ésta y cualquiera otra dificultad por el estilo que en el curso de las operaciones pudiera presentársele, más bien por distraccion suya que por error ó deficiencia del método.

6.—De lo hasta ahora expuesto se deduce que el cálculo de las incógnitas auxiliares, $y, z, u, \ldots\ldots$, no presenta dificultad alguna, despues de halladas las ecuaciones $f_2 = 0$, $f_3 = 0, \ldots\ldots$, que las contienen. Pero ¿cómo estas ecuaciones unas de otras pueden desprenderse fácilmente?

La designada por $f_1(y) = 0$, igual á $f(y + a) = 0$, sábese bien que equivale á esta otra:

$$f(a) + f'(a) \cdot y + f''(a) \cdot \frac{y^2}{2} + \ldots\ldots + f^n(a) \cdot \frac{y^n}{2.3\ldots\ldots n} = 0$$

Y lo mismo que la f_1 de la f, se desprenden de la f_1 la f_2, de la f_2 la f_3, y así todas las demas consecutivas.

Pero si, con arreglo á la ley en la expresion anterior formulada, hubieran de construirse sucesivamente las diversas funciones, $f_1, f_2, f_3 \ldots\ldots$, el procedimiento de Horner, para hallar los valores de las raices reales de $f(x) = 0$, sería por extremo largo y penoso, y de muy menguada utilidad en la práctica. El arte consiste en pasar de una ecuacion auxiliar á otra, de la primera á la segunda, ó de la octava á la novena, sin esfuerzo de atencion, ó de un modo rutinario y casi mecánico, mediante una serie de operaciones numéricas muy sencillas, y constantemente las mismas.

7.—Para explicar y comprender cómo puede ser esto así, supongamos que

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1} x + p_n.$$

Si por x ponemos en esta expresion el binomio $a + y$, nos resultará que

$$f(a + y) = q_1 y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots\ldots + q_{n-1} y + q_n.$$

Y si deshacemos lo hecho, poniendo en esta segunda ecuacion por y su igual $x - a$, hallaremos que tambien

$$f(x) = q_0 (x-a)^n + q_1 (x-a)^{n-1} + q_2 (x-a)^{n-2} + \ldots\ldots + q_{n-2} (x-a)^2 + q_{n-1} (x-a) + q_n.$$

Los coeficientes $p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ son dados ó conocidos en cada caso particular; y los q_0, q_1, q_2, ... q_n designan los que necesitamos conocer ó determinar, en funcion de los primeros, para pasar inmediatamente de la ecuacion primitiva, $f(x)=0$, á su transformada $f(a+y)=f_1(y)=0$.

Pues del exámen de la última ecuacion sin dificultad alguna se concluye: que el coeficiente q_n representa el resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$; el q_{n-1} el resíduo de la division del cociente entero, que al q_n corresponde, por $x-a$ parecidamente; el q_{n-2} el resíduo tambien de la division del segundo cociente entero por el mismo divisor constante $x-a$; y así todos los demás coeficientes q, hasta llegar retrogradando al primero q_0.

¿Y cuáles son, en funcion de los coeficientes conocidos, p, el primer cociente entero y el primer resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$?—Los que siguen.

Cociente:

$$\begin{array}{r|r|r|r}
p_0x^{n-1}+p_0a & x^{n-2}+p_0a^2 & x^{n-3}+\ldots\ldots+p_0a^{n-2} & x+p_0a^{n-1}\\
+p_1 & +p_1a & +p_1a^{n-3} & +p_1a^{n-2}\\
 & +p_2 & +p_2a^{n-4} & +p_2a^{n-3}\\
 & & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
 & & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
 & & +p_{n-2} & +p_{n-2}a\\
 & & & +p_{n-1}
\end{array}$$

Resíduo:

$$p_0a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}a+p_n=q_n.$$

Expresiones de cuyo exámen se deduce: que el resíduo es igual al último término del cociente, multiplicado por a, más el último término, p_n, de $f(x)$; que un coeficiente cualquiera del cociente, desde el segundo inclusive en adelante, se desprende del anterior por la misma ó análoga regla que el resíduo del último; y que el coeficiente del primer término coincide con el del primero de la funcion ó polinomio propuesto. La manera de hallar el valor de q_n, por multiplicaciones y adiciones sucesivas, y por regla general muy sencillas, queda con esto explicada; y como, á la par que el primer resíduo de la division de $f(x)$ por $x-a$, se habrá encontrado el cociente entero que le corresponde, repitiendo con este cociente las mismas operaciones que se hicieron con la funcion de donde procede, se hallarán el segundo resíduo, ó valor de q_{n-1}, y el nuevo cociente que ha de servirnos de base para encontrar por el mismo camino los demas cocientes y resíduos consecutivos.

8.—Sirva de ejemplo aclaratorio de cuanto se acaba de exponer, el siguiente:

$$f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 7.$$

Si por x ponemos en esta expresion el binomio $y+3$, resultará otra de la forma

$$f_1(y) = q_0 y^4 + q_1 y^3 + q_2 y^2 + q_3 y + q_4.$$

Y para hallar el valor de q_4 (resíduo de la division de $f(x)$ por $x-3$) habrá que efectuar las siguientes operaciones:

$$p_0 = 5 = p_0$$

$$p_0 a + p_1 = 5 \times 3 + 0 = 15 = p'_1$$

$$(p_0 a + p_1) a + p_2 = 15 \times 3 - 3 = 42 = p'_2$$

$$(p_0 a^2 + p_1 a + p_2) a + p_3 = 42 \times 3 + 0 = 126 = p'_3$$

$$(p_0 a^3 + p_1 a^2 + p_2 a + p_2) a + p_4 = 126 \times 3 - 7 = 371 = q_4.$$

El cociente entero de esta primera division es igual á

$$5x^3 + 15x^2 + 42x + 126.$$

Y el resíduo de su division por $x-3$, ó el valor de q_3, se hallará análogamente de este modo:

$$p'_0 = 5 = p''_0$$

$$p'_0 a + p'_1 = 5 \times 3 + 15 = 30 = p''_1$$

$$(p'_0 a + p'_1) a + p'_2 = 30 \times 3 + 42 = 132 = p''_2$$

$$(p'_0 a^2 + p'_1 a + p'_2) a + p'_3 = 132 \times 3 + 126 = 522 = q_3.$$

Al resíduo q_3 corresponde el cociente entero

$$5 x_2 + 30 x + 132;$$

del cual se desprende el resíduo q_2, de su division por $x-3$, por resultado de las siguientes sencillísimas operaciones.

$$p''_0 = 5 = p'''_0$$

$$p''_0 a + p''_1 = 5 \times 3 + 30 = 45 = p'''_1$$

$$(p''_0 a + p''_1) a + p''_2 = 45 \times 3 + 132 = 267 = q_2.$$

Á este último resíduo acompaña el cociente entero

$$5 x + 45;$$

que, dividido por $x - 3$, dará de resíduo, q_1, el número 60, segun á continuacion se indica:

$$p'''_0 = 5$$

$$p'''_0 a + p'''_1 = 5 \times 3 + 45 = 60 = q_1.$$

Y el último resíduo, ó valor de q_0, será el coeficiente 5, que se reproduce en todas las divisiones consecutivas.

Luego

$$f_1(y) = 5 y^4 + 60 y^3 + 267 y^2 + 522 y + 371.$$

9.—Esto, que tal vez parezca largo y complicado todavía, resulta en realidad muy sencillo disponiendo las operaciones del siguiente sistemático modo:

(A)	5	+ 0	— 3	+ 0	— 7
		+15	+45	+126	+378
(B)	5	+15	+42	+126	(+371)
		+15	+90	+396	
(C)	5	+30	+132	(+522)	
		+15	+135		
(D)	5	+45	(+267)		
		+15			
(E)	(5)	(+60)			

En la línea horizontal (A) se han escrito los coeficientes de $f(x)$, considerada esta funcion como polinomio completo.

Debajo del segundo coeficiente hemos puesto el producto del primero por 3; y debajo, en la línea (B), la suma de este producto y de aquel segundo coeficiente.

Debajo del tercero figura el producto de la suma anterior, 15, por 3; y debajo la suma de este producto y del coeficiente á que se refiere.

Debajo del cuarto el producto de la suma anterior, 42, por 3; y debajo la suma análoga á las dos anteriores.

Y debajo del quinto el producto de la última suma, 126, por 3; y debajo, y entre paréntesis, la suma de este producto y del último coeficiente: suma igual al resíduo q_4, y con la cual no hay ya ninguna otra operacion que verificar.

De la línea horizontal (B), completada á la izquierda con el coeficiente 5, y en la cual debe considerarse como suprimido el término entre paréntesis de la derecha, se pasa á la (C) como de la (A) se pasó á la (B). Y de la (C) se desprende la (D), y de ésta la (E), repitiendo las operaciones elementales, prolijamente enumeradas y explicadas en el caso primero.—Todo ello es tan rudimentario y fácil de aprender, y de tan perfecta monotonía, como cualquier regla fundamental de la Aritmética.

10.—Volvamos á considerar la ecuacion

$$f(x) = x^3 - 1.5\,x - 0.75 = 0,$$

cuya raiz real única se halla comprendida entre los números 1 y 2; y veamos cómo por el procedimiento anterior pueden deducirse sus transformadas sucesivas, funciones de $y, z, u, \ldots\ldots$, ántes ya consignadas.

Para pasar de la funcion $f(x)$ á la $f_1(y)$, hay que hallar, por de pronto, los resíduos de $f(x)$ por $x - 1$; y los resíduos análogos, luégo, por el mismo divisor de cuantos cocientes enteros se fueren sucesivamente encontrando. Por la regla anterior, las operaciones que esto pide se hallan comprendidas en el estadito adjunto:

(A)	1	+0	—1.5	—0.75
		+1	+1	—0.5
(B)	1	+1	—0.5	(—1.25)
		+1	+2	
(C)	1	+2	(+1.5)	
		+1		
(D)	(1)	(+3)		

$$f_1(y) = y^3 + 3\,y^2 + 1.5\,y - 1.25 = 0.$$

Despues de averiguar, por tanteo, que esta ecuacion tiene una raiz comprendida entre 0.4 y 0.5, se hallará la siguiente, simbólicamente representada por $f_2(z) = 0$, de este modo análogo, ó, en la forma, idéntico al anterior:

(A)	1	+3	+1.5	—1.25
		+0.4	+1.36	+1.144
(B)	1	+3.4	+2.86	(—0.106)
		+0.4	+1.52	
(C)	1	+3.8	(+4.38)	
		+0.4		
(D)	(1)	(+4.2)		

$$f_2(z) = z^3 + 4.2\,z^2 + 4.38 - 0.106 = 0.$$

El valor de z se halla en esta ecuacion comprendido entre 0.02 y 0.03 (cociente de $+0.106$ por 4.38); y, por lo tanto, para pasar á la siguiente, $f_3(u) = 0$, habrá que efectuar las operaciones, siempre arregladas á la pauta de las precedentes, que á continuacion se indican.

1	+4.2	+4.38	—0.106
	+0.02	+0.0844	+0.089288
1	+4.22	+4.4644	(—0.016712)
	+0.02	+0.0848	
1	+4.24	(+4.5492)	
	+0.02		
(1)	(+4.26)		

$$f_3(u) = u^3 + 4.26\,u^2 + 4.5492\,u - 0.016712 = 0.$$

Y así podría continuarse indefinidamente, aplicando la misma regla á la formacion de las diversas ecuaciones transformadas de la primitiva, hasta donde se creyese necesario prolongar la serie de operaciones indicadas.

11.—En la práctica el uso de los coeficientes, compuestos de gran número de cifras decimales, no es demasiado conveniente, y se evita, sin aumento de trabajo ni complicacion de ningun género, apelando á un recurso muy conocido y sencillo.

La ecuacion $f_1(y)=0$, en el supuesto de que la $f(x)=0$ sólo contenga una raiz real, comprendida entre los números a y $a+1$, debe contener otra, entre 0.0 y 1.0.—Pero si el segundo de sus coeficientes le multiplicamos por 10; el tercero por 100; por 1000 el cuarto; y así análoga y respectivamente los demas consecutivos, la nueva ecuacion resultante poseerá una raiz décupla de la $f_1=0$ primitiva; y, por lo tanto, contenida entre 0 y 10.

En el caso particular propuesto la ecuacion $f_1=0$, modificada, es la siguiente:

$$y^3+30\,y^2+150\,y-1250=0;$$

y en ella los ensayos ó tanteos necesarios para determinar los dos números consecutivos entre los cuales su raiz debe hallarse contenida se harán con los enteros 0, 1, 2 ..... hasta 9. Y el número inferior á su raiz expresará la segunda cifra del valor buscado de x.

Hallado este número, 4, á la transformada siguiente de $f(x)=0$, funcion de z, se pasará mediante las operaciones sencillísimas, con números enteros, que á continuacion se expresan:

$$\begin{array}{cccc}
1 & +30 & +150 & -1250 \\
 & +\ 4 & +136 & +1144 \\
\hline
 & +34 & +286 & (-\ 106) \\
 & +\ 4 & +152 & \\
\cline{2-3}
 & +38 & (+438) & \\
 & +\ 4 & & \\
\cline{2-2}
 & (+42) & &
\end{array}$$

Y aunque la ecuacion en z, con una raiz real comprendida entre 0.0 y 1.0, sea, en rigor, ésta:

$$z^3 + 42\,z^2 + 438\,z - 106 = 0,$$

prefiérese á ella la que sigue, de *raiz décupla:*

$$z^3 + 420\,z^2 + 43800\,z - 106000 = 0.$$

A la $f_3(u) = 0$, anteriormente deducida, ó á la que de la última ecuacion, funcion de z, podría deducirse, se sustituye, mentalmente casi, esta otra:

$$u^3 + 4260\,u^2 + 4549200\,u - 16712000 = 0;$$

la cual, como las precedentes de donde se ha derivado, debe contener una raiz comprendida entre 0 y 10: cuarta cifra del valor de x, prescindiendo del órden decimal á que pertenezca, muy fácil siempre de precisar.

Y de la última ecuacion, en fin, se desprenderían por el mismo método expuesto estas otras dos, necesarias para el cálculo de las cifras 5.ª y 6.ª de x, por division de sus últimos términos, tomados con signos contrarios, por los coeficientes de los que inmediatamente les preceden:

$$v^3 + 42690\,v^2 + 457478700\,v - 3026033000 = 0; \text{ y}$$

$$w^3 + 427080\,w^2 + 45799108800\,w - 279623744000 = 0.$$

12.—Los coeficientes de estas varias ecuaciones van sucesiva y muy rápidamente creciendo, hasta el punto de hacerse embarazoso su manejo, ó de complicarse cada vez más las operaciones numéricas que con ellos deben verificarse: lo cual limita ó dificulta la aplicacion del método de Horner, ó se opone en la práctica á la investigacion como indefinida de las raices incógnitas de la ecuacion propuesta. Llegados, sin embargo, á cierto punto, la operacion comenzada puede terminarse, ó pasando súbitamente del método de Horner al de

Newton, y hallando por una sola division otras tantas cifras casi de la raiz, como ya una en pos de otra, sucesiva y paulatinamente, se hubiesen encontrado; ó prolongando un poco más la aplicacion simplificada, ó abreviada, del primer método, ántes de recaer en el segundo. Expliquemos cómo esto puede verificarse, con pequeño incremento de trabajo sobre el ya efectuado desde un principio, en el mismo ejemplo á que en los párrafos anteriores nos hemos referido.

13.—De la ecuacion $f_4(v) = 0$ se ha concluido que v se halla comprendida entre los números 6 y 7; y, poniendo en ella por v la expresion $6 + w$, y multiplicando por 10 las raices de la ecuacion así resultante, se desprende la $f_5(w)=0$, apropiada al cálculo de w. Pero esta misma ecuacion, $f_5(w)=0$, obtenida por escalones, operando del modo sistemático referido sobre las ecuaciones análogas anteriores, se hubiera podido obtener tambien desde luégo, comenzando por transformar la $f(x)$ en otra, $F(x_1)=0$, cuyas raices fueran 100000 veces mayores que las buscadas, y sustituyendo despues en ella por x_1 el binomio $142360 + w$. Luego su último término coincidirá con el valor de $F(a)$, en la fórmula de aproximacion newtoniana, y el coeficiente anterior con el de $F'(a)$, si en la ecuacion $F(x_1) = 0$, y en el polinomio derivado $F'(x_1)$ se pone por x_1 su valor aproximado a, igual á 142360. La correccion w se deducirá, en consecuencia, por la mencionada fórmula, $w = \dfrac{-F(a)}{F'(a)}$, prolongando la division hasta la segunda ó tercera cifra decimal del cociente, en este caso. Y con incertidumbre muy pequeña, aunque por de pronto inevitable, en la última cifra decimal, se hallará de este modo que

$$x_1 = 142366.105; \text{ ó } x = 1.42366105 \ldots\ldots$$

14.—Pero en vez de reemplazar arrebatadamente la ecuacion $f_5(w) = 0$, ó

$$w^3 + 427080\,w^2 + 45799108800\,w - 279623744000 = 0,$$

por la

$$+ 45799108800\,w - 279623744000 = 0,$$

compuesta de sus dos últimos términos, considerando para ello como evanescentes los anteriores, conforme pide la aplicacion del método de Newton, y hemos ahora practicado para deducir el valor de w, hubiéramos podido proceder con alguna mayor lentitud y cautela, comenzando por omitir ó tildar, en el concepto referido, tan sólo el primer término. Y si, hecho esto, reemplazamos por tres ceros las tres últimas cifras de los coeficientes restantes, con la precaucion de forzar en una unidad la cuarta, cuando la tercera sea igual ó superior al número 5, y dividimos por 1000 el resultado, á la ecuacion $f_5(w) = 0$ habremos sustituido esta otra, mucho más sencilla:

$$427\,w_1^2 + 45799109\,w_1 - 279623744 = 0;$$

de la cual se deducirá para w_1 un valor igual casi al de w: idéntico, si nos atenemos á su primera cifra, sexta del valor buscado de x.

A la última ecuacion, cuya raiz w_1, necesariamente inferior á 10, se halla comprendida entre los números 6 y 7, apliquemos de nuevo, y sin variante alguna, el procedimiento de transformacion de Horner, poniendo en ella por w_1 el binomio $w_2 + 6$, y decuplando luego las raices del resultado; y hallaremos por de pronto que

$$427\,w_2^2 + 458042330\,w_2 - 481371800 = 0.$$

Ó, reemplazando por ceros las dos últimas cifras de los tres coeficientes, que

$$4\,w_3^2 + 4580423\,w_3 - 4813718 = 0.$$

El valor de w_3, que puede tambien considerarse como igual al de w_2, se halla comprendido entre los números 1 y 2. Luego, poniendo en la última ecuacion por w_3 el binomio $w_4 + 1$, y decuplando despues el valor de w_4, nos resultará esta otra:

$$4\,w_4^2 + 45804310\,w_4 - 23329100 = 0.$$

Y de esta ecuacion, suprimiendo las dos últimas cifras de los coeficientes, lo cual implica la supresion completa de su primer término, se infiere la que sigue:

$$+458043\,w_5 - 233291 = 0.$$

De la cual, por division abreviada de sus coeficientes, se deduce finalmente que $w_5 = 0,50932$.

El valor de la incógnita x, cuya primera cifra se determinó por tanteo; las cuatro siguientes, hasta la v inclusive, aplicando el método de Horner, sin abreviacion ó simplificacion alguna; las otras dos, w_1 y w_3, por el mismo método abreviado; y las seis últimas, w_5, por division de un número por otro, es en conclusion el siguiente, aproximado hasta la duodécima cifra decimal en este caso:

$$x = 1.423661050932\ldots..$$

15.—Á las ecuaciones de grado superior al *tercero* el método de Horner se aplica del mismo modo que á éstas, en el ejemplo acabado de resolver, y con simplificaciones análogas. Despues de obtenidas unas cuantas cifras de la raiz buscada, y cuando los coeficientes de la última ecuacion, transformada de la primitiva, se hubiesen complicado, ó crecido en demasía, se tachará *una* cifra en el penúltimo, *dos* en el anterior á éste, *tres* en el precedente inmediato, y así en todos los demás colocados delante, ó á la izquierda, hasta el primero inclusive. Por efecto de esta supresion de cifras, sistemáticamente repetida, llegará un momento en que desaparecerán los términos primero y segundo; el tercero luégo; y el cuarto, y el quinto, y los demas consecutivos, poco á poco. Y cuando solo subsistan los dos últimos, la operacion se terminará por la regla de Newton: dividiendo el posterior, tomado con signo contrario, por el precedente, de la manera y hasta el punto referidos.

16.—Sirva, por si todavía fuese necesario, para ilustrar la doctrina en las precedentes últimas líneas condensada, el siguiente nuevo ejemplo, algo más complicado que el en los anteriores párrafos propuesto y resuelto.

Si se nos diese la ecuacion

$$x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 150x - 89 = 0,$$

comenzaríamos por averiguar, por las reglas ordinarias del Álgebra, ó aplicando previamente á su análisis el teorema de Sturm, que sus cuatro raices son *reales: positivas* tres, y una *negativa;* y que la mayor de las tres se halla comprendida entre los números 9 y 8, y entre los 1 y 2 las dos menores; y la negativa entre — 8 y — 9. Y esto averiguado por cualquier medio, emprenderíamos la investigacion de la primera raiz poniendo en la ecuacion que se trata de resolver por x el binomio $x_1 + 7$. Prévias las operaciones numéricas sencillísimas que á continuacion se indican, y que minuciosamente se explicaron en los párrafos 8 y 9,

1	− 2	− 61	+150	− 89
	+ 7	+ 35	−182	−224
1	+ 5	− 26	− 32	(−313)
	+ 7	+ 84	+406	
1	+12	+ 58	(+374)	
	+ 7	+133		
1	+19	(+191)		
	+ 7			
1	(+26),			

y *decuplando* las raices de la transformada, se hallará el resultado siguiente:

$$x_1^4 + 260x_1^3 + 19100x_1^2 + 374000x_1 - 3130000 = 0.$$

Mediante algunos tanteos muy sencillos, de esta ecuacion se deduce que el valor de x_1 se encuentra comprendido entre los números 6 y 7. Si, pues, x_1 se supone igual á x_2+7 en la primera transformada de la ecuacion propuesta, encontraremos esta segunda, despues de decupladas sus raices:

$$x_2^4 + 2840\,x_2^3 + 2399600\,x_2^2 + 632144000\,x_2 - 1409440000 = 0.$$

Y, por division mental de su último término por el coeficiente del anterior, y cambio del signo, inferiremos en el acto que el valor de x_2 supera al número 2 y es inferior al 3. Poniendo, en consecuencia, por x_2 el binomio x_3+2, y decuplando asimismo las raices de la nueva transformada, nos resultará que

$$x_3^4 + 28480\,x_3^3 + 241666400\,x_3^2 + 641776512000\,x_3 - 1355308640000 = 0.$$

Y del exámen de esta ecuacion se deduce, á primera vista casi, que el valor de x_3 se halla tambien comprendido entre los números 2 y 3. Luego, poniendo por x_3 el binomio x_4+2, y prescindiendo de los ceros necesarios para decuplar las raices de la nueva ecuacion resultante, inferiremos, por el mismo procedimiento de transformacion aplicado en los casos anteriores, que

$$x_4^4 + 28488\,x_4^3 + 241837304\,x_4^2 + 642743519392\,x_4 - 70788722544 = 0.$$

Con todo lo cual habremos determinado las cuatro primeras cifras de la raiz buscada ($x = 7.622\ldots\ldots$); á las cuales fácil sería, dividiendo el último término, con el signo cambiado, por el coeficiente del anterior, agregar de golpe otras cuatro.

Pero si, en este punto de la operacion, en vez de posponer un cero al coeficiente del segundo término de la ecuacion, cuya incógnita es la x_4; y dos, tres y cuatro ceros, respectivamente, á los consecutivos; suprimimos una cifra á la derecha del penúltimo término, dos á la del inmediato anterior, y tres á la del que á éste precede, y tachamos ademas el primero, obtendremos esta otra ecuacion, abreviada de la que debíamos realmente resolver:

$$28\,x_4^3 + 2418373\,x_4^2 + 64274351939\,x_4 - 70788722544 = 0.$$

De la cual se deduce por de pronto que x_4 se halla comprendida entre los números 1 y 2. Y poniendo luégo por x_4 el binomio $x_5 + 1$, y verificando análogas supresiones de cifras, en el resultado inmediato de la sustitucion, á las efectuadas en el caso precedente, que

$$+ 24185\,x_5^2 + 6427918877\,x_5 - 6511952204 = 0.$$

De esta ecuacion, cuya raiz x_5 se halla comprendida entre los números 1 y 2, se pasa por los trámites expuestos á la que sigue, sustituyendo en ella por x_5 el binomio $x_6 + 1$:

$$+ 242\,x_6^2 + 642796725\,x_6 - 84009142 = 0.$$

Y como el valor de x_6 es inferior á la unidad, suponiéndole igual á $x_7 + 0$, sin cálculo alguno se deduce inmediatamente que

$$2\,x_7^2 + 64279672\,x_7 - 84009142 = 0.$$

Entre los números 1 y 2 se advierte que el vator de x_7 se encuentra comprendido. Y, por lo tanto, si en vez de x_7 sustituimos en la última ecuacion el binomio $x_8 + 1$, concluiremos que

$$+ 64279676\,x_8 - 19729468 = 0.$$

De donde, por division abreviada, se desprende con suma rapidez que $x_8 = 0.3069317$, con incertidumbre de alguna unidad, en la última cifra.

El valor buscado de x será, pues, el que sigue:

$$x = +\,7.622\,110\,130\,693\,17\,\ldots..$$

Y si, para comprobar su exactitud ó grado de aproximacion á la verdad, determinamos por el mismo procedimiento, y con independencia los unos de los otros, los valores de las otras tres raices de la ecuacion propuesta, hallaremos parecidamente que

$$x = +\,1.390\,179\,663\,422\,28\,\ldots..$$

$$+\,1.042\,741\,427\,124\,49\,\ldots..$$

$$-\,8.055\,031\,221\,239\,94\,\ldots..$$

La suma de los cuatro valores así encontrados es igual y de signo contrario al coeficiente del segundo término de la ecuacion propuesta: lo cual puede considerarse, si no como prueba irrefutable, como indicio suficiente de que en el curso de las operaciones numéricas, verificadas para obtenerlos, no se ha deslizado error alguno de cuantía.

17.—La investigacion de las dos raices positivas de la ecuacion

$$x^4 - 2\,x^3 - 61\,x^2 + 150\,x - 89 = 0,$$

comprendidas ambas entre los números enteros consecutivos 1 y 2, exige de parte del calculador una precaucion, tan sencilla como importante, no advertida todavía, y concerniente á la distincion ó separacion de aquellas raices.

Poniendo, en efecto, en la ecuacion de que se trata por la incógnita x el binomio $x_1 + 1$, despréndese desde luego la siguiente transformada suya:

$$x_1^{\,4} + 20\,x_1^{\,3} - 6100\,x_1^{\,2} + 26000\,x_1 - 10000 = 0.$$

Y ¿es en este caso evidente que la nueva ecuacion sólo puede contener *una* raiz real y positiva, inferior al número 10, como en el §. 11, consecuencia del §. 2, se supuso?—De ningun modo. Si los dos valores de x, comprendidos entre los números 1 y 2, no discrepan uno de otro ni en una décima parte de la unidad, los de x_1, que deben servir para completarlos, limitados en su expresion numérica á una sola cifra, serán absolutamente iguales; y la ecuacion de donde procedan sólo admitirá una raiz comprendida entre 0 y 10. Pero, si la discrepancia fuese mayor, como en este caso sucede, los de x_1 diferirán en más de una unidad, y la ecuacion que ha de servirnos para determinarlos, admitirá dos raices distintas, hasta por sus primeras cifras, comprendidas ambas entre los límites referidos. En la duda, pues, y miéntras la separacion de los valores de x no se hubiese efectuado por completo, habrá que sustituir en las transformadas sucesivas de la ecuacion propuesta los números consecutivos 0, 1, 2 ..... 10, para deducir, por los cambios de signo de los resultados, la posicion y valores de las raices auxiliares, x_1, ó x_2, ó x_3, ..., necesarios para componer los de la incógnita principal x.—Procediendo con esta precaucion, hállase, en el ejemplo de que ahora se trata, que la incógnita auxiliar ó complementaria x_1 admite dos valores: uno, comprendido entre cero y la unidad; y otro, entre los números 3 y 4. Luego los valores de x lo estarán entre 1.0 y 1.1; y entre 1.3 y 1.4. Y si, esto averiguado, ponemos en la primera transformada por x_1 el binomio $x_2 + 0$, hallaremos la siguiente, apropiada á la determinacion exclusiva de la raiz menor:

$$x_2^4 + 200\,x_2^3 - 610000\,x_2^2 + 26000000\,x_2 - 100000000 = 0;$$

ó esta otra, que se referirá á la segunda raiz, si el binomio $x_2 + 3$:

$$x_2^4 + 320\,x_2^3 - 586600\,x_2^2 - 9952000\,x_2 + 137210000 = 0.$$

La primera de las cuales sólo admite ya una raiz positiva, inferior á 10, comprendida entre los números 4 y 5; y otra, poco mayor que 9, la segunda. Y, en consecuencia, la determinacion sucesiva de las demas cifras de ambas raices, por el método de Horner, no presenta desde este momento dificultad teórica de ningun género.

En suma: miéntras las raices *casi iguales* de la ecuacion propuesta no comiencen á separarse ó deslindarse unas de otras, las ecuaciones transformadas suyas sucesivas, cuyas incógnitas son la x_1, ó la x_2, ..., admitirán una sola raiz, inferior á 10, comun á todas aquellas raices, y fácil de precisar por tanteo. Pero, tan pronto como en una transformada se adviertan dos cambios de signo, producidos por la sustitucion en ella de los números 0, 1, 2 ..... 10, la separacion de las raices en dos distintos grupos queda efectuada; y el cálculo ulterior de las unas se verificará con independencia completa del de las demas. El principio es general; y, aplicado con discernimiento y constancia, producirá indefectiblemente la separacion de todas las raices que entre sí discrepen en cantidad algo mayor del límite de aproximacion á la verdad que nos hayamos propuesto obtener.

18.—En este carácter importante, como en otros varios, el método de Horner concuerda á la letra con el mucho más antiguo de Lagrange.

Recordemos, en efecto, que este celebérrimo matemático propuso, para determinar el valor de una raiz de la ecuacion $f(x) = 0$, comprendida entre los números a y $a + 1$; sustituir por de pronto á la incógnita x el binomio $a + \frac{1}{y}$; y en la transformada, $f(a + \frac{1}{y}) = \varphi_1(y) = 0$, hallar luégo por tanteo el *único* valor positivo de y que debe satisfacerla: ó, procediendo por partes, los dos números enteros consecutivos entre los cuales la y estuviese comprendida. Encontrados estos números, b y $b + 1$, en la ecuacion $\varphi_1(y) = 0$ prescribió poner por y el binomio $b + \frac{1}{z}$; y en la segunda transformada, $\varphi_1(b + \frac{1}{z}) = \varphi_2(z) = 0$, determinar parecidamente los dos números, c y $c + 1$, que limitan el valor positivo, *único* tambien, de z. Y, por resultado de esta serie de operaciones, sencillísimas en teoría, prolongada hasta donde fuere ó se juzgase necesario, es claro que se concluirá por hallar el valor de x, expresado en *fraccion contínua*, y no *decimal*, como siguiendo el método de Horner.

Pero todo esto es en la hipótesis de que la ecuacion que tratamos de resolver contenga *una sola* raiz, entre a y $a+1$. Porque, si contuviese *dos*, alguna de las transformadas sucesivas, $\varphi_1(y)=0$, ó $\varphi_2(z)=0$, ó $\varphi_3(u)=0$, ... debería contener otras dos; y, en la duda de cuál será la que las contenga, habrá que proceder al análisis de todas muy cuidadosamente, hasta dar con aquella donde el deslinde de las raices buscadas se efectúa, ó comienza á verificarse.

19.—Pero, aunque segun lo acabado de exponer, discrepen poquísimo en teoría los procedimientos de Lagrange y de Horner, no sucede lo mismo en la práctica. Porque en el de Lagrange el valor de una incógnita auxiliar cualquiera, $y, z, u, \ldots\ldots$, puede ser grande ó pequeño, y no hay regla segura, ni expedita, que sirva para determinarle: mientras que, con arreglo á los preceptos del matemático inglés, ya se ha visto en los anteriores párrafos cuán sencilla y acertadamente se determina. Ni en brevedad, ni en precision, ni en ningun otro concepto, aventajan al de Horner, que resume cuantas ventajas ofrecen los de sus célebres antecesores, el método de Newton, ineficaz hasta que ya la ecuacion está casi resuelta, ni el de Lagrange, muy trabajoso, y de lentitud desesperadora con frecuencia. El lector puede convencerse de ello fácilmente aplicando los tres métodos á la resolucion de la vulgarísima ecuacion siguiente, de las ménos complicadas que pueden proponerse:

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Por el de Horner, en cosa de dos á tres horas de tiempo, y con trabajo casi mecánico é irreflexivo, se hallarán, con independencia unos de otros, los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} x = &+1.356\,895\,867\,892\,209\,439\ldots.. \\ &+1.692\,021\,471\,630\,095\,875\ldots.. \\ &-3.048\,917\,339\,522\,305\,314\ldots.. \end{aligned}$$

Las simplificaciones del método no deben comenzar á introducirse hasta despues de encontrar, sin abreviacion alguna en el cálculo, las seis ó siete primeras cifras decimales de las tres raices. Las cifras que siguen se desprenderán luégo muy sencilla y rápidamente, conformándose con los preceptos anteriormente explicados, y en el §. 15 resumidos.

CIENCIAS NATURALES.

MINERALOGIA.

Sobre unos ejemplares de cuarzo recubiertos de un baño de pirita de hierro.

El Sr. D. Antonio Casares, Catedrático de química de la Universidad de Santiago, y actual Rector de la misma Universidad, ha remitido á la Academia la siguiente carta:

Sr. Secretario:

«Cerca de la márgen derecha del Miño, á las inmediaciones de la ciudad de Orense, hay un terreno cubierto de arena y cantos rodados, arrastrados por el rio que en varios puntos desprendia abundantes vapores acuosos, lo que hacia suponer que existia allí algun manantial de agua termal, tal vez de idéntica composicion á la que á corta distancia del mismo sitio se utiliza hace tiempo para baños, que se conocen con el nombre de *Caldas*. El propietario de estos trató de averiguar si existia en efecto en el terreno indicado lo que se sospechaba, y con tal objeto dispuso abrir una zanja desde la orilla del rio en direccion á aquel punto. A la distancia de unos 60 metros de la márgen del rio, y como unos 2 debajo de la superficie del terreno, se halló un estanque hecho con piedras de sillería bien labradas, en el que sin duda alguna se recogia antiguamente el agua mineral para emplearla en baños. A 2 metros de distancia del estanque se tropezó con una especie de pozo circular de 60 centímetros de diámetro interior, cuyas paredes, hechas con piedras no labradas, pero unidas con buena argamasa, tenían como 40 centímetros de grueso. Estaba este pozo completamente atascado con arena y cantos rodados de igual naturaleza que los que forman el terreno aluvial de las márgenes del rio: se limpió hasta la profundidad de $1^{m},50$, y cuando yo lo he visto estaba completamente lleno de agua, que segun me ha dicho el propietario procede de dos abundantes manantiales.

Al limpiar el pozo, en su fondo se encontraron varios de los cantos rodados, como barnizados con una capa dorada y brillante, que llamó mucho la atencion de los que los vieron, y que son en efecto curiosos, como V. puede observar en los que le envio.

La capa dorada y metálica de que están cubiertos, es de bisulfuro de hierro-pirita y pequeños cristales cúbicos de esta misma sustancia; se hallan metidos en un fragmento de la argamasa que he recogido de las paredes del pozo.

La formacion de esta pirita de hierro en el seno del agua se concibe fácilmente, teniendo en cuenta la composicion de esta, y las circunstancias del terreno próximo al pozo.

El agua de los manantiales es débilmente sulfurosa; contiene 3 milígramos de sulfuro de sodio en 1 litro, su temperatura es de 60.

A la inmediacion del pozo está la tierra mas elevada, y en ella hay una abundante vegetacion. Esta tierra permeable da paso á las aguas de lluvia, que se cargan más ó ménos de ácidos orgánicos, resultantes de la descomposicion de las plantas, y disuelve algo de óxido de hierro del terreno, formando así un agua férrea crenatada de las que con tanta frecuencia se encuentran en Galicia. Algun chorrito de esta agua penetraba en el pozo, pues yo mismo he visto á sus inmediaciones dos ó tres que dejaban el depósito ocráceo característico de estas aguas, cuando se descomponen por el contacto del aire. La mezcla del agua férrea con la sulfurosa, produjo indudablemente el sulfuro de hierro. Lo notable es que en vez de sulfuro ferroso, se haya formado el bisulfuro, y que este se depositase y adhiriese fuertemente á los cantos rodados que habia en el pozo, y hasta que cristalizase en pequeñitos cubos en lo interior de la argamasa. Sin duda el calor, la presion, el contacto del aire, la presencia del ácido carbónico que, aunque en pequeña cantidad, se desprende del fondo del pozo, y el transcurso del tiempo, ha modificado la accion química y dado lugar á la produccion lenta del bisulfuro.

De todos modos me parece un fenómeno curioso, por cuya razon remito á V. 2 ejemplares de los cantos rodados y esta pequeña reseña.

Queda siempre á la disposicion de V. su afectísimo amigo Q. B. S. M.=*Antonio Casares.*»

Informe leido en sesion de la Real Academia de Ciencias por el académico numerario Excmo. Sr. D. Manuel Fernandez de Castro, *acerca de la comunicacion anterior.*

La comunicacion que el ilustrado catedrático de Química de la Universidad de Santiago, D. Antonio Casares, ha dirigido al Secretario de esta Real Academia, acompañada de dos guijas de cuarcita cubiertas con un baño de pirita de hierro, es por todos conceptos digna de aprecio, pues aunque no desconocido, es curioso el fenómeno que se describe, y muy razonable la teoría por medio de la cual se explica el orígen de la sustancia que barniza, por decirlo así, los cantos rodados.

Se han encontrado estos á metro y medio por bajo de la superficie actual del terreno, entre los escombros que llenaban un pozo, probablemente destinado en otro tiempo á recoger las aguas minerales que surgen á corta distancia de las Caldas, en las inmediaciones de Orense. Atribuye el Sr. Casares la formacion del sulfuro de hierro á la accion mútua que se ha ejercido entre las aguas ligeramente sulfurosas de los manantiales y las de lluvia cargadas de ácidos vegetales y óxido de hierro, que atraviesan el suelo permeable, donde, además de dichos guijarros, se halló un fragmento de argamasa, en cuyas cavidades existian cristales cúbicos de la misma pirita. Lo que el Sr. Casares encuentra mas notable es que, en vez de sulfuro ferroso, se haya formado el bisulfuro, lo cual explica diciendo, que sin duda el calor, la presion, el contacto del aire, la presencia del ácido carbonico, que en corta cantidad se desprende del fondo del pozo, y el transcurso del tiempo, han modificado la accion química y dado lugar á la produccion lenta del bisulfuro. Voy con este motivo á permitirme hacer algunas observaciones.

Muy frecuente es la pirita ó bisulfuro de hierro en la naturaleza, pues se halla en todas las formaciones, desde las más antiguas hasta las más modernas, y lo mismo entre las rocas cristalinas ó hipogénicas, que entre las sedimentarias; pudiendo asegurarse que, de los minerales que no constituyen esencialmente las rocas, es uno de los más abundantes y que con más generalidad se encuentra esparcido en la masa del globo.

La gran mayoría de los geólogos se dan cuenta de la presencia de esta sustancia en los filones, en las masas eruptivas y en muchos terrenos de sedimento, suponiendo que el hierro vino ya del interior de la tierra en estado de sulfuro, unas veces envuelto en la pasta semifluida de rocas, como el granito, de orígen ígneo, otras en las aguas termales que desde las épocas mas remotas han surgido y surgen á la superficie, ó se infiltran entre las grietas y poros de las de sedimento que atraviesan. Cuando se hallan juntos ó muy próximos el óxido de hierro y la pirita, es general atribuir el primero á la descomposicion de la segunda, sin duda porque en los laboratorios es mas comun la conversion de la pirita en óxido que la del óxido en sulfuro; se reconoce, no obstante, la posibilidad de que esto último haya ocurrido tambien, y aun con frecuencia, en la naturaleza; pero los autores que de ello han tratado, opinando por cierto de muy diversa manera acerca de la síntesis de la pirita, la han estudiado, no como problema petrogénico, sino casi exclusivamente desde el punto de vista paleontológico, en la transformacion de los séres animales y vegetales que se encuentran al estado fósil, convertidos en dicha sustancia, pero conservando su forma primitiva.

Hay, sin embargo, quien, como Forshhammer, trata de explicar la formacion de las piritas que se hallan en ciertos terrenos de orígen marino, diciendo que las algas contienen hasta un $8\frac{1}{2}$ por 100 de ácido sulfúrico, en combinacion con la potasa, y que donde quiera que lleguen á estar en contacto grandes masas de dichas plantas en putrefaccion con arcillas ferruginosas, han de formarse piritas, á expensas del azufre de las primeras y del hierro de las segundas.

Lyell, que se hace cargo de esta opinion en sus *Principios de Geología* (1), al tratar en los *Elementos* de la misma ciencia, escritos con posterioridad, de la fosilizacion de los restos orgánicos, parece adoptar la teoría de Pepys, fundada en el hecho de haber caido unos ratones en una vasija de barro que contenia sulfato de hierro, la cual permaneció olvidada en un rincon de su laboratorio, encontrándose en ella, al cabo de mas de un año, algunos granos de pirita de hierro revueltos con los huesos de aquellos roedores: deduciendo de lo que observaba que, por la accion mútua de la sustancia animal y del sulfato de hierro, este habia perdido su oxígeno, precipitándose el sulfuro ó pirita de hierro con el azufre, el sulfato de hierro verde cristalizado y el óxido negro del mismo metal, sustancias que contenia tambien el sedimento depositado en el fondo (2).

El sulfato, en efecto, pudo desoxidarse por el hidrógeno y el carbono de la materia orgánica, en cuyo caso, suponiendo que dichas sustancias se desprendieron en estado de gas de pantanos, se explicaria la reaccion por la fórmula

$$3(FeO,SO^3)+C^2H^4+C=FeS^2+Fe^2O^3+S+2CO^2+CO+4HO.$$

Ahora bien, admitiendo que esta accion química de las materias orgánicas en descomposicion se ejerza sobre el sulfato de hierro disuelto en las aguas del mar, se explica de una manera más general que con la teoría de Forshhammer la presencia del sulfuro de hierro en las rocas que se han formado en el fondo del Océano. Sin embargo, Mr. Tabarié de Grandsaignes, de quien es la precedente fórmula (3), que re-

---

(1) *Principles of Geology, by Sir.* Ch. Lyell. New-York, 1853, página 770.

(2) *Manuel de Géologie,* traduccion de la 5.ª edicion, por Mr. Hugard. París, 5.ª edicion, 1856; t. I, pág. 67.

(3) *Bull. de la Soc. Géol. de France,* 2.ª série, t. XXV, pág. 583.—1868.

presenta las reacciones ocurridas en el caso observado por Pepys, niega que esta teoría pueda aplicarse de una manera general á la conversion de las materias orgánicas en pirita de hierro, y explica dicha fosilizacion de otro modo.

Los sulfuros, dice, son cuerpos abundantemente esparcidos en la naturaleza; y si las reacciones químicas han podido dar orígen á las primeras partículas sulfuradas, la formacion de estas se ha desarrollado despues rápidamente por las propiedades eminentemente eléctricas de los sulfuros. Para fundar su teoría apela Mr. Tabarié al método analítico y al sintético á la vez, teniendo en cuenta, en primer lugar, las circunstancias en que se presentan los cuerpos organizados transformados en pirita, á cuyo fin recuerda un caso notable de fosilizacion, observado por Mr. Bonissent en el Departamento de la Manche, donde se halló un enorme tronco de roble, verticalmente implantado en un depósito de turba, cuyo interior no aparecia sino como madera descompuesta, pero la corteza se habia convertido en sulfuro de hierro, que conservaba perfectamente distinta la estructura del árbol. En un terreno tan moderno como es un turbal, que puede considerarse aún en vía de formacion, dice Mr. Tabarié, el observador casi sorprende á la naturaleza en el procedimiento que emplea para la transformacion: sábese, en efecto, que de los pantanos se desprende siempre ácido sulfhídrico, ya provenga de la descomposicion de las materias orgánicas, ya de manantiales sulfurosos; sabido es tambien que el hierro de pantanos es un cuerpo que se deposita abundantemente, y que proviene de la descomposicion del carbonato y del crenato; pues bien, sentados estos hechos, fácilmente se deduce la siguiente teoría: la corteza del árbol, por efecto de su capilaridad, absorbió primero el carbonato y el crenato de hierro en estado de disolucion, y despues fueron ambas sales transformadas en sulfuro insoluble por la accion del ácido sulfhídrico. Alega Mr. Tabarié que su teoría está de acuerdo con el procedimiento que se emplea en los laboratorios, donde para obtener primero el protosulfuro, se precipita por el hidrógeno sulfurado una sal de protóxido, y despues se forma el bisulfuro ó pirita marcial, tratando el primer sulfuro por un exceso de azufre, bajo la influencia de un calor fuerte. En la naturaleza, dice, el exceso de azufre lo suministra la descomposicion espontánea del hidrógeno sulfurado en contacto con el agua y el aire, y la accion del calor se sustituye con la de la electricidad, debida, segun ántes se ha indicado, á la formacion de las primeras partículas de sulfuro; expresando estas reacciones la siguiente fórmula:

$$FeO, CO^2 + 2HS + O = FeS^2 + CO^2 + 2HO.$$

No es del caso repetir aqui el razonamiento con que M. Tabarié de Grandsaigne se esfuerza en demostrar que la teoría de Pepys no explica satisfactoriamente la presencia de la pirita de hierro en los turbales: baste decir que se funda: 1.° en la dificultad de que en ellos preexista el sulfato de hierro en cantidad suficiente para producir la pirita que en tales depósitos suele hallarse; 2.° en que si el sulfato proviene de la oxidacion de un bisulfuro, este tendria que venir á su vez de un sulfato, lo cual sería encerrarse en un círculo vicioso; y 3.° en que los sulfuros al transformarse en sulfatos se hinchan, y por consiguiente se deforman y desagregan, lo cual no se compadece con la delicadeza de los detalles que conservan los cuerpos orgánicos transformados en pirita.

Se conoce otra teoría, segun la cual no es necesario que haya sulfato de hierro preexistente para que se produzca el sulfuro, ántes al contrario, la formacion de las piritas ha tenido lugar quizá en mayor número de casos, segun opina Ebelmen, mediante la reaccion de las materias orgánicas en descomposicion sobre los sulfatos alcalinos ó térreos contenidos en las aguas del mar, en presencia de limos ó tarquines ferruginosos. La fórmula de esa reaccion, no interviniendo más carbono que el de las sustancias orgánicas, sería

$$2Fe^2O^3 + 8(SO^3CaO) + 15C = 4FeS^2 + 8(CaO,CO^2) + 7CO^2.$$

en la cual, como se vé, el sulfato térreo que se introduce es el de cal, y en ese caso los $^8/_{15}$ del carbono de la materia orgánica se precipitan en estado de carbonato de cal; lo demas vuelve á la atmósfera convertido en ácido carbónico, y los 15 equivalentes de carbono que habia ántes de verificarse la reaccion, se combinan con 30 equivalentes de oxígeno.

Todas estas teorías, ideadas principalmente para darse cuenta de la manera como se han convertido en pirita de hierro algunos seres orgánicos sepultados entre las capas de sedimento, sirven tambien, no solo para explicar la presencia de dicha sustancia en los filones y otros yacimientos, y la que pudo diseminarse entre las rocas, cuando se hallaban en via de formacion; sino que tambien se admite que se haya producido en ellas despues de consolidadas, ya, como anteriormente se indicó, por la infiltracion de las aguas termales cargadas de sulfuro de hierro, ya por una série de transformaciones del sulfuro en sulfato, debidas á la accion oxidante del aire cuando quedaron en seco los terrenos, ó por su contacto con otros cuerpos. Estos sulfatos, arrastrados de nuevo al fondo de los mares ó lagos, ó bien penetrando por los poros y grietas de las rocas, se pretende que encuentran en ellas sustancias orgánicas que los vuelven á convertir en sulfuros; y así se reproduce el fenómeno y se reparte en las capas sedimentarias de todas las edades la pirita de hierro, que se supone ha ido viniendo del interior de la tierra.

Pero dejando á un lado las hipótesis más ó ménos admisibles que se han expuesto para explicar en determinados casos la presencia de la pirita de hierro en la naturaleza, vamos á citar otros que tienen mayor analogía con el que motiva esta nota; pero ántes será bueno indicar cómo se ha logrado producir artificialmente el bisulfuro de hierro en los laboratorios.

Prepárase en primer lugar calentando con precaucion el protosulfuro con la mitad de su peso de azufre; y Woehler lo ha obtenido cristalizado en octaedros pequeños de color de laton, mezclando óxido de hierro, azufre y sal amoniaco, y calentando la mezcla en un baño de arena hasta que adquiere una temperatura bastante elevada para volatilizar la sal amoniaco.

Tambien se produce el bisulfuro de hierro sometiendo el peróxido de dicho metal á la accion del hidrógeno sulfurado, á una temperatura superior á 100 grados; y si el óxido de hierro que se somete á la corriente del gas ácido sulfhídrico es cristalizado, entonces se obtienen cristales epigénicos de pirita (1).

Este es tal vez el procedimiento natural á que debe su orígen la pirita de hierro que suele formarse en los conductos y en las inmediaciones de los manantiales termales sulfurosos, como la que recogió Dufrenoy en Chaudes-Aigues, en el departamento del Aveyron, cuyos ejemplares, así como los encontrados por el ingeniero de minas M. François en las aguas de Bourbon Lancy, sirvieron al primero para poner de manifiesto la íntima relacion que existe entre la manera de formarse los filones y el fenómeno á que se deben las aguas minerales. Me inclino á creer, sin embargo, que tanto en los casos referidos por Dufrenoy, como en el observado en las márgenes del Miño, que ha motivado la comunicacion de D. Antonio Casares, y en otros muchos análogos ó de diferente especie que ofrece la naturaleza, la formacion de la pirita se debe á una operacion lenta en que intervienen las acciones electroquímicas unas veces, electro-dinámicas otras, como lo indica M. Tabarié, al dar su teoría de la fosilizacion. Y para probar este aserto con uno de los ejemplos á que se refiere Dufrenoy, voy á trasladar aquí lo que dice este autor en su *Tratado de Mineralogía* (2), cuando habla del yacimiento de la pirita de hierro.

«Al efectuar algunas reparaciones con objeto de aumentar el rendimiento del más caudaloso de los manantiales que constituyen las aguas minerales de Bourbon-Lancy, en el departamento del Saona y Loira, M. François reconoció que el conducto principal, cuya construccion data de la época romana, estaba obstruido por fragmentos de rocas y de mampostería, cubiertos unos y otros con una película de pirita de hierro análoga, por la manera como se habia verificado el depósito, á las ligerísimas capas de oro ó de plata que se obtie-

---

(1) *Traité de Chimie générale, etc.*, par J. Pelouze et C. Fremy.—Paris, 1865. T.e 3.e, pag. 179.

(2) Tomo 2.°, pag. 552, 2.ª edic., 1856.

nen en el dorado y plateado cuando se emplean los procedimientos de la galvanoplástica.

En algunos fragmentos la capa de pirita, aunque delgada, tenia bastante espesor para poder observar que se componia de varios depósitos sucesivos de dicha sustancia, que cubria todas las desigualdades de la roca y penetraba en sus hendiduras.»

El reputado geólogo M. Lecoq, en el libro titulado *Las aguas minerales consideradas en sus relaciones con la química y la geología* (1), para apoyar la opinion que sustenta de que los minerales de hierro, tanto los óxidos como los sulfuros, parecen tener un orígen acuoso, aun en los terrenos volcánicos, cita además de los casos ya mencionados de Chaudesaigues y Bourbon-Lancy, el manantial de Mandon, en St. Nectaire, de cuyas excavaciones vió sacar gran número de guijas de cuarzo, procedentes de la capa aluvial donde aparecen las aguas: dichas guijas, dice, estaban cubiertas con una película de sulfuro de hierro, en la mayor parte de ellas negro, pero algunas tenian reflejos metálicos, y el hierro piritoso parecia haberse depositado como el oro y la plata en los aparatos galvanoplásticos: que es exactamente lo mismo que algunos años ántes habia dicho Dufrenoy refiriéndose á los manantiales de Bourbon-Lancy: siendo de notar que Lecoq, Dufrenoy, Fournet, y cuantos mineralogistas ó geólogos han descrito este fenómeno, se han fijado en la circunstancia de que el barniz metálico natural que cubre los cuerpos encontrados en las inmediaciones de algunos manantiales, se asemeja al que se obtiene artificialmente por los procedimientos electro-químicos.

Que la pirita de hierro puede formarse sin la alta temperatura y la presion á que tal vez estuvo sometida la que aparece en las rocas hipogénicas y en los criaderos metalíferos, que se suponen procedentes de las partes mas profundas de la corteza terrestre, lo prueba la que se encuentra con mucha frecuencia en los turbales, de formacion sedimentaria contemporánea y tan somera que, por lo general, apénas están cubiertos con una ligera capa de tierra vegetal. El mismo caso á que

(1) Paris, 1864, pag. 261.

se refiere la nota del Sr. Casares, manifiesta que para que se produjera allí la pirita de hierro no eran necesarias ni una alta temperatura ni una gran presion, pero todavía es mas convincente el hecho observado en una mina antigua de la provincia de Oviedo, donde se encontró adherida á los maderos de la entibacion una masa mineral muy reciente, puesto que no podia ser sino posterior á la colocacion del estemple sobre el cual se habia formado; teniendo dicha masa la particularidad de estar compuesta de fajas sobrepuestas de pirita y de óxido de hierro.

Si alguna duda quedara, despues de lo dicho, acerca de la intervencion de las corrientes eléctricas en la formacion de la pirita de hierro que en determinadas circunstancias se encuentra en la naturaleza, se desvaneceria completamente recorriendo las páginas del excelente *Tratado de Electro-química* de Becquerel.

Dedica, en efecto, este eminente físico una buena parte de su libro á describir los medios por los cuales pueden reproducirse artificialmente una multitud de cuerpos que presenta la naturaleza, y entre ellos los sulfuros metálicos (1), por medio de un aparato sencillísimo, que consiste en un tubo corvo, en forma de *U*, en cuya parte inferior se coloca arcilla humedecida con cloruro sódico ú otra sal análoga. Para obtener con él los sulfuros metálicos se introduce en una de las ramas del tubo una disolucion de protosulfuro de potasio, y en la otra nitrato del metal cuyo sulfuro se quiere obtener, por ejemplo de cobre, plomo, plata, hierro, etc.; se sumerje despues una lámina de cobre en el nitrato y otra del mismo metal que forma la base de dicho nitrato en la disolucion del sulfuro potásico. Ya se reunan varios de estos tubos formando una pila, ya sea esta de un solo elemento, en ella se produce la doble corriente eléctrica que resulta, por una parte, de la reaccion que ambas disoluciones ejercen entre sí, y por otra de la del sulfuro potásico sobre la lámina del metal: y con estas corrientes basta para descomponer el nitrato, cuyo metal redu-

---

(1) *Elements d'Electro-Chimie.*—2.ª edit., Paris, 1864, pag. 358 y siguientes.

cido se deposita en cristales sobre el electrodo negativo, mientras que el metal de la lámina se combina con el azufre del sulfuro alcalino, descompuesto á su vez: el nuevo sulfuro metálico se deposita en cristales sobre el electrodo positivo, cuando la accion electro-química es lenta y prolongada.

Otro físico insigne, Mr. de la Rive, en su *Tratado de Electricidad teórica y práctica* (1), al dar cuenta de los trabajos de Becquerel, reconoce que este sabio, estudiando minuciosamente las circunstancias que en la naturaleza concurren para formar varios productos cristalinos, ha conseguido demostrar su orígen electro-químico, y lo que es más obtenerlos artificialmente: así es, dice, poniendo un ejemplo, que si en los turbales se forma con tanta frecuencia la pirita de hierro, consiste en que se crean allí una multitud de pares voltáicos que resultan del contacto de las materias carbonosas con diversos compuestos de hierro y principalmente con el proto-sulfuro.

Becquerel confirma el hecho ántes citado, de que es comun encontrar cubiertos de pirita de hierro los tubos que se emplean en conducir ciertas aguas minerales; y lo explica diciendo, que el proto-sulfuro de hierro se forma con un equivalente de hierro y otro de azufre, es decir, las mismas proporciones atómicas con que se hallan estos cuerpos en el proto-sulfato; y si esta sal se pone en contacto con cuerpos tan ávidos de oxígeno que puedan al mismo tiempo desoxidar lentamente el ácido sulfúrico y el protóxido de hierro, se forma el proto-sulfuro: citando con tal propósito el caso de haber encontrado M. Fournet cristales de proto-sulfuro de hierro en un pedazo de este metal, que habia servido para mantener el eje de una rueda hidráulica en su coginete: este se lubrificaba con materias grasas purificadas por medio del ácido sulfúrico, y sin duda la reaccion de dichas materias sobre este ácido iba dejando en libertad el azufre, que en contacto con el hierro, extraordinariamente dividido y diseminado entre las materias grasas, determinó la formacion del sulfuro; bastando algunos años, dice, para la produccion de los cristales, que atribuye á la lentitud con que se formó el compuesto (2).

(1) Tomo 2.°, pag. 505.
(2) Becquerel, loc. cit., pag. 363.

A una causa semejante se debe, segun el mismo autor, la formacion de la pirita sobre una herramienta encontrada entre los escombros de una antigua mina abandonada desde la época romana en Pont-Gibaud: el hierro, en contacto con las materias carbonosas provenientes de la descomposicion de las materias orgánicas, debió formar pares voltáicos que obraron como en los casos ántes citados: y al decir esto se refiere á todo lo que contiene su obra relativo á la produccion del sulfuro de cobre, de plomo, de plata, etc., que ya hemos resumido en breves palabras al describir el sencillo aparato con que los obtenia.

Diré tambien que Becquerel, al tratar de la obtencion de los sulfuros de varios metales, hace presente que el de hierro, por lo ménos el protosulfuro, es muy difícil de conseguir, por la prontitud con que se oxidan los elementos de que se forma; pero empleando el hiposulfito de potasa, en vez del protosulfuro de potasio, se ha logrado producir, aunque muy pequeños, cristales amarillos con brillo metálico; si bien se descompusieron prontamente por la accion del aire.

En cuanto á la marcasita, es decir, á la sustancia misma que aparece en la superficie de las guijas procedentes de la márgen derecha del Miño, remitidas por el Sr. Casares, Becquerel ha conseguido producirla artificialmente, cristalizada en dodecaedros pentagonales, abandonando á las acciones espontáneas una mezcla de sulfato de hierro, de sulfato de cal y de aceite, en proporciones indeterminadas, porque no fué su ánimo en un principio producir dicha sustancia. La operacion duró de cuatro á cinco años, y alguno de los cristales tenia dos milímetros de lado. (Pág. 363.)

Si se tienen en cuenta las circunstancias en que se han encontrado las guijas revestidas de pirita ó bisulfuro de hierro que ha remitido el Sr. Casares, se verá que hay grande analogía entre este caso, que ofrece la naturaleza, y el que artificialmente provocó Becquerel obteniendo cristales dodecaédricos de bisulfuro de hierro; puesto que en ambos se encontraron los mismos elementos, hierro, azufre, cal y materias orgánicas; y una vez disuelto el óxido de hierro del terreno en el ácido crénico, como oportunamente indica el Sr. Casares;

demostrada la existencia del hidrógeno sulfurado en las aguas de los manantiales, la formacion del protosulfuro es una de las reacciones químicas más sencillas y frecuentes. Admítase la posibilidad, que nadie ciertamente negará despues de las afirmaciones de Becquerel, de De La Rive y otros físicos, de que el concurso de todos esos cuerpos den lugar á corrientes eléctricas, y la identidad de ambos casos será completa.

Nada, pues, tan fundado como creer que la pirita de hierro que cubre las guijas de cuarcita de las márgenes del Miño se debe á una accion electro-química; porque lo acreditan experimentos concluyentes, y lo confirma la opinion de personas de gran saber, que al observar el mismo fenómeno en varios lugares, lo han atribuido por analogía á procedimientos galvanoplásticos naturales. Reconociendo la intervencion de las acciones electro-químicas en el caso de las Caldas de Orense, queda completa la razonada teoría emitida por el Sr. Casares, y se explica perfectamente la produccion natural del bisulfuro de hierro, puesto que con arreglo á ella, y con el auxilio de las corrientes eléctricas, es dado reproducir dicha sustancia en los laboratorios siempre que se quiera.

Madrid 15 de Enero de 1879.—*Manuel Fernandez de Castro.*

PARECIDO PROTECTOR EN LOS ANIMALES.

Las investigaciones y los experimentos tan profundos como exactos del eminente naturalista y filósofo Cárlos Darwin, y las teorías que de ellos necesariamente se deducen, están influyendo de una manera prodigiosa en el progreso de las ciencias naturales, y harán época en la historia de las mismas. El principio fundamental que establece la doctrina genealógica ó teoría de la descendencia en los reinos vegetal y animal, de que las formas son constantemente variables en el tiempo por la ley evolutiva que las preside, y que esta produce ó tiende siempre á producir la diferenciacion y el perfeccionamiento como resultado de la seleccion en la lucha por la existencia, explica satisfactoriamente y con claridad muchos de los fenómenos que en vegetales y animales observamos, ántes indescifrables, hoy aclarados sin dificultad.

Es de antiguo conocido el hecho de que muchos animales, principalmente insectos, se parecen de una manera sorprendente en color y forma á los objetos que los rodean, y que esta circunstancia los proteje en algunas ocasiones contra la persecucion de sus enemigos; y otras veces, aprovechando la misma ventaja, les facilita la asechanza y presa de sus víctimas. Estos casos frecuentes de parecido protector estaban considerados ántes como anomalías inexplicables, como hechos casuales ó juegos de la naturaleza. Pero desde que Darwin ha demostrado de una manera tan evidente é irrefutable, que ningun fenómeno de la naturaleza orgánica, ningun órgano, ninguna forma ni dibujo ó colorido característicos, ninguna propiedad del instinto, ninguna relacion entre especies y grupos de especies, pueden existir sin que ahora ó en épocas anteriores sean ó hayan sido de alguna utilidad para los individuos, ó para toda la familia á que pertenecen y en que se encuentran, desde que esto está probado y confirmado, es preciso buscar en todos los casos un significado, un objeto determinado, aun en las cosas á primera vista de poca ó ninguna importancia. No debemos, en su consecuencia, atribuir á mera casualidad el colorido característico de los animales, que los favorece en muchos casos para ocultarse á sus enemigos, y en otros para apresar con más seguridad su alimento; mas bien tenemos que atribuir este hecho al resultado de una seleccion natural, que obra sobre el color exterior del cuerpo del mismo modo que en su estructura interna.

La facultad de hacerse más ó ménos invisible es para muchos animales útil, para algunos esencial y necesaria, si no han de ser destruidos en poco tiempo y con facilidad por sus numerosos enemigos; aquellos tambien que persiguen á otros de que se nutren, tienen que estar conformados de modo que se hagan poco visibles en su presencia y aproximacion, pues no siendo así, la caza habia de espantarse y huir, dejando al animal acechador burlado y hambriento.

El color es en los animales con mucha frecuencia condicion decisiva para vencer ó sucumbir en la lucha por la existencia; por esto es que se observa en la naturaleza una propension manifiesta á producir coloridos tales en los individuos, que los ayuden del mejor modo posible para ocultarse en unos casos como para perseguir en otros. Encontramos, en efecto, que las fieras que viven en los desiertos son del color del desierto; los ligeros y elegantes antílopes de pelo pardo son semejantes en esto á los arenales que frecuentan; el camello está formado tambien, y de una manera notable, para las localidades que habita; los pájaros de las soledades, alondras, codornices, chotacabras, cogujadas y las terreras, iguales en color al polvo de los caminos, copian de una manera exacta el colorido y la apariencia de aquellos terrenos y sitios en que se encuentran; y por último, el leon ha de ser casi invisible en el desierto, cuando escondido entre las piedras y las rocas de su mismo color, aguarda el paso próximo de su víctima, y cae sobre ella para devorarla.

El reino animal en la zona polar nos proporciona igualmente ejemplos de lo que la naturaleza hace por producir colores protectores: en la region del hielo y de las nieves, los animales son generalmente blancos, como el oso polar, el armiño, la liebre de los Alpes, etc. Tambien se observa muchas veces que una misma especie tiene colorido diferente, segun la estacion del año y localidad que habita; la ardilla, la liebre comun, la marta y otros mamíferos, en invierno son más ó ménos pardos ó blancuzcos, y aun blancos por completo en sitios elevados y cubiertos de nieve, y en el verano se visten de pelo más oscuro; entre las aves, la polla de nieve (Lagopus alpinus) durante el verano tiene un plumaje pardo manchado de rojo, poco reparable y muy parecido al color de los terrenos pedregosos y llenos de líquenes en que se encuentra, pero en invierno se cubre toda de pluma blanca como la nieve que la rodea.

En los campos abundosos de hierba, y en los sotos, bosques y arboledas, predominan los colores verde y pardo en todos sus matices y graduaciones en los animales de diversas clases que los habitan, semejándose por esto á las hojas frescas, á las enfermas y secas y á las ramas de los vegetales: no parece sino que existe aquí y se descubre como en los demas casos ántes citados, una cierta adaptacion á las condiciones exteriores en que estos séres orgánicos están obligados á vivir. Las liebres y los conejos de campo son de ordinario de color pardo manchado de blanco y rojizo, lo cual les favorece para ocultarse al abrigo de las matas; multitud de pájaros tienen la pluma verde, parda y de otros colores indeterminados, que los hacen casi invisibles en las enramadas y en el bosque; el mismo canario, amarillo en la domesticidad, es verde casi todo en su estado libre y silvestre; los buhos y lechuzas, las chotacabras y otras aves nocturnas tienen cierta apariencia oscura y manchada, que de dia apenas si se puede reparar en ellas, y que de noche les favorece para no hacerse notar en sus correrías en busca de insectos, larvas y pequeños roedores; en las selvas tropicales, donde el follaje nunca desaparece, se encuentran grupos enteros de aves de color verde, como son papagayos y cotorras, palomas y pájaros de diversas familias, que participan más ó ménos de todos los matices de este color.

Los reptiles nos ofrecen tambien frecuentes ejemplos de colorido protector, como puede observarse en culebras y lagartos, cuyos colores y manchas los hacen invisibles cuando en estado de quietud se encuentran en el suelo, cubierto de hierba, musgo ó líquenes; la víbora de los arenales, comun en la parte meridional de España, tiene un tinte claro cuando se arrastra por las arenas, y más ó ménos oscuro si está escondida entre matas y en el bosque sombrío. Pero el caso más notable que puede presentarse de color protector se encuentra en el camaleon, reptil tan frecuente en las playas de San Lúcar de Barrameda y en otras localidades de Andalucía; su color pardo claro de ordinario, varia á voluntad del animal, que con sus fuertes pulmones se infla unas veces hasta hacerse trasparente, otras disminuye la cantidad de aire y distribuye su reparticion en el cuerpo, de tal modo que produce á su capricho, y quizá por necesidad, cambios frecuentes de colores, aceptando, segun la opinion general, aquellos de los objetos á que se aproxima, y con los que se confunde.

La clase de los peces no está bien estudiada bajo este punto de vista; sin embargo, encontramos que los pleuronectes, palusas, rayas y otros tienen idéntico color que el de los cantos y arenas del fondo del mar, donde acostumbran á detenerse. Lo mismo puede decirse de las arañas, semejantes con frecuencia en colorido á los sitios que recorren, ó donde se ocultan para con sus redes atrapar los insectos; de los crustáceos, hialinos y trasparentes muchas veces, y por esto apenas visibles dentro del agua, y por último, de los moluscos y gusanos, de coloridos y formas protectoras, en repetidas ocasiones exactamente iguales al medio y á los cuerpos que los rodean.

Existe ademas otra clase de animales numerosísima en individuos, especies, géneros y familias, que por encontrarse en todas partes, en la tierra, en el agua, en el aire, adheridos á otros organismos ó viviendo parásitos sobre los mismos y en su interior, por sus formas y coloridos variados y caprichosos, por su curiosa organizacion y funciones vitales, por las metamórfosis que los distinguen, por sus intintos y costumbres sorprendentes, por su fácil adaptacion á los medios y lugares donde habitan, y últimamente, por su parecido protector más frecuente y admirable que en las demas clases, merece ser tratada aparte y con preferente atencion: me refiero á los insectos. En estos séres, pequeños siempre, y muy frecuentemente apenas perceptibles, encontramos numerosos ejemplos del parecido protector, desarrollado y perfeccionado de una manera verdaderamente portentosa; no parece sino que la seleccion natural ha querido esmerarse en los insectos con preferencia para producir en ellos formas, coloridos, manchas y rasgos para confundirlos y ocultarlos entre los suelos donde viven y objetos que los rodean, reemplazando por este medio otros de defensa de que en general carecen.

Los huevecillos de los insectos cuando están libres y no protegidos por aparatos especiales, tienen una forma más ó ménos redondeada, y se asemejan á berrugas y excrescencias de los cuerpos donde la hembra los ha depositado; su color suele ser tambien el mismo del sitio en que se encuentran. Las larvas ú orugas son muchas veces de un pardo más ó ménos intenso cuando atacan á los troncos, raíces y demas cuerpos de ordinario de tintes oscuros, y de color verde si se alimentan de las hojas; pudiéndose citar infinidad de ejemplos en confirmacion de estas aseveraciones. Cuando el insecto, despues de todas sus metamórfosis, ha pasado á su estado perfecto, varía mucho respecto á su parecido protector segun el órden á que pertenece, pudiéndose, sin embargo, dar como regla general que la forma y el color son protectores en un número muy crecido de casos. Muchos pequeños coleópteros y polillas que viven en la corteza de los árboles viejos, son semejantes hasta confundirse con ella por su colorido ceniciento, nebuloso y manchado; multitud de otros insectos herbívoros tienen tintes verdes y pardos en diversas graduaciones, semejantes á las hojas de varias especies y en distintos estados de su vida ó cuando secas; los que se encuentran en el suelo no es raro el que sean blancos si en la arena, morenos si en la arcilla, negros si en el basalto; y cuanto á sus formas, además de muchas parecidas y aun idénticas á los objetos que frecuentan, es notable lo que sucede con algunos coleópteros, que tienen la costumbre ó instinto, cuando se acerca alguien á ellos, de desprenderse de la rama ú hoja á que están asidos y se tiran al suelo, retirando y contrayendo al mismo tiempo las patas y antenas, por cuyo medio se trasforman en una bolilla que entre la tierra y las piedrecillas se confunde y pierde, siendo entonces muy difícil descubrir y obtener el insecto, aun cuando se busque con el mayor cuidado.

Respecto á los lepidópteros, la distribucion de los colores en sus alas, con relacion al principio del parecido protector, es de grande interés. Las mariposas diurnas ostentan siempre hermosos y brillantes colores en la cara superior de sus cuatro alas, mientras que en la inferior el colorido es constantemente sencillo, poco vistoso y aun oscuro; las nocturnas, por el contrario, tienen los colores más vivos de ordinario solo en las alas traseras, las delanteras son pardas y apenas visibles: sin duda esta reparticion de colores tiene un fin protector, pues que las diurnas, cuando se posan, sostienen levantadas sus alas, en cuya posicion ocultan al insecto los colores oscuros del lado de abajo á sus enemigos, que podrian ser fácilmente atraidos por la brillantez de la parte superior; mientras que las mariposas nocturnas en estado de reposo extienden sus alas horizontalmente , ó envuelven su cuerpo de tal modo, que sólo presentan á la vista lo oscuro de las alas superiores. Muchos casos concretos pudieran citarse como ejemplos de parecido protector entre las especies de los lepidópteros, pero bastará con uno por ser quizás el más notable. Nos lo ofrece la Kallima paralecta ó mariposa hoja, de la isla de Sumatra: en su parte superior es de color púrpura con una faja trasversal naranja, de suerte que volando aparece en extremo vistosa; pero la cara interior de sus alas es de colorido pardo oscuro con vetas rojizas y amarillas, exactamente igual en forma y color á una hoja seca hasta en su nervacion, de tal modo que cuando se posa en las plantas del monte, se escapa á la vista más perspicaz. En el órden de los ortópteros descubrimos tambien casos frecuentes y notables de este fenómeno. Los acridios ó langostas y saltamontes, las locustas ó chicharras, algunos grillos, etc., son semejantes en color al terreno y sitios en que se encuentran, y otras veces casi iguales en forma y color á las hojas de los vegetales de que se alimentan; citándose como ejemplo maravilloso varias especies del género Pterochroza, que habitan en el Brasil, cuyas alas superiores, por su forma, colorido y nervacion, pueden bien confundirse con una hoja marchita ó medio seca; y como ellas en el estado de quietud del insecto cubren por completo las inferiores, que tienen colores fuertes, vienen á constituir un parecido protector de lo más admirable.

Pudiera decirse mucho más en confirmacion del hecho de que existe en el reino animal un parecido protector, y de que este fenómeno no es casual, sino resultado natural del gran principio de la adaptacion; pero con los casos citados y las deducciones que de los mismos se desprenden, basta á mi objeto, que es sólo llamar la atencion de los zoólogos españoles sobre esta clase de estudios, de mera curiosidad para algunos no iniciados en la filosofía natural, aunque realmente de mucho interés científico, y á que en la actualidad se fijan con grande atencion y empeño naturalistas alemanes, ingleses y de otras naciones de la culta Europa.

Estéban Boutelou.

VARIEDADES.

Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Programa para la adjudicacion de premios en el año de 1880.

ARTÍCULO 1.° La Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporacion, los temas siguientes:

I.

«Plan *razonado y minucioso de un* Tratado completo de Matemáticas puras, *en el cual se presente esta ciencia constituida, no como ahora lo está, por lo regular, en el órden histórico ó de invencion, sino como aspira á estarlo y debe constituirse, al fin, de conformidad con los principios de la lógica.*»

Considerando que en Matemáticas es indudablemente mucho lo que se ha trabajado y conseguido, y mucho tambien lo que falta todavía por adelantar; que hay abundante copia de materiales reunidos y perfectamente elaborados, pero que existe gran divergencia de pareceres y procedimientos, cuando de concertarlos y distribuirlos se trata, para componer con ellos una entidad armónica; lo que desea y pide la Academia es, que respetando cuanto merezca respetarse y conservarse, y sin prescindir, por afan irreflexivo de innovar y reformar, de lo ya con mesura y buen acierto edificado, se exponga con claridad y precision el método preferible en lo sucesivo para constituir, enseñar y aprender tan vasta é importantísima ciencia. Pero los concurrentes al certámen no se limitarán á esto solamente; á poner de relieve la conexion de las varias partes de las matemáticas, la filiacion más natural y sencilla de sus proposiciones fundamentales, y de las subalternas de mayor trascendencia, y la armonía del conjunto, sino que cuidarán de indicar la mejor manera de convertir el Plan en verdadero Tratado de la ciencia, utilizable en la enseñanza, ora con citas de autores conocidos, de cuyas obras puedan copiarse ó extractarse las teorías parciales que, intercaladas en el órden y lugar oportunos, han de componer el nuevo libro, ora con sucintas disertaciones sobre aquellos puntos de doctrina que consideren de importancia suma, y no juzguen bien expuestos, razonados y discutidos en ninguna publicacion anterior.

II.

«*Estudio sobre el calor solar y su aprovechamiento y aplicaciones.*»

III.

«Pomona de una ó más provincias de España, ó sea descripcion cien-»tífica y cultivo de los árboles frutales conocidos en la localidad, con el »estudio de las enfermedades y accidentes á que están expuestos, y medios »de evitarlos y destruirlos.

»Acompañarán á la obra los dibujos de cada una de las variedades »descritas, haciéndolo, ya del fruto solo, ya tambien de la rama con hojas »ó con flores cuando se crea necesario.»

2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mencion honorífica.*

3.° El *premio* consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicacion; una medalla de oro, de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesion pública entregará el Sr. Presidente de la Corporacion á quien le hubiese merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribucion pecuniaria al mismo autor ó concurrente premiado de 1.500 pesetas; impresion por cuenta de la Academia, en la Coleccion de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada; y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

4.° El *premio* se adjudicará á las Memorias que no solo se distingan por su relevante mérito científico, sino tambien por el órden y método de exposicion de materias y redaccion bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicacion.

5.° El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del *premio* y adjudicados del mismo modo; y en la impresion de la Memoria coleccionada con las de la Academia y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

6.° El *accesit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas, y que versen sobre los mismos temas: ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporacion, á las impuestas para la adjudicacion ú obtencion del premio.

7.° La *mencion honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accèsit*, que se entregará tambien en sesion pública al autor ó concurrente agraciado, ó á persona que le represente.

8.° La mencion honorífica se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algun concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicacion por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accesit.*

9.° El concurso quedará abierto desde la publicacion de este Programa en la Gaceta de Madrid, y cerrado en 31 de diciembre de 1880, hasta cuyo dia se recibirán en la Secretaría de la Academia cuantas Memorias se presenten.

10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que sa-

tisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó estranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporacion.

11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latin.

12. Las Memorias que se presenten optando á premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicacion del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta, que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, tambien cerrado, dentro del cual constarán el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

13. De las Memorias ó pliegos cerrados el Secretario de la Academia dará á la persona que los presente y entregue un recibo, en que consten el lema que los distingue y el número de órden de su presentacion.

14. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accesit*, se abrirán en la sesion en que se hubiese acordado otorgar á sus autores una ú otra distincion y recompensa; y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

15. Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mencion honorífica*, no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decision de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la Gaceta de Madrid los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas; y, en el improrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certámen, y otorgarán por escrito la vénia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Trascurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden, sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distincion que legitimamente les corresponde.

16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accesit*, ni con *mencion honorífica*, se quemarán en la misma sesion en que la absoluta falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiese decidido. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mencion honorífica*, cuando en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubiesen concedido permiso para abrirlos.

17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporacion, podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado: como modelos de construccion, atlas ó dibujos complicados de reproduccion difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certámen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las *Memorias* que respectivamente les correspondan.

Madrid 20 de Febrero de 1879.=El Secretario perpétuo, *Antonio Aguilar y Vela.*

Reorganizacion del Museo de historia natural. *Resúmen de* *una leccion de Mr. E. Perrier, profesor.*—Os habeis tomado el trabajo de reunir en este vasto establecimiento, los animales y plantas de todas las partes del globo: esto no es sólo para que se hallen colocados más ó ménos metódicamente en escaparates ó cajones, sino para utilizar tan inmensos materiales, pues el Museo es antes que todo un establecimiento de enseñanza. Además de los servicios que diariamente presta á los naturalistas de profesion de la Francia y del extranjero, para quienes deben estar y están ámpliamente abiertas las colecciones, además de la enseñanza superior, de la enseñanza de adelantamiento cuya tradicion ha recibido y cuyo nivel debe mantener, puede ser quizá la gran escuela experimental de las ciencias naturales. Aquí deben formarse los naturalistas: en sus laboratorios, cada uno en la parte que le corresponda, deben venir á iniciarse en los métodos de investigacion, familiarizarse con la multitud de organismos por medio de los cuales se manifiesta la vida sobre el globo: estos laboratorios deben estar tambien por consiguiente ámpliamente abiertos para la juventud estudiosa; son los verdaderos laboratorios de los estudios superiores de las ciencias naturales, y todos con el mismo título. A ellos tambien deben venir todos aquellos para quienes las ciencias naturales son de algun auxilio en el ejercicio de su profesion; y puesto que ha sido preciso reedificar la Escuela de Farmacia y agrandar la de Medicina, ha sido tambien acertado y económico hacerlo á la proximidad del Museo, cuyas estufas, Jardin botánico y colecciones les deben quedar abiertas.

Pero no basta indicar lo que debería suceder, y contentarnos con decir como Mr. Prudhomme: «Sería de desear que los hombres fuesen mas virtuosos;» deben tambien buscarse los medios de realizar lo que se cree que debe suceder.

Aunque abramos nuestros grandes laboratorios y nuestras colecciones, como es nuestro mas vivo deseo, nuestra enseñanza no podrá ser mas de lo que es: no tendremos, y es bastante, mas que discípulos y no educandos, mientras que el Estado crea poder prescindir de nosotros al reclutar su personal docente, en la educacion de todos aquellos á quienes es útil un conocimiento más ó ménos estenso de las ciencias naturales. Se ha pensado en certificados de inscripcion exigidos á los candidatos para ciertos grados; pero todo ello no es suficiente. Hay que encargarse de investigar qué medios prácticos puede emplear para utilizar nuestra buena voluntad.

Hay, señores, otro punto de vista en el cual debemos colocarnos.

Como ya lo habia presentido la Convencion, el Museo puede y debe prestar servicios reales á la agricultura y á la industria; quizás no hay ninguna de sus cátedras que pueda dejar de ser apta para ello; la que tengo el honor de ocupar parece bajo este punto de vista una de las ménos favorecidas, y sin embargo, examinándolo despacio se cambia de opinion.

Todos saben la importancia del papel que desempeñan en la naturaleza los seres microscópicos. Desde las admirables investigaciones de Mr. Pasteur, mi sabio maestro, á quien debo dar gracias por el honor que me dispensa asistiendo á esta leccion, es sabida la parte que toman en la descomposicion de las sustancias orgánicas, esto es, en la fermentacion. Algunos de estos seres, son sin duda de naturaleza animal, al ménos dudosa: se comprenden entre los infusorios que caen bajo nuestro dominio.

Las esponjas son un artículo importante de comercio; seria conveniente tratar las cuestiones interesantes relativas á ellas, procurar los medios de cultivarlas, de aclimatarlas en nuestras costas argelinas y proporcionar así á nuestra colonia una nueva fuente de prosperidad.

Los escelentes trabajos de Mr. Lacase Duthiers, sobre el coral, han llegado á ser clásicos: debian servir de base para una legislacion nueva acerca de la pesca del coral, que hubiera debido hacer pasar á la Argelia el monopolio de un nuevo comercio. ¿No sería posible establecer criaderos de coral? En las costas del Mediterráneo se come un gran número de animales, cuya conservacion sería útil asegurar, estudiando su desarrollo y favoreciendo su reproduccion.

Varias veces he sido consultado acerca de los enemigos de los bancos de ostras ó almejas: hay aquí una fauna interesante que estudiar y dar á conocer á los cultivadores; y por otra parte, la ostricultura está muy lejos de haber dicho su última palabra.

Entre los gusanos, contamos las sanguijuelas y los helmintos, que generalmente son tan peligrosos para el hombre y los animales domésticos. La historia de varios de ellos los presenta como los enemigos mas terribles: el gusano del hígado de carnero, por ejemplo, está lleno de misterios, y este parásito, sin embargo, mata cada año centenares de miles de tan útiles animales.

Hé aquí por consiguiente una série de servicios que podemos prestar, que hay el derecho de exigirnos, sin que el personal del Museo se distraiga de las investigaciones de órden teórico, que son la gloria de esta gran institucion.

Podemos ser considerados como una gran comision consultiva, que debe estar dispuesta á contestar á las preguntas relativas á ciencias naturales que interesen á nuestra agricultura, á nuestro comercio y á nuestra industrìa.

Por esta razon sin duda, el Museo ha permanecido por espacio de mucho tiempo fuera del Ministerio de Instruccion pública; por esto sin duda la Convencion, considerando los servicios que debia prestar á varios departamentos, le habia colocado bajo la inmediata proteccion de los representantes de la nacion.

Y sin embargo, Señores, permitidme resumir y mejor definir, tomando esta cátedra como ejemplo, el papel que debe desempeñar en nuestra organizacion científica nuestro Museo de Historia natural: permitidme deciros lo que hemos hecho, mis colaboradores y yo, para tratar de aproximarnos á nuestro ideal.

Hay en el Museo tres órdenes de servicios distintos en apariencia, pero que para que puedan utilizarse lo que deben, tienen necesidad de estar concentrados en las mismas manos.

1.° El servicio de las colecciones.

2.° El servicio de la enseñanza.

3.° El servicio de las investigaciones científicas.

Nuestras colecciones, Señores, responden á una necesidad evidente. Todas las grandes naciones, y aun las pequeñas, han tratado de imitarlas, hemos sido superados en alguna parte; pero podemos afirmar que en ningun Museo extranjero, aun considerado en su conjunto, hay tantas riquezas acumuladas como en el nuestro.

Debemos reunir no solamente todas las especies conocidas, sino tambien todas las modificaciones de que son susceptibles, y establecer por medio de ejemplares, de procedencia auténtica, la reparticion geográfica y geológica.

Aun cuando á esto solo limitáramos nuestra ambicion, habíamos ya satisfecho á una necesidad del hombre, la de conocer á sus compañeros sobre el globo. Muchos naturalistas han sido considerados como hombres útiles solo por haber nombrado y descrito especies, sin otra mira; nosotros debemos hacerlo tambien así con la mayor exactitud; debemos recojer y conservar todos los tipos de animales que han servido para publicaciones, someter á una crítica minuciosa todos los nombres que aparecen en la ciencia, de modo que se eviten en lo posible que se usen duplicados y equivocadamente; debemos publicar el resultado de nuestras investigaciones acerca de este punto, de modo que se forme un inventario fiel y completo de los animales conocidos en una época dada, inventario que solo habrá despues que completar.

Este trabajo de nomenclatura y crítica, llevado al vasto dominio nuestro, no deja de ofrecer, Señores, cierta grandeza. Linneo y Lamark le deben una buena parte de su celebridad. Pues bien: ya lo hemos emprendido. Mr. Bertin lo ha terminado respecto á muchas familias de Acéfalos, los Tubícolas, los Mias, los Solen, las Telinas, las Psammobias: su memoria sobre las Telinas está impresa, la relativa á las Psammobias está ya en mi poder para los archivos del Museo: Mr. Bertin ha terminado casi el estudio de los Donax: Mr. Poirier ha estudiado tambien los Pólipos hidrarios, los Moluscos de la familia de los Strombus y la de los Murex. Ha reunido un gran número de datos acerca de la historia de los Helmintos, y sus investigaciones sobre los Gasterópodos se publicarán á fines del año. Yo he publicado un nuevo trabajo de revision acerca de las estrellas de mar, y mis investigaciones sobre los gusanos de seda han hecho llegar á mi laboratorio una cantidad de materiales que me imponen todavía una pesada tarea.

Pero vamos mas adelante todavía. A medida que avanzamos en nuestro estudio metódico de las especies, de su reparticion geográfica y geológica, se precisan los problemas, y esperamos que nuestra obra comun habrá llevado un contingente de algun valor para la solucion de la gran cuestion de las especies, de su variabilidad, y de las causas que presiden á su diseminacion. Para atacar de esta manera el problema, se necesita un Museo como este. Hemos debido emplear todos nuestros esfuerzos para completar las séries que han sido objeto de nuestros estudios; así lo hemos hecho, hasta el punto de resultar un déficit de 4000 francos en nuestro presupuesto.

Paso á tratar del servicio de la enseñanza. Creo, Señores, que es indispensable la enseñanza tal cual la practicamos en el dia. Es útil que todos los años, cada uno de los jefes de servicio del Museo exponga en todos sus detalles algunas de las grandes cuestiones que se refieren á la historia de los animales cuyo estudio debe hacer. Es decir, que los títulos de jefe de servicio ó de administrador, y el de profesor, son absolutamente inseparables del Museo. El período de curso es por otra parte para el profesor un período de excitacion intelectual, durante el cual las ideas se clasifican, se agrupan, se originan otras nuevas, se ven á mas altura todas las partes que le están encomendadas, se aprecian mejor las necesidades; durante el cual se traza el programa de sus investigaciones futuras, y de las que puede indicar á los alumnos que le rodean.

Pero esta forma de enseñanza es insuficiente por sí sola. Es preciso agregarle la enseñanza experimental del laboratorio, que puede medirse segun las fuerzas de cada uno, y en que los alumnos mas cerca del maestro pueden sacar mas provecho de lo que sabe, y aun escitarle á las investigaciones, en que por último pueden utilizarse, segun las necesidades de los estudiantes, los materiales considerables de que dispone este gran establecimiento.

Por esto, Señores, no he descuidado intercalar con mis lecciones las conferencias del laboratorio, y he autorizado á uno de mis ayudantes para trabajar con algunos acerca de las cuestiones que se refieren á este servicio. Desgraciadamente, los recursos con que hasta ahora he podido contar han sido demasiadamente limitados para dar á esta parte de la enseñanza todo el desarrollo que hubiera querido.

Faltan las investigaciones. Debemos, Señores, hacer adelantar á la ciencia, no solo por las nuestras, sino tambien por las que dirijimos ó provocamos á nuestro alrededor. Deben igualmente preocuparnos la ciencia pura y sus aplicaciones; pero los resultados son necesariamente independientes de nuestra voluntad.

No quiero hablar de mis investigaciones personales; pero puedo decir que ya ha sido digno de constituir una tésis para el doctorado de uno de los profesores de la Facultad de ciencias un trabajo importante, casi enteramente hecho en el laboratorio, y por medio de los ejemplares tomados en los duplicados de una coleccion; y confio en que la Facultad los aceptará. Otras varias tésis están preparándose en el laboratorio (1).

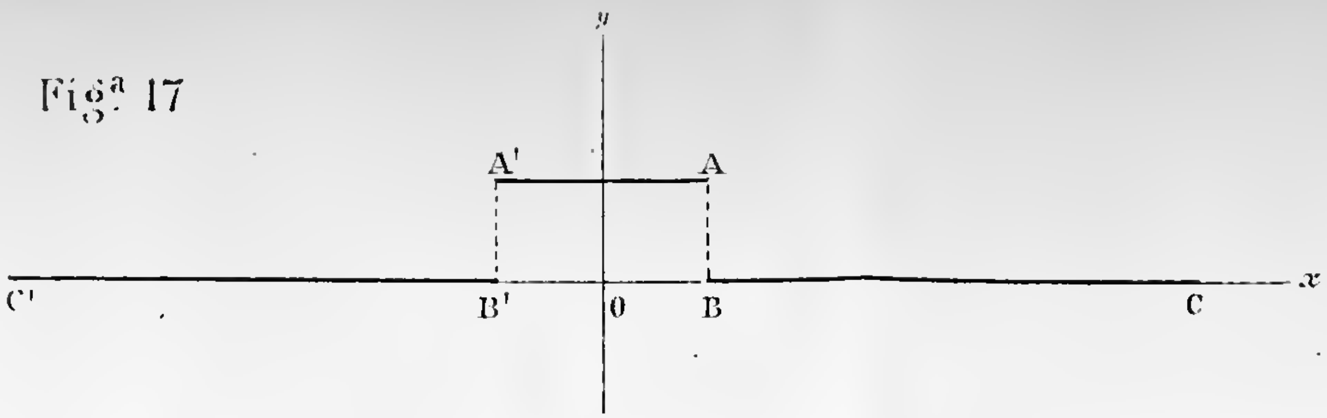
Por último, para explicar claramente mi intencion de no descuidar la parte de aplicaciones, he dirijido todos mis esfuerzos á establecer un servicio de helmintología; desgraciadamente, una larga enfermedad, los cambios causados por la Exposicion, y por último, el haberse agotado el presupuesto del arquitecto, han venido á dificultar este proyecto, que estoy muy lejos de abandonar.

Creo, Señores, que el Museo comprendido y conducido así vale la pena de que se interesen por él; pero observad que todos nuestros esfuerzos quedarian en parte paralizados, si el gobierno no viniese en nuestro auxilio por medio de una reforma *cuidadosamente arreglada* de todo nuestro sistema de enseñanza, si no procurase que todas las partes de nuestra enseñanza superior tuviesen su lugar claramente determinado, claramente definido.

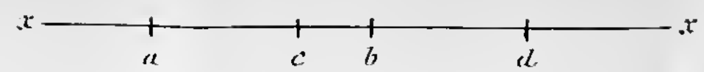
Esta es, Señores, una obra considerable; pero no superior á las fuerzas del gobierno que tiene la Francia, y que ha recibido el mandato de restaurarla. Por todas estas reformas que van al fondo de las cosas valerosa é imperturbablemente seguidas, el gobierno de la República se atraerá el reconocimiento de todo el país, porque habrá verdaderamente fundado dos cosas: la enseñanza primaria obligatoria para todos; la enseñanza superior obligatoria para todos aquellos que quieran tomar parte en la direccion de los negocios públicos, y no tengan el derecho de permanecer estraños al gran movimiento de ideas que se verifica en esta segunda mitad de nuestro siglo.=*Edmond Perrier.*

(1) En efecto, dicha tésis, la del Dr. Mr. Camilo Viguier, ha sido aceptada por la Facultad de Ciencias de Paris, como tésis del Doctorado de Ciencias naturales.

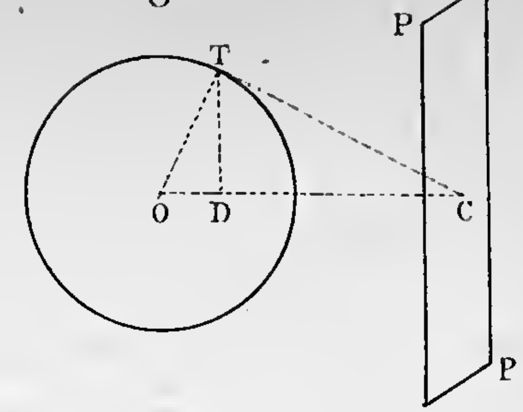
Figª 17



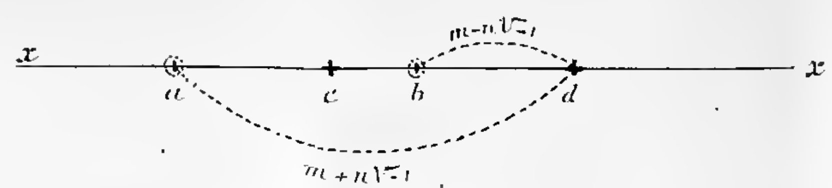
Figª 21



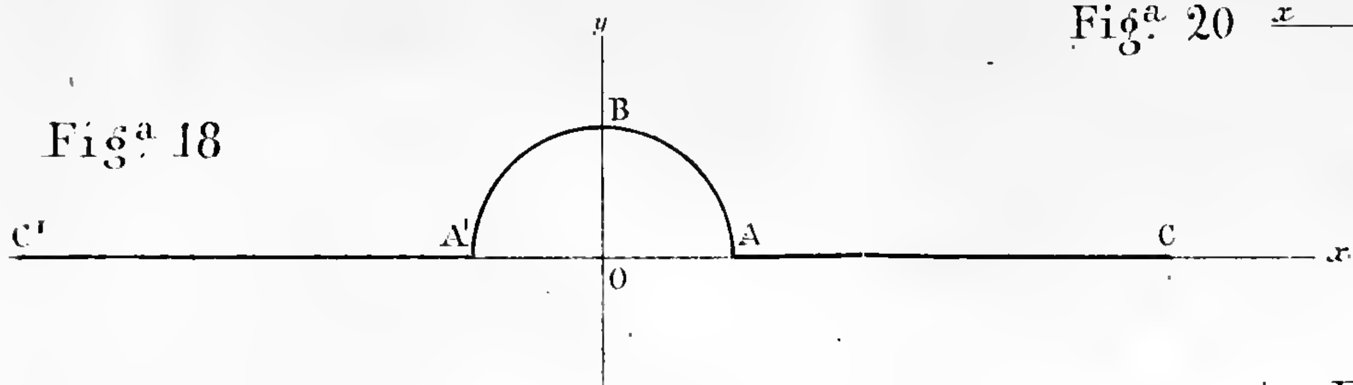
Figª 25



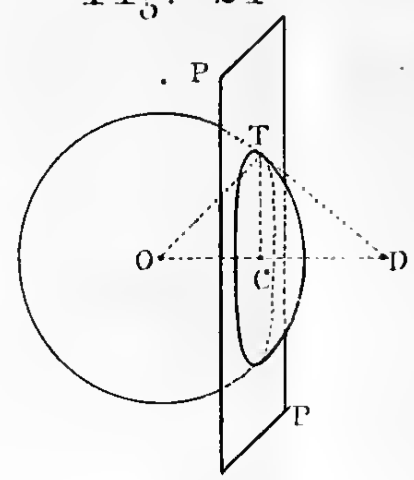
Figª 20



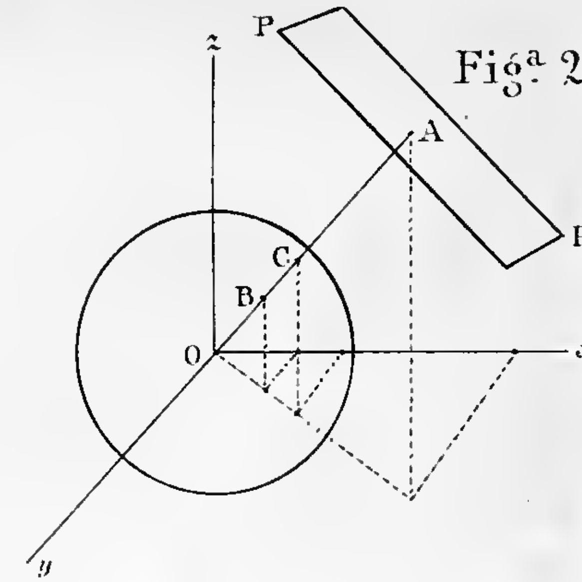
Figª 18



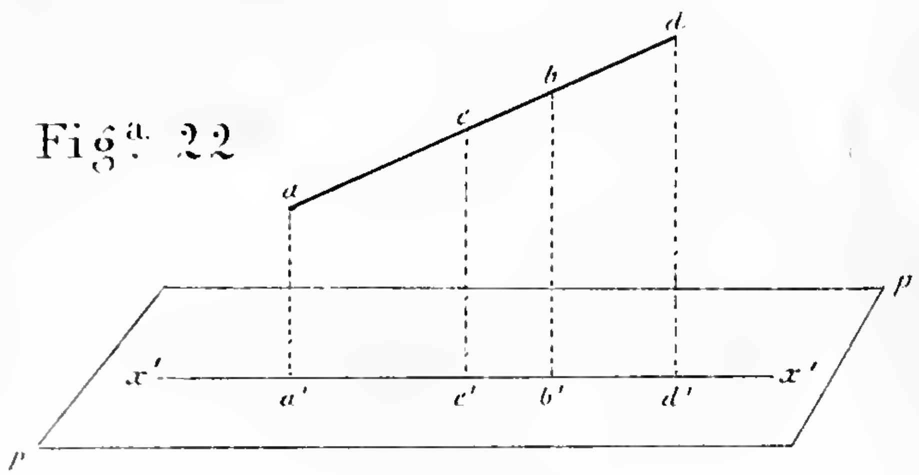
Figª 24



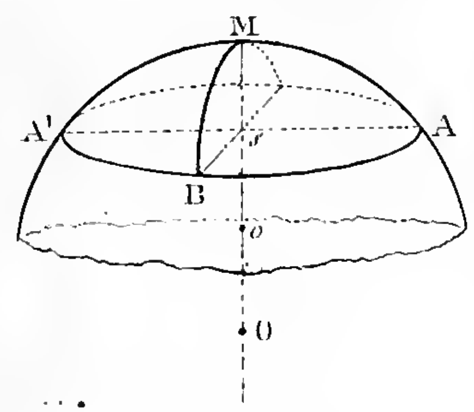
Figª 26



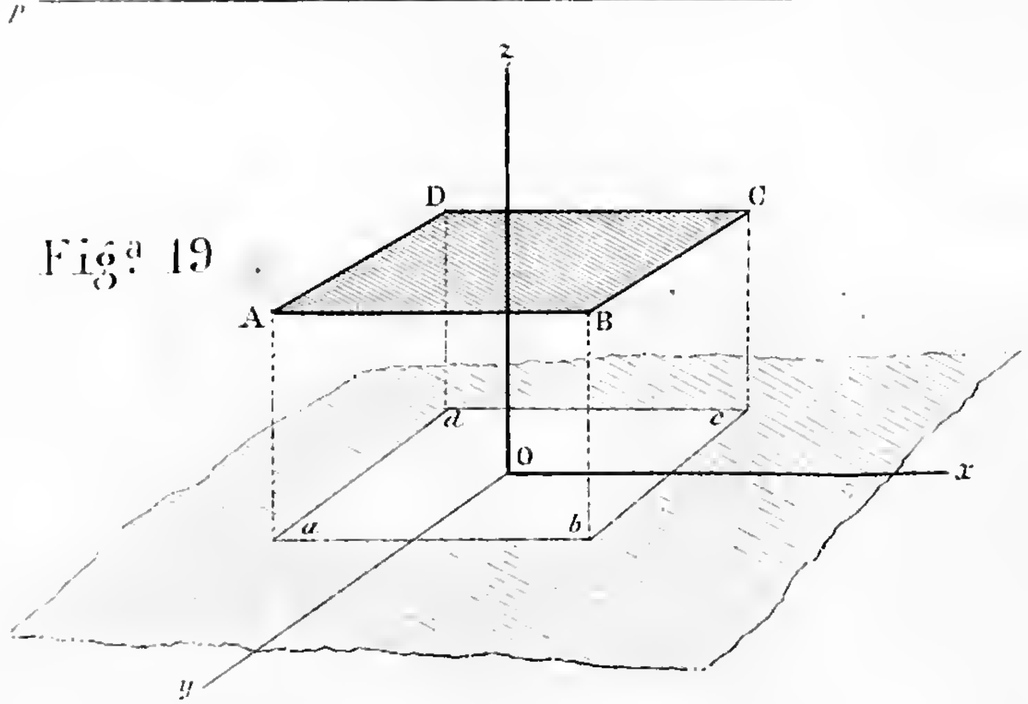
Figª 22



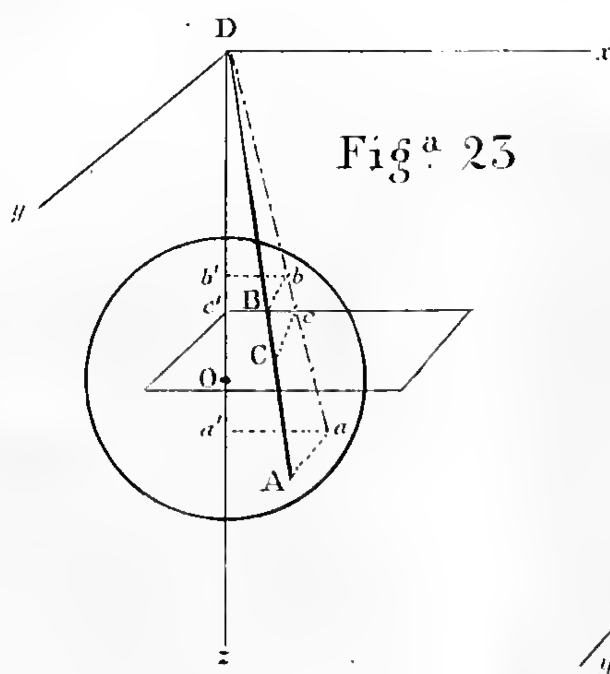
Figª 28



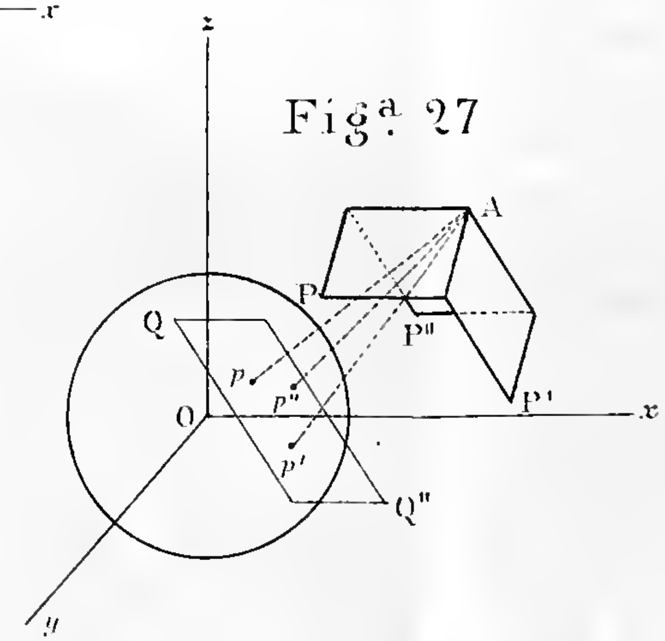
Figª 19



Figª 23



Figª 27



Figª 27 bis